

УДК 539.12

## ОПИСАНИЕ НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В КВАНТОВОЙ КИРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

*М. К. Волков,  
В. Н. Первушин*

Объединенный институт ядерных  
исследований, Дубна

В квантовой киральной теории в однопетлевом приближении дается описание сильных, электромагнитных и слабых взаимодействий мезонов.

A description of meson strong, electromagnetic and weak interactions is given in quantum chiral theory in the oneloop approximation.

### ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] был дан обзор различных методов, используемых для построения унитарной квантовой теории поля с неполиномиальными лагранжианами. За последние годы эти методы неоднократно применялись во многих областях физики элементарных частиц и приводили к вполне корректным физическим результатам [2—13]. Один из таких методов, предложенный впервые М. К. Волковым и названный методом интегрального представления [1], будет в дальнейшем использован в настоящей работе. Для краткости, следуя А. Саламу [14], будем называть этот метод суперпропагаторным (СП-метод). Поскольку во многих работах [15—17] существует детальное описание этого метода, не будем останавливаться здесь на его подробном изложении, а лишь кратко дадим его основные черты в приложении 1. Здесь же основное внимание сосредоточим на описании разнообразных приложений СП-метода к очень перспективной на наш взгляд области физики — квантовой киральной теории.

Киральная алгебра токов [18] — одно из наиболее плодотворных направлений в физике элементарных частиц, позволившее установить ряд важных соотношений между наблюдаемыми на опыте величинами, характеризующими сильные, электромагнитные и слабые взаимодействия адронов. Простым и компактным

методом описания динамических следствий алгебры токов при низких энергиях, является построение существенно нелинейных киральных лагранжианов [19]. Техника для получения низкоэнергетических теорем сводится только к учету диаграмм типа деревьев. Поскольку киральные лагранжианы относятся к классу неперенормируемых, то обычно этим квазиклассическим приближением и ограничивались.

Одним из дальнейших возможных развитий алгебры токов и теории адронов является, на наш взгляд, построение на основе существенно нелинейных киральных лагранжианов квантовой теории поля с использованием СП-метода регуляризации. Приближение графов-деревьев, хорошо оправдавшее себя с точки зрения согласия с известными экспериментальными данными в пределе малых энергий, естественно должно быть дополнено следующим шагом — однопетлевым приближением. Какая физическая информация содержится в однопетлевом приближении и насколько она адекватна имеющимся экспериментальным данным — вот тот круг вопросов, выяснению которых посвящена настоящая статья.

Многочисленные результаты, полученные при описании низкоэнергетических процессов сильного, электромагнитного и слабого взаимодействий мезонов, убедительно свидетельствуют об оправданности этого, следующего за «древесным», однопетлевого приближения. Одними из первых наиболее интересных работ по этому вопросу были работы Лемана и Хонеркампа с сотр. [4—6], где рассматривался процесс упругого рассеяния безмассовых пионов в области низких энергий. Поведение фаз в низших парциальных волнах  $\pi\pi$ -системы, полученное в указанных работах, находилось в хорошем согласии с известными экспериментальными данными. Поскольку при пороговых энергиях весьма важен учет конечной массы пиона, естественно возникла задача обобщения предыдущих результатов на случай массивных пионов. Эта задача была решена в работе [8]. Полученное выражение для амплитуды  $\pi\pi$ -рассеяния оказалось весьма удобным для вычисления длин рассеяния и параметров эффективной области парциальных волн  $\pi\pi$ -системы. Эти парциальные волны в интервале энергий  $0 \leq \sqrt{s} \leq 2m_\pi$  удовлетворяют всем строгим неравенствам, которые следуют из рассмотрения поперечной симметрии и свойств положительности, обусловленных унитарностью [9,22]. Недавно было получено также удовлетворительное описание  $s$ - и  $p$ -волн в  $\pi - N$ -рассеянии в области до  $400 \text{ Мэв}$  в однопетлевом приближении в квантовой киральной теории [13]. Введение в киральный лагранжиан взаимодействия с электромагнитным полем позволяет описывать подобным же образом электромагнитные свойства пиона. В работах [7, 10] были вычислены электромагнитный форм-фактор пиона, его среднеквадратический радиус и величина поляризуемости, а также амплитуда процесса  $\gamma\gamma \rightarrow \pi^+\pi^- (\pi^0\pi^0)$ .

Слабые взаимодействия мезонов в квантовой киральной теории рассматривались в работах [11, 12]. Найдены зависимость константы слабого распада пиона от пионной массы и структурные константы распада  $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm \nu \gamma$  [12], а также вычислена разность масс нейтральных каонов [11].

Все полученные результаты находятся в хорошем согласии с известными экспериментальными данными и удовлетворяют соотношениям между наблюдаемыми величинами, которые следуют из алгебры токов.

Перечислим основные положения квантовой киральной теории [4—12]:

1. Основой теории являются кирально-инвариантные лагранжианы, так что в борновском приближении теория удовлетворяет низкоэнергетическим теоремам алгебры токов.

2. Используется теория возмущений с разложением по размерному параметру  $1/F_\pi$  при энергиях, существенно меньших  $4\pi F_\pi \sim 1,2 \text{ Гэв}$ , где  $F_\pi$  — константа распада пиона. Этот энергетический масштаб естественно возникает в киральных теориях.

3. При вычислении высших порядков теории возмущения применяется СП-метод регуляризации расходящихся диаграмм, если обычные методы, используемые в ренормируемых теориях, становятся неприемлемыми. Согласно СП-методу, для устранения ультрафиолетовых расходимостей в диаграммах достаточно использовать нелинейность кирального лагранжиана. СП-регуляризация достигается рассмотрением всей совокупности двухточечных диаграмм [15—17].

4. При построении суперпропагатора используется кирально-инвариантный метод суммирования всех двухвершинных диаграмм. Он основан на учете всевозможных перестроек матричных элементов, соответствующих сжатию некоторых линий в диаграммах и уменьшению числа вершин. Это происходит из-за наличия производных в лагранжиане взаимодействия. Учет всевозможных перестроек такого рода позволяет получать результаты, не зависящие от выбора той или иной формы кирального лагранжиана (в пределе  $m_\pi = 0$ ). Подробный анализ этой процедуры см. в работах Д. В. Волкова [19], Хонеркампа [20] и В. Н. Первушина [21].

## 1. СИЛЬНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПИОНОВ

**Вычисление амплитуды  $\pi\pi$ -рассеяния.** Амплитуда рассеяния пионов определяется стандартным образом:

$$\begin{aligned} \langle i_1 i_2 | S | i_3 i_4 \rangle = & I + i (2\pi)^4 \delta^4 (p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \times \\ & \times [\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} A(s, t, u) + \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} \times \\ & \times A(t, s, u) + \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3} A(u, t, s)], \end{aligned} \quad (1)$$

где  $s = (p_1 + p_2)^2$ ;  $t = (p_1 - p_3)^2$ ;  $u = (p_1 - p_4)^2$ ;  $I$  — единичная матрица;  $\delta_{ij}$  — символы Кронекера.

В однопетлевом приближении (учет всех барионных и пионных петель в порядке теории возмущения, соответствующем  $1/F_\pi^4$ , см. рис. 1, 2) функция  $A(s, t, u)$  имеет вид [8]:

$$A(s, t, u)/32\pi = \frac{\pi}{2} \alpha_0 (3\bar{s} - 1) + \frac{\pi}{2} \alpha_0^3 \Pi(\bar{s}, \bar{t}, \bar{u});$$

$$\Pi(\bar{s}, \bar{t}, \bar{u}) = (A_\pi + A_B) \bar{s}^2 + (B_\pi + B_B) (\bar{t}^2 + \bar{u}^2) +$$

$$+ C_\pi \bar{s} + D_\pi - J(\bar{s}) (3\bar{s} - 1)^2 - J(\bar{u}) [3(\bar{u} - 1)(\bar{u} - \bar{t}) + 3\bar{u} - 1] -$$

$$- J(\bar{t}) [3(\bar{t} - 1)(\bar{t} - \bar{u}) + 3\bar{t} - 1], \quad (2)$$

где  $\bar{\zeta} = \zeta/4m_\pi^2$ ; ( $\zeta = s, t, u$ );  $\alpha_0 = \frac{1}{3} \left( \frac{m_\pi}{2\pi F_\pi} \right)^2$ ,

$$J(\bar{\zeta}) = 1 - \frac{1}{2} \sum_1^\infty (4\bar{\zeta})^n \frac{\Gamma(n) \Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)} =$$

$$= \begin{cases} Y \arctg Y^{-1}; & 0 < \bar{\zeta} < 1; & Y = (1/\bar{\zeta} - 1)^{1/2}; \\ \bar{Y}/2 \left[ -i\pi + \ln \frac{1+\bar{Y}}{1-\bar{Y}} \right]; & 1 < \bar{\zeta}; & \bar{Y} = (1 - 1/\bar{\zeta})^{1/2}; \\ \bar{Y}/2 \left[ \ln \frac{\bar{Y}+1}{\bar{Y}-1} \right]; & \bar{\zeta} < 0. \end{cases} \quad (3)^*$$

Первое слагаемое в (2) — борновское приближение, второе — вклад от петлевых диаграмм. Вклад от барионных петель определяют коэффициенты  $A_B, B_B$  в (2):

$$A_B = -6; \quad B_B = 8,7. \quad (4)$$

В области энергий существенно меньших  $4\pi F_\pi$  формула (2) является разложением амплитуды упругого рассеяния пионов по малому параметру  $\alpha_0$ :

$$\alpha_0 = \frac{1}{3} \left( \frac{m_\pi}{2\pi F_\pi} \right)^2 \approx \frac{2}{103}. \quad (5)$$

Основная задача сводится в дальнейшем к определению четырех неизвестных параметров  $A_\pi, B_\pi, C_\pi, D_\pi$ . Их удается зафиксировать, используя СП-метод для вычисления вклада от пионной петли:

$$A_\pi = 6,63; \quad B_\pi = 11,8; \quad C_\pi = 3; \quad D_\pi = -3/2. \quad (6)$$

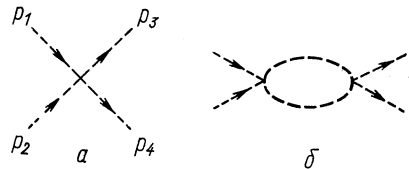


Рис. 1. Пионные диаграммы для  $\pi\pi$ -рассеяния:  
 а — приближение деревьев; б — пионная петля

\* Представление  $J(\bar{\zeta})$  в виде (3) было получено в работе [17].

Формулы (2)—(6) — основной результат работы [8]. Обсудим подробно вычисление пионных петель.

Чтобы использовать СП-метод при нахождении параметров  $A_\pi$ ,  $B_\pi$ ,  $C_\pi$  и  $D_\pi$ , необходимо рассмотреть всю совокупность двух-вершинных диаграмм с пионными петлями, где с каждой вершиной

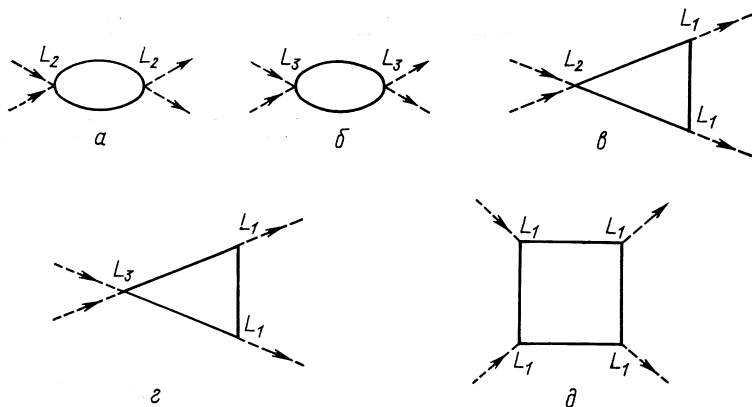


Рис. 2. Нуклонные петли для  $\pi\pi$ -рассеяния

связано по два внешних пионных поля (рис. 3). Соответствующая  $S$ -матрица имеет следующий вид (см. приложение 2):

$$\hat{S}_\pi = \frac{i^2}{2!} N_\Phi T_\Gamma^* \left[ \int d^4x N_\Gamma (L^{(2)}(\varphi | \Gamma)) \right]^2, \quad (7)$$

где  $L^{(2)}(\varphi | \Gamma)$  означает, что лагранжиан  $L(\varphi | \Gamma)$  разложен по внешним асимптотическим полям  $\varphi(x)$  и в (7) взят второй порядок этого разложения;  $\Gamma(x)$  — внутреннее квантовое поле, по которому проводится  $T^*$ -упорядочивание. Выпишем явный вид  $L^{(2)}(\varphi | \Gamma)$ :

$$\left. \begin{aligned} L^{(2)}(\varphi | \Gamma) &= L_I(\varphi | \Gamma) + L_{II}(\varphi | \Gamma) - m_\pi^2 \Phi^{(2)}(\varphi | \Gamma)/2; \\ L_I(\varphi | \Gamma) &= (\varphi^a \partial_\mu \varphi^b - \varphi^b \partial_\mu \varphi^a) \Gamma^b \partial_\mu \Gamma^a f(\Gamma^2)/2F_\pi^2; \\ L_{II}(\varphi | \Gamma) &= \partial_\mu \varphi^a \partial_\mu \varphi^b (\Gamma^a \Gamma^b - \Gamma^2 \delta_{ab}) f(\Gamma^2)/2F_\pi^2; \\ \Phi^{(2)}(\varphi | \Gamma) &= \frac{1}{F_\pi^2} [(\varphi \Gamma)^2 - \Gamma^2 \varphi^2] \sum_{n=0}^{\infty} c_\Phi(n) \Gamma^{2n}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} f(\Gamma^2) &= \frac{\sin^2 \sqrt{\Gamma^2/F_\pi^2}}{\Gamma^2/F_\pi^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_f(n) (\Gamma^2)^n; \\ c_\Phi(n) &\approx \frac{2^{2n} (2-n+n^2)}{F_\pi^{2n} (2n+2)! (2n+3)!}; \quad c_\Phi(0) = 1/3. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Лагранжиан (8) соответствует выбору нормальных координат по полям  $\Gamma$  в кривом изопространстве с началом координат в точке  $\varphi$ . Вычисление этого лагранжиана при  $m_\pi = 0$  продемонстрировано в приложении 2. Любой другой выбор лагранжиана (координат) приводит при построении суперпропагатора к необходимости учета всевозможных редукций (сжатий пионных линий). Этот учет эквивалентен на массовой поверхности, явно ковариантной процедуре перехода от произвольных координат к нормальным (8). Введение массы пиона с учетом *PCAC* нарушает киральную инвариантность. Поэтому явный вид функции  $\Phi(\varphi | \Gamma)$  в (8) зависит от выбора координат (подробное вычисление этой функции см. в работе [8]). Например, для параметризации Вайнберга имеем

$$\Phi_w^{(2)}(\varphi | \Gamma) = \left( (\varphi | \Gamma)^2 - \frac{\Gamma^2 \Phi^2}{2} \right) \frac{1}{F_\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} c_\Phi^w(n) (\Gamma^2)^n;$$

$$c_\Phi^w(n) = \frac{(4 - 7n + 11n^2)}{4(2n + 2)!} \cdot \frac{1}{F_\pi^{2n}}.$$

