

УДК 530.12 : 531.18 + 538.3

ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО И РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

Н. А. Черников

Объединенный институт ядерных
исследований, Дубна

Приводятся основные понятия и результаты геометрии Лобачевского. С точки зрения геометрии Лобачевского излагается механика.

The basic concepts and results of Lobachevsky's geometry are given. From the point of view of Lobachevsky's geometry an interpretation of mechanics is presented.

ВВЕДЕНИЕ

Творец неевклидовой геометрии Н. И. Лобачевский, как известно, решил проблему параллельных, над которой так безуспешно трудились многие и многие поколения. О трудности этой проблемы можно судить по тому, что уже найденное ее решение было понято лишь немногими современниками великого ученого. Однако следующее поколение геометров овладело геометрией Лобачевского, почувствовало ее силу в точных науках и нашло простые способы ее изложения.

За релятивистскую механику в физической аудитории агитировать не приходится: она является рабочим инструментом в физике высоких энергий. Но, применяя этот инструмент, не всегда знают, что в основном имеют дело с геометрией Лобачевского. А между тем — имеют, поскольку пространство скоростей в релятивистской механике является пространством Лобачевского. Незнание этого часто приводит к непроизводительной затрате сил и, разумеется, затрудняет понимание самой релятивистской механики. Открывать же каждый раз заново геометрию Лобачевского — дело трудное и, конечно, лавров уже не приносящее. Трудность выбранной темы обзора в том и состоит, что в большинстве

своим физики не знакомы с геометрией Лобачевского. В связи с этим обзор разбит на две части.

В первой, вспомогательной, части обзора излагается суть проблемы параллельных и история ее решения. Приводятся основные понятия и результаты геометрии Лобачевского. Раскрывается богатство стереометрии Лобачевского, содержащей на плоскости планиметрию Лобачевского, на сфере — сферическую планиметрию и, что наиболее замечательно, на орисфере — планиметрию Евклида.

Приводимых в обзоре сведений из тригонометрии достаточно для решения большинства задач механики контактных столкновений. На основе тригонометрии выводятся формулы Лобачевского для угла параллельности и для зависимости площади круга и длины окружности от радиуса.

Наконец, вводятся бельтрамиевы координаты, с помощью которых во второй части обзора определяется пространство скоростей.

Во второй, главной, части обзора излагается релятивистская механика одной и двух частиц. Не останавливаясь на деталях, отметим следующие основные моменты. Если в пространстве скоростей частицы геометрию Евклида заменить геометрией Лобачевского, то преобразования Галилея заменятся на преобразования Лоренца. В этом случае в механике одной частицы происходят изменения, во всем аналогичные тем, которые происходят в геометрии при отрицании евклидова постулата о параллельных.

Например, хотя кинетическая энергия и импульс частицы продолжают выражаться площадью круга и длиной окружности в пространстве скоростей, но сам вид зависимости этих величин от радиуса изменится в соответствии с формулами Лобачевского. Более радикальным изменениям подвергается механика двух и более частиц. В этой обширной части механики остается неразрушенной только механика контактных столкновений. Последняя же изменяется в такой мере, в какой и механика одной частицы.

Так, закон сохранения импульса при распаде одной частицы на две продолжает оставаться эквивалентным паре архимедовых законов рычага в пространстве скоростей. Однако вместо плеч в этих законах приходится считать длины окружностей, описываемых рычагами. Эквивалентность закона сохранения импульса паре законов рычага Архимеда позволяет представить релятивистскую механику контактных столкновений в виде статики в пространстве Лобачевского. С помощью такого рода представлений во второй части обзора решается ряд механических задач. Этим автор надеется показать практическую ценность излагаемого материала.

НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ О ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

1. ПРОБЛЕМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ

Геометрия выросла в древности главным образом из практики землемерия. Евклид (330—275 гг. до н. э.) дал для своего времени полное и систематическое изложение геометрии. В «Началах» Евклида [1] подытожена огромная работа его предшественников. На протяжении многих веков этот труд являлся образцом математической строгости и единственным серьезным учебником по геометрии. Именно евклидова геометрия изучается в современной средней школе.

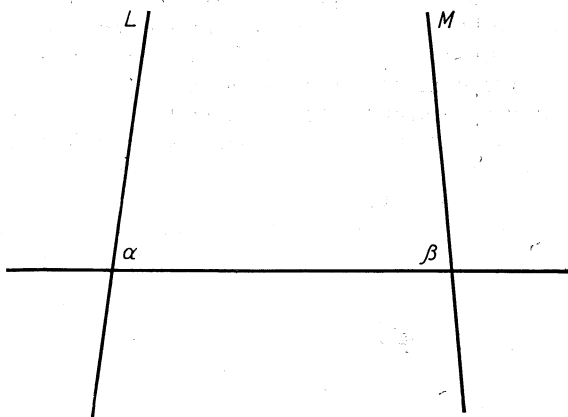


Рис. 1. Постулат Евклида о параллельных: прямые L и M пересекаются, если $\alpha + \beta < \pi$.

В основу геометрии Евклид положил ряд исходных утверждений, принимаемых без доказательства. Среди них особое место занимает *постулат о параллельных*. Если прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше развернутого угла, то эти две прямые пересекаются с той стороны, с которой сумма углов меньше развернутого (рис. 1; утверждается, что прямые L и M пересекаются, если $\alpha + \beta < \pi$).

Из этой довольно громоздкой формулировки не сразу видно, что речь идет о параллельных. Да и какие прямые называть параллельными? Евклид называл параллельными прямые, которые находятся в одной плоскости и не пересекаются. Существование параллельных прямых в смысле его определения обеспечивается нетрудно доказываемой теоремой: если $\alpha + \beta = \pi$, то прямые L и M не пересекаются. Постулат утверждает обратное: если прямые L и M не пересекаются, то $\alpha + \beta = \pi$. Иначе гово-

ря, для всяких параллельных прямых $\alpha + \beta = \pi$. Поэтому указанный постулат называют постулатом о параллельных.

Свойства параллельных исследовались и до Евклида. Известно, например, что им уделял внимание Аристотель (384—322 гг. до н. э.). Евклид угадал, что утверждение о параллельных надо принять без доказательства. Дальше будет понятно, насколько гениальна эта догадка. В самом деле, нельзя ли обойтись без специального постулата о параллельных? Не заложено ли выражаемое им свойство в определении параллельности? Если не заложено, то, принимая постулат, мы навязываем параллельным прямым свойство, для них необязательное. О возможности присвоить им равенство $\alpha + \beta = \pi$ свидетельствует вся евклидова геометрия. Но, навязав параллельным прямым необязательное для них свойство, не обеднили ли мы тем самым геометрию? Такие вопросы рано или поздно должны были возникнуть. Итак, надо было либо допустить, что равенство $\alpha + \beta = \pi$ необязательно для параллельных прямых, либо доказать, что оно обязательно. Вот проблема параллельных, которая, еще не будучи так четко сформулированной, со времен Евклида занимала умы самых выдающихся математиков.

Более двух тысяч лет не сомневались, что для параллельных прямых должно быть $\alpha + \beta = \pi$, и не оставляли попыток это доказать. В результате же вместо доказательства понемногу выяснялась система взаимозаменяемых предложений — эквивалентов постулата о параллельных. Укажем некоторые из них:

1. Через данную точку можно провести только одну прямую, параллельную данной прямой.
2. Непересекающиеся прямые в плоскости не могут неограниченно удаляться друг от друга.
3. Через каждую точку внутри угла проходит по меньшей мере одна прямая, пересекающая обе его стороны.
4. Существует по меньшей мере два подобных треугольника.
5. Существует треугольник, сумма углов которого равна двум прямым углам.
6. Около всякого треугольника можно описать окружность.
7. Не существует абсолютной единицы длины, т. е. отрезка с особыми геометрическими свойствами.

Но почему же не приходила мысль, что для параллельных прямых вовсе не обязательно должно быть $\alpha + \beta = \pi$? Формально, конечно, приходила. Пробовали допускать, что и при $\alpha + \beta < \pi$ прямые L и M могут не пересекаться, однако получали такие следствия, что решительно отказывались признавать их возможными: вместе с постулатом о параллельных приходилось отрицать, например, и все семь только что указанных формулировок. Не так-то просто было вырваться из заколдованного круга эквивалентных предложений. И все же титаническая работа многих

поколений не была уж такой бесплодной, как тогда казалось и как при беглом знакомстве может показаться теперь.

11 (23) февраля 1826 г. на физико-математическом факультете Казанского университета Н. И. Лобачевский сообщил о своем открытии новой геометрии. Доклад был опубликован в 1829 г.

В 1832 г. опубликовал свое сочинение Я. Бойяи [J. Bolyai], где излагались элементарные начала такой же геометрии.

Немного раньше К. Ф. Гаусс составил план и доказал ряд теорем неевклидовой геометрии, о чем узнали после его смерти, так как он воздержался от публикации этих результатов.

С достоверностью известно, что Лобачевский, Бойяи и Гаусс пришли к новой геометрии независимо. Такое совпадение нельзя объяснить одной лишь случайностью. В создании новой геометрии, куда более богатой, чем евклидова, выразилось решение проблемы параллельных. Видимо, двухтысячелетняя упорная работа к началу XIX в. находилась уже в заключительной стадии. Но понять это мог только гений. Ведь почти всем тогда новая геометрия показалась просто абсурдной. Молчание Гаусса, возможно, тем и объясняется, что он предвидел дурную реакцию на столь уж неожиданные идеи. В атмосфере непонимания Бойяи тяжело заболел и не смог больше продолжать работу. Один Лобачевский до самой смерти мужественно отстаивал идеи и права новой геометрии, но так и остался непонятым. Признание новой геометрии пришло лишь в шестидесятых годах прошлого столетия.

Новую геометрию ныне называют геометрией Лобачевского. И не потому только, что ему принадлежит приоритет открытия. В упомянутой выше работе Лобачевского новая геометрия представлена полней и основательней, чем у других ее основоположников. Здесь же Лобачевским поставлены две совершенно новые фундаментальные проблемы: об астрономической проверке геометрии видимого нами мира и о том, какого рода перемена произойдет от введения новой геометрии в механику. В последующих работах он значительно усовершенствовал свои результаты.

2. АБСОЛЮТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Геометрия Евклида состоит из двух частей. Первая содержит предложения, для доказательства которых не нужно опираться на постулат о параллельных. Сам Евклид излагал их в первую очередь. Ко второй относятся предложения, доказать которые без постулата о параллельных невозможно. Вторую часть называют собственно евклидовой геометрией, тогда как для первой части нет подходящего названия. Нередко ее называют абсолютной геометрией, имея в виду ее независимость от постулата о параллельных. Итак, абсолютная геометрия — это общая часть обеих геометрий: Евклида и Лобачевского.

Мы уже встречались с одной теоремой абсолютной геометрии: если $\alpha + \beta = \pi$, то прямые L и M не пересекаются. Для примера докажем другую. Ею мы воспользуемся во второй части обзора.

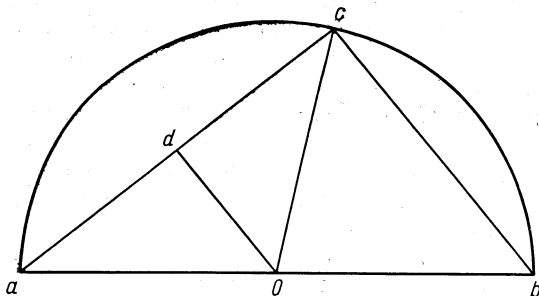


Рис. 2. Теорема абсолютной геометрии: $\angle oda = \pi/2$.

Теорема. Пусть диаметр и две хорды окружности составляют треугольник. Если отрезком прямой соединить середину диаметра с серединой одной из этих хорд, то получится прямоугольный треугольник.

Доказательство. Пусть abc — такой треугольник и aod — построенный (рис. 2). Последний равен треугольнику cod , так как od — их общая сторона, стороны ad и cd равны, равняясь половине ac , а стороны oa и oc равны, будучи радиусами. Поэтому $\angle odc = \angle oda$. Но $\angle oda + \angle odc = \pi$. Следовательно, $\angle oda = \pi/2$.

3. ОТРИЦАНИЕ ЕВКЛИДОВА ПОСТУЛАТА О ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ

Отказываясь от евклидова постулата о параллельных, мы должны уточнить само определение параллельности. Вспомним, что Евклид называл параллельными две прямые, лежащие в одной плоскости и не пересекающие друг друга. Почему это определение становится недостаточным, и как его нужно дополнить, понятно из следующего рассмотрения.

