

# ОПИСАНИЕ НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО $\pi N$ -РАССЕЯНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ КИРАЛЬНОЙ $SU(2) \times SU(2)$ -ДИНАМИКЕ

*М. И. Гайсак*

Институт теоретической физики АН УССР, Киев

*В. И. Лендвел*

Ужгородский государственный университет, Ужгород

Дан обзор современного состояния теории низкоэнергетического  $\pi N$ -рассеяния. Показано, что использование нелинейного  $SU(2) \times SU(2)$ -кирально-инвариантного лагранжиана в экспоненциальной параметризации, суперпропагаторного метода регуляризации амплитуды рассеяния и паде-приближения позволяет получить динамическое описание низкоэнергетического  $\pi N$ -рассеяния без введения каких бы то ни было произвольных параметров.

Исходя из первых двух неисчезающих членов ряда метода возмущений. получены аналитические выражения в диагональном (1,1) паде-приближении для  $s$ - и  $p$ -парциальных амплитуд. Энергетический ход и положение  $s$ - и  $t$ -канальных особенностей амплитуды  $\pi N$ -рассеяния находятся в весьма удовлетворительном согласии с экспериментальными данными.

The review of the current state of the low-energy  $\pi N$ -scattering theory is given. It is shown that the use of nonlinear  $SU(2) \times SU(2)$  chiral invariant Lagrangian in the exponential parametrization along with the superpropagator method of regularization of scattering amplitude and Padé-approximation allows one to obtain the dynamical description of low-energy  $\pi N$ -scattering without introducing any arbitrary parameters.

Using the first two nonvanishing terms of perturbation series the analytical expressions for the  $s$ - and  $p$ -partial waves in the (1,1)-diagonal Padé-approximation are obtained. Both energy dependence and the position of  $s$ - and  $t$ -channel singularities are in satisfactory agreement with the experiment.

## ВВЕДЕНИЕ

В последнее время появилось много работ, посвященных применению унитарной квантовой теории поля с неполиномиальными лагранжианами к описанию сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий элементарных частиц. Одним из плодотворных методов этого направления является суперпропагаторный метод (СП), введенный впервые М. К. Волковым [1]. Этот метод был успешно применен как к описанию низкоэнергетического (НЭ)  $\pi N$ -рассеяния, так и к описанию электромагнитных свойств  $\pi$ -

и  $K$ -мезонов, а также некоторых процессов слабых распадов. Изложению полученных результатов посвящен интересный обзор М. К. Волкова, В. Н. Первушина [2], которые показали, что этот метод можно успешно применять к описанию сильных взаимодействий. Однако помимо  $\pi\pi$ -рассеяния было бы интересным найти количественные данные и для других процессов сильных взаимодействий, в частности процесса  $\pi N$ -рассеяния.

Процесс  $\pi N$ -рассеяния всегда рассматривался как один из самых фундаментальных процессов сильных взаимодействий элементарных частиц. Поэтому проблема теоретической интерпретации процесса  $\pi N$ -рассеяния неизменно находилась в центре внимания исследователей. Впечатляющий прогресс в этом направлении в области низких энергий был достигнут на пути использования метода дисперсионных соотношений. Существенные результаты были получены в Дубне Д. В. Ширковым, П. С. Исаевым, В. А. Мещеряковым и др. (см., например, работы [3, 4]). Основная идея такого подхода состояла в использовании дисперсионных соотношений назад. Было показано, что именно в этих дисперсионных соотношениях наиболее сильно проявляется влияние перекрестного аннигиляционного разреза. Было определено влияние  $\pi\pi$ -взаимодействия на  $\pi N$ -рассеяние, в частности показано, что для удовлетворительного описания низших фаз  $\pi N$ -рассеяния необходим учет векторного  $\rho$ - и скалярного  $\sigma$ -мезонов. Использование дисперсионных соотношений назад в комбинации с дисперсионными соотношениями вперед позволило найти математически непротиворечивую систему уравнений для парциальных амплитуд  $\pi\pi$ - и  $\pi N$ -рассеяния. Исследование полученной для  $\pi\pi$ -рассеяния системы показало, что эта система имеет резонансные решения, соответствующие  $\rho$ - и  $\sigma$ -мезонам. Итоги этих исследований подведены Д. В. Ширковым и др. [5]. С использованием дубненского подхода были найдены также резонансные решения  $\pi N$ -системы, фазы  $NN$ -рассеяния и электромагнитные форм-факторы нуклонов [6].

Однако из-за необходимости введения большого числа варьируемых параметров (типа констант связи, масс бозонов и параметров  $\pi N$ -резонансов), а также детализации высокоэнергетического поведения амплитуды, дисперсионный подход остается, к сожалению, на уровне полуфеноменологических моделей. В разных работах, основанных на дисперсионном подходе, число произвольных параметров колеблется от 5 до 10. Динамическое описание с помощью метода дисперсионных соотношений реализовано не было.

Известно, что полное динамическое описание может основываться на использовании лагранжева формализма. В этом случае число произвольных параметров резко уменьшается. Однако само представление, основанное на лагранжевом формализме, страдало

серьезными недостатками, которые не позволили до самого последнего времени реализовать динамическое описание. Во-первых, ряд метода возмущений — единственного доступного метода расчета — является расходящимся, во-вторых, некоторые важные типы взаимодействия казались неперенормируемыми, да и тип взаимодействия не был в достаточной степени известен.

Характерной чертой адронной физики последних десятилетий было представление о взаимодействии типа Юкавы как об основном взаимодействии пионов и нуклонов, хотя еще в 1960 г. Сакураи [7] отмечал, что в рамках лагранжиана типа Юкавы не существует простых схем, в которых  $\pi$ -мезоны были бы линейно связаны с нуклонами, и что расчеты, основанные на этих лагранжианах, лишены какой-либо физической ценности.

В последнее время ситуация в обсуждаемой нами области существенно изменилась. Во-первых, были предложены лагранжианы (линейные и нелинейные) [8, 9], удовлетворяющие высшим симметриям, что означало существенный шаг вперед по сравнению с лагранжианами типа Юкавы. Действительно, основываясь на нелинейном кирально-инвариантном лагранжиане, Вайнберг [9] получил  $s$ -волновые длины  $\pi\pi$ - и  $\pi N$ -рассеяния.

Эти результаты были также воспроизведены, исходя из линейного кирального лагранжиана (см., например, работу [10]). Таким образом, наметились два подхода: использование линейных и нелинейных кирально-инвариантных лагранжианов. В настоящее время исследования ведутся в обоих направлениях. При этом оказывается, что линейная и нелинейная модели для  $\pi\pi$ -рассеяния совпадают. Однако, имея в виду и другие процессы —  $\pi N$ -,  $NN$ -рассеяния и т. п. — нельзя не отметить, что линейная модель страдает значительным произволом (помимо постулирования существования  $\sigma$ -мезонного поля здесь необходимо вводить взаимодействие нуклонов с  $\rho$ -,  $\omega$ -,  $A_2$ -мезонами, дейтонами и др.). Кроме того последовательное построение перенормируемой теории с массивными векторными мезонами наталкивается на значительные трудности [11]. В этом смысле, по-видимому, нелинейная модель более экономна и многообещающа. Можно утверждать, что линейная модель дает полуфеноменологическое описание типа описания с помощью дисперсионных соотношений или с помощью однобозонной модели и лишь нелинейная модель в состоянии привести к полному динамическому описанию.

