

УДК 539.144.3+539.142.2

О ГРУППАХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИММЕТРИЙ В ЯДРАХ

*Г. Н. Афанасьев,
П. П. Райчев*

Рассмотрены возможные применения динамических групп к описанию спектров и вероятностей переходов в ядрах.

The dynamical groups are studied in view of possible applications for describing of the levels and transition probabilities in nuclei.

ВВЕДЕНИЕ

Представим себе физика, изучившего квантовую механику, но не имеющего представления о методах и моделях ядерной физики. Он знает, что система нуклонов описывается уравнением Шредингера, пишет многочастичные уравнения Шредингера и пытается решить его в аналитическом виде. После ряда безуспешных попыток убеждается, что имеется только одно точное решение: случай, когда частицы взаимодействуют по гармоническому закону. В этом случае задача сводится к $3N$ — 3-мерному осциллятору. Сравнивая энергетические спектры ядер со спектром $3N$ — 3-мерного осциллятора, этот физик убеждается, что ни о каком согласии не может быть и речи, а потому заключает, что его двухчастичное взаимодействие плохо, пытается его усложнить. Уравнение Шредингера в этом случае в аналитическом виде не решается, так что приходится обратиться к помощи ЭВМ. Для начала такой физик пробует решить численно квантовомеханическую задачу трех тел. В качестве двухчастичного взаимодействия он подставляет пустотное взаимодействие, правильно описывающее фазы рассеяния, убеждается, что потенциалы, правильно описывающие все фазы рассеяния, не дают правильных энергий связи и длин рассеяния и решает ограничиться потенциалами, описывающими одну фазу рассеяния и дающими правильную энергию связи

третия. Найденный потенциал он применяет к системам с большим числом нуклонов и, разумеется, терпит полную неудачу. Проанализировав ее причины, приходит к выводу, что имеется неопределенность двоякого рода: во-первых, неизвестен двухчастичный потенциал и, во-вторых, эффективное взаимодействие в ядрах ничего общего не имеет с пустотным взаимодействием.

Наш физик приходит в отчаяние и обращается к ядерным моделям. Глядя на спектры сферических четно-четных ядер, он замечает оболочечную структуру, т. е. сгущения и разрежения уровней, припоминает, что аналогичная картина имеет место в простейших квантовомеханических системах, например в атоме водорода, где оболочечная структура появляется под влиянием центрального кулоновского поля. Можно предположить, что в ядре существует некоторое среднее поле, в котором движутся нуклоны ядра, хотя нашему физическому и не ясно, как короткодействующие ядерные силы могут привести к среднему полю.

Далее можно заметить, что нижайшие уровни четно-четных ядер не описываются оболочечной моделью. Так, он приходит к коллективным моделям. Анализ этих моделей вскрывает ряд неточностей и противоречий. Например, из квантовой механики известно, что если ядро в определенном состоянии имеет спин нуль, то волновая функция этого состояния есть скаляр относительно вращений, квадрат модуля ее есть также скаляр и поэтому коэффициенты, описывающие отклонение формы поверхности ядра от сферической равны нулю. Между тем, основным состоянием некоторых четно-четных ядер приписывается спин нуль и отличная от нуля деформация. Далее, известно утверждение, что сферически симметричное тело (сст) не может вращаться по чисто квантовым причинам. Изучая его, можно прийти к выводу, что либо это утверждение есть чистая тавтология, либо оно неверно. В самом деле, если понятие «тело вращается» означает, что волновая функция, описывающая состояние этого тела, преобразуется при поворотах системы координат по неприводимому представлению группы вращений с отличным от нуля угловым моментом, то сст (волновая функция которого есть скаляр, т. е. инвариант относительно поворота) вращаться не может, поскольку описывается волновой функцией с равным нулю угловым моментом. Если же сст называть такое тело, у которого равны главные моменты инерции (более широкое по сравнению с предыдущим определение), то никакого квантовомеханического запрета не возникает. В самом деле, из-за дискретности структуры тела при повороте на бесконечно малый угол форма тела может не совпадать сама с собой. Таким образом, можно прийти к выводу, что реализация вращения или иных коллективных мод определяется характером ядерных сил между нуклонами.

Убедившись, что вращения, колебания и другие эффекты плохо поддаются наглядной интерпретации, наш физик начинает рассматривать ядро как своего рода черный ящик. В самом деле, рассуждает он, уровни ядер и переходы между ними — единственное, что известно из опыта. Кроме того, он замечает в спектрах ядер некоторые закономерности. Например, в спектрах деформированных ядер видны ротационные полосы, в спектрах же сферических — слабо расщепленные триплеты (а кое-где и квинтеты) уровней. Далее, можно заметить, что уровни сферических ядер имеют тот же состав по угловым моментам, что и мультиплеты симметричного $SU(5)$ -представления. Конечные ротационные полосы в легких ядрах можно пытаться описать $SU(3)$ -мультиплетами. Наш физик не спешит идентифицировать ротационные уровни со спектром частот какой-нибудь модели. Он предполагает, что всегда можно отыскать достаточно широкую группу, которая бы описала наблюдаемые на опыте уровни и переходы между ними. Возможно, думает он, за появление ротационных и вибрационных уровней ответственно нарушение гамильтонианом какой-то более высокой симметрии. Он отыскивает минимальную группу, описывающую вибрационные и ротационные уровни, объявляет ее динамической группой, строит базис этой группы, вычисляет вероятности переходов. Заметив, что один и тот же набор уровней можно описать с помощью мультиплетов различных групп, он догадывается, что за внешними проявлениями симметрий, наблюдаемых в спектрах ядер, стоит динамика. Наш физик начинает классифицировать возможные взаимодействия, смотря по тому, какие симметрии они нарушают, анализировать проистекающие отсюда следствия. Таковой могла бы быть точка зрения физика, не знакомого с традиционными методами ядерной физики. Насколько эта точка зрения полезна для решения задач ядерной физики, увидим ниже.

2. ТЕРМИНОЛОГИЯ

Теорию групп применяют в том случае, если известно, что гамильтониан системы обладает точной или приближенной симметрией. Если гамильтониан коммутирует с операторами X_1 и X_2 , то переставляем его и с их коммутатором $[X_1, X_2]$. Совокупность всех операторов, с которыми коммутирует гамильтониан, образует группу симметрии этого гамильтониана. В дальнейшем будем иметь дело только с непрерывными группами, а для них можно ограничиться только инфинитезимальными преобразованиями, как показывает теорема Нетер [1].

Пусть группа G -симметрии уравнения Шредингера есть группа Ли размерности m . Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ — параметры группы G , а I_1, I_2, \dots, I_3 — инфинитезимальные операторы, соответ-

ствующие этим параметрам. Тогда, во-первых, каждый инфинитезимальный оператор соответствует некоторой сохраняющейся физической величине и, во-вторых, все законы сохранения, связанные с элементами группы G , являются следствием m законов сохранения, связанных с m инфинитезимальными операторами.

Инфинитезимальные операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[J_\alpha, I_\beta] = c_{\alpha\beta}^\gamma I_\gamma \quad (\text{сумма по } \gamma). \quad (1)$$

Коэффициенты $c_{\alpha\beta}^\gamma$ полностью определяют структуру группы преобразований и называются структурными константами группы.

Поскольку I_α коммутируют с гамильтонианом, то I_α , действуя на собственную функцию гамильтониана, приводит к линейной комбинации собственных функций, отвечающих одному и тому же собственному значению. Если I_α исчерпывают все преобразования, оставляющие гамильтониан инвариантным, т. е. I_α — инфинитезимальные операторы группы G -симметрии гамильтониана, то представления группы G можно использовать для классификации собственных функций и значений гамильтониана.

Заметим, что соотношениям (1) можно удовлетворить различным выбором операторов I_α , которые реализуются с помощью матриц, дифференциальных операторов, операторов рождения и уничтожения фермионов, бозонов и т. д. В качестве примера рассмотрим трехмерную группу вращений $O(3)$. По определению, трехмерные вращения оставляют инвариантной квадратичную форму $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Инфинитезимальные операторы можно выразить как в дифференциальной форме:

$$X_{ij} = x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (2)$$

так и в матричной:

$$(X_{ij})_{\alpha\beta} = \delta_{i\alpha}\delta_{\beta j} - \delta_{i\beta}\delta_{j\alpha}, \quad (3)$$

причем и в том и в другом случае выполняется соотношение (1)

$$[X_{ij}, X_{kl}] = \delta_{jk}X_{il} - \delta_{jl}X_{ik} - \delta_{ik}X_{jl} + \delta_{il}X_{jk}.$$

В случае (2) базисное пространство, в котором действуют X_{ij} , есть функции от x_i , а в случае (3) — трехкомпонентные векторы.

Представление называется неприводимым, если в базисном пространстве невозможно выделить подпространство, инвариантное относительно преобразований группы G и отличное от полного базисного пространства. Иными словами, это означает, что, беря произвольный базисный вектор и действуя на него генераторами группы, можно исчерпать все базисные векторы.

Из генераторов группы можно составить операторы, коммутирующие со всеми элементами группы. Такие операторы называются

ся инвариантными операторами или операторами Казимира группы. В случае трехмерных вращений таким оператором является квадрат углового момента: $L^2 = \sum_{ij} (X_{ij})^2$. Имеет место следующая лемма Шура.

Если представление $\tau(g)$ ($g \in G$) группы G неприводимо, то всякий линейный оператор A , коммутирующий со всеми операторами $\tau(g)$ ($g \in G$), кратен единичному. Иными словами, из соотношений $\tau(g)A = A\tau(g)$, ($g \in G$) вытекает равенство $A = \lambda E$, где λ — некоторое число; E — единичный оператор.

Таким образом, все базисные векторы неприводимого представления принадлежат одному и тому же собственному значению оператора Казимира группы. С другой стороны, необходимо различать базисные векторы внутри данного неприводимого представления. Для этого можно было бы выделить из всей совокупности операторов группы максимальное число коммутирующих между собой генераторов и базисные векторы внутри данного представления различать собственными значениями таких операторов. К сожалению, подобная классификация не всегда имеет физический смысл. Дело в том, что наблюдаемые на опыте характеристики уровней отвечают часто операторам, коммутирующим не со всей совокупностью коммутирующих генераторов группы, а только с некоторыми. Обычно поступают следующим образом. Состояния классифицируют собственными значениями физических операторов и генераторов группы, коммутирующих с физическими операторами (и между собой). При этом часто оказывается, что таких операторов недостаточно для полной классификации базисных векторов. Так, возникает проблема отыскания недостающего квантового числа. Задача нахождения дополнительных операторов, классифицирующих состояния, оказывается нетривиальной.

Итак, уровни системы можно классифицировать, с одной стороны, собственными значениями гамильтониана системы, а с другой — собственными значениями операторов Казимира. Возникает вопрос, не являются ли эти величины взаимосвязанными? Есть две точки зрения. Если гамильтониан H полностью определяет свойства системы, то спектр собственных значений H и их вырождение полностью определяют представленные операторы Казимира, которые в этом случае являются функцией H и перестают быть независимыми. Ясно, что в таком случае имеем представления весьма специального типа. Наоборот, если за основу взять операторы Казимира группы, то H — функция операторов Казимира: $H = f(C_1, C_2, \dots, C_n)$. В дальнейшем ограничиваемся только такими случаями, когда H является однозначной функцией операторов Казимира.

Энергетические уровни системы можно интерпретировать как результат нарушения гамильтонианом более высокой симмет-

рии. Задача ставится таким образом: даны мультиплеты группы G . Можно ли найти более широкую группу G' , такую, чтобы при сужении $G' \supset G$ каждый мультиплет G встречался один раз? Группа G' обычно называется группой неинвариантности гамильтониана или динамической группой.

3. СУПЕРМУЛЬТИПЛЕТЫ ВИГНЕРА И КВАЗИСПИН

Начало применению теории групп к ядерной физике было положено Вигнером [2]. Здесь попытаемся изложить результаты Вигнера на основе теории вторичного квантования. Гамильтониан системы нуклонов, взаимодействующих посредством двухчастичных сил, имеет вид

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum \int \Psi_{\sigma\tau}^+(\mathbf{r}) \nabla^2 \Psi_{\sigma\tau}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \sum \int \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' [\Psi^+(\mathbf{r}) \Psi^+(\mathbf{r}')]_{S_3 T_3}^{ST} V^{ST}(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) [\Psi(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r})]_{S_3 T_3}^{ST}, \quad (4)$$

где $\Psi_{\sigma\tau}^+(\mathbf{r})$, $\Psi_{\sigma\tau}(\mathbf{r})$ — амплитуды рождения и уничтожения нуклонов в состоянии с проекциями спина и изоспина ($\sigma\tau$). Квадратные скобки в (4) означают геометрическое сложение амплитуд в состоянии с данными S , T .

Ограничимся здесь случаем сферической симметрии в обычном и изоспиновом пространствах, т. е. потенциальная энергия не зависит от индексов S_3 , T_3 и гамильтониан инвариантен относительно вращений в спиновом и изоспиновом пространствах. Генераторы спиновой и изоспиновой групп равны

$$\begin{aligned} S_0 &= \sum_{\sigma\tau} \sigma \int \Psi_{\sigma\tau}^+(\mathbf{r}) \Psi_{\sigma\tau}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}; \\ S_1 &= \sum_{\tau} \int \Psi_{\frac{1}{2}\tau}^+(\mathbf{r}) \Psi_{-\frac{1}{2}\tau}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}; \\ S_{-1} &= \sum_{\tau} \int \Psi_{-\frac{1}{2}\tau}^+(\mathbf{r}) \Psi_{\frac{1}{2}\tau}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}; \\ T_0 &= \sum_{\sigma\tau} \tau \int \Psi_{\sigma\tau}^+(\mathbf{r}) \Psi_{\sigma\tau}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}; \\ T_1 &= \sum_{\sigma} \int \Psi_{\sigma\frac{1}{2}}^+(\mathbf{r}) \Psi_{\sigma,-\frac{1}{2}}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}; \\ T_{-1} &= \sum_{\sigma} \int \Psi_{\sigma,-\frac{1}{2}}^+(\mathbf{r}) \Psi_{\sigma\frac{1}{2}}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Так как взаимодействие зависит только от абсолютной величины расстояний между нуклонами, гамильтониан H коммутирует

также с операторами орбитального момента:

$$L_{ij} = \sum_{\sigma\tau} \int \Psi_{\sigma\tau}^+(\mathbf{r}) (x_i p_j - x_j p_i) \Psi_{\sigma\tau}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

Наконец, гамильтониан коммутирует с оператором числа частиц

$$N = \sum_{\sigma\tau} \int d\mathbf{r} \Psi_{\sigma\tau}^+(\mathbf{r}) \Psi_{\sigma\tau}(\mathbf{r}).$$

Между тем имеет смысл только полный угловой момент, т. е. гамильтониан инвариантен только относительно преобразований, задаваемых генераторами:

$$J_i = L_i + S_i.$$

Таким образом, наблюдаемые на опыте состояния гамильтониана должны характеризоваться квантовыми числами J , T (для данного ядра N и T_0 фиксированы). Предположим на минуту, что потенциал взаимодействия не зависит от S , T . В этом случае гамильтониан оказывается инвариантным относительно более широкой группы, именно $SU(4)$. Уровни энергии, принадлежащие одному и тому же $SU(4)$ -представлению, вырождены. Полученные таким образом $SU(4)$ -мультиплеты носят название вигнеровских. Учтем теперь зависимость V от (ST) . В этом случае неприводимое $SU(4)$ -представление распадается на неприводимые представления прямого произведения группы изоспина и углового момента. Возникает вопрос, имеют ли супермультиплеты Вигнера отношение к действительности. Этот вопрос был исследован в работе [3], перевод которой дан в Приложении. Из этой работы вытекает, что супермультиплетная схема хорошо работает даже там, где она не должна работать (тяжелые ядра, jj -связь).