Пусть M — некоторая прямая и a — точка, не лежащая на ней (рис. 3). Из точки a на прямую M опустим перпендикуляр ab . Все прямые, лежащие в плоскости aM и проходящие через точку a , разбиваются на два класса: пересекающие M относятся к одному, а не пересекающие M — к другому. К первому классу относятся, например, прямая ab , ко второму, согласно теореме абсолютной геометрии ($\alpha + \beta = \pi$), относится прямая ac , перпендикулярная к ab , так что оба класса непусты. Постулат Евклида о параллельных утверждает, что во втором классе нет прямых, кроме ac . Отказываясь от него, мы тем самым допускаем, что

прямые второго класса заполняют некоторый угол $ea'f$ (и противоположный ему угол $e'af'$). Прямые первого класса проходят через точку a внутри угла fae' . Евклидово определение параллельности нуждается в уточнении, потому что, приняв его, мы должны были бы все прямые второго класса называть прямыми, параллельными M . Между тем, прямые af и ae' занимают в своем классе особое положение, являясь граничными прямыми. Их то и называют параллельными M , добавляя, что af параллельна M в одну сторону, а прямая ae' — в другую. Остальные же прямые второго класса называют расходящимися с M прямыми.

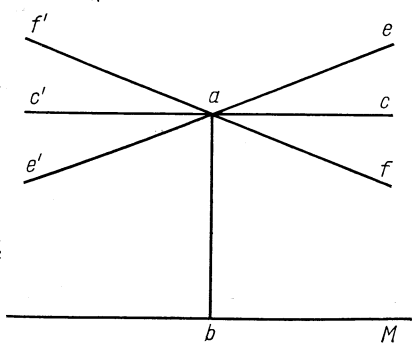


Рис. 3. Угол параллельности.

Так устанавливается признак параллельности прямой $L = f'af$ в некоторой ее точке a по отношению к прямой M . Угол baf называется углом параллельности прямой L в точке a по отношению к прямой M . В пространстве Лобачевского с ростом перпендикуляра ab угол параллельности монотонно убывает от $\pi/2$ до 0. Но, будучи величиной безразмерной, угол параллельности не может, конечно, зависеть от одной только размерной длины p перпендикуляра ab . Поэтому в геометрии Лобачевского должна быть и на самом деле есть некоторая характерная для пространства длина k (ср. с седьмым эквивалентом постулата о параллельных в разд. 1). Угол параллельности зависит не просто от длины p , а от ее отношения к длине k . Следуя Лобачевскому, угол параллельности обозначают $\Pi(p/k)$. На отрицательные значения p угол параллельности распространяют согласно условию $\Pi(p/k) + \Pi(-p/k) = \pi$, т. е. полагают $\Pi(-p/k) = \pi - \Pi(p/k)$. В силу симметрии $\angle ba'e' = \Pi(p/k)$, $\angle ba'e = \Pi(-p/k)$. Константа k входит во все формулы геометрии Лобачевского в той ее части, в которой она отличается от евклидовой. Ее называют радиусом кривизны пространства Лобачевского. Мы будем называть ее также константой Лобачевского. В пределе $k \rightarrow \infty$ формулы геометрии Лобачевского переходят в формулы евклидовой геометрии. В частности, $\lim_{k \rightarrow \infty} \Pi(p/k) = \pi/2$ независимо от p .

При первом знакомстве с геометрией Лобачевского можно не останавливаться на доказательстве следующих важных предположений.

1. Прямая сохраняет признак параллельности во всех своих точках, т. е. если прямая L параллельна прямой M в некоторой

своей точке a , то она параллельна M и в любой другой своей точке.

2. Свойство параллельности взаимно: если L параллельна M (в некоторую сторону), то и M параллельна L (в ту же сторону).

3. Свойство параллельности транзитивно: две прямые, параллельные третьей в одну и ту же сторону, параллельны друг другу (в ту же сторону).

4. Всякие две расходящиеся друг с другом прямые имеют общий перпендикуляр и притом только один.

Таким образом, в планиметрии Лобачевского две прямые либо пересекаются, либо параллельны, либо перпендикулярны к некоторой третьей прямой. В евклидовой планиметрии последние два случая вырождаются в один единственный.

4. СФЕРИЧЕСКАЯ ПЛАНИМЕТРИЯ

В связи с астрономическими исследованиями, в значительной мере стимулировавшимися нуждами мореходства, в I—II в. н. э. на базе евклидовой геометрии пространства возникла геометрия сферы. В IX—XIII в. были установлены основные теоремы сферической тригонометрии. Лобачевский и Бойяи доказали, что геометрия сферы не зависит от постулата о параллельных в объемлющем ее пространстве и, таким образом, целиком принадлежит абсолютной геометрии пространства. Потом было доказано, что геометрию сферы, подобно геометрии плоскости, можно построить, не опираясь на свойства объемлющего пространства. Хотя геометрия сферы целиком принадлежит абсолютной стереометрии, это не значит, что она принадлежит абсолютной планиметрии. Геометрию сферы можно рассматривать как своеобразную сферическую планиметрию.

Кратчайший путь между двумя точками на сфере проходит по большой окружности. Поэтому большие окружности называют геодезическими линиями на сфере или сферическими прямыми. Отрезки сферических прямых — это дуги больших окружностей. Они играют роль сторон сферического треугольника. Как и на плоскости Лобачевского, на сфере имеется геометрически выделенная длина — длина L большой окружности. За единицу длины принимают $R = \frac{1}{2\pi} L$. Она называется радиусом кривизны сферы *. Площадь сферы равна $4\pi R^2$.

* Подчеркнем, что в стереометрии Лобачевского радиус кривизны сферы отнюдь не равен радиусу сферы. Как связаны эти величины, будет указано в разд. 10.

Замечательно, что многие утверждения абсолютной планиметрии оказываются верными и в сферической планиметрии. Например, теорема, доказанная в разд. 2, а также утверждения о том, что треугольник вполне определяется своими сторонами, и твердая фигура имеет три степени свободы, верны как в абсолютной, так и в сферической планиметрии.

Но, конечно, сферическая планиметрия во многом и отлична от абсолютной. О трех точках, лежащих на одной сферической прямой, нельзя сказать, какая из них находится между двумя другими.

Любая точка a сферы выступает в паре со своим антиподом a' (причем $(a')' = a$). Расстояние между антиподами равно $L/2 = \pi R$. Непересекающихся сферических прямых вовсе нет: любые две сферические прямые пересекаются в некоторой паре антиподных точек, других же общих точек не имеют (рис. 4). Таким образом, пара сферических прямых разбивает сферу на четыре двуугольника. Две фигуры на сфере называются антиподными, если для каждой точки одной фигуры найдется ее антипод на другой. Антиподные фигуры имеют одинаковые размеры. Каждой паре антиподных точек соответствует свой экватор — сферическая прямая, удаленная от них на расстояние $L/4 = \pi R/2$ и, наоборот, каждой сферической прямой соответствует своя пара полюсов, т. е. пара антиподных точек, удаленных от нее на расстояние $L/4 = \pi R/2$. Двуугольник отсекает на собственном экваторе вполне определенный отрезок. Угол X двуугольника измеряется длиной x этого отрезка: $X = x/R$. Площадь двуугольника равна $\frac{X}{2\pi} 4\pi R^2 = 2R^2 X$.

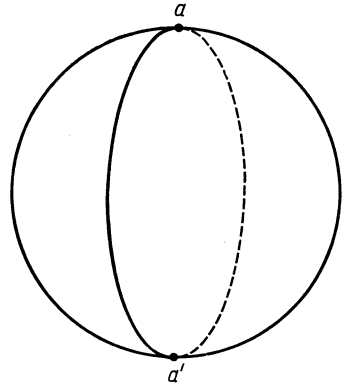


Рис. 4. Антиподные точки на сфере.

5. ОРИСФЕРА

В стереометрии Лобачевского содержатся все три планиметрии: планиметрия Лобачевского, сферическая планиметрия и, как это на первый взгляд ни странно, планиметрия Евклида. А между тем это легко понять. Закрепим некоторую точку a сферы и будем неограниченно увеличивать ее радиус. При этом неограниченно увеличивается и ее радиус кривизны R . Все большая окрестность точки a будет внутренне (!) все больше походить на евклидову плоскость. В пределе антиподная точка a' сферы станет беско-

нечно удаленной, а геометрия сферы, проколотой в точке a' , превратится в евклидову планиметрию. Очевидно, этот результат не зависит от постулата о параллельных в пространстве. Но если в евклидовом пространстве полученная таким образом предельная сфера, или, кратко, орисфера, становится плоскостью, то в пространстве Лобачевского плоскостью она отнюдь не становится. И вот почему. Радиусы сферы в пределе переходят в пучок параллельных друг другу прямых. Поскольку орисфера к ним перпендикулярна, то, если бы она оказалась плоскостью, эти прямые были бы не параллельными, а расходящимися. Полезно представить бесконечно удаленную звезду. Лучи ее света составляют связку параллельных прямых, а фронт световой волны будет орисферой.

Наличие евклидовой планиметрии на орисфере в абсолютной стереометрии позволило Лобачевскому и Бойяи вывести все главные формулы новой геометрии. Уже после всеобщего признания новой геометрии планиметрия Лобачевского была получена и без помощи стереометрии. Но, как это ни важно, одно дело найти новый вывод известного, другое — найти само неизвестное.

6. СУММА УГЛОВ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Зная углы X, Y, Z сферического треугольника, нетрудно подсчитать его площадь F . Пусть abc — такой треугольник (рис. 5). Продолжим его стороны

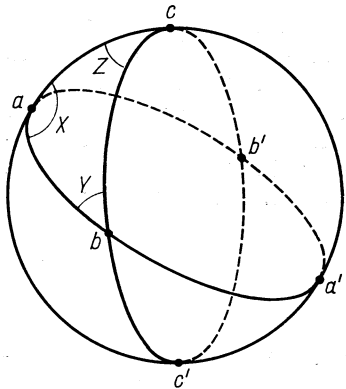


Рис. 5. Сумма углов в сферическом треугольнике.

до полных сферических прямых. Обозначим F_1, F_2 и F_3 площади треугольников $ba'c, b'ac$ и $a'b'c$. Четыре названных треугольника составляют половину сферы и поэтому $F + F_1 + F_2 + F_3 = 2\pi R^2$. Треугольник abc вместе с треугольником $ba'c$ составляют двугольник с углом X , а вместе с треугольником $b'ac$ — двугольник с углом Y . Поэтому $F + F_1 = 2R^2X$, $F + F_2 = 2R^2Y$. Треугольник abc' антиподен треугольнику $a'b'c$, так что его площадь равна F_3 . Но abc' и abc составляют двугольник с углом Z . Поэтому $F + F_3 = 2R^2Z$.

Складывая три последних равенства, получаем $3F + F_1 + F_2 + F_3 = 2R^2(X + Y + Z)$. Вычитая отсюда первое равенство, находим $F = R^2(X + Y + Z - \pi)$. Так связана сумма углов

сферического треугольника с его площадью. Она всегда больше π .

Вспомним, как доказывается, что сумма углов в евклидовом треугольнике равна π . Проведем через одну из вершин треугольника прямую, параллельную противоположной стороне (рис. 6). Имеем $\alpha + \beta + Z = \pi$. Согласно постулату о параллельных (!) $\alpha + (\pi - X) = \pi$, $\beta + (\pi - Y) = \pi$, т. е. $\alpha = X$, $\beta = Y$. Следовательно, $X + Y + Z = \pi$. Площадь евклидова треугольника нельзя выразить через сумму его углов.

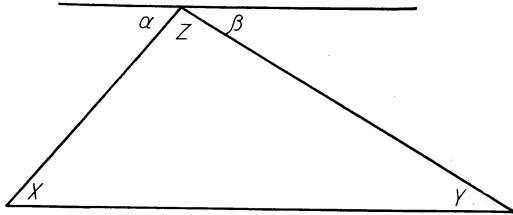


Рис. 6. Сумма углов в евклидовом треугольнике.