Вначале киральные лагранжианы предполагалось использовать как феноменологические, в древесном приближении, для воспроизведения результатов алгебры токов. Для выхода за порог процесса рассеяния, т. е. для описания энергетического поведения амплитуды рассеяния, необходимо было уметь рассчитывать петлевые диаграммы. Линейные лагранжианы без векторных мезонов приводят к перенормируемым теориям, и в этом случае

принципиальных затруднений не возникало. В случае же нелинейных лагранжианов возникали, казалось бы, непреодолимые трудности из-за вопиющих расходимостей, обусловленных неполиномиальным характером кирального лагранжиана. Однако Г. В. Ефимову и Е. С. Фрадкину [12] удалось успешно решить проблему ренормируемости некоторых неполиномиальных взаимодействий, после чего открылась возможность использовать киральные лагранжианы для указанных выше целей.

Наиболее последовательный и подходящий для практического использования метод расчета высших приближений амплитуд рассеяния в теориях с неполиномиальными лагранжианами — СП-метод регуляризации, предложенный М. К. Волковым [1], — представляет собой способ аналитического продолжения амплитуды как функции некоторых коэффициентов  $\bar{C}(n)$ , характеризующих неполиномиальность лагранжиана, в комплексную  $n$ -плоскость.

Известные математические методы приближенного суммирования расходящихся рядов можно успешно применять для восстановления амплитуды рассеяния, исходя из ренормированного ряда метода возмущений. Одним из таких методов является метод паде-приближений, который с использованием простейших линейных моделей был применен к описанию процессов сильных взаимодействий Бессисом и др. [13]. Таким образом, наметился один из путей обхода известных трудностей, присущих методу возмущений. Метод паде-приближений можно рассматривать как один из методов извлечения физической информации, содержащейся в коэффициентах ряда метода возмущений, путем использования лагранжева формализма в теории сильных взаимодействий. Представляет поэтому несомненный интерес применение этих методов для описания НЭ  $\pi N$ -рассеяния — процесса физически более богатого экспериментальной информацией.

## 1. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ЛАГРАНЖИАНОВ

Первым применили метод паде-приближения к проблеме  $\pi N$ -рассеяния Миньяко, Пустерла и Ремидди [14], а также Гаммел, Ментцл и Кюбис [15]. Они использовали простой лагранжиан типа Юкавы

$$\mathcal{L}(x) = -ig\bar{\psi}(x)\gamma_5\tau\psi(x)\pi(x) - \lambda(\pi(x)\pi(x))^2/4. \quad (1)$$

Полученные ими результаты являются иллюстрацией отмеченной выше неадекватности лагранжианов типа Юкавы; парциальные волны с изотопспином  $I = 1/2$  полностью противоречат экспериментальным данным. Не намного лучшие результаты определены с помощью  $\sigma$ -модели [16]:

$$\mathcal{L}(x) = g\bar{\psi}(x)(\sigma(x) + i\gamma_5\tau\pi(x))\psi(x) - \lambda(\sigma^2(x) + \pi^2(x))^2/4 + c\sigma(x). \quad (2)$$

Здесь также не удалось найти длину рассеяния и целого ряда парциальных волн. Некоторые авторы приписывали неудачу тому обстоятельству, что из лагранжиана (2) вытекает неправильное соотношение между массами  $\sigma$ -мезона и нуклона:  $m_\sigma > m$  [17]. Хотелось бы подчеркнуть, что не только в этом заключается причина неудачи. Как отметили Д. В. Ширков, В. В. Серебряков [10], лагранжиан (2) в этом случае необходимо дополнить членами, отвечающими за обмен  $\rho$ -мезоном. Лишь учет этих членов может привести к правильному значению изотопически нечетной длины рассеяния и, следовательно, к правильному поведению соответствующих фаз рассеяния. Кроме того, важен дополнительный учет коротковолнового взаимодействия.

В целом это означает, что число параметров, которые используются в подходе, основанном на линейном лагранжиане, довольно значительно. Включение во взаимодействие связей с векторными мезонами катастрофически увеличивает число инвариантов.

Тем не менее полученные результаты совместно с результатами по  $\pi N$ -рассеянию убедительно свидетельствовали о том, что в принципе метод паде-приближения (при условии правильного выбора лагранжиана взаимодействия), по-видимому, может стать давно искомым инструментом исследования сильных взаимодействий. Действительно, гораздо лучшие численные результаты получены Л. В. Фильковым, В. В. Палюшевым [18], которые исходили из таких борновских «затравочных» членов в амплитудах  $\pi N$ -рассеяния:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} A^+(s, t, u) &= \alpha + \beta t / (m_\sigma^2 - t); & \operatorname{Re} A^-(s, t, u) &= 0; \\ \operatorname{Re} B^\pm(s, t, u) &= g_\pi^2 [1 / (m^2 - s) \mp 1 / (m^2 - u)] \end{aligned} \quad (3)$$

(здесь  $\alpha$  и  $\beta$  — подгоночные параметры, определяемые из эксперимента), которые близко совпадают с первым приближением нелинейного лагранжиана (ср. работу [10], см. также формулу (9) настоящей работы). Это совпадение было бы еще полнее, если бы авторы включили в  $B^-$  дополнительную константу, соответствующую контактному взаимодействию или  $\rho$ -мезонному обмену в линейном подходе. Нелинейность в модели Филькова — Палюшева вводилась при использовании условия унитарности для расчета амплитуд в высшем порядке по константе связи. Ими было получено весьма неплохое согласие вычисленных в (1,1)-диагональном паде-приближении фаз с экспериментом, хотя, как нам кажется, волна  $p_{11}$  требует особого рассмотрения, поскольку здесь необходимо найти одновременно и отрицательную «длину» рассеяния и выход фазы на резонанс, что для прямого использования (1,1) паде-приближения затруднительно.

Однако применение произвольных подгоночных параметров  $\alpha$  и  $\beta$  сильно снижает ценность модели Филькова — Палюшева.

Кроме того, использование в этой модели дисперсионных соотношений также требует детализации высокоэнергетического поведения инвариантных амплитуд.

Таким образом, подход, основанный на применении линейных лагранжианов, фактически сводится к однобозонной модели, поскольку требует введения полей, соответствующих каждой взаимодействующей, в том числе и обменной, частице. Число таких частиц в настоящее время велико и продолжает расти по мере накопления экспериментальной информации. Ясно, что введение все большего числа полей противоречит квантовой теории поля.

Более привлекателен, как уже отмечалось выше, другой подход, основанный на использовании неполиномиальных лагранжианов. Это эквивалентно предположению, что число фундаментальных частиц ограничено, а все остальные частицы должны быть связанными состояниями или резонансами первых, т. е. должны иметь динамическое происхождение. Именно таким динамическим описанием сильных взаимодействий элементарных частиц занят сейчас ряд исследователей.

