

# УРОВНИ ЭНЕРГИИ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВОДОРОДОПОДОБНЫХ АТОМОВ

*Р. Н. Фаустов*

Объединенный институт ядерных  
исследований, Дубна

В работе сделан обзор современного состояния квантовой теории простейших двухчастичных систем—водородоподобных атомов. В качестве основы такой теории использован трехмерный квазипотенциальный метод Логунова и Тавхелидзе в новой релятивистски инвариантной формулировке, предложенной автором. Наиболее подробно рассмотрены поправки к уровням энергии, связанные с учетом эффектов структуры и движения ядра, уровни энергии, позитрония и релятивистские поправки к магнитному моменту атома. Проведено сравнение теории с новейшими экспериментальными данными.

The work contains the review of the present status of the theory of the simplest two particle systems — the hydrogen-like atoms. As a foundation of such a theory the three-dimensional quasipotential method of Logunov and Tavkhelidze is used in the new relativistically invariant formulation, proposed by the author. Most attention is paid to the energy level corrections due to nuclear structure and motion effects, the positronium energy levels and the relativistic corrections to the atomic magnetic moment. The comparison of the theory with the most recent experimental data is carried out.

## В в е д е н и е

Одной из простейших и наиболее полно разработанных областей применения квантовой механики является теория водородоподобных (ВП) атомов. Сюда относятся атомы водорода ( $e^-p$ ), мюония ( $e^-μ^\pm$ ), позитрония ( $e^-e^+$ ), мюонный и пионный водород ( $μ^-p$  и  $π^-p$ ). Все эти системы являются связанными состояниями двух заряженных частиц, взаимодействующих через электромагнитное поле.

На протяжении почти всей истории развития квантовой механики и квантовой электродинамики атом водорода имел существенное значение в проверке основных положений теории. Так было при установлении правил квантования и принципа соответствия Бора — Зоммерфельда. Одним из основных успехов уравнения Шредингера стало вычисление уровней энергии для куло-

новского потенциала. Блестящим подтверждением релятивистской теории электрона Дирака явился расчет на ее основе тонкой структуры уровней энергии водорода.

Идея о наличии у электрона аномального магнитного момента возникла впервые при изучении сверхтонкого расщепления водородных уровней. Лэмбовский сдвиг уровней энергии также был впервые обнаружен в атоме водорода. Интерпретация аномального магнитного момента электрона и лэмбовского сдвига как радиационных эффектов и вычисление их с большой точностью на основе теории перенормировок явилось выдающимся достижением квантовой электродинамики.

Водородоподобные системы были основными объектами исследования релятивистской квантовой проблемы двух тел на основе уравнений Брейта, Бете — Солпитера, Логунова — Тавхелидзе. Различные релятивистские и квантовоэлектродинамические поправки, вычисленные с помощью этих уравнений, хорошо согласуются с экспериментом.

Причина такого привилегированного положения ВП-атомов состоит в том, что, с одной стороны, радиационные и релятивистские поправки к кулоновским уровням энергии малы и их можно вычислить с высокой точностью по теории возмущений. С другой стороны, энергетические уровни этих атомов доступны экспериментальному исследованию с поразительной степенью точности. Наконец, детально разработана и экспериментально подтверждена теория ВП-атомов во внешних электрических и магнитных полях. Все это вместе взятое делает ВП-атомы идеальными системами для проверки справедливости основных положений квантовой механики и квантовой электродинамики.

Ниже будет представлено в общих чертах современное состояние теории в этой области исследований. Обзор не претендует на полноту изложения, что вызвано стремлением сосредоточить внимание на проблемах, допускающих наиболее полное решение. Выбор таких проблем частично связан с личными научными интересами автора. В качестве основного метода описания двухчастичной связанной системы используем квазипотенциальный метод Логунова и Тавхелидзе в новой релятивистски инвариантной формулировке, принадлежащей автору.

## 1. УРОВНИ ЭНЕРГИИ ВОДОРОДОПОДОБНЫХ АТОМОВ

### 1. Релятивистская волновая функция связанной системы двух частиц

Среди методов описания релятивистской квантовой задачи двух тел наиболее широко известно явно ковариантное уравнение Бете — Солпитера [1]. Волновая функция связанной системы двух частиц в этом подходе имеет вид

$$\Psi_{\mathbf{B}K_{\mathbf{B}}} (x_1, x_2) = \langle 0 | T \{ \varphi_1 (x_1) \varphi_2 (x_2) \} | M_{\mathbf{B}}, J; \mathbf{K}_{\mathbf{B}} \rangle, \quad (1.1)$$

где  $\varphi_{1,2}$  — полные гейзенберговские операторы полей 1 и 2;  $M_{\mathbf{B}}, J, \mathbf{K}_{\mathbf{B}}$  — соответственно масса, спин и импульс связанного состояния;  $E_{\mathbf{B}} = \sqrt{M_{\mathbf{B}}^2 + \mathbf{K}_{\mathbf{B}}^2}$ .

Волновая функция (1.1) сильно отличается по своим свойствам от нерелятивистской волновой функции, подчиняющейся уравнению Шредингера. Во-первых, норма волновой функции (1.1) не является положительно определенной, в связи с чем теряется обычная вероятностная интерпретация; во-вторых, она зависит от двух временных координат, а физический смысл параметра относительного времени совершенно не ясен.

Почти во всех практических приложениях уравнения Бете — Солпитера этот дополнительный параметр тем или иным способом исключался. Поэтому возникает вопрос, нельзя ли сделать это последовательно с самого начала. Такой метод был предложен А. А. Логуновым и А. Н. Тавхелидзе [2] и получил название квазипотенциального. В этом подходе волновая функция связанной системы зависит от одного временного параметра и подчиняется уравнению типа Шредингера с комплексным, зависящим от энергии и нелокальным ядром — квазипотенциалом. При этом хотя и не удается полностью восстановить вероятностную интерпретацию волновой функции, все же можно найти ее физический смысл [3]. Квазипотенциальный метод также с успехом применяется в задачах рассеяния [4]. Различные варианты релятивистских трехмерных уравнений квазипотенциального типа были рассмотрены в работах [5—12].

Сделаем несколько замечаний по поводу уравнений, предложенных в работах [11, 12]. Модель эффективного потенциала, как называли ее Йенни и Гротч, идейно очень близка к квазипотенциальному методу. Основным отличием является то, что в качестве исходного приближения берутся точные решения уравнения Дирака (для спинорных частиц) с модифицированным (за счет отдачи ядра) кулоновским потенциалом. Такой выбор имеет некоторые практические преимущества в случае атома водорода. Однако это достигается отсутствием последовательной формулировки задачи на связанные состояния. Кроме того, существенный недостаток заключается в неравноправном рассмотрении обеих частиц. В результате этот метод совершенно неприменим к таким системам, как позитроний, где обе частицы имеют одинаковую массу. Поэтому будем использовать более последовательный и имеющий более широкую область применения метод Логунова — Тавхелидзе. Наша новая ковариантная формулировка [14] квазипотенциального метода идейно близка к работе [7].

В нерелятивистской квантовой механике состояние системы частиц можно описать волновой функцией, зависящей от координат

нат (импульсов) частиц в определенный момент времени. Наиболее простым и естественным релятивистски инвариантным обобщением такого описания является задание волновой функции в собственном времени системы. Для этого необходимо направить ось времени по вектору полного импульса системы. Таким образом, понятие одновременности приобретает вполне определенный и лоренц-инвариантный смысл: следует приравнять времена частиц в с. ц. и. Эта замена индивидуальных временных координат общей составляет сущность процесса соединения: она определяет изменение нашей точки зрения, когда мы рассматриваем систему как целое вместо составляющих ее частей [13]. По образному выражению Эддингтона [13], «атом водорода состоит из протона и электрона, но протон сегодня и электрон вчера не образуют атома водорода».

В дальнейшем будем в основном использовать импульсное пространство, поэтому определим [14] ковариантную квазипотенциальную волновую функцию следующим образом:

$$(2\pi)^4 \delta^4(\mathcal{F} - K_B) \Psi_{B\mathcal{F}}(\mathbf{P}) = \int d^4x_1 d^4x_2 e^{ip_1x_1 + ip_2x_2} \times \\ \times \delta(hx_1 - hx_2) \langle 0 | \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) | M_B, J; \mathbf{K}_B \rangle, \quad (1.2)$$

где

$$h^\mu = \frac{\mathcal{F}^\mu}{\sqrt{\mathcal{F}^2}}; \quad \mathcal{F} = p_1 + p_2; \quad \mu = 0, 1, 2, 3; \quad px \equiv p^\mu x_\mu,$$

и предполагается, что координаты и импульсы частиц выражены через соответствующие величины в с. ц. и.:

$$\left. \begin{aligned} x_{1,2} &= L_{\mathcal{F}}(\tau_{1,2}; x_{1,2}^0) = \tau_{1,2} h + \sum_{i=1}^3 (n^{(i)}(\mathcal{F}) x_{1,2}^i); \\ p_{1,2} &= L_{\mathcal{F}}(\varepsilon_{1,2}; p_{1,2}^0) = \varepsilon_{1,2} h + \sum_{i=1}^3 (n^{(i)}(\mathcal{F}) p_{1,2}^{(i)}); \\ n^{(i)\mu} &= L_{\mathcal{F}}^\mu = \left( \frac{\mathcal{F}^i}{\sqrt{\mathcal{F}^2}}; \frac{\mathcal{F}^i \mathcal{F}^j}{\sqrt{\mathcal{F}^2}(E + \sqrt{\mathcal{F}^2})} + \delta_{ij} \right); \\ &(n^{(i)}(\mathcal{F})) = 0; \quad (n^{(i)} n^{(j)}) = -\delta_{ij}; \\ &\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{P}, \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

$L_{\mathcal{F}}$  — чистое преобразование Лоренца, переводящее систему центра инерции в произвольную систему отсчета. Метрика четырехмерного пространства выбрана в виде (1, -1, -1, -1). Как нетрудно видеть из соотношений (1.3),

$$\tau_{1,2} = (h \cdot x_{1,2}),$$

и, таким образом,  $\delta$ -функция в интеграле (1.2) действительно обеспечивает приравнивание времен частиц в с. ц. и.

Для определенности будем считать, что обе частицы имеют спин 1/2. Оказывается удобным [8, 15] спроектировать волновую функцию (1.2) на положительно частотные состояния с помощью соотношения

$$\Psi_{\mathcal{F}}^{(+)}(\mathbf{p}) = \frac{\sqrt{\varepsilon_1(\mathbf{p})\varepsilon_2(\mathbf{p})}}{2m_1m_2} \bar{u}_1(p_1) \bar{u}_2(p_2) \Psi_{\mathcal{F}}(\mathbf{p}), \quad (1.4)$$

где  $\bar{u} = u^*\gamma_0$ ;  $\varepsilon_{1,2}(\mathbf{p}) = \sqrt{m_{1,2}^2 + \mathbf{p}^2}$ ,

$u(p)$  — положительно частотный дираковский спинор, нормированный условием  $\bar{u}u = 2m$ .