Можно доказать связь между суммой углов X, Y, Z и площадью F треугольника сразу для трех планиметрий, а именно: $X + Y + Z - \pi = \lambda F$, где λ — независящий от треугольника множитель пропорциональности. В евклидовой планиметрии, как мы знаем, $\lambda = 0$, в сферической планиметрии $\lambda = R^{-2}$. Отрицательное значение $\lambda = -k^{-2}$ этот множитель принимает в планиметрии Лобачевского, так что $F = -k^2 (\pi - X - Y - Z)$, где k — знакомая нам константа Лобачевского.

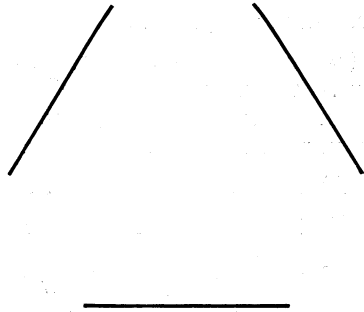


Рис. 7. Предельный треугольник.

Из приведенной формулы мы можем вывести три важных следствия. Во-первых, сумма углов в треугольнике Лобачевского всегда меньше π . Во-вторых, три прямые на плоскости Лобачевского могут оказаться попарно параллельными и не все в одну и ту же сторону (рис. 7). Такая фигура называется предельным треугольником. Три космических корабля, путешествующих между тремя бесконечно удаленными звездами, движущихся по сторонам предельного треугольника. Так как углы в предельном треугольнике равны нулю, то его площадь равна πk^2 . Наконец,

следует ожидать, что планиметрия Лобачевского реализуется на сфере мнимого радиуса $R = ik$. Все формулы тригонометрии Лобачевского подтверждают эту догадку.

7. ТРИГОНОМЕТРИЯ

Всего в треугольнике имеется шесть элементов: три угла X, Y, Z и три стороны x, y, z (рис. 8). В планиметрии Лобачевского так же, как и в сферической планиметрии, любые три элемента треугольника можно выбрать в качестве независимых.

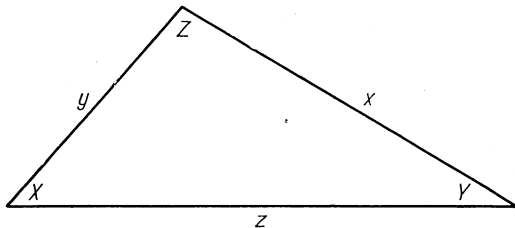


Рис. 8. Элементы треугольника.

Остальные три элемента выражаются через них по тригонометрическим формулам. Хотя имеется, таким образом, только три независимых уравнения, связывающих шесть элементов треугольника, удобно написать $c_8^4 = \frac{6!}{4! 2!} = 15$ уравнений вида $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$, где x_1, x_2, x_3, x_4 — некоторые четыре элемента треугольника, чтобы по любым заданным трем элементам можно было, не задумываясь, находить любой четвертый. Эти пятнадцать уравнений распадаются на четыре группы:

0. А) $F_A(x, y, z, Z) = 0, F_A(y, z, x, X) = 0, F_A(z, x, y, Y) = 0;$
 0. Б) $F_B(x, y, X, Y) = 0, F_B(x, z, X, Z) = 0, F_B(y, z, Y, Z) = 0;$
 0. В) $F_B(x, y, X, Z) = 0, F_B(y, z, Y, X) = 0, F_B(z, x, Z, Y) = 0;$
 $F_B(y, x, Y, Z) = 0, F_B(z, y, Z, X) = 0, F_B(x, z, X, Y) = 0;$
 0. Г) $F_\Gamma(X, Y, Z, z) = 0, F_\Gamma(Y, Z, X, x) = 0, F_\Gamma(Z, X, Y, y) = 0.$

В каждой группе функции, связывающие четыре элемента треугольника, одинаковы, что и отмечено должным образом. В первой группе связываются три стороны и один угол треугольника. Во второй группе связываются две стороны и два противолежащих им угла. В третьей группе связываются две стороны и два угла, прилежащих к одной из этих сторон. Наконец, в четвертой группе связываются три угла и одна сторона. Очевидно, из каждой группы достаточно выписать по одному уравнению.

Сделаем это сначала для сферической тригонометрии:

1. А) $\cos z/R = \cos x/R \cos y/R + \sin x/R \sin y/R \cos Z$;
1. Б) $\sin y/R \sin X = \sin x/R \sin Y$;
1. В) $\operatorname{ctg} X \sin Z + \cos y/R \cos Z = \operatorname{ctg} x/R \sin y/R$;
1. Г) $\cos Z + \cos X \cos Y = \sin X \sin Y \cos z/R$.

Тому, кто знаком с тригонометрическими функциями главным образом по школьному курсу, может показаться странным, что они появляются в сферической тригонометрии, хотя мы и не вкладываем сферу в евклидово пространство. Еще более странным ему может показаться, что они появляются и в тригонометрии Лобачевского, где мы заранее отказываемся от евклидова постулата о параллельных. Как же их в таком случае определить? Лобачевский и Бойяи определили их с помощью евклидовой планиметрии орисферы. Но и этот путь окажется закрытым, если мы не захотим опираться на стереометрию.

Все дело в том, что $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$, как известно, можно определить совершенно независимо от какой бы то ни было геометрии, например как два решения дифференциального уравнения $d^2y/d\varphi^2 + y = 0$ с начальными данными $y|_{\varphi=0} = 0$, $y'|_{\varphi=0} = 1$ для синуса и $y|_{\varphi=0} = 1$, $y'|_{\varphi=0} = 0$ для косинуса. После этого определяются $\operatorname{tg} \varphi = \sin \varphi / \cos \varphi$ и другие тригонометрические функции. Равным образом, и число 2π можно определить не как отношение длины окружности к радиусу (в неевклидовой планиметрии это отношение зависит от радиуса), а как период выше определенных синуса и косинуса. Согласно формуле Эйлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, имеем

$$\sin \varphi = (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})/2i, \quad \cos \varphi = (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})/2.$$

Вводя гиперболические синус и косинус

$$\operatorname{sh} \psi = (e^\psi - e^{-\psi})/2, \quad \operatorname{ch} \psi = (e^\psi + e^{-\psi})/2$$

и полагая $\varphi = \psi/i$, получаем $i \sin \psi/i = \operatorname{sh} \psi$, $\cos \psi/i = \operatorname{ch} \psi$. После этого, определив еще гиперболические тангенс $\operatorname{th} \psi = \operatorname{sh} \psi / \operatorname{ch} \psi$ и котангенс $\operatorname{cth} \psi = \operatorname{ch} \psi / \operatorname{sh} \psi$, легко получить формулы тригонометрии Лобачевского, положив $R = ik$ в формулах сферической тригонометрии, а именно:

2. А) $\operatorname{ch} z/k = \operatorname{ch} x/k \operatorname{ch} y/k - \operatorname{sh} x/k \operatorname{sh} y/k \cos Z$;
2. Б) $\operatorname{sh} y/k \sin X = \operatorname{sh} x/k \sin Y$;
2. В) $\operatorname{ctg} X \sin Z + \operatorname{ch} y/k \cos Z = \operatorname{cth} x/k \operatorname{sh} y/k$;
2. Г) $\cos Z + \cos X \cos Y = \sin X \sin Y \operatorname{ch} z/k$.

При малых значениях аргумента $\operatorname{sh} \psi \approx \psi$, $\operatorname{ch} \psi \approx 1 + \psi^2/2$. Пользуясь этим, нетрудно доказать, что при $k \rightarrow \infty$ формулы тригонометрии Лобачевского переходят в формулы обычной евклидовой тригонометрии, а именно:

$$3. \text{ А) } z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos Z;$$

$$3. \text{ Б) } y \sin X = x \sin Y;$$

$$3. \text{ В) } x \sin (X + Z) = y \sin X;$$

$$3. \text{ Г) } X + Y + Z = \pi.$$

Отсюда же следует, что последними формулами можно пользоваться для бесконечно малого треугольника на плоскости Лобачевского. Такой же результат можно получить и для сферической тригонометрии, устремляя к бесконечности R .

Рассмотрим теперь прямоугольный треугольник ($Z = \pi/2$). Он имеет пять элементов x, y, z, X, Y . Как и в общем случае, три независимых уравнения связывают его элементы. Надо написать $c_3^5 = \frac{5!}{3!2!} = 10$ уравнений вида $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, где x_1, x_2, x_3 — некоторые три элемента прямоугольного треугольника, чтобы по любым двум элементам можно было легко находить третий. Угол Z входит как раз в 10 из 15 уравнений для произвольного треугольника. Положив в них $Z = \pi/2$, находим

$$0. \text{ а) } f_a(x, y, z) = F_A\left(x, y, z, \frac{\pi}{2}\right) = 0;$$

$$0. \text{ б) } f_b(x, z, X) = F_B\left(x, z, X, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad f_b(y, z, Y) = 0;$$

$$0. \text{ в) } f_v(x, y, X) = F_B\left(x, y, X, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad f_v(y, x, Y) = 0;$$

$$0. \text{ г) } f_r(x, z, Y) = F_B\left(z, x, \frac{\pi}{2}, Y\right) = 0, \quad f_r(y, z, X) = 0;$$

$$0. \text{ д) } f_d(X, Y, y) = F_r\left(\frac{\pi}{2}, X, Y, y\right) = 0, \quad f_d(Y, X, x) = 0;$$

$$0. \text{ е) } f_e(X, Y, z) = F_r\left(X, Y, \frac{\pi}{2}, z\right) = 0.$$

В каждой паре б), в), г), д) функции, связывающие три элемента прямоугольного треугольника, одинаковы. Таким образом, достаточно выписать шесть уравнений для прямоугольного треугольника.

В сферическом прямоугольном треугольнике:

$$1. \text{ а) } \cos z/R = \cos x/R \cos y/R; \quad 1. \text{ г) } \operatorname{tg} y/R = \operatorname{tg} z/R \cos X;$$

$$1. \text{ б) } \sin x/R = \sin z/R \sin X; \quad 1. \text{ д) } \cos X = \cos x/R \sin Y;$$

$$1. \text{ в) } \operatorname{tg} x/R = \sin y/R \operatorname{tg} X; \quad 1. \text{ е) } \cos z/R \operatorname{tg} X \operatorname{tg} Y = 1;$$

в прямоугольном треугольнике Лобачевского:

$$\begin{aligned} 2. \text{ а) } \operatorname{ch} \frac{z}{k} &= \operatorname{ch} \frac{x}{k} \operatorname{ch} \frac{y}{k}; & 2. \text{ г) } \operatorname{th} \frac{y}{k} &= \operatorname{th} \frac{z}{k} \cos X; \\ 2. \text{ б) } \operatorname{sh} \frac{x}{k} &= \operatorname{sh} \frac{z}{k} \sin X; & 2. \text{ д) } \cos X &= \operatorname{ch} \frac{x}{k} \sin Y; \\ 2. \text{ в) } \operatorname{th} \frac{x}{k} &= \operatorname{sh} \frac{y}{k} \operatorname{tg} X; & 2. \text{ е) } \operatorname{ch} \frac{z}{k} \operatorname{tg} X \operatorname{tg} Y &= 1; \end{aligned}$$

в евклидовом прямоугольном треугольнике:

$$\begin{aligned} 3. \text{ а) } z^2 &= x^2 + y^2; & 3. \text{ г) } y &= z \cos X; \\ 3. \text{ б) } x &= z \sin X; & 3. \text{ д) } X + Y &= \pi/2; \\ 3. \text{ в) } x &= y \operatorname{tg} X; & 3. \text{ е) } X + Y &= \pi/2. \end{aligned}$$

8. СПРАВКА

При решении тригонометрических задач удобно пользоваться, наряду с предыдущими, следующими формулами:

$$\begin{aligned} \cos^2 x + \sin^2 x &= 1; & \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= 1; \\ \sin(x + y) &= \sin x \cos y + \sin y \cos x; \\ \operatorname{sh}(x + y) &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x; \\ \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y; \\ \operatorname{ch}(x + y) &= \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y; \\ \operatorname{tg}(x + y) &= \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}; & \operatorname{th}(x + y) &= \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}; \\ 2 \sin^2 \frac{x}{2} &= 1 - \cos x; & 2 \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2} &= \operatorname{ch} x - 1; \\ 2 \cos^2 \frac{x}{2} &= 1 + \cos x; & 2 \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} &= \operatorname{ch} x + 1; \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} &= \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}; & \operatorname{th} \frac{x}{2} &= \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + 1}; \\ \sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}; & \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y &= 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}; \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}; & \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y &= 2 \operatorname{ch} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}; \\ \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}; & \operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y &= 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{sh} \frac{x-y}{2}. \end{aligned}$$

9. УГОЛ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ

Тригонометрические формулы в применении к треугольнику на рис. 3, образованному лучами af и bM и отрезком ab , дают три выражения для угла параллельности:

$$\begin{aligned} \sin \Pi(p/k) &= 1/\operatorname{ch}(p/k), & \cos \Pi(p/k) &= \\ & & &= \operatorname{th}(p/k), & \operatorname{tg} \Pi(p/k) &= 1/\operatorname{sh}(p/k), \end{aligned}$$

откуда следует основная формула Лобачевского

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi (p/k) = e^{-p/k}.$$

10. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА

В окружность радиуса r впишем правильный n -угольник и подсчитаем его периметр. В пределе $n \rightarrow \infty$ периметр равняется длине окружности L . Радиусы, проведенные в вершины n -угольника, разбивают его на n одинаковых равнобедренных треугольников. На рис. 9 изображен один из них. Центральный угол aob равен $2\pi/n$. Рассечем его пополам высотой oc и применим формулу 2. б) из разд. 7 к прямоугольному треугольнику aoc .