Результаты, полученные Леманом, М. К. Волковым, В. Н. Перушиным и др. [19, 20], касающиеся НЭ  $\pi\pi$ -рассеяния, электромагнитных свойств пионов и  $K$ -мезонов и основывающиеся на использовании неполиномиальных лагранжианов и СП-метода регуляризации, свидетельствуют о получении динамического описания этих процессов и, несомненно, указывают на то, что именно такой подход позволяет глубже продвинуться в понимании процессов взаимодействий, в частности сильных взаимодействий элементарных частиц.

Ниже изложим применение этого метода для описания НЭ  $\pi N$ -рассеяния в рамках нелинейного  $SU(2) \times SU(2)$ -киральноинвариантного лагранжиана с использованием паде-приближения.

Последовательное использование СП-метода регуляризации означает существенный шаг вперед, поскольку этот метод позволяет получить теоретическое описание без введения произвольных параметров.

## 2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЛАГРАНЖИАНОВ

Очевидно, наибольший интерес представляет применение лагранжиана, с помощью которого при одних и тех же значениях параметров можно описать все процессы сильных взаимодействий. Поэтому, исходя из того, что описание  $\pi\pi$ -рассеяния и электромагнитных свойств мезонов в работах [19, 20] получено с помощью нелинейного лагранжиана в параметризации Гюрси, выберем здесь также этот вариант  $SU(2) \times SU(2)$ -кирально инва-

риантного лагранжиана [21]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & g_{ij}(\pi) \partial_\mu \pi_i(x) \partial^\mu \pi_j(x)/2 + i\overline{N}(x) \overset{\leftrightarrow}{\gamma}_\mu \partial^\mu N(x)/2 - \\ & - m\overline{N}(x) U(\pi) N(x) + ig'\overline{N}(x) \gamma_\mu U^+(\pi) \partial^\mu U(\pi) N(x)/2, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $g_{ij}(\pi)$  — метрический тензор искривленного изотопического пространства с постоянной кривизной, который при экспоненциальной параметризации имеет вид

$$\left. \begin{aligned} g_{ij}(\pi) &= f^2(\pi^2) \delta_{ij} - [f^2(\pi^2) - 1] \pi_i(x) \pi_j(x) / \pi^2(x); \\ f(\pi^2) &= \sin Z/Z; \quad Z \equiv \sqrt{\pi^2(x)/F_\pi^2}; \quad U(\pi) = \exp(i\gamma_5 \tau \pi(x)/F_\pi); \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$F_\pi$  — константа слабого распада  $\pi$ -мезона ( $F_\pi \approx 92$  Мэв).

В этой модели  $\pi$ -мезонные поля представляют собой нелинейную реализацию киральной  $SU(2) \times SU(2)$ -группы, а нуклонные поля преобразуются линейно относительно преобразований данной группы. Как было отмечено Леманом и Трутом [19], такая параметризация имеет то преимущество, что приводит к локализуемой теории в смысле Меймана — Джаффе.

Для того чтобы исключить из рассмотрения псевдовекторную связь, подвергнем нуклонное поле преобразованию Фолди — Дайсона:

$$N(x) = \exp(i a \gamma_5 \pi(x) \tau) \psi(x). \quad (6)$$

Подбирая константу  $a$  соответствующим образом, получаем следующий вид лагранжианов, дающих вклад в амплитуду  $\pi N$ -рассеяния в интересующем нас приближении:

$$\mathcal{L}_{\text{вз}}(x) = \mathcal{L}_0(x) + \mathcal{L}_1(x) + \mathcal{L}_2(x) + \mathcal{L}_3(x), \quad (7)$$

где

$$\mathcal{L}_0(x) = [f^2(\pi^2) - 1] \{ \partial_\mu \pi(x) \partial^\mu \pi(x) - [\pi(x) \partial_\mu \pi(x)]^2 / \pi^2(x) \} / 2;$$

$$\mathcal{L}_1(x) = - (i m g_A / F_\pi) \bar{\psi}(x) \gamma_5 \tau \psi(x) \pi(x) \sin Z_1 / Z_1;$$

$$\mathcal{L}_2(x) = m \bar{\psi}(x) \psi(x) (1 - \cos Z_1);$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3(x) = & (1/2) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \tau \psi(x) \pi(x) x \partial^\mu \pi(x) \times \\ & \times [(g_A - 1) \sin^2 Z_2 - (g_A + 1) \sin^2 Z_3] / \pi^2(x); \end{aligned}$$

$$Z_1 \equiv \sqrt{g_A^2 \pi^2 / F_\pi^2}; \quad Z_2 \equiv \sqrt{(g_A + 1)^2 \pi^2 / 4 F_\pi^2};$$

$$Z_3 \equiv \sqrt{(g_A - 1)^2 \pi^2 / 4 F_\pi^2}; \quad g_A = 1 - g'.$$

Справедливость такого кирального квантованного лагранжиана обоснована В. Н. Первушиным [22].

В работах [23] выполнены расчеты НЭ  $\pi N$ -рассеяния на основании нелинейного кирального лагранжиана вайнбергова типа в однопетлевом приближении. В этих работах лагранжиан исполь-

зован только для расчета мнимой части амплитуды рассеяния. Что же касается реальной части, то ее восстанавливали с помощью одномерных дисперсионных соотношений для инвариантных амплитуд  $A^\pm(s, t, u)$  и  $B^\pm(s, t, u)$ . Получено хорошее согласие теории с экспериментом. Недостаток этого метода состоит в необходимости введения ряда произвольных параметров в качестве констант вычитания. Поэтому рассмотрим вклад в полную амплитуду  $\pi N$ -рассеяния диаграмм древесного типа совместно с однопетлевыми диаграммами с использованием  $SU(2) \times SU(2)$ -кирально-инвариантного лагранжиана в экспоненциальной параметризации (7), который можно регуляризовать с помощью СП-метода. Основываясь на полученных результатах, восстановим амплитуду  $\pi N$ -рассеяния в (1,1)-диагональном паде-приближении.

Выражение для  $S$ -матрицы и правила упорядочивания операторов с помощью оператора Хори приведены в работе [24] и являются обобщением на случай изотопического спина выражений, приведенных в работах [25—27].

### 3. ПЕРЕНОРМИРОВКА АМПЛИТУДЫ $\pi N$ -РАССЕЯНИЯ. ВКЛАД ДИАГРАММ В ИНВАРИАНТНЫЕ АМПЛИТУДЫ

Рассмотрим процесс  $\pi_\alpha(q_1) + N_\beta(p_1) \rightarrow \pi_\gamma(q_2) + N_\delta(p_2)$ . Будем исходить из принятого определения амплитуды рассеяния [5]:

$$\langle f | S - 1 | i \rangle = \frac{im}{(2\pi)^2 \sqrt{4q_1^0 q_2^0 p_1^0 p_2^0}} \bar{u}(p_2) T_{\gamma\alpha}^{\delta\beta} u(p_1) \delta^4(p_1 + q_1 - p_2 - q_2), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} T_{\gamma\alpha}^{\delta\beta} &= \delta_{\gamma\alpha} \delta_{\delta\beta} [A^+(s, t, u) + (\hat{q}_1 + \hat{q}_2) B^+(s, t, u)/2] + \\ &+ [\tau_\gamma, \tau_\alpha]^{\delta\beta} [A^-(s, t, u) + (\hat{q}_1 + \hat{q}_2) B^-(s, t, u)/2]/2; \\ s &= (p_1 + q_1)^2 = (p_2 + q_2)^2; \quad t = (q_1 - q_2)^2 = (p_1 - p_2)^2; \\ u &= (p_2 - q_1)^2 = (p_1 - q_2)^2; \end{aligned}$$

$p_1, p_2, q_1$  и  $q_2$  — 4-импульсы нуклонов и мезонов соответственно.