Выполняя в (7) *T*-упорядочение по Вику, получаем следующее для  $\hat{S}_\pi$  выражение:

$$\hat{S}_\pi = S_I + S_{II};$$

$$iS_I = \frac{1}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 N_\varphi (\varphi_1^a \partial_\mu \varphi_1^b - \varphi_1^b \partial_\mu \varphi_1^a) (\varphi_2^c \partial_\nu \varphi_2^d - \varphi_2^d \partial_\nu \varphi_2^c) \sigma_{\mu\nu}^I(x_1 - x_2);$$

$$iS_{II} = N_\varphi \frac{1}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \{ (\partial_\mu \varphi_1)^2 (\partial_\nu \varphi_2)^2 \sigma_1^{II}(x_1 - x_2) + (\partial_\mu \varphi_1 \cdot \partial_\nu \varphi_2)^2 \times$$

$$\times \sigma_2^{II}(x_1 - x_2) + m_\pi^4 [(\varphi_1)^2 (\varphi_2)^2 \sigma_3^{II}(x_1 - x_2) + (\varphi_1 \cdot \varphi_2)^2 \sigma_4^{II}(x_1 - x_2)] -$$

$$- m_\pi^2 [(\partial_\mu \varphi_1)^2 (\varphi_2)^2 + (\partial_\nu \varphi_2)^2 (\varphi_1)^2] \sigma_5^{II}(x_1 - x_2) -$$

$$- m_\pi^2 [(\partial_\mu \varphi_1 \cdot \varphi_2)^2 + (\partial_\nu \varphi_2 \cdot \varphi_1)^2] \sigma_6^{II}(x_1 - x_2) \}.$$

Здесь  $\varphi_i^a = \varphi^a(x_i);$

$$\sigma_{\mu\nu}^I(x) = -\frac{i}{4F_\pi^4} \sum_{n=0}^{\infty} (\partial_\mu \Delta^c(x) \partial_\nu \Delta^c(x) -$$

$$- \Delta^c(x) \partial_\mu \partial_\nu \Delta^c(x)) [-i\Delta^c(x)]^{2n} a^I(n); \quad (10)$$

$$\sigma_{\lambda(x)}^{II} = -\frac{i}{2F_\pi^4} \sum_{n=0}^{\infty} (\Delta^c(x))^2 [-i\Delta^c(x)]^{2n} a_j^{II}(n); \quad (11)$$

$\Delta^c(x)$  — пропагатор свободного скалярного поля; коэффициенты  $a(n)$  следующим образом выражаются через коэффициенты  $c_f, c_\Phi$  [см. (9)]:

$$\left. \begin{aligned} a^I(n) &= R(n) c_f^2(n); & a_1^{II}(n) &= \frac{6n+5}{5} a^I(n); & a_2^{II} &= \frac{2n+5}{5} a^I(n); \\ a_3^{II} &= \frac{6n+5}{5} R(n) c_\Phi^2(n); & a_4^{II} &= \frac{2n+5}{5} R(n) c_\Phi^2(n); \\ a_5^{II} &= \frac{6n+5}{5} R(n) c_\Phi(n) c_f(n); & a_6^{II} &= \frac{2n+5}{5} R(n) c_\Phi(n) c_f(n); \\ R(n) &= \frac{(2n+3)(2n+1)!}{3}; & c_f(n) &= \frac{2^{2n+1}(-1)^n}{F_\pi^{2n}(2n+2)!} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Далее, поскольку будем интересоваться только однопетлевым приближением  $n = 0$ , то при переходе к импульсному пространству в формулах (10) и (11) будем использовать форму массивных свободных пропагаторов лишь для выражений, стоящих в круглых скобках. Остальные же пропагаторы для простоты можно взять в безмассовой форме (см. приложение 1). Тогда для пионной части амплитуды рассеяния окончательно приходим к выражению

$$A^\pi(s, t, u) = A^I + A^{II};$$

$$A^I = 2 [(t-s) \tilde{\sigma}^I(\bar{u}) + (u-s) \tilde{\sigma}^I(\bar{t})];$$

$$\begin{aligned} A^{II} &= (s - 2m_\pi^2)^2 \tilde{\sigma}_1^{II}(\bar{s}) + (t - 2m_\pi^2)^2 \tilde{\sigma}_2^{II}(\bar{t})/2 + (u - 2m_\pi^2)^2 \tilde{\sigma}_3^{II}(\bar{u})/2 + \\ &+ 4m_\pi^4 \tilde{\sigma}_2^{II}(\bar{s}) + 2m_\pi^4 [\tilde{\sigma}_4^{II}(\bar{t}) + \tilde{\sigma}_4^{II}(\bar{u})] + 4m_\pi^2 (s - 2m_\pi^2) \tilde{\sigma}_5(\bar{s}) + \\ &+ 2m_\pi^2 [(t - 2m_\pi^2) \tilde{\sigma}_6(\bar{t}) + (u - 2m_\pi^2) \tilde{\sigma}_6(\bar{u})], \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\sigma} \left( \frac{q^2}{4m_\pi^2} \right) &= \int d^4x \exp(iqx) \sigma(x); \\ \tilde{\sigma}_{\mu\nu}^I(\bar{\xi}) &= g_{\mu\nu} \sigma^I(\bar{\xi}); \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\sigma}^I(\bar{\xi}) &= -\frac{m_\pi^2 a^I(0)}{3(4\pi F_\pi)^2 F_\pi^2} [\bar{\xi} \gamma^I - 1 + (1 - \bar{\xi}) J(\bar{\xi})]; \\ \sigma_j^{II}(\bar{\xi}) &= \frac{a_j^{II}(0)}{(4\pi F_\pi)^2 F_\pi^2} [-J(\bar{\xi}) + \gamma_j^{II}]; \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma^I &= \ln \frac{4\pi}{m_\pi} - \frac{1}{4} (\ln a^I(z))' |_{z=0} - c + 1; \\ \gamma_j^{II} &= \ln \frac{4\pi}{m_\pi} - \frac{1}{4} (\ln a_j^{II}(z))' |_{z=0} - c + \frac{1}{2}; \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$f'(z) = \frac{d}{dz} f(z);$$

$c$  — постоянная Эйлера. Отсюда для параметров  $A_\pi$ ,  $B_\pi$ ,  $C_\pi$  и  $D_\pi$  получаем [см. (6)]:

$$A_\pi = 6\beta_0 + 33/10 \approx 6,63; \quad B_\pi = 6\beta_0 + 3 \cdot 57/20 \approx 11,8;$$

$$C_\pi = 3; \quad D_\pi = -3/2;$$

$$\beta_0 = \ln(2\pi F_\pi/m_\pi) - 3c/2 \approx 0,541.$$

Обсудим вычисления барионных петель \*. Прежде всего рассмотрим взаимодействие пионов только с нуклонами подобно тому,

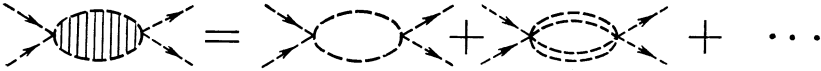


Рис. 3. Суперпропагатор

как это делал Леман [4]. Тогда в низших порядках по  $F_\pi^{-1}$  лагранжиан, описывающий пион-нуклонное взаимодействие, распадается на три части:

$$L_1(\pi, N) = \frac{M_N g_A}{F_\pi} : \bar{\Psi}_N \gamma_5 \tau \pi \Psi_N : \quad (16)$$

$$L_2(\pi, N) = \frac{M_N g_A^2}{2F_\pi^2} : \bar{\Psi}_N \Psi_N \pi^2 : \quad (17)$$

$$L_3(\pi, N) = \frac{(g_A^2 - 1)}{4F_\pi^2} : \bar{\Psi}_N \gamma_\mu \tau (\pi(x) \partial_\mu \pi(x)) \Psi_N : \quad (18)$$

Здесь  $M_N$  — масса нуклона;  $g_A = 1,25$  — перенормировочная константа. При этом в отличие от лагранжиана, данного в приложении 2, здесь введено взаимодействие с производной (18) и произведена перенормировка пион-нуклонных вершин в соответствии с требованиями низкоэнергетических теорем [18, 23] и соотношением Голдбергера — Треймана:

$$g \approx M_N g_A / F_\pi, \quad (19)$$

где  $g$  — сильная константа связи  $g^2/4\pi \approx 14,7$ .

В приближении  $1/F_\pi^4$  в амплитуду лл-рассеяния будут давать вклады пять однопетлевых диаграмм (см. рис. 2). Две из них,  $b$  и  $g$ , содержат вершины, в которые входит связь с производной  $L_3$ . Нас интересуют лишь члены, содержащие  $q^4$ , поскольку следующие члены разложения по  $q^2$  содержат малый множитель  $q^2/M_N^2$ . В этом приближении все диаграммы дают конечный вклад в амплитуду рассеяния пионов, за исключением диаграммы  $b$ , где имеются две вершины с производными. При вычислении этой диаграммы возникает один неопределенный параметр.

\* Здесь кратко изложены результаты, полученные в работах [4, 6].



Поскольку вершины, связанные с  $L_3$ , содержат малый множитель  $(g_A^2 - 1)$ , Леман не рассматривает диаграммы  $b$  и  $z$ , а остальные диаграммы дают конечный вклад в амплитуду рассеяния пионов:

$$\frac{A^N(s, t, u)}{32\pi} = \alpha_0^2 3\pi g_A^4 (-\bar{s}^2 + \bar{t}^2 + \bar{u}^2)/2. \quad (20)$$

Для того чтобы учесть вклад в амплитуду лл-рассеяния остальных членов барионного октета, удобно записать лагранжиан взаимодействия в форме, инвариантной относительно  $SU(3)$ -группы:

$$L(\Phi_i, B_i) = 2g\kappa_{ijk}\bar{B}_i\gamma_5 B_j\Phi_k + 2g^2\kappa_{kim}\kappa_{ilm}\bar{B}_i B_l\Phi_j\Phi_k/M, \quad (21)$$

где  $\Phi_i, B_i$  — октеты псевдоскалярных мезонов и барионов;  $\kappa_{ijk} = \alpha d_{ijk} - i(1 - \alpha)f_{ijk}$ ;  $\alpha$  — параметр  $SU(3)$ -смешивания ( $\alpha \approx 2/3$ ); матрицы  $d$  и  $f$  определены в монографии [18]. Подобные вычисления сделаны в работе [6]. Не останавливаясь здесь на деталях расчетов, проведенных в этой работе, укажем только, что та часть лагранжиана, которая соответствует взаимодействию с производной  $L_3(\Phi, B)$ , уже не будет содержать перед всем выражением малого множителя  $(g_A^2 - 1)$ . Поэтому Хонеркамп рассматривал также диаграммы рис. 2,  $b$  и  $z$ .

Однако оценки, сделанные в работе [6], показали, что если фиксировать неопределенную константу, которая содержится в выражении, соответствующем диаграмме  $b$ , из правильного положения  $\rho$ -резонанса в  $p$ -волне, то вклад в амплитуду от этой диаграммы весьма мал по сравнению с вкладами всех остальных диаграмм. В дальнейших вычислениях будем учитывать вклады только от диаграмм рис. 2,  $a, e, z$  и  $d$ , где все коэффициенты при  $q^2$ -членах строго определены. В результате вместо (20) получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{A_{(1)}^B(s, t, u)}{32\pi} &= \frac{2g_A^4 m_\pi^4}{3\pi^2 F_\pi^4} \left\{ -\bar{s}^2 \left[ \alpha^4 + \frac{34}{3} \alpha^2 (1 - \alpha)^2 + \right. \right. \\ &+ (1 - \alpha)^4 \left. \right] + (\bar{t}^2 + \bar{u}^2) \left[ \frac{13}{9} \alpha^4 + \frac{26}{3} \alpha^2 (1 - \alpha)^2 + 5(1 - \alpha)^4 \right] \left. \right\}; \\ \frac{A_{(2)}^B(s, t, u)}{32\pi} &= \frac{4g_A^2 m_\pi^4}{3\pi^2 F_\pi^4} (2\bar{s}^2 - \bar{t}^2 - \bar{u}^2) \times \\ &\times \left\{ g_A^2 \left[ \frac{11}{9} \alpha^4 + 10\alpha^2 (1 - \alpha)^2 + 3(1 - \alpha)^4 \right] - \left[ \frac{5}{3} \alpha^2 + 3(1 - \alpha)^2 \right] \right\}, \end{aligned}$$

где  $A_{(1)}^B$  — вклад в амплитуду рассеяния от диаграмм рис. 2,  $a, e, d$  без производных в вершинах;  $A_{(2)}^B$  — вклад в амплитуду рассеяния от диаграммы рис. 2,  $z$  с одной вершиной, содержащей производную. Складывая эти выражения, получаем:

$$\frac{A^B(s, t, u)}{32\pi} = \alpha_0^2 \frac{\pi}{2} \{ -6\bar{s}^2 + 8,7(\bar{t}^2 + \bar{u}^2) \}.$$

Учет  $K$ -мезонных петель в рассматриваемой области энергии малозначителен [6, 8].

**Длины парциальных волн и параметры эффективной области взаимодействия.** Следуя работе [24], введем следующие обозначения:

$$\alpha_l^{I(n)} = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{4^n} \frac{\partial^n}{\partial s^n} h_l^I(\bar{s}); \quad \alpha_l^{I(0)} = a_l^I; \quad \alpha_l^{I(1)} = b_l^I; \quad \alpha_l^{I(2)} = c_l^I;$$

$$h_l^I(\bar{s}) = \frac{1}{2(\bar{s}-1)^l} \int_{-1}^1 dx P_l(x) T^I(s, x).$$

Здесь  $a_l^I$  — длины рассеяния;  $b_l^I$  и  $c_l^I$  — параметры эффективной области;  $T$  — амплитуда в канале с изоспином  $I$ ;  $P_l(x)$  — полином Лежандра;

$$T^I = \frac{\pi}{2} \alpha_0 T_B^I + \frac{\pi}{2} \alpha_0^2 \Pi^I;$$

$$T_B^0 = 2(3\bar{s}-1); \quad T_B^1 = 3(\bar{s}-1)x; \quad T_B^2 = -(3\bar{s}-1);$$

$$\begin{aligned} \Pi^0 = & (2B+3A)\bar{s}^2 + (4B+A)(\bar{s}-1)^2(1+x^2)/2 + 2C\bar{s} + C + \\ & + 5D - 4(3\bar{s}-1)^2 J(\bar{s}) - 12G^{(0)}(x); \end{aligned}$$

$$\Pi^1 = (B-A)(\bar{s}-1)^2 x + C(\bar{s}-1)x - 3(\bar{s}-1)^2 J(\bar{s})x + 2G^{(1)}(x);$$

$$\begin{aligned} \Pi^2 = & 2B\bar{s}^2 + (B+A)(\bar{s}-1)^2(1+x^2)/2 - C(\bar{s}-1) + 2D - \\ & - (3\bar{s}-1)J(\bar{s}) - 6G^{(2)}(x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G^{(0)}(x) = & J((1-\bar{s})(1+x)/2) \{(\bar{s}-1)^2 [5[(1+x)/2]^2 - (1+x)/2] + \\ & + (\bar{s}-1)[3(1+x)/2 - 1]\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G^{(1)}(x) = & J((1-\bar{s})(1+x)/2) \{(\bar{s}-1)^2 [6[(1+x)/2]^2 - 3(1+x)/2] + \\ & + 3(\bar{s}-1)[(1+x)/2 - 1] - 1\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G^{(2)}(x) = & J((1-\bar{s})(1+x)/2) \{(\bar{s}-1)^2 [4[(1+x)/2]^2 + \\ & + (1+x)/2] + (\bar{s}-1)[3(1+x)/2 + 1] + 1\}; \end{aligned}$$

$$A = A_\pi + A_B = 0,63; \quad B = B_\pi + B_B = 20,5.$$

Используя формулу  $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx P_l(x) \left(\frac{1+x}{2}\right)^l = \frac{(l!)^2}{(2l+1)!}$ , полу-

чаем значения для длин рассеяния и параметров эффективной области, приведенные в таблице.