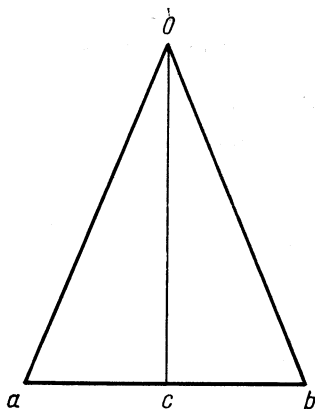


Рис. 9. Вывод формулы для длины окружности.

Обозначив $l = ab$ сторону многоугольника, получим $\operatorname{sh} l/2k = \operatorname{sh} \frac{r}{k} \sin \pi/n$. Так как $\sin \pi/n$, а вместе с ним, и $\operatorname{sh} l/2k$ при больших значениях n все больше приближаются к своим аргументам, то длина окружности

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} nl = 2\pi k \operatorname{sh} r/k.$$

Отсюда простым интегрированием получается площадь круга

$$\begin{aligned} S &= \int_0^r 2\pi k \operatorname{sh} \frac{x}{k} dx = \\ &= 2\pi k^2 \left(\operatorname{ch} \frac{r}{k} - 1 \right) = 4\pi k^2 \operatorname{sh}^2 \frac{r}{2k}. \end{aligned}$$

Мы видим, что если r — радиус сферы, то радиус ее кривизны равен $R = L/2\pi = k \operatorname{sh} r/k$. Площадь сферы равняется площади круга вдвое большего радиуса. Заметим также, что для всех трех тригонометрий формулы группы Б из разд. 7 записываются в виде:

$$\sin X/L_1 = \sin Y/L_2 = \sin Z/L_3,$$

где L_1, L_2, L_3 — длины окружностей радиусов x, y, z . Эта теорема принадлежит Бойяи.

11. КООРДИНАТЫ БЕЛЬТРАМИ

В 1868 г. Бельтрами указал координаты, в которых прямая на плоскости Лобачевского задается линейным уравнением. Простейший способ введения бельтрамиевых координат подсказывает тригонометрическая формула 2. г).

Введем сначала полярные координаты. Для этого выберем два взаимно перпендикулярных луча oe_1 и oe_2 , выходящих из некоторой точки o . Положение произвольной точки a относительно системы oe_1e_2 задается расстоянием $r = \overline{oa}$ до точки o и углом $\varphi = \angle aoe_1$, отсчитываемым в сторону oe_2 .

На прямую L , уравнение которой мы хотим написать, из точки o опустим перпендикуляр ob . Полярные координаты точки b обозначим r_0, φ_0 . Если точка a лежит на прямой L , то треугольник aob — прямоугольный. Поэтому, согласно формуле 2. г) из разд. 7

$$\text{th } r_0/k = \text{th } r/k \cos \angle aob.$$

Но $\cos \angle aob = \cos \varphi \cos \varphi_0 + \sin \varphi \sin \varphi_0$. Следовательно, величины $v_1 = k \text{th } r/k \cos \varphi$ и $v_2 = k \text{th } r/k \sin \varphi$ удовлетворяют линейному уравнению $v_1 \cos \varphi_0 + v_2 \sin \varphi_0 = v_0$, где $v_0 = k \text{th } r_0/k$. Это и есть уравнение прямой L , величины же v_1, v_2 суть Бельтрамиевы координаты. Так как $\text{th}^2 r/k < 1$, то они определены в области $v_1^2 + v_2^2 < k^2$. На границе этой области размещаются бесконечно удаленные точки плоскости Лобачевского.

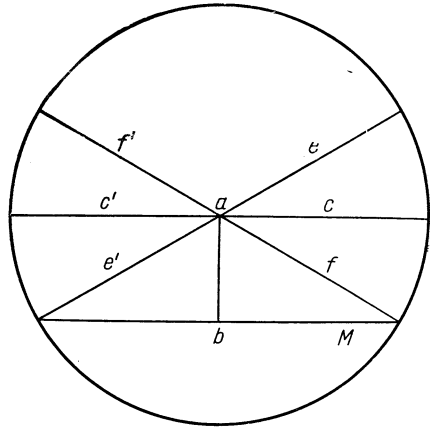


Рис. 10. Модель Бельтрами.

Когда хотят графически изобразить ту или иную зависимость между двумя величинами, то их часто представляют в виде декартовых координат на евклидовой плоскости. Поступив так с величинами v_1 и v_2 , мы отобразим плоскость Лобачевского на евклидов круг $v_1^2 + v_2^2 < k^2$, а прямую L — на евклидову хорду этого круга. Для упражнения рекомендуется представить евклидовы образы всех прямых рис. 3 (ответ см. на рис. 10).

Тогда же Бельтрами указал координаты, в которых плоскость в пространстве Лобачевского задается линейным уравнением, а прямая — парой линейных уравнений. Пространственные координаты Бельтрами во всем аналогичны плоским.

Введем сначала сферические координаты. Для этого выберем три взаимно перпендикулярных луча oe_1, oe_2 и oe_3 , выходящих из некоторой точки o . Положение произвольной точки a относительно системы $oe_1e_2e_3$ задается расстоянием $r = \overline{oa}$ до точки o , углом $\theta = \angle aoe_3$ и двугранным углом φ между плоскостями e_3oe_1 и e_3oa , отсчитываемым в сторону плоскости e_3oe_2 .

На плоскость P , уравнение которой мы хотим написать, из точки o опустим перпендикуляр ob . Сферические координаты точки b обозначим r_0, θ_0, φ_0 . Если точка a лежит на плоскости P , то треугольник aob — прямоугольный. Поэтому $\text{th } r_0/k = \text{th } r/k \cos \angle aob$. Но, согласно сферической тригонометрии, $\cos \angle aob = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$ (см. формулу 1.A) из разд. 7). Следовательно, величины $v_1 = k \text{th } \frac{r}{k} \sin \theta \cos \varphi$, $v_2 = k \text{th } \frac{r}{k} \sin \theta \sin \varphi$, $v_3 = k \text{th } \frac{r}{k} \cos \theta$ удовлетворяют линейному уравнению

$$v_1 \sin \theta_0 \cos \varphi_0 + v_2 \sin \theta_0 \sin \varphi_0 + v_3 \cos \theta_0 = v_0.$$

Это и есть уравнение плоскости P , величины же v_1, v_2, v_3 суть Бельтрамиевы координаты. Они определены в области $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 < k^2$. На границе этой области размещаются бесконечно удаленные точки пространства Лобачевского.

Здесь находятся вершины предельного треугольника (см. разд. 6).

Представляя v_1, v_2, v_3 как декартовы координаты в евклидовом пространстве, мы отображаем пространство Лобачевского на евклидов шар $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 < k^2$, а плоскость P — на евклидов круг с границей на этом шаре. Прямые же Лобачевского отображаем на евклидовы хорды шара.

Указанное отображение называют отображением или моделью Бельтрами.

Мы представили точку пространства Лобачевского евклидовым вектором \mathbf{v} с компонентами v_1, v_2, v_3 . Как определить расстояние \overline{ab} между двумя точками a и b по векторам \mathbf{v}_a и \mathbf{v}_b ? Хорошо усвоит модель Бельтрами тот, кто с помощью формулы 2. A) из разд. 7 докажет следующую формулу Бельтрами:

$$v_{ab} = \sqrt{\frac{(\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b)^2 - \frac{1}{k^2} [\mathbf{v}_a \mathbf{v}_b]^2}{1 - \frac{\mathbf{v}_a \mathbf{v}_b}{k^2}}},$$

где $v_{ab} = k \text{th } \overline{ab}/k$. В правой части этой формулы приняты общеизвестные обозначения векторной алгебры в евклидовом пространстве. При $k \rightarrow \infty$ пространство Лобачевского становится евклидовым, бельтрамиевы координаты — декартовыми, а формула Бельтрами переходит в хорошо известную формулу евклидовой геометрии: $v_{ab} = \sqrt{(\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b)^2}$, где $v_{ab} = \overline{ab}$.

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

12. ПРОСТРАНСТВО И ВРЕМЯ В МЕХАНИКЕ НЬЮТОНА

Движение тел в ньютоновой механике рассматривается в едином абсолютном времени. Согласно Ньютону [2], «все движения могут ускоряться или замедляться, течение же абсолютного времени изменяться не может. Длительность или продолжительность существования вещей одна и та же, быстры ли движения (по которым измеряется время), медленны ли, или их совсем нет».

Наряду с абсолютным временем Ньютон ввел также и абсолютное пространство, которое всегда остается одинаковым и неподвижным. Перемещение тела в абсолютном пространстве Ньютон называл абсолютным движением, а перемещение того же тела в движущемся (относительном) пространстве — относительным движением. Кинематика, располагая лишь геометрическими приемами описания движущихся тел, не отличает относительного движения от абсолютного. Различие между ними может проявиться только в динамике, указывающей на те или иные причины движения. Но и динамика, в свою очередь, не в состоянии отличить некоторые относительные движения от абсолютного. Из указанных им самим законов движения Ньютон [2] вывел следствие, возведенное в двадцатом веке в плодотворный принцип, а именно: «Относительные движения друг по отношению к другу тел, заключенных в каком-либо пространстве, одинаковы, покоится ли это пространство или движется равномерно и прямолинейно без вращения». Таким образом, абсолютное пространство в механике Ньютона оказывается ничем не выделенным среди других пространств, движущихся относительно него равномерно и прямолинейно без вращения. Наряду с абсолютным такие относительные пространства стали называть инерциальными системами отсчета. Ввиду того что абсолютно покоящаяся система отсчета с точки зрения механики ничем не выделена среди других инерциальных систем, утверждение Ньютона о существовании абсолютного пространства стали понимать как утверждение о существовании инерциальных систем отсчета, в которых одинаково выполняются ньютоновы законы движения.

Принимая постулат абсолютного времени, нетрудно вывести формулы, связывающие две инерциальные системы отсчета, — известные преобразования, названные именем Галилея. Все законы ньютоновой механики инвариантны относительно преобразований Галилея.

Небезынтересно заметить, что все это верно лишь при условии, что абсолютное пространство Ньютона считается евклидовым. Но, как мы знаем, Лобачевский выдвинул идею ввести неевклидову геометрию в механику, идею тем более естественную, что сам

Ньютон рассматривал геометрию как часть механики. Впоследствии выяснилось, что в случае неевклидова абсолютного пространства Ньютона всякое относительное движение тела, не отличаясь кинематически от абсолютного движения, отличается от него динамически. К еще более важным следствиям приводит введение геометрии Лобачевского в пространство скоростей, но не будем забегать вперед.

13. ОТКРЫТИЕ НОВОЙ МЕХАНИКИ

В то время, когда Лобачевский пытался найти прямое экспериментальное подтверждение своей геометрии, шло интенсивное накопление опытных данных об электричестве и магнетизме. В шестидесятых годах прошлого века Максвелл подытожил этот процесс в знаменитых уравнениях электродинамики. Вскоре было замечено, что уравнения Максвелла инвариантны относительно преобразований Галилея. Таким образом, если продолжать оставаться на позициях ньютоновой механики, то надо выделить инерциальную систему отсчета, в которой уравнения Максвелла имеют свой оригинальный вид. Ее с полным правом можно было бы называть абсолютно покоящейся. В этой системе отсчета скорость фронта электромагнитной волны (скорость света) не зависит от направления и равна c — константе, входящей в уравнения Максвелла. Согласно преобразованиям Галилея в движущейся инерциальной системе отсчета скорость света зависела бы от скорости самой системы отсчета. Однако этому простому выводу противоречил ряд экспериментов и, особенно, прямой опыт Майкельсона.

