ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА, 1974, ТОМ 5, ВЫП. 3

УДК 539.171.5

ОСНОВНЫЕ ТЕНДЕНЦИИ В РАЗВИТИИ ТЕОРИИ СИЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

А. А. Логунов,
Институт физики высоких энергий, Серпухов, СССР

Нгуен Ван Хьеу
Институт физики, Ханой, ДРВ

В обзоре конспективно изложены результаты исследований по теории сильных взаимодействий. Обзор состоит из трех частей: теория симметрии, аналитический подход и алгебра токов.

The results of the investigations on strong interaction theory are reviewed. The paper consists of three parts: the theory of symmetry, the analytic approach and the algebra of currents.

ВВЕДЕНИЕ

В последние двадцать лет экспериментальные исследования по элементарным частицам получили бурное развитие. Наряду с фотонами, лептонами, стабильными (относительно электромагнитного и слабых взаимодействий) мезонами и барионами было обнаружено большое количество мезонных и барионных резонансов, которые в настоящее время классифицируются наравне со стабильными мезонами и барионами и вместе с последними образуют семейство адронов. Были установлены также многие закономерности в классификации этих адронов и в характере их взаимодействий. Все эти результаты либо побудили теоретиков предложить новые подходы в теории элементарных частиц, либо подтвердили или опровергли различные гипотезы теории. Они способствовали теоретическому пониманию структуры элементарных частиц и природы их взаимодействий.

Каков смысл успехов теоретических исследований? Можно ли говорить, что результаты этих исследований войдут в основу настоящей динамической теории сильных взаимодействий? На этот вопрос имеются, по-видимому, разные ответы. Некоторые авторы считают, что пока мы еще далеки от такой настоящей теории и что основные современные актуальные направления теоретических работ есть лишь феноменология, а не теория. Дело в том, что существующая теория не позволяет на основе лишь некоторых фундаментальных предположений или уравнений дать количественные предсказания результатов измерений, выразить все наблюдаемые величины через некоторые универсальные константы, как это имело место в квантовой механике или в квантовой электродинамике.

В квантовой механике изучаются физические системы с конечным числом степеней свободы. Для многих систем такого рода уравнения квантовой механики имеют точные решения и наблюдаемые величины представляются в виде аналитических, иногда очень простых, функций от некоторых универсальных констант, содержащихся в исходном уравнении. В тех случаях, когда задачи квантовой механики не решаются точно, можно применить тот или иной приближенный метод. В конечном итоге получаем для физических величин приближенные выражения, снова содержащие только универсальные константы теории и переменные рассеяния.

В отличие от квантовой механики квантовая теория поля представляет собой теорию систем с бесконечным числом степеней свободы, для которых основные уравнения, если они существуют, не решаются точно. В частном случае квантовой электродинамики благодаря наличию малой константы связи можно применить теорию возмущений и процедуру перенормировки и получить решения уравнений в виде степенных рядов по константе тонкой структуры $\alpha = 1/137$. Таким образом, физические величины снова выражаются аналитически через универсальные константы, содержащиеся в исходном уравнении, и переменные рассеяния. Известно, что эти результаты теории превосходно согласуются с экспериментальными данными.

В случае сильных взаимодействий ситуация совсем иная. Здесь не существует малой константы связи, по которой можно было бы разложить решения уравнений полей. Пока еще не известно, существует ли эффективный метод вычислений, позволяющий выразить физически измеряемые величины через универсальные константы, содержащиеся в исходном уравнении, и переменные рассеяния.

В последние двадцать лет теория развивалась по многим направлениям. Были предложены различные подходы в изучении сильных взаимодействий, достигнуты значительные успехи в понимании сущности физических процессов с участием элементарных частиц. Эти теоретические исследования позволили раскрыть глубокие взаимосвязи между различными физическими явлениями и процессами, установить многочисленные соотношения между различными измеряемыми величинами. Основные результаты, полученные в этот период времени, изложены в настоящем обзоре.

Подводя итоги исследований по сильным взаимодействиям элементарных частиц, нельзя не напомнить успехи теории симметрии. Она базируется на предположении об инвариантности S-матрицы или лагранжиана относительно той или иной группы преобразований. Поскольку в теории симметрии векторы состояния частиц или систем частиц преобразуются по неприводимым представлениям группы симметрии, то возникает возможность алгебраической классификации адронов: они образуют мультиплеты, причем каждый мультиплет реализует одно неприводимое представление рассматриваемой группы.

Инвариантность относительно определенной группы преобразований влечет за собой различные соотношения между значениями той или иной физической величины, измеряемыми в различных процессах с участием частиц одних и тех же мультиплетов. Такие соотношения отражают глубокие свойства симметрии адронов. Не исключено, что они являются следствием некоторой единой внутренней структуры всех адронов. Теории симметрии посвящается первая часть обзора.

Другое важное направление развития теории сильных взаимодействий — изучение аналитических свойств амплитуд рассеяния. Аналитичность амплитуд вытекает из самой основы квантовой теории поля. В свою очередь она приводит к ряду взаимосвязей между различными физическими процессами и явлениями, ко многим соотношениям между разными величинами. Эти взаимосвязи и соотношения рассмотрены во второй части обзора.

Наряду с двумя выше указанными подходами, друг друга дополняющими — групповым и аналитическим, недавно был предложен новый подход, представляющий собой синтез двух предыдущих подходов и универсальной (V — A)-теории слабых взаимодействий. Помимо методов теории дисперсионных соотношений в нем эффективно используются одновременные коммутационные соотношения плотностей векторных и аксиальных токов. Благодаря удачному синтезу различных методов получены качественно новые результаты: открыты новые взаимосвязи между различными явлениями и процессами, установлены новые соотношения между физическими величинами.

Рассматриваемые в настоящем обзоре проблемы, по нашему мнению, охватывают почти все основные тенденции в теории сильных взаимодействий элементарных частиц. Изложены все существенные результаты, полученные в последние двадцать лет. Показано, что в области теоретических исследований по сильным взаимодействиям элементарных частиц достигнуты замечательные успехи: установлены многообразные взаимосвязи между различными физическими явлениями и процессами, которые на первый взгляд, казалось бы, ничем не связаны; получены многочисленные соотношения между различными наблюдаемыми величинами.

Эти успехи позволяют по-новому ответить на вопрос: какова задача теории сильных взаимодействий? Должна ли она на основе лишь немногих основных уравнений и постулатов количественно предсказать результаты различных экспериментов и явно представить все физические наблюдаемые величины в виде функций от универсальных констант и переменных рассеяния, как это имеет место в квантовой механике и в квантовой электродинамике? Природа может оказаться столь сложной, что таких простых точных зависимостей нельзя получить, но можно установить некоторые точные функциональные связи между физическими величинами. Таким образом, приходим к мысли, что задача теории сильных взаимодействий — установление функциональных связей между физическими величинами. Если это так, то современный этап построения теории сильных взаимодействий является не временным и преходящим этапом, а шагом на пути построения теории.

1. СВОЙСТВА СИММЕТРИИ СИЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Все квантовые системы и, в частности, системы элементарных частиц обладают некоторыми свойствами симметрии, математическим выражением которых является инвариантность лагранжиана или S-матрицы относительно той или иной группы преобразований, причем особое значение приобретает требование релятивистской инвариантности — инвариантности относительно неоднородной собственной группы Лоренца (без отражений). Оно представляет собой фундаментальный принцип современной физики.

Наряду с пространственно-временными свойствами симметрии существуют еще другие свойства симметрии, присущие лишь квантовым системам и, в частности, системам элементарных частиц. При изучении свойств симметрии широко применяется аппарат теории групп и теории представлений групп.

В настоящем обзоре основное внимание уделено непрерывным симметриям: изотопической, унитарной и их обобщениям. Для полноты кратко рассмотрены также дискретные преобразования: отражения пространства — времени и зарядовое сопряжение.

Дискретные преобразования

Имеющиеся в настоящее время экспериментальные данные не противоречат предположению о том, что сильные взаимодействия элементарных частиц инвариантны относительно трех дискретных преобразований: пространственного отражения P, обращения времени T и зарядового сопряжения C. Рассмотрим эти свойства инвариантности.

Пространственное отражение P действует на векторы состояния систем частиц следующим образом:

$$P\,|\,\mathbf{p}_i,\ \sigma_i\rangle = \prod_i \overset{i}{\eta}_P\,|\,-\mathbf{p}_i,\ \sigma_i\,\rangle.$$

Здесь $\mathbf{p}_i$ обозначает импульсы частиц; σ_i — проекции их спинов; $\overset{i}{\eta}_P$ — их внутренние четности, причем $\overset{i}{\eta}_P = \pm 1$. Если воспользоваться спиральностями λ_i вместо проекций спинов σ_i, получим

$$P\,|\,\mathbf{p}_i,\ \lambda_i\rangle = \prod_i \overset{i}{\eta}_P\,|-\mathbf{p}_i,\ -\lambda_i\rangle.$$

Из этого определения вытекает закон преобразования полевых операторов:

$$P\varphi(\mathbf{x},\ t)\,P^{-1} = \eta_P\varphi(-\mathbf{x},\ t);\quad P\varphi(\mathbf{x},\ t)^+P^{-1} = \eta_P\varphi(-\mathbf{x},\ t)^+;\quad \eta_P^2 = 1$$

для скалярных ($\eta_P = 1$) и псевдоскалярных ($\eta_P = -1$) полей;

$$P\psi(\mathbf{x},\ t)\,P^{-1} = \eta_P\gamma_4\psi(-\mathbf{x},\ t);$$
$$\overline{P\psi(\mathbf{x},\ t)}\,P^{-1} = \eta_P^+\,\overline{\psi(-\mathbf{x},\ t)}\,\gamma_4;\quad \eta_P^2 = \pm 1$$

для спинорных полей;

$$PU_\mu(\mathbf{x},\ t)\,P^{-1} = \eta_P\eta_\mu U_\mu(-\mathbf{x},\ t);\quad PU_\mu(\mathbf{x},\ t)^+P^{-1} =$$
$$= \eta_P\eta_\mu U_\mu(-\mathbf{x},\ t)^+;\quad \eta_P^2 = 1;\quad \eta_L = 1;\quad \eta_i = -1$$

для векторных ($\eta_P = 1$) и аксиально-векторных ($\eta_P = -1$) полей.

В отличие от унитарного преобразования P, обращение времени T является антиунитарным преобразованием — оно переводит начальное состояние каждого процесса в конечное и обратно:

$$T\,|\,\mathbf{p}_i,\ \sigma_i\rangle = \prod_i \overset{i}{\eta}_T\,\langle -\mathbf{p}_i, -\sigma_i\,|$$

или

$$T\,|\,\mathbf{p}_i,\ \lambda_i\rangle = \prod_i \overset{i}{\eta}_T\,\langle -\mathbf{p}_i,\ \lambda_i\,|.$$

Здесь $\overset{i}{\eta}_T$ — временные четности частиц $|\,\overset{i}{\eta}_T| = 1$. В соответствии с этим определением действие преобразования T на полевые операторы осуществляется следующим образом:

$$T\varphi(\mathbf{x},\ t)\,T^{-1} = \eta_T\varphi(\mathbf{x},\ -t);\ T\varphi^*(\mathbf{x},\ t)\,T^{-1} = \eta_T^*\varphi(\mathbf{x},\ -t);\quad |\,\eta_T\,| = 1$$

для бесспиновых полей;

$$T\psi(\mathbf{x},\ t)\,T^{-1} = i\eta_T\gamma_5 C^*\overline{\psi(\mathbf{x},\ -t)};\quad T\overline{\psi(\mathbf{x},\ t)}\,T^{-1} =$$
$$= i\eta_T^*\,\psi(\mathbf{x},\ -t)\,\gamma_4^T C\gamma_4\gamma_5;\quad |\,\eta_T\,| = 1$$

для полей со спином 1/2 (C — матрица зарядового сопряжения);

$$TU_\mu(\mathbf{x}, t)\,T^{-1} = \eta_T\eta_\mu U_\mu(\mathbf{x}, -t)^+;\ TU_\mu(\mathbf{x}, t)^+T^{-1} = \\ = \eta_T^*\eta_\mu U_\mu(\mathbf{x}, -t);\ |\eta_T| = 1$$

для полей со спином 1.

Что касается зарядового сопряжения, то оно не затрагивает пространственно-временных характеристик частиц, а лишь переводит частицы в античастицы и поэтому меняет знак внутренних квантовых чисел частиц (заряд, гиперзаряд, барионное число и пр.), совокупность которых обозначается символом Q:

$$C\,|\,\mathbf{p}_i, \sigma_i, Q\rangle = \prod_i \eta_C^i\,|\,\mathbf{p}_i, \sigma_i, -Q\rangle;\ |\eta_C^i| = 1.$$

При зарядовом сопряжении полевые операторы преобразуются следующим образом:

$$C\varphi(\mathbf{x}, t)\,C^{-1} = \eta_C\varphi(\mathbf{x}, t)^+;\ C\varphi(\mathbf{x}, t)^+C^{-1} = \eta_C^*\varphi(\mathbf{x}, t)$$

для полей со спином 0;

$$C\psi(\mathbf{x}, t)\,C^{-1} = \eta_C C^*\psi(\mathbf{x}, t)^+;\ C\overline{\psi}(\mathbf{x}, t)\,C^{-1} = \eta_C^*\psi(\mathbf{x}, t)\,C\gamma_4$$

для полей со спином 1/2;

$$CU_\mu(\mathbf{x}, t)\,C^{-1} = \eta_C U_\mu(\mathbf{x}, t)^+;\ CU_\mu(\mathbf{x}, t)^+C^{-1} = \eta_C^* U_\mu(x, t)$$

для полей со спином 1.

Инвариантность относительно пространственного отражения P, или, что то же самое, сохранение четности, накладывает различные ограничения на процессы взаимодействия элементарных частиц, на квантовые переходы между разными состояниями и поэтому приводит к ряду соотношений между амплитудами. Так, в силу P-инвариантности порождаемые в сильных взаимодействиях частицы не могут быть продольно поляризованными; вектор поляризации одной из частиц в конечном состоянии двухчастичного процесса должен быть перпендикулярным плоскости рассеяния, если начальные частицы неполяризованы; асимметрия в сечении двухчастичного процесса может иметь место лишь по отношению к плоскости, образованной импульсом начальных частиц в с. ц. м. и вектором поляризации одной из них, и т. д. Эти явления представляют собой взаимосвязи между различными физическими величинами: проекцией спина частицы и направлением ее импульса, вектором поляризации конечной частицы и плоскостью рассеяния, вектором поляризации начальной частицы и направлением вылета конечной частицы и т. п.

В терминах спиральных амплитуд сохранение четности приводит к соотношениям вида

$$T_{\lambda_i,\,\mu_j}(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) = \eta T_{\lambda_i,\,\mu_j}(-\mathbf{p}_i, -\mathbf{q}_j);\ \eta^2 = 1.$$

В результате число независимых амплитуд для каждого процесса уменьшается вдвое. Из этих соотношений вытекают выше указанные ограничения.

Обращение времени T связывает взаимно-обратные процессы типа

$$a+b=c+d; \quad c+d\to a+b.$$

Инвариантность относительно этого преобразования влечет за собой соотношения между соответствующими амплитудами данных процессов:

$$T^{ab\to cd}_{\lambda_i\mu_j}(\mathbf{p}_i,\ \mathbf{q}_j)=\eta T^{cd\to ab}_{\mu_j,\lambda_i}(-\mathbf{q}_j,\ -\mathbf{p}_i);\ |\eta|=1.$$

Это и есть содержание теоремы взаимности. Из нее вытекают некоторые соотношения между физическими величинами, измеряемыми в двух рассматриваемых процессах. Так, в силу этой теоремы должно иметь место равенство поляризации одной из частиц в конечном состоянии первого процесса и параметра асимметрии во втором при наличии поляризации у той же частицы, но в начальном состоянии. Другим примером следствий теоремы взаимности является соотношение между сечениями (дифференциальными и полными) этих процессов:

$$\frac{\sigma(ab\to cd)}{\sigma(cd\to ab)}=\frac{(2S_c+1)(2S_d+1)}{(2S_a+1)(2S_b+1)},$$

где S_a, S_b, S_c и S_d—спины соответствующих частиц. При помощи этого соотношения можно определить спин одной из частиц a, b, c и d, если известны спины трех остальных и сечения обоих процессов.

Для процессов упругого рассеяния требование T-инвариантности обычно также уменьшает число независимых амплитуд. Например, если все частицы a, b, c и d имеют спин 1/2, то в общем случае существуют 16 спиральных амплитуд для процесса

$$a+b\to c+d.$$

В силу сохранения четности число независимых амплитуд уменьшается до восьми, а для упругого рассеяния

$$a+b\to a+b$$

требование T-инвариантности еще уменьшает это число на два. В результате имеем лишь шесть независимых амплитуд.

Зарядовое сопряжение C превращает частицы в их античастицы, причем все их пространственно-временные характеристики остаются неизменными. C-инвариантность влечет за собой соотношения между амплитудами процессов с участием частиц и соответствующих античастиц при тех же значениях импульсов и проекций спина:

$$T^{ab\to cd}_{\lambda_i,\,\mu_j}(\mathbf{p}_i,\,\mathbf{q}_j)=\eta T^{\tilde{a}\tilde{b}\to\tilde{c}\tilde{d}}_{\lambda_i,\,\mu_j}(\mathbf{p}_i,\,\mathbf{q}_j);\quad |\eta|=1.$$

Отсюда вытекает равенство сечений (дифференциальных и полных), поляризаций, параметров асимметрии и др., т. е. всех измеряемых физических величин, являющихся пространственно-временными характеристиками реакций.

Если имеет место C-инвариантность, то целесообразно рассмотреть собственные состояния операторов зарядового сопряжения C, поскольку такие стационарные состояния существуют. Соответствующие собственные значения представляют собой новую физическую величину — зарядовую четность, сохраняющуюся в электромагнитном и сильном взаимодействиях.

Из закона сохранения C-четности вытекают некоторые правила отбора. Например, состояние четного числа фотонов не может превратиться в состояние с нечетным числом этих частиц; при аннигиляции позитрония из состояния ^3S рождается лишь нечетное число фотонов, а при аннигиляции из состояния ^1S — четное число. В общем случае для процессов, переходящих в себя при зарядовом сопряжении, C-инвариантность накладывает определенные ограничения на амплитуды или уменьшает число независимых амплитуд.

Важно отметить, что между тремя преобразованиями P, T и C существует следующая глубокая связь: в силу локальности полей инвариантность взаимодействий относительно двух из трех этих преобразований влечет за собой инвариантность относительно третьего. Иными словами, в локальной теории поля взаимодействия обязаны быть инвариантными относительно преобразования CPT («теорема CPT» Паули — Людерса).

Локальные свойства полей, пространственное отражение P и обращение времени T затрагивают лишь пространственно-временные характеристики элементарных частиц, а зарядовое сопряжение относится к их внутренней структуре. Теорема CPT, таким образом, связывает внутреннее свойство частиц с их пространственно-временными характеристиками. Из нее, в частности, вытекает равенство масс и времен жизни частиц и их античастиц.

Изотопическая инвариантность

Основы теории изотопической инвариантности были заложены еще в тридцатых годах, когда были обнаружены зарядовая симметрия ядерных сил (неизменность ядерных сил при замене нейтрон $\rightleftarrows$ протон) и затем зарядовая независимость, т. е. равенство ядерных сил между двумя частицами из любой пары: протон — протон, протон — нейтрон и нейтрон — нейтрон, когда они находятся в одинаковых состояниях. В начале теория изотопической симметрии представляла собой лишь удобный математический аппарат для изучения строения ядер и процессов рассеяния протона и нейтрона. При этом протон и нейтрон рассматривались как два различных состояния одной и той же частицы, называемой нуклоном. Им соответствовали различные собственные значения некоторого оператора, аналогичного третьей компоненте спина.

С математической точки зрения волновые функции протона и нейтрона являются спинорами в некотором абстрактном трехмерном пространстве, называемом изотопическим пространством. При таком подходе формализм изотопического спина распространяется и на другие частицы — адроны.

Экспериментальные данные подтверждают справедливость предположения о том, что адроны группируются в изотопические мультиплеты. Волновые функции частиц в каждом мультиплете образуют неприводимое представление группы вращений в изотопическом пространстве локально-изоморфной группы SU (2). Квантовое число, аналогичное спину в случае группы вращений обычного пространства и характеризующее данный изотопический мультиплет, называется его изотопическим спином.