Рассмотрим систему частиц, взаимодействующих посредством парных сил в состоянии с угловым моментом 0 и заполняющих только одну j оболочку с энергией ε_j :

$$H = \varepsilon_j N - G S_1 S_{-1}.$$

Здесь G — спаривательная константа; операторы S_1 рождают и уничтожают пары частиц с угловым моментом 0:

$$S_1 = \sum (-1)^{j-m} a_{jm}^+ a_{j,-m}^+; \quad S_{-1} = (S_1)^+;$$

N — оператор числа частиц

$$N = \sum a_{jm}^+ a_{jm}.$$

Положим $N - j - \frac{1}{2} = S_0$. Тогда, как легко убедиться, коммутационные соотношения между S_μ эквивалентны коммутационным соотношениям между операторами углового момента. Опера-

торы S_μ называются операторами квазиспина. Собственные значения гамильтониана H равны

$$\varepsilon_j (S_0 + j + 1/2) - G [S(S + 1) - S_0^2 + S_0].$$

Здесь S — квазиспин (аналог углового момента); S_0 — его третья проекция; $-S \leq S_0 \leq S$.

Последовательным применением оператора S_{-1} к вектору состояния можно добиться того, чтобы вектор состояния не содержал скалярных пар частиц. Поскольку собственные значения оператора квадрата квазиспина не меняются от применения к базисной функции оператора S_{-1} , получаем следующую простую интерпретацию квазиспина $S = \left| v - j - \frac{1}{2} \right|$, где v — число неспаренных частиц (синьорити). Эта точно решаемая модель была использована Керманом [4] для выяснения точности метода канонического преобразования.

Непосредственное обобщение формализма квазиспина приводит к модели, в которой нуклоны, заполняющие одну оболочку с энергией ε_j , взаимодействуют посредством парных сил в $J = 0$, $T = 1$ состоянии (jj -связь). В зарядово-симметричном случае гамильтониан системы

$$H = \varepsilon_j N - G (A_p^+ A_p + A_n^+ A_n + A_0^+ A_0),$$

где G — спаривательная константа; A_p^+ , A_n^+ , A_0^+ (A_p , A_n , A_0) — операторы рождения (уничтожения) пары протонов, нейтронов и смешанной пары в состоянии со спином 0 и изоспином 1; N — оператор числа частиц.

Коммутируя операторы N , A_p^+ , A_n^+ между собой, убеждаемся, что для получения замкнутой алгебры следует ввести еще три оператора изоспина T_0 , T_1 , T_{-1} . Полученная алгебра оказывается изоморфной группе $O(5)$.

Оператор Казимира $O(5)$ $C_2(O_5) = S_0^2 - 3S_0 + 3T^2 + 2A^+A$. Здесь положили $S_0 = N - (2j + 1)$. Собственные значения $C_2(O_5)$ равны $\sigma(\sigma + 3) + \tau(\tau + 1)$, где σ , τ равны максимальным значениям изоспина и оператора S_0 , содержащимся в данном представлении. Отсюда для собственных значений рассматриваемого гамильтониана имеем: $H = \varepsilon_i S_0 + \frac{1}{2} G [T(T + 1) + S_0(S_0 - 3) - \sigma(\sigma + 3) - \tau(\tau + 1)]$.

В работах [5, 6] методами функций Грина и обобщенного канонического преобразования была показана энергетическая невыгодность сосуществования pp -, nn - и np -парных корреляций в состоянии $S = 0$, $T = 1$. Покажем, что к этому выводу можно прийти из теоретико-групповых соображений. Заметим сначала, что упомянутая выше группа $O(5)$ содержит в качестве подгруппы прямое произведение нейтронной и протонной квазиспиновых

групп. Оператор рождения протонной (нейтронной) пары, действуя на произвольное состояние этого базиса, приводит к единственному состоянию:

$$A_p^+ |l_p m_p, l_n m_n\rangle = \\ = \sqrt{(l_p - m_p)(l_p + m_p + 1)} |l_p, m_p + 1, l_n, m_n\rangle.$$

Поэтому при расщеплении сверток типа $\langle A_p^+ A_p \rangle$ возникает единственное промежуточное состояние, которое обычно отождествляется с основным состоянием соседнего четно-четного ядра. С другой стороны, оператор рождения нейтрон-протонной пары является тензором ранга 1/2 относительно каждой из квазиспиновых подгрупп. При действии оператора A_0^+ на произвольный вектор состояния возникает четыре промежуточных состояния $(l_p \pm \frac{1}{2}, l_n \pm \frac{1}{2})$, ни одно из которых не является физически выделенным. Имеется, однако, теорема [7], утверждающая, что при наличии в системе нескольких конкурирующих состояний, в которые может произойти конденсация пары, таковой конденсации не происходит вообще.

До сих пор здесь было рассмотрено только спаривание в состоянии $T = 1$. Между тем в ядрах не менее важно спаривание в состоянии с $T = 0$. Частично это можно учесть, если перейти к схеме связи и учитывать спаривание в состояниях $L = 0$ ($S = 0, T = 1$ и $S = 1, T = 0$). Возникающая при этом алгебра операторов изоморфна $O(8)$. В работе [8], перевод которой дан в Приложении, проанализированы вопросы, связанные с нарушением $O(8)$ -симметрии в ядрах, а также связь с супермультиплетами Вигнера. Показано, что группа $O(8)$ может описать как изоспиновую структуру уровней, так и энергетические щели в четно-четных ядрах. Как и в случае $Sp(4)$, границы применимости $O(8)$ оказались значительно шире предполагаемых.

4. НЕКОТОРЫЕ ТОЧНО РЕШАЕМЫЕ КОЛЛЕКТИВНЫЕ МОДЕЛИ

Эллиотовская модель [9] была первой, в которой для объяснения наблюдаемого на опыте ротационного спектра вводилось квадруполь-квадрупольное взаимодействие: $V_{\text{int}} = -\chi Q_\mu^+ Q_\mu$. Предполагалось, что пятерка операторов Q_μ вместе с тройкой операторов углового момента L_ν образуют замкнутую алгебру, именно $SU(3)$: $[L_\mu, L_\nu] \sim L_{\mu+\nu}$, $[L_\mu, Q_\nu] \sim Q_{\mu+\nu}$, $[Q_\mu, Q_\nu] = = L_{\mu+\nu}$. Добавление V_{int} к трехмерному сферическому осциллятору приводит к снятию вырождения внутри $SU(3)$ -мультиплетов. В самом деле, имеем $C_2(SU_3) = L^2 + QQ$. Здесь $C_2(SU_3)$ — оператор Казимира (квадратичный) $SU(3)$. Собственные значения

$C_2 \sim \frac{1}{3}(\lambda^2 + \lambda_\mu + \mu^2) + \lambda + \mu$. Числа (λ, μ) задают неприводимое $SU(3)$ -представление. Состояния внутри неприводимого представления маркируются угловым моментом L , третьей его проекцией M и квантовым числом K . Эти числа меняются в пределах

$$\begin{aligned} l &= K, K+1, \dots, K+\lambda \text{ при } K \neq 0; \\ l &= \lambda, \lambda-2, \dots, 0(1) \text{ при } K=0; \\ K &= \mu, \mu-2, \dots, 0(1). \end{aligned}$$

Собственные значения V_{int} равны $\chi [L(L+1) - \frac{8}{3}(\lambda^2 + \lambda_\mu + \mu^2) - 8(\lambda + \mu)]$.

Таким образом, в модели возникают конечные ротационные полосы, причем число K различает разные ротационные полоски. Возникает вопрос: имеет ли $SU(3)$ -схема отношение к действительности? Выясним, как ведут себя вероятности $B(E2)$ -переходов внутри данной ротационной полосы. Имеем для полосы основного состояния

$$B(E2; I_i \rightarrow I_f) = \frac{1}{2I_i+1} |\langle \lambda I_f || Q || \lambda I_i \rangle|^2.$$

Приведенные матричные элементы:

$$\begin{aligned} \langle \lambda I || Q || \lambda I \rangle &= -(2\lambda + 3) \sqrt{\frac{I(I+1)(2I+1)}{(2I-1)(2I+3)}}; \\ \langle \lambda, I+2 || Q || \lambda I \rangle &= \left[\frac{(\lambda-I)(\lambda+I+3)}{2I+3} (I+1)(I+2) \right]^{1/2}; \\ \langle \lambda, I-2 || Q || \lambda I \rangle &= \left[\frac{I(I-1)(\lambda+I+1)(\lambda-I+1)}{2I-1} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Следовательно, при наличии точной $SU(3)$ -симметрии можно было бы наблюдать следующую картину для $B(E2)$ -переходов внутри основной ротационной полосы (рис. 1). Ясно, однако, что качественно картина не меняется и для переходов внутри других полос. В самом деле, конечность полосы предполагает существование состояний, отвечающих началу и концу полосы, переходы на которые и с которых должны быть равны нулю. Такое поведение $B(E2)$ -переходов справедливо, по-видимому, не только для $SU(3)$ -мультиплетов, но и для мультиплетов произвольной компактной группы.

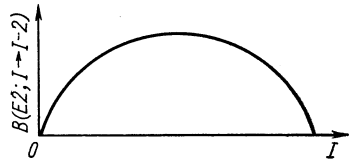


Рис. 1. Зависимость $B(E2; I \rightarrow I-2)$ от I для состояний основной полосы в $SU(3)$ -схеме.

Обратимся к эксперименту [10]. Измеренные в $B(E2)$ -переходы для основных полос легких четно-четных ядер приведены на рис. 2. Хотя картины, подобной рис. 1, не наблюдается, все

же для ^{24}Mg и ^{28}Si очевидно уменьшение вероятностей $B(E2)$ -переходов по мере продвижения к большим угловым моментам, что как будто указывает на компактность группы, описывающей эти полосы. Отметим, что используемые в схеме Эллиота квадрупольные операторы отличаются коммутационными соотношениями и способом реализации от стандартных квадрупольных операторов, используемых, например, в модели с QQ -взаимодействием.

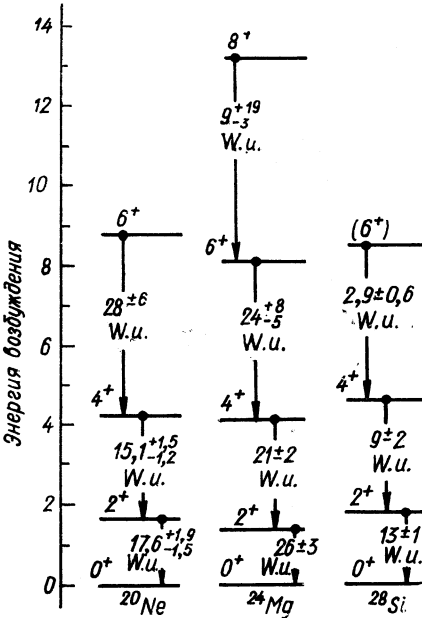


Рис. 2. Экспериментальные [10] значения $B(E2)$ -переходов для ^{20}Ne , ^{24}Mg , ^{28}Si .

Обратимся теперь к $SL(3, R)$ — некомпактной версии $SU(3)$. Из некомпактности $SL(3, R)$ следует, что все ее унитарные представления (только такие преобразования сохраняют норму) бесконечномерны. Это означает, что неприводимое представление $SL(3, R)$ содержит одну или несколько бесконечных ротационных полосок. Вычислим вероятности $B(E2)$ -переходов внутри состоя-

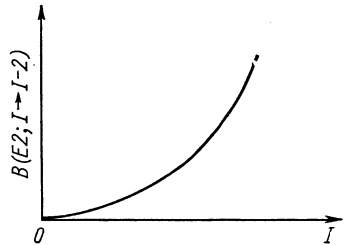


Рис. 3. Зависимость $B(E2; I \rightarrow I - 2)$ от I для состояний основной полосы в схеме $SL(3, R)$.

ний основной ротационной полосы в предположении, что эта полоса описывается неприводимым $SL(3, R)$ -представлением. Для приведенных матричных элементов имеем выражения:

$$\langle I \| Q \| I \rangle = a \sqrt{\frac{2}{3} \frac{I(I+1)(2I+1)}{(2I-1)(2I+3)}};$$

$$\langle I-2 \| Q \| I \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{I(I-1)(2I-1)} \left[\frac{4a^2}{(2I-1)^2} + 1 \right].$$

Здесь a задает симметричное $SL(3, R)$ -представление. Ход зависимости $B(E2; I \rightarrow I - 2)$ для основной полосы показан на рис. 3. Такая ситуация, по-видимому, сохраняется для всех ротационных мультиплетов некомпактных групп. Таким образом, полу-

чаем четкий критерий, позволяющий установить, является ли данная ротационная полоска мультиплетом компактной или некомпактной группы. Иное $SL(3, R)$ -рассмотрение дано в работе [11]. Перевод этой работы дан в Приложении. Укажем только, что более корректным представляется вычисление вероятностей в рамках $Sp(3, 3)$ алгебры, которая содержит как $SL(3, R)$, так и операторы электромагнитных переходов.

Рассмотрим теперь случаи [12], когда компоненты квадрупольного тензора коммутируют между собой. Возникающая при этом группа изоморфна $O(3) \times T(5)$, где $T(5)$ — трансляции в пятимерном пространстве. Удобно положить $Q_\mu = x_\mu$, где x_μ — координаты в пятимерном пространстве. Из x_μ можно образовать две скалярные комбинации

$$C_2 = x_0^2 - 2x_1x_{-1} + 2x_2x_{-2};$$

$$C_3 = x_0^3 - 3x_0(x_1x_{-1} + 2x_2x_{-2}) + 3\sqrt{3/2}(x_2x_{-1}^2 + x_{-2}x_1^2),$$

где C_2 и C_3 — операторы Казимира $O(3) \times T(5)$. Перейдем к координатам $(\beta\gamma\vartheta\Psi)$. $x_\mu = [D_{\mu 2}(\varphi, \vartheta, \Psi) + D_{\mu, -2}(\varphi, \vartheta, \Psi)] \frac{\beta \sin \gamma}{\sqrt{2}} + D_{\mu 0}(\varphi, \vartheta, \Psi) \beta \cos \gamma$. Тогда $C_2 = \beta^2$; $C_3 = \beta^3 \cos 3\gamma$. Компоненты углового момента в новых координатах выглядят следующим образом: $L_0 = \frac{1}{i} p(\varphi)$; $L_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \left[\frac{p(\Psi)}{\sin \vartheta} + ip(\vartheta) - \text{ctg } \vartheta p(\varphi) \right]$; $L_{-1} = (L_1)^\dagger$. Собственные функции L^2, L_0 имеют вид $|\beta\gamma IMK\rangle \sim D_{MK}^I(\varphi, \vartheta, \Psi)$.