Т а б л и ц а

Теоретические значения для длин  $\pi\pi$ -рассеяния и параметров эффективной области, вычисленные в квантовой киральной теории [9], и сравнение их с экспериментальными данными [25] и длинами волн, полученными в феноменологическом подходе [24], с использованием представления Фруассара — Грибова

$\alpha_l^I(n)$	[9]	Эксперимент [25]	Длина волны [24]
$a_0^0$	0,15	[0,10; 0,60]	$0,15 \pm 0,02$
$a_0^2$	-0,042	[-0,10; -0,03]	$-0,065 \pm 0,025$
$a_1^1$	0,031	[0,032; 0,040]	$0,0341 \pm 0,0036$
$b_1^1$	$1,14 \cdot 10^{-3}$	—	$(1,07 \pm 0,27) \cdot 10^{-3}$
$a_2^0$	$1,85 \cdot 10^{-3}$	[ $1,4 \cdot 10^{-3}$ ; $1,8 \cdot 10^{-3}$ ]	$(1,48 \pm 0,08) \cdot 10^{-3}$
$a_2^2$	$2,6 \cdot 10^{-4}$	[ $-2 \cdot 10^{-4}$ ; $3 \cdot 10^{-4}$ ]	$(-3 \pm 8) \cdot 10^{-5}$
$b_2^0$	$-1,02 \cdot 10^{-4}$	—	$(-3,8 \pm 1,1) \cdot 10^{-5}$
$b_2^2$	$-5,1 \cdot 10^{-5}$	—	$(-4,4 \pm 1,1) \cdot 10^{-5}$
$c_2^0$	$2 \cdot 10^{-5}$	—	$(1,13 \pm 0,36) \cdot 10^{-5}$
$c_2^2$	$1,06 \cdot 10^{-5}$	—	$(1,27 \pm 0,36) \cdot 10^{-5}$
$a_3^1$	$1,33 \cdot 10^{-5}$	—	$(3,8 \pm 0,5) \cdot 10^{-5}$
$a_4^0$	$5 \cdot 10^{-6}$	—	$(4,8 \pm 0,8) \cdot 10^{-6}$
$a_4^2$	$2 \cdot 10^{-6}$	—	$(1,7 \pm 0,8) \cdot 10^{-6}$

При  $l \geq 3$  из приведенных выше формул можно получить следующие простые выражения:

$$a_l^0 = (2l+1)(4l+7)Z_l; \quad a_l^1 = (4l^2 - 2l - 1)Z_l/3;$$

$$a_l^2 = (4l^2 + 3l + 8)Z_l;$$

$$Z_l = 3\pi\alpha_0^2 4^{l-1} \Gamma^3(l+1) \Gamma(l-2) / [\Gamma(2l+2)]^2.$$

Результаты [9], приведенные в таблице, хорошо согласуются с известными экспериментальными данными [24, 25], а также с результатами феноменологического подхода Палоу и Индураина [24]. В их модели существенно используется представление Фруассара — Грибова. В таблице приведены результаты, соответствующие такому выбору параметров в этой модели, который приводит к значению  $a_0^0 = 0,15$  (см. табл. 2 в работе [24]).

Все длины рассеяния для  $l \geq 3$  удовлетворяют неравенствам

$$a_{l+2}^I \leq a_l^I (l+1)(l+2) / [4(2l+3)(2l+5)],$$

найденным в работе [22] из унитарности и аналитичности амплитуды рассеяния. Отметим, что в борновском приближении все длины рассеяния равны нулю, за исключением  $a_0^0$ ,  $a_0^2$ ,  $a_1^1$ . Приведем их значения

$$m_\pi a_{0B}^0 = 2\pi\alpha_0 = 0,12; \quad m_\pi a_{0B}^2 = -\pi\alpha_0 = -0,06;$$

$$m_\pi^3 a_{1B}^1 = \pi\alpha_0/2 = 0,03.$$

**Фазовый анализ для  $s$ - и  $p$ -волн.** При вычислении парциальных амплитуд, удобно использовать формулу

$$J_n(a) = \int_0^a dx J(-x) x^n = \frac{a^{n+1}}{2(n+1)} \left( \Gamma - \frac{1}{n+1} \right) +$$

$$+ \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^{n+2} (n+1)!} \left[ \frac{L}{2} + \sum_{l=1}^n (-2a)^l \frac{(l-1)!}{(2l-1)!!} \left( \Gamma - \frac{1}{l} \right) \right];$$

$$\Gamma = Y \ln [(Y+1)/(Y-1)]; \quad L = \left( \ln \frac{Y+1}{Y-1} \right)^2;$$

$$Y = (1+1/a)^{1/2}; \quad a = \bar{s} - 1.$$

В результате приходим к выражению

$$t_l^I = \frac{\pi}{2} \alpha_0 B_l^I(\bar{s}) + i \left( \frac{\pi}{2} \alpha_0 B_l^I(\bar{s}) \right)^2 \left( 1 - \frac{1}{s} \right)^{1/2} + \frac{\pi}{2} \alpha_0^2 \Pi_l^I(\bar{s}). \quad (22)$$

Здесь  $B_l^I$  — вклад от борновского члена;  $\Pi_l^I$  — реальная часть вклада от однопетлевых диаграмм;

$$B_0^0 = 2(3\bar{s} - 1); \quad B_0^2 = -(3\bar{s} - 1); \quad B_1^1 = (\bar{s} - 1);$$

$$\Pi_0^0 = -\operatorname{Re} J(\bar{s}) 4(3\bar{s} - 1)^2 - 12 [5J_2(a)/a + (3/a - 1)J_1(a) - J_0(a)] +$$

$$+ 2a^2(4B + A)/3 + \bar{s}^2(2B + 3A) + C_\pi(2\bar{s} + 1) + 5D_\pi;$$

$$\Pi_0^2 = -\operatorname{Re} J(\bar{s}) (3\bar{s} - 1)^2 - 6 [4J_2(a)/a + (a + 3)J_1(a)/a +$$

$$+ (a + 1)J_2(a)/a] + 2a^2(A + B)/3 + 2B\bar{s}^2 - aC_\pi - 2D_\pi;$$

$$\Pi_1^1 = -\operatorname{Re} J(\bar{s}) a^2 + \frac{2}{a} \left[ 6 \left( \frac{2J_3(a)}{a} - J_2(a) \right) - \right.$$

$$\left. - 3(a - 1) \left( \frac{2J_2(a)}{a} - J_1(a) \right) - (3a + 1) \times \right.$$

$$\left. \times \left( \frac{2J_1(a)}{a} - J_0(a) \right) \right] + \frac{a^2(B - A)}{3} + \frac{aC}{3}.$$

Фазы рассеяния будем вычислять, используя хорошо известную формулу двучастичной унитарности:

$$(\operatorname{ctg} \delta_l^I - i)^{-1} = (1 - 1/\bar{s})^{1/2} t_l^I. \quad (23)$$

Формула (22) унитарна в околороговой области энергии  $\bar{s} \sim 1$  с точностью до  $\alpha_0^3$ . Для того чтобы извлечь информацию о фазе рассеяния из амплитуды (22) в области энергий  $\bar{s} \sim 7 \div 8$ , где вклад от однопетлевых диаграмм по порядку величины совпадает с вкладом от борновского приближения, проведем процедуру

унитаризации. Эта процедура заключается в разложении (23) по параметру  $\alpha_0$  и фактически совпадает с паде-приближением:

$$\operatorname{ctg} \delta_l^I = \frac{B_l^I(\bar{s}) - \alpha_0 \Pi_l^I(\bar{s})}{\pi \alpha_0 (1 - 1/\bar{s})^{1/2} [B_l^I(\bar{s})]^2 / 2}.$$

При  $m_\pi = 0$  это выражение совпадает с тем, которое получил Леман [4], разлагая  $\operatorname{ctg} \delta_l^I$  при малых  $q^2$  (приближение «эффektiv-

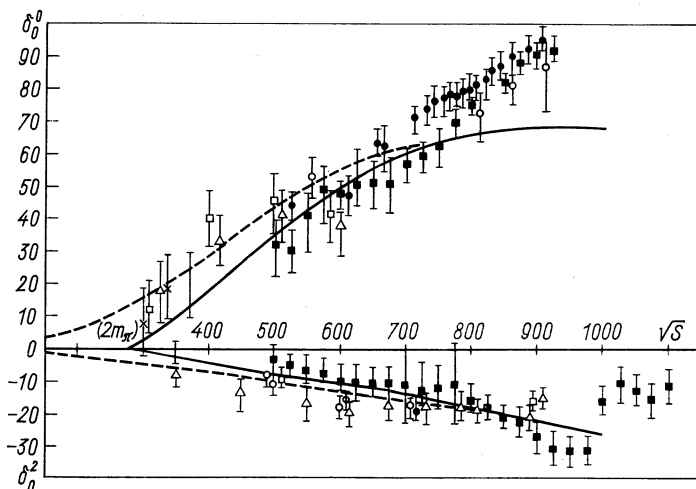


Рис. 4. Фазы  $s$ -волн,  $I = 0$ ,  $I = 2$ :  
 - - - - -  $m_\pi = 0$ ; —  $m_\pi \neq 0$ ; экспериментальные данные  
 взяты из работы [6]

ного радиуса»). Поведение фаз  $\delta_0^0$ ,  $\delta_0^2$  и  $\delta_1^1$  приведено на рис. 4, 5. В  $p$ -волне хорошо виден  $\rho$ -мезонный резонанс при энергии примерно 800 Мэв. Из рисунков видно, что при энергиях около 800 Мэв учет масс пионов становится совершенно несущественным. Отметим также, что поведение  $\delta_0^0$  в околороговой области заметно зависит от выбора пионных координат в силу нарушенной киральной симметрии при  $m_\pi \neq 0$ . Например, при выборе параметризации Вайнберга угол наклона фазы  $\delta_0^0$  в области порога, а значит и длина рассеяния  $a_0^0$ , увеличивается на 30%; соответствующая кривая фазы  $\delta_0^0$  начиная с порога идет между кривыми с  $m_\pi = 0$  и  $m_\pi \neq 0$  (см. рис. 4).

**Проверка неравенств Мартена.** Из условий унитарности и поперечной симметрии Мартеном в работе [22] получены различные строгие неравенства для парциальной  $s$ -волны амплитуды  $\pi^0 \pi^0 \rightarrow$

→  $\pi^0\pi^0$  при  $0 \leq \bar{s} \leq 1$ :

$$f_0^{00}(\bar{s}) = \frac{1}{64\pi} \int_{-1}^1 dx [A(s, t, u) + A(t, s, u) + A(u, t, s)].$$

Выпишем эти неравенства:

$$\left. \begin{aligned} f_0^{00}(\bar{s}) &< f_0^{00}(1), & 0 \leq \bar{s} \leq 1; \\ df_0^{00}(\bar{s})/d\bar{s} &> 0, & 0,5 \leq \bar{s} \leq 1; \\ f_0^{00}(0) &\geq 2 \int_{0,5}^1 f_0^{00}(\bar{s}) d\bar{s}; \\ f_0^{00}(0) &> f_0^{00}(1/2(1 + 1/\sqrt{3})); \\ df_0^{00}(\bar{s})/d\bar{s} &< 0; & 0 \leq \bar{s} \leq 1,29/4; \\ df_0^{00}(\bar{s})/d\bar{s} &> 0; & 1,7/4 \leq \bar{s} \leq 1,76/4; \\ f_0^{00}(0,8) &> f_0^{00}(0,21/4) > f_0^{00}(2,98/4). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Прямые вычисления показывают, что амплитуда (2) удовлетворяет всем перечисленным выше неравенствам. Более просто в этом можно убедиться из следующих рассуждений.

Амплитуда  $A(s, t, u)$  в области  $0 \leq \bar{s} \leq 1$  с довольно хорошей точностью воспроизводится приближенной формулой  $A(s, t, u) \approx \pi\alpha_0(3\bar{s}-1)/2 + \pi\alpha_0^2 \times [\bar{A}s^2 + B(\bar{t}^2 + \bar{u}^2) + \bar{C}\bar{s} + D]/2$ ;

$$A = A_\pi + A_B = 0,63;$$

$$B = B_\pi + B_B = 2,05;$$

отсюда

$$f_0^{00}(\bar{s}) \approx \pi\alpha_0^2 [(2B + A) \times (5\bar{s}^2 - 4\bar{s} + 2) + 3D + C]/6.$$

Легко видеть, что параболическая функция

$$f_0^{00}(\bar{s}) = \beta(5\bar{s}^2 - 4\bar{s} + 2) + \gamma$$

удовлетворяет условиям (24) при произвольных  $\beta > 0$  и  $\gamma$ . Таким образом, для выполнения неравенств Мартена достаточно, чтобы  $2B + A > 0$ . Поскольку это условие у нас выполнено, то все неравенства Мартена удовлетворяются

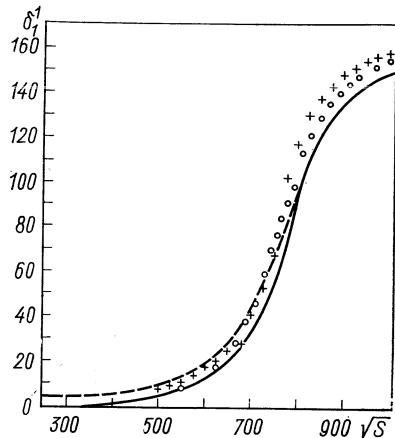


Рис. 5. Фаза  $p$ -волны,  $I = 1$ :  
 - - - - -  $m_\pi = 0$ ; —————  $m_\pi \neq 0$ ;  
 экспериментальные данные взяты из работы [5]

2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПИОНОВ

Вводя в киральный лагранжиан [см. (П.21), (П.22)] взаимодействия с электромагнитным полем

$$\partial_\mu \Psi_p \rightarrow \partial_\mu \Psi_p - ieA_\mu \Psi_p;$$

$$\partial_\mu \pi^\pm \rightarrow \partial_\mu \pi^\pm \mp ieA_\mu \pi^\pm;$$

$$\pi^\pm = (\pi_1 \mp i\pi_2)/\sqrt{2},$$

получаем возможность описывать электромагнитные свойства пиона. Покажем, как вычисляется электромагнитный форм-фактор пиона, его среднеквадратический радиус и поляризуемость пиона, а также амплитуды процессов  $\gamma\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-$  ( $\pi^0\pi^0$ ) и электромагнитного распада нейтрального пиона [7, 10, 26].