В явном виде

$$u^\lambda(\mathbf{p}) = \sqrt{\varepsilon(\mathbf{p}) + m} \left( \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{p}) + m} \frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{\varepsilon(\mathbf{p}) + m} \right) u^\lambda. \quad (1.5)$$

Используя лоренц-инвариантность, можно показать [14], что

$$\Psi_{\mathcal{F}}^{(+)}(\mathbf{p}) = D_1^{1/2}(R_1^W) D_2^{1/2}(R_2^W) \Psi_{\mathcal{F}}^{(+)}(\mathbf{p}), \quad (1.6)$$

где  $\Psi_{\mathcal{F}}^{(+)}$  — волновая функция в с. ц. и.;  $D^{1/2}(R)$  — хорошо известные матрицы конечных вращений для углового момента 1/2, а вигнеровское вращение

$$R_{1,2}^W = L_{\mathcal{F}p_{1,2}}^{-1} L_{\mathcal{F}} L_{p_{1,2}}.$$

Волновая функция  $\Psi_{\mathcal{F}}^{(+)}$  удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} & \left( M_{\mathcal{F}} - \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_1^2} - \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_2^2} \right) \Psi_{\mathcal{F}}^{(+)}(\mathbf{p}) = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q} V(\mathbf{p}, \mathbf{q}; \mathcal{F}) \Psi_{\mathcal{F}}^{(+)}(\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Квазипотенциал  $V$  определен в терминах амплитуды рассеяния двух частиц вне энергетической поверхности:

$$V = T_{(+)} (1 + G^{\dagger} T_{(+)}^{-1}), \quad (1.8)$$

где функция Грина свободных частиц

$$G^f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{(2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q})}{M_{\mathcal{F}} - \varepsilon_1(\mathbf{p}) - \varepsilon_2(\mathbf{p})} \equiv (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) F(\mathbf{p}). \quad (1.9)$$

Умножение в равенстве (1.8) понимается в операторном смысле как интегрирование по пространству трехмерных импульсов. Обычно соотношение (1.8) используется в виде разложения по теории возмущений:

$$\left. \begin{aligned} V &= V^{(1)} + V^{(2)} + \dots; \quad T_{(+)} = T_{(+)}^{(1)} + T_{(+)}^{(2)} + \dots; \\ V^{(1)} &= T_{(+)}^{(1)}; \quad V^{(2)} = T_{(+)}^{(2)} - T_{(+)}^{(1)} G^{\dagger} T_{(+)}^{(1)}. \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

В наиболее общем виде амплитуда рассеяния  $T$  определяется [14, 15] с помощью ковариантной двухвременной функции Грина

двух частиц, спроектированной на положительно частотные состояния [аналогично равенству (1.4)]:

$$G^i T_{(+)} G^i = G^{(+)} - G^i; \quad G^{(+)} = \bar{u}_1 \bar{u}_2 G u_1 u_2.$$

Однако в некоторых приложениях (например, для получения уровней энергии связанной системы) можно воспользоваться методом построения амплитуды  $T$  с помощью элементов матрицы рассеяния на массовой поверхности. В дальнейшем в основном будем пользоваться этим более простым методом. Эквивалентность обоих подходов была продемонстрирована в работе [16]. Таким образом, в с. ц. и. имеем

$$T_{(+)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; M_B) = \frac{\bar{u}_1(p) \bar{u}_2(p)}{2 \sqrt{\varepsilon_1(\mathbf{p}) \varepsilon_2(\mathbf{p})}} T(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E_1, E_2) \frac{u_1(q) u_2(q)}{2 \sqrt{\varepsilon_1(\mathbf{q}) \varepsilon_2(\mathbf{q})}}, \quad (1.11)$$

где 
$$E_1 = \frac{M_B^2 - m_2^2 + m_1^2}{2M_B}; \quad E_2 = \frac{M_B^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M_B}; \quad \mathbf{p}^2 \neq \mathbf{q}^2.$$

В нерелятивистском пределе уравнение (1.7), очевидно, переходит в обычное уравнение Шредингера:

$$\left( W - \frac{p^2}{2\mu} \right) \Psi_B(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q} V(\mathbf{p}, \mathbf{q}; W) \Psi_B(\mathbf{q}), \quad (1.12)$$

где  $W = M_B - m_1 - m_2$ ;

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ — приведенная масса.}$$

## 2. Структура кулоновских уровней энергии

В квантовой электродинамике взаимодействие заряженных частиц происходит с помощью обмена фотонами. В низшем приближении имеем, очевидно, однофотонный обмен, который можно изобразить в виде диаграммы рис. 1.

Для частиц со спином 1/2 потенциал взаимодействия в этом приближении, согласно равенствам (1.10) и (1.11), в с. ц. и. равен:

$$V^{(1)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \left. \begin{aligned} & \frac{\langle \mathbf{p} | J_{1\mu}(0) | \mathbf{q} \rangle}{2 \sqrt{\varepsilon_1(\mathbf{p}) \varepsilon_1(\mathbf{q})}} D^{\mu\nu}(k) \frac{\langle -\mathbf{p} | J_{2\nu}(0) | -\mathbf{q} \rangle}{2 \sqrt{\varepsilon_2(\mathbf{p}) \varepsilon_2(\mathbf{q})}}; \\ & \mathbf{k} = \mathbf{p} - \mathbf{q}; \quad k^0 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

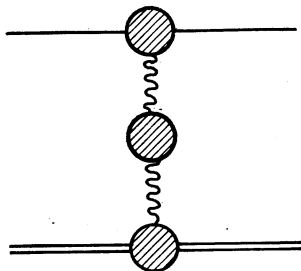
Одночастичные матричные элементы оператора электромагнитного тока имеют хорошо известную структуру:

$$\langle \mathbf{p} | J_\mu(0) | \mathbf{q} \rangle = \bar{u}(p) \left[ \gamma_\mu \rho(k^2) + \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} k^\nu f(k^2) \right] u(q);$$

$$k^\nu = (p - q)^\nu, \tag{2.2}$$

где  $\rho_{1,2}(0) = e_{1,2}$ ;  $f_{1,2} = e_{1,2}\kappa_{1,2}$ ;  $\kappa_{1,2}$  — аномальный магнитный момент (в соответствующих магнетонах). Фотонную функцию распространения  $D^{\mu\nu}$  удобно выбрать в так называемой кулоновской калибровке:

$$D^{00}(k) = -\frac{d(k^2)}{k^2}; \quad D^{ij}(k) = -\frac{d(k^2)}{k^2} \times \\ \times \left( \delta_{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2} \right); \quad D^{0i} = D^{i0} = 0.$$



Р и с. 1.

Здесь учтен эффект поляризации вакуума. Используя явный вид спинов (1.5), производя разложение в равенстве (2.1) по  $(p^2/m^2)$  и остав

ляя лишь члены первого порядка по этому параметру, получаем

$$V^{(1)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{d(k^2)}{k^2} \left\{ G_{E1}(k^2) G_{E2}(k^2) + \right. \\ \left. + \rho_1(k^2) \rho_2(k^2) \left[ \frac{\mathbf{p}^2 + \mathbf{q}^2}{4m_1 m_2} + \frac{\mathbf{p}^2 \mathbf{q}^2}{m_1 m_2 k^2} - \frac{k^2}{8\mu^2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{i}{4m_1} [\mathbf{p} \times \mathbf{q}] \sigma_1 \rho_2(k^2) \left[ \left( \frac{1}{m_1} + \frac{2}{m_2} \right) \rho_1(k^2) + \frac{2}{\mu} f_1(k^2) \right] + \right. \\ \left. + \frac{i}{4m_2} [\mathbf{p} \times \mathbf{q}] \sigma_2 \rho_1(k^2) \left[ \left( \frac{1}{m_2} + \frac{2}{m_1} \right) \rho_2(k^2) + \frac{2}{\mu} f_2(k^2) \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{4m_1 m_2} G_{M1}(k^2) G_{M2}(k^2) [(\sigma_1 \sigma_2) k^2 - (\mathbf{k} \cdot \sigma_1)(\mathbf{k} \cdot \sigma_2)] \right\}, \tag{2.3}$$

$$k^2 = -\mathbf{k}^2, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

где мы ввели обычные саксовские форм-факторы:

$$G_E(k^2) = \rho(k^2) - \frac{k^2}{4m^2} f(k^2); \quad G_M(k^2) = \rho(k^2) + f(k^2).$$

Удобно выделить отдельно чисто кулоновский потенциал и представить  $V^{(1)}$  в виде:

$$V^{(1)} = V_C + \Delta V^{(1)}; \quad V_C(k^2) = \frac{e_1 e_2}{k^2}. \tag{2.4}$$

В дальнейшем будем полагать:

$$e_1 = -e; \quad e_2 = Ze.$$

В качестве исходного приближения естественно выбрать нерелятивистское уравнение Шредингера (1.12) с кулоновским потен-

циалом:

$$\left(W - \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu}\right) \Psi_B(\mathbf{p}) = -\frac{Ze^2}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q} \frac{\Psi_B(\mathbf{q})}{(\mathbf{p}-\mathbf{q})^2} \quad (2.5)$$

с той только разницей, что волновая функция здесь двухкомпонентна по каждой из частиц. Решение этого уравнения проще всего получить методом Фока. При этом получаются хорошо известные кулоновские уровни энергии

$$W_C = M_B - m_1 - m_2 = -\mu \frac{(Z\alpha)^2}{2n^2}, \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi}, \quad \left. \vphantom{W_C} \right\} \quad (2.6)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

и волновые функции типа Паули, которые для  $S$ -состояния имеют особенно простой вид:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_B^{(C)}(\mathbf{p}) &= \psi_C(\mathbf{p}) w; \quad \psi_C(\mathbf{p}) = \tilde{\psi}_C(0) \frac{8\pi Z\alpha\mu}{(p^2 + \mu^2 Z^2 \alpha^2)^2}; \\ \tilde{\psi}_C(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} \psi_C(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{(\mu Z\alpha)^3}{\pi n^3}} e^{-\mu(Z\alpha)r}, \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

где  $w$  — двухкомпонентный спинор.

Система, где основное значение имеет кулоновское взаимодействие, является слабосвязанной, и релятивистские эффекты в ней малы, поскольку среднее значение  $\mathbf{p}^2$

$$\langle \mathbf{p}^2 \rangle = (Z\alpha)^2 \mu^2. \quad (2.8)$$

Пусть теперь масса одной из частиц много больше другой, например

$$m_2 \gg m_1.$$

Примерами таких систем служат атомы водорода и мюония. В этом случае, оставляя только линейные члены по  $(m_1/m_2)$ , поправку  $\Delta V^{(1)}$  в равенстве (2.4), можно на основании (2.3) представить в виде

$$\Delta V^{(1)} = V_{fs}^{(1)} + V_s^{(1)} + V_{hfs}^{(1)} + V_0^{(1)}, \quad (2.9)$$

где

$$\begin{aligned} V_{fs}^{(1)} &= i \frac{[\mathbf{p} \times \mathbf{q}] \cdot \boldsymbol{\sigma}_1}{4m_1^2 \mathbf{k}^2} d(k^2) \rho_2(k^2) \left\{ \left(1 + 2 \frac{m_1}{m_2}\right) \rho_1(k^2) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) f_1(k^2) \right\} - \frac{1}{8\mu^2} \rho_1(k^2) \rho_2(k^2); \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$V_s^{(1)} = \left\{ d(k^2) G_{E1}(k^2) G_{E2}(k^2) - e_1 e_2 \right\} \frac{1}{\mathbf{k}^2}; \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} V_{hfs}^{(1)} &= i \frac{[\mathbf{p} \times \mathbf{q}] \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{2m_1 m_2 \mathbf{k}^2} d(k^2) \rho_1(k^2) G_{M2}(k^2) - \\ &- \frac{d(k^2)}{4m_1 m_2} G_{M1}(k^2) G_{M2}(k^2) \left\{ (\boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2) - \frac{1}{\mathbf{k}^2} (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \right\}; \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$V_0^{(1)} = \rho_1(k^2) \rho_2(k^2) \left\{ \frac{\mathbf{p}^2 + \mathbf{q}^2}{4m_1 m_2 \mathbf{k}^2} + \frac{\mathbf{p}^2 \mathbf{q}^2}{m_1 m_2 \mathbf{k}^4} \right\}. \quad (2.13)$$