Компоненты квадрупольного момента следующим образом действуют на $|IMK\rangle$:

$$\begin{aligned} & x_\mu |\beta\gamma IMK\rangle = \\ & = \sum_{J'} \langle 2\mu IM | J', M + \mu \rangle \left[\frac{\beta \sin \gamma}{\sqrt{2}} (|\beta\gamma I'M + \mu, K + 2\rangle \langle 22IK | I'K + 2\rangle + \right. \\ & \quad \left. + |\beta\gamma I'M + \mu, K - 2\rangle \langle 2, -2IK | I'K - 2\rangle + \right. \\ & \quad \left. + \beta \cos \gamma |\beta\gamma I'M + \mu K\rangle \langle 20IK | I'K\rangle \right]. \end{aligned}$$

Отсюда легко вычислить приведенные матричные элементы:

$$\begin{aligned} \langle \beta\gamma I'K \| Q \| \beta\gamma IK \rangle &= \beta \cos \gamma \langle IK20 | I'K \rangle; \\ \langle \beta\gamma I'K \pm 2 \| Q \| \beta\gamma IK \rangle &= \frac{\beta \sin \gamma}{\sqrt{2}} \langle IK2 \pm 2 | I', K \pm 2 \rangle \end{aligned}$$

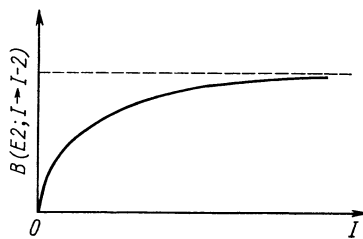


Рис. 4. Зависимость $B(E2; I \rightarrow I-2)$ от I для состояний основной полосы в схеме $O(3) \times T(5)$.

Вероятности $B(E2)$ -переходов внутри полосы основного состояния приведены на рис. 4, т. е. имеем случай, промежуточный между двумя предыдущими.

5. ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ КОЛЛЕКТИВНОЙ МОДЕЛИ БОРА — МОТТЕЛЬСОНА

Примем за основу, что уровни сферических ядер суть вырожденные по угловым моментам мультиплеты наиболее симметричного $SU(5)$ -представления. В дальнейшем будут существенны сведения о представлениях группы $SU(5)$ и ее подгрупп. Изложим предварительно необходимые математические детали.

Гамильтониан пятимерного осциллятора $H \sim -p^2 + x^2$, где $p^2 = p_0^2 - 2p_1p_{-1} + 2p_2p_{-2}$; $x^2 = x_0^2 - 2x_1x_{-1} + 2x_2x_{-2}$; $p_i \equiv \partial/\partial x_i$. Величины x_i , p_i обладают следующими свойствами относительно эрмитового сопряжения $(x_\mu)^+ = (-1)^\mu x_\mu$; $(p_\mu)^+ = (-1)^{\mu+1} p_{-\mu}$. Введем операторы фононов

$$x_\mu = [b_\mu^+ + (-1)^\mu b_{-\mu}]/\sqrt{2}; \quad p_\mu = [b_\mu - (-1)^\mu b_{-\mu}^+]/\sqrt{2},$$

и тогда гамильтониан следующим образом выражается через b^+ , b :

$$H \sim b_\mu^+ b_\mu.$$

Генераторы $SU(5)$ имеют вид $b_\mu^+ b_\nu$, а $SU(5)$ содержит в качестве подгруппы $O(5)$. Значение группы $O(5)$ определяется тем, что ее генераторы коммутируют с кинетической энергией ($\sim p^2$). Группа $O(5)$ состоит из тройки операторов углового момента $L_0 = \mu x_\mu p_\mu$; $L_1 = \sqrt{2}(x_2 p_1 + x_{-1} p_{-2}) + \sqrt{3}(x_1 p_0 + x_0 p_{-1})$; $L_{-1} = (L_1)^+$ и тензора третьего ранга:

$$F_0 = x_2 p_2 - x_{-2} p_{-2} - 2(x_1 p_1 - x_{-1} p_{-1}); \quad F_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} [L_1, F_0];$$

$$F_2 = \frac{1}{5} [L_1, F_1]; \quad F_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}} [L_1, F_2]; \quad F_{-\mu} = (F_\mu)^+.$$

Квадратичный оператор Казимира $O(5)$ равен

$$C(O_5) = L^2 + F^2;$$

$$F^2 = F_0(F_0 + 1) + 2F_{-1}F_1 + 10F_{-2}F_2 + 10F_{-3}F_3 + 6L_0.$$

Группа углового момента выделяется тем требованием, чтобы x_μ , p_μ были тензорными операторами ранга 2 относительно трехмерных вращений. Такие вращения оставляют инвариантной кроме (xx) также и форму третьей степени

$$(xxx) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ \mu_1 & \mu_2 & -\mu_1 - \mu_2 \end{pmatrix} x_{\mu_1} x_{\mu_2} x_{-\mu_1 - \mu_2}.$$

Генераторы $O(5)$ выглядят одинаково в переменных (x, p) и (b^+, b) .

Приведем соотношения между квадратичными скалярными операторами:

$$p^2 = 1/2 (b^+b^+) + 1/2 (bb) - (b^+b) - \frac{5}{2};$$

$$x^2 = 1/2 (b^+b^+) + 1/2 (bb) + (b^+b) + \frac{5}{2};$$

$$xp = 1/2 (bb) - 1/2 (b^+b^+) - \frac{5}{2},$$

где $(b^+b^+) = (-1)^\mu b_\mu^+ b_\mu^+$; $(bb) = (-1)^\mu b_\mu b_\mu$; $(b^+b) = b_\mu^+ b_\mu$. Внутри неприводимого $O(5)$ -представления состояния с данным угловым моментом могут встречаться несколько раз. В качестве оператора, собственные значения которого различают состояния с одинаковыми l , можно взять оператор

$$\Omega = F\tau = F_0\tau_0 + \sqrt{3/2} (F_1\tau_{-1} + F_{-1}\tau_1) + 5\sqrt{3/2} (F_2\tau_{-2} + F_{-2}\tau_2) + \frac{5}{\sqrt{2}} (F_3\tau + F_{-3}\tau_3),$$

где

$$\tau_0 = L_0^3 - 3L_{-1}L_0L_1 + 3L_{-1}L_1 - 3/2L_0^2 + 1/2L_0;$$

$$\tau_1 = 1/3 [L_1, \tau_0]; \quad \tau_2 = 1/5 [L_1, \tau_1]; \quad \tau_3 = -[L_1\tau_2]; \quad \tau_{-\mu} = (\tau_\mu)^+.$$

В применении к состояниям с угловым моментом l (с проекцией, также равной l) действие оператора Ω сводится к $[(l+1)(l+2) \times (l+3/2) - 1/6(l+1)(9l+28)y_l + (l+5/2)y_l^2 - y_l^3/6] F_0 | \lambda l \rangle$, где $y_l = [L^2 - l(l+1)]/2$. Таким образом, достаточно знать, как действует оператор F_0 на $|\lambda, l\rangle$, чтобы построить собственные функции Ω . К сожалению, неясно, отвечает ли Ω какой-либо физически сохраняющейся величине. Наконец, отметим, что неприводимое симметричное $SU(5)$ -представление, описывающее n фоновый уровень, содержит представления $O(5)$: $\lambda = n, n-2, \dots, 0(1)$. Число λ , описывающее неприводимое $O(5)$ -представление, равно половине максимального углового момента, содержащегося в данном неприводимом $O(5)$ -представлении. Спектральный состав (по угловым моментам) $\lambda O(5)$ -представления можно найти, например, в работе [13].

Заметим далее, что операторы

$$I_1 = (b^+b^+)/\sqrt{2}; \quad I_{-1} = (bb)/\sqrt{2}; \quad I_0 = (b^+b + 5/2)/2$$

генерируют некомпактную алгебру $O(2, 1)$. Операторы Казимира $O(5)$ и $O(2, 1)$ связаны выражением $C_2(O_5) = 20I^2 - 5/4$, где $I^2 = I_0^2 - I_1I_{-1} - I_{-1}I_1$. Эти соотношения означают, что одни и те же состояния можно классифицировать как по неприводимому $O(5)$ -представлению, так и по $O(2, 1)$ -представлению.

Далее, оператор числа фононов совпадает с третьей проекцией I в некотором фиктивном пространстве. Напомним, что $O(2, 1)$ -представления маркируются одним квантовым числом n_0 , равным минимальному числу фононов в данном представлении, а векторы внутри представления различаются по числу фононов: $n = n_0, n_0 + 2, n_0 + 4, \dots$. Очевидно, что гамильтониан пятимерного гармонического осциллятора, пропорциональный I_0 , входит в состав более широкой алгебры, генераторы которой равны $b_\mu^+ b_\nu, b_\mu^+ b_\nu^+, b_\mu b_\nu$. Эти генераторы реализуют симметричное $Sp(5, 5)$ -представление некомпактной группы.

Посмотрим на эти величины иначе. Группа $O(5)$ определялась ранее как совокупность преобразований, оставляющих инвариантной элемент длины (xx) в пятимерном пространстве, а группа $O(3)$ как совокупность преобразований, оставляющих инвариантной любую скалярную комбинацию x_μ . Таких независимых комбинаций две — (xx) и (xxx) . Поэтому $O(3)$ можно получить как совокупность всех преобразований, оставляющих инвариантными как (xx) , так и (xxx) . Операторы L_μ реализуют линейное представление $O(3)$. Это означает, что вращения, отвечающие инфинитезимальным операторам L_μ , переводят x_μ в линейные комбинации x_μ : $x_\mu \rightarrow a_{\mu\nu} x_\nu$. Здесь $a_{\mu\nu}$ — не зависящие от x элементы ортогональной матрицы с единичным определителем. С другой стороны, ниоткуда не следует линейность преобразований.

Попробуем отыскать частные нелинейные реализации $O(3)$. Генераторы $O(3)$ ищем в виде: $\tilde{L}_i = f_{ik} \partial/\partial x_k$, где f_{ik} — пока произвольные функции x_μ . Действуя операторами L_i на (x, x) и приравнявая результат нулю, получаем соотношение между $\sum_k (-1)^k x_k f_{i,-k} = 0$ ($i = 1, 2, 3$). Выражая одно f_{ik} через остальные, убеждаемся, что \tilde{L}_i можно определить в виде $\tilde{L}_i = \varphi_{ik} L_k$, где φ_{ik} реализуют линейное $O(3)$ -представление. Операторы \tilde{L}_i автоматически оставляют инвариантными (xx) и (xxx) . Остается потребовать, чтобы \tilde{L}_i удовлетворяли типичным для $O(3)$ коммутационным соотношениям $[\tilde{L}_0, \tilde{L}_\mu] = \mu \tilde{L}_\mu$, $[\tilde{L}_1, \tilde{L}_{-1}] = \tilde{L}_0$, $\tilde{L}_{-1} = (\tilde{L}_1)^+$. Эти условия приводят к системе нелинейных дифференциальных уравнений для φ_{ik} . Сделаем упрощение, потребовав, чтобы операторы \tilde{L}_μ коммутировали с L_ν . В этом случае задача имеет однозначное решение

$$\varphi_{00} = \sqrt{\frac{6x_2 x_{-2} - (2\xi_0 + x_0)^2}{3(\xi_2^2 - 3\xi_0^2)}},$$

где

$$[\xi_0 = \beta \cos \gamma; \xi_2 = (\beta \sin \gamma)/\sqrt{2}; \beta^2 = (xx); \beta^3 \cos 3\gamma = (xxx)];$$

$$\varphi_{01} = -[L_1, \varphi_{00}]; \quad \varphi_{0-1} = [L_{-1}, \varphi_{00}] \text{ и т. д.}$$

Таким образом, те операторы, которые обычно называют компонентами углового момента во внутренней системе координат, на самом деле являются нелинейной реализацией $O(3)$.

Заметим также, что должна существовать нелинейная реализация $O(5)$. Это следует из того, что операторы L_μ не коммутируют с оператором Казимира линейной реализации $O(5)$. С другой стороны, преобразования $[\tilde{L}_\mu, F_k]$ оставляют инвариантной квадратичную форму (xx) и поэтому реализуют нелинейное $O(5)$ -представление. К сожалению, здесь не смогли получить в явном виде нелинейную реализацию $O(5)$, а подробнее эти вопросы рассмотрены в работах [14, 15].

Посмотрим, нельзя ли изложенное выше применить к описанию спектров ядер. Экспериментальные данные [16] (рис. 5) показывают поведение уровней при переходе от сферических ядер к деформированным. Именно, при переходе в область γ нестабильных ядер происходит расщепление $SU(5)$ -мультиплетов на $O(5)$ -мультиплеты, сами же мультиплеты $O(5)$ сохраняют свою целостность. Ясно, что потенциальная энергия может зависеть только от β . В этом случае можно придумать несколько точно решаемых моделей. Например, потенциал можно выбрать в виде $V(\beta) = V_0 \left(\frac{\beta^2 - \beta_0^2}{\beta} \right)^2$. В этом случае энергетические уровни

$$E_{n, \lambda} = -2V_0\beta_0^2 + 2\sqrt{V_0} [(2n + 1) + \sqrt{\beta_0^4 V_0 + (\lambda + 3/2)^2}].$$

Список всех случаев, при которых результат выражается в элементарных функциях, можно найти в работе [17]. При переходе в область деформированных ядер происходит нарушение симметрии относительно $O(5)$, притом такое, что квантовое число K , являющееся собственным значением \tilde{L}_0 , имеет смысл. Это означает, что гамильтониан коммутирует с \tilde{L}_0 . При любом потенциале, зависящем от (β, γ) , точно это соотношение выполнить нельзя. В самом деле, имеем

$$[H, \tilde{L}_0] \varphi(\beta\gamma\varphi\vartheta\Psi) \sim \left[\frac{1}{\sin^2(\gamma - 2\pi/3)} - \frac{1}{\sin^2(\gamma + 2\pi/3)} \right] \times \\ \times (L_x L_y + L_y L_x) \varphi(\beta\gamma, \varphi\vartheta, \Psi).$$

Это выражение может быть с хорошей точностью равно нулю, если функция φ обращается в нуль в области, где $\frac{1}{\sin^2(\gamma - 2\pi/3)} - \frac{1}{\sin^2(\gamma + 2\pi/3)}$ велико, т. е. вблизи $\gamma = \pi/3$. Это в свою очередь приводит к ограничению на зависимость потенциала от γ : потенциал должен быть отличен от нуля в малой окрестности $\gamma = 0$, например, иметь вид $V \sim \exp(\gamma_1/\sqrt{\gamma_0^2 - \gamma^2})$. При переходе от деформированных ядер к γ нестабильным симметрия снова

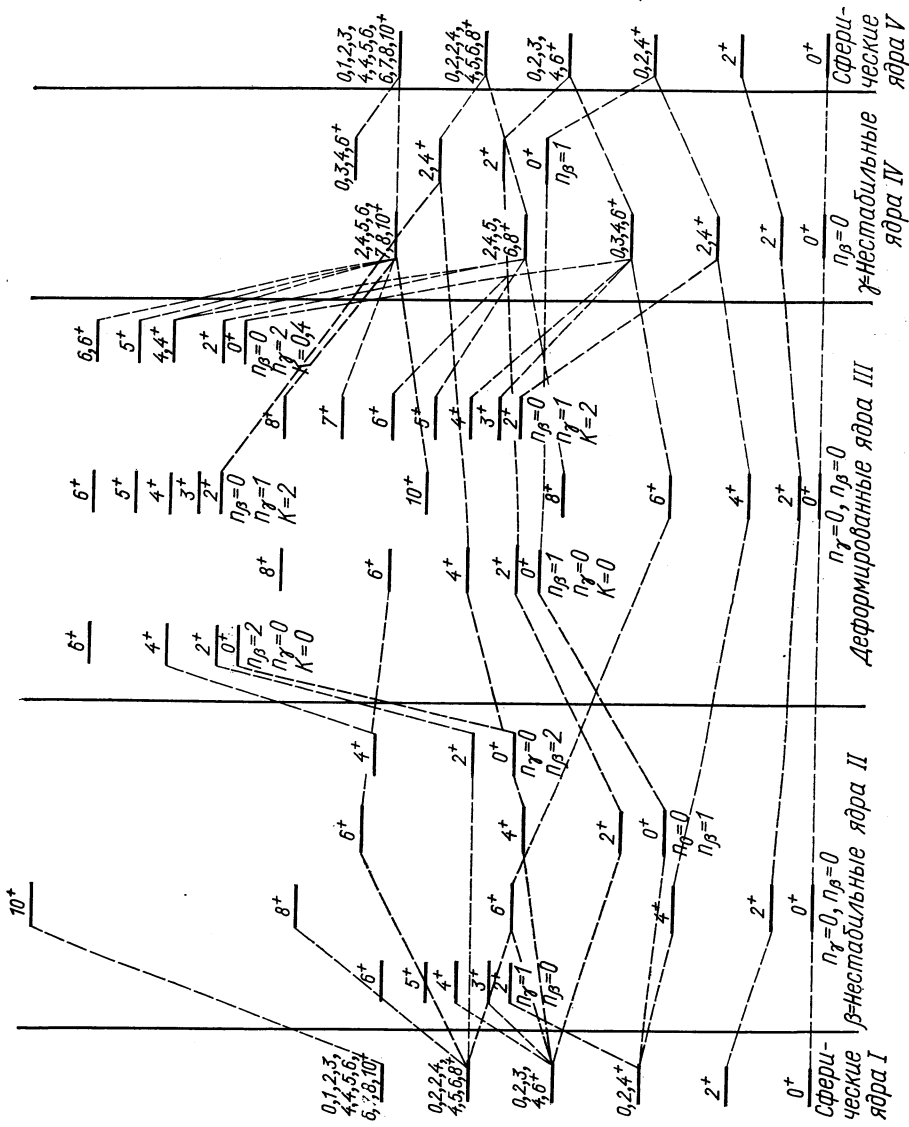


Рис. 5. Поведение энергетических уровней при переходе от сферических к деформированным ядрам [16].