Для того чтобы получить амплитуду  $\pi N$ -рассеяния в первом и втором порядке по основной константе связи исходя из лагранжиана взаимодействия (7), необходимо рассчитать вклад древесных диаграмм.

В третьем и четвертом порядке по основной константе считаем вклад диаграмм, приведенных на рис. 1. Этими диаграммами (совместно с перекрестными и несвязными) полностью исчерпывается вклад в амплитуду  $\pi N$ -рассеяния в первом и втором приближениях метода возмущений. Диаграмма рис. 1, а, дает конечный вклад, в то время как остальные диаграммы расходятся.



Расходящиеся диаграммы рис. 1, б—д и ж можно перенормировать с помощью перенормировки нуклонной массы  $\delta m$ , мезонной массы  $\delta m_\pi^2$  и перенормировки двух зарядов. Диаграммы рис. 1, з, и нельзя перенормировать обычным способом, поэтому рассчитаем их с помощью СП-метода регуляризации.

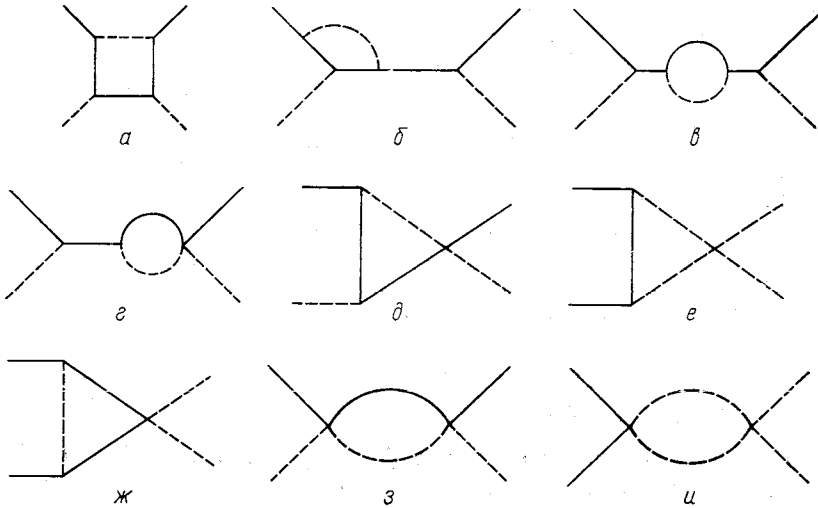


Рис. 1. Диаграммы третьего и четвертого порядка по основной константе связи, дающие вклад в амплитуду  $\pi N$ -рассеяния на основании лагранжиана (7)

Вклад диаграмм древесного типа можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} A^+(s, t, u) &= \frac{m g_A^2}{F_\pi^2}; \\ B^+(s, t, u) &= g_A^2 m^2 [1/(m^2 - s) - 1/(m^2 - u)]/F_\pi^2; \\ A^-(s, t, u) &= 0; \\ B^-(s, t, u) &= (1 - g_A^2)/2F_\pi^2 + g_A^2 m^2 [1/(m^2 - s) + 1/(m^2 - u)]/F_\pi^2. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Поскольку лагранжиан (4) инвариантен относительно преобразований  $SU(2) \times SU(2)$ -группы, то масса  $\pi$ -мезона равна нулю. Последовательное введение массы пиона в (4), связанное с нарушением киральных симметрий, до сих пор остается открытым вопросом, и его обсуждение не входит в нашу задачу. Леман [28] отмечал, что предположение о равенстве нулю массы пиона не влияет на численные расчеты  $\pi\pi$ -рассеяния. Тем более допустимо это предположение при  $\pi N$ -рассеянии, где естественным параметром теории является отношение  $\omega/m$  — величина достаточно

малая ( $\omega$  — энергия  $\pi$ -мезона в с. ц. м.). Поэтому ниже рассчитаем вклад высших диаграмм в предположении  $m_\pi = 0$ . При вычислении диаграмм третьего и четвертого порядка по основной константе связи будем следовать работе [29].

Вклады диаграмм рис. 1,  $g$ – $ж$  запишутся следующим образом:

$$\mathcal{L}_1(x) \mathcal{L}_1(y) \mathcal{L}_2(z) \text{ (см. рис. 1, } \partial \text{)}$$

$$\left. \begin{aligned} A^\pm(s, t, u) &= 32f^4 m^3 \left[ \mp \frac{s-m^2}{s} \ln \frac{m^2}{m^2-s} \pm (s \leftrightarrow u) \right]; \\ B^\pm(s, t, u) &= \pm 32f^4 m^2 \left\{ \frac{m^2}{s} \ln \frac{m^2}{m^2-s} + \frac{m^2}{s-m^2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[ L\left(\frac{s}{m^2}\right) - L(1) \right] \mp (s \leftrightarrow u) \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где  $L(x) = \int_0^x \frac{\ln(1-y)}{y} dy$  — дилогарифм Эйлера;

$$\mathcal{L}_1(x) \mathcal{L}_1(y) \mathcal{L}_2(z) \text{ (см. рис. 1, } \text{ж)}$$

$$\left. \begin{aligned} A^+(s, t, u) &= -96f^4 m^3 \sqrt{\frac{4m^2-t}{t}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{t}{4m^2-t}}; \\ A^-(s, t, u) &= B^\pm(s, t, u) = 0; \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\mathcal{L}_1(x) \mathcal{L}_1(y) \mathcal{L}_2(z) \text{ (см. рис. 1, } \text{з)}$$

$$\left. \begin{aligned} A^\pm(s, t, u) &= 16f^4 m^3 \left[ \frac{m^4-s^2}{s^2} \ln \frac{m^2}{m^2-s} + \frac{s-m^2}{s} \pm (s \leftrightarrow u) \right]; \\ B^\pm(s, t, u) &= 16f^4 m^2 \left[ \frac{m^2(m^2-s)}{s^2} \ln \frac{m^2}{m^2-s} + \frac{s-m^2}{s} \mp (s \leftrightarrow u) \right]; \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\mathcal{L}_1(x) \mathcal{L}_1(y) \mathcal{L}_0(z) \text{ (см. рис. 1, } \text{е)}$$

$$\left. \begin{aligned} A^+(s, t, u) &= \frac{64f^4 m^3}{g_A^2} \sqrt{\frac{t}{t-4m^2}} \ln \frac{\sqrt{t/(t-4m^2)}+1}{\sqrt{t/(t-4m^2)}-1}; \\ A^-(s, t, u) &= \frac{16f^4 m^3}{g_A^2} \frac{s-u}{\sqrt{t(t-4m^2)}} \ln \frac{\sqrt{t/(t-4m^2)}+1}{\sqrt{t/(t-4m^2)}-1}; \\ B^-(s, t, u) &= \frac{16f^4 m^2}{g_A^2} \sqrt{\frac{t-4m^2}{t}} \ln \frac{\sqrt{t/(t-4m^2)}+1}{\sqrt{t/(t-4m^2)}-1}; \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$B^+(s, t, u) = 0.$$