Кроме того, имеется поправка к кинетической энергии из разложения квадратного корня в уравнении (1.7):

$$V_{kin} = - \left( \frac{p^4}{8\mu^3} - \frac{3p^4}{8m_1^2 m_2} \right) (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}). \quad (2.14)$$

Сдвиг уровней энергии определяется по обычной теории возмущений для уравнения Шредингера, и в первом порядке по возмущению  $\Delta V^{(1)}$  находим

$$\Delta W = \langle B | \Delta V^{(1)} | B \rangle = \frac{1}{(2\pi)^6} \int d\mathbf{p} d\mathbf{q} \Psi_B^*(\mathbf{p}) \Delta V^{(1)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \Psi_B(\mathbf{q}). \quad (2.15)$$

Обсудим теперь физический смысл различных слагаемых в равенстве (2.8). Потенциал  $V_{fs}^{(1)}$  не зависит от спина второй частицы и вместе с первым слагаемым в поправке (2.14) к кинетической энергии дает так называемое тонкое расщепление кулоновских уровней энергии (2.7). Член  $V_s^{(1)}$  представляет собой поправку на структуру частиц и эффект поляризации вакуума. Вместе с частью потенциала  $V_{fs}^{(1)}$ , пропорциональной форм-фактору  $f_1(k^2)$ , он приводит к лэмбовскому сдвигу. Слагаемое  $V_{hf}^{(1)}$  содержит зависимость от спина второй частицы и вызывает сверхтонкое расщепление уровней энергии. Величина этого расщепления примерно в  $(m_2/m_1)$  раз меньше, чем тонкое расщепление. Последний член  $V_0^{(1)}$  в сумме со вторым слагаемым в поправке (2.14) к кинетической энергии не дает дополнительного расщепления уровней, а лишь приводит к общему сдвигу уровней энергии [17], зависящему от главного квантового числа  $n$ .

Рассмотрим теперь несколько подробнее случай атома водорода (частица 1 — электрон, частица 2 — протон). Поскольку, как уже отмечалось выше, релятивистские поправки в ВП-системах малы, то достаточно использовать полученные в рамках квантовой электродинамики [19, 37] выражения для форм-факторов и функции  $d(k^2)$  вблизи нуля по передаче импульса  $k^2$ :

$$d(k^2) = 1 - \left\{ \frac{\alpha}{15\pi} + \frac{\alpha^2}{4\pi^2} \left( 1 + \frac{1}{81} \right) \right\} \frac{k^2}{m_1^2} + \dots; \quad (2.16)$$

$$\rho_1(k^2) = -e + k^2 \frac{d\rho_1(k^2)}{dk^2} \Big|_{k^2=0} + \dots;$$

$$m_1^2 \frac{d\rho_1(k^2)}{dk^2} \Big|_{k^2=0} = -e \left\{ \frac{\alpha}{3\pi} \left( \ln \frac{m_1}{2\lambda} + \frac{11}{24} \right) + \frac{\alpha^2}{\pi^2} 0,470 \right\}; \quad (2.17)$$

$$f_1(k^2) \approx f_1(0) = -e \left( \frac{\alpha}{2\pi} - \frac{\alpha^2}{\pi^2} 0,32848 \right) = -e\kappa_1; \quad (2.18)$$

$$G_{E2}(k^2) = Ze + \frac{Ze}{6} \langle r_{E2}^2 \rangle k^2 + \dots \quad (2.19)$$

Член порядка  $\alpha^2$  в выражении для функции  $d(k^2)$  был вычислен в работе [18]. Форм-фактор  $\rho_1(k^2)$  содержит инфракрасную

расходимость [19], в результате чего пришлось ввести параметр обрезания  $\lambda$  по импульсу фотона вблизи нуля. Это является следствием приближения, которое мы сделали, когда считали электрон свободным при вычислении форм-фактора. Если учесть, что электрон на самом деле является связанным, то параметр  $\lambda$  заменится [17] на величину порядка  $W_c \sim (Z\alpha)^2 \mu$ . Остановимся теперь на поправке порядка  $\alpha^2$  к наклону форм-фактора  $\rho_1(k^2)$  при  $k^2 = 0$ . Аналитический расчет этой величины, проделанный в работе [20], оказался ошибочным. Впервые это было обнаружено Бродским и Аппелкуистом [21] с помощью численного расчета.

Они получили вклад, равный  $\frac{\alpha^2}{\pi^2} (0,48 \pm 0,07)$ . Этот результат подтвержден в работах [22]. Впоследствии было проведено новое аналитическое вычисление этой величины [23], которое привело к указанному в формуле (2.17) более точному значению.

Подставляя теперь выражение (2.10) и первый член из (2.14) в равенство (2.15) с учетом формул (2.7) и (2.6—2.19), получаем поправку, приводящую к тонкому расщеплению уровней (2.6):

а) для  $S$ -состояний,  $l = 0$  ( $l$  — орбитальное квантовое число)

$$\Delta W_{js}^{(1)} = -\frac{(Z\alpha)^4}{2n^3} \mu \left(1 - \frac{3}{4n}\right); \quad (2.20)$$

б) для всех остальных,  $l \neq 0$

$$\Delta W_{js}^{(1)} = -\frac{(Z\alpha)^4}{2n^3} \mu \left\{ \left[ \frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right] - 2\kappa_1 \left[ \frac{1}{l + \frac{1}{2}} - \frac{1}{j + \frac{1}{2}} \right] \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) \right\};$$

$$j = l \pm \frac{1}{2}. \quad (2.21)$$

Здесь мы продолжаем писать  $Z$ , хотя для протона  $Z = 1$ , чтобы отличать радиационные поправки от релятивистских эффектов.

Особый интерес представляет величина  $\Delta E$  тонкого расщепления уровней ( $2P_{3/2} - 2P_{1/2}$ ), поскольку для нее известно очень точное экспериментальное значение, и в то же время она мало чувствительна к радиационным поправкам:

$$\Delta E = \frac{(Z\alpha)^4}{32} \mu \left\{ \left(1 + \frac{5}{8} (Z\alpha)^2\right) + 2\kappa_1 \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) - \right.$$

$$\left. - 2 \frac{\alpha}{\pi} (Z\alpha)^2 \ln (Z\alpha)^{-1} \right\}, \quad (2.22)$$

где член порядка  $(Z\alpha)^2 [fs]$  может быть получен из разложения по  $(Z\alpha)^2$  точной формулы Дирака для тонкой структуры [17].

«Структурная» поправка (2.14) приводит к дополнительному (лэмбовскому) смещению уровней:

$$\begin{aligned} \Delta W_s^{(1)} = & -|\tilde{\Psi}_C(0)|^2 \left\{ d(0) G_{E_2}(0) \frac{d\rho_1}{dk^2} \Big|_{k^2=0} + \right. \\ & + \frac{1}{4m_1^2} f_1(0) d(0) G_{E_2}(0) + \rho_1(0) G_{E_2}(0) \times \\ & \left. \times \frac{dd(k^2)}{dk^2} \Big|_{k^2=0} + \rho_1(0) d(0) \frac{dG_{E_2}}{dk^2} \Big|_{k^2=0} \right\}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

После устранения инфракрасной расходимости за счет явного учета связанности системы возникает так называемый логарифм Бете [17], численные значения которого хорошо известны. В результате, используя формулы (2.10) и (2.18), получим сдвиг  $S$ -уровней ( $l=0$ ) в виде

$$\begin{aligned} \Delta W_{L_s}^{(1)} = & \frac{4\alpha(Z\alpha)^4 \mu^3}{3\pi n^3 m_1^2} \left\{ \ln(Z\alpha)^{-2} + \ln \frac{(Z\alpha)^2 \mu}{2\Delta\epsilon_{n,l}} + \frac{19}{30} + \ln \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{3\alpha}{4\pi} \left[ 0,328 - 4 \cdot 0,443 + \left( 1 + \frac{1}{81} \right) \right] \right\} + 2 \frac{(Z\alpha)^4}{3n^3} \mu^3 \langle r_{E_2}^2 \rangle, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где  $\Delta\epsilon_{n,l}$  — средняя энергия возбуждения, введенная Бете [17]. Для всех других состояний с  $l \neq 0$ , объединяя член, зависящий от  $l$  в формуле (2.21), и вклад от выражения (2.23), после устранения инфракрасной расходимости мы имеем

$$\begin{aligned} \Delta W_{L_s}^{(1)} = & \frac{4\alpha(Z\alpha)^4 \mu^3}{3\pi n^3 m_1^2} \left\{ \ln \frac{(Z\alpha)^2 \mu}{2\Delta\epsilon_{n,l}} + \right. \\ & \left. + \frac{3}{8} \left( 1 - 2 \frac{\alpha}{\pi} 0,328 \right) \left[ \frac{1}{l + \frac{1}{2}} - \frac{1}{j + \frac{1}{2}} \right] \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \right\}, \quad l \neq 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Формулы (2.24) и (2.25) дают теоретические выражения для радиационного сдвига уровней энергии, называемого обычно лэмбовским, в приближении однофотонного обмена с учетом движения ядра.

Потенциал (2.13) вместе со вторым членом из поправки (2.14) приводит к общему смещению уровней [17]:

$$\Delta W_0^{(1)} = -\frac{(Z\alpha)^4 \mu^3}{8n^4 m_1 m_2}, \quad (2.26)$$

не зависящему от  $j$  и  $l$ .

Перейдем теперь к части потенциала, приводящей к сверхтонкому расщеплению. Не будем здесь приводить хорошо известную формулу для сверхтонкого расщепления произвольного уровня [17], а остановимся более подробно на расщеплении  $S$ -уровней. В этом случае, подставляя выражение (2.12) в фор-

мулу (2.15) и полагая  $d(k^2) \approx 1$ ;  $G_{M1}(k^2) \approx -e(1 + \kappa_1)$ , имеем

$$\Delta W_{hfs}^{(1)} = \frac{2\pi Z\alpha}{3m_1 m_2} (1 + \kappa_1) (1 + \kappa_2) \langle \sigma_1 \cdot \sigma_2 \rangle \left\{ |\tilde{\psi}_C(0)|^2 + \int \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{q}}{(2\pi)^6} \psi_C^*(\mathbf{p}) \left[ \frac{1}{Ze(1 + \kappa_2)} G_{M2}(k^2) - 1 \right] \psi_C(\mathbf{q}) \right\}, \quad k^2 = -(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2. \quad (2.27)$$

Первое слагаемое в равенстве (2.27) представляет собой хорошо известную формулу Ферми, а второе — поправку, связанную с электромагнитной структурой протона (ядра). Однако уже нельзя использовать здесь разложение форм-фактора по степеням  $k^2$ , так как соответствующие интегралы расходятся. Тем не менее основной вклад в интеграл дают относительно малые  $k^2$ , и поэтому второй член в формуле (2.27) имеет такой же порядок величины, что и вклад от двухфотонного обмена. В самом деле, учитывая, что подынтегральное выражение обращается в нуль при  $k^2 = 0$ , можно использовать приближенное выражение для кулоновской волновой функции (2.7)  $S$ -состояния:

$$\psi_C(\mathbf{p}) = \psi_C(0) [(2\pi)^3 \delta(\mathbf{p}) + F(\mathbf{p}) V_C(\mathbf{p}) + \dots], \quad (2.28)$$

представляющее собой разложение по степеням  $(Z\alpha)$ . После подстановки этого выражения равенство (2.27) приобретает вид

$$\Delta W_{hfs}^{(1)} = \frac{2\pi(Z\alpha)}{3m_1 m_2} (1 + \kappa_1) (1 + \kappa_2) |\tilde{\psi}_C(0)|^2 \langle \sigma_1 \cdot \sigma_2 \rangle \times \left\{ 1 + 2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} V_C(\mathbf{k}) F(\mathbf{k}) F(\mathbf{k}) \left[ \frac{1}{Ze(1 + \kappa_2)} G_{M2}(k^2) - 1 \right] \right\}, \quad (2.29)$$

где  $F(\mathbf{k}) = \left( W_C - \frac{k^2}{2\mu} \right)^{-1}$ .