должна увеличиться (потенциал зависит только от γ , т. е. допустим более широкие преобразования, связанные инфинитезимальной вариацией β).

6. О ФЕРМИОННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ГРУПП В ЯДРАХ

Процесс использования теории групп в ядерной физике можно условно разбить на два этапа. На первом постулируем какую-либо симметрию в ядре (либо нарушаем ее определенным образом) и анализируем вытекающие отсюда следствия (энергетический спектр, вероятности переходов и т. п.). При этом будем отвлечаться от реализации используемой алгебры операторов. На втором принимаем во внимание, что реальные ядра состоят из фермионов, и выясняем, какие операторные алгебры можно построить из фермионных операторов. При этом исключаем из рассмотрения алгебры, определяемые геометрическими размерами оболочки и числом частиц в ядре [18, 19]. Построенные алгебры оказываются одними и теми же для всех ядер, и мы поэтому называем их универсальными. Рассмотрим прежде всего операторы, сохраняющие число фермионов, т. е. операторы вида:

$$F_i = \sum_{1,2} \langle 1 | f_i | 2 \rangle a_1^+ a_2. \quad (5)$$

Здесь индексы (1, 2) обозначают совокупность одночастичных индексов некоторого полного базиса. Последующие выводы не зависят от выбора одночастичного базиса. Ради простоты можно, например, выбрать функции гармонического сферического осциллятора. В этом случае $(1) = (n, l, m)$, где n — радиальное квантовое число; l — угловой момент частицы; m — третья проекция момента. Из (5) следует

$$[F_i, F_k] = \sum \langle 1 | [f_i, f_k] | 2 \rangle a_1^+ a_2.$$

Таким образом, алгебра операторов F_i , составленных из операторов рождения и уничтожения фермионов, изоморфна алгебре операторов f_i , действующих в пространстве одночастичных функций. Изоморфизм этих алгебр отнюдь не предполагает эквивалентности представлений: как правило, операторы f_i реализуют весьма частные типы представлений, тогда как F_i могут реализовать самые общие представления алгебр. Одночастичные функции зависят только от координат трехмерного пространства x_1, x_2, x_3 , поэтому операторы f_i могут зависеть только от x_i и $p_k = \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}$ или же от следующих комбинаций

$$\beta_0^+ = (x_3 - |p_3|) / \sqrt{2}; \quad \beta_{\pm 1}^+ = [(x_1 \pm ix_2) - i(p_1 \pm ip_2)] / 2i;$$

$$\beta_\mu = (\beta_\mu^+)^+, \quad [\beta_\nu, \beta_\mu^+] = \delta_{\mu, \nu}.$$

Составим их x_i , p_k операторы углового момента

$$\begin{aligned} X_{ik} &= x_i p_k - x_k p_i; \\ \Lambda_0 &= X_{12} = \beta_1^\dagger \beta_1 - \beta_{-1}^\dagger \beta_{-1}; \\ \Lambda_1 &= (X_{13} + iX_{23})/\sqrt{2} = \beta_1^\dagger \beta_0 + \beta_0^\dagger \beta_{-1}; \\ \Lambda_{-1} &= (X_{13} - iX_{23})/\sqrt{2} = \beta_0^\dagger \beta_1 + \beta_{-1}^\dagger \beta_0. \end{aligned}$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением таких операторов f_i , которые являются полиномами от x_i , p_k (соответственно от β_μ , β_ν^\dagger).

Ясно, что полиномиальные функции f_i можно привести к виду $\varphi_m(x) \varphi_n(p)$ или же $\varphi_p(\beta^\dagger) \varphi_q(\beta)$, где $\varphi_m(x)$ — многочлен степени m относительно x и т. п.

Если все операторы f_i содержат x_i и p_k (соответственно как β_μ^\dagger , так и β_ν^\dagger), то алгебра коммутационных соотношений оказывается замкнутой при условии $m + n \leq 2$. Если же среди функций f_i есть такие, которые зависят только от x_i (или только от p_i , или только от β_μ , или только от β), то эти последние оказываются генераторами абелевой подгруппы.

Кратко перечислим известные нам алгебры, генераторы которых можно представить в виде (5):

а) алгебра углового момента [группа $O(3)$]

$$L_\mu = \sum \langle 1 | L_\mu | 2 \rangle a_1^\dagger a_2;$$

б) алгебра фононов

$$b_\mu = \sum \langle 1 | \beta_\mu | 2 \rangle a_1^\dagger a_2;$$

$$b_\mu^\dagger = \sum \langle 1 | \beta_\mu^\dagger | 2 \rangle a_1^\dagger a_2;$$

в) группа $SU(3)$. Она состоит из генераторов L_μ вместе с генераторами Q_μ ($\mu = 0, \pm 1, \pm 2$), где

$$Q_0 = \frac{1}{3} \sum \left\langle 1 \left| \frac{x^2 + x_2^2}{2} - x_3^2 + \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} - p_3^2 \right| 2 \right\rangle a_1^\dagger a_2,$$

а остальные генераторы находятся с помощью соотношений

$$Q_1 = [L_1, Q_0]; \quad Q_2 = [L_1, [L_1, Q_0]]; \quad Q_{-\mu} = (Q_\mu)^\dagger.$$

Они удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[Q_1, Q_{-1}] = L_0; \quad [Q_2, Q_{-2}] = 4L_0 \quad \text{и т. д.};$$

г) группа $SL(3, R)$. Она состоит из трех операторов углового момента L_μ и операторов \tilde{Q}_μ ($\mu = 0, \pm 1, \pm 2$). Здесь

$$\tilde{Q}_0 = 1/3 \sum \langle 1 | x_1 p_1 + x_2 p_2 - 2x_3 p_3 | 2 \rangle a_1^\dagger a_2.$$

Остальные \tilde{Q}_μ получаются с помощью соотношений

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_1 &= [L_1, \tilde{Q}_0]; \quad \tilde{Q}_2 = \{L_1 [L_1, \tilde{Q}_0]\}; \\ \tilde{Q}_{-\mu} &= (\tilde{Q}_\mu)^+.\end{aligned}$$

В отличие от генераторов Q_μ $SU(3)$ -группы генераторы \tilde{Q}_μ удовлетворяют коммутационным соотношениям $[\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_{-1}] = -L_0$; $[\tilde{Q}_2, \tilde{Q}_{-2}] = -4L_0$ и т. д.;

д) группы $Sp(3,3)$. К этой группе можно прийти двумя путями. Во-первых, дополняя алгебру $SL(3, R)$ операторами:

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \sum \langle 1 | p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 | 2 \rangle a_1^+ a_2; \quad [L_\mu, \pi_0] = 0; \\ \pi_0^2 &= \frac{1}{3} \sum \langle 1 | p_1^2 + p_2^2 - 2p_3^2 | 2 \rangle a_1^+ a_2; \\ \pi_{\pm 1}^{(2)} &= \pm [L_{\pm 1}, \pi_0^{(2)}]; \quad \pi_{\pm 2}^{(2)} = [L_{\pm 1} [L_{\pm 1}, \pi_0^{(2)}]]; \\ \chi_0 &= \sum \langle 1 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 | 2 \rangle a_1^+ a_2; \quad [L_\mu, \chi_0] = 0; \\ \chi_0^{(2)} &= \frac{1}{3} \sum \langle 1 | x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 | 2 \rangle a_1^+ a_2; \\ \chi_{\pm 1}^{(2)} &= \pm [L_{\pm 1}, \chi_0^{(2)}]; \quad \chi_{\pm 2}^{(2)} = \{L_{\pm 1} [L_{\pm 1}, \chi_0^{(2)}]\}\end{aligned}$$

и

$$c = \sum \langle 1 | xp + px | 2 \rangle a_1^+ a_2.$$

Во-вторых, к этой группе можно прийти, дополняя генераторы $SU(3)$ -группы операторами

$$\begin{aligned}B_0 &= \sum \langle 1 | (\beta_0^+)^2 - 2\beta_1^+ \beta_{-1}^+ | 2 \rangle a_1^+ a_2; \quad [L_\mu, B_0] = 0; \\ B_0^{(2)} &= \frac{1}{6} \sum \langle 1 | \beta_1^+ \beta_1^+ + (\beta_0^+)^2 | 2 \rangle a_1^+ a_2; \quad B_{\pm 1}^{(2)} = [L_{\pm 1}, B_0^{(2)}]; \\ B_{\pm 2}^{(2)} &= \{L_{\pm 1} [L_{\pm 1} B_0^{(2)}]\}; \\ c &= \sum \langle 1 | x^2 + p^2 | 2 \rangle a_1^+ a_2\end{aligned}$$

и эрмитово сопряженными к ним. Кроме того, здесь не рассматриваются линейные реализации.

Таким образом, перечислили все полупростые группы, генераторы которых имеют вид $\varphi(1, 2) a_1^+ a_2$, исключая расширения $SU(3)$, $SU(3, 1)$, которые даны в работе [20]. Генераторы абелевых подгрупп, входящих в неполупростые группы, суть функции только x_i (или p , или β^+ , или β). Удобно выбрать такие их комбинации, которые являются тензорными операторами как относительно трехмерных вращений, так и относительно унитарных преобразований в трехмерном пространстве.

Пусть $T_m^{n,l}(x)$ одна из компонент тензорного оператора, зависящего к примеру, только от x_i :

$$T_m^{n,l}(x) = r^l \exp(-r^2/2) L_n^{l+1/2}(r^2) Y_{lm}(\vartheta, \varphi),$$

где L_n^l — полиномы Лагера; Y_{lm} — сферические функции.

Тогда фермионная реализация операторов $T_m^{nl}(x)$ имеет вид

$$T_m^{nl} = \sum \langle n_1 l_1 m_1, n l m | n_2 l_2 m_2 \rangle a_1^+ a_2,$$

где $\langle n_1 l_1 m_1, n l m | n_2 l_2 m_2 \rangle$ — коэффициент векторного сложения, возникающий при редукции двух наиболее симметричных $SU(3)$ -представлений, или, что в данном случае одно и то же, — коэффициенты Броди — Мошинского.

Включим теперь в рассмотрение операторы, меняющие число фермионов. Положим

$$F_i = \sum \langle 1 | f_i | 2 \rangle a_1^+ a_2;$$

$$G_i = \sum \langle 1 | g_i | 2 \rangle a_1^+ a_2^+;$$

$$H_i = \sum \langle 1 | g_i^+ | 2 \rangle a_1 a_2.$$

Имеем

$$[F_i, G_i] = 2 \sum \langle 1 | g_i f_i | 2 \rangle a_1^+ a_2^+;$$

$$[G_i, H_i] = 4 \sum \langle 1 | g_i g_i^+ | 2 \rangle a_1^+ a_2 - \sum \langle 1 | g_i g_i^+ | 2 \rangle.$$

Если, как и ранее, предположим, что f_i образуют замкнутую алгебру, то совокупность операторов F_i, G_j, H_k будет замкнута, если произведения $f_i g_k$ входят в совокупность операторов g_k , а произведения $g_i g_k$ входят в совокупность f_k . Ясно, что это возможно только для тривиальных операторов типа матриц Паули, операторов инверсии пространства, обращения времени и т. д.

Посмотрим, к чему приведет учет спина и изоспина фермионов. Любой оператор F можно представить в виде

$$F = F^{(0,0)} + F^{(1,0)} + E^{(0,1)} + F^{(1,1)}.$$

Индексы (σ, τ) обозначают неприводимое представление относительно вращения в спиновом и изоспиновом пространствах, по которому преобразуются операторы $F^{(\sigma, \tau)}$. Например $F^{(0,0)}$ состоит из всех функций, рассмотренных ранее. Операторы $F^{(0,1)}$ содержат операторы вида $F_k^{(0,1)} = \sum \langle 1 | f \tau_k | 2 \rangle a_1^+ a_2$, где τ_k — одна из изоспиновых матриц Паули; индексы (1, 2) включают также спин-изоспиновые переменные; f — набор тензорных операторов, состоящих из координат и импульсов, который был рассмотрен ранее. Если в качестве f взять скалярную функцию, не зависящую от координат и импульсов, то получим вигнеровскую $SU(4)$ -группу для операторов $F^{(\lambda, \mu)}$. Дополняя $SU(4)$

операторами G, H и выбирая в качестве g_i оператор обращения времени и спин-изоспиновые матрицы Паули, приходим к $O(8)$ -группе.

Особенно привлекательной в приведенном выше перечне операторов является возможность строить операторы фононов из фермионов. Эти фононы удобно взять в качестве «кирпичиков» для построения замкнутой алгебры операторов. Из таких фононов можно построить те же алгебры, что и упомянутые выше, но с ограничением: получаем только наиболее симметричные представления алгебр. Ввиду важности для дальнейшего, построим из фононов $SU(3)$ - и $SL(3, R)$ -генераторы. Генераторы группы «углового момента»

$$L_0 = b_1^+ b_1 - b_{-1}^+ b_{-1}; \quad L_1 = b_1^+ b_0 + b_0^+ b_{-1}.$$

Группа $SU(3)$ получается, если дополнить L_μ оператором

$$Q_0 = \frac{1}{3} (b_1^+ b_1 + b_{-1}^+ b_{-1} - 2b_0^+ b_0)$$

и всеми теми, которые получаются коммутацией Q_0 с L_k и эрмитовым сопряжением.