Выберем генераторы I_i, $i = 1, 2, 3$ нашей изотопической группы таким способом, чтобы каждый из них генерировал вращения вокруг одной из трех декартовых осей изотопического пространства. Эти генераторы называются также операторами изотопического спина. Они удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[I_i, I_j] = \mathrm{i}\varepsilon_{ijk} I_k.$$

Обозначим N изотопический спинор, описывающий состояние нуклона

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}.$$

Операторы изотопического спина действуют на него следующим образом:

$$(I_i N)_a = \left(\frac{\tau_i}{2} N\right)_a = \frac{1}{2} (\tau_i)_a^b N_b = \frac{1}{2} (\tau_i)_{ab} N_b,$$

где τ_i — матрицы Паули:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

При конечном вращении, характеризуемом трехмерным вектором α в изотопическом пространстве, спинор N подвергается преобразованию

$$N_a \to [\exp(\mathrm{i}\,\mathbf{I}\boldsymbol{\alpha})\,N]_a = \left[\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\,\boldsymbol{\alpha}\right)N\right]_a =$$
$$= \left[\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\,\boldsymbol{\alpha}\right)\right]_a^b N_b = \left[\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\,\boldsymbol{\alpha}\right)\right]_{ab} N_b.$$

Для сопряженного спинора $\overline{N}$ имеем

$$\overline{N}^a \to \left[\exp(\mathrm{i}\mathbf{I}\boldsymbol{\alpha})\,\overline{N}\right]^a = \left[\overline{N}\exp\left(-\mathrm{i}\,\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\,\boldsymbol{\alpha}\right)\right]^a =$$
$$= \overline{N}^b\left[\exp\left(-\mathrm{i}\,\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\,\boldsymbol{\alpha}\right)\right]_b^a = \overline{N}^b\left[\exp\left(-\mathrm{i}\,\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\,\boldsymbol{\alpha}\right)\right]_{ba},$$

и поэтому

$$(I_i\overline{N})^a = -(\overline{N}\tau_i/2)^a = -N^b\,(\tau_i/2)_b^a = -\overline{N}^b\,(\tau_i/2)_{ba}.$$

Аналогичные формулы справедливы для всех других изотопических спиноров.

Пионы образуют изотопический триплет и имеют изотопический спин $I = 1$. Их волновые функции можно представить в виде смешанного спинора второго порядка Π_a^b с нулевым следом $\Pi_a^a = 0$ или в виде изотопического вектора $\boldsymbol{\pi}$. Эти обозначения связаны между собой:

$$\Pi_a^b = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\boldsymbol{\pi}\,(\boldsymbol{\tau})_a^b.$$
$$\boldsymbol{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{Sp}\,(\boldsymbol{\tau}\Pi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\boldsymbol{\tau})_a^b\Pi_b^a.$$

При конечном вращении с параметром $\boldsymbol{\alpha}$ спинор второго порядка Π_a^b преобразуется как произведение

$$(N\otimes\overline{N})_a^b = N_a\overline{N}^b,$$

что дает

$$\Pi_a^b \to [\exp(\mathrm{i}\mathbf{I}\boldsymbol{\alpha})\,\Pi]_a^b = \left[\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\,\boldsymbol{\alpha}\right)\Pi\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\,\boldsymbol{\alpha}\right)\right]_a^b =$$
$$= \left[\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\,\boldsymbol{\alpha}\right)\right]_a^{a'}\Pi_{a'}^{b'}\left[\exp\left(-\mathrm{i}\,\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\,\boldsymbol{\alpha}\right)\right]_{b'}^b =$$
$$= \left[\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\,\boldsymbol{\alpha}\right)\right]_{aa'}\Pi_{a'}^{b'}\left[\exp\left(-\mathrm{i}\,\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\,\boldsymbol{\alpha}\right)\right]_{b'b}.$$

Отсюда получаем

$$(I_i\Pi)_a^b = \left(\frac{\tau_i}{2}\Pi\right)_a^b - \left(\Pi\,\frac{\tau_i}{2}\right)_a^b = \left(\frac{\tau_i}{2}\right)_a^{a'}\Pi_{a'}^b - \Pi_a^{b'}\left(\frac{\tau_i}{2}\right)_{b'}^b =$$
$$= \frac{1}{2}\,(\tau_i)_{aa'}\Pi_{a'}^b - \frac{1}{2}\,\Pi_a^b\,(\tau_i)_{b'b}.$$

Приращение величины $\boldsymbol{\pi}$ при бесконечно малом вращении $\delta\alpha$

$$\delta\boldsymbol{\pi} = \frac{i}{\sqrt{2}} \operatorname{Sp}\left\{\boldsymbol{\tau}\left[\left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\delta\boldsymbol{\alpha}\right)\Pi - \Pi\left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\delta\boldsymbol{\alpha}\right)\right]\right\} = -[\delta\boldsymbol{\alpha}_\wedge\boldsymbol{\pi}].$$

Это согласуется с утверждением о том, что $\boldsymbol{\pi}$ — изотопический вектор. Пользуясь выражениями для матриц Паули τ_i, легко выразить элементы Π_a^b через компоненты вектора $\boldsymbol{\pi}$:

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 & \pi^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 \end{pmatrix},$$

где

$$\pi^+ = (\pi_1 - i\pi_2)/\sqrt{2}; \quad \pi^- = (\pi_1 + i\pi_2)/\sqrt{2}; \quad \pi^0 = \pi_3.$$

Для всех других изотопических триплетов имеем аналогичные формулы. Заметим, что приведенные выше рассуждения можно применить к билинейной величине

$$(N \otimes \overline{N})_a^b N_a \overline{N}^b$$

вместо Π_a^b. Это означает, что

$$\overline{N}\boldsymbol{\tau}N = \overline{N}^b (\boldsymbol{\tau})_b^a N_a = (\boldsymbol{\tau})_b^a N_a \overline{N}_b$$

также является изотопическим вектором.

Изотопическая инвариантность — инвариантность сильных взаимодействий относительно вращений в изотопическом пространстве — выражает свойство симметрии, относящееся к внутренней структуре элементарных частиц. Из этого свойства вытекают многочисленные соотношения между константами связи, между амплитудами процессов с участием частиц из одних и тех же изотопических мультиплетов. Рассмотрим некоторые примеры.

Найдем сначала общий вид изотопически инвариантного лагранжиана πN-взаимодействия с псевдоскалярной связью. Поскольку такой лагранжиан должен быть линейным по отношению к каждому из полевых операторов $\boldsymbol{\pi}N$ и $\overline{N}$, а из N и $\overline{N}$ можно образовать лишь единственный псевдоскалярный изовектор $\overline{N}\gamma_5\boldsymbol{\tau}N$, то лагранжиан взаимодействия должен иметь следующий вид:

$$L = g\overline{N}\gamma_5\boldsymbol{\tau}N\boldsymbol{\pi}.$$

Выражая компоненты спинора N и вектора $\boldsymbol{\pi}$ через физические поля, получаем:

$$L = g\{\sqrt{2}\,\overline{p}\gamma_5 n\pi^+ + \sqrt{2}\,\overline{n}\gamma_5 p\pi^- + (\overline{p}\gamma_5 p - \overline{n}\gamma_5 n)\,\pi^0\}.$$

Одна и та же константа g здесь входит в четыре различные вершины.

В качестве второго примера рассмотрим рассеяние пиона на нуклоне. Здесь возможны реакции

$$\pi^+ + p \to \pi^+ + p;$$
$$\pi^0 + p \to \pi^0 + p;$$
$$\pi^- + p \to \pi^- + p;$$
$$\pi^0 + p \to \pi^+ + n;$$
$$\pi^- + p \to \pi^0 + n$$

и соответствующие зеркальные процессы (с заменой $n \leftrightarrow p$, $\pi^+ \leftrightarrow \pi^-$). Начальные и конечные состояния могут иметь изотопический спин 1/2 или 3/2, а различные переходы между состояниями с полным изотопическим спином I описываются лишь одной амплитудой T^I. Поэтому амплитуды всех указанных процессов являются линейными комбинациями двух независимых величин $T^{1/2}$ и $T^{3/2}$, связанных соотношениями, одним из которых является следующее:

$$T(\pi^+ p \to \pi^+ p) - T(\pi^- p \to \pi^- p) = \sqrt{2}\, T(\pi^- p \to \pi^0 n).$$

Вместо амплитуд переходов между состояниями с определенными полными изотопическими спинами T^I можно ввести независимые амплитуды другим способом. Поскольку амплитуды рассматриваемых процессов в совокупности представляют собой изоскаляр, линейный по волновым функциям начальных частиц N, π и конечных частиц $\mathbf{N}$, π^*, то в самом общем виде

$$T = \bar{N}\pi_i^* \left[T^{(+)}\delta_{ij} + T^{(-)} \frac{1}{2} [\tau_i \tau_j] \right] N\pi_j,$$

где величины $T^{(+)}$ и $T^{(-)}$ независимы. Можно показать, что независимые амплитуды $T^{(\pm)}$ связаны с $T^{1/2}$ и $T^{3/2}$ следующим образом

$$T^{1/2} = T^{(+)} + 2T^{(-)}, \quad T^{3/2} = T^{(+)} - T^{(-)}.$$

Напомним, что каждая истинно нейтральная частица или система, т. е. каждое собственное состояние оператора зарядового сопряжения C, имеет определенную C-четность. Предполагается, что в сильных взаимодействиях C-четность сохраняется. Теперь обобщим этот закон сохранения применительно к заряженным частицам или к системам частиц, которые вместе со своими античастицами или вместе с системами из соответствующих античастиц принадлежат одним и тем же изотопическим мультиплетам.

Для этой цели вместо зарядового сопряжения C введем новое G-преобразование, являющееся произведением зарядового сопряжения C и вращения на угол π вокруг второй оси изотопического пространства. Покажем, что при этом G-преобразовании волновые функции пионов или их полевые операторы меняют лишь знак; другими словами, пионы имеют G-четность, равную —1. Действительно, при зарядовом сопряжении

$$\pi^+ \to \pi^-; \ \pi^- \to \pi^+; \ \pi^0 \to \pi^0,$$

а при вращении на угол π вокруг второй оси изотопического пространства

$$\pi_1 \to -\pi_1; \ \pi_2 \to -\pi_2; \ \pi_3 \to -\pi_3,$$

т. е.

$$\pi^+ \to -\pi^-; \ \pi^- \to -\pi^+; \ \pi^0 \to -\pi^0.$$

Комбинируя оба преобразования, получаем результат G-преобразования:

$$\pi^+ \to -\pi^+; \ \pi^- \to -\pi^-; \ \pi^0 \to -\pi^0.$$

Аналогично определяются G-четности систем нуклон — антинуклон в состояниях с определенным орбитальным моментом, полным спином и полным изотопическим спином.

Благодаря изотопической инвариантности и C-инвариантности G-четность представляет собой квантовое число, сохраняющееся в сильных взаимодействиях. Этот закон сохранения приводит к запрету целого ряда процессов.

Кроме стабильных (относительно сильных взаимодействий) мезонов и барионов в настоящее время известно существование большого числа резонансов. Все они группируются в изотопические мультиплеты, причем частицы в каждом мультиплете имеют приблизительно равные массы. Небольшая разница масс внутри каждого мультиплета, по-видимому, обязана электромагнитному взаимодействию, нарушающему изотопическую инвариантность.

Рассмотрим теперь трансформационные свойства электромагнитного тока относительно изотопической группы. Как известно, для системы двух полей N и $\boldsymbol{\pi}$ из инвариантности лагранжиана относительно калибровочного преобразования

$$p \to \exp(\mathrm{i}\alpha)\, p; \ \pi^+ \to \exp(\mathrm{i}\alpha)\, \pi^+; \ \ \pi^- \to \exp(-\mathrm{i}\alpha)\, \pi^-; \ \ n \to n; \ \pi^0 \to \pi^0$$

и теоремы Нетер вытекает сохранение электромагнитного тока:

$$I^e_\mu = p\gamma_\mu p + [\boldsymbol{\pi}_\Lambda \partial_\mu \boldsymbol{\pi}]_3.$$

Нуклонную часть тока J^e_μ можно переписать в виде

$$\overline{p}\gamma_\mu p = \overline{N}\gamma_\mu N/2 + \overline{N}\tau_3\gamma_\mu N/2.$$

Первый член в правой части данного соотношения является изотопическим скаляром, а второй член — третьей компонентой изотопического вектора. Что касается мезонной части тока J^e_μ, то она также имеет вид третьей компоненты изовектора. Обобщая это свойство приведенного выше выражения для тока J^e_μ, предположим, что оно имеет место и для всех других полей, или, другими словами, что электромагнитный ток адронов имеет вид

$$J^e_\mu = V^{(0)}_\mu + V^{(3)}_\mu.$$

где $V^{(0)}_\mu$ — изотопический скаляр; V^i_μ $(i = 1, 2, 3)$ — изотопический вектор.

Наше предположение относительно изотопических свойств электромагнитного тока J^e_μ приводит к некоторым ограничениям на значения форм-факторов частиц в изотопических мультиплетах с $I \geqslant 1$ и, в частности, на значения их магнитных моментов. Например, магнитные моменты трех Σ-гиперонов определяются двумя независимыми величинами и удовлетворяют соотношению

$$\mu_{\Sigma^+} - \mu_{\Sigma^-} = 2\mu_{\Sigma^0}.$$

В силу указанных трансформационных свойств тока J^e_μ относительно изотопической группы амплитуды процессов с участием фотонов также обладают определенной изотопической структурой и поэтому удовлетворяют некоторым соотношениям. Например, амплитуды процессов фоторождения пионов на нуклоне

$$\gamma + p \to \pi^0 + p; \quad \gamma + p \to \pi^+ + n;$$
$$\gamma + n \to \pi^0 + n; \quad \gamma + n \to \pi^- + p$$

зависят лишь от трех независимых величин:

$$T = \overline{N}\pi_i^* \left[T^{(0)}\tau_i + T^{(+)}\delta_{i3} + T^{(-)}\frac{1}{2}[\tau_i, \tau_3] \right] N.$$

Между ними существует соотношение

$$[T(\gamma p \to \pi^+ n) + T(\gamma n \to \pi^- p)]/\sqrt{2} = T(\gamma p \to \pi^0 p) - T(\gamma n \to \pi^0 n).$$

Аналогично для амплитуд радиационных распадов Δ-резонансов имеем:

$$T(\Delta^+ \to p\gamma) = T(\Delta^0 \to n\gamma).$$

Изучение изотопических свойств слабых взаимодействий также представляет большой интерес. Оно позволяет понять аналогию и глубокую связь между электромагнитным и слабым взаимодействиями адронов. Напомним, что согласно экспериментальным данным по β-распаду нейтрона

$$n \to p + e + \tilde{\nu}$$

и по распаду мюона

$$\mu \to e + \nu + \tilde{\nu}$$

эффективный гамильтониан, ответственный за эти процессы, имеет вид

$$H_{\text{эфф}} = G_\beta[\bar{p}\gamma_\mu(1+x\gamma_5)n][\bar{e}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\nu]+G_\mu[\bar{\nu}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\mu][\bar{e}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\nu]+\text{h.c.},$$

где $x \approx 1{,}20$, а перенормированные константы G_β и G_μ почти равны друг другу $G_\beta \approx G_\mu$. С другой стороны, теория будет универсальной, если предположить, что соответствующие затравочные константы связи равны между собой, и лагранжиан записывается в виде:

$$L = \frac{G}{\sqrt{2}}\{[\bar{p}\gamma_\mu(1+\gamma_5)n][\bar{e}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\nu+$$
$$+\bar{\nu}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\mu][\bar{e}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\nu+\ldots]+\text{h. c.}\}.$$

Наличие множителя $x \approx 1{,}20$ в $H_{\text{эфф}}$ есть эффект перенормировки в результате сильных взаимодействий.

Так как лептоны не принимают участия в сильных взаимодействиях, то в низшем порядке по электромагнитному и слабым взаимодействиям эффективная константа связи в распаде мюона $G_\mu = G/\sqrt{2}$. Тогда равенство $G_\beta = G/\sqrt{2}$ может означать, что несмотря на наличие сильных взаимодействий нуклонов константа векторной связи в β-распаде нейтрона также не подвергается перенормировке.

Аналогичная ситуация характерна для квантовой электродинамики. Лагранжиан взаимодействия нуклонов и лептонов с электромагнитным полем A_μ имеет вид:

$$L = e\,[-\bar{\mu}\gamma_\mu\mu - \bar{e}\gamma_\mu e + J_\mu^e]\,A_\mu,\quad J_\mu^e = \bar{p}\gamma_\mu p + \ldots,$$

причем в силу закона сохранения тока $\partial_\mu J_\mu^{e} = 0$, константа связи e для нуклонов не меняется при учете сильных взаимодействий.

Равенство констант G_β и G_μ, т. е. тот факт, что константа векторной связи β-распада нейтрона не подвергается перенормировке в результате сильных взаимодействий, наводит на мысль о том, что между электромагнитным и слабым взаимодействиями существует аналогия и адроны входят в лагранжиан взаимодействия также через токи:

$$L = \frac{G}{\sqrt{2}}[(J_\mu^V + J_\mu^A)\,\bar{e}\gamma_\mu(1+\gamma_5)_\nu + \ldots] + \text{h. c.}$$

Здесь J_μ^V и J_μ^A — векторный и аксиальный токи, нуклонные части которых равны соответственно

$$J_\mu^V = \bar{p}\gamma_\mu n + \ldots;$$
$$J_\mu^A = p\gamma_\mu\gamma_5 n + \ldots,$$

причем первый ток сохраняется: $\partial_\mu J_\mu^V = 0$, как это было предложено Герштейном и Зельдовичем, а затем Гелл-Манном и Фейнманом.

Заметим, что нуклонная часть векторного тока J_μ^V

$$\overline{p}\gamma_\mu n = \overline{N}\gamma_\mu\tau/\sqrt{2} + N\gamma_\mu\frac{\tau_+}{\sqrt{2}}N = \overline{N}\gamma_\mu(\tau_1 + i\tau_2)N/2$$

является составляющей сохраняющегося изовектора

$$\mathbf{V}_\mu = \overline{N}\gamma_\mu\boldsymbol{\tau}N/2,$$

третья компонента которого входит в электромагнитный ток для нуклонов. Предположим, что указанное свойство тока J_μ^V справедливо для всех других полей. Это означает, что векторный ток J_μ^V, дающий вклад в β-распад нейтрона, и изовекторная часть электромагнитного тока являются различными компонентами одного и того же изотопического вектора $\mathbf{V}_\mu$:

$$J_\mu^V = V_\mu^{(1)} + iV_\mu^{(2)};$$

$$J_\mu^e = V_\mu^{(0)} + V_\mu^{(3)}.$$

В этих изотопических свойствах токов слабых взаимодействий и электромагнитного тока скрывается глубокая аналогия между двумя типами взаимодействия.

Гипотеза о сохранении векторного тока J_μ^V позволяет выразить эффективную константу β-распада пиона

$$\pi^- \to \pi^0 + e + \nu$$

через затравочную константу связи G в лагранжиане. В результате предсказывается значение вероятности распада

$$W(\pi^- \to \pi^0 e\widetilde{\nu}) = G^2(m_{\pi^-} - m_{\pi^0})^5/(30\pi^3),$$

которое было подтверждено опытом.

Другим экспериментальным следствием сохранения векторного тока слабых взаимодействий J_μ^V является так называемый эффект слабого магнетизма, который заключается в следующем. В векторной части матричного элемента β-распада нейтрона содержатся два форм-фактора, нормированных на единицу в нуле, и некоторая константа μ_β:

$$\langle p \,|\, J_\mu^V \,|\, n\rangle = \bar{u}_p\,[F_1^\beta(k^2)\,\gamma_\mu + \mu_\beta F_2^\beta(k^2)\,i\sigma_{\mu\nu}k_\nu]\,u_n.$$

Матричные элементы электромагнитного тока между состояниями протона или нейтрона имеют аналогичный вид:

$$\langle N\,(J_\mu^e \,|\, N)\rangle = \bar{u}_N\,[F_1^N(k^2)\,\gamma_\mu + \mu_N F_2^N(k^2)\,i\sigma_{\mu\nu}k_\nu]\,u_N;\quad N = p,\ n.$$

Из указанных изотопических свойств векторных токов J_μ^V и J_μ^e

следует, что

$$F_i^\beta(k^2) = F_i^p(k^2) - F_i^n(k^2);$$

$$\mu_\beta = \mu_p - \mu_n.$$

В частности, константа μ_β в матричном элементе β-распада нейтрона выражается через аномальные магнитные моменты протона и нейтрона и представляет собой аналог последних величин в случае слабых взаимодействий.

Обобщая указанное изотопическое свойство векторного тока J_μ^V, предположим теперь, что аксиальный ток J_μ^A также является компонентой изотопического вектора $\mathbf{A}_\mu$:

$$J_\mu^A = A_\mu^{(1)} + iA_\mu^{(2)}.$$

В таком случае амплитуды процессов рождения пионов в нейтрино-нуклонном столкновении имеют определенную изотопическую структуру. Они также удовлетворяют некоторым соотношениям.

Выше написана в явном виде часть лагранжиана, описывающая два интересующих нас процесса. Она обладает некоторыми свойствами универсальности. Обобщение последних свойств привело к созданию универсальной (V — A)-теории слабых взаимодействий с лагранжианом вида

$$L = \frac{G}{\sqrt{2}} J_\mu J_\mu^+,$$

где ток

$$J_\mu = \bar{\nu}\gamma_\mu(1+\gamma_5)e + \bar{\nu}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\mu + (J_\mu^V + J_\mu^A) + (T_\mu^V + T_\mu^A).$$

Здесь J_μ^V и J_μ^A — векторный и аксиальный токи, ответственные за процессы с изменением странности. Экспериментальные данные не противоречат предположению о том, что они несут изотопический спин 1/2 и меняют странность на величину $\Delta S = \Delta Q = 1$.