**Электромагнитный форм-фактор пиона [7].** Выпишем матричный эле-

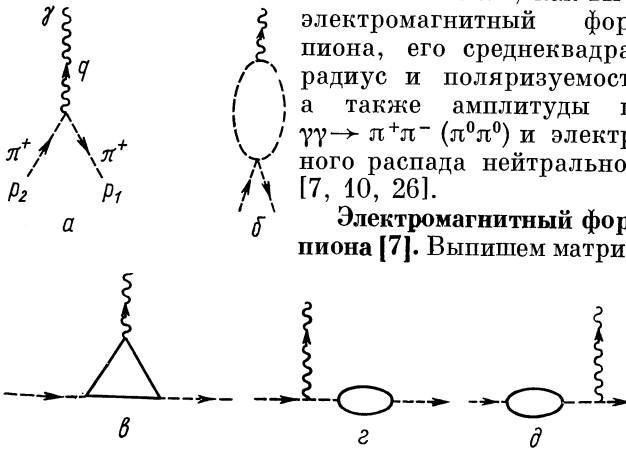


Рис. 6. Пионные (а, б) и нуклонные (в, г, д) диаграммы для формфактора

мент для пиона, находящегося во внешнем электромагнитном поле

$$\langle p_1 | S | p_2 \rangle = -ie p_\mu A_\mu(q) \Phi(q), \tag{25}$$

где  $p_1$  и  $p_2$  — импульсы пионов (рис. 6, а);  $p = p_1 + p_2$ ;  $q = p_1 - p_2$ . В однопетлевом приближении форм-фактор  $\Phi$  представлен в виде

$$\Phi(q) = 1 + \Phi^\pi(q) + \Phi^B(q) + 0(1/F_\pi^4). \tag{26}$$

Здесь 1 — борновский член;  $\Phi^\pi(q)$  — вклад от однопетлевой пионной диаграммы;  $\Phi^B(q)$  — вклад от барионных петель. Вычислим вклад от пионной петли (см. диаграмму на рис. 6, б). Интеграл, соответствующий этой диаграмме, квадратично расходится. Чтобы получить конечное выражение для этой части форм-фактора, необходимо использовать СП-метод. Рассмотрим бесконечный ряд диаграмм с двумя вершинами и произвольным числом внутренних

линий. Соответствующая часть  $S$ -матрицы для этих диаграмм имеет вид \*:

$$S_{\pi} = -i^2 e N_{\varphi} T_{\Gamma}^{\pi} \left[ \int d^4 x_1 L_{\Gamma}(\varphi | \Gamma) \int d^4 x_2 f(\Gamma^2) A_{\mu}(x_2) (\partial_{\mu} \Gamma \times \Gamma)_3 \right]$$

[см. обозначения и пояснения к формулам (7) — (9)]. После перехода от  $T^*$  к  $N$  произведению полей  $\Gamma$  получим

$$\langle p_1 | S_{\pi} | p_2 \rangle = -i e p_{\mu} A_{\nu}(q) \bar{\Phi}_{\mu\nu}^{\pi}(q);$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{\mu\nu}^{\pi}(q) = & i \frac{4}{3F_{\pi}^2} \int d^4 x \exp(iqx) [\partial_{\mu} \Delta^c(x) \partial_{\nu} \Delta^c(x) - \Delta^c(x) \partial_{\mu} \partial_{\nu} \Delta^c(x)] \times \\ & \times \sum_0^{\infty} \left( \frac{-4i\Delta^c(x)}{F_{\pi}^2} \right)^{2n} \frac{2n+3}{(2n+2)(2n+2)!}. \end{aligned}$$

Выражение  $\bar{\Phi}_{\mu\nu}^{\pi}$  с точностью до коэффициента совпадает с вычисленным в разд. 1 выражением  $\sigma_{\mu\nu}^I$  [см. (10), (13) и (14)]. Таким образом, для  $\Phi^{\pi}(q)$  получим

$$\begin{aligned} \Phi^{\pi}(q) = & \alpha_0 \{ \bar{\xi} \gamma^I - 1 + (1 - \bar{\xi}) J(\bar{\xi}) \} = \\ = & \frac{q^2}{6} \cdot \frac{1}{(2\pi F_{\pi})^2} \frac{1}{2} \left( \gamma^I - \frac{4}{3} \right) + O(q^4), \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\bar{\xi} = \frac{q^2}{4m_{\pi}^2}; \quad J(\bar{\xi}), \alpha_0 \text{ и } \gamma^I \text{ определены формулами (3), (5) и (15);}$$

$$\gamma^I = \ln \left( \frac{2\pi F_{\pi}}{m_{\pi}} \right) - 3c/2 + 11/6 \approx 2,4.$$

Из (27) видно, что пионная петля дает следующий вклад в квадратичный радиус:

$$\langle r^2 \rangle_{\pi} = \frac{1}{(2\pi F_{\pi})^2} \frac{1}{2} \left( \gamma^I - \frac{4}{3} \right) \approx 0,065 \text{ ферми}^2. \quad (28)$$

При энергиях  $q^2 >$ ,  $4m_{\pi}^2$  форм-фактор становится комплексным, и в приближении двучастичной унитарности можно с погрешностью до  $\alpha_0^2$  написать

$$1 + \Phi^{\pi}(q) \approx |\Phi| \exp(i\delta_1^{\pi}),$$

\* Здесь, как и в разд. 1, используется теория возмущений в кривом изопространстве пионов. Подобные вычисления в обычной теории возмущения проводились в работе [7]. Результаты двух этих подходов в данном случае мало отличаются.



где  $\delta_1^1$  — фаза  $p$ -волны  $\pi\pi$ -рассеяния. Длина  $p$ -волны в полном соответствии с вычислениями, проведенными в разд. 1:

$$m_\pi^3 a_1^1 = \alpha_0 \frac{\pi}{2} \approx 0,03.$$

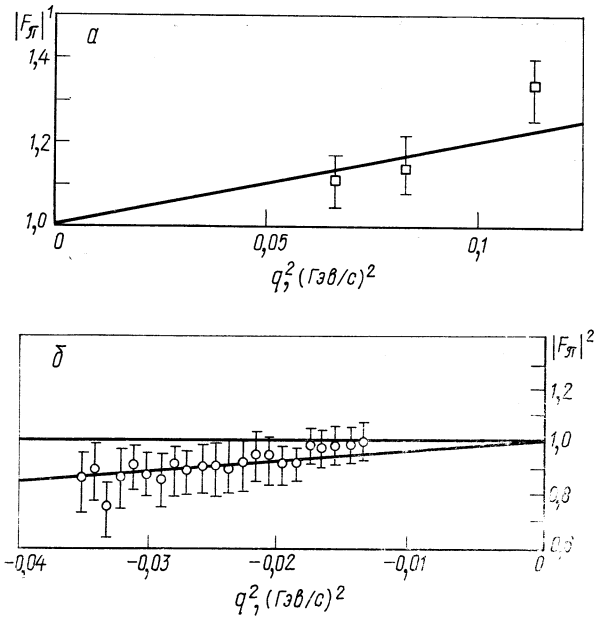


Рис. 7. Поведение форм-фактора при малых  $|q^2|$ :  
 — — теоретические значения;  $\square$  — экспериментальные точки из работы [27];  $\circ$  — из работы [28]

Вклад от барионных диаграмм вычисляется с точностью до  $q^2$ , поскольку члены с более высокими степенями по  $q^2$  порядка  $o((q^2/M_B^2)^2)$  и несущественны в области низких энергий. Константные члены в барионных диаграммах взаимно компенсируются в силу тождеств Уорда (см. рис. 6,  $\sigma = \partial$ ). Остающиеся интегралы уже конечны и их можно вычислить обычным способом. В результате для  $\Phi^B(q)$  получаем \*

$$\Phi^B(q) = \frac{q^2}{6} \left( \frac{g}{2\pi M_N} \right)^2 \left[ 1 + \frac{4}{9} \left( \frac{M_N}{M_\Sigma} \right)^2 + \right.$$

\* Здесь использованы известные соотношения между сильными константами, следующие из  $SU(3)$ -теории и экспериментальных данных [см. (24)]:  $|g_{\pi\Sigma\Sigma}| = \sqrt{2}g/3$ ;  $|g_{\pi\Sigma\Lambda}| = 2\sqrt{2}g/3\sqrt{3}$ ;  $|g_{\pi\Sigma\Sigma}| = g/3$ ;  $|g_{\pi NN}| = g$ .

$$+ \frac{16}{27} \left( \frac{M_N}{M_{\Lambda\Sigma}} \right)^2 + \frac{1}{9} \left( \frac{M_N}{M_{\Xi}} \right)^2 \Big] \approx \frac{q^2}{6} \left( \frac{g_A}{2\pi M_N} \right)^2 1,73, \\ \langle r^2 \rangle_B = 0,356 \text{ ферми}^2. \quad (29)$$

Из (28) и (29) следует для радиуса  $\pi$ -мезона значение

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{\langle r^2 \rangle_{\pi} + \langle r^2 \rangle_B} = 0,65 \text{ ферми},$$

которое находится в удовлетворительном согласии с последними экспериментальными данными [27, 28]. Подставляя в (26) найденные функции  $\Phi^{\pi}(q)$  и  $\Phi^B(q)$ , приходим к выражению

$$\Phi(q) = 1 + \alpha_0 \{ -1 + 8,6\bar{\zeta} + (1 - \bar{\zeta}) J(\bar{\zeta}) \}. \quad (30)$$

Эта формула хорошо описывает поведение форм-фактора в области малых  $q^2$ , а также в пороговой области.

Абсолютные значения форм-фактора  $\pi$ -мезона, вычисленные по формуле (30) в области энергий  $|q| \ll 1 \text{ Гэв}$ , хорошо согласуются с экспериментальными данными, полученными в Дубне [27, 28]. Соответствующие значения форм-фактора приведены на рис. 7.

Проведенные вычисления показывают, что радиус  $\pi$ -мезона почти целиком определяется вкладом барионных треугольных диаграмм в  $\pi$ -мезонный форм-фактор.  $\pi$ -Мезонные петли, так же как и  $K$ -мезонные петли, дают малый вклад в  $q^2$  член форм-фактора. В то же время учет  $\pi$ -мезонной петли крайне важен для правильного описания порогового поведения форм-фактора. Тем самым совокупность рассмотренных диаграмм полностью определяет поведение форм-фактора в низкоэнергетической области.

**Амплитуда процесса  $\gamma\gamma \rightarrow \pi\pi$  и поляризуемость пиона [10].**  
Амплитуда процесса  $\gamma\gamma \rightarrow \pi\pi$  определяется формулой

$$\langle \pi^a(p_1) \pi^b(p_2) | S | \gamma_{\lambda_1}(q_1) \gamma_{\lambda_2}(q_2) \rangle = \\ = (2\pi)^4 i \delta^4(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) \varepsilon_{\lambda_1}^{\mu} \varepsilon_{\lambda_2}^{\nu} T_{ab}^{\mu\nu}(p_1 p_2 | q_1 q_2), \quad (31)$$

где  $q_1, q_2$  — импульсы фотонов;  $\varepsilon_{\lambda_1}^{\mu}, \varepsilon_{\lambda_2}^{\nu}$  — их поляризации;  $p_1, p_2$  — импульсы пионов;  $a, b$  — их изотопические индексы. Не приводя здесь общего вида ковариантной амплитуды  $T_{ab}^{\mu\nu}$ , выпишем лишь ту форму, которая получается в первых двух порядках теории возмущений:

$$T_{ab}^{\mu\nu} = 2e^2 \{ \delta_{ab} - \delta_{a3}\delta_{b3} \} \{ g^{\mu\nu} - p_1^{\mu} p_2^{\nu} / (p_1 q_1) - p_1^{\nu} p_2^{\mu} / (p_1 q_2) + \\ + (g^{\mu\nu} q_1 q_2 - q_1^{\nu} q_2^{\mu}) [ \beta^{(\pi)}(q_1 q_2) + \beta^{(N)} ] \} + \\ + 4e^2 \delta_{a3}\delta_{b3} (g^{\mu\nu} q_1 q_2 - q_1^{\nu} q_2^{\mu}) \beta^{(\pi)}(q_1 q_2). \quad (32)$$

Первые три члена в фигурных скобках являются борновскими членами (рис. 8);  $\beta^{(\pi)}(q_1q_2)$  — вклад в амплитуду от пионных петель (рис. 9);  $\beta^{(N)}$  — вклад от нуклонных петель (рис. 10). В  $\beta^{(N)}$  удержаны лишь постоянные члены, так как остальные члены малы в рассматриваемой области энергий, и учтены равенства  $p_1^2 = p_2^2 = m^2$  ( $m = m_\pi$ ),  $q_1^2 = q_2^2 = (q_1\varepsilon_1) = (q_2\varepsilon_2) = 0$ . При этом для  $\beta^{(\pi)}(q_1q_2)$  и  $\beta^{(N)}$  получаются следующие выражения:

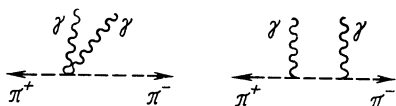


Рис. 8. Диаграммы-деревья (процесс  $\gamma\gamma \rightarrow \pi\pi$ )

$$\beta^{(\pi)}(q_1q_2) = \left(1 - \frac{2}{3} \frac{m^2}{q_1q_2}\right) \left\{ \frac{2m^2}{q_1q_2} \times \right. \\ \left. \times \left[ \arctg \left( \frac{2m^2}{q_1q_2} - 1 \right)^{-1/2} \right]^2 - 1 \right\} \frac{1}{(4\pi F_\pi)^2}; \quad (33)$$

$$\beta^{(N)} = (g_A/2\pi F_\pi)^2/6. \quad (34)$$

Покажем теперь, как вычисляются эти величины.

*а. Пионные петли.* Нетрудно убедиться в том, что при параметризации «нормальных координат» для кирального лагранжиана (8) совместный вклад диаграмм рис. 9, а, б калибровочно-инвариантен и не содержит никаких расходимостей\*. Вклад от диа-

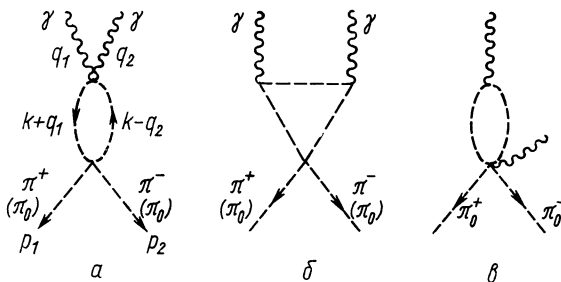


Рис. 9. Пионные петли (процесс  $\gamma\gamma \rightarrow \pi\pi$ )

граммы рис. 9, в на массовой поверхности фотона равен нулю. Часть  $S$ -матрицы, соответствующая диаграммам рис. 9, а, б:

$$S_{\pi\gamma} = N_\varphi N_A T_\Gamma^* \left\{ i \int d^4x \left[ -\frac{m^2\varphi^a\varphi^b}{3} + \partial_\mu\varphi^a \partial_\mu\varphi^b \right] : (\Gamma^a\Gamma^b - \Gamma^2\delta_{ab}) : \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{(ie)^2}{2!} \left( \int d^4y A_\mu(y) (:\partial_\mu\Gamma \times \Gamma:)_3 \right)^2 + \frac{ie^2}{2} \int d^4y A_\mu^2 : (\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2) : \right] \right\},$$

\* Нужно отметить, что в обычной теории возмущения в произвольной параметризации возникают также диаграммы «пузыри», где пионная линия входит и выходит из одной и той же точки. Вклад от этих диаграмм запрещен градиентной инвариантностью [10]. Физические результаты не зависят от метода вычисления.