Группа $SL(3, R)$ получается введением операторов

$$\tilde{Q}_0 = \frac{1}{3i} [b_1^+ b_{-1}^+ + (b_0^+)^2 - b_1 b_{-1} - b_0^2] = \frac{2}{3} (x_1 p_1 + x_2 p_2 - 2x_3 p_3);$$

$$Q_1 = [L_1, \tilde{Q}_0] = \frac{1}{i} (b_1^+ b_0^+ + b_0 b_{-1}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [x_3 (p_1 + i p_2) + (x_1 + i x_2) p_3];$$

$$Q_2 = [L_1, \tilde{Q}_1] = \frac{1}{i} [(b_1^+)^2 - (b_{-1})^2] = \frac{1}{i} (x_1 + i x_2) (p_1 + i p_2).$$

Операторы Казимира для $SU(3)$ - и $SL(3, R)$ -групп в данном случае определяются собственным значением операторов

$$C = b_\mu^+ b_\mu \quad \text{[для } SU(3)\text{]};$$

$$\tilde{C} = x p = [b_0^2 - 2b_1 b_{-1} - (b_0^+)^2 + 2b_1^+ b_{-1}^+] / 2i \quad \text{[для } SL(3, R)\text{]}.$$

Покажем, что включение взаимодействия между фононами, не нарушающего их числа, приводит к ротационной полоске как и в модели Эллиота, т. е. имеем

$$V = \sum_M^{L=0,2} G_L [b^+ b^+]_M^L [b b]_M^L = \sum_M^{L'=0,1,2} F_{L'} [b^+ b]_M^{L'} [b^+ b]_M^{L'}.$$

Константы

$$F_{L'} = \sum_{L=0,2} (2L+1) G_D W(1LL'1; 11),$$

т. е.

$$F_0 = (G_0 + 5G_2)/3; \quad F_1 = (G_0 - 5G_2/2)/3;$$

$$F_2 (G_0 + G_2/2)/3.$$

Заметим, что V — инвариантная квадратичная комбинация генераторов $SU(3)$ -группы. Квадратичную скалярную комбинацию квадрупольных компонент можно выразить через оператор Казимира второго порядка $SU(3)$, который для данной реализации определяется $C = b_\mu^+ b_\mu$, и квадрат углового момента. Таким образом, взаимодействие V приводит к вращательному спектру. Конечно, полученная таким образом вращательная полоса оказывается конечной.

Бесконечную ротационную полосу можно найти, если включить квадрупольно-квадрупольное взаимодействие, используя квадрупольные операторы $SL(3, R)$:

$$V = -\chi \tilde{Q}\tilde{Q};$$

$$\tilde{Q}^2 = 3\tilde{Q}_0^2 + \tilde{Q}_1\tilde{Q}_{-1} + \tilde{Q}_{-1}\tilde{Q}_1 + (\tilde{Q}_2\tilde{Q}_{-2} + \tilde{Q}_{-2}\tilde{Q}_2)/2.$$

С другой стороны, $\tilde{Q}^2 = 4\tilde{C}^2/3 + L^2$.

Вибрационный спектр получается, если в гамильтониане оставить только оператор числа фононов $C = b_\mu^+ b_\mu$. Добавляя к такому гамильтониану квадрупольное взаимодействие, составленное из компонент $\tilde{Q}_\mu SL(3, R)$ -группы, и варьируя отношение между вибрационной и квадрупольной константами, можно определить непрерывный переход от чисто вибрационного спектра к чисто вращательному, неограниченному по угловым моментам, спектру.

Применимость каждой из перечисленных выше алгебр к конкретным случаям определяется динамикой системы, в частности, видом взаимодействия между нуклонами. В связи с этим возникает два вопроса:

1) какие из перечисленных алгебр могут быть группами динамической симметрии ядра и 2) исчерпывают ли эти алгебры известные или предполагаемые симметрии в ядрах.

Что касается первого вопроса, то хорошо бы иметь некоторый принцип, позволяющий из совокупности алгебр отобрать некоторые. Можно, например, потребовать, чтобы динамическая группа содержала некоторые очевидные группы, относительно которых должен быть инвариантен гамильтониан всякой замкнутой системы частиц. К ним относятся прежде всего группа поворотов и трансляции в трехмерном пространстве. Такие операции содержатся в $IO(3)$ -группе. Эта группа, будучи неполупростой, непосредственно в рассматриваемых алгебрах не содержится, однако, может быть вложена в них при тривиальном их расширении. Наконец, желательно, чтобы динамическая группа имела операторы, осуществляющие переходы между различными состояниями системы. Единственной группой, содержащей переходы как между вибрационными, так и между ротационными уровнями, является $Sp(3, 3)$

Отметим также, что в перечне алгебр мы не обнаруживаем ортогональной группы $(3A - 3)$ -измерений, являющейся группой A -симметрии невзаимодействующих частиц и унитарной группы той же размерности, которая является группой A -симметрии частиц, взаимодействующих по осцилляторному закону. Точно также нет в нашем списке $SU(2j+1)$ -группы, являющейся группой симметрии невзаимодействующих нуклонов, находящихся на j оболочке. Отсутствие таких алгебр в нашем перечне — следствие того, что указанные группы не являются универсальными.

Отметим также, что спектры ряда сферических ядер указывают на наличие слабо расщепленных $SU(5)$ -мультиплетов. Возникает вопрос о фермионной реализации генераторов этой алгебры. Генераторы $SU(5)$ в приведенном перечне отсутствуют. Если серьезно верить в существование $SU(5)$ -симметрии для ряда ядер, то выходом из подобной ситуации было бы построение, проведенное так же, как в работе [18], цепочки приближенных (с неточными коммутационными соотношениями) алгебр. Если бы для некоторых ядер оказалось, что коэффициенты перед генераторами высших по сравнению с $SU(5)$ -алгебр малы, то получили бы приближенную $SU(5)$ -алгебру операторов. (Не исключено также, что $SU(5)$ -генераторы можно реализовать нелинейными функциями x, p .)

Отметим также, что среди групп, допускающих точную фермионную реализацию, есть такие, спектральный состав (по угловым моментам) мультиплетов которых напоминает состав $SU(5)$ -мультиплетов $(\Lambda, 0)$:

$SU(3)$ -мультиплеты		$SU(5)$ -мультиплеты	
$\Lambda = 0$	$l = 0$	$n = 0$	$l = 0$
$\Lambda = 2$	$l = 0; 2$	$n = 1$	$l = 2$
$\Lambda = 4$	$l = 0; 2; 4$	$n = 2$	$l = 0; 2; 4$
$\Lambda = 6$	$l = 0; 2; 4; 6$	$n = 3$	$l = 0; 2; 3; 4; 6$

Поэтому наличие слабо расщепленных триплетов $(0, 2, 4)$ в наблюдаемых спектрах ядер не является решающим аргументом в пользу $SU(5)$ -симметрии. Окончательный выбор между $SU(5)$ -симметрией и симметрией, допускающей точную фермионную реализацию, может дать анализ вероятностей переходов.

Еще один путь введения точных, но неуниверсальных алгебр намечен в работе [21]. Операторы, принадлежащие этим алгебрам, определены в пространстве фиксированного числа собственных состояний ядра и их реализация в терминах операторов рождения и уничтожения нуклонов должна быть весьма сложной и различной для разных ядер и даже для разных состояний одного и того же ядра.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итоги, можно сказать что теория групп может быть полезна в тех случаях, когда или взаимодействие неизвестно, или получающаяся система уравнений слишком сложна, чтобы получить решения, но удается найти преобразования, оставляющие гамильтониан инвариантным. Это позволяет отыскать часть сохраняющихся квантовых чисел, которыми можно маркировать базисные векторы. Чем больше мы знаем о трансформационных свойствах гамильтониана, тем более конкретизируем базис.

Интересен вопрос о происхождении ядерных симметрий, в частности $SU(3)$ -симметрии. Предположим, что невозмущенный гамильтониан содержит двухчастичное осцилляторное взаимодействие. В этом случае спектр ядра состоит из вырожденных мультиплетов симметрического $(n, 0, 0, \dots)$ $SU(3N-3)$ -представления. Легко подсчитать, сколько раз и какие $SU(3)$ -мультиплеты содержатся в неприводимом $SU(3N-3)$ -представлении. Включим теперь двухчастичное взаимодействие, нарушающее $SU(3N-3)$ -симметрию, но сохраняющее $SU(3)$ -симметрию. Естественно ожидать, что в нижней части энергетического спектра будут лежать $SU(3)$ -мультиплеты, происходящие из нижних $SU(3N-3)$ -мультиплетов. Однако это противоречит экспериментальной ситуации, если ее описывать мультиплетами, из которой следует, что низжайшими являются мультиплеты с достаточно высокими n .

Теория групп может быть полезна при описании спектров и вероятностей переходов, что было продемонстрировано в тексте на примере $SU(4)$ -, $SL(3, R)$ - и т. д. представлении.

Возьмем теперь случай, обратный предыдущему, т. е. пусть известно взаимодействие и имеется ЭВМ с памятью, достаточной для полного решения задачи. Спрашивается, будет ли в этих случаях полезной теория групп. Как нам кажется, теория групп может помочь выбрать правильный базис, упорядочить числа, выдаваемые ЭВМ, классифицировать их, установить между ними некоторые закономерности, как это делается, например, в математике, в теории чисел. При таких манипуляциях с числами упор необходимо делать на физические следствия, различного рода правилах сумм и т. п.

ЛИТЕРАТУРА

1. Любарский Г. Я. Теория групп и ее применение в физике. М., Физматгиз, 1958.
2. Wigner E. P. Phys. Rev., 1937, 51, 106.
3. Franzini P., Radicati L. A. Phys. Lett., 1963, 6, 322.
4. Kerman A. K., Lawson R. D., Macfarlane M. H. Phys. Rev., 1961, 124, 162.
5. Camiz P., Covello A., Jean M. Nuovo cimento, 1966, 42B, 199.

6. Афанасьев Г. Н. Препринт ОИЯИ Р4-3431, Дубна, 1967.
7. Blatt J. M. Theory of Superconductivity. A. P. N. Y., 1964.
8. Bremond B. Nucl. Phys., 1968, A113, 257.
9. Elliott J. P. Proc. Roy. Soc., 1958, 245, 562.
10. Lam S. T., Litherland A. E. Canad. J. Phys., 1969, 47, 1371.
11. Weaver L., Biedenharn L. C. Phys. Lett., 1970, 32B, 326.
12. Uj H. Prog. Theoret. Phys., 1970, 32B, 326.
13. Афанасьев Г. Н. Препринт ОИЯИ Р4-5008, 1970.
14. Weinberg S. Phys. Rev., 1968, 166, 1568.
15. Coleman S., Wess J., Zumino B. Phys. Rev., 1969, 177, 2239.
16. Sheline R. K. Rev. mod. phys., 1960, 32, 1;
Sakai M. Nucl. Phys., 1967, A104, 301.
17. Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. I. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
18. Arima A. Suppl. Progr. Theor. Phys. Extra Number, 1968, 481.
19. Fabre M. Preprint Inst. Physique Nucleaire. IPNO/TH 182, Orsay, 1970.
20. Hwa R. C., Nuyts J. Phys. Rev., 1966, 143, 1188.
21. Михайлов И. Н., Наджаков. Е. «Изв. АН СССР. Сер. физ.», 1970, 34, 2088.

Приложение

О СПРАВЕДЛИВОСТИ СУПЕРМУЛЬТИПЛЕТНОЙ МОДЕЛИ

П. Францини, Л. А. Радикати

(Phys. Lett., 1963, 6, 322)

Вигнер [1] предположил, что в первом приближении ядерные силы можно считать независимыми от ориентации спинов и изоспинов нуклонов. При этом он доказал, что состояния ядра можно классифицировать по $SU(4)$ -представлениям, которые характеризуются набором трех чисел (p, p', p'') . Все состояния, преобразующиеся по одному и тому же $SU(4)$ -представлению и имеющие одну и ту же пространственную волновую функцию, должны быть энергетически вырождены. Они образуют супермультиплет и содержат все значения изоспина T и спина S , которые совместимы с набором (p, p', p'') .

Согласно Вигнеру, супермультиплетное приближение справедливо только для основного состояния, так как смешивание состояний, принадлежащих различным супермультиплетам, резко увеличивается с ростом энергии возбуждения из-за наличия сил, нарушающих $SU(4)$ -симметрию.

В предположении о законности супермультиплетного приближения энергия основного состояния для ядра с массовым числом A , принадлежащего супермультиплету $(p, p', p'') \equiv (\xi)$, можно записать в виде:

$$E(A, \xi) = a(A) + b(A)(p^2 + 4p + p'^2 + 2p' + p''^2)/2,$$

где $a(A)$ и $b(A)$ — функции, зависящие от природы ядерных сил.

Возможные значения (p, p', p'') для данного A и величины T и S для данного (p, p', p'') были вычислены Вигнером и табулированы Вигнером и Финбергом [1].

Когда Вигнер впервые предложил свою модель, экспериментальных данных, на которых она основывалась, было мало. Обычно предполагалось, что область применения супермультиплетного приближения существенно ограничена легкими ядрами. Это было связано с двумя соображениями: 1) полный спин S , возможно, является хорошим квантовым числом только для легких ядер (в тяжелых ядрах реализуется связь типа jj) и 2) с увеличением Z становятся существенными электростатические силы, так что T перестает быть хорошим квантовым числом.

Сейчас известно, что вторая трудность несущественная для основного состояния. Это было доказано теоретически Лейном [2] и недавно подтверждено экспериментально результатами по (n, p) -реакциям вплоть до $A = 141$.

Цель настоящего сообщения состоит в том, чтобы показать, что супермультиплетное приближение продолжает оставаться хорошим для достаточно больших значений A ; более того, общая тенденция указывает на справедливость возрастания супермультиплетного приближения с A .

Энергетические разности между состояниями, принадлежащими различным супермультиплетам, находятся из сравнения энергии основных состояний трех изобар*. Числа (p, p', p'') для каждой изобары находятся, если предположить, что $p = |T_3| = |Z - N|/2$, и использовать для p' и p'' наименьшие значения, совместимые с p и A . Полученные таким образом числа приведены в табл. 1. Для каждой тройки уровней вычислялось отношение

$$R(T_3) = \frac{E[A, \xi(T_3)] - E[A, \xi(T_3 - 2)]}{E[A, \xi(T_3 - 1)] - E[A, \xi(T_3 - 2)]},$$

которое в супермультиплетной схеме не должно зависеть от A . Экспериментальные значения для R даны на рис. 6 для трех случаев A .

Средние значения R хорошо согласуются с предсказанными Вигнером. Отметим, что из постоянства R следует, что если отклонение от теоретического значения связано с появлением члена, зависящего от S и T , то этот член необходимо умножить на некоторую функцию $b(A)$.

Используя экспериментальные значения для R , мы вычислили для трех случаев $A = 2n + 1, 4n, 4n + 2$, зависящие от S и T поправки и функцию $b(A)$. Экспериментальные значения даны на рис. 7 и подогнаны полиномом девятой степени от A . Как видно

* Энергетические уровни были исправлены на разность кулоновских энергий, вычислявшихся в модели с однородным распределением заряда.