Унитарная симметрия

Наряду с зарядом Q хорошо известна другая строго сохраняющаяся величина, характеризующая адроны. Это — барионное число B. Кроме того, после открытия K-мезонов и гиперонов было установлено существование нового квантового числа — странности S, которое сохраняется лишь в сильных и электромагнитных взаимодействиях. Вместо странности S часто употребляют также гиперзаряд

$$Y = S + B.$$

Частицы или резонансы в одном изотопическом мультиплете имеют одно и то же барионное число, один и тот же гиперзаряд.

Они, однако, несут разные заряды Q и соответствуют разным значениям третьей компоненты изотопического спина I_3. Эти три величины связаны между собой формулой Гелл-Манна — Нишиджимы:

$$Q = Y/2 + I_3.$$

Все адроны прекрасно классифицируются по изотопическим мультиплетам. С возрастанием числа обнаруженных частиц и резонансов число изотопических мультиплетов становится все большим и большим. Попытки обобщить изотопическую инвариантность с целью получить более высокую симметрию с большими мультиплетами, каждый из которых содержит различные изотопические мультиплеты, привели к созданию теории унитарной симметрии Гелл-Манна и Неемана.

Вместо изотопической группы $SU(2)$ с генераторами I_i ($i = 1, 2, 3$) имеем теперь группу $SU(3)$ с восемью генераторами K_i ($i = 1, 2, \ldots, 8$), содержащую $SU(2)$ как подгруппу. Генераторы K_i выберем так, чтобы они удовлетворяли коммутационным соотношениям

$$[K_i, K_j] = \mathrm{i} f_{ijk} K_k,$$

где структурные константы f_{ijk} полностью антисимметричны, причем

$$f_{123} = 1; \quad f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{367} = 1/2; \quad f_{458} = f_{678} = \sqrt{3}/2$$

(остальные константы, не сводящиеся к перечисленным при перестановке индексов, равны нулю).

Три первых генератора K_i ($i = 1, 2, 3$) образуют алгебру Ли группы $SU(2)$ и отождествляются с генераторами изотопической подгруппы

$$K_i = I_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Генератор K_8 коммутирует с I_3 и его можно привести к диагональной форме вместе с последним. Если рассматривать собственные значения K_8 как значения некоторого квантового числа, то естественно связать его с гиперзарядом. Положим

$$Y = (2/\sqrt{3})\, K_8.$$

Формула Гелл-Манна — Нишиджимы тогда дает

$$Q = (1/\sqrt{3})\, K_8 + K_3.$$

Простейшие нетривиальные неприводимые представления группы $SU(3)$ описываются спинорами первого порядка ψ_α и $\overline{\psi}^\alpha$. При конечном преобразовании групп $SU(3)$ с параметрами

α_i ($i = 1, 2, \ldots, 8$), они преобразуются следующим образом:

$$\psi_\alpha = [\exp(\mathrm{i}k_i\alpha_i)\,\psi]_\alpha = \left[\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{\pi_i}{2}\,\alpha_i\right)\right]_\alpha^\beta \psi_\beta = \left[\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{\lambda_i}{2}\alpha_i\right)\right]_{\alpha\beta}\psi_\beta;$$

$$\overline{\psi}^\alpha \to [\exp(\mathrm{i}k_i\alpha_i)\,\overline{\psi}]^\alpha = \overline{\psi}^\beta \left[\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\lambda_i}{2}\,\alpha_i\right)\right]_\beta^\alpha =$$

$$= \overline{\psi}^\beta \left[\exp\left(-\mathrm{i}\,\frac{\lambda_i}{2}\,\alpha_i\right)\right]_{\beta\alpha},$$

где λ_i — матрицы Гелл-Манна:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Этим неприводимым представлениям соответствуют триплеты, обозначаемые 3 и $\overline{3}$.

Смешанный спинор второго порядка Φ_α^β с нулевым следом $\Phi_\alpha^\alpha = 0$ имеет восемь независимых компонент и описывает октет. Он является обобщением изотопического вектора и содержит следующие изотопические мультиплеты:

триплет ($I = 1$) с $Y = 0$, синглет ($I = 0$) с $Y = 0$,

дублет ($I = 1/2$) с $Y = 1$, дублет ($I = 1/2$) с $Y = -1$.

Известно восемь псевдоскалярных мезонов с такими квантовыми числами. Естественно предположить, что они образуют октет в схеме унитарной симметрии. Описывающая их матрица P_α^β по аналогии с Π_a^b имеет вид:

$$P = \begin{pmatrix} \pi^0/\sqrt{2} + \eta/\sqrt{6} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\pi^0/\sqrt{2} + \eta/\sqrt{6} & K^0 \\ K^- & \widetilde{K}^0 & -2\eta/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Замечательно, что восемь барионов со спином и четностью $1/2^+$, а именно N, Σ, λ, Ξ, также можно включить в октет, описываемый матрицей B_α^β следующего вида:

$$B = \begin{pmatrix} \Sigma^0/\sqrt{2} + \lambda/\sqrt{6} & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\Sigma^0/\sqrt{2} + \lambda/\sqrt{6} & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -2\lambda/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Для векторных мезонов встречаемся с особой ситуацией: существует девять векторных мезонов ρ, K^*, $\widetilde{K}^*$, ω и φ, причем никакой из изотопических синглетов ω и φ нельзя считать принадлежащим октету. Предполагается, что они являются линейными комбинациями двух состояний φ^0 и ω^0, причем первое принадлежит октету, а второе является синглетом группы $SU(3)$:

$$\varphi = \varphi^0 \cos\theta + \omega^0 \sin\theta;$$

$$\omega = \omega^0 \cos\theta - \varphi^0 \sin\theta.$$

Это явление называется $\varphi\omega$-смешиванием и обязано нарушению унитарной симметрии. Семейство из девяти таких частиц называется нонетом.

Наряду с рассмотренными выше частицами и мезонными резонансами давно известны пион-нуклонные резонансы с $I = 3/2$, $Y = 1$, обозначаемые Δ. Они могут принадлежать лишь десимету с десятью компонентами, описываемому полностью симметричным спинором третьего порядка $B_{\alpha\beta\gamma}$ или высшим мультиплетам группы $SU(3)$. Десимет содержит следующие изотопические мультиплеты:

квадруплет $(I=3/2)$ с $Y=1$, триплет $(I=1)$ с $Y=0$,

дублет $(I=1/2)$ с $Y=-1$, синглет $(I=0)$ с $Y=-2$.

Экспериментально сначала были обнаружены лишь девять резонансов: Δ, Y_1^* и Ξ^*, которые могли быть отождествлены с первыми девятью компонентами десимета. Не хватало десятой частицы. Теория предсказала, таким образом, существование Ω-гиперона с $Q = -1$, $Y = -2$. Это было подтверждено опытом.

Рассмотрим теперь трилинейный лагранжиан взаимодействия барионов $1/2^+$ с псевдоскалярными мезонами. Из $SU(3)$-инвариантности следует, что все константы мезон-барионного взаимодействия определяются двумя независимыми константами и соответствующий лагранжиан имеет вид

$$L = g^F \operatorname{Sp}[\bar{B}P\gamma_5 B - \bar{B}\gamma_5 BP]/\sqrt{2} + g^D \operatorname{Sp}[\bar{B}P\gamma_5 B + \bar{B}\gamma_5 BP]/\sqrt{2}.$$

Используя приведенные выше матрицы P_α^β и B_α^β, легко показать, что

$$g_{\pi NN} = (1/2)(g^D + g^F); \quad g_{\pi\Xi\Xi} = (1/2)(g^D - g^F);$$

$$g_{\eta NN} = \left(1/2\sqrt{3}\right)(3g^F - g^D); \quad g_{\eta\Xi\Xi} = \left(-1/2\sqrt{3}\right)(3g^F + g^D);$$

$$g_{\pi\Sigma\Sigma} = -g^F; \quad g_{\eta\Sigma\Sigma} = \sqrt{2/3}\, g^D;$$

$$g_{\eta\lambda\lambda} = -\sqrt{2/3}\, g^D; \quad g_{\pi\Sigma\lambda} = \left(1/\sqrt{3}\right) g^D;$$

$$g_{K\Sigma N} = (1/2)(g^D - g^F); \quad g_{K\Sigma\Xi} = (1/2)(g^D + g^F);$$

$$g_{K\lambda N} = \left(-1/2\sqrt{3}\right)(3g^F - g^D); \quad g_{K\lambda\Xi} = \left(1/2\sqrt{3}\right)(3g^F - g^D).$$

Отсюда получаем десять соотношений между 12 константами связи, которые в теории изотопической инвариантности являются независимыми.

Аналогично доказываются соотношения между константами распада для различных частиц в одних и тех же мультиплетах группы SU (3). Например,

$$g_{\rho^+\to\pi^+\pi^0} : g_{K^*\to K^+\pi^0} : g_{\varphi\to K^+K^-} : g_{\varphi^+\to\pi^+\eta} = 1 : 1/2 : \left(\sqrt{3}/2\right)\cos\theta : 0;$$

$$g_{\Delta^{++}\to p\pi^+} : g^*_{\Sigma^{*+}\to\lambda\pi^+} : g^*_{\Sigma^{*+}\to\Sigma^+\pi^0} : g_{\Xi^{*-}\to\Xi^0\pi} = 1 : \left(1/\sqrt{2}\right) : \left(1/\sqrt{6}\right) : \left(1/\sqrt{3}\right).$$

При изучении рассеяния пиона на нуклоне с учетом изотопической инвариантности было отмечено, что полный изотопический спин системы πN может иметь лишь два различных значения 1/2 и 3/2 и амплитуды всех рассматриваемых процессов выражаются двумя независимыми функциями $T^{1/2}$ и $T^{3/2}$. Обобщим теперь этот результат на случай рассеяния октета псевдоскалярных мезонов на октете барионов $1/2^+$ и унитарной симметрии.

Векторы состояния систем бариона и мезона преобразуются по произведению 8×8, которое разлагается на неприводимые представления следующим образом:

$$8 \times 8 = 27 + 10 + 10 + 8s + 8a + 1.$$

Оно содержит два октета: симметричный $8s$ и антисимметричный $8a$. В силу инвариантности относительно группы SU (3) возможны лишь следующие восемь переходов:

$$27 \to 27;\quad 10 \to 10;\quad \overline{10} \to \overline{10};\quad 8_s \to 8_s,\ 8_a;\quad 8_a \to 8_a,\ 8_s;\quad 1 \to 1.$$

причем амплитуды переходов $8s \to 8a$ и $8a \to 8s$ связаны между собой обращением времени и равны друг другу. Амплитуды всех рассматриваемых процессов рассеяния октета псевдоскалярных мезонов на октете барионов $1/2^+$ выражаются, таким образом, через семь независимых функций и поэтому должны удовлетворять ряду соотношений. Приведем некоторые нетривиальные примеры:

$$T\,(K^+p \to K^+p) - T\,(\pi^+p \to \pi^+p) = T\,(\pi^+p \to K^+\Sigma^+);$$
$$T\,(K^-p \to K^-p) - T\,(\pi^-p \to \pi^-p) = T\,(K^-p \to \pi^-\Sigma^+);$$
$$T\,(K^-p \to \pi^+\Sigma^-) = T\,(K^-p \to K^0\Xi^0);$$
$$T\,(\pi p \to K^+\Sigma^-) = T\,(\widetilde{K}^0 p \to K^+\Xi^0).$$

Аналогично получаются соотношения между амплитудами барион-барионного рассеяния, между амплитудами рождения резонансов при столкновении псевдоскалярных мезонов с барионами, между амплитудами двухмезонной аннигиляции пар барион — антибарион и т. д.

Рассмотрим теперь трансформационные свойства электромагнитного тока адронов J^e_μ относительно группы $SU(3)$ в схеме унитарной симметрии. Мы знаем, что J^e_μ является суммой изотопического синглета $V^{(0)}_\mu$ и третьей компоненты $V^{(3)}_\mu$ изотопического триплета:

$$J^e_\mu = V^{(0)} + V^{(3)}_\mu,$$

причем все они несут гиперзаряд, равный нулю. Поскольку октет группы $SU(3)$ содержит подобные компоненты, то естественно предположить, что $V^{(0)}_\mu$ и $V^{(3)}_\mu$ принадлежат одному и тому же октету $V^{(i)}_\mu$ $(i = 1, 2, \ldots, 8)$. Тогда

$$V^{(0)}_\mu = (1/\sqrt{3})\, V^{(8)}_\mu$$

и

$$J^e_\mu = (1/\sqrt{3})\, V^{(8)}_\mu + V^{(3)}_\mu.$$

Наше предположение о трансформационных свойствах электромагнитного тока в унитарной симметрии приводит к некоторым экспериментально проверяемым следствиям. Из него, в частности, вытекает, что магнитные моменты барионов связаны между собой соотношениями

$$\mu_p = \mu_{\Sigma^+};\quad \mu_{\Xi^-} = \mu_{\Sigma^-};\quad \mu_n = -2\mu_{\Sigma^0} = \mu_{\Xi^0} = 2\mu_\lambda.$$

Кроме того, константа распада

$$\Sigma^0 \to \lambda + \gamma$$

пропорциональна магнитному моменту нейтрона

$$g_{\Sigma^0 \to \lambda\gamma} = (-\sqrt{3}/2)\, \mu_n.$$

Рассматривая соответствующие электромагнитные вершины, получим также соотношения между константами различных радиационных распадов резонансов:

$$g_{\rho^{\pm,0} \to \pi^{\pm,0}\gamma} : g_{K^{*\pm} \to K^\pm\gamma} : g_{K^{*0} \to K^0\gamma} : g_{\rho^0 \to \eta\gamma} = 1 : 1 - 2 : \sqrt{3};$$

$$g_{\Delta^+ \to p\gamma} : g_{\Delta^0 \to n\gamma} : g_{\Sigma^{*+} \to \Sigma^+\gamma} : g_{\Sigma^{*0} \to \Sigma^0\gamma} : g_{\Sigma^{*0} \to \lambda\gamma} : g_{\Xi^{*0} \to \Xi^0\gamma} : g_{J_1^{*-} \to \Sigma^-\gamma} : g_{\Xi^* \to \Xi^-\gamma} =$$
$$= 1 : 1 : 1 : (-1/2) : (\sqrt{3}/2) : 1 : 0 : 0.$$

Напомним, что согласно нашему предположению небольшая разница масс внутри изотопических мультиплетов обязана электромагнитному взаимодействию. Из указанных трансформационных свойств электромагнитного тока относительно группы $SU(3)$ можно получить соотношения между разностями масс частиц в изотопических мультиплетах, принадлежащих одним и тем же мультиплетам унитарной симметрии. Так,

$$M_{\Sigma^-} - M_{\Sigma^+} = M_n - M_p + M_{\Xi^-} - M_{\Xi^0};$$
$$M_{\Delta^0} - M_{\Delta^-} = M_{J_1^{*}0} - M_{J_1^{*}0};$$
$$M_{\Delta^0} - M_{\Delta^-} = M_{J_1^{*}0} - M_{J_1^{*}-} = M_{\Xi^{*}0} - M_{\Xi^{*}-}.$$

В предыдущем разделе были получены изотопические свойства векторных и аксиальных токов J_μ^V, J_μ^A и J_μ^V, J_μ^A, входящих в лагранжиан слабых взаимодействий:

$$L = (G/\sqrt{2})\, J_\mu J_\mu^{+};$$
$$J_\mu = \bar{\nu}\gamma_\mu (1+\gamma_5)\, e + \bar{\nu}\gamma_\mu (1+\gamma_5)_\mu + (J_\mu^V + J_\mu^A) + (T_\mu^V + T_\mu^A),$$

причем J_μ^V и J_μ^A — компоненты с $I_3 = +1$ изотопических векторов $\mathbf{V}_\mu$ и $\mathbf{A}_\mu$ с нулевой странностью, а J_μ^V и J_μ^A — компоненты с $I_3 = 1/2$ изотопических дублетов со странностью 1. Так как октет группы SU (3) унитарной симметрии содержит компоненты с такими квантовыми числами, то естественно предположить, что токи J_μ^V и T_μ^V пропорциональны компонентам одного и того же октета $V_\mu^{(i)}$ ($i = 1, 2, \ldots, 8$), а токи J_μ^A и T_μ^A — компонентам октета $A_\mu^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, 8$. Поскольку эффективные константы лептонных распадов мезонов и барионов с изменением странности в несколько раз меньше соответствующих констант для распадов без изменения странности, то положим

$$T_\mu^V = \sin\theta_V\, [V_\mu^{(4)} + iV_\mu^{(5)}];$$
$$T_\mu^A = \sin\theta_A\, [A_\mu^{(4)} + iA_\mu^{(5)}].$$

Экспериментальные данные не противоречат равенствам

$$J_\mu^V = \cos\theta_V\, [V_\mu^{(1)} + iV_\mu^{(2)}];$$
$$J_\mu^A = \cos\theta_A\, [A_\mu^{(1)} + iA_\mu^{(2)}],$$

причем токи $V_\mu^{(1)}$ нормированы таким способом, что для полей барионов

$$V_\mu^{(1)} + iV_\mu^{(2)} = \bar{p}\gamma_\mu n.$$

Угол $\theta = \theta_A = \theta_V$ называется углом Кабиббо. Универсальность тогда понимается в том смысле, что векторный и аксиальный ток получаются из соответствующих нормированных токов «вращением» на угол θ в восьмимерном пространстве, в котором реализуется присоединенное представление группы SU (3).

Выше говорилось, что изовекторная и изоскалярная части электромагнитного тока являются компонентами одного и того же октета. С другой стороны, изовекторная часть электромагнитного тока и векторный ток слабых взаимодействий J_μ^V принадлежат одному и тому же изотопическому мультиплету. Отсюда следует, что все указанные токи входят в один и тот же октет унитарной симметрии. В этих трансформационных свойствах электромагнитного тока и токов слабых взаимодействий лежит глубокая связь между двумя типами взаимодействия.

В заключение отметим, что в отличие от изотопической инвариантности унитарная симметрия нарушается даже в сильных взаимодействиях, о чем свидетельствует заметное расщепление масс частиц в каждом мультиплете унитарной симметрии. Предполагается, однако, что это нарушение минимально и довольно слабо в следующем смысле: часть лагранжиана, нарушающая симметрию, имеет определенные трансформационные свойства, а именно, является компонентой с $I = 0$, $Y = 0$ некоторого октета, и пропорциональна малой константе. В низшем порядке по этой константе можно учесть нарушение симметрии. В частности, таким способом получаются формулы для расщепления масс частиц в каждом мультиплете SU (3). Для октетов барионов $1/2^+$ и псевдоскалярных мезонов имеем:

$$3M_\lambda + M_\Sigma = 2(M_N + M_\Xi);$$

$$3m_\eta^2 + m_\pi^2 = 4m_{K_1}^2,$$

а для десимета барионных резонансов $3/2^+$

$$M_{\Sigma^*} - M_\Delta = M_{\Xi^*} - M_{\Sigma^*} = M_{\Omega^-} - M_{\Xi^*}.$$

Эти формулы прекрасно согласуются с опытом. Для произвольных мультиплетов справедлива общая формула Гелл-Манна — Окубо:

$$M = M_0 + aY + b\left[I(I+1) - \frac{Y^2}{4}\right]$$

для барионов и

$$m^2 = m_0^2 + \alpha Y + \beta\left[I(I+1) - \frac{Y^2}{4}\right]$$

для мезонов. Если данный мезонный мультиплет переходит в себя при зарядовом сопряжении, то для него $\alpha = 0$.

Симметрия SU (6) и ее обобщения

При изучении изотопической инвариантности или унитарной симметрии мы обратили внимание лишь на трансформационные свойства векторов состояния или волновых функций относительно группы внутренней симметрии SU (2) или SU (3) и имели дело с изотопическими индексами или индексами унитарной симметрии α, пробегающими два или три значения. Эти волновые функции или векторы состояния обладают, однако, также определенными трансформационными свойствами относительно спиновой группы, генераторами которой являются операторы полного спина, и могут содержать еще спиновые индексы a, принимающие два значения. Например, волновая функция триплета группы SU (3) со спином 1/2 зависит от двух индексов $\alpha = 1, 2, 3$ и $a = 1, 2$ и имеет шесть компонент $(\psi_{\alpha a})$.

Предположим теперь, что в волновых функциях или векторах состояния два типа индексов α и a всегда присутствуют одновременно в виде пар (αa), т. е. образуют двойные индексы $A = (\alpha a)$, и рассмотрим все возможные унитарные унимодулярные преобразования спиноров $\psi_{\alpha a}$, содержащих такие двойные индексы. Эти преобразования образуют группу SU (6) при $\alpha = 1, 2, 3$ или группу SU (4) при $\alpha = 1, 2$, содержащие спиновую группу SU (2) и группу унитарной симметрии SU (3) или изотопическую группу SU (2) как подгруппы.

Предположим далее, что состояния адронов классифицируются по неприводимым представлениям группы SU (6), т. е. образуют мультиплеты этой группы. Поскольку неприводимые представления группы SU (6) разлагаются в прямые суммы неприводимых представлений спиновой группы SU (2) и группы унитарной симметрии SU (3), то каждый мультиплет группы SU (6) содержит различные мультиплеты унитарной симметрии с разными спинами. Иначе говоря, в схеме SU (6) разные мультиплеты SU (3) с разными спинами объединяются в большие мультиплеты. Отметим, что все частицы в каждом мультиплете SU (6) имеют одну и ту же четность.