приводит к следующему интегралу Фейнмана в матричном элементе:

$$\Lambda_{\mu\nu}^{(m)}(q_1 q_2) = \frac{1}{i\pi^2} \int \frac{d^4 k}{(m^2 - (k + q_1)^2 - i\epsilon)(m^2 - (k - q_2)^2 - i\epsilon)} \times \left[ g^{\mu\nu} + \frac{4k_\mu k_\nu}{m^2 - k^2 - i\epsilon} \right]. \quad (35)$$

В результате имеем

$$\Lambda_{\mu\nu}^{(m)}(q_1 q_2) = \left( g^{\mu\nu} - \frac{q_1^\nu q_2^\mu}{q_1 q_2} \right) \left\{ \frac{2m^2}{q_1 q_2} \left[ \operatorname{arctg} \left( \frac{2m^2}{q_1 q_2} - 1 \right)^{-1/2} \right]^2 - 1 \right\}.$$

Отсюда сразу следует формула (33). Отметим важное свойство поляризационной функции (33). С увеличением энергии  $\sqrt{s} = \sqrt{2q_1 q_2}$  от нуля до порога двухпионного рождения эта функция резко изменяется:

$$(4\pi F_\pi)^2 \beta^{(\pi)}(q_1 q_2) |_{q_1 q_2=0} = -1/9;$$

$$(4\pi F_\pi)^2 \beta^{(\pi)}(q_1 q_2) |_{q_1 q_2=2m_\pi^2} = 2[\pi^2/4 - 1]/3 \approx 1.$$

В пределе  $m = 0$  (или  $q_1 q_2 \gg m^2$ )

$$(4\pi F_\pi)^2 \beta^\pi(q_1 q_2) |_{q_1 q_2 \gg m^2} = -1.$$

Результат (33) получен в экспоненциальной параметризации (нормальные координаты). Скажем несколько слов о возможном произволе, связанном с выбором массового члена в лагранжиане лл-взаимодействия:

$$\mathcal{L}_{\Phi\Phi}^I = -\frac{1}{(2F_\pi)^2} [\Phi^2 (\partial_\mu \Phi)^2 - cm^2 (\Phi^2)^2] + o(\Phi^6),$$

где  $c = 1/3$  для нормальных координат;  $c = 1/4$  для параметризации Вайнберга и для определения массового члена с помощью линейной реализации киральной симметрии (представление (1/2, 1/2) [29]). Расчет амплитуды (31) для произвольного  $c$  приводит к следующему выражению:

$$\begin{aligned} T_{ab}^{\mu\nu} &= (T_{ab}^{\mu\nu})^{\text{Борн}} + (g^{m\nu} q_1 q_2 - q_1^\nu q_2^\mu) \times \\ &\times 2e^2 (\delta_{ab} - \delta_{a3} \delta_{b3}) \beta^{(N)} + 4e^2 \frac{m^2}{(4\pi F_\pi)^2} \Lambda_{\mu\nu}^{(m)}(q_1 q_2) \times \\ &\times \left\{ (\delta_{ab} - \delta_{3a} \delta_{3b}) \left[ \frac{q_1 q_2}{2m^2} + 2c - 1 \right] + \delta_{3a} \delta_{3b} \left[ \frac{q_1 q_2}{m^2} + c - 1 \right] \right\}. \quad (36) \end{aligned}$$

Как уже говорилось выше, в силу геометрических соображений здесь были выбраны нормальные координаты. Существуют также не зависящие от групповых физические аргументы в пользу возможного ограничения константы  $c$ . Предполагая, что фазы лл-рассеяния не зависят от пионной массы при энергиях около

800 Мэв и не меняют своего знака от порога до этой энергии (гипотеза гладкости), получаем следующие ограничения на длины рассеяния:

$$\left. \begin{aligned} a_0^0 &= L(3 - 5c) \geq 0; \\ a_0^2 &= -L2c \leq 0; \end{aligned} \right\} L = 3\pi\alpha_0 m^{-1}/2 \sim 0,1 m^{-1};$$

отсюда

$$0 \leq c \leq 3/5.$$

б. *Нуклонные петли.* Матричный элемент, соответствующий диаграмме, изображенной на рис. 10, а, выражается через интеграл Фейнмана (35) с заменой  $m \rightarrow M$ :

$$\Lambda_{\mu\nu}^{(10a)} = \Lambda_{\mu\nu}^{(M)} - (g^{\mu\nu} q_1 q_2 - q_1^\nu q_2^\mu) \Lambda^{(M)},$$

$$\Lambda^{(M)} = \frac{1}{i\pi^2} \int \frac{d^4 k}{(M^2 - k^2 - i\epsilon)(M^2 - (k + q_1)^2 - i\epsilon)(M^2 - (k - q_2)^2 - i\epsilon)}.$$

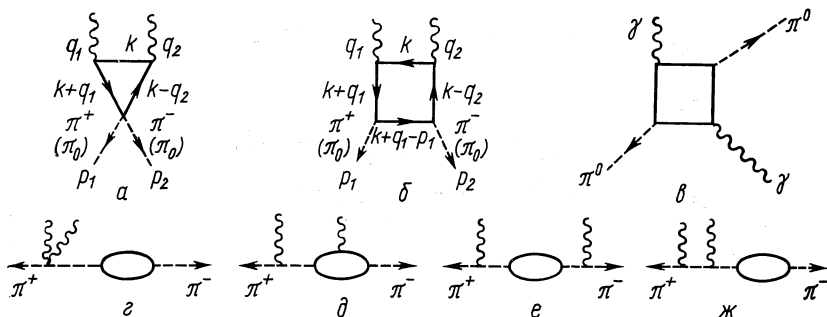


Рис. 10. Нуклонные петли (процесс  $\gamma\gamma \rightarrow \pi\pi$ )

Вклад в амплитуду (32) от этой диаграммы

$$T_{ab}^{\mu\nu} = 2e^2 \delta_{ab} (g^{\mu\nu} q_1 q_2 - q_1^\nu q_2^\mu) \frac{g_A^2}{3(2\pi F_\pi)^2} \left[ 1 + o\left(\frac{q^2}{M^2}, \frac{m^2}{M^2}\right) \right]. \quad (37)$$

Матричные элементы, соответствующие диаграммам, изображенным на рис. 10, б — ж, следует вычислять совместно. Результат будет конечным и калибровочно-инвариантным:

$$T_{ab}^{\mu\nu} = 2e^2 (g^{\mu\nu} q_1 q_2 - q_1^\nu q_2^\mu) \times$$

$$\times \left[ -\frac{g_A^2}{3(2\pi F_\pi)^2} \delta_{ab} + \frac{g_A^2}{6(2\pi F_\pi)^2} (\delta_{ab} - \delta_{a3} \delta_{b3}) \right] \times$$

$$\times \left( 1 + o\left(\frac{q^2}{M^2}, \frac{m^2}{M^2}\right) \right). \quad (38)$$

Из (37) и (38) следуют (32) и (34). Таким образом, вклад нуклонных диаграмм в амплитуду рождения нейтральных пионов  $\gamma\gamma \rightarrow$

→  $\pi^0 \pi^0$  равен нулю, а в амплитуду рождения заряженных пионов — на порядок больше, чем вклад от пионных петель, при  $q_1 q_2 \ll m_\pi^2$ .

Учет гиперонных петель приводит к появлению коэффициента перед  $\beta^{(N)}$ , равного

$$1 + \frac{44}{27} \left(\frac{M_N}{M_\Sigma}\right)^2 + \frac{1}{9} \left(\frac{M_N}{M_\Xi}\right)^2 - \frac{16}{27} \left(\frac{M_N}{M_{\Sigma\Delta}}\right)^2 \approx 1,7;$$

каонные петли дают пренебрежимо малую поправку к  $\beta^{(\pi)}(q_1 q_2)$  порядка  $o(m_\pi^2/m_K^2)$ .

Определяя поляризуемость пиона как коэффициент эффективного взаимодействия пиона с внешним электромагнитным полем

$$V_{int} = -\alpha_\pi (E^2 - H^2)/2,$$

получаем

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\pi^\pm} &= \alpha_{\pi^\pm}(q_1 q_2) |_{q_1 q_2=0} = e^2 (\beta^{(\pi)}(0) + \beta^{(B)})/m = 0,31\alpha/m^3; \\ \alpha_{\pi^0} &= \alpha_{\pi^0}(q_1 q_2) |_{q_1 q_2=0} = 2e^2 \beta^{(\pi)}(0)/m = -0,04\alpha/m^3; \\ \alpha &= e^2/4\pi. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Как уже было отмечено, функция  $\beta^{(\pi)}(q_1 q_2)$  быстро меняется в пороговой области. В результате при  $q_1 q_2 = 2m^2$  получаем

$$\alpha_{\pi^\pm}(2m^2) = 0,51\alpha/m^3; \quad \alpha_{\pi^0}(2m^2) = 0,36\alpha/m^3.$$

Значение  $\alpha_{\pi^\pm}$  по порядку величины согласуется с теми результатами, которые получены из алгебры токов [30] и в кварковых моделях [31]. Значение  $\alpha_{\pi^0}$  отличается от значений работы [30], где получено  $\alpha_{\pi^0} = 0$ . Этот результат в работе [30] следует из требования киральной инвариантности. Аналогичным примером процесса, амплитуда которого должна быть равна нулю, если требовать киральную инвариантность после включения взаимодействия с электромагнитным полем, является электромагнитный распад нейтрального пиона\*. Впервые этот процесс в рамках рассматриваемой теории был вычислен в работе Стейнбергера [26].

В однопетлевом приближении (рис. 11) амплитуда  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  имеет вид:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= f \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} q_1^\alpha q_2^\beta; \\ f &= -e^2 g_A / [(2\pi)^2 F_\pi] = -0,59\alpha/m, \end{aligned} \quad (40)$$

где  $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$  — полностью антисимметрический тензор;  $q$  — импульс фотона. В настоящее время известны два экспериментальных значения  $|f| = (0,45 [33]; 0,57 [34])$ .

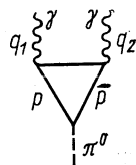


Рис. 11. Диаграмма для процесса  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$

\* Этот вопрос подробно обсуждается в обзоре [32].

## 3. СЛАБЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

**Вычисления амплитуд распадов пионов [12].** Вычислим в однопетлевом приближении амплитуды всех основных распадов пионов:

$$1) \pi^\pm \rightarrow \mu^\pm \nu; \quad 2) \pi^\pm \rightarrow \mu^\pm \nu \gamma; \quad 3) \pi^\pm \rightarrow \pi^0 e^\pm \nu.$$

Как было показано в разд. 2, форм-фактор и поляризуемость пиона в основном определяются взаимодействием пионов с барионами.

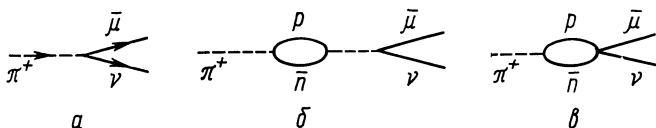


Рис. 12. Диаграммы для процесса  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}$

Поскольку для интересующих нас распадов пионов имеет место подобная ситуация, будем в дальнейшем пренебрегать чисто л-взаимодействием.

Исходим из следующего лагранжиана слабого взаимодействия

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{b3} = & L_\mu^{(+)} [ -\sqrt{2} F_\pi (\partial_\mu \pi^* + i e A_\mu \pi^*) - \\ & - i \sqrt{2} (\pi^* \partial_\mu \pi^0 - \pi^0 \partial_\mu \pi^*) + \bar{\psi}_p \gamma_\mu (1 - i g_A \gamma_5) \psi_n ], \\ L_\mu^{(+)} = & G \cos \theta_c \bar{\mu} (\bar{e}) \gamma_\mu (1 - i \gamma_5) \nu / \sqrt{2}, \quad \gamma_5 = -i \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где  $G$  — слабая константа связи;  $\theta_c$  — угол Кабибо [см. также (16)].

1)  $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm \nu$  ( $e^\pm \nu$ ). В приближении деревьев (рис. 12, а) константа  $F_\pi$  совпадает с константой слабого распада пиона  $F_\pi(m^2)$ :

$$T_{\pi \rightarrow \mu \nu}^{\text{Борн}} = i p_\mu l_\mu^{(+)} \sqrt{2} F_\pi,$$

где  $l_\mu^{(+)} = G \cos \theta_c \bar{u}_{(\nu)} \gamma_\mu (1 - i \gamma_5) u_{(\nu)} / \sqrt{2}$  — лептонный ток;  $p_\mu$  — импульс пиона;  $F_\pi \approx F_\pi(m^2) = 92 \text{ Мэв}$ . Расчет этого процесса, определяющего основной параметр теории, интересен для проверки самосогласованности теории в однопетлевом приближении.

Вклады от диаграмм рис. 12, б и в с учетом перенормировки массы пиона имеют вид:

$$\begin{aligned} T_1 = & T^{\text{Борн}} \frac{\Sigma(p^2) - \Sigma(m^2)}{m^2 - p^2} = T^{\text{Борн}} \left( -R(m^2) - m^2 \frac{1}{6} \left( \frac{g_A}{2\pi F_\pi} \right)^2 \right); \\ T_2 = & l_\mu^+ g_A \frac{M}{F_\pi} \frac{\sqrt{2}}{(2\pi)^4} \int d^4 k \text{Sp} \{ \gamma_5 (M - \hat{k})^{-1} \times \\ & \times \gamma_\mu \gamma_5 (M - \hat{k} - \hat{p})^{-1} \} = T^{\text{Борн}} R(m^2) \left( \frac{g_A M}{g F_\pi} \right)^2. \end{aligned}$$

Здесь введено обозначение

$$\begin{aligned}\Sigma(p^2) &= i \frac{2g^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \operatorname{Sp} \{ \gamma_5 (M - \hat{k})^{-1} \gamma_5 \times \\ &\quad \times (M - \hat{k} - \hat{p})^{-1} \} = p^2 R(p^2) + \text{const}; \\ R(p^2) &= -i \left( \frac{g}{2\pi^2} \right)^2 \int \frac{d^4k}{(M^2 - k^2 - i\epsilon)(M^2 - (k-p)^2 - i\epsilon)}.\end{aligned}$$

Учитывая соотношения Голдбергера — Треймана (19), окончательно получим

$$T_{(\pi \rightarrow \mu\nu)} = i \sqrt{2} p_\mu l_\mu^{(+)} F_\pi(m^2),$$

где

$$F_\pi(m^2) = F_\pi \left[ 1 - \frac{1}{6} \left( \frac{g_A m}{2\pi F_\pi} \right)^2 \right]. \quad (41)$$

Таким образом, вклад от нуклонных однопетлевых диаграмм не содержит никаких расходимостей и определяет зависимость константы слабого распада пиона от пионной массы.