Таким образом, второму слагаемому в равенстве (2.29) можно условно сопоставить разность двух диаграмм, в которых происходит обмен одним кулоновским и одним поперечным (магнитным) фотонами. Вернемся к этому вопросу в следующем разделе.

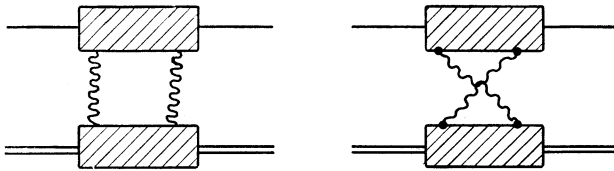
Если вместо нерелятивистских кулоновских использовать более точные волновые функции, то можно получить [12, 24] также поправки порядка  $(Z\alpha)^2 (m_1/m_2) [hfs]$ , зависящие от состояния (т. е. от главного квантового числа  $n$ ).

### 3. Поправки на двухфотонный обмен

Амплитуду рассеяния, соответствующую двухфотонному обмену между частицами системы, можно представить в виде диаграмм Фейнмана (рис. 2).

Мы пренебрегли вкладом поляризации вакуума как эффектом высшего порядка малости. В случае ВП-систем, когда одна из частиц значительно тяжелее другой ( $m_2 \gg m_1$ ), удобно отдельно рассмотреть поправки к тонкому и сверхтонкому расщеплению, поскольку последние в  $(m_2/m_1)$  раз меньше первых.

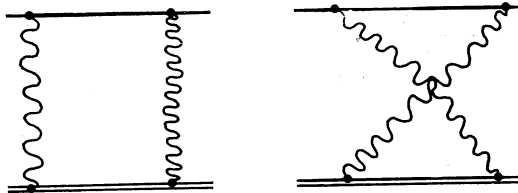
Начнем с поправок к тонкому расщеплению. Эти поправки в свою очередь можно разделить на две категории. К первой относятся релятивистские и радиационные поправки, которые остаются при  $m_2 \rightarrow \infty$  и имеют относительный порядок малости  $(Z\alpha)^2 [fs]$ ,  $\alpha (Z\alpha) [fs]$  и  $\alpha (Z\alpha)^2 \ln^k (Z\alpha) [fs]$ ,  $k = 0, 1, 2$ . Члены порядка  $(Z\alpha)^2 [fs]$  могут быть легко получены из разложения точной формулы Дирака для тонкой структуры [17]. Остальные



Р и с. 2.

члены подробно обсуждаются в превосходной работе Эриксона и Йенни [25]. На этих поправках не будем подробно останавливаться, поскольку они не отражают характерные черты двухчастичной задачи — эффекты отдачи ядра (протона).

С эффектами конечности массы ядра (протона) связана вторая категория поправок. Причем, поскольку мы уже учли в однофотон-



Р и с. 3.

ном члене эффекты структуры и аномального магнитного момента протона, можно теперь рассматривать протон как точечную дираковскую частицу. Таким образом, необходимо рассмотреть вклад в потенциал от диаграмм, изображенных на рис. 3.

Впервые расчет этих эффектов на основе уравнения Бете — Солпитера был произведен Солпитером [26] и затем подтвержден в работе Фултона и Мартина [27]. Позже эти вычисления были проверены Йенни и Гротчем [12] с помощью модели эффективного потенциала (см. Введение). Их результат совпадает с результатами предыдущих работ. Приведем здесь только окончательные выражения для представляющих наибольший практический инте-

рес поправок к  $2S$ - и  $2P$ -уровням:

$$\Delta W_{fs}^{(2)}(2S) = \frac{(Z\alpha)^5 \mu^3}{8\pi m_1 m_2} \left\{ \frac{8}{3} \ln \frac{Z\alpha m_1}{2\Delta\epsilon_{2,0}} - \ln (Z\alpha)^{-2} + \frac{187}{18} - \frac{2}{m_2^2 - m_1^2} \left[ m_1^2 \ln \frac{\mu}{m_2} - m_2^2 \ln \frac{\mu}{m_1} \right] \right\}; \quad (3.1)$$

$$\Delta W_{fs}^{(2)}(2P) = \frac{(Z\alpha)^5 \mu^3}{8\pi m_1 m_2} \left\{ \frac{8}{3} \ln \frac{(Z\alpha)^2 m_1}{2\Delta\epsilon_{2,1}} - \frac{7}{18} \right\}. \quad (3.2)$$

Эти выражения получены без предположения о малости отношения  $m_1/m_2$ . В случае, когда это отношение мало (атомы водорода и мюония), член с квадратными скобками в формуле (3.1) пропорционален дополнительному фактору ( $m_1/m_2$ ) и им можно пренебречь. Поправки (3.1) и (3.2) дают вклад в лэмбовское расщепление уровней, поскольку они зависят от  $l$ . Более аккуратные расчеты двухфотонных поправок к тонкой структуре с учетом реалистических форм-факторов протона пока не производились. Поправки на поляризуемость протона, как показано в работе [28], пренебрежимо малы.

Рассмотрим теперь несколько подробнее схему вычисления [15] поправок к сверхтонкому расщеплению в атоме водорода (или мюония) на основе уравнения (1.7). Как и в случае поправок к тонкому расщеплению, радиационные и релятивистские эффекты можно учесть отдельно, рассматривая взаимодействие со статическим магнитным моментом протона [29]. Поэтому сосредоточим внимание на эффектах структуры и отдачи ядра (протона или мюона).

Поправка к уровням энергии, согласно обычной теории возмущений, имеет вид

$$\Delta W_B^{(2)} = \langle B | V^{(2)} | B \rangle + \sum_{n \neq B} \langle B | \Delta V^{(1)} | n \rangle \frac{1}{W_B - W_n} \langle n | \Delta V^{(1)} | B \rangle. \quad (3.3)$$

В дальнейшем нас будет интересовать сверхтонкое расщепление только  $S$ -уровней. Поэтому будем пренебрегать всеми релятивистскими поправками порядка  $(\mathbf{p}^2/m_i^2) \sim (Z\alpha)^2$ . В связи с этим сумму по полному набору промежуточных состояний системы в формуле (3.3) можно, не ухудшая точности всего приближения [30], заменить на сумму по состояниям свободных частиц. После такой замены равенство (3.3) можно схематически записать в виде

$$\Delta W_B^{(2)} = \langle V^{(2)} \rangle + \langle \Delta V^{(1)} G^j \Delta V^{(1)} \rangle.$$

Подставляя сюда выражение для  $V^{(2)}$  из формулы (1.10) с учетом представления (2.4), окончательно получаем

$$\Delta W_B^{(2)} = \langle T^{(2\nu)} \rangle - \langle V_C G^j \Delta V^{(1)} \rangle - \langle \Delta V^{(1)} G^j V_C \rangle - \langle V_C G^j V_C \rangle. \quad (3.4)$$

Последнее слагаемое в равенстве (3.4) не дает поправок к сверхтонкому расщеплению. Учитывая сделанное выше замечание о пренебрежении релятивистскими эффектами, вклад в сверхтонкое расщепление от выражения (3.4) можно представить в следующей форме:

$$\Delta W_{hfs}^{(2)} = |\tilde{\Psi}_C(0)|^2 \left\{ \langle T_0^{(2\nu)} \rangle - 2 \frac{2\pi Z\alpha}{3m_1 m_2} \langle \sigma_1 \cdot \sigma_2 \rangle \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} V_C(\mathbf{k}) F(\mathbf{k}) \frac{1}{Z_e} G_{M_2}(k^2) \right\}, \quad (3.5)$$

где  $T_0^{(2\nu)}$  — выражение для диаграмм двухфотонного обмена, изображенных на рис. 2 при  $\mathbf{p} = \mathbf{q} = 0$  и  $M_B = m_1 + m_2$ . Складывая вместе однофотонную (2.29) и двухфотонную (3.5) части сверхтонкого расщепления, видим, что последние слагаемые в этих равенствах взаимно уничтожаются [31], и в сумме имеем

$$\Delta W_{hfs} = |\tilde{\Psi}_C(0)|^2 \left\{ \frac{2\pi(Z\alpha)}{3m_1 m_2} (1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2) \langle \sigma_1 \cdot \sigma_2 \rangle + \langle T_0^{(2\nu)} \rangle - \frac{4\pi(Z\alpha)}{3m_1 m_2} (1 + \kappa_2) \langle \sigma_1 \cdot \sigma_2 \rangle \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} F(\mathbf{k}) V_C(\mathbf{k}) \right\}. \quad (3.6)$$

Величину расщепления триплетного и синглетного  $S$ -уровней энергии теперь можно представить как

$$\nu_{hfs} = W({}^3S_1) - W({}^1S_0) = \nu_F (1 + \kappa_1 + \delta), \quad (3.7)$$

где

$$\nu_F = \frac{8(Z\alpha)^4 \mu^3}{3n^3 m_1 m_2} (1 + \kappa_2) \quad (3.8)$$

представляет собой хорошо известную формулу Ферми, а величина  $\delta$  обозначает поправки на структуру и движение ядра (протона или мюона) и в общем случае равна [32]:

$$\delta = \frac{(Z\alpha) m_1}{\pi (1 + \kappa_2) m_2} \left\{ \frac{3m_2^2}{i\pi^2} \int \frac{d^4 k}{k^4} N_{\mu\nu}^1(k) N_2^{\mu\nu}(k) - 8m_2 (1 + \kappa_2) \int_0^\infty \frac{dk}{k^2 - 2\mu W_C} \right\}, \quad (3.9)$$

где

$$N_{\mu\nu}^{1,2} = \frac{1}{4} \text{Sp} \left[ C_{\mu\nu}^{1,2} \frac{1 + \gamma_0}{2} \gamma_z \gamma_5 \right];$$

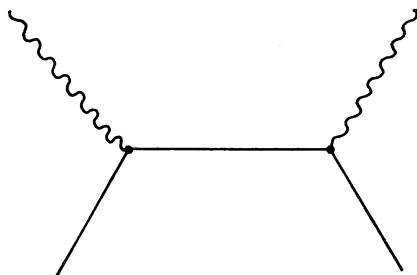
$C_{\mu\nu}^{1,2}(k)$  — амплитуда виртуального комптоновского рассеяния вперед.