В качестве первого примера рассмотрим смешанный спинор второго порядка Φ^A_B с нулевым следом $\Phi^A_B = 0$. Он имеет 35 независимых компонент и содержит октет со спином 0 и нонет со спином 1. Другим неприводимым представлением группы SU (6), имеющим физическое значение, является полностью симметричный спинор третьего порядка ψ_{ABC}, имеющий 56 компонент. Он содержит десимет со спином 3/2 и октет со спином 1/2. Очевидно, что существующие октет псевдоскалярных мезонов и нонет векторных мезонов можно включить в 35-плет группы SU (6) и отрицательной четностью, а десимет барионных резонансов $3/2^+$ и октет барионов $1/2^+$ можно объединить в 56-плет группы SU (6) с положительной четностью. Таким образом, наиболее точно установленные частицы и резонансы хорошо укладываются в схему SU (6).

Другим успехом теории симметрии SU (6) является предсказание значения угла $\varphi\omega$-смешивания: $\sin\theta = 1/\sqrt{3}$, $\cos\theta = \sqrt{2/3}$. Оно находится из следующих соображений. Элементарные частицы и резонансы классифицируются по неприводимым представлениям группы SU (6) и ее подгрупп. При различных выборах подгрупп для классификации адронов можно получить разные типы мультиплетов. В частности, если разделим 35-плет группы SU (6) на различные мультиплеты группы SU (3) унитарной симметрии, то найдем октет со спином 0, синглет ω^0 со спином 1 и октет со спином 1, содержащий φ^0. Если же адроны классифицируются по неприводимым представлениям подгруппы SU (4), получаемой из SU (6) при замене SU (3) изотопической группой SU (2), т. е. если наблюдаемые частицы и резонансы принадлежат определенным мультиплетам группы SU (4), то вместо ω^0 и φ^0 физическими состояниями оказываются линейные комбинации

$$\varphi = \varphi^0 \cos\theta + \omega^0 \sin\theta;$$
$$\omega = \omega^0 \cos\theta - \varphi^0 \sin\theta$$

с указанным значением угла $\varphi\omega$-смешивания θ. Этот результат согласуется с данными различных экспериментов. В частности, используя это значение θ и формулы Гелл-Манна — Окубо, легко найти следующее соотношение между массами векторных мезонов:

$$m_\rho^2 + 2m_\varphi^2 + m_\omega^2 = 4m_{K^*}^2.$$

Оно прекрасно согласуется с опытом.

При изучении изотопической инвариантности или унитарной симметрии можно предположить инвариантность S-матрицы относительно соответствующей группы внутренней симметрии SU (2) или SU (3). Для рассматриваемой группы SU (6), объединяющей спиновую группу с группой внутренней симметрии, такое требование не имело бы никакого смысла. Дело в том, что инвариантность относительно спиновой подгруппы SU (2) означала бы сохранение полного спина системы частиц, т. е. отсутствие LS-связи. Имеются, к счастью, случаи, когда полный спин системы действительно сохраняется. Примером этого могут служить двухчастичные процессы в S-состоянии ($l = 0$). В данных условиях можно потребовать SU (6)-инвариантность амплитуд. Для мезон-барионного рассеяния в S-состоянии это требование приводит к следующему соотношению:

$$T_s(\pi^+p \to \pi^+p) - T_s(\pi^-p \to \pi^-p) = T_s(K^0p \to K^0p) - T_s(\widetilde{K}^0p \to \widetilde{K}^0p) =$$
$$= \frac{1}{2}[T_s(K^+p \to K^+p) - T_s(K^-p \to K^-p)].$$

Здесь T_s обозначает амплитуду рассеяния в S-состоянии, т. е. парциальную амплитуду S-волны.

Вместо предположения об инвариантности относительно группы SU (6) при отсутствии LS-связи была выдвинута другая интерпретация симметрии $SU(6)$, пригодная для изучения процессов рассеяния в состояниях с заданными импульсами частиц. Для этой цели было введено понятие W-спина вместо обычного спина. Операторы W-спина зависят от направления импульса частиц и выбираются таким способом, чтобы уравнение Дирака было инвариантным относительно группы $SU(2)_W$, использующей операторы W-спина в качестве генераторов. Для частиц в покое W-спин совпадает с обычным спином. Заменяя спиновую подгруппу $SU(2)$ группой $SU(2)_W$, зависящей от направления импульса частицы, получим вместо группы $SU(6)$ изоморфную ей новую группу $SU(6)_W$, также зависящую от направления импульса частицы, причем уравнение Дирака будет инвариантно относительно этой группы $SU(6)_W$. Если частицы в покое классифицируются по мультиплетам группы $SU(6)$, то движущиеся частицы классифицируются по неприводимым представлениям группы $SU(6)_W$. В коллинеарных процессах, когда все импульсы лежат на одной и той же прямой, векторы состояния систем частиц преобразуются по неприводимым представлениям одной и той же группы $SU(6)_W$ и требование инвариантности относительно этой группы имеет смысл. Из него вытекает приведенное выше соотношение для амплитуд мезон-барионного рассеяния вперед и, в частности, соотношение для полных сечений взаимодействия:

$$\sigma_{tot}(\pi^+p)-\sigma_{tot}(\pi^-p)=\sigma_{tot}(K^0p)-$$
$$-\sigma_{tot}(\widetilde{K}^0p)=\frac{1}{2}[\sigma_{tot}(K^+p)-\sigma_{tot}(K^-p)].$$

Кроме связей такого рода между амплитудами мезон-барионного рассеяния вперед, можно получить много других соотношений между ними и амплитудами рождения резонансов (мезонных и барионных) при нулевом угле в мезон-барионном столкновении, учитывая, что октет псевдоскалярных мезонов и нонет векторных мезонов образуют 35-плет группы $SU(6)$, а октет барионов и декуплет барионных резонансов входят в 56-плет.

Вершинные части всегда можно рассматривать и как амплитуды коллинеарных процессов. Поэтому симметрия $SU(6)_W$ приводит ко многим соотношениям между форм-факторами или константами связи, которые в симметрии $SU(3)$ независимы. В симметрии $SU(3)$ лагранжиан мезон-барионного взаимодействия зависит от двух независимых констант g^F и g^D. В симметрии $SU(6)_W$ они пропорциональны:

$$g^D/g^F=3/2.$$

Изучение электромагнитного взаимодействия адронов в схеме симметрии $SU(6)$ также представляет большой интерес. Известно, что электромагнитный ток принадлежит октету. С другой стороны, по отношению к спиновой группе заряд является скаляром, а магнитный момент — вектором. Это означает, что заряд компонента октета со спином 0, а магнитный момент — компонента октета со спином 1. Предположим, что эти операторы принадлежат 35-плету группы SU (6), или их матричные элементы между состояниями частиц с коллинеарными импульсами преобразуются по представлению **35** соответствующей группы $SU(6)_W$. В таком случае наряду с соотношениями для магнитных моментов, полученными в унитарной симметрии, имеем еще новые соотношения, например,

$$\mu_p/\mu_n = -3/2.$$

Последняя формула прекрасно согласуется с опытом. Поскольку барионы $1/2^+$ и барионные резонансы $3/2^+$ принадлежат одному и тому же 56-плету группы SU (6), то между магнитными моментами барионов и амплитудами радиационных переходов между барионами и барионными резонансами также существуют некоторые соотношения. Некоторые из них были проверены на опытах по фоторождению пионов при низких энергиях.

Теория симметрии SU (6), несмотря на ее большие успехи, требует существенной переработки или обобщения, так как она релятивистски неинвариантна: в преобразованиях Лоренца многие генераторы группы SU (6) переходят в операторы, не принадлежащие алгебре Ли этой группы. С другой стороны, схема симметрии $SU(6)_W$ для коллинеарных процессов также представляет собой лишь феноменологическую неполную теорию; необходимо изучить природу симметрии сильных взаимодействий, сводящейся к $SU(6)_W$-инвариантности в этом частном случае.

В качестве релятивистского обобщения группы SU (6) были предложены группы SL (6, C) и SU (6, 6). В этих группах существует подгруппа SL (2, C), изоморфная однородной группе Лоренца и содержащая спиновую подгруппу SU (2) из группы SU (6). Спиноры группы SL (6, C) или SU (6, 6), преобразующиеся по неприводимым коллинеарным (неунитарным) представлениям этих некомпактных групп, также несут лишь двойные индексы $A = (\alpha, a)$, где a — индекс дираковского спинора группы Лоренца, а α — индекс группы SU (3) унитарной симметрии. Иначе говоря, индексы α и a всегда входят в спиноры группы SL (6, C) или SU (6, 6) в виде пар (αa).

Покажем теперь, что в отличие от симметрий типа SU (3) нарушение симметрии SL (6, C) или SU (6, 6) неизбежно. Для этой цели заметим, что дифференциальные операторы $\partial/\partial x_\mu$ или 4-импульсы p_μ, входящие в уравнения полей, представляют собой спиноры второго порядка группы Лоренца, не несущие индекса унитарной симметрии α. Они преобразуются по неприводимым представлениям группы Лоренца, но не образуют представлений группы симметрии $SL(6, C)$ или $SU(6, 6)$. Поэтому из спиноров этих групп и операторов первого порядка $\partial/\partial x_\mu$ или p_μ нельзя образовать нетривиальные инварианты соответствующей группы, которые могли бы считаться лагранжианом. Иначе говоря, уравнения полей всегда нарушают симметрию, даже при отсутствии взаимодействия: член кинетической энергии в лагранжиане неинвариантен.

Симметрия $SL(6, C)$ или $SU(6, 6)$, таким образом, не может быть точной симметрией. Ее нарушение всегда имеет место и называется внутренним нарушением. Отметим также, что требование инвариантности амплитуд рассеяния относительно этих групп симметрии приводит к противоречию с условием унитарности S-матрицы.

Попытки построить релятивистское обобщение симметрии $SU(6)$ без внутреннего нарушения привели к дальнейшему расширению группы $SL(6, C)$ или $SU(6, 6)$. Было показано, что в теории с группой симметрии G, имеющей вид полупрямого произведения неоднородной группы Лоренца P (группы Пуанкаре) и некомпактной группы внутренней симметрии S в качестве инвариантной подгруппы $G = P \cdot S$, где $S = SL(6, C)$ или $SU(6, 6)$, требование точной симметрии не противоречит существованию 4-импульса, входящего в уравнения полей в первом порядке. Инвариантность амплитуд рассеяния относительно группы G также совместима с условием унитарности S-матрицы, если элементарные частицы описываются унитарными представлениями группы внутренней симметрии S. Поскольку эта группа S некомпактна, то ее нетривиальные унитарные представления бесконечномерны и элементарные частицы образуют бесконечные мультиплеты. Интересно отметить, что в частном случае коллинеарных процессов G-инвариантность при $S = SU(6, 6)$ приводит к таким же следствиям, что и $SU(6)_W$-симметрии.

Были предложены различные варианты теории квантованных полей бесконечных мультиплетов с группой симметрии G указанного вида. Во всех этих моделях, однако, симметрия несовместима с общими требованиями релятивистской локальной теории полей: либо нет нормальной связи между спином и статистикой, либо сильные взаимодействия нарушают принцип микропричинности. До сих пор еще не удалось построить последовательную релятивистскую теорию с группой симметрии, обобщающей группу $SU(6)$. Несмотря на это, прекрасное согласие между предсказаниями теории симметрии $SU(6)$ и экспериментальными данными показывает, что эта симметрия имеет глубокие корни, лежащие в самой основе динамики сильных взаимодействий. Естественным путем к пониманию этой динамики является изучение взаимосвязей между различными физическими явлениями или процессами, соотношений между различными наблюдаемыми величинами.

Модель кварков

Идея о том, что все элементарные частицы или по крайней мере многие из них представляют собой сложные составные системы, образующиеся из более фундаментальных частиц или полей, была предложена уже давно. С обнаружением все большего и большего числа элементарных частиц и резонансов изучение структуры адронов стало одной из важнейших проблем теории элементарных частиц. Успехи теории унитарной симметрии и симметрии $SU(6)$ ускорили решение этой проблемы и привели к созданию интересной составной модели элементарных частиц и резонансов, в которой все адроны образуются из кварков и антикварков — фермионного триплета группы $SU(3)$ и соответствующих античастиц.

С групповой точки зрения кварки действительно достойны роли наиболее фундаментальных частиц среди всех адронов, образующих мультиплеты группы $SU(3)$. Дело в том, что кварковый триплет реализует фундаментальное представление третьей группы $SU(3)$, триплет антикварков — соответствующее контраградиентное представление, а перемножением представлений двух этих типов и последующего разложения произведения на неприводимые представления можно получить любое неприводимое представление этой группы. Это означает, что все адроны, образующие различные мультиплеты группы $SU(3)$, вполне можно рассматривать как составные системы кварков и антикварков. Из соотношений между зарядом, гиперзарядом и генераторами группы $SU(3)$

$$Y=(2/\sqrt{3})\,K_8;\quad Q=(1/\sqrt{3})\,K_8+K_3$$

следует, что кварки имеют заряды 2/3, —1/3, —1/3 и гиперзаряды 1/3, 1/3, —2/3 соответственно.

Система кварка и антикварка в S-состоянии представляет собой простейшие из составных систем, которые нас интересуют. По отношению к группе $SU(3)$ унитарной симметрии они могут быть компонентами октета или синглетом, а их спин равен 0 или 1. Таким образом, имеем октет со спином и четностью 1^-, синглет со спином и четностью 1^-, октет со спином и четностью 0^-, синглет со спином и четностью 0^-, причем три первых мультиплета группы $SU(3)$ входят в 35-плет группы $SU(6)$.

Другими простыми составными системами с отличным от нуля барионным числом является система трех кварков в S-состоянии с полностью симметричными волновыми функциями. Они образуют десимет со спином и четностью $3/2^+$ и октет со спином и четностью $1/2^+$ и поэтому могут быть отождествлены с адронами в 56^+-плете группы $SU(6)$. Так как последние обладают барионным числом 1, то барионное число кварка равно 1/3.

Заметим, что предположение о существовании систем кварков в S-состоянии с полностью симметричными волновыми функциями противоречит теореме о связи между спином и статистикой в локальной теории поля, согласно которой все частицы с полуцелыми спинами подчиняются статистике Ферми — Дирака.

Многие предсказания теории симметрии $SU(6)$ можно заново получить в модели кварков. В частности, если предположить, что магнитные моменты адронов складываются из магнитных моментов кварков и что магнитные моменты кварков пропорциональны их зарядам, то для отношения магнитных моментов нуклонов получим такое же значение, как и в симметрии $SU(6)$:

$$\mu_p/\mu_n = -3/2.$$

Наряду с результатами, полученными ранее в симметрии $SU(6)$, в составной модели кварков имеют место и другие соотношения, вытекающие из гипотез относительно природы взаимодействия кварков, обусловливающего процессы рассеяния адронов. Одной из таких гипотез является предположение об аддитивности амплитуд, согласно которому амплитуды рассеяния адронов складываются из парных амплитуд рассеяния отдельных кварков и антикварков. Вместе с инвариантностью относительно группы унитарной симметрии $SU(3)$ гипотеза об аддитивности приводит к некоторым новым соотношениям. В частности, для полных сечений имеем следующие формулы:

$$\sigma_{tot}(\pi^+p) - \sigma_{tot}(\pi^-p) = \sigma_{tot}(K^0p) - \sigma_{tot}(K^0p) = \\ = \frac{1}{2}[\sigma_{tot}(K^+p) - \sigma_{tot}(K^-p)];$$

$$\sigma_{tot}(K^+p) + \sigma_{tot}(K^-p) = \\ = \frac{1}{2}[\sigma_{tot}(K^0p) + \sigma_{tot}(\widetilde{K}^0p) + \sigma_{tot}(\pi^+p) + \sigma_{tot}(\pi^-p)];$$

$$\sigma_{tot}(pp) + \sigma_{tot}(\widetilde{p}p) = 2[\sigma_{tot}(\pi^+p) + \sigma_{tot}(\pi^-p)] - \\ - \frac{1}{2}[\sigma_{tot}(K^+p) + \sigma_{tot}(K^-p)];$$

$$\sigma_{tot}(\widetilde{p}p) - \sigma_{tot}(\widetilde{p}n) = \sigma_{tot}(K^-p) - \sigma_{tot}(K^-n) \text{ и т. д.}$$

Первое соотношение имеется также в схеме симметрии $SU(6)$.

Интересно отметить, что в отличие от соотношений, полученных при помощи групповых методов, последние две формулы связывают сечения барион-барионного взаимодействия с сечениями мезон-барионного взаимодействия. Если пренебречь амплитудами перезарядки по сравнению с амплитудами упругого рассеяния, то возникают весьма простые соотношения вида

$$\sigma_{tot}(pp) = \sigma_{tot}(\widetilde{p}p) = \frac{3}{2}\sigma_{tot}(\pi^+p) = \frac{3}{2}\sigma_{tot}(\pi^-p) = \ldots$$

Многие предсказания модели кварков хорошо согласуются с экспериментальными данными. Это показывает, что, несмотря на ее наивность, составная модель кварков частично отражает динамику сильных взаимодействий и структуру адронов. Для понимания этой динамики, для раскрытия структуры адронов изучение соотношений между различными измеряемыми величинами и взаимосвязей между различными физическими процессами представляет собой пока единственный метод.

2. АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД В ТЕОРИИ СИЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

В первой части обзора исследованы соотношения между физическими величинами, вытекающие из свойств симметрии сильных взаимодействий. Каждое из таких соотношений содержит либо определенную характеристику различных частиц (массовые формулы, соотношения между магнитными моментами и др.), либо определенную физическую величину для различных частиц при одних и тех же кинематических переменных (амплитуды рассеяния или форм-факторы различных частиц при заданных значениях энергии и передачи импульса, например). При этом были использованы в основном лишь алгебраические методы. В этой части обзора изложены результаты работ другого направления. Изучены различные взаимосвязи между явлениями или процессами, которые на первый взгляд, казалось бы, ничем не связаны. Такие взаимосвязи затрагивают пространственно-временные характеристики физических процессов. Они содержатся в аналитических свойствах амплитуд рассеяния по кинематическим переменным (энергия, передача импульса, угловой момент и др.), и поэтому представляют собой предмет изучения в аналитическом подходе.

Аналитические свойства амплитуд рассеяния

Рассмотрим прежде всего общие аналитические свойства амплитуд рассеяния по переменным рассеяния и их физические следствия. Увидим, что существуют весьма богатые взаимосвязи между различными явлениями, вытекающие лишь из основных принципов квантовой теории поля и, в первую очередь, из принципа микропричинности. Другими словами, в основе квантовой теории поля уже неявно заложены весьма глубокие физические взаимосвязи между процессами и явлениями. Установление таких взаимосвязей и соотношений было плодотворным результатом исследований аналитических свойств амплитуд рассеяния.

Первый важный шаг на этом пути был сделан Н. Н. Боголюбовым. На основе глубокого анализа принципа микропричинности для S-матрицы он показал, что посредством аналитического продолжения по энергетической переменной амплитуды рассеяния частицы и античастицы оказываются связанными между собой. Перейдем к изучению этой взаимосвязи, для чего рассмотрим два процесса:

$$\pi^+(p) + p(q) \to \pi^+(p') + p(q'); \qquad \text{(I)}$$

$$\pi^-(-p') + p(q) \to \pi^-(-p) + p(q'). \qquad \text{(II)}$$

Ради простоты предположим, что спин нуклона также равен нулю. Амплитуды обозначим $T^I(s, t)$ и $T^{II}(s, t)$, где s — квадрат полной энергии в с. ц. м., а t — передача импульса. Для обоих процессов

$$t = -(p-p')^2 = -(q-q')^2,$$

а для первого процесса

$$s = -(p+q)^2 = -(p'+q')^2.$$

Введем также передачу импульса между начальным протоном и конечным π^+-мезоном в первом процессе:

$$u = -(q-p')^2 = -(p-q')^2.$$

Легко проверить, что

$$s + t + u = 2M^2 + 2\mu^2,$$

где M и μ — массы нуклона и пиона соответственно. Очевидно, что при переходе от процесса (I) (II) переменная t остается неизменной, а s и u меняются местами.

Связь между процессами (I) к (II) заключается в следующем. При некоторых фиксированных значениях t существует функция $F_t(s)$, аналитическая в комплексной плоскости s с разрезами и полюсом на вещественной оси. Правый разрез определяется условием

$$s \geqslant (M+\mu)^2,$$

а левый

$$u = 2M^2 + 2\mu^2 - s - t \geqslant (M+\mu)^2.$$

На верхнем берегу правого разреза $F_t(s)$ совпадает с амплитудой первого процесса:

$$F_t(s + i0) = T^{\mathrm{I}}(s, t),$$

а на нижнем берегу левого разреза она совпадает с амплитудой второго процесса:

$$F_t(u - i0) = T^{\mathrm{II}}(s, t).$$

Отсюда вытекает соотношение кроссинг-симметрии между этими амплитудами при вещественных значениях s, t, u:

$$T^{\mathrm{II}}(s, t) = T^{\mathrm{I}}(u, t)^*.$$

Это соотношение связывает значения амплитуды одного процесса в его физической области со значениями амплитуды другого процесса вне физической области последнего: когда s пробегает правый разрез, то u принимает значения на левом разрезе. Поэтому соотношение кроссинг-симметрии не имело бы никакого смысла, если бы не было известно, что существует метод продолжения амплитуды из физической области на левый разрез. Н. Н. Боголюбов строго доказал аналитичность амплитуды в комплексной плоскости s с разрезами и тем самым установил, что амплитуды процессов (I) и (II) являются предельными значениями единой аналитической функции.