Стараясь разрешить указанное противоречие, Г. А. Лоренц выдвинул идею (1904 г.), что не только механические, но и электромагнитные явления не зависят от равномерного поступательного движения системы отсчета. В силу этой идеи преобразования Галилея необходимо было заменить новыми преобразованиями, относительно которых должны быть инвариантными уравнения Максвелла, что и было сделано самим Лоренцем.

Приняв идею Лоренца, надо было согласовать с ней и механику. Это сделали в 1905 г. независимо А. Эйнштейн и А. Пуанкаре. Из преобразований Лоренца они получили закон сложения скоростей, приводящий к формуле

$$v' = \frac{\sqrt{(v-u)^2 - \frac{1}{c^2} [vu]^2}}{1 - \frac{vu}{c^2}}.$$

Здесь v — скорость частицы в покоящейся системе отсчета, v' — модуль ее скорости в движущейся системе, u — скорость движущейся системы отсчета.

Эйнштейн нашел также в новой механике зависимость кинетической энергии частицы от скорости

$$T = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

и установил знаменитый закон $E = Mc^2$.

Со своей стороны, Пуанкаре дал в новой механике определение силы, действующей на частицу. Кроме того, он указал, что преобразование Лоренца не меняет квадратичной формы $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ и является поворотом в четырехмерном евклидовом пространстве с декартовыми координатами x, y, z, ict .

Идеи Лоренца, Эйнштейна и Пуанкаре подытожил Г. Минковский (1908 г.), введя понятие пространственно-временного мира. По определению Минковского точка с координатами x, y, z , рассматриваемая в момент времени t , т. е. совокупность (x, y, z, t) , есть мировая точка, а многообразии всех мировых точек есть пространственно-временной мир или просто мир. Представления Ньютона о пространстве и времени выражены Минковским в виде своеобразной геометрии мира. Переход к новым представлениям о пространстве и времени приводит к другой геометрии мира. Преобразования Галилея в одном и преобразования Лоренца в другом случае имеют такое же отношение к миру, какое имеют повороты к обычному пространству.

Характерным для новых представлений является отрицание ньютонова постулата абсолютного времени — шаг, сравнимый с отрицанием евклидова постулата о параллельных. Во всем здесь просматривалась аналогия и вскоре было доказано, что отрицать ньютонов постулат логически все равно, что отрицать евклидов постулат. В 1910 г. Ф. Клейн показал, что в бесконечно удаленной мировой гиперплоскости в случае Галилея действует евклидова геометрия, а в случае Лоренца — геометрия Лобачевского. В 1923 г. А. П. Котельников раскрыл физический смысл этой гиперплоскости и дал ей выразительное название пространства скоростей. Так исторический ход науки связал новую механику с многовековой проблемой параллельных*.

14. ПРОСТРАНСТВО СКОРОСТЕЙ

Постараемся составить самое элементарное представление о пространстве скоростей. Это такое пространство, в котором компоненты скорости v_1, v_2, v_3 являются координатами. Расстояние

* Сегодня кажется невероятным, что в пятидесятые годы эти сведения приходилось добывать, как говорится, копаясь в архивной пыли.

в пространстве скоростей измеряется в единицах скорости, а не длины, и называется быстротой. Уже поэтому пространство скоростей не совпадает с пространством положений частицы. Надо отличать точку a в пространстве скоростей от вектора скорости v_a : с переходом к новой системе отсчета вектор скорости меняется, точка же остается на месте. Чтобы подчеркнуть это, мы будем называть точку в пространстве скоростей мировой скоростью. Сама система отсчета имеет мировую скорость, покоится ли она или движется. Систему отсчета мы будем обозначать ее мировой скоростью: так, система отсчета o имеет мировую скорость o , система отсчета o' имеет мировую скорость o' и т. д. Согласно принципу относительности, все мировые скорости равноправны; равноправны и все направления в пространстве скоростей.

Истолкуем теперь формулу Эйнштейна — Пуанкаре для сложения скоростей (разд. 13) следующим образом; модуль относительной скорости v_{ab} двух частиц, движущихся со скоростями $v_a = v$ и $v_b = u$, равен v' . Обратим внимание на то, что эта формула в точности совпадает с формулой Бельтрами (разд. 11), если только положить $k = c$. Отсюда сразу можно заключить, что пространство скоростей в случае Лоренца является пространством Лобачевского с характерной константой, равной скорости света c . Мы видим, что в случае Лоренца пространство скоростей не только не совпадает с пространством положений частицы, но и в отличие от последнего имеет неевклидову геометрию. В галилеевом же случае $c = \infty$ и пространство скоростей, хотя и продолжает не совпадать с пространством положений частицы, однако принимает одинаковую с ним евклидову геометрию. Случай Галилея и случай Лоренца различаются постулатом о параллельных в пространстве скоростей.

Из приведенного выше сравнения формулы Эйнштейна — Пуанкаре с формулой Бельтрами следует также, что компоненты скорости v_1, v_2, v_3 являются бельтрамиевыми координатами в пространстве скоростей, что относительная скорость v_{ab} связана с расстоянием \overline{ab} между мировыми скоростями a и b подстановкой

$v_{ab} = c \operatorname{th} \frac{\overline{ab}}{c}$ и что угол в евклидовом пространстве между векторами v_a и v_b равен углу aob в пространстве скоростей. Распространенное же представление о скорости как о евклидовом векторе v в случае Лоренца — не более чем образ направленного отрезка прямой Лобачевского в модели Бельтрами (разд. 14). Бесконечно удаленные точки пространства скоростей, для которых $v = c$, представляют собой мировые скорости частиц особого рода, таких, как, например, фотоны и нейтрино. Их мы рассматривать здесь не будем.

15. АБСОЛЮТНАЯ ЧАСТЬ ФИЗИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Установилась довольно странная привычка называть физическую теорию в случае Лоренца релятивистской, а в случае Галилея — нерелятивистской, хотя, конечно, в обоих случаях мы имеем дело с той или иной формой относительности. Говорят, например, релятивистская механика — нерелятивистская механика, релятивистский закон сложения скоростей — нерелятивистский закон сложения скоростей, говорят даже, релятивистская частица — нерелятивистская частица и т. п. Так как термины «релятивистский» и «нерелятивистский» приходится считать чисто условными, то надо договориться, какой придавать им точный смысл. Пусть первый означает, что в пространстве скоростей действует геометрия Лобачевского, а второй — геометрия Евклида. В таком понимании общая часть нерелятивистской и соответствующей релятивистской теорий основывается на абсолютной геометрии (см. разд. 2) пространства скоростей. В том же смысле, что и геометрию, эту часть теории можно называть абсолютной. Можно говорить, например, об абсолютной механике, об абсолютной кинетической теории газа и т. д. Хорошо установлено, что в действительности геометрия пространства скоростей неевклидова, так что настоящая теория должна быть непременно релятивистской. Тогда зачем же нужны нерелятивистские теории? Ответ таков. В большом ряде явлений играет роль лишь малая область в пространстве скоростей, настолько малая, что к ней с достаточной степенью точности применима геометрия Евклида. Нерелятивистские теории нужны для объяснения этих явлений. Кроме того, в нерелятивистской теории содержится абсолютная часть, целиком переносимая в релятивистскую теорию, — соображение, которым не следует пренебрегать при разработке релятивистского аналога уже готовой нерелятивистской теории. Например, оно во многом помогло автору при построении релятивистского аналога газокинетической теории Больцмана.

Тем не менее надо сказать, что абсолютная часть большинства физических теорий, не исключая и простейшей — механики, оказывается малосодержательной. Этим, пожалуй, можно объяснить, что до сих пор не построена релятивистская механика двух частиц, не говоря уже о трех и более частицах. Имеются веские основания думать, что грядущая релятивистская механика потребует непривычных для нерелятивистской механики методов. Хорошо разработаны лишь два раздела релятивистской механики — механика одной частицы в заданном поле сил и механика контактных столкновений частиц. Успех, надо полагать, в известной мере был обеспечен довольно богатым содержанием указанных разделов абсолютной механики. В механике контактных столкновений геометрия пространства скоростей проявляется самым непосредственным образом.

16. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ И ИМПУЛЬС

Докажем, что кинетическая энергия частицы есть нагруженная площадь круга в пространстве скоростей, а ее импульс — нагруженная длина окружности. Если в формулу Эйнштейна для кинетической энергии (разд. 13) подставить $v = c \operatorname{th} s/c$, то получится $T = mc^2 (\operatorname{ch} \frac{s}{c} - 1)$. Производная кинетической энергии T по скорости s равна импульсу частицы $p = mc \operatorname{sh} \frac{s}{c}$. Сравнивая эти формулы с формулами для площади круга и длины окружности (разд. 10), замечаем, что $\frac{2\pi}{m} T$ есть площадь круга радиуса s в пространстве скоростей и что $\frac{2\pi}{m} p$ есть длина окружности того же радиуса; s — это расстояние от мировой скорости системы отсчета до мировой скорости частицы. Так можно определить кинетическую энергию и импульс в абсолютной механике.

17. ЗАДАЧА ДЛЯ УСКОРИТЕЛЯ СО ВСТРЕЧНЫМИ ПУЧКАМИ

В ускорителе со встречными пучками электрон и позитрон движутся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями, равными w . Эффект столкновения определяется их относительной скоростью v . Как связаны эти величины?

Обозначим a^- и a^+ мировые скорости электрона и позитрона. Мировая скорость a ускорителя делит отрезок a^-a^+ пополам. Пусть s — длина этого отрезка. Тогда $v = c \operatorname{th} \frac{s}{c}$, $w = c \operatorname{th} \frac{s}{2c}$. Исключив s , находим

$$v = 2w/(1 + w^2/c^2).$$

Величину w назовем относительной полускоростью электрона и позитрона. Это важная характеристика движения. Вообще, если s — расстояние между мировой скоростью частицы и мировой скоростью системы отсчета, то полускорость частицы в этой системе отсчета равна $w = c \operatorname{th} s/2c$. Так как $\operatorname{th} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x}$, то полускорость w равна отношению площади круга к длине окружности, или, согласно разд. 16, отношению кинетической энергии T к импульсу p . Таково определение полускорости в абсолютной механике.

Обозначим теперь t кинетическую энергию частицы в ускорителе со встречными пучками и выясним, на какую кинетическую энергию T надо рассчитать ускоритель одних только позитронов, чтобы эффект от их столкновения с покоящимися электронами был такой же, как и в первом ускорителе.

Имеем $t = mc^2 \left(\operatorname{ch} \frac{s}{2c} - 1 \right)$, $T = mc^2 \left(\operatorname{ch} \frac{s}{c} - 1 \right)$. Исключая s , находим $T = 2t \left(2 + \frac{t}{mc^2} \right)$. В нерелятивистском случае $T = 4t$, в релятивистском же при очень больших t/mc^2 (или, как говорят, в ультрарелятивистском случае) можно пользоваться приближенной формулой $T = \frac{2t^2}{mc^2}$. Если, например, кинетическая энергия t равна тысяче mc^2 , то кинетическая энергия T равна двум миллионам mc^2 . В этом преимущество ускорителей со встречными пучками.

Только что решенную задачу можно выразить и средствами абсолютной механики. Удельная кинетическая энергия $2\pi T/m$ равна площади круга радиуса a^-a^+ , равной, в свою очередь (см. разд. 10), площади сферы с диаметром a^-a^+ . Удельная же кинетическая энергия $2\pi t/m$ равна площади круга с диаметром a^-a^+ . Следовательно, отношение T к t равно отношению площади указанной сферы к площади ее большого круга.

18. ЗАКОНЫ РЫЧАГА АРХИМЕДА

В механике контактных столкновений не интересуются координатами частиц в процессе столкновения, и потому кроме пространства скоростей из пространственно-временных отношений остается лишь пара понятий «до» и «после» столкновения. Простейший вид контактного столкновения — абсолютно неупругое столкновение двух частиц, или, другими словами, соединение двух частиц в одну. В первую очередь возникает следующая задача. Пусть две частицы γ_1 и γ_2 с массами m_1 и m_2 и с мировыми скоростями a_1 и a_2 соединились в одну частицу γ . Требуется определить массу m и мировую скорость a частицы γ . Эту же задачу можно сформулировать иначе. Пусть частица γ распалась на две частицы γ_1 и γ_2 с массами m_1 и m_2 и с мировыми скоростями a_1 и a_2 . Требуется определить массу m и мировую скорость a частицы γ . Решение задачи выражается парой законов рычага Архимеда.