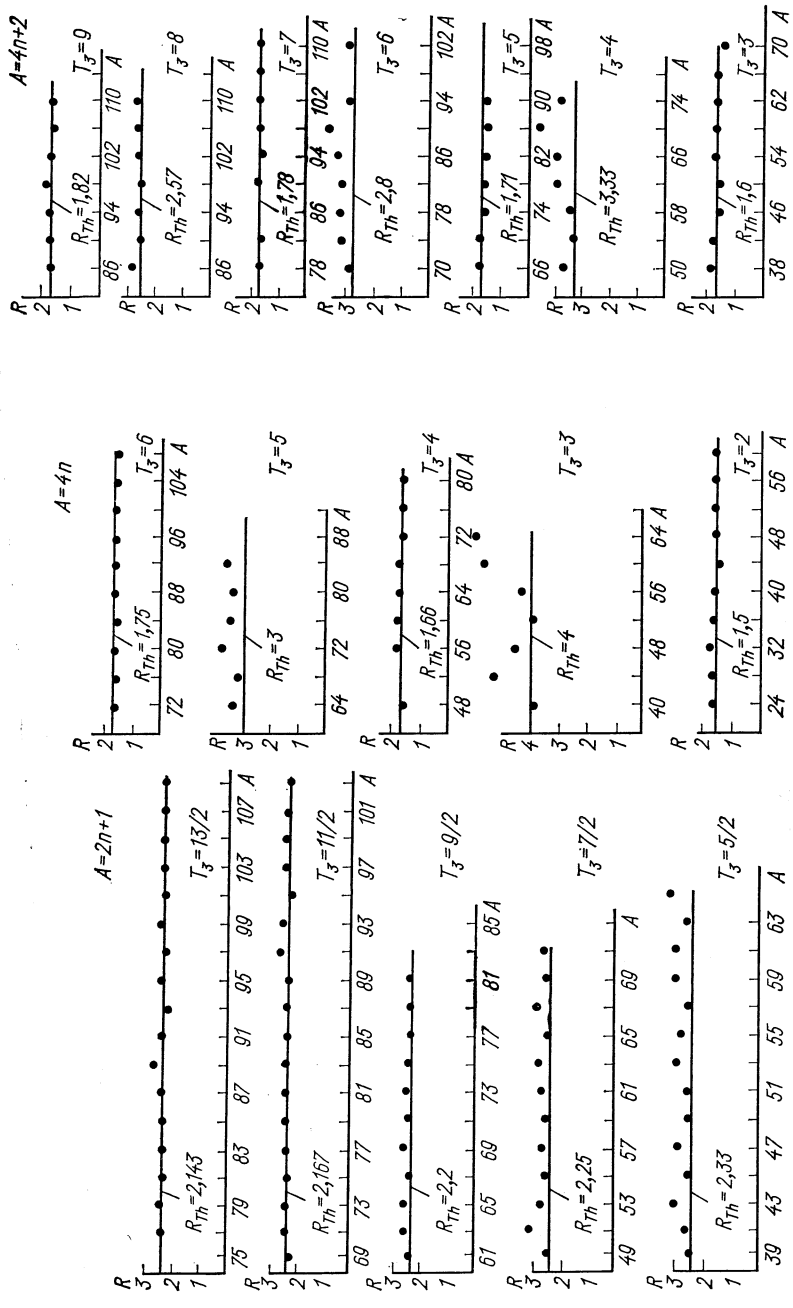


Рис. 6. Зависимость от A : горизонтальные прямые — теоретические значения, вычисленные по формуле Витнера.

Таблица 1

		$T_3(p, p' - p'' -)$	
$A = 2n + 1$		$A = 4n$	$A = 4n + 2$
$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right)$		0 (0 0 0)	0,1 (100)
$\frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right)$		1 (1 1 0)	2 (210)
$\frac{5}{2} \left(\frac{5}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right)$		2 (2 0 0)	3 (300)
$\frac{7}{2} \left(\frac{7}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right)$		3 (3 1 0)	4 (410)
$\frac{9}{2} \left(\frac{9}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right)$		4 (4 0 0)	5 (500)
$\frac{11}{2} \left(\frac{11}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right)$			6 (610)
$\frac{13}{2} \left(\frac{13}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right)$			7 (700)
			8 (810)
			9 (900)

из рис. 7, все три случая можно аппроксимировать одной и той же кривой. Этот факт служит дальнейшим подтверждением законности супермультиплетной модели и допускает возможность единой

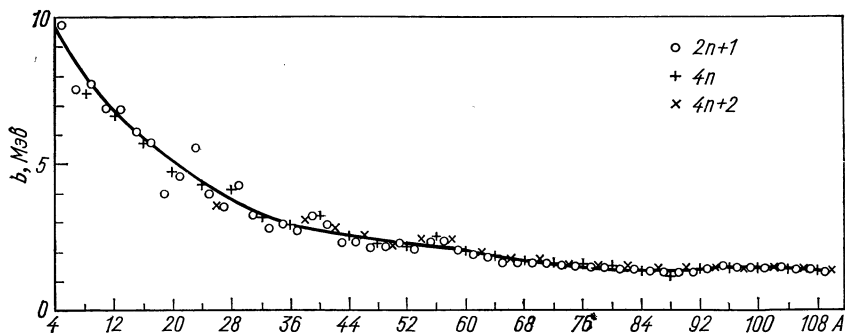


Рис. 7. Экспериментальные значения функции $b(A)$, вычисленной по 373 изобарам:

— результат аппроксимации полиномом девятой степени.

классификации для всех ядер. Отметим, что каждая точка на рис. 7 соответствует нескольким изобарам, причем число изобар увеличивается с A (было использовано 373 изобары, чтобы полу-

чить сто точек). Представленные точки усреднены по величинам от всех изобар с данным A . Это усреднение существенно из-за чрезвычайно малого разброса различных величин обычно $\leq 5\%$.

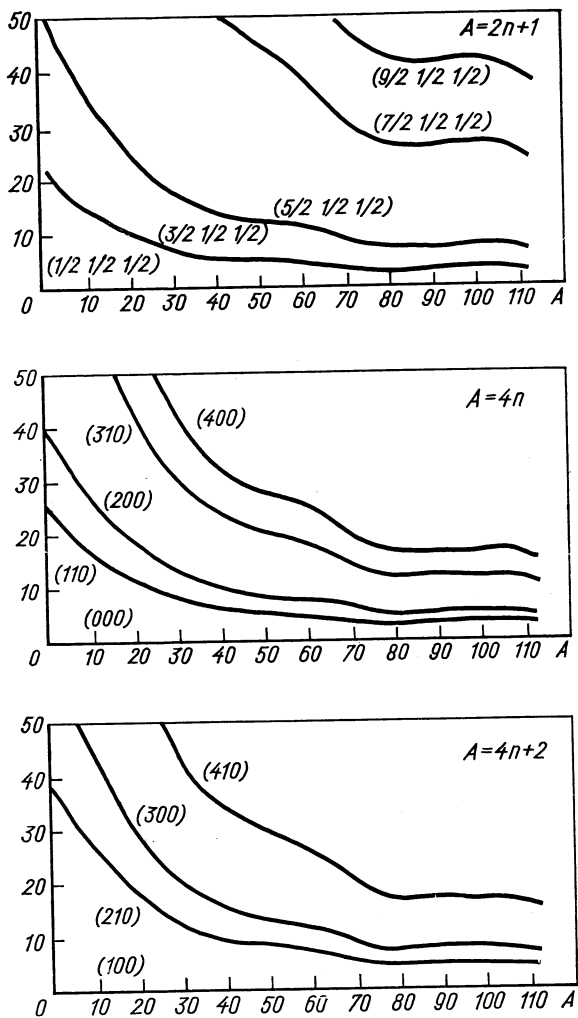


Рис. 8. Положение первых супермультиплетов.

Заметим, наконец, что флуктуации экспериментальных точек одни и те же для всех трех типов ядер. Из данных на рис. 7 и зависящих от S и T поправок можно снова найти положения супермультиплетов; положения некоторых из них показаны на рис. 8.

В качестве применения этих результатов мы попытались получить примерное расположение $T = 1$ и $T = 2$ уровней в очень легких ядрах. Для ${}^4\text{He}$ уровень $T = 1$ наблюдался Поппе при $20,1 \text{ Мэв}$, что очень близко к нашей экстраполяции ($21,67 \text{ Мэв}$).

Недавно было предположено [5], что ${}^4\text{He}$ должен иметь резонансное состояние при 24 Мэв . Изоспин $T = 2$ был приписан этому уровню главным образом на основании его ширины. Согласно нашей экстраполяционной кривой, такая идентификация весьма сомнительна; мы предсказываем первый $T = 2$ уровень при $34,12 \text{ Мэв}$.

В заключение констатируем, что супермультиплетная модель дает хорошее описание энергии основного состояния для большого числа ядер. Разумно заключить, что (p ; p' , p'') вместе с S и T являются хорошими квантовыми числами, по крайней мере, для основного состояния. Это может иметь объяснение, подобное предложенному Лейном [2] для сохранения T .

ЛИТЕРАТУРА

1. Wigner E. P. Phys. Rev., 1937, 31, 106;
See also: Hund F., Z. Phys., 1937, 103, 202;
Feenberg E., Wigner E. P. Phys. Rev., 1937, 51, 15;
Rep. Progr. Phys., 1941, 8, 274.
2. Lane A. M., Soper T. Phys. Lett., 1962, 1, 28;
Nucl. Phys., 1962, 37, 633.
3. Anderson T. D. e.a. Phys. Rev., 1963, 129, 2718.
4. Poppe C. H. Phys. Lett., 1962, 2, 171.
5. Argan P. E. e.a. Phys. Rev. Lett., 1962, 9, 171.
6. Argan P. E. e.a. Phys. Lett., 1963, 4, 350.

НАРУШЕННАЯ $O(8)$ -СИММЕТРИЯ И МАССОВЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ЯДРАХ

Б. Бремонд

(Nucl. Phys., 1968, **A113**, 257)

1. ВВЕДЕНИЕ

Вигнеровскую группу $SU(4)$ -симметрии можно обобщить с тем, чтобы учесть парные взаимодействия. В рамках введенной таким образом $O(8)$ -группы можно получить соотношения между массами ядер и сравнить их с данными эксперимента. Энергетическая щель соответствует реально наблюдаемой в ядрах.

Сейчас хорошо известно, что формализм квазиспина [1—3], примененный Керманом [2] для изучения парных сил в ядрах, можно обобщить с тем, чтобы включить изоспин. В схеме jj -связи непосредственное обобщение приводит к классификации состоя-

ний группы $Sp(4)$ -симметрии [4—6]. Систематическое применение этой группы к реальным ядрам, по-видимому, оказалось безуспешным. Причина этого кроется в том, что при jj -спаривании парная сила действует только в состояниях $T = 1$, что не всегда выполняется в ядрах.

Эту трудность можно частично обойти в схеме LS -связи. Группа симметрии в данном случае оказывается изоморфной $O(8)$ [6—8]. Такую группу естественнее рассматривать как обобщение на случай спаривания вигнеровской $SU(4)$ -группы [9], чем как обобщение формализма квазиспина, учитывающее изоспин. $SU(4)$ -группа является подгруппой $O(8)$, и это позволяет явно выписать члены, ответственные за нарушение симметрии. Возможность применения такой более широкой группы основывается на работе Франчини и Радикати [10], доказавших, что теория супермультиплетов Вигнера хорошо описывает определенные свойства легких и тяжелых ядер. Но в этой последней области существенны парные силы, следовательно изучение $O(8)$ -группы может дать информацию об относительной роли парных сил и сил инвариантных относительно $SU(4)$.

В следующем разделе напомним определение $O(8)$ -группы и классификацию ее состояний. Массовые соотношения сравниваются с экспериментальными данными по массам атомных ядер.

2. АЛГЕБРА $O(8)$ -ГРУППЫ

Рассмотрим систему нуклонов, заполняющих конечное число оболочечных состояний в схеме LS -связи. Состояние нуклона в главной оболочке описывается квантовыми числами углового момента и спин-зарядовым квантовым числом s (s меняется от 1 до 4), что соответствует $m_\tau, m_s = (1/2, 1/2), (1/2, -1/2), (-1/2, 1/2), (-1/2, -1/2)$. Пусть a_{slm}^+ — оператор рождения нуклона в рассматриваемом состоянии и $a_{-slm}^+ = (-1)^{l-m} a_{slm}$ (недоразумения не возникают, так как s всегда положительна).

Определим систему операторов

$$C_{\sigma\sigma'} = \frac{1}{2} \sum_{lm} (-1)^{l-m} (a_{slm}^+ a_{\sigma'l, -m}^+ - a_{\sigma'lm}^+ a_{sl, -m}^+), \quad (\text{П.1})$$

где σ принимает восемь значений $\pm s$. Из определения следует $C_{\sigma\sigma'} = -C_{\sigma'\sigma}$, так что можно ограничиться только теми операторами, для которых $\sigma > \sigma'$. Совокупность 28 операторов $C_{\sigma\sigma'}$ удовлетворяет коммутационным соотношениям

$$[C_{\sigma\sigma'}, C_{\nu\nu'}] = \delta_{\sigma', -\nu} C_{\sigma, \nu'} - \delta_{\sigma', -\nu'} C_{\sigma\nu} + \delta_{\sigma, -\nu} C_{\sigma'\nu} - \delta_{\sigma, -\nu'} C_{\sigma', \nu'}. \quad (\text{П.2})$$

Они реализуют алгебру Ли ортогональной $O(8)$ -группы [4]. Из (П.2) следует, что 16 операторов $C_{s, -s}$ ($s, s' > 0$) удовлетворяют

коммутационным соотношениям

$$[C_{s,-s'}, C_{r,-r'}] = \delta_{s,r} C_{s,-r'} - \delta_{s,r'} C_{r,-s}. \quad (\text{П.3})$$

Эти операторы сохраняют число частиц и суть $U(4)$ -генератора вигнеровской теории супермультиплетов. Операторы $C_{s,-s'}$ связаны со стандартными обозначениями следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} T_0 &= 1/2 (C_{1,-1} + C_{2,-2} - C_{3,-3} - C_{4,-4}); \\ S_0 &= 1/2 (C_{1,-1} - C_{2,-2} + C_{3,-3} - C_{4,-4}); \\ Y_0 &= 1/2 (C_{1,-1} - C_{2,-2} - C_{3,-3} + C_{4,-4}). \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.4})$$

Введем оператор Σ , связанный с оператором числа частиц

$$\Sigma = 1/2 (C_{1,-1} + C_{2,-2} + C_{3,-3} + C_{4,-4}) = 1/2 (N - 4\Omega), \quad (\text{П.5})$$

где $\Omega = \frac{1}{2} \sum_l (2l + 1)$.

Остальные операторы C_{ss} ($s, s' > 0$) широко используются в квазиспиновом формализме. Они рождают пару нуклонов в состоянии с $L=0$ и в спин-изоспиновом состоянии ($T=1, S=0$ или $T=0, S=1$); напротив $C_{-s,-s'}$ — операторы уничтожения.

Группа $O(8)$ имеет ранг четыре, и четыре диагональных генератора даются соотношениями (П.4) и (П.5). Из коммутационных соотношений (П.2) следует, что повышающие (понижающие) операторы $O(8)$ состоят из повышающих (понижающих) операторов $SU(4)$ и $C_{ss'}$ (соответственно $C_{-s,-s'}$).