Отметим, что в сверхтонкое расщепление дает вклад только зависящая от спина часть этой амплитуды. Наиболее простой результат получается, если обе частицы являются точечными дираковскими частицами, как, например, в случае мюония и позитрония. Тогда комптоновские амплитуды сводятся к простым

полюсным диаграммам (рис. 4). Выражение (3.9) при этом сводится к

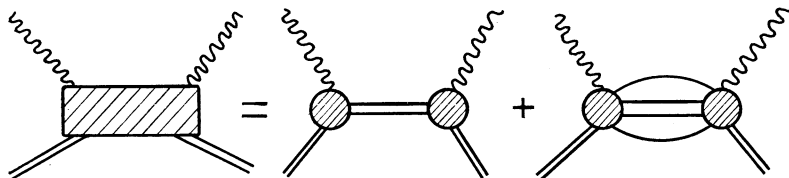
$$\delta_m = -\frac{3(Z\alpha)m_1m_2}{\pi(m_2^2 - m_1^2)} \ln \frac{m_2}{m_1}. \quad (3.10)$$

Значительно сложнее обстоит дело в случае атома водорода. Амплитуда виртуального комптон-эффекта на электроне по-прежнему дается диаграммой рис. 4. Однако амплитуда виртуального комптоновского рассеяния на протоне из-за эффектов сильных взаимодействий фактически не известна. Выделим из этой амплитуды вклад однонуклонного полюсного члена, изобразив его графически (рис. 5).



Р и с. 4.

Наиболее последовательно это можно сделать, написав дисперсионные соотношения для инвариантных амплитуд [31—33]. Полюсный член при этом полностью известен, поскольку он выражается через электромагнитные форм-факторы реального протона.



Р и с. 5.

Что касается вклада многочастичных промежуточных состояний, то его мнимую часть можно в принципе определить из экспериментов по неупругому рассеянию электронов на протонах при высоких энергиях. В настоящее время такие эксперименты уже проводятся и широко обсуждаются [34]. Трудность однако заключается в том, что для получения зависящей от спина части амплитуды рассеяния необходимы эксперименты с поляризованными электронами и протонами, которые до настоящего времени еще не сделаны.

Рассматривались различные модели для оценки вклада неупругих промежуточных состояний [31—33]. При этом выяснилась интересная деталь. Оказывается, что удобно выделить из инте-



грала в дисперсионных соотношениях член, который в сумме с вкладом от нуклонного полюса дает выражение для модифицированной фейнмановской полюсной диаграммы. Имеется в виду, что в вершинах такой диаграммы по-прежнему стоят форм-факторы реального протона. Тогда, как показывают вычисления, оставшаяся часть дисперсионного интеграла дает, как правило, малый вклад порядка  $(3 \div 5) \cdot 10^{-6}$  по сравнению с вкладом модифицированного полюсного члена, составляющим  $(35 \div 40) \cdot 10^{-6}$  (в зависимости от выбора конкретного выражения для форм-факторов).

Этот факт, по-видимому, объясняется тем, что наличие электронного и двух фотонных пропагаторов обеспечивает достаточно хорошую сходимость интегралов по импульсу фотонов, даже при относительно слабом убывании комптоновской амплитуды. Поэтому основной вклад в интеграле дают небольшие значения импульса  $k^2 \ll m_p^2$ . В то же время вклад области малых значений импульса в вычтенном дисперсионном интеграле подавлен из-за справедливости низкоэнергетической теоремы для соответствующей инвариантной амплитуды. Подробнее этот вопрос рассмотрен в работах [31, 32].

Для иллюстрации приведем выражение для величины  $\delta$ , которое получается [35] при учете одного только модифицированного полюсного члена, взяв форм-факторы в виде

$$\rho^2(k_2) = \frac{1}{1 + \kappa_2} f_2(k^2) = e_2 \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - k^2}; \quad \kappa_2 = 1,79,$$

здесь  $k^2$  — квадрат 4-импульса. Тогда

$$\sigma_N = -\frac{3(Z\alpha)m_1}{\pi m_2} \left\{ \frac{4 - \kappa_2^2}{4(1 + \kappa_2)} \ln \frac{\Lambda m_2}{m_1} - \frac{\kappa_2^2}{16(1 + \kappa_2)} + \frac{8\Lambda^{-2} + \kappa_2 - 1}{\sqrt{4\Lambda^{-2} - 1}} \operatorname{arctg} \sqrt{4\Lambda^{-2} - 1} \right\}, \quad Z = 1, \quad (3.11)$$

где параметр  $\Lambda$  выражен в протонных массах. Из данных о среднем квадратичном радиусе протона следует, что  $\Lambda = 0,64$ . Подставляя это значение в выражение (3.11), получаем

$$\delta_N = -34 \cdot 10^{-6}. \quad (3.12)$$

Оценки остальной части эффекта поляризации протона дают [31—33]

$$|\delta_{pol}| = (1 \div 6) \cdot 10^{-6}. \quad (3.13)$$

Вычислены также релятивистские и радиационные поправки порядка  $(Z\alpha)^2 [hfs]$ ,  $\alpha(Z\alpha) [hfs]$  и  $\alpha(Z\alpha)^2 [hfs]$ . Подробное рассмотрение этих поправок и библиография содержатся в работе Бродского и Эриксона [29].

В результате для расщепления триплетного и синглетного  $S$ -уровней атома водорода можно найти выражение

$$\nu_{hfs} = \nu_F [1 + \kappa_1 + \delta_N + \delta_{pol} + \varepsilon],$$

где

$$\varepsilon = \frac{3}{2} (Z\alpha)^2 + \alpha (Z\alpha) \left( \ln 2 - \frac{5}{2} \right) - \frac{8\alpha}{3\pi} (Z\alpha)^2 \ln (Z\alpha) \left[ \ln (Z\alpha) - \ln 4 + \frac{281}{480} \right] + \frac{\alpha}{\pi} (Z\alpha)^2 (18,4 \pm 5). \quad (3.14)$$

Эта формула справедлива также для мюония, если в качестве  $\delta$  взять величину (3.10). Кроме того, для мюония недавно были вычислены [36] с помощью уравнения Бете — Солпитера поправки порядка  $(m_1/m_2) (Z\alpha)^2 \ln (Z\alpha) [hfs]$ :

$$\Delta\delta_m = \frac{9m_1m_2}{2(m_1+m_2)^2} (Z\alpha)^2 \ln (Z\alpha)^{-1}, \quad Z = 1. \quad (3.15)$$

Этот результат получается, если в выражении для амплитуды двухфотонного обмена сохранить зависимость от внешних импульсов [см. равенство (3.4)].

#### 4. Уровни энергии позитрония

Позитроний представляет собой ВП-систему, состоящую из электрона и позитрона. Из  $CP$ -инвариантности электромагнитных взаимодействий следует, что полный спин  $s$  позитрония, принимающий значения 0 и 1, является сохраняющейся величиной. В соответствии с этим все уровни энергии позитрония можно разделить на синглетные с  $s = 0$  (парапозитроний) и триплетные с  $s = 1$  (ортопозитроний). Поскольку массы электрона и позитрона равны, тонкое и сверхтонкое расщепление в позитронии имеет один и тот же порядок величины. Исключение составляют  $S$ -уровни, для которых имеется лишь сверхтонкое расщепление на триплетный и синглетный уровни.

Другой специфической чертой позитрония является наличие дополнительного обменного взаимодействия, возникающего в результате процессов виртуальной аннигиляции электрона и позитрона.

Полагая форм-факторы электрона и позитрона равными их значениям в нуле и  $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ ,  $m_1 = m_2 = m$ ,  $\mu = m/2$ ,  $e_2 = -e_1 = e$ , выражение (2.3) для потенциала однофотонного обмена можно записать в виде

$$V^{(1)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -e^2 \frac{d(k^2)}{\mathbf{k}^2} - e^2 \left\{ \frac{\mathbf{p}^2 + \mathbf{q}^2}{4m^2 \mathbf{k}^2} + \frac{\mathbf{p}^2 \mathbf{q}^2}{m^2 \mathbf{k}^4} - \frac{1}{2m^2} \right\} - \frac{e^2}{2m^2} \mathbf{i} [\mathbf{p} \times \mathbf{q}] \mathbf{s} (3 + 4\kappa) + \frac{e^2}{2m^2} (1 + \kappa)^2 \left[ \mathbf{s}^2 - 1 - \frac{1}{\mathbf{k}^2} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{s})^2 \right], \quad (4.1)$$

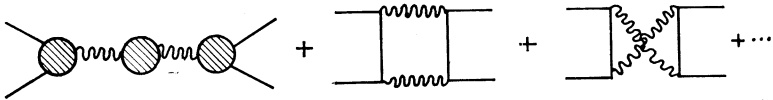
где

$$s = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2); \quad s^2 = s(s + 1); \quad \kappa = \frac{\alpha}{2\pi} + \dots$$

Кроме того, как и раньше, имеется поправка к кинетической энергии:

$$\Delta V_{kin} = -\frac{p^4}{4m^3}(2\pi)^3 \delta(p - q). \quad (4.2)$$

Обменное взаимодействие можно представить в виде диаграмм

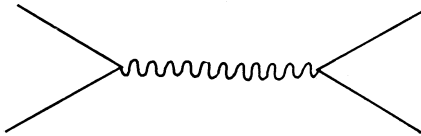


Р и с. 6.

рис. 6. В низшем порядке теории возмущений имеем только одну диаграмму (рис. 7), которая дает в потенциале вклад [19]:

$$V_a \approx \frac{e^2}{4m^2} s^2. \quad (4.3)$$

Не будем останавливаться на тонком расщеплении уровней энергии позитрония в низшем приближении, поскольку оно детально было проанализировано в других работах, например [19]. Вместо этого сосредоточим внимание на сверхтонком расщеплении  $S$ -уровней, поскольку эта величина для основного уровня ( $n = 1$ ) с большой точностью измерена на эксперименте и служит еще одним источником проверки квантовой электродинамики. Впервые эта величина была вычислена на основе уравнения Бете — Солпитера в работе Карплюса и Клейна [30]. Здесь будем использовать квазипотенциальное уравнение (1.7).



Р и с. 7.

Вклад в сверхтонкое расщепление от диаграмм одно- и двухфотонного обмена (прямого взаимодействия) нетрудно получить из результатов предыдущих разделов. Подставляя выражение (3.7) в формулу (3.6), находим для основного уровня ( $n = 1$ )

$$v_{pos}^a = \Delta W_{pos}^a (1^3S_1 - 1^1S_0) = \frac{1}{3} \alpha^4 m \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right). \quad (4.4)$$

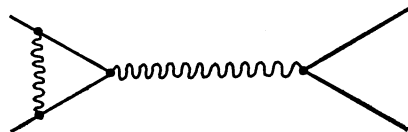
Перейдем теперь к обменному взаимодействию. Схема вычислений аналогична рассмотренной в предыдущем разделе, и не будем останавливаться на деталях вычислений, а приведем лишь

конечные результаты [30, 38]. Рассмотрим сначала вклад от диаграмм однофотонной аннигиляции (см. рис. 6):

$$\Delta W_{pos}^{ex(1)} = \langle V_a + 2T_\Gamma - 2V_c G^f V_a + [d(4m^2) - 1] V_a \rangle, \quad (4.5)$$

где  $T_\Gamma$  обозначает выражение для диаграммы рис. 8, а последний член в равенстве (4.5) соответствует диаграмме рис. 9. Используя явное выражение для  $d(k^2)$ , нетрудно найти [37]

$$d(4m^2) - 1 = -\frac{8\alpha}{9\pi}. \quad (4.6)$$



Р и с. 8.