Сокращение расходимостей является следствием частичного сохранения аксиального тока точно так же, как при вычислении электромагнитного форм-фактора пиона сохранение векторного тока обеспечивает сокращение расходимостей в диаграммах, изображенных на рис. 6,  $\epsilon - \delta$ . Полагая  $F_\pi(m^2) = 92 \text{ Мэв}$ , получаем  $F_\pi \approx 93,5 \text{ Мэв}$ .

2)  $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm \nu$ . Подробное обсуждение этого процесса можно найти в работах [30, 35]. Борновское приближение  $T_\mu^{\text{Борн}}$  определяется диаграммами, изображенными на рис. 13,  $a - \epsilon$ :

$$\begin{aligned}T_\mu^{\text{Борн}} &= -i \sqrt{2} e F_\pi \left( g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu (p-q)_\nu}{pq} \right) l_\nu^{(+)} + \\ &+ ieG \cos \theta_c F_\pi \bar{u}_{(\mu)} \gamma_\mu (\hat{k} + \hat{q} - m_{(\mu)})^{-1} \hat{p} (1 - i\gamma_5) u_{(\nu)}.\end{aligned}$$

Однопетлевое приближение (порядок  $e/F_\pi$ ) в основном исчерпывается диаграммами, представленными на рис. 13,  $\epsilon - \lambda$ . Вклады от этих диаграмм имеют вид:

$$\begin{aligned}T_\mu^{(\epsilon-\lambda)} &= (-R(m^2) - \frac{1}{6} \left( \frac{g_A m}{2\pi F_\pi} \right)^2) T_\mu^{\text{Борн}}; \\ T_\mu^{(u-\lambda)} &= R(m^2) T_\mu^{\text{Борн}} + i \sqrt{2} e [i h_V \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha q_\beta - h_A (g_{\mu\nu} p q - p_\mu q_\nu)] l_\nu^{(+)}; \\ h_V &= g_A / (8\pi^2 F_\pi); \quad h_A = g_A^2 / [6 (2\pi)^2 F_\pi].\end{aligned} \quad (42)$$

Таким образом, учет нуклонных петель сводится: 1) к изменению константы  $F_\pi$  [см. (41)], 2) к появлению членов, описывающих структурное излучение.

Для отношения  $h_A/h_V = \gamma$  получим

$$\gamma = h_A/h_V = g_A/3 \approx 0,4, \quad (43)$$



в то время как эксперимент дает два возможных значения [36]:  $\gamma = 0,4; -2$ .

Отметим, что в нашей модели выполняются следующие из алгебры токов [30] соотношения между константами  $f$  [см. (40)] и  $h_V$ , а также между поляризуемостью пиона  $\beta^{(N)}$  (34) и  $h_A$

$$h_V = -f/2e^2; \tag{44}$$

$$h_A = F_\pi \beta^{(N)}. \tag{45}$$

Индекс  $(N)$  означает, что учтены вклады только от нуклонных петель. Вклад от чистого лл-взаимодействия в поляризуемость пиона на порядок меньше [см. (39)].

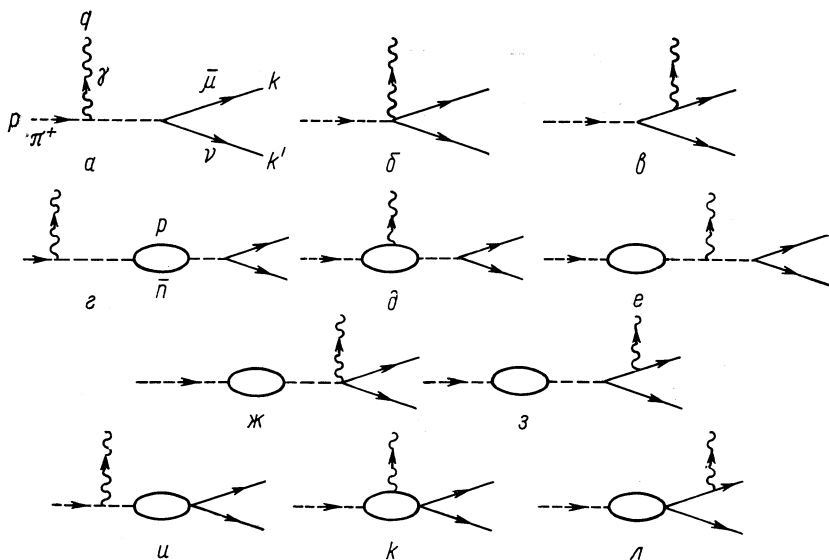


Рис. 13. Диаграммы для процесса  $\pi^+ \rightarrow \bar{\mu} (\bar{e}) \nu$

3)  $\pi^\pm \rightarrow \pi^0 e^\pm \nu$ . Вычисление этого процесса (рис. 14) полностью аналогично вычислению электромагнитного форм-фактора пиона и приводит к следующему выражению для амплитуды распада пиона:

$$T_{(\pi^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu)} = T^{\text{Борн}} \left[ 1 + \frac{q^2}{6} \left( \frac{g_A}{2\pi F_\pi} \right)^2 \right] - \sqrt{2} q_\mu l_\mu^{(+)} \frac{m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2}{6} \left( \frac{g_A}{2\pi F_\pi} \right)^2, \tag{46}$$

где

$$T^{\text{Борн}} = \sqrt{2} (p_{\pi^+} + p_{\pi^0})_\mu l_\mu^{(+)}; \quad q = p_{\pi^+} - p_{\pi^0}.$$

Последний член в формуле (46) пренебрежимо мал — порядка  $o(m_e/m_\pi)$ .

Учет гиперонных петель сводится к следующим заменам в формулах (40) — (42) и (46):

$$g_A^2 \rightarrow g_A^2 \left[ 1 + \frac{4}{9} \left( \frac{M_N}{M_\Sigma} \right)^2 + \frac{16}{27} \left( \frac{M_N}{M_{\Sigma\Lambda}} \right)^2 + \frac{1}{9} \left( \frac{M_N}{M_\Xi} \right)^2 \right] \approx 1,73g_A^2,$$

$$g_A \rightarrow g_A \left[ 1 + \frac{1}{3} \frac{M_N}{M_\Xi} \right] \approx 1,24g_A.$$

Таким образом, отношение  $\gamma = h_A/h_V$  увеличивается на 40%.

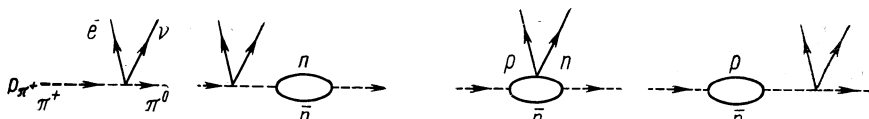


Рис. 14. Диаграммы для процесса  $\pi^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu$

**Разность масс нейтральных каонов.** В качестве дальнейшего развития интересно попытаться описать разности масс различных частиц, участвующих во взаимодействиях кирального типа. Прежде всего это относится к разности масс  $K_L$  - и  $K_S$ -мезонов, поскольку процесс, определяющий эту разность масс, весьма прост с точки зрения использования здесь СП-метода. Действительно, как увидим ниже, разность масс  $K_L$  и  $K_S$  в основном определяется разностью двух суперпропагаторов, один из которых содержит только четные числа виртуальных пионов, а другой — нечетные.

Предполагая строгое выполнение правила  $|\Delta T| = 1/2$  и считая, что лагранжиан взаимодействия не содержит связи с производными, приходим к следующей форме лагранжиана  $K - \pi$ -взаимодействия [37]:

$$\mathcal{L}_{\pi K}(x) = aU \left( \frac{\tau\pi}{F_\pi} \right)_\alpha^\beta \Psi_\beta + \text{э. с.},$$

где  $\pi$  — поля пионов;  $\tau$  — изотопическая матрица;  $\Psi = \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}$  — поля каонов;  $F_\pi = 92 M_{\text{эв}}$  — константа пионного распада;  $U$  —  $2 \times 2$ -матрица, определенная киральной группой. В частности, в используемой нами экспоненциальной параметризации, она имеет вид

$$U \exp(\tau\pi/F_\pi) = [\exp(i\tau\pi/F_\pi) - 1]/\sqrt{2}.$$

Отсюда для лагранжиана взаимодействия нейтральных каонов с пионами получим следующую форму:

$$\mathcal{L}_{\pi K}^{(0)} = a: \left\{ K_S [\cos \sqrt{\pi^2/F_\pi^2} - 1] + K_L \frac{\pi^0}{F_\pi} \frac{\sin \sqrt{\pi^2/F_\pi^2}}{\sqrt{\pi^2/F_\pi^2}} \right\}:, \quad (47)$$

где

$$K_S = (K_0 + \bar{K}_0)/\sqrt{2}; \quad L_L = i(\bar{K}_0 - K_0)/\sqrt{2}.$$

Как известно, этот лагранжиан в борновском приближении воспроизводит низкоэнергетические теоремы алгебры токов, касающиеся нелептонных распадов  $K$ -мезонов на два и три пиона.

Константу связи  $a$  можно определить из вероятности распада  $K_S \rightarrow 2\pi$  ( $\omega^{(2\pi)}$ ). В результате имеем

$$a^2 = \frac{2\pi}{3} \frac{m_K (2F_\pi)^4}{[1 - (2m_\pi/m_K)^2]^{1/2}} \omega^{(2\pi)}. \quad (48)$$

Теперь можем приступить к вычислению разности масс нейтральных каонов.

Разность масс  $K_L$ - и  $K_S$ -мезонов обусловлена теми различными виртуальными состояниями, в которые могут переходить эти ме-

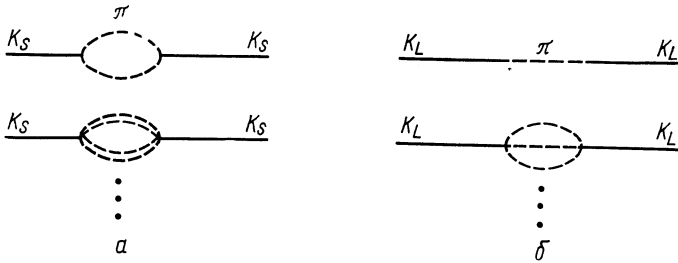


Рис. 15. Суперпропагаторы для разности масс нейтральных каонов

зоны с учетом их различной комбинированной четности. Имея это в виду, можно записать для разности масс  $\Delta m$  следующую формулу:

$$\Delta m = m_{K_L} - m_{K_S} = 2 [f_S - f_L], \quad (49)$$

где  $f_S$  — сумма матричных элементов, соответствующих бесконечному набору диаграмм, изображенных на рис. 15, а, а  $f_L$  — то же для диаграмм рис. 15, б.

Совокупности диаграмм рис. 15 являются суперпропагаторами. Поскольку для этих суперпропагаторов можно получить конечные выражения в импульсном пространстве типа (11), (13) — (15), то и разность масс нейтральных каонов сразу же определяется. Вычислим вначале ту часть суперпропагатора  $f_S$ , которая соответствует двухпионной петле, состоящей из массивных пионов. Затем найдем полные выражения для обоих суперпропагаторов в случае безмассовых пионов, поскольку в этом случае выражения для суперпропагаторов особенно просты. Будет показано, что

вкладами в  $\Delta m$  от всех петель, кроме двухпионной петли, можно пренебречь.

С помощью лагранжиана (47) для величины  $f_S$  находим следующие выражения:

$$\begin{aligned} i(2\pi)^4 \delta^4(p-p') f_S &= -\frac{a^2}{2!} \langle p_{K_S} | T \times \\ &\times \left[ \int d^4x K_S(x) (\cos \sqrt{\pi^2/F_\pi^2} - 1) \right]^2 | p'_{K_S} \rangle = \\ &= i(2\pi)^4 \delta^4(p-p') \frac{a^2}{4m_K} \sigma(p), \end{aligned}$$

где

$$\sigma(p) = i \int d^4x \exp(ipx) \sum_1^\infty \frac{2n+1}{(2n)!} \left[ \frac{-i\Delta^c(x)}{F_\pi^2} \right]^{2n};$$

$\Delta^c$  — пропагатор свободной скалярной частицы. Так как здесь нас будет интересовать лишь та часть суперпропагатора, которая имеет отношение к двухпионной диаграмме, то для простоты опять будем считать лишь два пиона массивными, а остальные безмассовыми. Роль этих безмассовых мезонов сводится лишь к регуляризации основной двухпионной диаграммы. В результате для матричного элемента, соответствующего двухпионной диаграмме, получаем [см. формулы (13) — (15)]:

$$f_S^{(2)} = \frac{3a^2}{4m_K (4\pi F_\pi^2)^2} [J(m_K) + \gamma], \quad (50)$$

где

$$\begin{aligned} J(m_K) &= \frac{Y}{2} \ln \frac{1-Y}{1+Y} + i \frac{\pi}{2} Y; \quad Y = \left( 1 - 4 \frac{m_\pi^2}{m_K^2} \right)^{1/2}; \\ \gamma &= \ln(4\pi F_\pi/m_\pi) - 3c/2 + 13/12; \end{aligned}$$

$c$  — константа Эйлера ( $c = 0,577\dots$ )

Подставляя формулы (48) и (50) в (49), получаем для вклада в  $\Delta m$  от двухпионной диаграммы выражение

$$\text{Re } \Delta m_{(2\pi)} = 0,52\omega_S^{(2\pi)}. \quad (51)$$

Эта величина удовлетворительно воспроизводит известную в настоящее время разность масс  $K_L$ - и  $K_S$ -мезонов (см. работу [38]).

Чтобы оценить относительные вклады в  $\Delta m$  от диаграмм с двумя, тремя и большим числом пионных линий, рассмотрим более простой случай безмассовых пионов. В этом случае оба суперпропагатора вычисляются в явной форме и величины  $f_S$  и  $f_L$  записываются в виде быстро сходящихся бесконечных рядов.

Для величины  $f_S$  получается следующее выражение:

$$f_S = \frac{a^2}{4m_K (4\pi F_\pi^2)^2} \sum_1^\infty \left( \frac{m_K}{4\pi F_\pi} \right)^{4(n-1)} \frac{\Gamma(2n+2)}{\Gamma(2n-1) \Gamma(2n) \Gamma^2(2n+1)} \times \\ \times \left\{ \ln \left[ \left( \frac{4\pi F_\pi}{m_K} \right)^2 \exp(i\pi) \right] + \psi(2n-1) + \psi(2n) + \right. \\ \left. + 2\psi(2n+1) - \psi(2n+2) \right\}.$$

Здесь  $\psi(n)$  — пси-функция Эйлера;  $(m_K/4\pi F_\pi)^4 \sim 0,034$ . Легко видеть, что помимо малого параметра  $(m_K/4\pi F_\pi)^4$  высшие порядки по  $1/F_\pi$  сильно подавлены тремя факториалами в знаменателе. Поэтому основной вклад в  $f_S$  дает низший порядок по  $1/F_\pi$ , т. е. двухпионная диаграмма

$$f_S^{(2)}|_{m_\pi=0} = 0,203\omega_S^{(2\pi)}.$$

Для матричных элементов, которые соответствуют петлевым диаграммам с нечетными числами пионов, имеем

$$f_L = \frac{a^2}{12m_K (4\pi F_\pi^2)^2} \sum_1^\infty \left( \frac{m_K}{4\pi F_\pi} \right)^{4n-2} \frac{(2n+3)}{\Gamma(2n) \Gamma(2n+1) \Gamma(2n+2)} \times \\ \times \left\{ \ln \left[ \left( \frac{4\pi F_\pi}{m_K} \right)^2 \exp(i\pi) \right] + \psi(2n) + \psi(2n+1) + \psi(2n+2) - 1 \right\}.$$

Отсюда для трехпионной диаграммы получаем

$$f_L^{(3\pi)} = 0,0017\omega^{(2\pi)} < 1\% f_S^{(2\pi)}.$$

Нетрудно видеть, что вкладами трехпионных диаграмм в разность масс нейтральных каонов можно пренебречь, так же как и вкладами диаграмм с четырьмя и более пионами.