Все базисные векторы неприводимого представления можно получить с помощью повышающих и понижающих операторов, если известен хотя бы один базисный вектор, например, вектор, соответствующий минимальной массе. Этот вектор определяется соотношением $C_{\sigma\sigma'} | \min \rangle = 0$ для всех понижающих операторов и является собственным вектором Σ, T_0, S_0 и Y_0 с собственным значением $-\sigma, -p, -p', -p''$ соответственно. Это состояние не содержит пар нуклонов, связанных с $L=0$, так как по определению $C_{-s,-s'} | \min \rangle = 0$. Число частиц, образующих $| \min \rangle$, обычно называется сеньорити v . Так как $N = 2\Sigma + 4\Omega$, то имеем

$$v = -2\sigma + 4\Omega. \quad (\text{П.6})$$

Базисные векторы полностью определены, если известна цепочка редукции $O(8)$. Физической же является редукция, приводящая к супермультиплетной $SU(4)$ -группе и ее подгруппам, хотя этой цепочки может быть недостаточно для полной классификации состояний базиса. Припишем базисным векторам неприводимого представления числа (v, p, p', p'') $O(8)$ -группы, (N, P, P', P'') $SU(4)$ -группы и (S, S_3, T, T_3) спин-изоспиновых подгрупп. Все операторы Казимира $O(8)$ и указанных подгрупп диагональны в этом представлении.

Оператор Казимира $SU(4)$ хорошо известен. Он равен $T^2 + S^2 + Y^2$. Собственные значения этого оператора равны:

$$P(P+4) + P'(P'+2) + (P'')^2. \quad (\text{П.7})$$

Оператор Казимира $U(4)$ равен $C(U_4) = C(SU_4) + \Sigma^2$, и оператор Казимира $O(8)$ имеет вид

$$C(O_8) = \Sigma C_{\sigma\sigma} C_{-\sigma', -\sigma} \quad (\text{П.8})$$

и принимает значения $\sigma(\sigma+6) + p(p+4) + p'(p'+2) + p''^2$ в $(\sigma p p' p'')$ -представлении. С учетом этих результатов перейдем к изучению эффективного гамильтониана и вытекающих отсюда следствий.

3. ЭФФЕКТИВНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ И МАССОВЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Вначале рассмотрим специальное взаимодействие, содержащее оператор Казимира $O(8)$. В схеме LS связи зарядово-независимое парное взаимодействие может быть записано в виде [6—8]

$$V_p = 1/2g [C(O_8) - C(U_4) + 6\Sigma]. \quad (\text{П.9})$$

В этом соотношении точно фиксирован относительный вклад членов, инвариантных относительно $O(8)$ и $U(4)$. Однако интуитивно ясно, что это взаимодействие не может правильно описать данные эксперимента. В самом деле, из сказанного во введении следует, что парная энергия учитывается слагаемым, инвариантным относительно $O(8)$. Но в реальных ядрах из-за распределения одночастичных оболочечных уровней имеются четко выраженные вариации этой энергии между замкнутыми оболочками. Такое обстоятельство не учтено во взаимодействии (П.9), которое не содержит член, описывающий одночастичные энергии. Наконец, из феноменологических моделей следует, что отношение относительного вклада частей, инвариантных относительно $O(8)$ и $U(4)$, отличается от вклада, даваемого формулой (П.9).

Поэтому примем взаимодействие в виде линейной комбинации членов инвариантных относительно $O(8)$ и $U(4)$. Представим взаимодействие в виде

$$V = a + bC(U_4) + cC(O_8) + d\Sigma, \quad (\text{П.10})$$

где коэффициенты определяются феноменологически.

Для этого необходимо сделать определенные предположения о структуре ядерных состояний. Следуя Франчини и Радикати, предполагаем, что основные состояния четно-четных ядер соответствуют представлению $\nu = 0$ (отсюда следует, что $p = p' = p'' = 0$) и $P = T = |T_3|$. Числа P' , P'' принимают минимальные значения, совместимые с P и массовым числом A .

Определим величины

$$S(A, T) = \frac{E(A, T) + E(A+4, T) - 2E(A+2, T+1)}{E(A, T) - E(A, T+2)}; \quad (\text{П.11})$$

$$S'(A, T) = \frac{E(A, T) + E(A+4, T) - 2E(A+2, T+1)}{E(A, T-2) - E(A, T)},$$

где $E(A, T)$ — энергия связи ядра (A, T) в основном состоянии. При нахождении этих энергий следует вычесть из величин, приведенных в таблице масс, кулоновскую энергию, которую берем

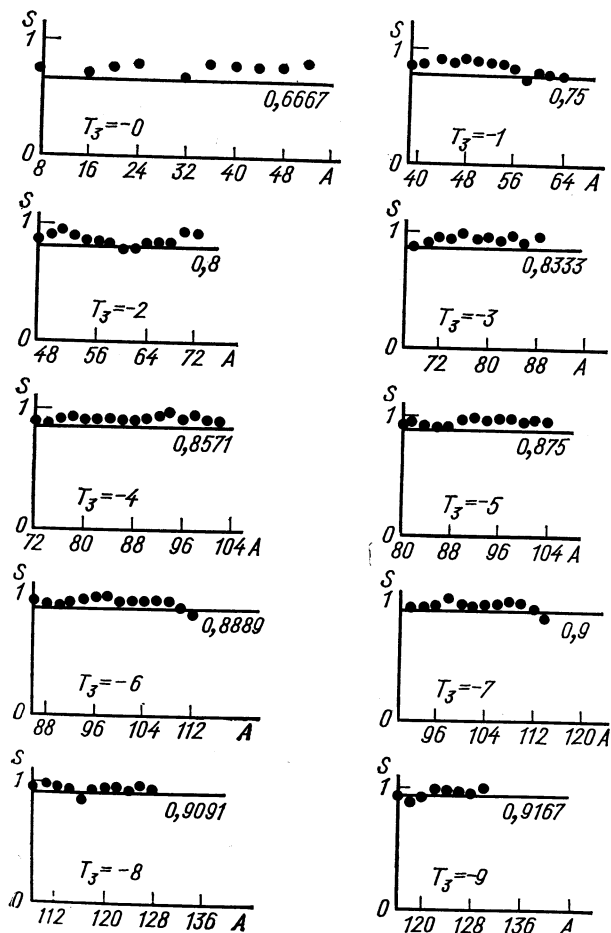


Рис. 9. Экспериментальные значения $S(A, T)$ для четных ядер:
горизонтальная линия — теоретические значения [формула (П.12)].

равной энергии равномерно заряженной сферы с радиусом $R = 1,2 A^{1/3}$.

Из формулы (П.10) для энергии взаимодействия следует, что $S(A, T)$ зависит только от предполагаемого значения изоспина T :

$$S(A, T) = (T + 2)/(T + 3); \quad S'(A, T) = (T + 2)/(T + 1). \quad (\text{П.12})$$

Экспериментальные значения для этих отношений даны на рис. 9, 10. Согласие с теоретическими значениями примерно такое же, как и для величины $R(T)$ [10]. Коэффициент $b(A)$ теперь можно вычислить как из числителя, так и из знаменателя $S(A, T)$.

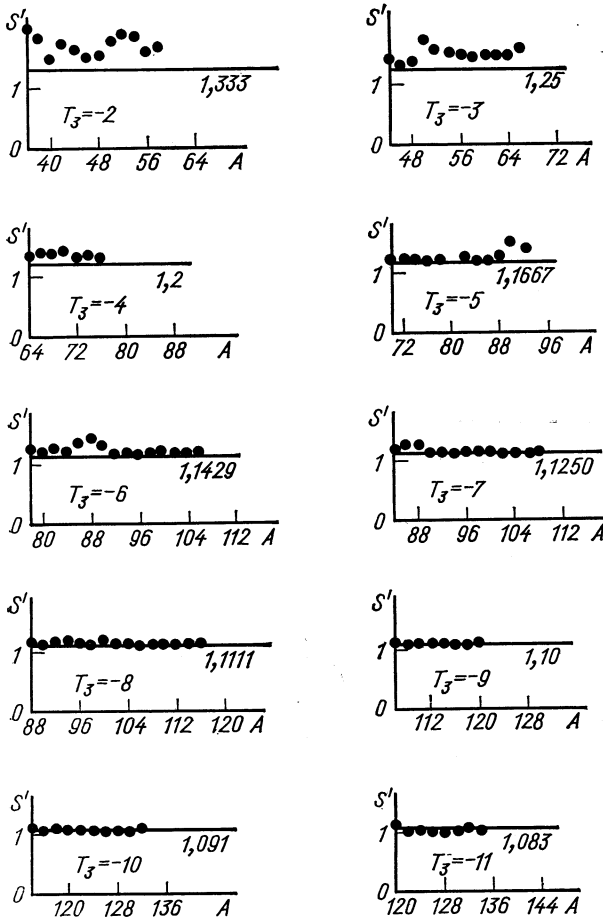


Рис. 10. Экспериментальные значения $S'(A, T)$ для четных ядер: горизонтальная линия — теоретические значения [формула (П.12)].

Результат усреднения между ними для каждого значения A приведен на рис. 11.

Чтобы вычислить $c(A)$, определим величины

$$\left. \begin{aligned} U(A, T) &\equiv E(A, T) + E(A + 2, T + 1) - \\ &- 2E(A + 1, T + 1/2) = 2(2\Omega - 1)c(A) - 2b(A)(1 - X); \\ V(A, T) &= E(A, T) + E(A + 2, T - 1) - \\ &- 2E(A + 1, T - 1/2) = 2(2\Omega - 1)c(A) - 2b(A)(1 - X), \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.13})$$

причем $X = 0$, если (A, T) дважды четное ядро и $X = 3$, если (A, T) дважды нечетное ядро. Предположим, что основные состояния нечетных ядер соответствуют $O(8)$ -представлению с квантовыми числами $v = 1/2$, $p = p' = p'' = 1/2$.

Используя полученные выше $b(A)$, можно вычислить величину $\Delta(A) = V(A, T) + 2b(A)(1 - X)$ или $V(A, T) + 2b(A) \times (1 - X)$. Эта величина имеет значение энергетической щели и должна быть постоянной $2(2\Omega - 1)c(A)$, если бы одночастичные энергии правильно учитывались. Экспериментальная щель имеет, однако, характерные изменения между оболочками, что должно проявляться в $\Delta(A)$. На рис. 12 представлены экспериментальные значения Δ . Каждая точка есть результат усреднения для данного A величин, полученных из уравнения (П.13), причем (A, T) соответствует четно-четным ядрам. Отметим, что минимумы соответствуют заполненным протонным или нейтронным оболочкам.

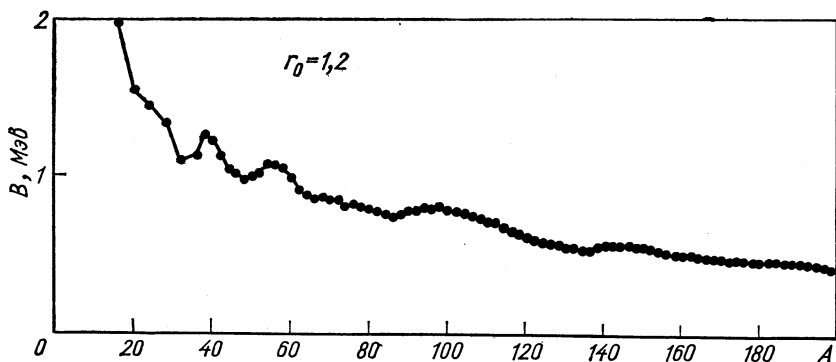


Рис. 11. Экспериментальные значения $B(A)$.

В заключение можно сказать, что $O(8)$ -симметрию можно использовать для описания ядер. Группа $O(8)$ имеет, по крайней мере, одно важное достоинство перед $Sp(4)$ -группой: она рассматривает спаривания в состояниях $T = 0$ и $T = 1$. Однако следует быть осторожным при интерпретации полученных результа-

тов, которые не являются окончательными не только потому, что рассматривались только основные состояния, но и потому, что не учитывались одночастичные энергии и спин-орбитальное взаимодействие. Изменения $\Delta(A)$ между магическими числами, которые являются отражением спин-орбитальной связи, можно понять

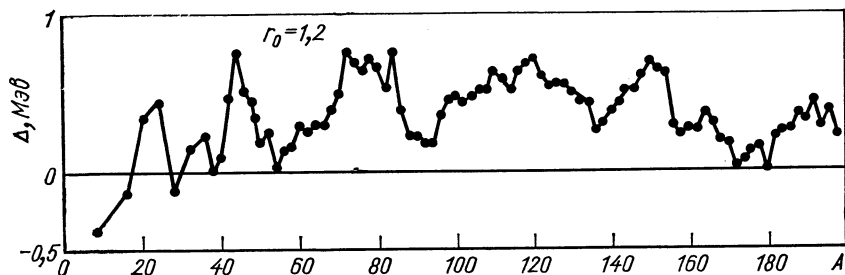


Рис. 12. Экспериментальные значения $\Delta(A)$ для четно-четных ядер.

в рамках методов, учитывающих эту связь и объясняющих, почему массовая формула хорошо работает даже там, где сильна jj -связь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Anderson P. W. Phys. Rev., 1958, **112**, 1900.
2. Kerman A. K. Ann. Phys., 1961, **12**, 300.
3. Lawson R. D., Macfarlane M. H. Nucl. Phys., 1961, **23**, 594.
4. Helmers K. Nucl. Phys., 1961, **23**, 594.
5. Flowers B. H., Szpikowski. Proc. Phys. Soc., 1964, **84**, 193.
6. Ichimura H. Progr. Theoret. Phys., 1964, **32**, 757.
7. Ginocchio J. N. Nucl. Phys., 1965, **63**, 449.
8. Flowers B. H., Szpikowski. Proc. Phys. Soc., 1964, **84**, 673.
9. Wigner E. P. Phys. Rev., 1937, **51**, 106.
10. Franzini P., Radicati L. A. Phys. Lett., 1963, **6**, 332.
11. Racah G. Group Theory and Spectroscopy, CERN-6168, reprint of the Princeton Lecture, 1951.

ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ ПОЛОСЫ В ЯДРАХ и $SL(3, R)$ -СИММЕТРИЯ

Л. Вивер, Л. К. Биденхарен
(Phys. Lett., 1970, **32B**, 326)

Для получения выражения, не содержащего подгоночных параметров для отношений вероятностей $E(2)$ -переходов между ротационными полосами в деформированных четно-четных ядрах, была использована идея Гелл-Манна, что соответствующие опе-

раторы генерируют алгебру $SL(3, R)$. При нахождении выражений, не содержащих подгоночных параметров для отношения вероятностей $E(2)$ -переходов внутри ротационных полос деформированных четно-четных ядер, была использована основная идея, что соответствующие операторы генерируют приближенную группу $SL(3, R)$ -симметрии [1]. Здесь коротко опишем метод получения этих выражений и сравним их с данными по редкоземельным ядрам. Наши результаты в большинстве случаев лучше согласуются с экспериментом, чем вращательная модель [2].

Предположим, что 1) оператор электрического квадрупольного момента ядра Q_{el} пропорционален массовому квадрупольному оператору Q ; 2) производные первого порядка по времени от компонент Q генерируют $SL(3, R)$ -группу, т. е. группу вещественных 3×3 матриц с определителем, равным 1. Важной ее подгруппой является группа трехмерных вращений $O(3)$. Имеющиеся для этого основания обсудим ниже и 3) возбужденные состояния ядра образуют базис унитарного неприводимого $SL(3, R)$ -представления.

Структура $SL(3, R)$ и ее представлений ограничивают область ядер, к которым наш анализ применим. Генераторы $SL(3, R)$ содержат пять компонент квадрупольного оператора и три компоненты оператора углового момента, так что системы, в которых разыгрывается $SL(3, R)$ — ядра, в которых доминирующими являются электрические квадрупольные переходы. Далее, изученные нами унитарные неприводимые представления содержат только целые значения углового момента, поэтому ограничимся ядрами, в которых спин не имеет существенного значения. Примерно десять первых возбужденных состояний деформированных четно-четных ядер удовлетворяют обоим этим требованиям.