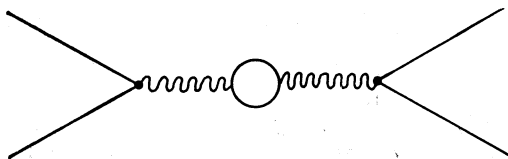
В итоге получаем

$$\Delta W_{pos}^{ex(1)} = \frac{\pi\alpha}{m^2} |\tilde{\Psi}_C(0)|^2 \left(1 - \frac{44\alpha}{9\pi}\right) \langle s^2 \rangle. \quad (4.7)$$

Вклад от диаграмм двухфотонной аннигиляции (см. рис. 6) равен:

$$\Delta W_{pos}^{ex(2)} = \frac{\pi\alpha}{m^2} |\tilde{\Psi}_C(0)|^2 \frac{\alpha}{\pi} [2(1 - \ln 2) + i\pi] \langle s^2 - 2 \rangle. \quad (4.8)$$

Мнимая часть в выражении (4.8) является отражением неупругих процессов в системе, что приводит к комплексному квазипотен-



Р и с. 9.

циалу. В данном случае эта мнимая часть определяет вероятность распада парапозитрония на два фотона:

$$w_{2\gamma} = -2 \operatorname{Im} \Delta W = \frac{1}{2} \alpha^5 m = 0,804 \times 10^{10} \text{ 1/сек.}$$

Собирая вместе выражения (4.4), (4.7) и (4.8), получаем величину расщепления синглетного и триплетного основных уровней позитрония с точностью до членов порядка  $\alpha^5$  включительно. Недавно с помощью уравнения Бете — Солпитера была вычислена [39] поправка порядка  $\alpha^6 \ln \alpha$ , которую можно получить из формулы (3.12), если положить там  $m_1 = m_2 = m$ . Таким образом, окончательно имеем

$$\nu_{pos} = \Delta W (1^3S_1 - 1^1S_0) = \frac{1}{2} \alpha^4 m \left\{ \frac{7}{6} - \frac{\alpha}{\pi} \left( \frac{16}{9} + \ln 2 \right) + \frac{3}{4} \alpha^2 \ln \alpha^{-1} \right\}. \quad (4.9)$$

### 5. Сравнение теории с экспериментом

Недавно значение постоянной тонкой структуры впервые было получено из экспериментов [40, 42], полностью независимых от квантовой электродинамики. С помощью метода, основанного на использовании туннельного эффекта Джозефсона в сверхпроводниках, была измерена величина отношения  $(e/h)$ , где  $h$  — постоянная Планка. Комбинируя это отношение с другими фундаментальными константами, можно найти [40]

$$\alpha^{-1} = 137,03608 \text{ (26) } (1,9 \text{ ppm}). \quad (5.1)$$

Цифры в скобках обозначают неопределенность в последних цифрах основного числа, а  $1 \text{ ppm} = 10^{-6}$ . Это новое уточненное значение  $\alpha$  (см. также [42]) позволяет провести более строгую и полную проверку теории [34, 40, 41].

Начнем с лэмбовского расщепления уровней  $2S_{1/2} - 2P_{1/2}$  в атоме водорода. Теоретическое значение этой величины можно получить из формул (2.24), (2.25), (3.1) с учетом радиационных поправок, рассмотренных в работе [25]. Не будем здесь выписывать это громоздкое выражение (оно содержится в работе [40]), а приведем только его численную величину с учетом нового значения (2.17) наклона форм-фактора электрона в нуле:

$$\mathcal{L}_H^{th} = \Delta W (2S_{1/2} - 2P_{1/2}) = 1057,91 \text{ (9) } \text{ Мгц}. \quad (5.2)$$

Подробный анализ численного вклада различных членов можно найти в работах [25, 41].

Эксперимент Лэмба и др. с учетом новых значений физических констант и некоторых дополнительных эффектов [40] дает для водорода

$$\mathcal{L} = 1057,86 \text{ (6) } \text{ Мгц} \quad (60 \text{ ppm}). \quad (5.3)$$

Недавно Робиско и др. было проведено экспериментальное измерение этой величины с помощью нового метода, использующего технику пересечения уровней. Получено значение [40]

$$\mathcal{L}_H = 1057,90 \text{ (6) } \text{ Мгц}. \quad (5.4)$$

Оба эти значения находятся в хорошем согласии с теоретическим предсказанием (5.2). Таким образом, новые вычисления, проведенные в работах [22, 23], позволили устранить имевшееся в течение долгого времени расхождение теории и эксперимента.

Не будем здесь обсуждать лэмбовский сдвиг в других атомах, поскольку для них значительно труднее учесть эффекты структуры и отдачи ядра. Чрезвычайно интересным было бы измерение лэмбовского сдвига в мюонном водороде, поскольку в этом случае значительно больший вклад дают эффекты поляризации вакуума и структуры протона [19, 41].

Перейдем теперь к тонкой структуре уровней. Имеются точные экспериментальные данные для тонкого расщепления [ $2P_{3/2} - 2P_{1/2}$ ] уровней. Теоретическое значение этой величины (для водорода)

$$\Delta E_{\text{H}}^{\text{th}} = 10969,026 \text{ (42) } \text{ Мгц}. \quad (5.5)$$

Прямое экспериментальное измерение этой величины, выполненное Меткалфом и др. [40], дает

$$\Delta E_{\text{H}} = 10969,127 \text{ (95) } \text{ Мгц} \text{ (8,7 ppm)}. \quad (5.6)$$

Эту величину можно также получить, комбинируя экспериментальное значение [ $2P_{3/2} - 2S_{1/2}$ ] расщепления с лэмбовским сдвигом:

$$\Delta E = \Delta W (2P_{3/2} - 2S_{1/2}) + \mathcal{L}.$$

Величина ( $\Delta E_{\text{H}} - \mathcal{L}_{\text{H}}$ ) была измерена в нескольких работах. Если в качестве  $\mathcal{L}_{\text{H}}$  взять значение (5.4), которое в настоящее время считается наиболее надежным, то найдем [40]

$$\Delta E_{\text{H}} \text{ (Мгц)} = \begin{cases} 10969,274 \text{ (68) [Кауфман, Лэмб и др.]} \\ 10969,109 \text{ (86) [Шин, Робиско и др.]} \\ 10969,061 \text{ (76) [Ворбургер и Косенс]}. \end{cases} \quad (5.7)$$

За исключением первого значения два других находятся в разумном согласии с теоретическим предсказанием (5.5).

Интригующим вызовом теоретической физике является сверхтонкое расщепление основного уровня энергии водорода, которое в настоящее время измерено с громадной точностью [43] и представляет собой наиболее точно известную физическую величину:

$$\nu_{\text{H}} = 1420 \text{ 405 751,7667 (10) } \text{ гц}. \quad (5.8)$$

Теоретическое значение, полученное на основании формулы (3.11):

$$\nu_{\text{H}}^{\text{th}} = 1420,4023 (1 + \delta_{\text{pol}}) \pm 0,0057 \text{ Мгц} \text{ (4 ppm)}, \quad (5.9)$$

где неопределенность в основном связана с ошибкой в значении  $\alpha$ . Сравнивая равенства (5.8) и (5.9), имеем

$$\delta_{\text{pol}} = (2,5 \pm 4,0) \cdot 10^{-6}.$$

Этот вывод находится в согласии с ожидаемым малым вкладом (3.10) эффектов «поляризации» протона (см. обсуждение этого вопроса в разделе 3).

Трудности, связанные с учетом вклада сильных взаимодействий, можно устранить, если рассматривать такую чисто электродинамическую систему, как мюоний. В этом случае величина  $\delta$  дается выражением (3.7). Однако до последнего времени существовала довольно большая неопределенность в значении магнитного момента мюона в боровских магнетонах, что препятствовало

точному сравнению теории с экспериментом. Лишь совсем недавно появились работы [44, 45], в которых уточнено значение этой величины. Было измерено отношение магнитного момента мюона к магнитному моменту протона:

$$a = \frac{\mu_m}{\mu_p} = \begin{cases} 3,183347 (9) (2,8 ppm) [44] \\ 3,183337 (13) (4,2 ppm) [45]. \end{cases} \quad (5.10)$$

С учетом дополнительной поправки (3.12) на основании формулы (3.11) получаем

$$\nu_m^{th} (Mгц) = \begin{cases} 4463,323 (19) \text{ для } a [44] \\ 4463,309 (22) \text{ для } a [45]. \end{cases} \quad (5.11)$$

Последние экспериментальные данные выглядят следующим образом:

$$\nu_m (Mгц) = \begin{cases} 4463,311 (12) [46] \\ 4463,3022 (89) [45]. \end{cases} \quad (5.12)$$

В целом имеется хорошее согласие теории и эксперимента.

Для позитрония наилучшее экспериментальное значение расщепления основного уровня равно [46]:

$$\nu_{pos} = 203\,403 (12) \text{ Mгц} (59 ppm), \quad (5.13)$$

что хорошо согласуется с теоретическим предсказанием (4.9):

$$\nu_{pos}^{th} = 203\,415 (9) \text{ Mгц}. \quad (5.14)$$

Таким образом, проведенный выше анализ показывает, что квантовая теория связанных состояний плюс квантовая электродинамика дают прекрасные результаты при описании двухчастичных ВП-систем. В настоящее время в области атомной физики не имеется ни одного серьезного расхождения теории и эксперимента.

## II. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВОДОРОДОПОДОБНЫХ АТОМОВ

### 6. Уровни энергии связанной системы в слабом внешнем электромагнитном поле

В отсутствие внешнего поля достаточно было проводить все рассмотрение в с. ц. и. Теперь перейдем к другой задаче, где потребуются волновые функции в произвольной системе отсчета. Пусть ВП-система находится в слабом внешнем электромагнитном поле, не зависящем от времени. Гамильтониан взаимодействия с этим полем

$$H_I(t) = \int dx J_\mu(x) A^\mu(x). \quad (6.1)$$

Вычислим изменение энергии связанного состояния по теории возмущений, произведя разложение по степеням внешнего поля.

В низшем, линейном по внешнему полю приближении получаем:

$$\left. \begin{aligned} (2\pi)^3 \delta(\Delta) 2E_B \delta E_B &\approx \langle A | H_I(t) | B \rangle; \\ \mathbf{K}_A = \mathcal{F}, \mathbf{K}_B = \mathbf{Q}; \Delta &= \mathcal{F} - \mathbf{Q}; E_B = \sqrt{M^2 + \mathcal{F}^2}; \\ M_A = M_B = M. \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Удобно перейти в брейтовскую систему отсчета, положив:

$$\mathcal{F} = -\mathbf{Q} = \frac{\Delta}{2}; \quad E_A = E_B = E = \sqrt{M^2 + \frac{\Delta^2}{4}}. \quad (6.3)$$

При этом

$$\delta E_B \approx \frac{M}{E} \delta M.$$

Тогда, используя трансляционную инвариантность и интегрируя обе части равенства (6.2) по  $\Delta$ , имеем [8, 48]

$$\delta M = \int dx j_\mu^{AB}(x) A^\mu(x), \quad (6.4)$$

где

$$j_\mu^{AB}(x) = \frac{1}{2M} \int \frac{d\Delta}{(2\pi)^3} e^{-i\Delta x} J_\mu^{AB}(\Delta);$$

$$J_\mu^{AB}(\Delta) = \langle A | J_\mu(0) | B \rangle.$$

Если внешнее поле медленно меняется в пространстве, то можно применить обычное мультипольное разложение. В частности, в том случае, когда нейтральная связанная система находится в однородных электрическом и магнитных полях [8, 48]

$$\delta M = -(\mathfrak{D} \cdot \mathcal{E}) - (\mathfrak{M} \cdot \mathcal{H}), \quad (6.5)$$

где

$$\mathfrak{D} = \int dx x j_0^{AB}(x) = -\frac{i}{2M} \left\{ \frac{\partial}{\partial \Delta} J_0^{AB}(\Delta) \right\}_{\Delta=0}; \quad (6.6)$$

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2} \int dx [x \times j^{AB}(x)] = -\frac{i}{4M} \left[ \frac{\partial}{\partial \Delta} \times J^{AB}(\Delta) \right]_{\Delta=0}; \quad (6.7)$$

$\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$  — напряженности электрического и магнитного полей. Формулы (6.5) — (6.7) содержат описание линейных эффектов Штарка и Зеемана. Для этого необходимо знать матричные элементы оператора электромагнитного тока между связанными состояниями двухчастичной системы.