При получении этих выражений мы взяли некоторые фейнмановы интегралы приблизительно в средней точке:

$$\int_0^1 dx \frac{(x-1)^2}{\sqrt{tx^2-4m^2t(1-x)^2}} \ln \left| \frac{x+\sqrt{x^2-4m^2(1-x)^2/t}}{x-\sqrt{x^2-4m^2(1-x)^2/t}} \right| = \\ = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{t(t-4m^2)}} \ln \frac{\sqrt{t/(t-4m^2)}+1}{\sqrt{t/(t-4m^2)}-1}.$$

Такая аппроксимация правильно отражает аналитические свойства амплитуды рассеяния. В то же время численные расчеты интеграла, выполненные в интервале  $0 \leq \omega < 2$ , указывают на то, что такая аппроксимация отличается от точного значения менее чем на 30% для больших  $\omega$

$$\mathcal{L}_1(x) \mathcal{L}_1(y) \mathcal{L}_3(z) \text{ (см. рис. 1, } \partial \text{)}$$

$$\left. \begin{aligned} A^+(s, t, u) &= 32f^4m^3 \left(1 - \frac{1}{g_A^2}\right) \times \\ &\times \left[ L\left(\frac{s}{m^2}\right) - L(1) + \frac{s-m^2}{s} \ln \frac{m^2}{m^2-s} + (s \leftrightarrow u) \right]; \\ A^-(s, t, u) &= B^-(s, t, u) = 0; \\ B^+(s, t, u) &= 32f^4m^2 \left(1 - \frac{1}{g_A^2}\right) \left[ \frac{2m^2}{m^2-s} \left[ L\left(\frac{s}{m^2}\right) - L(1) \right] - \right. \\ &\left. - \frac{s+m^2}{s} \ln \frac{m^2}{m^2-s} - (s \leftrightarrow u) \right]; \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\mathcal{L}_1(x) \mathcal{L}_1(y) \mathcal{L}_3(z) \text{ (см. рис. 1, } \kappa \text{)}$$

$$\left. \begin{aligned} A^+(s, t, u) &= B^+(s, t, u) = 0; \\ A^-(s, t, u) &= 8f^4m^3 \left(1 - \frac{1}{g_A^2}\right) \left[ \frac{s-u}{\sqrt{t(4m^2-t)}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{t}{4m^2-t}} \right]; \\ B^-(s, t, u) &= 8f^4m^2 \left(1 - \frac{1}{g_A^2}\right) \frac{t-6m^2}{\sqrt{t(4m^2-t)}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{t}{4m^2-t}}; \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\mathcal{L}_1(x) \mathcal{L}_1(y) \mathcal{L}_3(z) \text{ (см. рис. 1, } \epsilon \text{)}$$

$$\left. \begin{aligned} A^\pm(s, t, u) &= \\ &= 16f^4m^3 \left(1 - \frac{1}{g_A^2}\right) \left[ \left(\frac{s-m^2}{s}\right)^2 \ln \frac{m^2}{m^2-s} + \frac{s-m^2}{m^2} \pm (s \leftrightarrow u) \right]; \\ B^\pm(s, t, u) &= m^{-1}A^\mp(s, t, u). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Вклады диаграмм рис. 1,  $a-v$  запишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} & \mathcal{L}_1(x) \mathcal{L}_1(y) \mathcal{L}_1(z) \mathcal{L}_1(t) \text{ (см. рис. 1, } a) \\ A^\pm(s, t, u) &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \end{pmatrix} 48f^4 m^3 \left\{ \frac{m^2}{s-m^2} \left[ L\left(\frac{s}{m^2}\right) - L(1) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{2\theta}{\sin 2\theta} \left[ 1 + h(\theta) + \ln \frac{m^2}{m^2-s} \right] \pm (s \leftrightarrow u) \right\}; \\ B^\pm(s, t, u) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1/3 \end{pmatrix} 48f^4 m^2 \left\{ \frac{m^2(s+m^2)}{(s-m^2)^2} \left[ L\left(\frac{s}{m^2}\right) - L(1) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{2\theta}{\sin 2\theta} \frac{2m^2}{s-m^2} \left[ h(\theta) + \ln \frac{m^2}{m^2-s} \right] \mp (s \leftrightarrow u), \right. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где  $\sin^2 \theta = t/4m^2$ ;  $h(\theta) = \theta^{-1} \int_0^\theta \zeta \operatorname{ctg} \zeta d\zeta$ ;

$$\left. \begin{aligned} & \mathcal{L}_1(x) \mathcal{L}_1(y) \mathcal{L}_1(z) \mathcal{L}_1(t) \text{ (см. рис. 1, } b) \\ A^\pm(s, t, u) &= 32f^4 m^3 \left\{ \frac{-m^2}{m^2-s} \left[ L\left(\frac{s}{m^2}\right) - L(1) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{m^2}{s} \ln \frac{m^2}{m^2-s} \pm (s \leftrightarrow u) \right\}; \\ B^\pm(s, t, u) &= -32f^4 m^2 \left\{ \frac{2m^4}{(s-m^2)^2} \left[ L\left(\frac{s}{m^2}\right) - L(1) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{s-m^2}{s} \ln \frac{m^2}{m^2-s} \right] + \frac{2m^2}{s-m^2} + \frac{m^2}{s} \ln \frac{m^2}{m^2-s} \mp (s \leftrightarrow u) \right\}; \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} & \mathcal{L}_1(x) \mathcal{L}_1(y) \mathcal{L}_1(z) \mathcal{L}_1(t) \text{ (см. рис. 1, } e) \\ A^\pm(s, t, u) &= 24f^4 m^3 \left[ \frac{m^2-s}{s} + \frac{m^2(s-m^2)}{s^2} \ln \frac{m^2}{m^2-s} \pm (s \leftrightarrow u) \right]; \\ B^\pm(s, t, u) &= m^{-4} A^\mp(s, t, u). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Здесь будем пользоваться естественной системой единиц ( $\hbar = c = m_\pi = 1$ ) и соотношением Гольдбергера — Траймана  $f^2 = g_A^2/16\pi F_\pi^2$  ( $f^2 \approx 0,08$ ).

Диаграмма  $\mathcal{L}_2(x) \mathcal{L}_2(y)$  (см. рис. 1,  $z$ ) также перенормируется обычным способом, несмотря на то что она расходится линейно. Поэтому, рассчитывая ее обычным способом, получаем:

$$\left. \begin{aligned} A^+(s, t, u) &= 8f^4 m^3 \left[ \frac{m^2-s}{s} + \frac{(s-m^2)(3s+m^2)}{s^2} + (s \leftrightarrow u) \right]; \\ A^-(s, t, u) &= B^-(s, t, u) = 0; \\ B^+(s, t, u) &= 8f^4 m^2 \left[ \frac{m^2-s}{s} + \frac{s^2-m^4}{s^2} \ln \frac{m^2}{m^2-s} - (s \leftrightarrow u) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Остальные диаграммы рассчитываем, используя СП-метод регуляризации.