Вклады от диаграмм с одним виртуальным пионом и одним  $\eta$ -мезоном в разность масс в рамках точной  $SU(3)$ -симметрии равны нулю. Учет  $\eta$ -мезона при рассмотрении петлевых диаграмм не существен.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Здесь представлены первые попытки описания низкоэнергетической адронной физики в рамках квантовой киральной теории поля. При этом рассматривалось лишь однопетлевое приближение. Как уже отмечалось во введении, была использована теория возмущений с разложением по размерному параметру  $(1/F_\pi)$  при энергиях, существенно меньших  $4\pi F_\pi \approx 1,2 \text{ ГэВ}$ . Из приведенных вычислений видно, что в первых двух порядках этой теории возмущения всегда возникает малый параметр  $\alpha_0 \approx 0,02$ , в результа-

те чего вклад второго порядка оказывается существенно меньшим борновского, первого порядка. Тем самым в первых двух порядках теория вполне самосогласована. Внутренним механизмом такой самосогласованности являются компенсирующие свойства самой киральной симметрии. А именно, наряду с диаграммами, отвечающими обычной кирально-неинвариантной сильной связи полей, возникают дополнительные диаграммы в том же порядке по константе ( $1/F_\pi$ ), которые характерны уже для новой киральной теории и зачастую полностью сокращают расходящиеся вклады от прежних диаграмм.

Оценка следующего, третьего, порядка теории возмущения представляет собой, несомненно, большой интерес. Тщательного исследования в этом направлении пока не проведено, но приближенные оценки [39] показывают, что учет третьего порядка можно свести к двум эффектам: 1) получения следующего шага энергетического разложения типа  $q^6/(4\pi F_\pi)$ <sup>6</sup>. Это, безусловно, малая величина в рассматриваемой области энергий; 2) перенормировке сильных вершин в предыдущем, втором, порядке:  $q \rightarrow gg_A$  (см. работу [4]).

Имеющиеся расчеты третьего порядка носят лишь качественный характер, и в настоящее время проводятся более строгие количественные оценки. Однако уже сейчас можно указать на ряд результатов, которые не изменятся и при учете третьего порядка, как, например, предсказание роста на пороге функции  $\alpha(q_1, q_2)$  в амплитуде  $\gamma\gamma \rightarrow \pi\pi$  и предсказание значений длин рассеяния  $\pi\pi$ -системы в высших парциальных волнах. Кроме того, удовлетворение амплитуды  $\pi\pi$ -рассеяния, полученной во втором порядке теории возмущений, всем неравенствам Мартена, следующим из самых общих требований унитарности и кроссинг-симметрии, а также хорошее согласие всех полученных в рассматриваемом приближении результатов с известными экспериментальными данными являются косвенным подтверждением того факта, что в первых двух порядках используемой нами теории возмущений, очевидно, содержится основная информация об изучаемых процессах взаимодействия пионов.

В заключение авторы выражают благодарность за плодотворные обсуждения Д. И. Блохинцеву, А. В. Ефремову, В. А. Мещерякову, Л. Л. Неменову, В. И. Огиевскому, Ю. В. Парфенову, В. В. Серебрякову и Д. В. Ширкову.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Поскольку в работах [15—17] подробно обсуждается процедура построения суперпропагатора, не будем останавливаться здесь на детальном выводе, а покажем лишь общую схему такого построения.

Для простоты начнем со случая безмассовых скалярных частиц. Двух-частичная функция Грина скалярных частиц в неполиномиальных теориях

(«суперпропагатор») в общем виде записывается в форме

$$F_m(x) = i \sum_1^{\infty} c(n) [-i\Delta(x)]^n, \tag{П.1}$$

где  $\Delta(x)$  — пропагатор скалярного поля;  $c(n) > 0$ . В локализуемых неполономиальных теориях коэффициенты  $c(n)$  подчиняются условию [15]:  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c(n)|^{1/n} = 0$ . Член с  $n = 1$  не представляет особого интереса, и в дальнейшем опустим его для простоты (он может быть восстановлен на любом этапе вычисления).

В случае безмассовых скалярных частиц функцию  $F_0(x)$  можно записать в форме

$$F_0(x) = i \sum_1^{\infty} c(n+1) [-(2\pi)^2(x^2 - i\epsilon)]^{-(n+1)}. \tag{П.2}$$

Введя промежуточную регуляризацию для пропагатора, которая будет конкретизирована ниже, такую, чтобы можно было построить Фурье-образ любой степени этого пропагатора, перейдем к импульсному пространству:

$$\tilde{F}_0^{\text{per}}(p) = i \sum_1^{\infty} c(n+1) (-4\pi^2)^{-(n+1)} \int d^4x \exp(ipx) (x^2 - i\epsilon)_{\text{per}}^{-n-1}. \tag{П.3}$$

рассмотрим нефизическую область  $p^2 < 0$  и выберем систему координат, где  $= \{0, \mathbf{p}\}$ . Тогда можно перейти к евклидовой метрике и конкретизировать регуляризацию введением обрезания при малых  $\lambda$  ( $\lambda = -x^2$ ):

$$\tilde{F}_0^{\text{per}}(p) = \frac{1}{2|p|} \sum_1^{\infty} \int_{l^2}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} \varphi(n, \lambda) J_1(|p| \sqrt{\lambda}), \tag{П.4}$$

где

$$\varphi(n, \lambda) = [(2\pi)^2 \lambda]^{-n} c(n+1), \tag{П.5}$$

$J_1(|p| \sqrt{\lambda})$  — функция Бесселя;  $|p| = \sqrt{-p^2}$ ;  $l$  — длина обрезания. Теперь по значениям  $\varphi(n, \lambda)$  для заданной последовательности точек  $n = 1, 2, 3, \dots$  можно однозначно восстановить аналитическую функцию  $\varphi(z, \lambda)$ , регулярную в правой полуплоскости  $\text{Re } z > 0$  и подчиняющуюся условиям ( $z = x + iy$ ) (см. работу [15]):

- а)  $|\varphi(z, \lambda)| < B \exp(\Lambda |z|)$  ( $\text{Re } z \geq 0, B > 0, \Lambda > 0$ );
- б)  $|\varphi(iy, \lambda)| < B \exp[(\pi - \delta) |y|]$  ( $-\infty < y < \infty, \delta > 0$ ).

Как только такая функция будет построена, суперпропагатор  $\tilde{F}_0^{\text{per}}(p)$  можно будет записать в форме

$$\tilde{F}_{0\gamma}^{\text{per}}(p) = \frac{i}{4|p|} \int_{0+i\infty}^{0+i\infty} dz \frac{\cos \pi z}{\sin \gamma \pi z} \int_{l^2}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} \varphi(z, \lambda) J_1(|p| \sqrt{\lambda}). \tag{П.6}$$

Это представление полезно тем, что с его помощью можно избавиться от промежуточной регуляризации, полагая  $l^2 = 0$ . Параметр  $\gamma$  введен для того, чтобы подавить рост функции  $\varphi(z, \lambda) \cos \pi z$  вдоль мнимой оси при  $|y| \rightarrow \infty$ . Вычисляя теперь интеграл по  $\lambda$  ( $\varphi(z, \lambda) = [(2\pi)^2 \lambda]^{-z} c(z+1)$ ) и сгибая контур по  $z$  так, чтобы он шел вокруг положительной реальной оси, можно перейти к пределу  $\gamma = 1$  и взять интеграл по  $z$ . В результате приходим к окончательному выражению для суперпропагатора в импульсном

пространстве:

$$\tilde{F}_0(p) = \frac{(-1)}{p^2 + i\varepsilon} \sum_1^{\infty} \left( \frac{p^2 + i\varepsilon}{(4\pi)^2} \right)^n \frac{c(n+1)}{n!(n-1)!} \left\{ \ln \left[ \frac{p^2 + i\varepsilon}{(4\pi)^2} \exp(-i\pi) \right] + \right. \\ \left. + [\ln c(n+1)]' - \psi(n) - \psi(n+1) \right\}, \quad (\text{П.7})$$

где  $\psi(n)$  — пси-функция Эйлера.

Не будем обсуждать здесь вопросы, связанные с проблемой однозначности описанной процедуры, отсылая интересующихся к работам [15, 40, 41]. Упомянем лишь, что с использованием так называемого «принципа минимальных сингулярностей» эта процедура становится совершенно однозначной [40, 41].

Покажем теперь, как вычисляется конечный вклад от петли с массивными пионами с помощью СП-метода. В случае скалярных частиц с массой покоя  $m$  двухточечную функцию Грина  $F_m(x)$  тоже можно представить в форме, подобной (П.6). Разница состоит в том, что подынтегральное выражение в интеграле по  $\lambda$  будет значительно более сложной функцией, так что интеграл точно взять не удастся, и приходится использовать приближенные методы вычисления.

Рассмотрим на этот раз функцию  $\Phi(x)$ , отличающуюся от  $F(x)$  множителем  $(-1)^n$  под знаком суммы, и выделим явно константу связи  $\kappa$  из коэффициента  $c(n)$ :

$$c(n) = [(2\pi)^2 \kappa]^n a(n). \quad (\text{П.8})$$

Тогда в нефизической области  $p^2 < 0$  после перехода к евклидовой метрике функция  $\Phi_m^{\text{per}}(p)$  запишется в виде

$$\tilde{\Phi}_m^{\text{per}}(p) = (2\pi\kappa)^2 \frac{m}{|p|} \sum_0^{\infty} (-\kappa m^2)^n a(n+2) \times \\ \times \int_{(ml)}^{\infty} dr r^2 J_1 \left( \frac{|p|}{m} r \right) \left( \frac{K_1(r)}{r} \right)^{n+2}, \quad (\text{П.9})$$

где  $K_1(r)$  — функция Кельвина. Выразим опять сумму через интеграл Меллина — Бернса и снимем промежуточную регуляризацию, положив  $l = 0$ :

$$\tilde{\Phi}_m(p) = i2(\pi\kappa)^2 \frac{m}{|p|} \int_{-0-i\infty}^{-0+i\infty} \frac{dz}{\sin \pi z} (\kappa m^2)^z a(z+2) \times \\ \times \int_0^{\infty} dr r^{-z} J_1 \left( \frac{|p|}{m} r \right) (K_1(r))^{z+2}. \quad (\text{П.10})$$

Нас будет интересовать лишь «нижний порядок по  $\kappa$ »:

$$[\kappa^2 \ln(\kappa m^2) f(p^2) + \kappa^2 f(p^2)].$$

В выражении (П.9) это соответствует вычислению члена с  $n = 0$ . Остаток будет иметь значение регуляризующего множителя. Особенно отчетливо это видно в случае экспоненциального взаимодействия, когда  $a(n) = 1/n!$



Действительно, в этом случае (П.9) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_m(p) &= (2\pi\kappa)^2 \frac{m}{|p|} \int_0^1 dt (1-t) \times \\ &\times \int_0^\infty dr J_1\left(\frac{|p|}{m} r\right) K_1^2(r) \exp\left\{-t\kappa m^2 \frac{K_1(r)}{r}\right\}. \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

Поскольку нас интересует выражение для простой петли, в дальнейшем будем рассматривать только частицы в этой петле как массивные, а остальные частицы, необходимые лишь для регуляризации этой основной петли [см. (П. 11)], будем считать безмассовыми. Тогда вместо (П. 10) получаем более простое выражение:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_m(p) &= i2(\pi\kappa)^2 \frac{m}{|p|} \int_{-0-i\infty}^{-0+i\infty} dz \frac{(\kappa m^2)^z}{\sin \pi z} a(z+2) \times \\ &\times \int_0^\infty dr r^{-2z} K_1^2(r) J_1\left(\frac{|p|}{m} r\right). \end{aligned} \quad (\text{П.12})$$

Такое упрощение мало влияет на точность результатов в рассматриваемом порядке по  $\kappa$ . Используя теперь для  $J_1(|p|r/m)$  представление в виде ряда, выполняем интегрирование по  $r$ . Тогда формула (П.12) принимает вид:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_m(p) &= i\sqrt{\pi} \left(\frac{\pi\kappa}{2}\right)^2 \sum_0^\infty \frac{\left(\frac{p^2}{4m^2}\right)^n}{n!(n+1)!} \int_L dz (\kappa m^2)^z a(z+2) \times \\ &\times \frac{\Gamma(n-z)\Gamma(n-z+1)\Gamma(n-z+2)}{\sin \pi z \Gamma(n-z+3/2)}, \end{aligned}$$

где контур  $L$  выбирается идущим вокруг реальной положительной оси. В интеграле по  $z$  нас будет интересовать лишь вычет в точке  $z = 0$ , поскольку остальные вычеты приводят к членам более высокого порядка по  $\kappa$ . При  $n = 0$  получаем вычет второго порядка, а при остальных значениях  $n$  — вычеты первого порядка. В результате приходим к выражению

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_m^{(2)}(p) &= (\pi\kappa)^2 a(2) \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_1^\infty \left(\frac{p^2}{4m^2}\right) \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+3/2)} - \right. \\ &\left. - \ln \frac{\kappa m^2}{4} - (\ln a(2))' - 2c - 1 \right\}, \end{aligned} \quad (\text{П.13})$$

где  $c$  — постоянная Эйлера. Сумма по  $n$  выражается через логарифм. Окончательный результат можно записать в форме хорошо известного выражения, получающегося при вычислении скалярной петли с использованием произвольной регуляризации. Отличие будет в том, что у нас имеется член  $\kappa^2 \ln(\kappa m^2)$ , выражающий неаналитическую зависимость  $\bar{\Phi}_m(p)$  от константы связи  $\kappa$ :

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_m^{(2)}(p) &= -(\pi\kappa)^2 a(2) \left\{ \sqrt{1-4m^2/p^2} \ln [(\sqrt{1-4m^2/p^2}+1)/(\sqrt{1-4m^2/p^2}-1)] + \right. \\ &\left. + \ln(\kappa m^2/4) + (\ln a(2))' + 2c - 1 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П.14})$$

Эта формула справедлива в области  $p^2 \leq 0$ . Аналитическое продолжение в область  $p^2 \geq 0$  не представляет труда.

Выражение для функции  $\bar{F}_m(p)$  во втором порядке по  $\hbar$  совпадает с выражением для функции  $\bar{\Phi}_m(p)$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

В этом приложении излагается вывод киральных лагранжианов и формулируется инвариантная теория возмущения. Будем следовать здесь в основном работам [21, 42]. Киральная симметрия является динамической по своему характеру, т. е. описывает соотношения между амплитудами с разным числом частиц, так же как и низкоэнергетические теоремы квантовой электродинамики. По-видимому, проще всего понять суть киральной симметрии, если использовать аналогию с идеей «компенсирующих» полей Янга — Миллса [43].