Наряду с процессами рассеяния (I) и (II) рассмотрим также процесс аннигиляции

$$\pi^+(p)+\pi^-(-p')=p(q')+\tilde{p}(-q). \qquad \text{(III)}$$

При переходе из процесса (I) к процессу (III) переменная u остается неизменной, а s и t меняются местами, так как в процессе (III) t равна квадрату полной энергии в с. ц. м., а s является передачей импульса между π^+-мезоном с импульсом p и антипротоном с импульсом $-q$. Соотношение кроссинг-симметрии, если оно имеет смысл, теперь связывает процессы упругого рассеяния и аннигиляции. Такая связь осуществляется посредством аналитического продолжения по t (или по s) при фиксированной переменной u.

Таким образом, между любой парой из трех процессов (I), (II) и (III) существует взаимосвязь, которая содержится в аналитических свойствах амплитуд по соответствующей переменной. Обобщая эти результаты, Мандельстам предположил, что существует единая аналитическая функция $T(s, t, u)$, описывающая одновременно все три процесса (I), (II) и (III). Данные процессы при этом рассматриваются как три различных канала одного и того же процесса взаимодействия и называются s-каналом, u-каналом или t-каналом соответственно. По предположению Мандельстама, функция $T(s, t, u)$ аналитична по любой паре независимых переменных: (s, t), (s, u) или (t, u) и удовлетворяет двойному дисперсионному соотношению. В физических областях каждого из каналов она совпадает с амплитудой соответствующего процесса. Такая идея о единой аналитической функции, описывающей одновременно различные процессы, которые на первый взгляд, казалось бы, ничем не связаны, лежит в основе динамической теории сильных взаимодействий.

Глубокая связь между различными процессами, содержащаяся в аналитических свойствах амплитуд, влечет за собой ряд функциональных соотношений между наблюдаемыми физическими величинами. В качестве первого примера таких соотношений напомним прежде всего дисперсионные соотношения для амплитуд упругого пион-нуклонного рассеяния вперед, рассматриваемых как функции от энергии пиона в лабораторной системе ω или от его импульса $k=\sqrt{\omega^2-\mu^2}$ в той же системе. Имеем

$$\frac{1}{2}[D^{\mathrm{I}}(k)+D^{\mathrm{II}}(k)]-\frac{1}{2}[D^{\mathrm{I}}(0)+D^{\mathrm{II}}(0)]=$$

$$=8\pi f^2\frac{k^2}{\omega^2-(\mu^2/2M)^2}+\frac{k^2}{4\pi}\int\limits_0^\infty\frac{dk'}{k'}\cdot\frac{A^{\mathrm{I}}(k')+A^{\mathrm{II}}(k')}{k'^2-k^2};$$

$$\frac{1}{2}[D^{\mathrm{I}}(k)-D^{\mathrm{II}}(k)]-\frac{\omega}{\mu}\cdot\frac{1}{2}[D^{\mathrm{I}}(0)-D^{\mathrm{II}}(0)]=$$

$$=8\pi f^2\frac{k^2}{\omega^2-(\mu^2/2M)^2}\cdot\frac{2M_\omega}{\mu^2}+\frac{k^2\omega}{4\pi}\int\limits_0^\infty\frac{dk'}{k'\omega}\frac{A^{\mathrm{I}}(k')-A^{\mathrm{II}}(k')}{k'^2-k^2}.$$

Здесь $D^J(k)$ и $A^J(k)$ обозначают реальные и мнимые части соответствующих амплитуд $T^J(s, 0)$, а константа f связана с константой псевдоскалярной связи пиона с нуклоном соотношением

$$f=(\mu/2M)\,g.$$

Дисперсионные соотношения представляют собой функциональные соотношения, связывающие значения реальных частей амплитуд при определенных энергиях с линейными функционалами их мнимых частей, а именно с интегралами последних по всему интервалу изменения энергии. Известно, что из условия унитарности S-матрицы вытекает оптическая теорема

$$\sigma^J_{tot}(\omega)=\frac{1}{2Mk}\operatorname{Im}T^J(s, 0)=\frac{1}{2Mk}A^J(k),$$

связывающая мнимую часть амплитуды упругого рассеяния с полным сечением взаимодействия соответствующих частиц. Она также является соотношением между двумя различными физическими величинами. Используя ее, можно теперь переписать дисперсионные соотношения в другом виде:

$$D^{\mathrm{I}}(k)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\omega}{\mu}\right)D^{\mathrm{I}}(0)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\omega}{\mu}\right)D^{\mathrm{II}}(0)+$$

$$+\frac{8\pi f^2}{\mu^2}\cdot\frac{k^2}{\omega-\mu^2/2M}+\frac{k^2M}{2\pi}\int\limits_\mu^\infty\frac{d\omega'}{k'}\left[\frac{\sigma^{\mathrm{I}}(\omega')}{\omega'-\omega}+\frac{\sigma^{\mathrm{II}}(\omega')}{\omega'+\omega}\right];$$

$$D^{\mathrm{II}}(k)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\omega}{\mu}\right)D^{\mathrm{II}}(0)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\omega}{\omega}\right)D^{\mathrm{I}}(0)-$$

$$-\frac{8\pi f^2}{\mu^2}\cdot\frac{k^2}{\omega+\mu^2/2M}+\frac{k^2M}{2\pi}\int\limits_\mu^\infty\frac{d\omega'}{k'}\left[\frac{\sigma^{\mathrm{II}}(\omega')}{\omega'-\omega}+\frac{\sigma^{\mathrm{I}}(\omega')}{\omega'+\omega}\right].$$

Другим примером функциональных соотношений между различными физическими величинами являются дисперсионные правила сумм, вытекающие из аналитичности амплитуд в том случае, когда они убывают на бесконечности достаточно быстро.

Допустим, что некоторая амплитуда $F(\omega)$ аналитична в комплексной плоскости с полюсами и разрезами на вещественной оси и что при $\omega \to \infty$ она убывает быстрее $\omega^{-1-\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$. Тогда имеет место соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} F(\omega)\, d\omega = 0.$$

Подобными рассуждениями легко доказать следующее правило сумм Герасимова:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} [\sigma_{tot}^{P}(\omega) - \sigma_{tot}^{A}(\omega)] = 2\pi^2\alpha \left(\frac{\varkappa}{M}\right)^2,$$

связывающее полные сечения поглощения фотона нуклоном при параллельных спинах σ_{tot}^{P} и антипараллельных спинах σ_{tot}^{A} с аномальным магнитным моментом нуклона $\varkappa$.

Наряду с дисперсионными соотношениями и дисперсионными правилами сумм аналитические свойства амплитуд приводят еще ко многим другим соотношениям между физическими величинами. Эти соотношения рассмотрены ниже.

Эффективный радиус сильных взаимодействий

Здесь изучим физические взаимосвязи между процессами рассеяния и аннигиляции, например:

$$\pi^+ + p \to \pi^+ + p \tag{I}$$

и

$$p + \tilde{p} \to \pi^+ + \pi^-. \tag{III}$$

Покажем, в частности, что из аналитичности по передаче импульса t вытекает короткодействующий характер сильных взаимодействий и, следовательно, имеются некоторые ограничения на поведение сечений упругих и неупругих процессов при высоких энергиях. Кроме того, увидим, что наименьшая эффективная масса промежуточных состояний в аннигиляционном канале определяет верхнюю грань эффективного радиуса взаимодействия в канале рассеяния.

Рассмотрим парциальное разложение амплитуды упругого рассеяния бесспиновых частиц

$$T(s,t) = 8\pi \frac{\sqrt{s}}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l(s) P_l\left(1+\frac{t}{2k^2}\right),$$

где k — 3-импульс частицы в с. ц. м. Из аналитичности амплитуды по t в круге $|t| \approx t_0$, где t_0 — некоторая константа, не зависящая от s, следует, что парциальные амплитуды $f_l(s)$ убывают экспоненциально с ростом l и при физических значениях передачи импульса

$$t = -2k^2(1-\cos\theta), \quad -1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1,$$

ряд по полиномам Лежандра можно оборвать при значении $l = L(s)$, где

$$L(s) \leqslant (1/2)\sqrt{s/t_0}\ln s, \quad s \to \infty.$$

Это означает, что вклад в сечение рассеяния дают лишь парциальные волны с угловыми моментами, не превосходящими некоторое максимальное значение $L(s)$. Отношение максимального момента $L(s)$ к импульсу k можно принять за меру масштаба области пространства, в которой происходит взаимодействие, что приводит к введению определения эффективного радиуса взаимодействия

$$R(s) = L(s)/k.$$

Для этого эффективного радиуса имеем следующий верхний предел:

$$R(s) \leqslant \left(1/\sqrt{t_0}\right)\ln s, \quad s \to \infty.$$

Итак, в силу аналитичности амплитуды по передаче импульса t сильные взаимодействия, как и следовало ожидать, оказываются короткодействующими, что приводит к некоторым ограничениям на поведение сечений при высоких энергиях, которые можно проверить на опыте. Действительно, поскольку бесконечный ряд, определяющий амплитуду $T(s, t)$, можно заменить конечной суммой от $l = 0$ до $l = L(s)$:

$$T(s, t) = 8\pi \frac{\sqrt{s}}{k} \sum_{l=0}^{L(s)} (2l+1) f_l(s) P_l\left(1+\frac{t}{2k^2}\right),$$

а все парциальные амплитуды $f_l(s)$ в силу унитарности по модулю не превосходят единицы, то имеем следующее неравенство при всех физических значениях передачи импульса t:

$$|T(s, t)| \leqslant 16\pi k^2 R^2(s).$$

Отсюда вытекают верхние оценки дифференциального сечения упругого рассеяния и полного сечения взаимодействия:

$$d\sigma_{el}/dt = (1/64\pi s k^2)\,|T(s, t)|^2 \leqslant \pi R^4(s);$$

$$\sigma_{tot} \leqslant \left(1/2k\sqrt{s}\right) \operatorname{Im} T(s, 0) \leqslant 4\pi R^2(s).$$

Подставляя в правые части этих соотношений вместо $R(s)$ его верхний предел $(1/\sqrt{t_0}) \ln(s/s_0)$, приходим к теореме Фруассара:

$$d\sigma_{el}/dt \leqslant (\pi/t_0^2)\,[\ln(s/s_0)]^4$$

$$\sigma_{tot} \leqslant (4\pi/t_0)\,[\ln(s/s_0)]^2, \quad s \to \infty.$$

Заметим, что значение t_0 является началом правого разреза в комплексной плоскости t, т. е. ближайшей особенностью по переменной t. Оно равно квадрату наименьшей эффективной массы многочастичных состояний в аннигиляционном канале

$$p + \tilde{p} \to \pi^+ + \pi^-.$$

Поскольку среди таких состояний наименьшую массу имеет состояние двух пионов, то $t_0 = 4\mu^2$. Для верхних граней сечений имеем

$$d\sigma_{el}/dt \leqslant (\pi/16\mu^4)\,[\ln s/s_0]^4$$

$$\sigma_{tot} \leqslant (\pi/\mu^2)\,[\ln s/s_0]^2, \quad s \to \infty.$$

Существование конечного эффективного радиуса взаимодействия приводит также к некоторому ограничению на сужение дифракционного конуса упругого рассеяния вперед. Заметим прежде всего, что среднюю ширину дифракционного конуса можно определить формулой

$$W = \sigma_{el}/(d\sigma_{el}/dt)\,|_{t=0},$$

где σ_{el} — полное сечение упругого рассеяния. Применяя неравенство Буняковского — Шварца к конечной сумме, приближенно определяющей $T(s, t)$:

$$T(s, t) \approx 8\pi \frac{\sqrt{s}}{k} \sum_{l=0}^{L(s)} (2l+1)\, f_l(s)\, P_l\left(1 + \frac{t}{2k^2}\right),$$

можно показать, что

$$(d\sigma_{el}/dt)\,|_{t=0} \leqslant (1/4)\,\sigma_{el} R^2(s).$$

Это соотношение представляет собой ограничение на убывание ширины дифракционного конуса при увеличении s:

$$(1/4)\,W \geqslant 1/R^2(s) \geqslant 4\mu^2/\ln^2(s/s_0).$$

С другой стороны, оно позволяет извлечь ценную информацию о радиусе взаимодействия из экспериментальных данных по сечению упругого рассеяния.

Понятие эффективного радиуса взаимодействия легко обобщить на случай неупругих процессов, как двухчастичных, так и многочастичных. Действительно, в качестве определения эффективного радиуса некоторого неупругого процесса можно взять отношение

$$R_{inel}(s) = L_{inel}(s)/k,$$

где $L_{inel}(s)$ — максимальное значение полного углового момента состояний, дающих вклад в сечение при высоких энергиях; k — 3-импульс начальных частиц в с. ц. м. При этом введенный ранее эффективный радиус взаимодействия будем называть эффективным радиусом упругого рассеяния R_{el}.

Например, пусть $d\sigma_{inel}/dt$ — дифференциальное сечение двухчастичного неупругого процесса

$$\pi^- + p \to K^0 + \lambda,$$

где t — передача импульса между некоторыми частицами (скажем, π^- и K^0). Обозначим далее $d\sigma^0_{inel}/d\cos\theta$ дифференциальное сечение процесса множественного рождения с вылетом заданной частицы c под данным углом θ, проинтегрированное по всем остальным переменным. Это означает, что в таком процессе идентифицируется только одна частица c в конечном состоянии, а все остальные конечные частицы произвольны (инклюзивный процесс). Примером инклюзивного процесса является $\pi^+ + p \to K^+ + \ldots$. Из экспериментальных данных по сечениям $d\sigma_{inel}/dt$ и $d\sigma_{inel}/d\cos\theta$ можно получить ценную информацию об эффективных радиусах $R_{inel}(s)$ и $R^c_{inel}(s)$ соответствующих процессов

$$[R_{inel}(s)]^2 \geqslant (4/\sigma_{inel})\,(d\sigma_{inel}/dt)\,|_{t=0};$$

$$[R^c_{inel}(s)]^2 \geqslant (4/\sigma^c_{inel})\,(d\sigma^c_{inel}/2k^2 d\cos\theta)\,|_{\theta=0},$$

где σ_{inel} и σ^c_{inel} — полные сечения рассматриваемых неупругих процессов. Последнее соотношение показывает, что инклюзивные эксперименты позволяют оценить нижние грани эффективных радиусов неупругих взаимодействий адронов.

Упругое рассеяние и различные неупругие процессы происходят на различных расстояниях. Другими словами, эффективные радиусы упругого рассеяния и различных неупругих процессов могут быть разными. Между ними, однако, существует некоторое соотношение, вытекающее из условия унитарности S-матрицы, рассматриваемого в s-канале.

В качестве иллюстрации рассмотрим некоторый неупругий двухчастичный процесс

$$\pi^- + p \to K^0 + \lambda.$$

Допустим для простоты, что все частицы имеют спин, равный нулю, и обозначим $g_l(s)$ парциальные амплитуды данного процесса. Наряду с ним рассмотрим соответствующий процесс упругого рассеяния

$$\pi^- + p \to \pi^- + p$$

с парциальными амплитудами $f_l(s)$. Первый (неупругий) процесс внесет вклад в мнимую часть амплитуды второго (упругого), и условие унитарности даст

$$\operatorname{Im} f_l(s) = |f_l(s)|^2 + |g_l(s)|^2 + \ldots$$

Из экспоненциального убывания $\operatorname{Im} f_l(s)$ и последнего соотношения следует, что $g_l(s)$ также убывает экспоненциально при $l \to \infty$, и в парциальном разложении амплитуды данного неупругого процесса можно также ограничиться лишь вкладом конечного числа волн с моментами $l \approx L_{inel}(s)$, причем $L_{inel}(s) \approx L(s)$. Иначе говоря, $R_{inel}(s) \approx R_{el}(s)$. Аналогичные рассуждения, применяемые к многочастичным процессам, приводят к такому же результату

$$R^c_{inel}(s) \leqslant R_{el}(s).$$

Таким образом, на основе условия унитарности было показано, что эффективные радиусы неупругих процессов не могут превзойти эффективный радиус упругого рассеяния. Это заключение имеет следующий физический смысл. Согласно условию унитарности, амплитуды неупругих процессов дают вклад в мнимую часть амплитуды упругого рассеяния. Поэтому неупругие процессы обязательно приводят к рассеянию. Упругое рассеяние непременно происходит на расстояниях, на которых идут неупругие процессы. Может случиться, однако, что на достаточно больших расстояниях происходит только упругое рассеяние. В таком случае эффективный радиус упругого рассеяния больше эффективных радиусов неупругих процессов.

Установленное соотношение между R_{inel} и R_{el} можно понять также с другой точки зрения, если обратить внимание на физическую взаимосвязь между массами промежуточных состояний в t-канале и эффективными радиусами взаимодействия в s-канале. Действительно, для многих неупругих процессов t-канал не имеет промежуточных состояний, состоящих из двух пионов, и по крайней мере одна из частиц в этих промежуточных состояниях должна быть тяжелее пиона. Например, для процесса

$$\pi^- + p \to K^0 + \lambda$$

легчайшим из промежуточных состояний t-канала

$$\pi^- + \widetilde{K}^0 \to \widetilde{p} + \lambda$$

является состояние системы $\pi\widetilde{K}$. Иначе говоря, упругое рассеяние может происходить благодаря обмену двумя пионами, а многие неупругие процессы идут только в результате обмена более тяжелой системой. Так как эффективный радиус процесса взаимодействия обратно пропорционален эффективной массе обменной системы, то отсюда получаем снова указанное соотношение между радиусами упругого рассеяния и неупругих процессов.

Заметим, что упругое рассеяние назад также можно рассматривать как некоторый своеобразный неупругий процесс и к нему применимы все предыдущие рассуждения. Если придерживаться данных определений передач импульса t и u, то в процессе рассеяния назад передача импульса u фиксирована. Теперь u-канал оказывает влияние на поведение амплитуды. Обозначим u_0 ближайшую особенность в u-плоскости, а R_π — эффективный радиус упругого рассеяния назад. Тогда

$$R_\pi(s) \leqslant \left(1/\sqrt{u_0}\right) \ln s, \quad s \to \infty.$$

Существование конечного радиуса $R_\pi(s)$ приводит к верхнему ограничению на поведение дифференциального сечения при фиксированных u:

$$d\sigma_{el}/du \leqslant \pi R_\pi^4(s).$$

Поскольку $u_0 = (M + \mu)^2$, то из приведенных выражений получим

$$d\sigma_{el}/du \leqslant [\pi/(M+\mu)^4] \ln^4 s, \quad s \to \infty.$$

Эта верхняя грань на три порядка меньше верхней грани для сечения упругого рассеяния вперед. Заметим, что информацию о R_π также можно извлечь из экспериментальных данных по сечению рассеяния назад:

$$R_\pi^2(s) \geqslant \frac{1}{\sigma_{el}^\pi} \cdot \left.\frac{d\sigma_{el}}{du}\right|_{u=0},$$

где σ_{el}^π — полное сечение упругого рассеяния в заднюю полусферу.

Подведем теперь итоги настоящего подраздела. Было показано, что аналитичность амплитуды по передаче импульса приводит к короткодействующему характеру сильных взаимодействий. Была изучена физическая взаимосвязь между эффективным радиусом взаимодействия в s-канале и ближайшей особенностью в t-плоскости. Последняя определяется наименьшей эффективной массой многочастичных промежуточных состояний в t-канале. Эта взаимосвязь представляет собой основу наглядной картины, в которой все процессы взаимодействия рассматриваются как результаты обмена системами частиц, причем чем легче обменные частицы, тем больше эффективный радиус взаимодействия в соответствующем процессе. Такая связь рассматривается здесь в рамках релятивистской теории без привлечения теории возмущений. Полученные результаты показывают, что аналитический метод — эффективный аппарат для изучения глубоких взаимосвязей между физическими явлениями.

Асимптотические теоремы

Вернемся теперь к упомянутой выше взаимосвязи между процессами рассеяния частицы и античастицы на примере процессов:

$$\pi^+ + p \to \pi^+ + p; \tag{I}$$

$$\pi^- + p \to \pi^- + p. \tag{II}$$

Она осуществляется аналитическим продолжением амплитуд этих процессов $T^I(s, t)$ и $T^{II}(s, t)$ в комплексную плоскость s и содержится в дисперсионных соотношениях, дисперсионных правилах сумм и пр. При высоких энергиях эта взаимосвязь приводит к весьма простым соотношениям между сечениями взаимодействия частицы и античастицы.

Для установления асимптотических соотношений наряду с аналитическими свойствами амплитуд $T^J(s, t)$ по s воспользуемся также короткодействующим характером сильных взаимодействий. Напомним, что в силу последнего условия имеются ограничения на поведение амплитуды и ширины дифракционного конуса, а именно:

$$|T^J(s, t)| \leqslant 16\pi k^2 R^2(s);$$

$$1/4W \geqslant 1/R^2(s);$$

$$R(s) \leqslant (1/1\mu)\ln s, \quad s \to \infty.$$

Учитывая эти ограничения, можно доказать ряд утверждений при помощи дисперсионных соотношений для амплитуд рассеяния вперед $T^J(s, 0)$.