Действительно, во-первых, в системе отсчета a , где покоится частица γ , импульсы частиц γ_1 и γ_2 равны по модулю и противоположны по направлению. Следовательно, точка a лежит на отрезке a_1a_2 и делит его так, чтобы длины L_1 и L_2 окружностей, проведенных из точки a радиусами aa_1 и aa_2 , относились друг к другу, как m_2 к m_1 (рис. 11). Это первый закон рычага. Во-вторых, в системе отсчета a_1 , где покоится частица γ_1 , импульсы частиц γ и γ_2 одинаковы. Следовательно, длины L и L_1 окружностей, проведенных из точки a_1 радиусами a_1a_2 и a_1a , должны относиться друг к другу, как m к m_2 (рис. 12). Это второй закон рычага. Первый закон позволяет найти мировую скорость a , второй —

массу m . Все сказанное можно кратко записать в виде двух симметричных относительно частиц γ_1 и γ_2 формул

$$\overline{a_1 a} + \overline{a a_2} = \overline{a_1 a_2}, \quad m_1/L_2 = m_2/L_1 = m/L.$$

Таково решение задачи в абсолютной механике.

В школьном курсе механики рычаг Архимеда рассматривается, конечно, не в пространстве скоростей, а в пространстве положений частицы. Законы рычага согласуются с принципом сохранения энергии: работы, производимые силами, приложенными к плечам

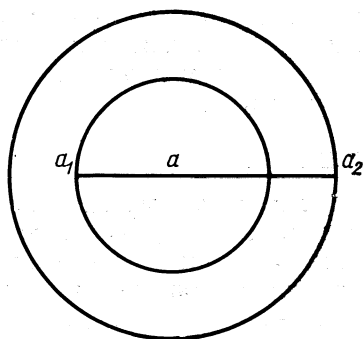


Рис. 11. Первый закон рычага.

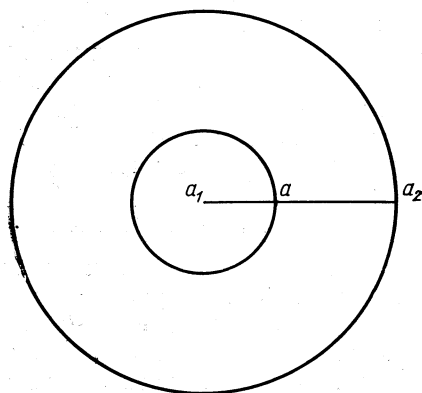


Рис. 12. Второй закон рычага.

рычага, одинаковы. Поэтому $f_1 L_1 = f_2 L_2$ и $f_2 L = f L_1$, где f_1 , f_2 , f — силы, L_1 , L_2 , L — длины окружностей. Лишь принимая постулат Евклида о параллельных, мы можем заменить длины окружностей плечами рычага, так как тогда длина окружности становится пропорциональной радиусу. С формальной точки зрения переход к рычагу в пространстве скоростей состоит в замене сил f массами m и константы Лобачевского k скоростью света c .

Решим теперь составленную нами систему уравнений. Нам известны m_1 , m_2 и $\overline{a_1 a_2}$ и требуется найти $\overline{a a_1}$, $\overline{a a_2}$ и m . Из уравнений

$$m_1 \operatorname{sh} \frac{\overline{a a_1}}{c} = m_2 \operatorname{sh} \frac{\overline{a_1 a_2} - \overline{a a_1}}{c},$$

$$m_1 \operatorname{sh} \frac{\overline{a_1 a_2} - \overline{a a_2}}{c} = m_2 \operatorname{sh} \frac{\overline{a a_2}}{c}$$

находим гиперболические тангенсы искомых величин $\overline{aa_1}$ и $\overline{aa_2}$:

$$\operatorname{th} \frac{\overline{aa_1}}{c} = \frac{m_2 \operatorname{sh} \frac{\overline{a_1 a_2}}{c}}{m_1 + m_2 \operatorname{ch} \frac{\overline{a_1 a_2}}{c}},$$

$$\operatorname{th} \frac{\overline{aa_2}}{c} = \frac{m_1 \operatorname{sh} \frac{\overline{a_1 a_2}}{c}}{m_2 + m_1 \operatorname{ch} \frac{\overline{a_1 a_2}}{c}}.$$

Зная тангенсы, нетрудно получить синусы:

$$\operatorname{sh} \frac{\overline{aa_1}}{c} = \frac{m_2 \operatorname{sh} \frac{\overline{a_1 a_2}}{c}}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \operatorname{ch} \frac{\overline{a_1 a_2}}{c}}},$$

$$\operatorname{sh} \frac{\overline{aa_2}}{c} = \frac{m_1 \operatorname{sh} \frac{\overline{a_1 a_2}}{c}}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \operatorname{ch} \frac{\overline{a_1 a_2}}{c}}}.$$

Согласно второму закону рычага, последние формулы дают искомую массу m :

$$m = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \operatorname{ch} \frac{\overline{a_1 a_2}}{c}}.$$

Мы видим, что в нерелятивистской механике всегда $m = m_1 + m_2$. В релятивистской же механике такое равенство достигается лишь при $\overline{a_1 a_2} = 0$; с ростом рычага $\overline{a_1 a_2}$ масса m монотонно растет и может стать сколь угодно большой.

19. АДДИТИВНАЯ МАССА

Убедимся, что и в релятивистской механике возможно дать определение аддитивной массы, т. е. такой, что масса частицы γ равна сумме масс частиц γ_1 и γ_2 . В разд. 18 мы нашли гиперболические синусы и тангенсы плечей рычага $a_1 a_2$. Их отношения дают гиперболические косинусы

$$m \operatorname{ch} \frac{\overline{aa_1}}{c} = m_1 + m_2 \operatorname{ch} \frac{\overline{a_1 a_2}}{c}, \quad m \operatorname{ch} \frac{\overline{aa_2}}{c} = m_2 + m_1 \operatorname{ch} \frac{\overline{a_1 a_2}}{c}.$$

Умножая первую из этих формул на m_1 , вторую на m_2 и складывая их, получаем

$$m_1 \operatorname{ch} \frac{\overline{aa_1}}{c} + m_2 \operatorname{ch} \frac{\overline{aa_2}}{c} = m.$$

Пусть теперь некоторая точка o представляет мировую скорость системы отсчета. Применим формулу 2. А) из разд. 7 к треугольникам oaa_1 и oaa_2 (рис. 13). Имеем

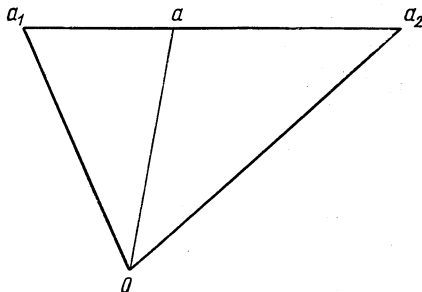


Рис. 13. Аддитивная масса.

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \frac{\overline{oa_1}}{c} &= \operatorname{ch} \frac{\overline{aa_1}}{c} \operatorname{ch} \frac{\overline{oa}}{c} - \\ &- \operatorname{sh} \frac{\overline{aa_1}}{c} \operatorname{sh} \frac{\overline{oa}}{c} \cos \angle oaa_1, \\ \operatorname{ch} \frac{\overline{oa_2}}{c} &= \operatorname{ch} \frac{\overline{aa_2}}{c} \operatorname{ch} \frac{\overline{oa}}{c} - \\ &- \operatorname{sh} \frac{\overline{aa_2}}{c} \operatorname{sh} \frac{\overline{oa}}{c} \cos \angle oaa_2. \end{aligned}$$

Сложим первую из этих формул, умноженную на m_1 , со второй, умноженной на m_2 . Учитывая, что $\angle oaa_1 + \angle oaa_2 = \pi$, получаем

$$m_1 \operatorname{ch} \frac{\overline{oa_1}}{c} + m_2 \operatorname{ch} \frac{\overline{oa_2}}{c} = m \operatorname{ch} \frac{\overline{oa}}{c}.$$

Первые три формулы в этом разделе являются частными случаями только что полученной формулы ($o = a_1$, $o = a_2$, $o = a$). Мы пришли, таким образом, к понятию аддитивной массы $m \operatorname{ch} \frac{\overline{oa}}{c}$. В отличие от нее массу m называют собственной массой или массой покоя.

20. 4-ИМПУЛЬС ЧАСТИЦЫ

Пусть, как прежде, a — мировая скорость частицы. Проведем в пространстве скоростей произвольный луч. На этом луче отметим точку e , неважно какую, лишь бы она не совпала с вершиной луча. Вершину же луча обозначим буквой o . Каждому направлению в пространстве, движущемся с мировой скоростью o , соответствует вполне определенный луч oe и, наоборот, каждому лучу oe соответствует вполне определенное направление в пространстве, движущемся с мировой скоростью o . Проекция импульса частицы на это направление равна $mc \operatorname{sh} \frac{\overline{oa}}{c} \cos \angle aoe$.

Докажем, что из законов рычага Архимеда следует аддитивность проекции импульса: для частиц γ_1 , γ_2 и γ

$$m_1 c \operatorname{sh} \frac{\overline{oa_1}}{c} \cos \angle a_1oe + m_2 c \operatorname{sh} \frac{\overline{oa_2}}{c} \cos \angle a_2oe = mc \operatorname{sh} \frac{\overline{oa}}{c} \cos \angle aoe.$$

Применив формулу 2.A) из разд. 7 к треугольникам $eo a_1$, $eo a_2$, $eo a$ (рис. 14), получим:

$$\operatorname{ch} \frac{\overline{ea_1}}{c} = \operatorname{ch} \frac{\overline{oe}}{c} \operatorname{ch} \frac{\overline{oa_1}}{c} - \operatorname{sh} \frac{\overline{oe}}{c} \operatorname{sh} \frac{\overline{oa_1}}{c} \cos \angle a_1oe;$$

$$\operatorname{ch} \frac{\overline{ea_2}}{c} = \operatorname{ch} \frac{\overline{oe}}{c} \operatorname{ch} \frac{\overline{oa_2}}{c} - \operatorname{sh} \frac{\overline{oe}}{c} \operatorname{sh} \frac{\overline{oa_2}}{c} \cos \angle a_2oe;$$

$$\operatorname{ch} \frac{\overline{ea}}{c} = \operatorname{ch} \frac{\overline{oe}}{c} \operatorname{ch} \frac{\overline{oa}}{c} - \operatorname{sh} \frac{\overline{oe}}{c} \operatorname{sh} \frac{\overline{oa}}{c} \cos \angle aoe.$$

Кроме того, мы имеем основную формулу предыдущего раздела и ее дубликат

$$\begin{aligned} m_1 \operatorname{ch} \frac{\overline{ea_1}}{c} + m_2 \operatorname{ch} \frac{\overline{ea_2}}{c} &= \\ &= m \operatorname{ch} \frac{\overline{ea}}{c}. \end{aligned}$$

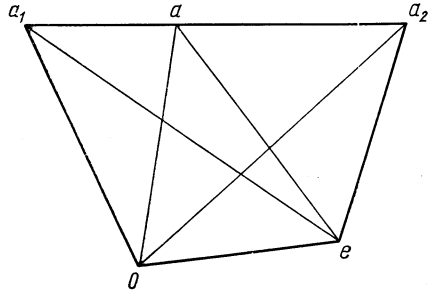


Рис. 14. Аддитивность импульса.

Отсюда немедленно следует аддитивность проекции импульсов на направление oe .