Эти матричные элементы могут быть выражены [8, 14, 48] через волновые функции связанного состояния следующим образом:

$$\langle A | J_\mu(0) | B \rangle = \frac{1}{(2\pi)^6} \int d\mathbf{p} d\mathbf{q} \overset{0}{\Psi}_{A\mathcal{F}}^{(+)}(\mathbf{p}) \overset{0}{\Gamma}_\mu(\mathbf{p}, \mathbf{q}; \mathcal{F}, Q) \overset{0}{\Psi}_{BQ}^{(+)}(\mathbf{q}). \quad (6.8)$$

Параметры  $\overset{0}{\mathbf{p}}$  и  $\overset{0}{\mathbf{q}}$  определены, так же как и в равенстве (1.3), с помощью векторов  $h_{\mathcal{F}}, n^{(i)}(\mathcal{F})$  и  $h_Q, n^{(i)}(Q)$  соответственно.



Обобщенная вершинная функция  $\Gamma$  выражается в терминах пяти-точечной гриноподобной функции  $R^{(+)}$ , спроектированной на положительно частотные состояния [аналогично соотношению (1.4)]:

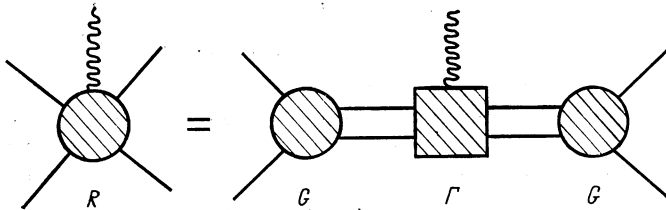
$$\left. \begin{aligned} \Gamma_\mu &= [G^{(+)}]^{-1} R_\mu^{(+)} [G^{(+)}]^{-1}; \\ R_\mu^{(+)} &= \overline{u_1 u_2} R_\mu u_1 u_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

Графически определение (6.9) представлено на рис. 10.

Вершинную функцию  $\Gamma$  обычно удается вычислить лишь приближенно [8, 14] в виде разложения по взаимодействию между частицами:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma &= \Gamma^{(0)} + \Gamma^{(1)} + \dots, \quad R = R_{(0)} + R_{(1)} + \dots, \\ [G^{(+)}]^{-1} &= [G']^{-1} - V^{(1)} - \dots; \\ \Gamma^{(0)} &= [G']^{-1} R_{(0)}^{(+)} [G']^{-1}; \\ \Gamma^{(1)} &= [G']^{-1} R_{(1)}^{(+)} [G']^{-1} - V^{(1)} G' \Gamma^{(0)} - \Gamma^{(0)} G' V^{(1)}. \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

Функция  $R_{(0)}$ , соответствует не взаимодействующим между собой частицам (импульсное приближение), и ее можно изобразить



Р и с. 10.

в виде диаграммы (рис. 11). В этом приближении функция  $\Gamma$  имеет особенно простую форму [14] (в брейтовской системе):

$$\Gamma_\mu^{(0)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\langle \mathbf{p}_1 | J_{1\mu}(0) | \mathbf{q}_1 \rangle}{2 \sqrt{\varepsilon_1(\mathbf{p}) \varepsilon_1(\mathbf{q})}} (2\pi)^3 \frac{\varepsilon_2(\mathbf{p}_2) \delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2)}{\sqrt{\varepsilon_2(\mathbf{p}) \varepsilon_2(\mathbf{q})}} + (1 \leftrightarrow 2), \quad (6.11)$$

где

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= \varepsilon_{1,2}(\mathbf{p}) h_{\mathcal{F}} + \sum_{i=1}^3 (n^{(i)}(\mathcal{F}) \cdot p_{1,2}^i); \\ q_{1,2} &= \varepsilon_{1,2}(\mathbf{q}) h_Q + \sum_{i=1}^3 (n^{(i)}(Q) \cdot q_{1,2}^i); \end{aligned}$$

$$\mathcal{F} = -Q = \frac{\Delta}{2}; \quad \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}; \quad \mathbf{q}_1 = -\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}; \quad \varepsilon_{1,2}(\mathbf{p}) = \sqrt{m_{1,2}^2 + \mathbf{p}^2}.$$

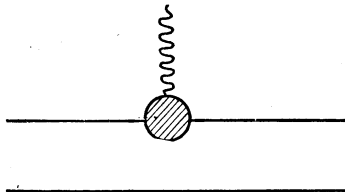
Матричный элемент оператора  $J_{1\mu}$  берется между свободными одночастичными состояниями, и в случае частиц со спином 1/2 его структура определена формулой (2.2).

Наличие  $\delta$ -функции в равенстве (6.11) приводит к уравнению относительно  $\mathbf{q}$  (или  $\mathbf{p}$ ), решение которого имеет вид

$$\mathbf{p} - \mathbf{q} = \Delta \frac{E}{M^2} \left[ \varepsilon_2(\mathbf{p}) - \frac{1}{2E} (\Delta \cdot \mathbf{p}) \right]; E = \sqrt{M^2 + \frac{\Delta^2}{4}}. \quad (6.12)$$

Не будем здесь обсуждать общую теорию эффектов Штарка и Зеемана, поскольку подробное их рассмотрение содержится в работах [17, 49], а сосредоточим внимание на диагональных матричных элементах оператора магнитного дипольного момента [50].

### 7. Магнитный момент водородоподобных атомов



Р и с. 11.

Рассмотрим выражение для магнитного момента ВП-атома, которое включало бы релятивистские и радиационные поправки порядка  $(Z\alpha)^2 (m_1/m_2)^2$  и  $\alpha (Z\alpha)^2 (m_1/m_2)$ . Для этой цели понадобятся следующий член в разложении (6.10) функции  $\Gamma$ , пространный часть которого приведем в приближенной форме [51]:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)} \approx & \frac{u_1^*(p_1) u_2^*(p_2)}{2 \sqrt{\varepsilon_1(\mathbf{p}) \varepsilon_2(\mathbf{p})}} \cdot \frac{e_1}{2m_1} \{ \alpha_1 \Lambda_1^{(-)}(p_1) \hat{V}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{p}_2) + \\ & + \hat{V}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{p}_2) \Lambda_1^{(-)}(q_1') \alpha_1 \} \frac{u_1(q_1) u_2(q_2)}{2 \sqrt{\varepsilon_1(\mathbf{q}) \varepsilon_2(\mathbf{q})}} + (1 \leftrightarrow 2), \end{aligned} \quad (7.1)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{V}(\mathbf{k}) = & \left\{ \left( 1 + \frac{\kappa_1}{2m_1} \gamma_1 \cdot \mathbf{k} \right) \left( 1 - \frac{\kappa_2}{2m_2} \gamma_2 \cdot \mathbf{k} \right) - \right. \\ & \left. - \left( \alpha_1 + \frac{\kappa_1}{2m_1} \beta_1 i [\Sigma_1 \times \mathbf{k}] \right) \left( \alpha_2 - \frac{\kappa_2}{2m_2} \beta_2 i [\Sigma_2 \times \mathbf{k}] \right) \right\} \frac{e_1 e_2}{k^2}; \end{aligned}$$

$$\Lambda^{(-)}(p) = \frac{1}{2\varepsilon(p)} [\varepsilon(\mathbf{p}) - (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m\beta)] \approx \frac{1}{2} (1 - \beta) - \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{2m},$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}_1 - \Delta; \quad \mathbf{q}' = \mathbf{q}_1 + \Delta; \quad \Sigma_i = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}.$$

Как показано Гротчем [52], за исключением аномального магнитного момента электрона все другие радиационные поправки не дают вклада в магнитный момент с требуемой точностью.  $D$ -функции, стоящие в выражении (1.6) для волновой функции

в произвольной системе отсчета, достаточно знать в приближенной форме:

$$D^{1/2}(R^W) \approx 1 + i\sigma \cdot \frac{[\mathcal{P} \times \mathbf{p}]}{4mM} \quad (7.2)$$

Подставляя равенства (7.1), (6.11) и (7.2) в соотношение (6.8) и используя определение (6.7), приходим к следующему выражению для магнитного момента:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_B = & \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} \bar{\Psi}_{B0}^{(+)}(\mathbf{p}) \frac{e_1}{2\varepsilon_1(\mathbf{p})} \left\{ \sigma_1(1 + \kappa_1) + (1 + 4\kappa_1) \frac{\mathbf{p} \times [\sigma_1 \times \mathbf{p}]}{4m_1^2} + \right. \\ & + (1 + \kappa_2) \frac{\mathbf{p} \times [\sigma_2 \times \mathbf{p}]}{2m_1 m_2} - \frac{\varepsilon_2(\mathbf{p})}{M} \left( 1 + \frac{M - \varepsilon_1(\mathbf{p}) - \varepsilon_2(\mathbf{p})}{m_2} \right) i \left[ \mathbf{p} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right] + \\ & \left. + \frac{1}{4m_1 M} \mathbf{p} \times \left[ \mathbf{p} \times \left( \frac{\sigma_1}{m_1} - \frac{\sigma_2}{m_2} \right) \right] \right\} \Psi_{B0}^{(+)}(\mathbf{p}) + (1 \leftrightarrow 2). \quad (7.3) \end{aligned}$$

Для  $S$ -состояний выражение (7.3) значительно упрощается и сводится к

$$\mathfrak{M}_B = \frac{1}{2} g_1(B) \frac{e_1}{2m_1} \langle \sigma_1 \rangle + \frac{1}{2} g_2(B) \frac{e_2}{2m_2} \langle \sigma_2 \rangle, \quad (7.4)$$

где  $g$  — факторы связанных состояний — равны

$$\begin{aligned} g_1(B) = & g_1 \left\{ 1 - \frac{\langle \mathbf{p}^2 \rangle}{3m_1^2} \left[ 1 - \frac{3\kappa_1}{2(1 + \kappa_1)} \right] + \frac{e_2}{e_1} \frac{\langle \mathbf{p}^2 \rangle}{3m_2^2} - \right. \\ & \left. - \frac{\langle \mathbf{p}^2 \rangle}{6(1 + \kappa_1)m_1(m_1 + m_2)} \left[ 1 - \frac{e_2}{e_1} \cdot \frac{m_1}{m_2} \right] \right\}; \quad (7.5) \end{aligned}$$

$$g_2(B) = g_1(B, 1 \leftrightarrow 2); \quad \frac{1}{2} g_{1,2} = 1 + \kappa_{1,2}. \quad (7.6)$$