Утверждение 1. Если дифференциальные сечения упругого рассеяния частицы и античастицы вперед ограничены или растут медленнее $\ln^2 s$:

$$\frac{1}{\ln^2 s}\cdot\frac{d\sigma^J}{dt}\bigg|_{t=0} \to 0, \quad s \to \infty.$$

а разность полных сечений взаимодействия имеет предел при $s \to \infty$, то этот предел равен нулю:

$$\sigma^{\mathrm{I}}_{tot}(s) - \sigma^{\mathrm{II}}_{tot}(s) \to 0.$$

Здесь не предполагается, что полные сечения взаимодействия стремятся к определенным пределам (они могут осциллировать, например). Если же они имеют пределы (ненулевые), то эти пределы должны совпадать друг с другом. Кроме того, если эффективный радиус взаимодействия $R(s)$ не растет с увеличением s:

$$R(s) \leqslant \text{const},$$

то в силу приведенного выше ограничения на рост сечений

$$d\sigma_{el}/dt \leqslant \pi R^4(s);$$

дифференциальные сечения $d\sigma^J/dt$ ограничены и условие теоремы заведомо выполняется. Итак, как частный случай сформулированного выше утверждения имеем следующую теорему.

Утверждение 2 (теорема Померанчука). Если дифференциальные сечения упругого рассеяния вперед ограничены или, в частности, если эффективный радиус взаимодействия не растет при $s \to \infty$, а полные сечения стремятся к определенным пределам:

$$\sigma^J_{tot}(s) \to \sigma^J_{tot}(\infty),$$

то эти пределы равны друг другу:

$$\sigma^{\mathrm{I}}_{tot}(\infty) = \sigma^{\mathrm{II}}_{tot}(\infty).$$

Поскольку из общих постулатов теории не следует, что $R(s)$ ограничено, то последнее асимптотическое равенство может нарушаться без нарушения основных принципов теории поля. Поэтому было бы весьма желательным изучить соотношения, которые справедливы даже в том случае, когда $R(s)$ растет. Утверждение 1 представляет собой пример таких соотношений. Другие примеры дают пять приведенных ниже теорем.

Утверждение 3. Если одно из полных сечений взаимодействия с ростом s стремится к нулю, то другое не может расти или стремиться к константе, отличной от нуля.

Утверждение 4. Если одно из полных сечений взаимодействия с ростом s стремится к бесконечности, то другое не может стремиться к конечному пределу. Более того, если другое полное сечение также стремится к бесконечности с увеличением s, а их отношение стремится к пределу, то этот предел должен быть равен единице.

Две только что сформулированные теоремы касаются лишь поведения полных сечений взаимодействий. Существуют также соотношения между поведением полных сечений взаимодействия и полных сечений упругого рассеяния.

Утверждение 5. Если разность полных сечений взаимодействия стремится к ненулевому пределу при $s \to \infty$, то оба полных сечения упругого рассеяния должны не убывать. Если же хоть одно из полных сечений упругого рассеяния убывает при $s \to \infty$, то разность полных сечений взаимодействия должна стремиться к нулю.

Мы сформулировали соотношения между полными сечениями. Для дифференциальных сечений упругого рассеяния имеет место следующая теорема.

Утверждение 6. При всех значениях передачи импульса, убывающих с ростом s как $(\ln s)^2$,

$$t \leqslant \frac{\text{const}}{(\ln s)^2}$$

имеет место асимптотическое равенство дифференциальных сечений упругого рассеяния частицы и античастицы:

$$\frac{d\sigma^{\mathrm{I}}}{dt} \Big/ \frac{d\sigma^{\mathrm{II}}}{dt} \to 1, \quad s \to \infty.$$

В частности, отношение дифференциальных сечений упругого рассеяния вперед должно стремиться к единице.

Как было отмечено, если эффективный радиус взаимодействия растет, то полные сечения взаимодействия могут стремиться к различным конечным пределам. Между этими пределами и их разностью, однако, существует некоторое соотношение. Приведем его.

Утверждение 7. Если полные сечения взаимодействия частицы и античастицы стремятся к конечным пределам, то эти пределы должны удовлетворять неравенству

$$|\sigma_{tot}^{\mathrm{I}}(\infty) - \sigma_{tot}^{\mathrm{II}}(\infty)| \leqslant \frac{2\pi^{3/2}}{\mu} \min_{J=\mathrm{I},\,\mathrm{II}} \sqrt{\sigma_{tot}^{J}}.$$

Это означает грубо, что если одно из полных сечений стремится к малому пределу, то предел другого сечения не может быть слишком большим.

Допустим теперь, что при фиксированных значениях передачи импульса t амплитуды не осциллируют с ростом s, а имеют достаточно гладкое поведение, например:

$$T(s, t) \approx \text{const}\, s^{\alpha(t)} (\ln s)^{\beta(t)} \ldots,$$

где $\alpha(t)$, $\beta(t)$ — вещественные функции от t. В таком случае асимптотическое равенство дифференциальных сечений упругого рассеяния справедливо при фиксированных t_u, кроме того, имеют место также соотношения между поляризациями, параметрами асимметрии и т. д.

Утверждение 8. Если амплитуды при фиксированных значениях t имеют гладкое поведение и не осциллируют с ростом s, то справедливо асимптотическое равенство дифференциальных сечений:

$$\frac{d\sigma^{\mathrm{I}}}{dt} \Big/ \frac{d\sigma^{\mathrm{II}}}{dt} \to 1, \quad s \to \infty.$$

Кроме того, если поляризации конечных частиц в процессах упругого рассеяния частицы и античастицы стремятся к конечным пределам, то эти пределы равны по величине и обратны по знаку. Для параметров асимметрии имеет место аналогичное заключение.

Заметим, что утверждение 8 можно применить также ко всем двухчастичным перекрестным процессам, например:

$$\pi^- + p \to K^0 + \lambda$$

и

$$\widetilde{K}^0 + p \to \pi^+ + \lambda.$$

Из него следует, в частности, что во всех процессах с кроссинг-симметричными или кроссинг-антисимметричными амплитудами поляризации параметры асимметрии должны стремиться к нулю при высоких энергиях. Примерами таких процессов являются следующие:

$$\pi^- + p \to \pi^0 + n;$$

$$\gamma + p \to \gamma + p;$$

$$K_L^0 + p \to K_{L,\,S}^0 + p \quad \text{и т. д.}$$

Теперь изучим более подробно взаимосвязь между реальными и мнимыми частями амплитуд последних процессов. Она представляет собой сложную функциональную связь, выражаемую в виде дисперсионных соотношений, и была рассмотрена уже ранее. Однако для процессов с кроссинг-четными или кроссинг-нечетными амплитудами эта связь при больших энергиях сводится к простым соотношениям.

Утверждение 9. Если кроссинг-четная $T^{(+)}(s, t)$ или кроссинг-нечетная $T^{(-)}(s, t)$ амплитуда имеет асимптотическое поведение

$$T^{(\pm)}(s, t) \approx \text{const}\, s^{\alpha(t)},$$

то для отношения реальной и мнимой частей справедливо равенство

$$\operatorname{Re} T^{(+)}/\operatorname{Im} T^{(+)} \approx \operatorname{ctg}(\pi\alpha/2);$$

$$\operatorname{Re} T^{-}/\operatorname{Im} T^{(-)} \approx \operatorname{tg}(\pi\alpha/2).$$

В частности, если $\alpha = 1$, то амплитуда $T^{(+)}$ чисто мнимая, а в амплитуде $T^{(-)}$ можно пренебречь мнимой частью.

В заключение можно сказать, что исходя из общих аналитических свойств амплитуд, были установлены соотношения между сечениями взаимодействия частицы и античастицы. Они выражают взаимосвязи между соответствующими физическими процессами, лежащие в самой основе квантовой теории поля.

Метод комплексного момента

При изучении физической взаимосвязи, обусловливаемой аналитическими свойствами амплитуды по передаче импульса t мы пришли к наглядной картине о процессах рассеяния как результате обмена системами частиц, присутствующих в промежуточных состояниях канала аннигиляции. При этом вклад отдельных систем обменных частиц в амплитуду рассеяния определяется из дисперсионных соотношений по t. Если обменная система состоит лишь из одной частицы с массой m и спином I, то соответствующая часть амплитуды рассеяния является полюсным членом, имеющим следующий вид при высоких энергиях:

$$T_{\text{pole}}(s, t) \approx \beta s^J/(t - m^2).$$

Очевидно, что при всех малых значениях передачи импульса, лежащих в физической области процесса рассеяния ($t \leqslant 0$), величина полюсного члена существенно зависит от массы m обменной частицы: чем меньше m, тем больше будет T_{pole}.

Аналогичная ситуация имеет место и в случае обмена многочастичными системами, как это следует из дисперсионных соотношений по t: чем меньше эффективная масса системы частиц в промежуточном состоянии канала аннигиляции, тем ближе к физической области находится соответствующая особенность в t-плоскости и, следовательно, тем больше будет вклад этой обменной системы в дисперсионный интеграл по t. Это наводит на мысль о том, что для определения амплитуды рассеяния при высоких энергиях и малых передачах импульса можно ограничиться лишь небольшим числом диаграмм с обменом легчайшими системами частиц. Например, для пион-нуклонного рассеяния легчайшим из промежуточных состояний в канале аннигиляции является двухпионное состояние и диаграмма с обменом двумя пионами дает большой вклад в амплитуду. С другой стороны, из-за наличия хорошо установленных резонансов в многочисленных системах адронов с малыми значениями эффективной массы, диаграммы с обменом этими системами можно заменить диаграммами с обменом резонансами. В процессе упругого рассеяния пиона на нуклоне вместо обмена двумя пионами можно рассматривать обмен ρ-мезоном, f-мезоном и т. п. В результате получаем амплитуду как сумму полюсных членов:

$$T = \sum_i \beta_i \frac{s_i^J}{t - m_i^2}.$$

Это и есть содержание так называемой модели периферических столкновений с одночастичным обменом. В ней конкретизируется общая взаимосвязь между процессами рассеяния и аннигиляции:

в амплитуду рассеяния при высоких энергиях и малых передачах импульса дают вклад в основном лишь одночастичные или резонансные промежуточные состояния в канале аннигиляции.

Отметим, что если обменная частица имеет спин $I > 1$, то соответствующий полюсный член будет расти быстрее, чем верхняя оценка Фруассара

$$|T(s, t)| \approx \text{const}\, ts (\ln s)^2, \quad s \to \infty,$$

вытекающая из общих аналитических свойств амплитуд и условия унитарности. Поэтому если существуют резонансы с $I > 1$, то нельзя ограничиться лишь конечным числом полюсных членов. Кроме того, амплитуда рассеяния в модели с одночастичным обменом не позволяет объяснить экспериментальные данные по дифракционному рассеянию.

Вместо модели периферических столкновений с одночастичным обменом была предложена теория движущихся полюсов Редже, в которой существенное значение приобретают аналитические свойства парциальных амплитуд по комплексному угловому моменту. В основе этой теории также лежит идея о единой аналитической функции $T(s, t)$, описывающей одновременно три различных процесса, например:

$$\pi^+ + p \to \pi^+ + p; \tag{I}$$

$$\pi^- + p \to \pi^- + p; \tag{II}$$

$$\bar{p} + p \to \pi^+ + \pi^-. \tag{III}$$

Ниже мы увидим, что она свободна от некоторых трудностей модели с одночастичным обменом. Теперь изложим ее содержание.

Амплитуду рассеяния $T(s, t)$ разделим на кроссинг-четную и кроссинг-нечетную части:

$$T(s, t) = T^{(+)}(s, t) + T^{(-)}(s, t);$$
$$T^{(\pm)}(u, t) = \pm T^{(\pm)}(s, t)^*,$$

и рассмотрим их в канале аннигиляции, в котором t — квадрат полной энергии в с. ц. м., а s и u — передачи импульса и зависящие от косинуса угла θ_t между импульсами начальных и конечных частиц. В этом канале $T^{(+)}$ содержит лишь парциальные амплитуды $f_l^{(+)}(t)$ с четными l, а $T^{(-)}$ — парциальные амплитуды $f_l^{-}(t)$ с нечетными l. Из дисперсионных соотношений по s для $T^{(\pm)}(s, t)$ следует, что парциальные амплитуды $f_l^{(\pm)}(t)$, рассматриваемые как функции комплексной переменной l, аналитичны в правой полуплоскости $\text{Re}\, l \geqslant l_{\text{макс}}$, где $l_{\text{макс}}$ определяется числом вычитаний в дисперсионном соотношении по s. Поскольку в этой полуплоскости функции $f_l^{(\pm)}$ экспоненциально убывают при $l \to \infty$, то они однозначно определяются их значениями при целых положительных l. Иначе говоря, парциальные амплитуды, заданные при целых положительных моментах, однозначным образом аналитически продолжаются в правую полуплоскость комплексной переменной l.

Аналогичная ситуация имеет место, конечно, и в случае рассеяния в статическом поле, являющемся суперпозицией потенциалов Юкавы. В последнем случае, однако, больше известно об аналитических свойствах амплитуды в комплексной плоскости l: она аналитична в правой полуплоскости $\operatorname{Re} l \geqslant -1/2$ за исключением движущихся полюсов Редже

$$l_0 = \alpha(E),$$

зависящих от энергии E и возникающих из-за наличия связанных состояний. При этом энергия E_J связанного состояния с полным угловым моментом J определяется условием

$$\alpha(E_J) = J.$$

Обобщение этих результатов на случай релятивистской задачи рассеяния в теории поля привело к интересным результатам.

Действительно, по аналогии со случаем потенциального рассеяния предположим, что наиболее правая особенность парциальной амплитуды в плоскости комплексного момента l представляет собой полюс Редже

$$l_0 = \alpha(t),$$

описывающий связанные состояния или резонансы в t-канале в том смысле, что энергия E_J^2 связанного состояния или резонанса с полным моментом (спином) J определяется уравнением

$$J = \alpha(E_J^2).$$

Тогда, заменяя бесконечную сумму по парциальным волнам контурным интегралом по комплексному моменту l и деформируя контур интегрирования, можно получить для асимптотики амплитуды $T(s, t)$ при фиксированных t и $s \to \infty$ выражение

$$T(s, t) \approx \beta(t) \frac{1 \pm \exp[-i\pi\alpha(t)]}{\sin \pi\alpha(t)} s^{\alpha(t)}.$$

Мы пришли, таким образом, к простой связи между существованием связанных состояний или резонансов в t-канале и асимптотикой амплитуды в s-канале: рассеяние происходит благодаря обмену частицами или резонансами, а характеристики последних определяют асимптотику амплитуды рассеяния.

Каждая функция $\alpha(t)$ описывает семейство частиц и резонансов, массы и спины которых удовлетворяют приведенному выше уравнению

$$J = \alpha(E_J^2).$$

Кривая $\alpha(t)$ по t называется траекторией Редже. Парциальные амплитуды каждого процесса могут иметь несколько полюсов Редже с траекториями $\alpha_i(t)$. Учитывая вклад всех этих полюсов, получим асимптотику вида

$$T(s, t) \approx \sum_i \beta_i(t) \frac{1 \pm \exp[-i\pi\alpha_i(t)]}{\sin \pi\alpha_i(t)} s^{\alpha_i(t)}, \quad s \to \infty.$$

Заметим, что наличие того или иного полюса Редже в амплитуде некоторого процесса зависит от квантовых чисел начального и конечного состояний данного процесса в t-канале: амплитуда может содержать полюс Редже, описывающий семейство частиц и резонансов с заданными зарядом, гиперзарядом, изотопическим спином и т. д., только в том случае, когда соответствующие квантовые числа начального и конечного состояний t-канала процесса имеют такие же значения. Если начальные и конечные состояния t-канала различных процессов таковы, что их амплитуды содержат одни и те же полюса Редже, то они имеют одинаковую асимптотику. Траектория Редже со всеми квантовыми числами вакуума называется вакуумной. Она дает вклад во все процессы упругого рассеяния. Постоянство полных сечений взаимодействия при высоких энергиях означало бы, что для вакуумной траектории

$$\alpha_{(0)} = 1.$$

В каждом члене асимптотического выражения амплитуды содержится множитель вида

$$1 \pm \exp[-i\pi\alpha_i(t)]/\sin \pi\alpha_i(t).$$

Множитель со знаком «+» имеет полюсы при четных значениях $\alpha(t)$, а множитель с обратным знаком обращается в бесконечность лишь при нечетных значениях $\alpha(t)$. В первом случае траектория Редже описывает семейство частиц и резонансов с четными спинами, а во втором — с нечетными спинами. Знак «+» или «—» называется также сигнатурой соответствующей траектории.

Реджевская асимптотика амплитуды не противоречит условию унитарности несмотря на то, что траектория Редже может описывать частицы или резонансы с высшими спинами. Это имеет место благодаря тому, что полюсы Редже являются движущимися. Условие унитарности s-матрицы накладывает лишь некоторое ограничение на траектории $\alpha(t)$. В частности, в силу теоремы Фруассара $\alpha_i(t) \leqslant 1$ для всех физических значений $t \leqslant 0$.

Приведенная выше амплитуда рассеяния бесспиновых частиц с реджевским поведением обладает всеми нужными аналитическими свойствами, если траектория $\alpha(t)$ аналитична в плоскости t с правым разрезом. Для амплитуд рассеяния частиц с высшими спинами или амплитуд двухчастичных процессов, в которых участвуют частицы с высшими спинами и с неравными массами, ситуация иная. Из общих аналитических свойств этих амплитуд следует, что наряду с каждой траекторией $\alpha(t)$ должна существовать серия других так называемых дочерних траекторий, связанных с заданной $\alpha(t)$.

Наряду с полюсами Редже в плоскости комплексного момента l могут существовать и другие особенности, дающие не менее важный вклад, чем полюсы в асимптотику амплитуды. Примером этих особенностей является разрез. В таком случае изучение асимптотики амплитуды рассеяния и ее связи с t-каналом существенно осложняется.

Конечно-энергетические правила сумм и дуальность

Дисперсионные соотношения по s при фиксированном t представляют собой функциональные связи между мнимыми и реальными частями амплитуд, вытекающие из их аналитических свойств. В частном случае, когда амплитуда убывает достаточно быстро на бесконечности, наряду с дисперсионным соотношением имеем также дисперсионное правило сумм

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} T(s, t)\, ds = 0,$$

связывающее поведение амплитуды при низких и высоких энергиях. Обобщим теперь последнее соотношение на случай неубывающих амплитуд.

Ради удобства введем вместо s симметричную переменную $\nu = (s - u)/2$ и рассмотрим кроссинг-четную и кроссинг-нечетную амплитуды как функции от ν и t:

$$T^{(\pm)}(-\nu, t) = \pm T^{(\pm)}(\nu, t)^*.$$

Предположим далее, что начиная с достаточно большого значения N переменной ν амплитуда имеет реджевское поведение:

$$T^{(\pm)}(\nu, t) - \sum_i \beta_i(t) \frac{1 \pm \exp[-i\pi\alpha_i(t)]}{\sin \pi\alpha_i(t)} \nu^{\alpha_i(t)} \approx 0, \quad \nu \geqslant N.$$

Тогда можно применить дисперсионное правило сумм к величине, стоящей в левой части последнего соотношения

$$\int_0^N \left[\operatorname{Im} T^{(-)}(\nu, t) - \operatorname{Im} \sum_i \beta_i(t) \frac{1 - \exp[-i\pi\alpha_i(t)]}{\sin \pi\alpha_i(t)} \nu^{\alpha_i(t)}\right] d\nu = 0.$$

В результате получим конечноэнергетическое правило сумм

$$\int_0^N \operatorname{Im} T^{(-)}(\nu, t)\, d\nu = \sum_i \beta_i(t) \frac{N^{\alpha_i(t)+1}}{\alpha_i(t)+1}.$$

Известно, что в области низких энергий существуют резонансы. Их вклад в амплитуду $T^{(-)}(\nu, t)$ обозначим

$$T^{(-)}_{\text{рез}}(\nu, t) \approx \sum_i \frac{\gamma_j(t)}{\nu - \nu_j}.$$

Они имеют доминирующее значение в кроссинг-нечетных амплитудах, и поэтому конечноэнергетическое правило сумм можно переписать следующим образом:

$$\int_0^N \operatorname{Im} T^{(-)}_{\text{рез}}(\nu, t)\, d\nu = \sum_i \beta_i(t) \frac{N^{\alpha_i(t)+1}}{\alpha_i(i)+1}.$$

В левой части последнего соотношения содержатся характеристики резонансов в низкоэнергетической области данного канала, а в первой части — параметры асимптотики Редже, которые, в свою очередь, определяются характеристиками обменных частиц или резонансов, входящих в промежуточные состояния t-канала. Конечноэнергетические правила сумм, таким образом, представляют собой функциональные соотношения между физическими величинами, характеризующие резонансы и частицы в различных каналах реакции. Например, в амплитуде пион-нуклонного рассеяния при малых энергиях доминируют пион-нуклонные резонансы, а при высоких энергиях существенный вклад дают ρ-траектория, f-траектория, f'-траектория и др. В подобных случаях конечноэнергетические правила сумм связывают характеристики резонансов, которые на первый взгляд, казалось бы, ничем не связаны.