Проведем теперь в пространстве скоростей из точки o три взаимно перпендикулярных луча oe_1 , oe_2 , oe_3 , как это мы делали в разд. 11, и введем сферические координаты \overline{oa} , θ и φ . Четыре величины

$$p_0 = m \operatorname{ch} \frac{\overline{oa}}{c};$$

$$p_1 = mc \operatorname{sh} \frac{\overline{oa}}{c} \cos \angle aoe_1 = mc \operatorname{sh} \frac{\overline{oa}}{c} \sin \theta \cos \varphi;$$

$$p_2 = mc \operatorname{sh} \frac{\overline{oa}}{c} \cos \angle aoe_2 = mc \operatorname{sh} \frac{\overline{oa}}{c} \sin \theta \sin \varphi;$$

$$p_3 = mc \operatorname{sh} \frac{\overline{oa}}{c} \cos \angle aoe_3 = mc \operatorname{sh} \frac{\overline{oa}}{c} \cos \theta$$

составляют 4-импульс частицы. Они связаны равенством

$$p_0^2 - \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{c^2} = m^2.$$

4-Импульс аддитивен, т. е. 4-импульс частицы γ равен сумме 4-импульсов частиц γ_1 и γ_2 . Имея это в виду, говорят о законе сохранения 4-импульса. Мы получили этот закон как следствие закона Архимеда. Но при формулировке законов рычага фактически было доказано и обратное, т. е. что они следуют из закона сохранения 4-импульса. Таким образом, архимедовы законы рычага в пространстве скоростей оказываются эквивалентными закону сохранения 4-импульса.

21. ЗАКОН ЭЙНШТЕЙНА $E = Mc^2$

Подсчитаем, сколько кинетической энергии ΔT выделяется при распаде частицы γ на две частицы γ_1 и γ_2 или, наоборот, поглощается при соединении частиц γ_1 и γ_2 в одну частицу γ . В любой системе отсчета o имеем

$$\Delta T = m_1 c^2 \left(\operatorname{ch} \frac{\overline{oa}_1}{c} - 1 \right) + m_2 c^2 \left(\operatorname{ch} \frac{\overline{oa}_2}{c} - 1 \right) - m c^2 \left(\operatorname{ch} \frac{\overline{oa}}{c} - 1 \right).$$

Учитывая основную формулу разд. 19, получаем формулу Эйнштейна

$$\Delta T = (m - m_1 - m_2) c^2,$$

так что ΔT не зависит от системы отсчета o . Совместив точку o с точкой a , находим еще одно выражение

$$\Delta T = m_1 c^2 \left(\operatorname{ch} \frac{\overline{aa}_1}{c} - 1 \right) + m_2 c^2 \left(\operatorname{ch} \frac{\overline{aa}_2}{c} - 1 \right).$$

Приравнивая его самому первому выражению, получаем, что сумма кинетических энергий частиц γ_1 и γ_2 в любой системе отсчета o равна их сумме в системе отсчета a , сложенной с кинетической энергией частицы γ в системе отсчета o . Зная, что кинетическая энергия есть нагруженная площадь круга, нетрудно перевести это утверждение на геометрический язык. В нерелятивистской механике это утверждение можно проверить двумя способами: один раз — переходя в релятивистских формулах к пределу $c \rightarrow \infty$, другой — совсем не прибегая к релятивистским формулам.

Основное различие между релятивистской и нерелятивистской механиками проявляется здесь в формуле Эйнштейна. В каждой механике можно выразить ΔT через m_1 , m_2 и $\overline{a_1 a_2}$ — в одной:

$$\Delta T = \left(\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \operatorname{ch} \frac{\overline{a_1 a_2}}{c}} - m_1 - m_2 \right) c^2,$$

и в другой:

$$\Delta T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \overline{a_1 a_2}^2,$$

но только в релятивистской механике можно выразить ΔT через m_1 , m_2 и m , ибо в нерелятивистской механике $m = m_1 + m_2$. При заданной массе m в нерелятивистской механике кинетическая энергия ΔT может стать сколь угодно большой. В релятивистской же механике она не может стать больше, чем mc^2 . Наряду с общим случаем $\Delta T < mc^2$ здесь возможен и предельный случай $\Delta T = mc^2$, например, когда частицы γ_1 и γ_2 оказываются фотонами.

Отсюда вытекает следствие исключительной важности. Согласно закону сохранения энергии, при распаде частицы кинетическая энергия ΔT отнюдь не возникает из ничего, а выделяется за счет внутренней энергии этой частицы. Если мы принимаем нерелятивистскую механику, то мы должны заключить, что внутренняя энергия частицы неисчерпаема. Если же мы принимаем релятивистскую механику, то мы вместе с Эйнштейном должны заключить, что внутренняя энергия частицы с массой m равна mc^2 . Эксперимент показал в пользу релятивистской механики, как только стали наблюдаться энергии ΔT , чувствительно сравнимые с mc^2 .

В согласии с законом Эйнштейна о связи между массой и энергией находитесь и его выражение для кинетической энергии частицы. Полная энергия движущейся частицы равна сумме ее внутренней энергии mc^2 и кинетической энергии T . Разделив эту сумму на c^2 , мы получаем аддитивную массу.

22. РЕАКТИВНАЯ ТЯГА РАКЕТЫ

На основе решенной нами задачи о распаде частицы легко рассчитать реактивную тягу ракеты. Взятую в какой-нибудь момент времени ракету назовем частицей γ . Ее же, взятую в следующий бесконечно близкий момент времени, назовем частицей γ_1 . Струю газа, выброшенную ракетой за указанный бесконечно малый промежуток времени, назовем частицей γ_2 . Плечо $\overline{aa_2}$ рычага a_1aa_2 определяется скоростью $v = c \operatorname{th} \frac{\overline{aa_2}}{c}$ струи газа относительно ракеты. Согласно второму закону рычага Архимеда,

$$m \operatorname{sh} \frac{\overline{aa_2}}{c} = m_1 \operatorname{sh} \frac{\overline{aa_2} + \overline{aa_1}}{c}.$$

Поскольку $\overline{aa_1}$ и $m - m_1$ бесконечно малые величины, отсюда с точностью до бесконечно малых величин более высокого порядка следует

$$\overline{aa_1} = \frac{m - m_1}{m} c \operatorname{th} \frac{\overline{aa_2}}{c} = \frac{m - m_1}{m} v.$$

Настолько смещается мировая скорость ракеты за бесконечно

малый промежуток времени. Наилучшая тяга у фотонной ракеты, для которой $\overline{aa_2} = \infty$, т. е. $v = c$.

Обозначив $m_1 = m + dm$, $\overline{aa_1} = ds$, получим дифференциальное уравнение $ds/dm = -v/m$. Отсюда, если скорость струи газа относительно ракеты постоянна, находим $s = v \ln m_0/m$, где m_0 — масса ракеты до начала работы реактивного двигателя, m — масса ракеты после окончания его работы, s — расстояние между соответствующими мировыми скоростями ракеты, v — как прежде, скорость струи газа относительно ракеты. В случае фотонной ракеты полускорость $w = c \operatorname{th} s/2c$ равна $w = (m_0 - m) c / (m_0 + m)$.

Вернемся к понятиям кинетической энергии и аддитивной массы. За бесконечно малое время работы реактивного двигателя выделяется кинетическая энергия ΔT , которая может быть подсчитана по формулам разд. 21. За это же время масса ракеты уменьшается на $m - m_1$. С точностью до бесконечно малых высшего порядка имеем:

$$\Delta T = m_2 c^2 \left(\operatorname{ch} \frac{\overline{aa_2}}{c} - 1 \right), \quad m - m_1 = m_2 \operatorname{ch} \frac{\overline{aa_2}}{c}.$$

В правых частях этих равенств — кинетическая энергия и аддитивная масса выброшенной струи газа, отнесенные к системе отсчета a . В данном случае система отсчета реализуется в виде массивной ракеты.

23. УПРУГОЕ СТОЛКНОВЕНИЕ ДВУХ ЧАСТИЦ

Можно считать, что упругое контактное столкновение двух частиц совершается в два этапа. На первом этапе две частицы с массами m_1 и m_2 и с мировыми скоростями a_1 и a_2 соединяются в одну промежуточную частицу. Масса m и мировая скорость a промежуточной частицы определяются законами Архимеда и, стало быть, нам уже известны (см. разд. 18). На втором этапе промежуточная частица распадается на две частицы с массами m_1 и m_2 и с мировыми скоростями a'_1 и a'_2 . Два одинаковых рычага $a_1 a a_2$ и $a'_1 a a'_2$ пересекаются в точке a под произвольным углом, так что при заданных a_1 и a_2 мировые скорости частиц после столкновения размещаются диаметрально противоположно на двух сферах, общий центр которых — точка a . Одна сфера проходит через точку a_1 , другая — через точку a_2 (рис. 15).

Детальные представления о взаимодействии частиц позволяют предсказать частоту актов рассеяния в любой наперед заданный телесный угол в пространстве скоростей, вершина которого помещается в точке a . Многократно повторяя столкновение частиц, можно проверить предсказание, а вместе с тем и наши представ-

ления о взаимодействии частиц. Таким путем, как известно, Э. Резерфорд пришел к открытию атомного ядра. Указанный метод изучения взаимодействий хорошо известен в современной физике элементарных частиц как метод измерения дифференциальных сечений.

Пространство скоростей позволило нам рассмотреть столкновение безотносительно к какой-либо системе отсчета. На практике же измеряются величины, определяемые не только мировыми скоростями a_1, a_2, a'_1, a'_2 , но еще и мировой скоростью o лаборатории. Чтобы учесть лабораторную систему отсчета, достаточно добавить к рис. 15 некоторую произвольную точку o . Но и эта несложная процедура в важнейших случаях фактически оказывается излишней. Дело в том, что, как правило, изучают рассеяние пучка частиц на покоящейся мишени. В этих случаях точка o совпадает с точкой a_1 или с точкой a_2 . Важным исключением из этого правила являются эксперименты на ускорителе со встречными пучками, однако и здесь точка o не усложняет рисунка, ибо она совпадает с точкой a .

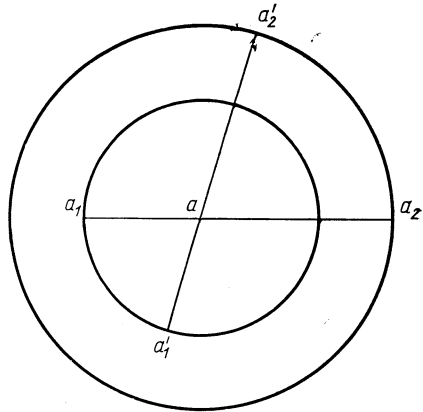


Рис. 15. Сферы упругих столкновений.

На рис. 15 $m_1 > m_2$. Его нетрудно приспособить к столкновению легкой частицы с покоящейся тяжелой, к столкновению тяжелой частицы с покоящейся легкой, а равным образом, и к столкновению двух частиц, летящих навстречу друг другу с равными по модулю импульсами. В одном случае точку o совмещаем с точкой a_1 : легкая частица летит слева направо, а тяжелая покоится. В другом — точку o совмещаем с точкой a_2 : тяжелая частица летит справа налево, а легкая покоится. В третьем — точку o совмещаем с точкой a : легкая частица летит слева направо, а тяжелая летит справа налево.

24. РАВНОБОЧНАЯ ТРАПЕЦИЯ

Единичный акт упругого столкновения вполне задается четырьмя мировыми скоростями a_1, a_2, a'_1, a'_2 . Соединив их отрезками прямых, мы получим в пространстве скоростей равнобочную трапецию с двумя диагоналями, пересекающимися в точке a . На рис. 16 эта фигура изображена отдельно. Под равнобочной трапецией в абсолютной геометрии понимаем плоский четырех-

угольник, две стороны которого перпендикулярны к отрезку, стягивающему их середины. Легко убедиться, что фигура, изображенная на рис. 16, удовлетворяет этому условию. Действительно, пусть b_1 и b_2 — середины сторон a'_1a_1 и $a_2a'_2$. Согласно теореме, доказанной в разд. 2, отрезки ab_1 и ab_2 перпендикулярны к сторонам a'_1a_1 и $a_2a'_2$. Кроме того, они являются биссектрисами вертикальных углов a'_1aa_1 и $a_2aa'_2$, и поэтому отрезок b_1b_2 проходит через точку a . Следовательно, стороны a'_1a_1 и $a_2a'_2$ перпендикулярны к отрезку, стягивающему их середины.

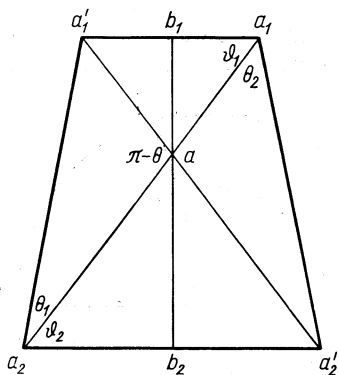


Рис. 16. Трапеция упругого столкновения.