#### 4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СП-МЕТОДА ДЛЯ РАСЧЕТА ■ РАСХОДЯЩИХСЯ ДИАГРАММ

Поскольку перенормировка СП-методом амплитуды  $\pi N$ -рассеяния до сих пор никем еще не рассматривалась, имеет смысл продемонстрировать метод расчета хотя бы на наиболее простом примере диаграммы  $\mathcal{L}_0(x) \mathcal{L}_2(y)$  (см. рис. 1, *u*). При расчетах будем следовать методу Волкова, который имеет некоторые преимущества по сравнению с методами других авторов [1]. Будем исходить из стандартного определения  $S$ -матрицы через лагранжиан взаимодействия. Выполнив спаривание по внутренним полям в  $S$ -матрице с помощью оператора Хори (подробности см. в работе [24]), получим для матричного элемента

$$\begin{aligned} \langle f | S^{(2)} | i \rangle = & \frac{m}{2} \langle f | \int d^4x_1 d^4x_2 \bar{\psi}_2 \psi_2 \times \\ & \times [\partial_\mu \pi_1 \partial^\mu \pi_1 I(x_1 - x_2) + \pi_1 \partial^\mu \pi_1 I_{2\mu}(x_1 - x_2) + \\ & + \pi_1 \pi_1 I_3(x_1 - x_2)] | i \rangle, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\left. \begin{aligned} I_1(x_1 - x_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} d(n) [-i\Delta^c(x_1 - x_2)]^{2n+2}, \\ I_{2\mu}(x_1 - x_2) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} d(n) [-i\Delta_\mu^c(x_1 - x_2)] [-i\Delta^c(x_1 - x_2)]^{2n+1}, \\ I_3(x_1 - x_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} d(n) [-i\Delta_\mu^c(x_1 - x_2)]^2 [-i\Delta^c(x_1 - x_2)]^{2n}, \\ d(n) &= \frac{2^{2n+4} (2n+3) g_A^{2n+2}}{3 (2n+4)! F_\pi^{4n+4}}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Нахождение выражения (21) значительно упростится, если при интегрировании воспользоваться готовыми формулами дифференцирования, приведенными в работе [24].

Выполняя необходимые коммутации нуклонных и мезонных операторно-значных полей с операторами рождения и уничтожения этих полей и переходя к новым переменным  $x_1 - x_2 = u$ ,  $x_1 + x_2 = v$ , можно выполнить интегрирование по переменной  $v$ . В результате получаем

$$\begin{aligned} \langle j | S^{(2)} | i \rangle = & \frac{m}{2} \frac{m \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}}{(2\pi)^2 \sqrt{4q_1^0 q_2^0 p_1^0 p_2^0}} \times \\ & \times \bar{u}(p_2) \int d^4u \exp(iQu) [2q_1 q_2 I_1(u) + \\ & + iQ_\mu I_2^\mu(u) + 2I_3(u)] u(p_1) \delta^4(P_i - P_f); \quad Q = q_2 - q_1. \end{aligned} \quad (23)$$

Чтобы выполнить интегрирование в (23) по  $u$ , необходимо перейти к евклидовому пространству. Переходя в (23) к сферическим координатам в евклидовом пространстве и выражая результаты в терминах инвариантных амплитуд согласно (8), после интегрирования по углам получаем (при этом используются явные выражения для каузальных функций и их производных [24]):

$$\left. \begin{aligned} A^+(q_2 - q_1) &= \frac{m}{2i} \int_0^\infty dr \sum_{n=0}^\infty \frac{d(n)}{(2\pi)^{4n+2}} \times \\ &\times \left[ 2q_1 q_2 r^{-4n+2} - 4Q_\mu r^{-4n-4} \frac{\partial}{\partial Q_\mu} - 4r^{-4n-4} \right] \frac{J_1 \sqrt{-Q^2} r}{\sqrt{-Q^2}}; \\ B^\pm(s, t, u) &= A^-(s, t, u) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

где  $J_1(x)$  — цилиндрическая функция первого рода.

Для того чтобы выполнить в (24) интегрирование по  $r$ , необходимо воспользоваться методом аналитической регуляризации по Волкову. Для этого запишем суммы в (24) в виде интеграла Мелина — Бернса (Зоммерфельда — Ватсона) и деформируем контур интегрирования в комплексной  $z$  плоскости так, чтобы  $-1 < \text{Re } z < 0$ . Во всей области интегрирования получаем (при этом необходимо вводить частичную регуляризацию, как это обычно делается [1]):

$$\begin{aligned} A^+(Q^2) &= -\frac{m}{4i} \int_{\alpha+i\infty}^{\alpha-i\infty} dz \text{ctg } \pi z d(z) (2\pi)^{-4z-2} \times \\ &\times \left[ 2q_1 q_2 \frac{\Gamma(-2z)}{\Gamma^2(2z+2)} \frac{(V-Q^2)^{4z}}{2^{4z+2}} - 4Q_\mu \frac{\Gamma(-1-2z)}{\Gamma(2z+3)} \frac{\partial}{\partial Q_\mu} \frac{(V-Q^2)^{4z+2}}{2^{4z+2}} - \right. \\ &\left. - \frac{\Gamma(-1-2z)}{\Gamma(2z+3)} \frac{(V-Q^2)^{4z+2}}{2^{4z+4}} \right], \end{aligned} \quad (25)$$

где  $0 < \alpha < 1$ ,  $\Gamma(z)$  — гамма-функция. Выражение (25) соответствует суммированию цепочки диаграмм (см. рис. 1,  $u$ ) с двумя, четырьмя и т. д. внутренними линиями. Для того чтобы получить вклад, соответствующий одной петле, необходимо взять вычет только в точке  $z = 0$ . Таким образом, окончательно

$$A^+(s, t, u) = -\frac{m}{6} \frac{(2\pi)^2 g_A^2}{(4\pi F_\pi)^4} \left[ 2 \ln \frac{-t g_A^2}{8\pi^2 F_\pi^2} + 6C - \frac{11}{2} \right] t, \quad (26)$$

где  $C$  — постоянная Эйлера — Маскерони.

Совершенно аналогичным образом можно получить вклад  $\mathcal{L}_0(x) \mathcal{L}_3(y)$  (см. рис. 1, *u*):

$$B^-(s, t, u) = \frac{1-g_A^2}{3} \frac{4f^4}{g_A^2} \left[ 2 \ln \frac{-t}{8\pi^2 F \pi^2} + g_A \ln \frac{g_A+1}{g_A-1} + \ln(g_A^2 - 1) + 6C - \frac{17}{2} \right]. \quad (27)$$