В случае атома водорода ( $1$  — электрон;  $2$  — протон), когда  $m_1 \ll m_2$ ,  $\kappa_1 \approx \alpha/(2\pi)$ , а величина  $\langle \mathbf{p}^2 \rangle$  дается формулой (2.8), выражения (7.5) и (7.6) принимают вид:

$$\begin{aligned} g_1(H) = & g_1 \left\{ 1 - \frac{1}{3} (Z\alpha)^2 \left[ 1 - \frac{3m_1}{2m_2} + \frac{3m_1^2}{2m_2^2} (1 + Z) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\alpha}{4\pi} (Z\alpha)^2 \left( 1 - \frac{5m_1}{3m_2} \right) \right\}; \quad (7.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2(H) = & g_2 \left\{ 1 - \frac{\alpha}{3} (Z\alpha) \left[ 1 - \frac{2m_1}{m_2} + \frac{m_1^2}{2m_2^2} (6 - Z) \right] - \right. \\ & \left. - \frac{\alpha(Z\alpha)m_1}{6(1 + \kappa_2)m_2} \left[ 1 + \frac{m_1}{m_2} (4Z - 3) \right] \right\}. \quad (7.8) \end{aligned}$$

Эти результаты были подтверждены в работах [53]. С экспериментальной точки зрения представляют интерес следующие два

отношения:

$$r_{(1)}^{th} = \frac{g_1(\text{H})}{g_2(\text{H})} = \frac{g_1}{g_2} \left\{ 1 + \frac{\alpha^3}{4\pi} - \frac{\kappa_2}{6(1+\kappa_2)} \alpha^2 \frac{m_1}{m_2} \right\} \approx \frac{g_1}{g_2} (1 + 0,028 ppm); \quad (7.9)$$

$$r_{(2)} = \frac{g_1(\text{H})}{g_1(\text{D})} = 1 + \alpha^2 \frac{m_1}{4m_2} - \frac{\alpha^3}{\pi} \cdot \frac{5m_1}{24m_2} - \alpha^2 \frac{m_1^2}{4m_2^2} \approx 1 + 7,3 \times 10^{-9}, \quad (7.10)$$

где D — дейтерий. Отношение  $r_{(1)}$  используется для экспериментального определения величины магнитного момента протона в единицах магнетона Бора. На опыте измерена [40] величина

$$\frac{m_2}{m_1} r_{(1)} = 658,21073 \quad (10) \quad (0,15 ppm). \quad (7.11)$$

Отсюда, используя выражение (7.9) и экспериментальное значение  $g$ -фактора электрона [40], получаем

$$\frac{\mu_p}{\mu_B} = g_2 \frac{m_1}{m_2} = 0,00152103214 \quad (23) \quad (0,15 ppm). \quad (7.12)$$

Отметим, что в работе [40] использовалось ошибочное теоретическое выражение для  $r_{(1)}$  и поэтому получен результат, несколько отличный от (7.12).

Не так давно впервые было измерено отношение  $r_{(2)}$  («изотопический эффект»)

$$r_{(2)} = \begin{cases} 1 + (7,2 \pm 1,2) \times 10^{-9} & [54]; \\ 1 + (9,4 \pm 1,4) \times 10^{-9} & [55]. \end{cases} \quad (7.13)$$

Теоретическое значение (7.10) находится в прекрасном согласии с результатом работы [54] и несколько в худшем с данными работы [55]. Таким образом, необходимы дальнейшие экспериментальные исследования с лучшей точностью.

В целом надо отметить, что прецизионные измерения электромагнитных свойств атомов (атомных  $g$ -факторов электрона и протона) дают весьма ценную информацию и являются новой весьма перспективной областью проверки квантовой электродинамики и квантовой теории связанных состояний.

### З а к л ю ч е н и е

Проведенное выше рассмотрение показывает, что квазипотенциальный метод служит эффективным средством для вычисления уровней энергии и электромагнитных свойств ВП-атомов. В некоторых случаях достигается значительное упрощение расчетов, по сравнению с формализмом, использующим уравнение Бете — Солпитера. Особенно это относится к учету поправок, связанных со структурой и движением ядра. Ковариантная формулировка

квазипотенциального метода позволила последовательно описать поведение ВП-системы во внешних электромагнитных полях. Эта формулировка дает также в принципе возможность рассмотреть процессы рассеяния на связанных системах.

В последние годы заметно оживление интереса к физике простейших атомных систем, что нашло отражение в проведении трех крупных международных конференций по этой тематике [56—58]. Это не удивительно, поскольку эти системы продолжают давать весьма ценную информацию о справедливости квантовой электродинамики и релятивистской квантовой теории связанных состояний. Теория ВП-систем имеет достаточно надежную основу, чего нельзя сказать о многих других разделах теории элементарных частиц.

Обзор современного состояния квантовой электродинамики в целом и электромагнитных взаимодействий содержится в работах [34, 41].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Salpeter E. E., Bethe H. A. *Phys. Rev.*, 1951, **84**, 1232.  
Gell-Mann M., Low F. *Phys. Rev.*, 1951, **84**, 350.
2. Logunov A. A., Tavkhelidze A. N. *Nuovo cimento*, 1963, **29**, 380.
3. Dyson F. J. *Phys. Rev.*, 1953, **91**, 1543.
4. Гарсеванишвили В. Р., Матвеев В. А., Слепченко Л. А. ЭЧАЯ, т. I, вып. 1. М., Атомиздат, 1970, с. 91.
5. Blankenbessler R., Sugar R. *Phys. Rev.*, 1966, **142**, 1051;  
Namyslowki J. M. *Phys. Rev.*, 1967, **160**, 1522; Kadyshevsky V. G. *Nucl. Phys.*, 1968, **B6**, 125.
6. Десимиров Г., Стоянов Д. Препринт ОИЯИ P-1658, 1964;  
Хелашвили А. А. Препринт ОИЯИ P2-4327, 1969.
7. Матвеев В. А., Мурадян Р. М., Тавхелидзе А. Н. Препринты ОИЯИ E2-3498, 1967 и P2-3900, 1968.
8. Фаустов Р. Н. ТМФ, 1970, **3**, 240.
9. Боголюбов П. Н. ТМФ, 1970, **5**, 244.
10. Тодогов I. T. *Phys. Rev.*, 1971, **D3**, 2351.
11. Gross F. *Phys. Rev.*, 1969, **186**, 1448.
12. Grotch H., Yennie D. R. *Rev. Mod. Phys.*, 1969, **41**, 350.
13. Eddington A. *Relativity Theory of Protons and Electrons*, Cambridge, University Press, 1936.
14. Фаустов Р. Н. Препринт ОИЯИ P2-5691, 1971.
15. Faustov R. N. *Nucl. Phys.*, 1966, **75**, 669.
16. Nguyen Van Hieu, Faustov R. N. *Nucl. Phys.*, 1964, **53**, 337.
17. Бете Г., Солпитер Э. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. Перев. с англ. М., Физматгиз, 1960.
18. Baranger M., Dyson F. J., Salpeter E. E. *Phys. Rev.*, 1952, **88**, 680.
19. Ахизер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М., Физматгиз, 1959. Соколов А. А. Введение в квантовую электродинамику. М., Физматгиз, 1958.
20. Soto M. F. Jr. *Phys. Rev., Lett.*, 1966, **17**, 1153.

21. Appelquist T., Brodsky S. J. Phys. Rev., 1970, 2, 2293. (см. также ссылки [58, 41]).
22. Lautrup B. E., Peterman A., de Rafael E. Preprint CERN, TH. 1140, 1970; Peterman A. Preprint CERN, T. N. 1286, 1971.
23. Barbieri R., Mignasco J. A., Remiddi E. Nuovo cimento, 1970, 3, 588; Peterman A. Preprint CERN, TH 1354, 1971.
24. Sternheim M. M. Phys. Rev., 1963, 130, 211.
25. Erickson G. W., Yennie D. R. Ann. Phys., 1965, 35, 27,447 (см. также ссылку [57]).
26. Salpeter E. E. Phys. Rev., 1952, 87, 328; 1953, 89, 92.
27. Fulton T., Martin P. C. Phys. Rev., 1954, 95, 811.
28. Петрунькин В. А., Семенко С. Ф. «Ядерная физика», 1966, 3, 489.
29. Brodsky S. J., Erickson G. W. Phys. Rev., 1966, 146, 26.
30. Karplus R., Klein A. Phys. Rev., 1952, 87, 848.
31. Зиновьев Г. М. и др. «Ядерная физика», 1970, 11, 1284.
32. Iddings C. K. Phys. Rev., 1965, 138B, 446 (см. также ссылку [57]).
33. Drell S. D., Sullivan I. D. Phys. Rev., 1967, 154, 1477.
34. Соловьев Л. Д. «Тр. XV Международной конференции по физике высоких энергий». Киев, 1970; Вильсон Р. Там же.
35. Тюхтяев Ю. Н., Фаустов Р. Н. «Ядерная физика», 1965, 2, 882.
36. Fulton T., Owen D. A., Rerko W. W. Preprint Johns Hopkins University, 1970.
37. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М., Гостехиздат, 1957.
38. Фаустов Р. Н. Препринт ОИЯИ Р-1572, 1964; Международная зимняя школа теоретической физики при ОИЯИ. Курс лекций, т. 2, Дубна, 1964, с. 108.
39. Fulton T., Owen D. A., Rerko W. W. Phys. Rev., Lett., 1970, 24, 1035; Preprint Johns Hopkins University, 1970.
40. Taylor B. N., Parker W. H., Langenberg D. N. Rev. Mod. Phys., 1969, 41, 375 (см. также ссылку [58]).
41. Brodsky S. J., Drell S. D. Ann. Rev. Nucl. Scient., 1970, 20, 147.
42. Finnegan T. F. e. a. Phys. Rev., Lett., 1970, 24, 738.
43. Essen L. e. a. Nature, 1971, 229, 110.
44. Hague J. F. e. a. Phys. Rev., Lett., 1970, 25, 628.
45. De Voe R. e. a. Phys. Rev., Lett., 1970, 25, 1779; 1971, 26, 213.
46. Crane P. e. a. Phys. Rev. Lett., 1971, 27, 474.
47. Theriot E. D., Jr., Beers R. H., Hughes V. W. Phys. Rev., Lett., 1967, 18, 767 (см. также ссылку [57]).
48. Боголюбов Н. Н., Матвеев В. А., Тавхелидзе А. Н. Вопросы теории элементарных частиц. Дубна, 1968, с. 269.
49. Brodsky S. J., Parsons R. G. Phys. Rev., 1967, 163, 134; 1967, 176, 423; Brodsky S. J., Primack J. R. Ann. Phys., 1970, 52, 315.
50. Faustov R. N. Nuovo cimento, 1970, 69A, 37.
51. Faustov R. N. Phys., Lett., 1970, 33B, 422.
52. Grotch H. Phys. Rev., Lett., 1970, 24, 39.
53. Grotch H., Hegstrom R. A. Phys. Rev., 1971, A4, 59; Close F. E., Osborn E. Preprint SLAC-PUB-854, 1971; Phys., Lett., 1971, 34B, 400.

54. Hughes W. M., Robinson H. G. Phys. Rev., Lett., 1969, 23, 1209 (см. также ссылку [58]).
55. Larson D. J., Valberg P. A., Ramsey N. F. Phys. Rev., Lett., 1969, 23, 1369.
56. Proc. of First Int. Conf. on Atomic Physics, N.Y. Plenum Press, Inc. 1969.
57. Physics of the One- and Two-Electron Atoms, Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1969.
58. Proc. of the Int. Conf. on Precision Measurement and Fundamental Constants, 1970.