Группа $SL(3, R)$ проникает в ядерную физику несколькими путями. Вот простейший из них. Предположим, что компоненты квадрупольного массового оператора

$$Q_{ij} = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} (X_i^{\alpha} X_j^{\alpha} - \delta_{ij} X^{\alpha} X^{\alpha} / 3), \quad (\text{П.14})$$

где $i, j = 1, 2, 3$; N — число нуклонов в ядре. Первые производные по времени от Q_{ij} имеют вид:

$$T_{ij} = \sum_{\alpha=1}^N [X_i^{\alpha} p_j^{\alpha} + X_j^{\alpha} p_i^{\alpha} - 2\delta_{ij} X^{\alpha} p^{\alpha} / 3]. \quad (\text{П.15})$$

Коммутатор двух компонент T

$$[T_{ij}, T_{kl}] = -i [\delta_{ik} \epsilon_{ilm} + \delta_{il} \epsilon_{jkm} + \delta_{jl} \epsilon_{ikm} + \delta_{jk} \epsilon_{ikm}] L_m, \quad (\text{П.16})$$

где $L_m = \epsilon_{mik} \sum_{\alpha=1}^N X_i^{\alpha} p_k^{\alpha}$ — компонента орбитального углового

момента. Оператор ведет себя как тензор второго ранга при коммутации с L , а коммутатор двух компонент L выражается снова через компоненту L . Таким образом, система операторов L, T замкнута, а коммутационные соотношения совпадают с коммутационными соотношениями алгебры $SL(3, R)$.

Унитарные неприводимые представления (УНП) $SL(3, R)$, полученные в данном обзоре, были найдены методом индуцированных представлений [4]. Они бесконечномерны и получаются индуцированием из одномерных представлений группы треугольных матриц

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & 0 & 0 \\ z_{21} & z_{22} & 0 \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{pmatrix}; \quad z_{11}z_{22}z_{33} = 1.$$

Имеются четыре системы базисных функций

$$\sqrt{2} \sqrt{2L+1} \Psi_{KM}^{L; +, \pm} = D_{KM}^L \pm (-1)^L D_{-KM}^L$$

(K — четное $0 \leq L \leq \infty$),

$$\sqrt{2} \sqrt{2L+1} \Psi_{KM}^{L; -, \pm} = D_{KM}^L \mp (-1)^L D_{-KM}^L$$

(K — нечетное, $1 \leq L \leq \infty$).

Здесь $D_{KM}^L(r)$ — элемент матрицы вращений, соответствующий вращению $r \in SO(3)$, L — полный угловой момент; M — z -компонента L ; K — дополнительное квантовое число. Для фиксированного K эти функции являются элементами ротационной полосы в модели жесткого ротатора. По предположению (С), $SL(3, R)$ объединяет K полосы одной симметрии в одно УНП. Например, включаем все $K = 0, 2, 4, \dots$ полосы четно-четных ядер в одно УНП.

Оператор T вызывает переходы внутри каждого из четырех наборов базисных состояний. Он является тензором второго ранга, поэтому достаточно выписать только приведенные матричные элементы. Они равны [5]

$$\begin{aligned} \langle L'K' \| T \| LK \rangle &= (-1)^{L'=K'} \sqrt{(2L+1)(2L'+1)} \times \\ &\times \left\{ [i\sqrt{6} + \sqrt{2}\sigma/3] \begin{pmatrix} 2 & L & L' \\ 0 & K & K' \end{pmatrix} + \right. \\ &+ i\sqrt{L(L+1) - K(K+1)} \begin{pmatrix} 2 & L & L' \\ -1 & K+1 & -K' \end{pmatrix} + \\ &+ i\sqrt{L(L+1) - K(K-1)} \begin{pmatrix} 2 & L & L' \\ 2 & K-1 & -K' \end{pmatrix} + \\ &+ [-i(1+K) + \delta] \begin{pmatrix} 2 & L & L' \\ 2 & K & -K' \end{pmatrix} + \\ &\left. + [i(1-K) + \delta] \begin{pmatrix} 2 & L & L' \\ 2 & K & -K' \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

Параметры σ и δ определяют силу $\Delta K = 0$ и $|\Delta K| = 2$ переходов соответственно. В этой заметке рассмотрим только $|\Delta K| = 2$ переходы, для которых имеем

$$\langle L', K-2 \| T \| LK \rangle = (-1)^{L'-K} \sqrt{(2L+1)(2L'+1)} \times \\ \times [-i(1-K) + \delta] \begin{pmatrix} 2 & L & L' \\ -2 & K & -K-2 \end{pmatrix}. \quad (\text{П.18})$$

Именно это выражение мы использовали ниже для приложений. Предположение (3) означает, что

$$\langle L'K' \| T \| LK \rangle = \langle L'K' \| i[H, Q] \| LK \rangle = \\ = i(E_{L'K'} - E_{LK}) \langle L'K' \| Q \| LK \rangle, \quad (\text{П.19})$$

где H — гамильтониан системы. Предположение (1) дает

$$|\langle L'K' \| Q_{el} \| LK \rangle|^2 = \text{const} |\langle L'K' \| T \| LK \rangle|^2, \quad (\text{П.20}) \\ E_\gamma^2$$

где $E_\gamma = E_{L'K'} - E_{LK}$ — энергия γ -перехода. Приведенная вероятность перехода равна

$$B(E2; LK \rightarrow L' - K') = \frac{1}{2L+1} |\langle L'K' \| Q_{el} \| LK \rangle|^2 = \\ = \text{const} \frac{|\langle L'K' \| T \| LK \rangle|^2}{2L+1}. \quad (\text{П.24}) \\ E_\gamma^2$$

Для $K' = K - 2$ получаем

$$B(E2; LK \rightarrow L', K-2) = \\ = \text{const} [(1-K)^2 + \delta^2] |\langle 2, -2, LK | L; K-2 \rangle|^2. \quad (\text{П.22}) \\ E_\gamma^2$$

Отсюда следует, что отношение

$$K = \frac{B(E2; LK \rightarrow L_1, K-2)}{B(E2; LK \rightarrow L_2, K-2)}$$

будет иметь следующий вид:

$$K = \frac{|\langle 2, -2LK | L_1, K-2 \rangle|^2}{|\langle 2, -2LK | L_2, K-2 \rangle|^2} \left(\frac{E_{\gamma 2}}{E_{\gamma 1}} \right)^2. \quad (\text{П.23})$$

Это отношение сравним с данными по нескольким редкоземельным ядрам. Отметим его подобие уравнению (П.24), приведенному ниже. В табл. 1 и на рис. 13 и 14 приведены расчетные значения по выражению (П.11) с результатами эксперимента и модели ротатора, учитывающей перемешивание полос. Модель ротатора предсказывает следующие величины отношений:

$$\frac{B(E2; L, K=2 \rightarrow L_1, K=0)}{B(E2; L, K=2 \rightarrow L_2, K=0)} = \\ = \frac{|\langle L2, K, -2 | L_1 0 \rangle|^2}{|\langle L2, K, -2 | L_2 0 \rangle|^2} \frac{f(z, L, L_+)}{f(z, L, L_2)}, \quad (\text{П.24})$$

Таблица 1

Данные взяты из следующих работ: ¹⁵⁴Gd, ¹⁵⁶Gd, ¹⁵⁸Dy; ¹⁶⁰Gd, ¹⁶⁰Dy, ¹⁶⁴Dy и ¹⁶⁸Yb: Nuclear Data Sheets. 1959—65, части 7 и 8. ¹⁵⁶Dy [7]; ¹⁶²Dy [8]; ¹⁶⁶Er и ¹⁶⁸Er [9]; ¹⁸²W [10]

Обозначения

$$A = \frac{B(E2:22 \rightarrow 00)}{B(E2:22 \rightarrow 20)}, \quad B = \frac{B(E2:22 \rightarrow 00)}{B(E2:22 \rightarrow 40)}, \quad C = \frac{B(E2:32 \rightarrow 20)}{B(E2:32 \rightarrow 40)}, \quad D = \frac{B(E2:42 \rightarrow 20)}{B(E2:42 \rightarrow 40)}$$

$$E = \frac{B(E2:52 \rightarrow 40)}{B(E2:52 \rightarrow 60)}, \quad F = \frac{B(E2:62 \rightarrow 40)}{B(E2:62 \rightarrow 60)}, \quad G = \frac{B(E2:72 \rightarrow 60)}{B(E2:72 \rightarrow 80)}, \quad H = \frac{B(E2:82 \rightarrow 60)}{B(E2:82 \rightarrow 80)}$$

Предсказания модели ротатора

Переход	z = 0,0	z = 0,05	z = 0,10
A	0,70	0,52	0,39
B	14	6,0	3,1
C	2,50	1,32	0,80
D	0,34	0,16	0,06
E	1,75	0,65	0,26
F	0,27	0,07	0,03
G	1,50	0,38	0,09
H	0,24	0,02	0,01

Ядро Пере- ход	Экспери- мент	SL(3,R)	Пере- ход	Экспери- мент	SL(3,R)	Пере- ход	Экспери- мент	SL(3,R)
	⁶⁴ Gd ₉₀			⁶⁴ Gd ₉₆			⁶⁸ Er ₉₈	
A	0,41	0,54	A	Отсутствует	0,59	C	1,31	1,45
B	Отсутствует	5,5				D	0,17	0,21
C	0,79	1,41		⁶⁶ Dy ₉₄		E	0,70	0,75
D	0,07	0,21	A	0,52	0,58	F	0,07	0,13
	⁶⁴ Gd ₉₂		B	7,35	7,0	G	0,42	0,47
A	0,51	0,60	C	1,75	1,58	H	0,04	0,10
B	Отсутствует	7,9	D	0,21	0,23		⁶⁸ Er ₁₀₀	
C	2,73	1,73		⁶⁶ Dy ₉₆		A	0,56	0,57
	⁶⁶ Dy ₉₀		A	0,52	0,58	B	6,7	6,4
A	0,75	0,50	B	5,43	6,9	C	1,56	1,50
B	Отсутствует	4,2	C	0,34	1,56	D	0,18	0,22
C	0,86	1,22		⁶⁶ Dy ₉₈			⁷⁰ Yb ₉₈	
D	0,21	0,19				A	0,77	0,58
E	0,42	0,64	A	0,54	0,57	B	Отсутствует	7,2
	⁶⁶ Dy ₉₂		B	6,7	6,5		⁷⁴ W ₁₀₈	
A	Отсутствует	0,36	D	0,12	0,22	A	0,50	0,59
C	Отсутствует	1,48		⁶⁸ Er ₉₆		B	88	7,5
D	Отсутствует	0,21	A	0,70	0,56	C	1,96	1,66
						D	0,22	0,23

где $f(z, L, L')$ — поправочный фактор, учитывающий эффекты смешивания полос. Этот фактор был табулирован Шелайном [6]. Результаты эксперимента специально не отбирались, а были нане-

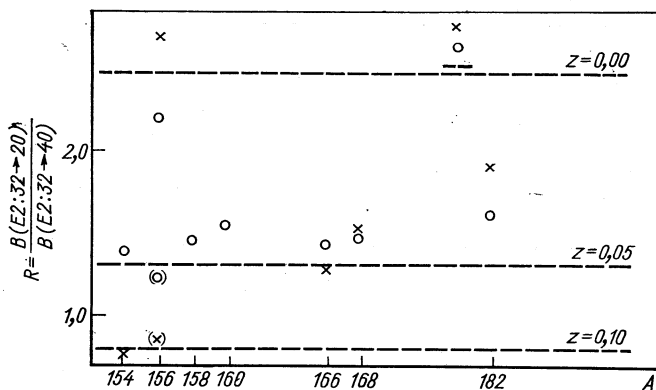


Рис. 13. Скобки относятся к изобарам с большими Z .

сены все известные переходы между полосами в области $A = 154 - 182$. Погрешность в этих данных различна: она меняется от нескольких процентов для ^{168}Er до 50% для ^{162}Dg .

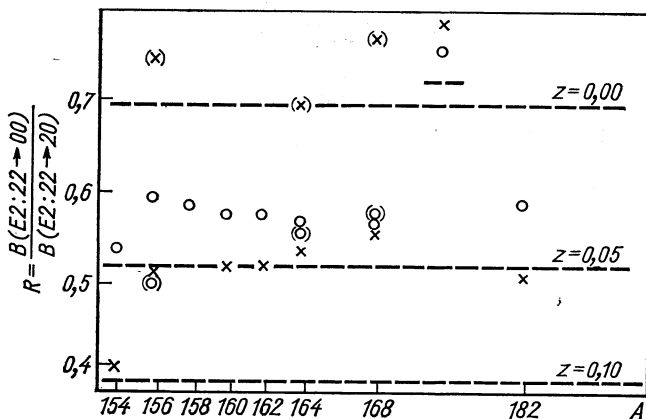


Рис. 14. Скобки относятся к изобарам с большими Z .

Вращательная структура появляется в ядерной физике двумя путями: во вращательной модели Бора — Мотельсона и в $SU(3)$ -модели Эллиота. Связь $SL(3, R)$ с вращательной моделью была отмечена выше; сейчас же вкратце сравним $SU(3)$ - и $SL(3, R)$ -симметрии. Самое яркое отличие состоит в том, что вращательные

полосы в $SU(3)$ конечны, тогда как в $SL(3, R)$ — бесконечны. Причина этого различия заключается в отличии квадрупольных операторов этих двух моделей: в $SU(3)$ -симметрии этот оператор пропорционален $x_i x_j + p_i p_j$ и находится в согласии с оператором физического квадрупольного момента только для осцилляторного одночастичного базиса, тогда как в $SL(3, R)$ аналогичный оператор — производная по времени оператора физического квадрупольного момента. В $SU(3)$ -группе квадрупольный оператор генерирует компактную алгебру, имеющую конечномерные УНП, тогда как в $SL(3, R)$ — квадрупольный оператор генерирует некомпактную алгебру, имеющую бесконечномерные УНП.

Наконец заметим, что $SL(3, R)$ -группа была первоначально предложена в физике высоких энергий как симметрия кварковой модели адронов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dothan Y., Gell-Mann M., Ne'eman Y. Phys. Lett., 1965, 17, 148.
2. Alaga G. e.a. Danske vid. selskab. mat.-fys. medd., 1954, 34, 5.
3. Dothan Y., Gell-Mann M., Ne'eman Y. Unpublished sequel to ref. [1].
4. Mackey G. W. Induced representations of groups and quantum mechanics. W. A. Benjamin. Inc., N. Y., 1968.
5. Weaver Ph. D. Thesis. Duke University, 1970.
6. Sheline R. K. Rev. Mod. Phys., 1960, 32, 1.
7. Ward D. e.a. Contr. Intern. Conf. of Properties of nuclear states. University of Montreal, Montreal, 1969.
8. Gujrathi S. C., Barhru H., Mukhariee S. K. Phys. Rev., 1967, 153, 1262.
9. Gunther C., Parsignault D. R. Phys. Rev., 1967, 153, 1297.
10. Sapyta J. J., Funk E. G., Mihelich J. W. Nucl. Phys., 1969, A139, 161.
11. Weaver L., Biedenharn L. C. Contrib. Intern. conf. on Properties of Nuclear States. University of Montreal Press, 1969.
12. Proc. Intern. Conf. on Properties of nuclear states. University of Montreal Press, 1969, p. 618—621.
13. Weaver L., Biedenharn L. C. Bull. Amer. Phys. Soc., 1970, p. 527.