Расчет диаграммы  $\mathcal{L}_2(x) \mathcal{L}_3(y)$  (см. рис. 1, *з*), соответствующей вкладу от *s*- и *u*-каналов, несколько усложняется из-за наличия массового нуклонного пропагатора. Однако и в этом случае интегралы по *r* берутся и результаты интегрирования выражаются через гипергеометрическую функцию [24]. Окончательный вклад в инвариантные амплитуды  $\pi N$ -рассеяния от диаграммы рис. 1, *з* с вершинами  $\mathcal{L}_2(x) \mathcal{L}_3(y)$  имеет вид

$$\left. \begin{aligned} A^-(s, t, u) &= 8f^4 m^3 \left(1 - \frac{1}{g_A^2}\right) \times \\ &\times \left[ \left(2\tilde{C} + \frac{1}{4}\right) \frac{s-m^2}{m^2} + \frac{s^2-m^4}{sm^2} + \frac{(s-m^2)^2}{s^2} \ln \frac{m^2}{m^2-s} - (s \leftrightarrow u) \right]; \\ B^-(s, t, u) &= 8f^4 m^2 \left(1 - \frac{1}{g_A^2}\right) \times \\ &\times \left[ \frac{m^2-s}{s} - \frac{(s-m^2)^2}{s^2} \ln \frac{m^2}{m^2-s} + (s \leftrightarrow u) \right], \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

где

$$\tilde{C} = \{6C - 7/3 + g_A \ln [(g_A + 1)/(g_A - 1)] + \ln [(m/4\pi F \pi)^4 g_A^2 (g_A^2 - 1)]\}/4.$$

Вклады от диаграммы рис. 1, *з* с вершинами  $\mathcal{L}_3(x) \mathcal{L}_3(y)$  оказываются еще меньше из-за множителя  $(g_A^2 - 1)^2/16$ . В дальнейшем не будем рассматривать последние.

## 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПАРЦИАЛЬНЫХ АМПЛИТУД

Чтобы получить парциальные амплитуды, воспользуемся хорошо оправдавшим себя методом выделения парциальных амплитуд с помощью комбинирования инвариантных амплитуд для угла рассеяния вперед и назад. Процедура нахождения выражений для парциальных амплитуд подробно изложена в работе [5], а также [23, 24]. В дальнейшем для удобства контролирования свойств кроссинг-симметрии восстановим массу пиона, положив  $\omega^2 = v + 1$  ( $\omega$  — энергия пиона,  $v = \mathbf{q}^2$  — квадрат импульса пиона в с. ц. м.).

При получении парциальных амплитуд удобно воспользоваться разложением в амплитуде по степеням  $\omega/m$  и ограничиться

первыми членами такого разложения. При этом инвариантные амплитуды, выраженные в терминах энергии пиона, будут обладать следующими свойствами кроссинг-симметрии:  $A^+(\omega)$  и  $B^-(\omega)$  вперед симметричны относительно замены  $\tilde{\omega} \rightarrow -\tilde{\omega}$  ( $\tilde{\omega} = 2\omega + 2\nu/m$ ),  $\omega \rightarrow -\omega$ ;  $A^-(\omega)$  и  $B^+(\omega)$  антисимметричны при такой замене. Эти амплитуды обладают такими же свойствами и для рассеяния назад при замене, однако  $\omega \rightarrow -\omega$ , что позволяет нам получить парциальные  $s$ - и  $p$ -волны, которые также удовлетворяют простым свойствам кроссинг-симметрии при замене  $\omega \rightarrow -\omega$  (см. приложение). Чтобы получить разложения инвариантных амплитуд по степеням  $\omega/m$ , воспользуемся разложением для дилогарифма Эйлера, приведенным в работе [29]:

$$\frac{m^2}{m^2-s} \left[ L\left(\frac{s}{m^2}\right) - L(1) \right] = 1 + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{s}{m^2}\right) + \frac{1}{9} \left(1 - \frac{s}{m^2}\right)^2 + \dots + \\ + \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{s}{m^2}\right) + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{s}{m^2}\right)^2 + \dots \right] \ln \frac{m^2}{m^2-s}. \quad (29)$$

Для упрощения записи полагаем  $\omega^3 = \omega\nu$ ,  $\omega^2 = \nu$ ,  $\tilde{\omega} = 2\omega$ . Явный вид суммарного вклада диаграмм высших порядков приведен в работе [36]. С помощью амплитуд (9) — (20) и (26) — (28) можно получить выражения для реальных частей парциальных  $s$ - и  $p$ -волновых амплитуд, используя следующие соотношения [10]:

$$s^\pm = [\varphi^\pm(+1) + \varphi^\pm(-1)]/2; \quad (30)$$

$$h_{33}(\omega) = [\Delta\varphi^+ - \Delta\varphi^- - 2(\Delta\beta^+ - \Delta\beta^-)]/6\nu; \quad (31)$$

$$h_{13}(\omega) = [\Delta\varphi^+ + 2\Delta\varphi^- - 2(\Delta\beta^+ + 2\Delta\beta^-)]/6\nu; \quad (32)$$

$$h_{31}(\omega) = [\Delta\varphi^+ + 2\Delta\varphi^- + 4(\Delta\beta^+ + 2\Delta\beta^-)]/6\nu; \quad (33)$$

$$h_{11}(\omega) = [\Delta\varphi^+ + 2\Delta\varphi^- + 4(\Delta\beta^+ + 2\Delta\beta^-)]/6\nu, \quad (34)$$

где

$$\Delta\varphi^\pm = \varphi^\pm(1) - \varphi^\pm(-1); \quad \Delta\beta^\pm = [\beta^\pm(+1) + \beta^\pm(-1)]/2;$$

причем

$$\varphi^\pm = \frac{1}{4\pi} \left[ A^\pm(\omega, \cos\theta) + \frac{s-u}{4m} B^\pm(\omega, \cos\theta) \right], \\ \beta^\pm = \frac{1}{8\pi m} B^\pm(\omega, \cos\theta). \quad (35)$$

Парциальные  $s$ -волны в изотопическом состоянии « $\pm$ », а также  $p$ -волновые амплитуды  $h_{ij}$  связаны с фазами рассеяния следующим образом:

$$s^\pm = \frac{1}{3} \left[ S_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} S_3 \right]; \quad \Delta S_j = [\exp(i\delta_j) \sin \delta_j]/q; \\ h_{ij} = [\exp(i\delta_{ij}) \sin \delta_{ij}]/q^3 \quad (36)$$

( $W^2 = s$ ,  $E = \sqrt{m^2 + \nu}$  — энергия нуклона в с. ц. м.).



Рассмотрим сначала парциальную  $s$ -волну. Подставляя в (30) вклады древесных диаграмм (9), получаем во втором порядке

$$\operatorname{Re} s_{\Pi}^{-} \approx 2f^2\omega/g_A^2. \quad (37)$$

Суммируя вклады диаграмм четвертого порядка, с учетом (30) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} s_{IV}^{-} \approx & \frac{8f^4}{\pi} \left[ \left( 2\tilde{C} - \frac{4\tilde{C}+3}{2g_A^2} \right) m^2\omega + \right. \\ & \left. + \left( \frac{(g_A^2-1)\tilde{C}}{g_A^2} + \frac{1,17}{g_A^2} \right) \omega v + \left( -1 + \frac{5}{3g_A^2} + \frac{1}{3g_A^4} \right) \omega v \ln \frac{m}{2\omega} \right]. \quad (38) \end{aligned}$$