Приведенное соотношение между резонансным и реджевским поведениями амплитуды $T^{(-)}(\nu, t)$ означает, что резонансная амплитуда, усредненная надлежащим образом, при высоких энергиях имеет асимптотику Редже. Иными словами, резонансы при низких энергиях в среднем приводят к асимптотике Редже при высоких энергиях. В этом смысле говорят, что амплитуда $T^{(-)}(\nu, t)$ обладает свойством глобальной дуальности (дуальности в среднем). Дальнейшим обобщением свойства глобальной дуальности является предположение о локальной дуальности: в области низких энергий доминируют резонансы, а при аналитическом продолжении резонансной амплитуды в область высоких энергий получаем асимптотику Редже:

$$T^{(\pm)}_{\text{рез}}(\nu, t) \approx T^{(\pm)}_{\text{Regge}}(\nu, t),$$

т. е.

$$\sum_j \frac{\gamma_j(t)}{\nu-\nu_j} \approx \sum_i \beta_i(t)\frac{1\pm\exp[-i\pi\alpha_i(t)]}{\sin\pi\alpha_i(t)}\nu^{\alpha_i(t)}.$$

Последнее соотношение, очевидно, не может удовлетворяться, если в правой или левой части содержится лишь конечное число членов. Таким образом, в силу дуальности амплитуды число резонансов и число полюсов Редже должны быть бесконечными.

Покажем теперь, что вакуумная траектория не удовлетворяет условию локальной дуальности. Действительно, она дает одинаковый вклад в амплитуды рассеяния частицы и античастицы, например

$$T_{\text{Regge}}(\pi^+\pi^+\to\pi^+\pi^+) \approx T_{\text{Regge}}(\pi^+\pi^-\to\pi^+\pi^-),$$

но резонансы в этих различных процессах при низких энергиях совсем разные: в рассеянии π^+ на π^- имеются резонансы: ρ-мезон, f-мезон и пр., а в амплитуде рассеяния π^+ на π^+ резонансов, по-видимому, не существует. Поэтому предполагают, что вакуумной траектории соответствует фон дифракционного рассеяния и свойством локальной дуальности обладает не сама амплитуда, а лишь ее часть, полученная вычитанием из нее нерезонансного фона дифракционного рассеяния.

Как и конечноэнергетические правила сумм, условие локальной дуальности представляет собой весьма тесную взаимосвязь между полюсами Редже в t-канале и резонансами в s-канале. Если амплитуда рассеяния обладает свойством локальной дуальности, то из информации о резонансах в s-канале, например, можно сделать определенные предсказания относительно траекторий Редже, т. е. резонансов в t-канале. В частности, если в s-канале не существует резонанса, то должно иметь место вырождение для траектории. Например, в асимптотику амплитуды рассеяния π^+-мезона на π^+-мезоне, кроме вакуумной траектории, соответствующей нерезонансному фону дифракционного рассеяния, основной вклад дают ρ- и f-траектории. Поскольку в системе $\pi^+\pi^+$ нет резонансов, то эти полюса Редже должны компенсировать друг друга. Отсюда и вытекает вырождение траекторий ρ-мезона и f-мезона:

$$\alpha_\rho(t)=\alpha_f(t).$$

Применяя подобные рассуждения к процессам упругого рассеяния каона на нуклоне, легко установить вырождение между четырьмя траекториями:

$$\alpha_\rho(t)=\alpha_\omega(t)=\alpha_f(t)=\alpha_{A_2}(t).$$

Гипотеза о локальной дуальности амплитуды приводит к новым предсказаниям. Наряду с изучением физических взаимосвязей между наблюдаемыми величинами, заложенными в этом новом принципе, были сделаны также попытки построить явные примеры дуальных амплитуд. Одним из таких примеров является амплитуда в модели Венециано, которая для процесса

$$\pi+\pi\to\pi+\omega$$

имеет вид:

$$T(s,t)=(\beta/\pi)\,[B(1-\alpha_\beta(t),\ 1-\alpha_\beta(0))+$$
$$+B(1-\alpha_\rho(t),\ 1-\alpha_\beta(u))+B(1-\alpha_\rho(s),\ 1-\alpha_\rho(u))],$$

где $B_{(x,\,y)}=\Gamma_{(x)}\Gamma_{(y)}/\Gamma_{(x+y)}$ — функция Эйлера второго рода, а $\alpha_\rho(t)$ — траектория ρ-мезона. Амплитуда Венециано имеет полюсы во всех трех каналах реакции, соответствующие резонансам в этих каналах. Она также имеет асимптотику Редже во всех каналах при высоких энергиях, если траектория Редже растет линейно с увеличением энергии:

$$\alpha_\rho(s)=\alpha_\rho(0)+s\alpha'_\rho.$$

Напомним, что каждая траектория Редже описывает семейство частиц и резонансов, спины которых отличаются друг от друга на 2. Для траектории ρ-мезона эти спины равны нечетным целым числам. Следовательно, приведенная выше амплитуда не может иметь полюсов при четных значениях траекторий $\alpha_\rho(0)$, $\alpha_\rho(t)$ и $\alpha_\rho(u)$, несмотря на то, что каждая функция Эйлера имеет такие полюсы. Отсюда следует, что траектория $\alpha_\rho(0)$ должна удовлетворять условию

$$\alpha(t)+\alpha(s)+\alpha(u)=2,$$

из которого легко получается наклон этой траектории

$$\alpha'_\rho=1/(3m_\rho^2-3m_\pi^2-m_\omega^2).$$

Для процесса $\pi+\eta\to\pi+\rho$ амплитуда Венециано

$$T(s,t)=(\bar\beta/\pi)\,[B(1-A_{A_2}(s),\ 1-\alpha_\rho(t))+$$
$$+B(1-\alpha_{A_2}(u),\ 1-\alpha_\rho(t))]+B(1-\alpha_{A_2}(s),\ 1-\alpha_{A_2}(u))].$$

Как и в предыдущем примере, линейные траектории $\alpha_\rho(t)$ и $\alpha_{A_2}(s)$ должны удовлетворять условию

$$\alpha_\rho(t)+\alpha_{A_2}(s)+\alpha_{A_2}(u)=2.$$

Это соотношение вместе с вырождением траектории $\alpha_\rho(t)$ и $\alpha_{A_2}(t)$ приводит к формуле

$$m_\rho^2+m_\eta^2=m_\omega^2+m_\pi^2.$$

Относительно полюсов в амплитуде Венециано следует сделать важное замечание. Вычет полюса в s-канале при $\alpha(s)=L$ является полиномом порядка L по переменной t и может быть представлен в виде линейной комбинации L первых полиномов Лежандра. Около такого полюса

$$T(s,\ t) \approx \sum_{l=0}^{L} \gamma l \,\frac{P_l(\cos\theta)}{s-s_0}\ .$$

Наличие всех полиномов $P_l(\cos\theta)$ от $l=0$ до $l=L$ в одном и том же полюсе означает, что наряду с резонансом со спином L при той же энергии должны существовать другие резонансы со спинами, меняющимися от 0 до $L-1$.

Дуальные амплитуды в модели Венециано не удовлетворяют ряду общих требований к амплитудам в локальной квантовой теории поля (аналитичность, унитарность и пр.). Для устранения этой трудности были предложены различные ее модификации с надеждой получить в явном виде амплитуды, обладающие всеми свойствами аналитичности, унитарности, кроссинг-симметрии и дуальности.

3. ТОКИ И АЛГЕБРА ТОКОВ

Были изложены основные идеи и результаты работ двух различных направлений в теории сильных взаимодействий. Одно из них имеет алгебраический характер, а другое — аналитический. В алгебраическом подходе были изучены свойства симметрии сильных взаимодействий при помощи групповых методов, а в аналитическом имели дело с разными аналитическими свойствами амплитуды рассеяния, отражающими весьма богатые физические взаимосвязи между различными явлениями, процессами, и применяли в основном аппарат теории аналитических функций.

Теперь перейдем к изложению идей и результатов работ третьего направления, представляющего собой синтез двух указанных подходов и универсальной $(V-A)$-теории слабых взаимодействий. Это — алгебра токов. Здесь основными динамическими переменными являются электромагнитный ток адронов и векторные и аксиальные токи слабых взаимодействий. Они представляют собой компоненты величин, преобразующихся по присоединенным представлениям изотопической группы или группы унитарной симметрии, и удовлетворяют ряду одновременных коммутационных соотношений, которые являются исходными предположениями алгебры токов.

Последнюю часть обзора начнем с изучения общих свойств электромагнитного тока и токов слабых взаимодействий, а именно их сохранения или частичного сохранения. Затем рассмотрим одновременные коммутационные соотношения между компонентами этих токов. Среди большого числа функциональных соотношений, вытекающих из алгебры токов, приведем лишь самые основные. Изучим также нелинейные реализации киральной симметрии, в которой справедливы подобные соотношения. Наряду с алгебраическими свойствами токов воспользуемся аппаратом теории дисперсионных соотношений.

Сохранение и частичное сохранение токов

В теории Ферми слабые взаимодействия универсальны в том смысле, что все они являются четырехфермионными взаимодействиями. Многочисленные экспериментальные исследования показали, что они универсальны еще в более глубоком смысле: универсальны и по вариантам взаимодействий, и по величине констант связи для ряда процессов. Все это привело к созданию универсальной (V — A)-теории слабых взаимодействий Фейнмана — Гелл-Манна и Сударшана — Маршака, основные предположения которой были изложены в первой части обзора. Там же была рассмотрена аналогия между электромагнитным и слабыми взаимодействиями и установлены различные алгебраические соотношения, вытекающие из сохранения векторного тока слабых взаимодействий без изменения странности. Теперь изучим следствия другого типа, вытекающие из сохранения векторных токов (в частности, электромагнитного) и приводящие к соотношениям аналитического характера. Сформулируем их в виде низкоэнергетической теоремы для излучения мягких фотонов. Что касается аксиальных токов, то они не могут сохраняться, если не считать равными нулю массы псевдоскалярных мезонов. Допуская лишь его минимальное нарушение, придем к предположению о частичном сохранении аксиальных токов, а затем изучим экспериментальные следствия этого предположения. Оно будет также иметь важное значение в дальнейшем развитии алгебры токов.

Низкоэнергетическая теорема для процессов с участием мягких фотонов касается матричных элементов вида

$$M_\mu(k) = \langle B \,|\, J^e_\mu \,|\, A \rangle,$$

где k — переносимый фотоном 4-импульс. В силу сохранения электромагнитного тока

$$\partial_\mu J^e_\mu = 0$$

матричный элемент $M_\mu(k)$ должен удовлетворять условию поперечности

$$k_\mu M_\mu(k) = 0,$$

которое однозначно определяет два первых члена в разложении $M_\mu(k)$ по степеням k. Величину $M_\mu(k)$, рассматриваемую как матричный элемент процесса:

$$A \to B + \gamma,$$

можно разделить на две части. Первая из них, обозначаемая M_μ^{ext}, представляет собой вклад диаграмм с излучением фотона из внешних линий соответствующего процесса без излучения $A \to B$, а вторая M_μ^{in} — вклад диаграмм с излучением из внутренних линий. Заметим, что M_μ^{in} не содержит инфракрасной расходимости. Вклад диаграмм с излучением из внешних линий M_μ^{ext} легко выразить с помощью матричного элемента соответствующего процесса без излучения $A \to B$. Из $M_\mu^{\text{ext}}(k)$ затем исключим все не зависящие от k члены и обозначим оставшуюся часть $\widetilde{M}_\mu^{\text{ext}}(k)$, которая не удовлетворяет условию поперечности $k_\mu \widetilde{M}_\mu^{\text{ext}} \neq 0$. Добавим к этому усеченному матричному элементу $\widetilde{M}_\mu^{\text{ext}}$ такой не зависящий от k член ΔM_μ, что

$$k(\widetilde{M}_\mu^{\text{ext}} + \Delta M_\mu) = 0.$$

Тогда низкоэнергетическая теорема гласит, что сумма $\widetilde{M}_\mu^{\text{ext}} + \Delta M_\mu$ полностью определяет два первых члена в разложении матричного элемента $M_\mu(k)$ по степеням k:

$$M_\mu(k) = \widetilde{M}_\mu^{\text{ext}}(k) + \Delta M_\mu + O(k).$$

В качестве примера применения теоремы рассмотрим излучение мягкого фотона в процессе рассеяния заряженной частицы на нейтральной. Обозначим p и p' 4-импульсы заряженной частицы, а q и q' 4-импульсы нейтральной и положим

$$\nu = -(pq + p'q'); \quad \Delta = -(q - q')^2.$$

В том случае, когда обе частицы бесспиновые, интересующий нас матричный элемент связан с амплитудой упругого рассеяния без излучения $T(\nu, \Delta)$ следующим образом:

$$\langle p'q' | J_\mu^e | pq \rangle = 1/\sqrt{16 p_0 p_0' q_0 q_0'}\, T_\mu;$$
$$T = [p_\mu'/(p'k) - p_\mu/(pk)]\, T(\nu, \Delta) +$$
$$+ [p_\mu'(q'k)/(p'k) + p_\mu(qk)/(pk) - q_\mu - q_\mu']\, \partial T(\nu, \Delta)/\partial\nu + O(k).$$

Если же заряженная частица имеет спин 1/2, а нейтральная частица — спин 0, то матричный элемент тока равен

$$\langle p'q' | J_\mu^e | pq \rangle = \left(1/\sqrt{4 q_0 q_0'}\right) T_\mu;$$
$$T_\mu = \overline{u}(p') \left\{ (\gamma_\mu + i\lambda\sigma_{\mu\nu}k_\nu) \frac{1}{i(\widetilde{p}' + \widetilde{k}) + m} \times \right.$$

$$\times T(\nu,\ \Delta)+T(\nu,\ \Delta)\frac{1}{\mathrm{i}\,(\hat{p}-\hat{k})+m}(\gamma_\mu+\mathrm{i}\lambda\sigma_{\mu\nu}k_\nu)+$$
$$+\left[p'_\mu\frac{q'k}{(p'k)}+p_\mu\frac{(qk)}{(pk)}-q'_\mu-q_\mu\right]\frac{\partial T(\nu,\ \Delta)}{\partial\nu}\Bigg\}\,u(p)+O(k),$$

причем амплитуда упругого рассеяния

$$T(\nu,\ \Delta)=A(\nu,\ \Delta)+\mathrm{i}\frac{\hat{q}+\widetilde{q}'}{2}B(\nu,\Delta);$$

λ — аномальный магнитный момент рассматриваемой частицы. Для комптоновского рассеяния фотона на нуклоне при низких энергиях из низкоэнергетической теоремы следует, что первые два члена амплитуды этого процесса полностью определяются борновским приближением с учетом аномального магнитного момента нуклона.

Мы рассмотрели матричный элемент электромагнитного тока. Наши рассуждения и полученные результаты, однако, применимы и к матричным элементам сохраняющихся векторных токов слабых взаимодействий без изменения странности.

В отличие от векторных токов аксиальные токи не сохраняются. Рассмотрим изовекторный аксиальный ток A^i_μ, $i=1,\ 2,\ 3$, компонентой которого является аксиальный ток β-распада нейтрона $J^A_\mu=A^1_\mu+\mathrm{i}A^2_\mu$. Амплитуда распада $\pi\to l+\nu$ пропорциональна матричному элементу

$$\langle 0\,|\,J^A_\mu\,|\,\pi\rangle=\left(1/\sqrt{2k_0}\right)k_\mu f_\pi,$$

где k — 4-импульс пиона ($k^2=-\mu^2$). Сохранение аксиального тока $\partial_\mu J^A_\mu=0$ означало бы, что $\mu^2 f_\pi=0$, т. е. привело бы к запрету указанного наблюдаемого распада при условии $\mu^2\neq 0$. Итак, дивергенция тока J^A_μ (или A^i_μ) не может быть равной нулю. С другой стороны, очевидно, она должна быть локальным оператором со всеми квантовыми числами пиона. Нарушение равенства $\partial_\mu J^A_\mu=0$ будет минимальным, если дивергенция в его левой части пропорциональна полевому оператору пиона:

$$\partial_\mu A^i_\mu\,\mathrm{i}=c\pi^i,\qquad i=1,\ 2,\ 3,\qquad \pi^i=\pi_i.$$

Это и есть гипотеза о частичном сохранении аксиального тока. Константа c связана с константой распада пиона f_π следующим образом:

$$f_\pi=c/\mu^2.$$

Одним из непосредственных следствий гипотезы о частичном сохранении аксиального тока является соотношение Гольдбергера — Треймана между константой распада пиона f_π, константой псевдоскалярной пион-нуклонной связи g и константой перенормировки аксиального тока x:

$$\sqrt{2}\, Mx = f_\pi g$$

(здесь M — масса нуклона).

Другое следствие частичного сохранения аксиального тока касается дифференциальных сечений полулептонных процессов слабых взаимодействий вида

$$\nu + N \to l^- + A;$$
$$\tilde{\nu} + N \to l^+ + B$$

при параллельных импульсах лептонов $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ — они должны быть пропорциональны сечениям соответствующих процессов сильных взаимодействий:

$$\sigma(\nu N \to l^- A)_{\mathbf{k}_1 \| \mathbf{k}_2} \sim \sigma(\pi^+ \pi \to A);$$
$$\sigma(\tilde{\nu} N \to l^+ B)_{\mathbf{k}_1 \| \mathbf{k}_2} \sim \sigma(\pi^- N \to B).$$

Из гипотезы о частичном сохранении аксиального тока вытекают также некоторые условия самосогласованности для амплитуд процессов с участием мягких пионов вне массовой поверхности. Рассмотрим, например, рассеяние пиона на нуклоне, причем импульс k начального пиона находится вне массовой поверхности. Пусть p и p' — 4-импульсы нуклона, а q — 4-импульс конечного пиона; положим

$$\nu = -(p + p')\, k/2M; \quad \nu_B = qk/2M.$$

Амплитуду рассеяния представим в виде

$$T_{ij} = T^{(+)} \delta_{ij} + T^{(-)} \frac{1}{2} [\tau_i, \tau_j];$$

$$T^{(\pm)} = A^{(\pm)}(\nu, \nu_B, k^2) + \mathrm{i}\, \frac{\hat{q} + \hat{k}}{2} B^{(\pm)}(\nu, \nu_B, k^2).$$

Тогда имеет место равенство

$$A^{(+)}(0, 0, 0) = g^2/M.$$

Для пион-пионного рассеяния с амплитудой вида

$$T_{ij,\, i'j'} = A(s;\ t,\ u;\ k^2)\, \delta_{ij}\delta_{i'j'} + A(t;\ s;\ u;\ k^2)\, \delta_{ii'}\delta_{jj'} + $$
$$+ A(u;\ s,\ t;\ k^2)\, \delta_{ij}\delta_{ji}$$

справедливо аналогичное условие самосогласованности

$$A(\mu^2;\ \mu^2;\ \mu^2;\ 0) = 0.$$

Применяя соотношения подобного типа к дуальным амплитудам Венециано, можно показать, что если возможен распад

$$A \to B + \pi,$$

то траектория Редже частиц A и B должна иметь одинаковый наклон, а разность

$$\alpha_A(0) - \alpha_B(0)$$

всегда равна полуцелому числу. Отсюда вытекают различные массовые соотношения:

$$m_{K^*}^2 - m_K^2 = m_\rho^2; \quad m_\Delta^2 - m_N^2 = m_\rho^2; \quad m_B^2 - m_\omega^2 = m_\rho^2 \text{ и т. д.}$$

В заключение заметим, что в унитарной симметрии вместо триплета пионов имеем октет псевдоскалярных мезонов, обозначаемых Φ^i, так что условие частичного сохранения октета аксиальных токов A_μ^i принимает вид

$$\partial_\mu A_\mu^i = \mathrm{i} c \Phi^i, \quad i = 1, 2, \ldots, 8.$$

Одновременные коммутационные соотношения токов и их экспериментальные следствия

Были изучены группы внутренней симметрии $SU(2)$ и $SU(3)$, по которым преобразуются векторы состояния адронов или их полевые операторы. Согласно известной теореме Нетер, из инвариантности лагранжиана относительно этих групп преобразований вытекает существование соответствующих сохраняющихся векторных токов V_μ^i, $i = 1, 2, 3$ в случае изотопической группы, $i = 1, 2, \ldots, 8$ в унитарной симметрии. Для свободных нуклонных полей N_a в формализме изотопической симметрии

$$V_\mu^i(x) = \frac{1}{2} \overline{N}_a(x) \gamma_\mu \tau_i N_a(x), \quad i = 1, 2, 3.$$

В теории унитарной симметрии вместо нуклонных полей N_a имеем триплет кварков с полевыми операторами ψ_α. Соответственно октет векторных токов записывается в виде

$$V_\mu^i(x) = \overline{\psi}(x) \gamma_\mu \lambda_i \psi(x)/2, \quad i = 1, 2, \ldots, 8.$$

В силу закона сохранения $\partial_\mu V_\mu^i = 0$ пространственные интегралы временных компонент этих токов

$$Q^i = \int V_4^i(x)\, d\mathbf{x}$$

от времени не зависят. Они представляют собой обобщения оператора заряда.