Все элементы нашей трапеции имеют важный смысл. Так, длина $s_1 = \overline{aa_1} = \overline{aa'_1}$ задает скорость тяжелой частицы, а длина $s_2 = \overline{aa_2} = \overline{aa'_2}$ — скорость легкой частицы в системе центра масс. Угол $\theta = \angle a_1aa'_1 = \angle a_2aa'_2$ является углом рассеяния частиц в системе центра масс. Эти три величины полностью определяют трапецию. В экспериментах на ускорителе со встречными пучками они измеряются непосредственно. В других же экспериментах непосредственно измеряются вспомогательные величины, и нужно знать, как по ним находят три главных величины. Например, в экспериментах с пучками легких частиц, рассеивающихся на покоящихся тяжелых частицах, непосредственно измеряются угол рассеяния $\theta_2 = \angle a_2a_1a'_2 = \angle a'_2a'_1a_2$ и угол отдачи $\vartheta_1 = \angle a_2a_1a'_1 = \angle a'_2a'_1a_1$, а также длины $s_0 = \overline{a_1a_2} = \overline{a'_1a'_2}$, $s = \overline{a_1a'_2} = \overline{a'_1a_2}$ и $\overline{a_1a'_1}$. В экспериментах с пучками тяжелых частиц, рассеивающихся на покоящихся легких частицах, непосредственно измеряются угол рассеяния $\theta_1 = \angle a_1a_2a'_1 = \angle a'_1a'_2a_1$ и угол отдачи $\vartheta_2 = \angle a_1a_2a'_2 = \angle a'_1a'_2a_2$, а также длины $s_0 = \overline{a_2a_1} = \overline{a'_2a'_1}$, $s = \overline{a_2a'_1} = \overline{a'_2a_1}$ и $\overline{a_2a'_2}$. Не всегда удается непосредственно измерить все вспомогательные величины, но всякий раз требуется мерить их столько, чтобы можно было узнать длины s_1 , s_2 и угол θ .

Тригонометрия Лобачевского позволяет найти все зависимости между элементами трапеции. Мы рассмотрим лишь важнейшие. Применяя формулу 2. е) из разд. 7 к прямоугольному треугольнику a_2ab_2 , находим

$$\text{ch } \overline{aa_2}/c \operatorname{tg} \theta/2 \operatorname{tg} \theta = 1.$$

В применении к треугольнику $a_2aa'_1$ формула 2.В) из разд. 7 дает

$$\operatorname{ctg} \theta_1 \sin \theta = \operatorname{ch} \frac{\overline{aa_2}}{c} \cos \theta + \operatorname{cth} \frac{\overline{aa'_1}}{c} \operatorname{sh} \frac{\overline{aa_2}}{c}.$$

Учитывая равенство $\overline{aa'_1} = \overline{aa_1}$ и первый закон рычага, находим

$$m_2 \operatorname{ctg} \theta_1 \sin \theta = m_2 \operatorname{ch} \frac{\overline{aa_2}}{c} \cos \theta + m_1 \operatorname{ch} \frac{\overline{aa_1}}{c}.$$

Две первые формулы разд. 19 и последняя формула разд. 18 позволяют написать

$$\operatorname{ch} \frac{\overline{aa_1}}{c} = \frac{m^2 + m_1^2 - m_2^2}{2mm_1}, \quad \operatorname{ch} \frac{\overline{aa_2}}{c} = \frac{m^2 + m_2^2 - m_1^2}{2mm_2}.$$

Подставляя эти выражения в найденные здесь формулы, приводим их к окончательному виду:

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{2mm_2 \operatorname{tg} \theta/2}{m^2 + (m_1^2 - m_2^2) \operatorname{tg}^2 \theta/2}, \quad \operatorname{tg} \theta/2 \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{2mm_2}{m^2 + m_2^2 - m_1^2}.$$

Переход к формулам для углов θ_2 и θ_1 получается простой перестановкой индексов 1 \rightleftharpoons 2. В нерелятивистском случае числитель и знаменатель в полученных формулах можно сократить на $m = m_1 + m_2$. В релятивистском же случае упростить эти формулы более не удается.

Рассмотрим теперь, в каких пределах меняются углы отдачи и углы рассеяния. Очевидно, что угол θ_1 ограничивается углом, под которым видна малая сфера на рис. 15 из точки a_1 , угол же θ_2 — углом, под которым видна большая сфера из точки a_2 , т. е. $\theta_1 \leq \pi/2$, $\theta_2 \leq \pi/2$. Угол θ_2 никак не ограничивается, а угол θ_1 ограничивается углом θ^* , под которым видна малая сфера из точки a_2 . В случае равных масс $m_1 = m_2$ об углах θ_1 и θ_2 можно сказать то же, что и об углах отдачи: они не могут быть тупыми. В общем случае $m_1 > m_2$. Обозначим L_1 длину экватора малой сферы, L_2 — длину экватора большой сферы и снова рассмотрим треугольник $a_2aa'_1$. Согласно разд. 10, имеем $L_2 \sin \theta_1 = L_1 \sin \theta_2$. Согласно же первому закону рычага, $m_1 L_1 = m_2 L_2$. Следовательно,

$$m_1 \sin \theta_1 = m_2 \sin \theta_2.$$

Когда прямая $a_2a'_1$ на рис. 15 касается малой сферы, угол θ_2 становится прямым, а угол θ_1 достигает своего максимального значения θ^* , так что

$$\sin \theta^* = m_2/m_1.$$

Существует, наконец, замечательная зависимость между полускоростью и углом рассеяния. В применении к треугольнику

$a_2 a a_1'$ формула 2.А) из разд. 7 дает

$$\operatorname{ch} s_1/c = \operatorname{ch} s/c \operatorname{ch} s_2/c - \operatorname{sh} s/c \operatorname{sh} s_2/c \cos \theta_1.$$

После несложных преобразований получаем

$$\cos \theta_1 = \frac{m_1 + m_2}{2m_1} \cdot \frac{w}{w_0} + \frac{m_1 - m_2}{2m_1} \cdot \frac{w_0}{w},$$

где $w = c \operatorname{th} s/2c$, $w_0 = c \operatorname{th} s_0/2c$. Равным образом

$$\cos \theta_2 = \frac{m_1 + m_2}{2m_2} \cdot \frac{w}{w_0} + \frac{m_2 - m_1}{2m_2} \cdot \frac{w_0}{w}.$$

В случае $m_1 = m_2$ эта зависимость легко находится с помощью теоремы, доказанной в разд. 2, и формулы 2.г) из разд. 7.

25. ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Надо сделать общее примечание ко всем рисункам. Листы бумаги, на которых мы рисуем, с точностью, намного превосходящей возможности чертежных инструментов, подчиняются евклидовой планиметрии. Поэтому для количественного графического представления зависимостей между расстояниями и углами все рисунки непосредственно годятся только в евклидовой планиметрии. Для изображения неевклидовых фигур они могут служить нам так же, как служат географические карты. Снятие действительных размеров, изображенных на них фигур, требует специальных указаний. Иногда это оказывается совсем необременительным. Например, рис. 15 или 16 нетрудно приспособить для графического изображения зависимости между полускоростью и углом рассеяния.

Фактически здесь идет речь об отображениях плоскости Лобачевского на ту или иную область на евклидовой плоскости. Они приводят к различным интерпретациям геометрии Лобачевского. Как нетрудно понять, к их числу относится модель Бельтрами (разд. 14). Для графического анализа контактных столкновений особо удобными оказываются конформные модели, получившие практическое применение в Объединенном институте ядерных исследований.

26. ТРУДНОСТИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ ДВУХ ЧАСТИЦ

Проблема релятивистского описания системы двух частиц наталкивается на серьезные препятствия. Чтобы подойти к ним, начнем с механики одной частицы. Как уже говорилось, в этом случае релятивистская механика не встречает особых затруднений. Напомним ее основные положения. Движение частицы изо-

бражается мировой траекторией, т. е. линией в четырехмерном мире, задаваемой уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Мировая траектория частицы в каждой своей точке направлена вовнутрь светового конуса, что означает условие $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 < c^2$. Квадратный корень

$$d\tau = \sqrt{dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)/c^2},$$

где dx , dy , dz , dt — дифференциалы смещения вдоль мировой траектории, называется элементом собственного времени частицы. Если m — масса покоя частицы, то величины $p_0 = m dt/d\tau$, $p_1 = m dx/d\tau$, $p_2 = m dy/d\tau$, $p_3 = m dz/d\tau$ составляют 4-импульс частицы, тот самый, который был рассмотрен в разд. 20. Производная 4-импульса по собственному времени частицы равняется 4-вектору силы, действующей на частицу. Если сила задана, то мировая траектория частицы определяется в результате интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Время жизни частицы между двумя точками A_1 , A_2 , лежащими на ее мировой траектории, равно интегралу

$$\tau = \int_{A_1}^{A_2} \sqrt{dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2}} dt.$$

Этот интеграл принимает наибольшее значение на мировой прямой, соединяющей точки A_1 и A_2 . Мировая же прямая представляет равномерное и прямолинейное движение частицы. Это означает, что под действием силы ход собственного времени частицы замедляется.

Рассмотрим теперь две частицы. Мы не знаем, какими уравнениями определяется их движение, но какими бы уравнениями оно ни определялось, в результате решения уравнений движения мы во всяком случае должны получить пару мировых траекторий. Возникает вопрос, в каком случае заданная пара мировых траекторий представляет движение двух взаимодействующих только друг с другом частиц? В нерелятивистской механике можно ответить на это просто. Мировая гиперплоскость $t = t_0$ пересекает заданные траектории в двух мировых точках. Соединим эти точки отрезком прямой и разделим отрезок в отношении масс m_1 к m_2 . Меняя t_0 , получаем множество точек деления. Если это множество заполняет мировую прямую, то рассматриваемая пара частиц предоставлена самой себе. В противном случае на нее действуют внешние силы. Здесь существенно, что гиперплоскость $t = t_0$ инвариантна относительно преобразований Галилея. В случае же Лоренца ответить на поставленный вопрос весьма затруднительно.

Не ответив же на него, трудно определить импульс системы частиц, общее время системы и т. п.

К тому же самому можно подойти с другой стороны. Рассмотрим прямое произведение двух миров, т. е. такое восьмимерное пространство, в котором точка задается пространственно-временными координатами двух частиц $(x_1, y_1, z_1, t_1; x_2, y_2, z_2, t_2)$. В релятивистской механике фактически изучается лишь семимерная поверхность $t_1 = t_2$ в этом пространстве. Ее релятивистским аналогом по всем признакам является восьмимерная область $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 > c^2 (t_1 - t_2)^2$. Это отнюдь не случайное повышение размерности приводит к многим трудностям, справиться с которыми до сих пор не удалось не только в узких рамках механики, но и с привлечением глубоких идей квантовой теории поля. Проблема релятивистского описания двух и более частиц, по-видимому, еще далека от своего окончательного решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Начала Евклида, кн. I—IV, 1948, кн. VII—X, 1949. М.—Л., Гостехиздат.
2. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. Пер. А. Н. Крылова. В сб. трудов А. Н. Крылова Т. 7. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1936.
3. Лобачевский Н. И. Полное собрание сочинений. М.—Л., Гостехиздат, т. 1, 1946, т. 2, 1949, т. 3, 1951.
4. Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. М., Гостехиздат, 1956.
5. Принцип относительности. Г. Лоренц, А. Пуанкаре, А. Эйнштейн, Г. Минковский. Сб. работ классиков релятивизма. Л., ОНТИ, 1935.
6. Клейн Ф. О геометрических основаниях Лоренцовой группы. В кн.: Новые идеи в математике. Вып. 5. 1914, с. 144. Спб.
7. Котельников А. П. Принцип относительности и геометрия Лобачевского. В сб.: In memoriam N. I. Lobatschevskij. Т. 2. Казань, 1927, с. 37—64.
8. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. М., Гостехиздат, 1955.
9. Широков П. А. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского. М., Гостехиздат, 1955; Избранные работы по геометрии. Казань, Изд. Казанск. ун-та, 1966.
10. Норден А. П. Элементарное введение в геометрию Лобачевского. М., Гостехиздат, 1953.
11. Черников Н. А. Международная зимняя школа теоретической физики при ОИЯИ. Т. 3. Дубна, 1964, с. 151; Препринт ИТФ-68-44, Киев, 1968.