Пусть имеется лагранжиан для свободных, невзаимодействующих «нуклонов»  $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_p \\ \Psi_n \end{pmatrix}$ :

$$\mathcal{L}_0(\Psi) = i\bar{\Psi} \hat{\partial} \Psi - M\bar{\Psi} \Psi. \quad (\text{П.15})$$

Этот лагранжиан инвариантен относительно изотопических преобразований  $\Psi' = \exp(i\tau\omega/2) \Psi$ . Потребуем инвариантности этого лагранжиана также относительно киральных преобразований, перепутывающих состояния с различной четностью \*:

$$\Psi' = U^{-1/2}(a) \Psi; \quad U(a) U^*(a) = I. \quad (\text{П.16})$$

Матрицу  $U$  можно выбрать, например, в виде

$$U(a) = \exp\{-\tau a \gamma_5\}. \quad (\text{П.17})$$

После преобразования  $\mathcal{L}_0(\Psi')$  принимает форму

$$\mathcal{L}_0(\Psi') = i\bar{\Psi}' \hat{\partial} \Psi' - M\bar{\Psi}' U^{-1/2}(a) U^{-1/2}(a) \Psi. \quad (\text{П.18})$$

Чтобы обеспечить инвариантность  $\mathcal{L}_0$  относительно преобразований (П.16), можно положить массу нуклона равной нулю — это алгебраический путь восстановления симметрии. Ему отвечает классификация нуклонов по спиральностям. Другой способ обеспечения инвариантности, динамический, — ввести для компенсации изменения лагранжиана взаимодействие с тремя псевдоскалярными безмассовыми «пионами», называемыми обычно голдстоуновскими частицами:

$$M\bar{\Psi}' \Psi \rightarrow M\bar{\Psi}' U(\pi/F_\pi) \Psi.$$

Их поля преобразуются при киральных преобразованиях по нелинейному закону

$$\pi' = \pi'(\pi, a). \quad (\text{П.19})$$

Функция (П.19) определяется из условия

$$U(\pi'/F_\pi) = U^{1/2}(a) U(\pi/F_\pi) U^{1/2}(a). \quad (\text{П.20})$$

\* Указания на то, что сильные взаимодействия приближенно инвариантны относительно таких преобразований, дает совпадение с 20%-ной точностью аксиальных констант распада мюона и  $\beta$ -распада нейтрона. Более подробно о физическом обосновании киральной симметрии смотри обзор [44].

Константа  $F_\pi$  введена, чтобы сделать безразмерным скалярное поле  $\pi$ . Нетрудно проверить, что лагранжиан

$$\mathcal{L}(U(\pi/F_\pi), \Psi) = i\bar{\Psi}\hat{\partial}\Psi - M\bar{\Psi}U(\pi/F_\pi)\Psi + \mathcal{L}_{\pi\pi}, \quad (\text{П.21})$$

$$\mathcal{L}_{\pi\pi} = -\frac{F_\pi^2}{4} \text{Sp}(\partial_\mu U(\pi/F_\pi)\partial_\mu U^*(\pi/F_\pi)) = (\partial_\mu \pi)^2/2 + o(\pi^4/F_\pi^2) \quad (\text{П.22})$$

инвариантен относительно киральных преобразований (П.16), (П.20).

Появление, таким образом, пионов можно интерпретировать как реакцию системы, направленную на восстановление нарушенной из-за массы нуклона киральной симметрии. Алгебра киральной группы  $SU(2) \times SU(2)$  совпадает с алгеброй группы вращения четырехмерного пространства  $O(4)$ , а лагранжиан (П. 22), представленный в форме:

$$\mathcal{L}_{\pi\pi} = \partial_\mu \pi^i \partial_\mu \pi^j g_{ij}(\pi)/2,$$

имеет красивое геометрическое истолкование;  $g_{ij}$  — метрический тензор трехмерного пространства постоянной кривизны (сферы, вложенной в четырехмерное евклидово пространство). Преобразование (П.19) есть сдвиг начала координат на сфере на вектор  $\mathbf{a}$ , поэтому (П.19) имеет смысл сложения векторов в кривом пространстве, которое будем обозначать

$$\pi' = \tilde{\mathbf{a}} (+) \pi; \quad \tilde{\mathbf{a}} = F_\pi \mathbf{a}. \quad (\text{П.23})$$

Константа  $F_\pi$  является параметром, характеризующим степень кривизны изопространства. При  $F_\pi \rightarrow \infty$  возникает обычное евклидово изопространство:  $\mathbf{a} (+) \pi \rightarrow \mathbf{a} + \pi$ .

Если отождествить введенное голдстоуновское поле с реальным пионом, а аксиальный ток  $\mathbf{J}_{5\mu} = F_\pi \partial_\mu \pi + o(\pi^3)$  с током, участвующим в слабых взаимодействиях, то константа  $F_\pi$  в борновском приближении совпадает с константой слабого распада пиона, отсюда  $F_\pi = 92 \text{ Мэв}$ .

Киральная инвариантность не фиксирует окончательно лагранжиан, оставляя произвол в выборе матрицы  $U$ , на которую наложено лишь условие  $UU^* = I$ . Этот произвол соответствует произволу в выборе различных координат на сфере. Например, представлению матрицы  $U$  в виде экспоненты (П. 17) соответствуют нормальные координаты вдоль геодезических линий. Переход от одних координат к другим совершается с помощью преобразования

$$\pi = \pi' f(\pi'); \quad f(0) = 1. \quad (\text{П.24})$$

Чтобы выяснить, как произвол в выборе координат сказывается на физических результатах, рассмотрим вначале теорию возмущения для лагранжиана взаимодействия без производных  $\mathcal{L}^I = \lambda \varphi^4$ . Удобно определить  $S$ -матрицу, разделяя поля  $\varphi$  на «внешние», которые коммутируют с операторами рождения и уничтожения начальных и конечных состояний, и «внутренние» —  $\Gamma$ , по которым берутся свертки при переходе от  $T$  к  $N$  произведению:

$$\begin{aligned} S &= T_\varphi^* \exp \left[ i \int d^4x N_\varphi \mathcal{L}^I(\varphi) \right] \equiv \\ &\equiv N_\varphi \exp_\Gamma \langle 0 | T_\Gamma^* \exp \left[ i \int d^4x N_\Gamma \mathcal{L}^I(\varphi_{\text{exp}} + \Gamma) \right] | 0 \rangle_\Gamma, \end{aligned} \quad (\text{П.25})$$

где  $\Gamma < 0$  — вакуум по полям  $\Gamma$ . Согласно теореме эквивалентности Хаага — Рюэля,  $S$ -матрица (П.25) на массовой поверхности должна быть инвариантна относительно замены переменных (П.24),  $\varphi = \varphi' f(\varphi)$ ;  $f(0) = 1$ . Эту теорему можно легко доказать на формальном уровне, если обращаться с расходящимися величинами как с обычными, не конкретизируя регуляризацию; строго она доказана лишь в приближении деревьев.

Конструктивный механизм такой эквивалентности впервые описан в работе [19] и заключается в следующем. При замене переменных (П.24) новый лагранжиан взаимодействия  $\mathcal{L}^I$  содержит производные от полей, возникающие от преобразования свободного лагранжиана  $(\partial_\mu \varphi)^2/2$ . Поэтому можно перестраивать матричные элементы в теории возмущения, если взять интегралы  $\int d^4x \mathcal{L}^I$  по частям, т. е. перебрасывания производных на внутренние поля, или пропагаторы, и сведения этих пропагаторов к  $\delta$ -функциям. При этом на диаграммах Фейнмана сжимаются некоторые линии и уменьшается число вершин. Такая перестройка матричных элементов называется редукцией [19]. Учет всех редукций эквивалентен переходу к лагранжиану  $\lambda \varphi^4$  и как бы восстанавливает эквивалентность на уровне матричных элементов. Если поставить вопрос о выборе какого-то одного лагранжиана из всего класса эквивалентных лагранжианов, полученных из  $\lambda \varphi^4$  всевозможными преобразованиями типа (П.24), то не будет никаких сомнений, что наиболее простым и удобным из всех лагранжианов является сам лагранжиан  $\lambda \varphi^4$ . Математическим выражением этого принципа «простоты» в данном случае является отсутствие редукций или отсутствие производных от полей в лагранжиане взаимодействия.

При рассмотрении киральных лагранжианов можно с самого начала поставить вопрос: как сформулировать теорию возмущения, в которой нет редукций? Поскольку редукции возникают при операции «перебрасывания» производных в лагранжиане взаимодействия  $\mathcal{L}^I = g_{ij}^I \partial_\mu \pi^i \partial_\mu \pi^j / 2$ , то редукций не будет, если сам лагранжиан взаимодействия инвариантен относительно такой операции:

$$g_{ij}^I \partial_\mu \pi^i \partial_\mu \pi^j = - \pi^i \partial_\mu (g_{ij}^I \partial_\mu \pi^j). \quad (\text{П.26})$$

Нетрудно убедиться [21], что существует единственная система координат, удовлетворяющая условию простоты (П.26), — это нормальные координаты, причем необходимо выбрать нормальные координаты для внутренних полей  $\Gamma$  с началом координат в точке  $\varphi$ , т. е. при разделении полей на внутренние и внешние нужно использовать сложения векторов в кривом изпространстве (П.19) ( $\pi = \varphi (+) \Gamma$ ). Таким образом, для  $S$ -матрицы получим выражение

$$\begin{aligned} \hat{S} = N_{\varphi\Gamma} \langle 0 | T^* \exp \left\{ i \int d^4x N_\Gamma \left[ \mathcal{L}(U^{+1/2}(\varphi/F_\pi) U(\Gamma/F_\pi) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times U^{+1/2}(\varphi/F_\pi), \Psi) - \mathcal{L}_{0(\pi\pi)}(\varphi) - \mathcal{L}_{0(\pi\Gamma)}(\Gamma) - \mathcal{L}_0(\Psi) \right] \right\} | 0 \rangle_\Gamma, \\ \mathcal{L}_0(\Psi) = i \bar{\Psi} \hat{\partial} \Psi - M \bar{\Psi} \Psi; \quad \mathcal{L}_{0(\pi\pi)}(\varphi) = (\partial_\mu \varphi)^2 / 2, \end{aligned} \quad (\text{П.27})$$

где  $U$ ,  $\mathcal{L}(U, \Psi)$  определены равенствами (П.17), (П.21) и (П.22) (нормальное упорядочение полей  $\Gamma$  в (П.27) возникает из-за применения СП-метода регуляризации [45]). Если выбрать другие координаты, то учет всех редукций эквивалентен на массовой поверхности явно ковариантной процедуре перехода от этих координат к нормальным (П.27) (более подробно об этом см. работы [19, 21, 46]).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волков М. К. ЭЧАЯ, 1971, т. 2, с. 33; Fortscr. Phys., 1974, Bd 22, S 499.
2. Isham C. J., Salam A., Strathdee J. Phys. Rev. D, 1971, v. 3, p. 1805.
3. Нелокальные, нелинейные и перенормируемые теории. — Д-2-7161, Дубна, 1973.

4. Lehmann H., Trute H. Nucl. Phys. B, 1973, v. 52, p. 280; Lehmann H. Preprint DESY 72/54, 1972; Phys. Lett. B, 1972, v. 41, p. 529.
5. Ecker G., Honerkamp J. Nucl. Phys. B, 1973, v. 52, p. 211.
6. Ecker G., Honerkamp J. Nucl. Phys. B, 1973, v. 62, p. 509.
7. Волков М. К., Первушин В. Н. «Ядерная физика», 1974, т. 19, с. 652.
8. Волков М. К., Первушин В. Н. «Ядерная физика», 1974, т. 20, с. 762.
9. Pervushin V. N., Volkov M. K. JINR E2-8097, Dubna, 1974.
10. Pervushin V. N., Volkov M. K. JINR E2-8098, Dubna, 1974.
11. Волков М. К., Первушин В. Н. «Ядерная физика», 1975, т. 21, с. 214.
12. Волков М. К., Первушин В. Н. ОИЯИ P2 P2-8165, Дубна, 1974.
13. Гайсак М. И., Лендьял В. И. Препринт ИТФ-74-172Б, Киев, 1974.
14. Salam A., Strathdee J. Phys. Rev. D, 1970, v. 1, p. 3296.
15. Volkov M. K. Ann. Phys. (N.Y.), 1968, v. 49, p. 202.
16. Volkov M. K. Comm. Math. Phys., 1968, v. 7, p. 289.
17. Волков М. К. ТМФ, 1970, т. 2, с. 197; ТМФ, 1971, т. 6, с. 21.
18. Адлер С., Дашен Р. Алгебра токов. Пер. с англ. М., «Мир», 1970.
19. Волков Д. В. ЭЧАЯ, 1973, т. 4, с. 3.
20. Honerkamp J. Nucl. Phys. B, 1972, v. 36, p. 130.
21. Pervushin V. N. JINR E2-8009, Dubna, 1974; ТМФ, 1975, т. 22, с. 291.
22. Martin A. Nuovo cimento, 1967, v. 47, p. 265; 1968, v. 58, p. 303.
23. Dashen R., Weinstein W. Phys. Rev., 1969, v. 183, с. 1261.
24. Palou F. P., Yndurain F. J. Nuovo cimento A, 1974, v. 19, p. 245.
25. Багусов Ю. А. и др. ОИЯИ PI-7969, Дубна, 1974; Baton J. P., Laurens G., Reiguier J. Phys. Lett. B, 1970, v. 33, p. 528.
26. Steinberger I. Phys. Rev., 1949, v. 76, p. 1180.
27. Бережнов С. Ф. и др. «Ядерная физика», 1973, т. 18, с. 102.
28. Adulov G. e.a. Phys. Lett. B, 1974, v. 51, p. 402.
29. Rosen S. P. Phys. Rev., 1969, v. 188, p. 2542.
30. Терентьев М. В. «Ядерная физика», 1972, т. 16, с. 162.
31. Ericson T. E., Hufner I. Nucl. Phys. B, 1972, v. 47, p. 205.
32. Терентьев М. В. УФН, 1974, т. 112, с. 37.
33. Rittenberg A. e.a. Rev. Mod. Phys., 1971, v. 43, p. 2.
34. Belletini G., Vemporad C., Braaccini P. Nuovo cimento A, 1970, v. 66, p. 243.
35. Бардин Д. Ю., Биленький С. М. «Ядерная физика», 1972, т. 16, с. 557.
36. Derommier D. e.a. Phys. Lett., 1963, v. 7, p. 885.
37. Lee T. D. Preprint BNL 50260, New York, 1970.
38. Rev. Mod. Phys., 1973, v. 45, N 2, pt II (Review of Particle Properties).
39. Jung K. S., Willey R. S. Phys. Rev. D, 1974, v. 9, p. 3132.
40. Волков М. К. ОИЯИ P2-4050, 1968, с. 550.
41. Lehman H., Pohlmeier K. Comm. Math. Phys., 1971, v. 20, p. 101.
42. Chang P., Gürsey F. Phys. Rev., 1967, v. 164, p. 1752.
43. Yang C. N., Mills R. L. Phys. Rev., 1954, v. 96, p. 191.
44. Вайнштейн А. И., Захаров В. И. УФН, 1970, т. 100, с. 225.
45. Pervushin V. N. JINR E2-7540, Dubna, 1973.
46. Honerkamp J. e.a. Nucl. Phys. B, 1974, v. 69, p. 618.