Обобщенные заряды Q^i не коммутируют друг с другом. Для установления алгебраических соотношений между этими величинами достаточно воспользоваться каноническими антикоммутационными соотношениями полевых операторов

$$\{N_a(\mathbf{x},\ t),\ N^{+B}(\mathbf{y},\ t)\} = \delta_a^b \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y});$$
$$\{N_a(\mathbf{x},\ t),\ N_b(\mathbf{y},\ t)\} = \{N^{+a}(\mathbf{x},\ t),\ N^{+B}(\mathbf{y},\ t\} = 0$$

или

$$\{\psi_\alpha(\mathbf{x},\ t),\ \psi^{+\beta}(\mathbf{y},\ t)\} = \delta_\beta^\beta \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y});$$
$$\{\psi_\alpha(\mathbf{x},\ t),\ \psi_\beta(\mathbf{y},\ t)\} = \{\psi^{+\alpha}(\mathbf{x},\ t)\,\psi^{+\beta}(\mathbf{y},\ t)\} = 0.$$

Из токов V_μ^i, выраженных с помощью полевых операторов N или ψ легко получить одновременные коммутаторы временных компонент

$$[V_4^i(\mathbf{x},\ t),\ V_4^j(\mathbf{y},\ t)] = \mathrm{i} f_{ijk} V_4^k(\mathbf{x},\ t)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

где f_{ijk} — структурные константы группы $SU(2)$ или $SU(3)$. Отсюда следует, что обобщенные заряды Q^i образуют алгебру Ли соответствующей группы:

$$[Q^i,\ Q^j] = \mathrm{i} f_{ijk} Q^k.$$

В свою очередь они могут быть рассмотрены как генераторы этой группы.

Аксиальные токи A_μ^i, $i = 1,\ 2,\ 3$, в случае группы $SU(2)$ и $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 8$ в унитарной симметрии не сохраняются. Они не могут быть определены при помощи теоремы Нетер. Можно, однако, предположить их конкретный вид для полей нуклонов или кварков по аналогии с векторными токами:

$$A_\mu^i(x) = (1/2)\,\overline{N}(x)\,\gamma_\mu\gamma_5\tau_i N(x), \quad i = 1,\ 2,\ 3$$

в теории изотопической симметрии и

$$A_\mu^i = (1/2)\,\overline{\psi}(x)\,\gamma_\mu\gamma_5\lambda_i\psi(x), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 8$$

в теории унитарной симметрии. Временные компоненты этих операторов удовлетворяют одновременным коммутационным соотношениям:

$$[A_4^i(\mathbf{x},\ t),\quad A_4^j(\mathbf{y},\ t)] = \mathrm{i} f_{ijk} V_4^k(\mathbf{x},\ t)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y});$$
$$[A_4^i(\mathbf{x},\ t)\,V_4^j(\mathbf{y},\ t)] = \mathrm{i} f_{ijk} A_4^k(\mathbf{x},\ t)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

Соответствующие обобщенные псевдоскалярные заряды

$$D^i = \int A_4^i(x)\,d\mathbf{x}$$

вместе с Q^i образуют алгебру Ли $SU(2) \otimes SU(2)$ или $SU(3) \otimes \otimes SU(3)$.

Имея в своем распоряжении одновременные коммутационные соотношения временных компонент векторных и аксиальных токов для свободных полей нуклонов или кварков, предположим, что они справедливы и при наличии сильных взаимодействий. Вместе с гипотезой о частичном сохранении аксиальных токов эти одновременные коммутационные соотношения приводят к некоторым новым экспериментально проверяемым следствиям — функциональным соотношениям между различными физическими величинами.

Известным примером таких взаимосвязей различных измеряемых величин является соотношение Адлера — Вайсбергера, выражающее константу перенормировки аксиального тока β-распада нейтрона $\varkappa$ с помощью полного сечения взаимодействия виртуальных заряженных пионов нулевой массы с нуклоном:

$$1-\frac{1}{\varkappa^2}=\frac{2M}{g^2}\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_{(M+\mu)^2}^{\alpha}[\sigma_{tot}^{\pi^+p}(s)-\sigma_{tot}^{\pi^-p}(s)]\frac{ds}{s-M^2}\,.$$

С учетом малой поправки в результате продолжения сечений за массовую поверхность оно хорошо согласуется с опытом. Для сечений пион-пионного взаимодействия справедливо аналогичное соотношение

$$-\frac{1}{\varkappa^2}=\frac{M^2}{g^2}\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_{4\mu^2}^{\infty}[\sigma_{tot}^{\pi^+\pi^+}(s)-\sigma_{tot}^{\pi^-\pi^-}(s)]\frac{ds}{s-\mu^2}\,.$$

Наряду с приведенными правилами сумм и их обобщениями на случай процессов с участием странных частиц из одновременных коммутационных соотношений токов и гипотезы о частичном сохранении аксиальных токов вытекают также низкоэнергетические пределы амплитуд рассеяния псевдоскалярных мезонов. В частности, для амплитуды пион-нуклонного рассеяния

$$\lim_{s\to(M+\mu)^2}T^{\pi^+p}(s,\ t)=-\lim_{s\to(M+\mu)^2}T^{\pi^-p}(s,\ t)=\mu^2/2M^2-g^2/\varkappa^2,$$

а для амплитуды пион-пионного рассеяния

$$T_{ij,\,i'j'}(s,\ t,\ u)\approx[g^2/(M^2\varkappa^2)]\times$$
$$\times[(\mu^2-t)\,\delta_{ii'}\delta_{jj'}+(\mu^2-s)\,\delta_{ij}\delta_{i'j'}+(\mu^2-u)\,\delta_{ij'}\delta_{i'j}].$$

Длины рассеяния $a_I^{\pi N}$ и $a_I^{\pi\pi}$ в s-состоянии определяются следующими соотношениями:

$$(2\pi/\mu)\,(1+\mu/M)\,a_{3/2}^{\pi N}=-g^2/(4M^2\varkappa^2);$$
$$2a_{3/2}^{\pi N}+a_{1/2}^{\pi N}=0;$$
$$(2\pi/\mu)\,\alpha_2^{\pi\pi}=-g^2/(4M^2\varkappa^2);$$
$$7a_2^{\pi\pi}+2a_0^{\pi\pi}=0.$$

Они не противоречат имеющимся экспериментальным данным.

Гипотеза о частичном сохранении аксиального тока позволяет в некоторых случаях связать амплитуды полулептонных процессов рождения мягкого пиона в электромагнитном и слабых взаимодействиях с матричными элементами одновременных коммутаторов токов, которые, в свою очередь, представляют собой амплитуды соответствующих процессов без рождения данного пиона.

В отличие от приведенных выше одновременных коммутационных соотношений между четвертыми компонентами токов, одновременные коммутаторы их временных и пространственных компонент однозначно не определяются. Они содержат неизвестные так называемые швингеровские члены, пропорциональные производным δ-функции. Для свободных полей нуклонов в теории изотопической симметрии или кварков в унитарной симметрии имеем:

$$[V_4^i(\mathbf{x},\ t)\, V_m^j(\mathbf{y},\ t)] = \mathrm{i} f_{ijk} V_m^k(\mathbf{x},\ t)\, \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \text{ш. ч.};$$

$$[V_4^i(\mathbf{x},\ t)\, A_m^j(\mathbf{y},t)] = \mathrm{i} f_{ijk} A_m^k(\mathbf{x},\ t)\, \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \text{ш. ч.};$$

$$[A_4^i(\mathbf{x},\ t)\, V_m^j(\mathbf{y},\ t)] = \mathrm{i} f_{ijk} A_m^k(\mathbf{x},\ t)\, \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \text{ш. ч.};$$

$$[A_4^i(\mathbf{x},\ t)\, A_m^j(\mathbf{y},\ t)] = \mathrm{i} f_{ijk} V_m^k(\mathbf{x},\ t)\, \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \text{ш. ч.};$$

$$[V_m^i(\mathbf{x},\ t)\, V_m^j(\mathbf{y},\ t)] = -\mathrm{i} f_{ijk} \delta_{mn} V_m^k(\mathbf{x},\ t)\, \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + S_{ij}^1;$$

$$[A_m^i(\mathbf{x},\ t)\, A_n^j(\mathbf{y},\ t)] = -\mathrm{i} f_{ijk} \delta_{mn} V_4^k(\mathbf{x},\ t)\, \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + S_{ij}^2;$$

$$[V_m^i(\mathbf{x},\ t)\, A_n^j(\mathbf{y},\ t)] + [A_m^i(\mathbf{x},\ t)\, V_n^j(\mathbf{y},\ t)] =$$

$$= 2\mathrm{i} f_{ijk} \delta_{mn} A_4^k(\mathbf{x},\ t)\, \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + S_{ij}^3,$$

где S_{ij}^1, S_{ij}^2 и S_{ij}^3 — операторы, симметричные по двум индексам i и j. В некоторых соотношениях швингеровские члены и симметричные операторы S_{ij}^a ($a = 1,\ 2,\ 3$) не имеют никакого значения и приведенные одновременные коммутационные соотношения приводят к определенным физическим следствиям. Интересным примером таких результатов алгебры токов является асимптотическое соотношение Адлера для полных сечений взаимодействия нейтрино и антинейтрино с нуклонами при заданной передаче импульса лептонов:

$$\lim_{E_\nu\to\infty}\left[\frac{d\sigma_{tot}(\tilde{\nu}p\to l^+\ldots)}{dq^2} - \frac{d\sigma_{tot}(\nu p\to l^-\ldots)}{dq^2}\right] = \frac{G^2}{\pi}(\cos^2\theta + 2\sin^2\theta);$$

$$\lim_{E_\nu\to\infty}\left[\frac{d\sigma_{tot}(\tilde{\nu}n\to l^+\ldots)}{dq^2} - \frac{d\sigma_{tot}(\nu n\to l^-\ldots)}{dq^2}\right] = \frac{G^2}{\pi}(-\cos^2\theta + 2\sin^2\theta).$$

Здесь G — универсальная константа слабых взаимодействий; θ — угол Кабиббо; q — разность 4-импульсов лептонов. В случае взаимодействия электрона с нуклонами

$$\lim_{E\to\infty}\left[\frac{d\sigma_{tot}(lp\to l\ldots)}{dq^2}+\frac{d\sigma_{tot}(ln\to l\ldots)}{dq^2}\right]>\frac{2\pi\alpha^2}{q^4}.$$

Допуская соответствующие приближения, можно получить различные соотношения между массами частиц и константами связи как следствия алгебры токов. Среди них следует напомнить в первую очередь формулу

$$m_{A_1}^2=2m_\rho^2.$$

Нелинейные реализации киральной симметрии

На основе одновременных коммутационных соотношений векторных и аксиальных токов были установлены различные физические взаимосвязи между наблюдаемыми величинами, вытекающие из этих коммутационных соотношений, и гипотезы о частичном сохранении аксиальных токов. Многие из приведенных результатов можно также получить в рамках другой схемы. Это — схема нелинейных реализаций киральной симметрии.

Напомним, что пространственные интегралы от временных компонент векторных и аксиальных токов

$$Q^i=\int V_4^i(x)\,d\mathbf{x};\qquad D^i=\int A_4^i(x)\,d\mathbf{x}$$

образуют алгебру Ли $SU(2)\otimes SU(2)$ ($i=1, 2, 3$) или $SU(3)\otimes SU(3)$ ($i=1, 2, \ldots, 8$). Они представляют собой генераторы соответствующей группы киральной симметрии, содержащей группу изотопической инвариантности или группу унитарной симметрии в качестве своей подгруппы. Из-за несохранения аксиальных токов киральная симметрия должна быть нарушенной симметрией. Кроме того, большая разница масс псевдоскалярных мезонов делает весьма существенным учет нарушения унитарной симметрии при изучении киральной симметрии $SU(3)\otimes SU(3)$, что усложняет наше рассмотрение. Поэтому в дальнейшем ограничимся лишь изложением результатов изучения киральной симметрии $SU(2)\otimes SU(2)$.

Каждое линейное неприводимое представление группы $SU(2)\otimes SU(2)$ характеризуется двумя целыми или полуцелыми числами (j_1, j_2), представляющими собой значения спина двух соответствующих коммутирующих подгрупп $SU(2)$. При пространственном отражении p представление (j_1, j_2) переходит в представление (j_2, j_1). Неизменными остаются лишь неприводимые представления вида (j_1, j_1), вследствие чего наряду с мультиплетом (j_1, j_2) группы киральной симметрии с $j_1 \neq j_2$ должен существовать и мультиплет (j_2, j_1), если сильные взаимодействия инвариантны относительно отражения пространства. В таком случае каждый мультиплет киральной симметрии обязательно содержит различные изотопические мультиплеты, за исключением частного случая синглета. Например, наряду с триплетом пионов должен быть по крайней мере скалярный синглет σ, который вместе с пионами образовал бы мультиплет (1/2, 1/2) киральной симметрии. Эксперимент, однако, не подтвердил такое расширение всех изотопических мультиплетов, и для ликвидации этой трудности были предложены нелинейные реализации киральной группы $SU(2) \otimes \otimes SU(2)$.

Для того чтобы понять сущность разницы между линейными представлениями групп $SU(2) \otimes SU(2)$ и ее нелинейными реализациями, рассмотрим сначала триплет пионов. Они вместе с нейтральным скалярным мезоном σ образуют неприводимое (линейное) представление (1/2, 1/2) киральной группы, причем киральное преобразование с генераторами D^i перемешивает эти два изотопических мультиплета:

$$[D^i, \pi^k] = i\sigma\delta_{ik};$$
$$[D^i, \sigma] = -i\pi^k, \quad \pi^k = \pi_k.$$

Инвариантом киральной группы является квадратичная величина $\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2$, которую теперь считаем заданной константой

$$\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2 = \lambda^2.$$

Тогда σ становится нелинейной функцией операторов полей пионов

$$\sigma = [\lambda^2 - \boldsymbol{\pi}^2]^{1/2},$$

и в результате получаем киральные преобразования пионных полей в виде нелинейных преобразований

$$[D^i, \pi^k] = i\,[\lambda^2 - \boldsymbol{\pi}^2]^{1/2}\,\delta_{ik}.$$

Таким образом, изотопический триплет пионов сам реализует неприводимое (нелинейное, однако) представление киральной группы. Расширение группы симметрии не приводит к расширению мультиплетов частиц.

Как было отмечено, киральная симметрия не может быть точной симметрией, так как аксиальные токи не сохраняются. Предположим, что нарушение симметрии минимально в следующем смысле: нарушающий симметрию член в лагранжиане преобразуется по представлению (1/2, 1/2) киральной группы и выполняется условие частичного сохранения аксиальных токов

$$\partial_\mu A^i_\mu = \mathrm{const}\, \pi^i.$$

В таком случае однозначно получается эффективный лагранжиан $\pi\pi$-взаимодействия:

$$L_{\pi\pi} = \frac{1}{2\lambda^2} (\boldsymbol{\pi}\, \partial_\mu \boldsymbol{\pi})^2 + \frac{\mu^2}{8\lambda^2} (\boldsymbol{\pi}^2)^2 + \ldots ,$$

причем $\lambda = f\pi$.

Пионы играют особую роль в нелинейных реализациях киральной группы $SU(2) \otimes SU(2)$. Нуклоны и другие частицы преобразуются по линейным законам с коэффициентами, зависящими от пионных полей. Если будем требовать, чтобы массовый член в лагранжиане свободных нуклонных полей был инвариантным относительно киральной группы

$$\overline{N}N = \mathrm{inv},$$

то имеем закон преобразования

$$[D^i,\ N] = [\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2 - \pi^2}]^{-1} [\boldsymbol{\pi}_\lambda \boldsymbol{\tau}]_i N.$$

Эффективный лагранжиан пион-нуклонного взаимодействия будет равен

$$L_{\pi N} = \frac{\mathrm{i}}{4\lambda^2} \overline{N} \gamma_\mu \boldsymbol{\tau} N\, [\boldsymbol{\pi}_n\, \partial_\mu \boldsymbol{\pi}] - \mathrm{i} F \overline{N} \gamma_\mu \gamma_5 \boldsymbol{\tau} N\, \partial_\mu \boldsymbol{\pi} + \ldots ,$$

где F — произвольная константа, не зависящая от λ.

Предположим теперь, что низкоэнергетические пределы амплитуд процессов с участием пионов и нуклонов определяются первыми нетривиальными приближениями теории возмущений с полученными выше эффективными лагранжианами взаимодействия. Тогда можно предсказать некоторые результаты алгебры токов: соотношение Гольбергера — Треймана, соотношение Адлера — Вайсбергера, величины длин $\pi\pi$- и πN-рассеяний и т. п. Иначе говоря, в нелинейных реализациях киральной симметрии содержатся многие физические взаимосвязи между различными наблюдаемыми величинами, установленные ранее на основе одновременных коммутационных соотношений токов и гипотезы о частичном сохранении аксиальных токов.

Вектордоминантная модель и алгебра полей

В алгебре токов и в теории нелинейных реализаций киральной симметрии были установлены многообразные физические взаимосвязи между электромагнитными, слабыми и сильными взаимодействиями адронов, соотношения между различными величинами. Теперь рассмотрим соотношения другого типа между матричными элементами токов и амплитудами сильных взаимодействий, вытекающие из так называемой вектордоминантной модели. Для этой цели обратим внимание сначала на матричные элементы электромагнитного тока J^e_μ между состояниями систем адронов A и B:

$$\langle B | J^e_\mu | A \rangle.$$

Они полностью определяют матричные элементы процессов электромагнитного взаимодействия:

$$A \to B + \gamma; \quad \gamma + A \to B; \quad e + A \to e + B$$

и т. д. Обозначим $\varkappa = -k^2$ передачу импульса между лептонами. Инвариантные амплитуды, содержащиеся в рассматриваемых матричных элементах, аналитичны по $\varkappa$ в комплексной плоскости с разрезом на правой вещественной полуоси. В зависимости от того, какая часть электромагнитного тока, изовекторная или изоскалярная, дает вклад в рассматриваемый процесс, разрез в $\varkappa$-плоскости начинается от точки $\varkappa = 4\mu^2$ или $\varkappa = 9\mu^2$. Действительно, изовекторная часть тока J^e_μ имеет G-четность, равную $+1$, и если эта часть дает вклад, то легчайшим из промежуточных состояний в канале аннигиляции $\gamma \to A + B$ является двухпионное состояние. Наоборот, если только изоскалярная часть электромагнитного тока играет роль, то трехпионное промежуточное состояние имеет наименьшую эффективную массу, так как для этой части тока $G = -1$.

При малых значениях передачи импульса $\varkappa$, по-видимому, основной вклад в амплитуды дают ближайшие особенности в $\varkappa$-плоскости, а именно начальные интервалы указанных разрезов. Кроме того, в этих интервалах значений переменной $\varkappa$ существуют хорошо установленные резонансы, известные как векторные мезоны ρ, ω и φ. Ограничиваясь лишь вкладом этих резонансов в амплитуды, приходим к вектордоминантной модели, согласно которой взаимодействие фотона с адронами осуществляется превращением фотона в векторный мезон и последующим взаимодействием последнего с другими адронами в результате сильных взаимодействий. В таком приближении амплитуды всех процессов электромагнитного взаимодействия адронов в низшем порядке теории возмущений выражаются с помощью амплитуд взаимодействия векторных мезонов с адронами и матричных элементов перехода между фотоном и векторными мезонами. Благодаря этой связи можно для малых передач импульса приближенно определить амплитуды электромагнитных процессов на основе информации о сильных взаимодействиях.

Приведем некоторые примеры. В рамках модели полюсов Редже рассмотрим асимптотическое поведение амплитуд рассеяния нейтральных векторных мезонов. Вектордоминантная модель приводит к тому, что амплитуды рассеяния фотона имеют такое же асимптотическое поведение. В модели кварков или в симметрии $SU(6)_W$ для коллинеарных процессов можно выразить амплитуды рассеяния векторных мезонов подобными величинами для псевдоскалярных мезонов. Эти соотношения вместе с вектордоминантным приближением позволяют определить значения амплитуд рассеяния фотона вперед и, в частности, полные сечения поглощения фотона.

Другие примеры использования вектордоминантной модели дает изучение соотношений между электромагнитными форм-факторами адронов и характеристиками векторных мезонов. В форм-фактор пиона основной вклад дает ρ-мезон. Поэтому электромагнитный радиус пиона выражается массой ρ-мезона, его шириной и эффективной константой его лептонного распада. Что касается форм-факторов нуклонов, то в них все три нейтральных векторных мезона играют роль и электромагнитные радиусы нуклонов выражаются характеристиками мезонов.

Вектордоминантная модель, если она справедлива, применима не только к матричным элементам электромагнитного тока J^e_μ, но и ко всем векторным токам V^i_μ ($i = 0, 1, 2, 3$ в случае изотопической симметрии и $i = 1, 2, \ldots, 8$ в случае унитарной симметрии). Соответствующие векторные мезоны обозначим Φ^i_μ. Тогда имеем соотношение

$$\langle B \,|\, V^i_\mu \,|\, A\rangle \sim \langle B \,|\, \Phi^i_\mu \,|\, A\rangle.$$

Обобщая гипотезу о вектордоминантности, можно предположить, что векторные токи пропорциональны полевым операторам векторных мезонов:

$$V^i_\mu \sim \Phi^i_\mu.$$

Легко построить модели квантовой теории поля, в которых справедливо последнее равенство полей и токов. В таких моделях алгебра токов совпадает с алгеброй полей, все одновременные коммутаторы токов однозначно определяются, все швингеровские члены конечны и заданы.