Казалось бы, наличие линейных по  $\omega$  членов в (38) нарушает известные низкоэнергетические теоремы. С другой стороны, на основании анализа дисперсионных соотношений было установлено отсутствие членов порядка  $m^2\omega$  и выше в  $s$ -волнах [3, 4]. Однако эти члены типа  $m^2\omega$  в  $s$ -волне отсутствуют, если выполняется условие

$$4g_A^2\tilde{C} - 4\tilde{C} - 3 = 0. \quad (39)$$

Используя теперь выражения для реальных частей парциальных амплитуд  $s_l$  во втором и четвертом порядке метода возмущений по основной константе связи  $f^2$  типа

$$s_l = f^2 s_l^{\text{II}} + f^4 s_l^{\text{IV}} + \dots, \quad (40)$$

можно, следуя [13, 17], восстановить амплитуду в (1,1) паде-приближении согласно выражению

$$s_l = [f^2 s_l^{\text{II}}]^2 / (f^2 s_l^{\text{II}} - f^4 s_l^{\text{IV}}). \quad (41)$$

Тогда из выражений (37) и (38) при учете (39) с использованием (1,1) паде-приближения (41) получаем выражение для парциальной амплитуды

$$\operatorname{Re} s^{-} \approx \frac{2f^2}{g_A^2} \frac{\omega}{1 + (4f^2 v/\pi) [1,83g_A^2 - 1,92 + (g_A^2 - 1,67 + 1/3g_A^2) \ln(m/2\omega)]}. \quad (42)$$

Аналогично для  $s$ -волны в изотопическом состоянии «+» после аккуратного учета членов типа  $m^{-1}$  в первом исчезающем приближении получаем

$$s_{\Pi}^{+} \approx -2f^2 v/m. \quad (43)$$

Во втором исчезающем приближении с использованием выражений (9) и (30) находим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} s_{IV}^{+} \approx & \frac{8f^4}{\pi} \left\{ \left( -\frac{11}{4} + \frac{79}{16g_A^2} \right) m v + \right. \\ & \left. + \left( 2,86 + \frac{0,56}{g_A^2} \right) \frac{v^2}{m} + \left[ -\frac{2mv}{3g_A^2} + \left( 1,5 - \frac{9,33}{g_A^2} \right) \frac{v^2}{m} \right] \ln \frac{m}{2\omega} \right\}. \quad (44) \end{aligned}$$

Условие отсутствия членов порядка  $m\nu$  в  $s^+$ -волне имеет вид

$$132g_A^3 - 205 = 0, \quad (45)$$

если при этом воспользоваться численной аппроксимацией  $\nu \ln(m/2\omega) \approx \nu(1 - 4\omega^2/m^2)$ , которая вполне пригодна в интересующей нас ограниченной области значений  $\omega = 1 \div 3$ . С учетом условия (45) с помощью (1,1) паде-приближения (41) из (43) и (44) получим окончательное выражение для  $s^+$  парциальной амплитуды:

$$\text{Re } s^+ \approx -\frac{2f^2}{m} \frac{\nu}{1 + (4f^2\nu/\pi) [2,86 + 3,23/g_A^2 + (1,5 - 9,33/g_A^2) \ln(m/2\omega)]}. \quad (46)$$

Для большей наглядности (42) и (46) воспользуемся тем обстоятельством, что в рассматриваемой области малых энергий  $\omega$  и для значений аксиальной константы  $g_A^2 \approx 1,5 \div 2$  можно с хорошей точностью аппроксимировать квадратные скобки в (42) и (46) выражениями  $2(g_A^2 - 1)$  и  $5 - 6g_A^{-2}$  соответственно. Тогда (42) и (46) принимают простой вид:

$$\text{Re } s^- \approx \frac{2f^2}{g_A^2} \frac{\omega}{1 + 8f^2\nu(g_A^2 - 1)\pi}; \quad (42')$$

$$\text{Re } s^+ \approx -\frac{2f^2}{m} \frac{\nu}{1 + (f^2\nu/\pi) [(20g_A^2 - 24)/g_A^2]}. \quad (46')$$

Имеет смысл подчеркнуть, что полученные таким образом  $s$ -волны не содержат произвола, так как определяются хорошо известными константами  $f^2$  и  $g_A$ , а также обладают правильными свойствами кроссинг-симметрии при замене  $\omega \rightarrow -\omega$  (см. приложение).

Для  $p$ -волн в первом неисчезающем приближении имеем

$$h_{33} \approx \frac{4}{3} \frac{f^2}{\omega}; \quad h_{13} = h_{31} \approx -\frac{2}{3} \frac{f^2}{\omega}; \quad h_{11} \approx -\frac{8}{3} \frac{f^2}{\omega}. \quad (47)$$

Учитывая вклады диаграмм четвертого порядка (26) — (28) согласно (31) — (34) и применяя к полученным результатам (1,1) паде-приближение (41), получаем после выполнения простейшей унитаризации следующие выражения для  $p$ -волновых амплитуд  $\pi N$ -рассеяния:

$$\text{Re } h_{33}^{-1} \approx \frac{3\omega}{4f^2} \left\{ 1 - \frac{2f^2\omega}{\pi} \left[ \left( \frac{108g_A^2 - 77}{48g_A^2} - \frac{2}{3g_A^2} \ln \frac{m}{2\omega} \right) m - \left( 2 - \frac{3,75}{g_A^2} \right) \omega - \frac{\omega}{3} \left( 2 + \frac{g_A^2 - 1}{g_A^4} \right) \ln \frac{m}{2\omega} \right] \right\}; \quad (48)$$

$$\text{Re } h_{13}^{-1} \approx -\frac{3\omega}{2f^2} \left\{ 1 + \frac{4f^2\omega}{\pi} \left[ \left( \frac{108g_A^2 - 77}{48g_A^2} - \frac{2}{3g_A^2} \ln \frac{m}{2\omega} \right) m + \omega \left( 4,79 - \frac{7,5}{g_A^2} + \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{g_A^2 - 1}{g_A^4} \right) \ln \frac{m}{2\omega} \right) \right] \right\}, \quad (49)$$

$$\operatorname{Re} h_{31}^{-1} \approx -\frac{3\omega}{2f^2} \left\{ 1 + \frac{4f^2\omega}{\pi} \left[ \left( \frac{108g_A^2 - 77}{48g_A^2} - \frac{2}{3g_A^2} \ln \frac{m}{2\omega} \right) m - \right. \right. \\ \left. \left. - \omega \left( 2,82 - \frac{3,75}{g_A^2} - \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{g_A^2 - 1}{g_A^4} \right) \ln \frac{m}{2\omega} \right) \right] \right\}; \quad (50)$$

$$\operatorname{Re} h_{11}^{-1} \approx \left\{ -\frac{8}{3} \frac{f^2}{\omega} - \frac{16}{9} \frac{\gamma_{33}}{\omega + \omega_{33}} + \frac{16}{9} \frac{\gamma_{33}}{\omega + \omega_{33}} \times \right. \\ \times \left[ 1 - \frac{9f^2(\omega + \omega_{33})}{8\pi} \left[ \left( \frac{108g_A^2 - 77}{48g_A^2} - \frac{2}{3g_A^2} \ln \frac{m}{2\omega} \right) m + \right. \right. \\ \left. \left. + \omega \left( 4 - \frac{7,5}{g_A^2} + \frac{2}{3} \left( 2 + \frac{g_A^2 - 1}{g_A^4} \right) \ln \frac{m}{2\omega} \right) \right] \right]^{-1} \right\}^{-1}. \quad (51)$$

Получение выражения для волны  $h_{11}$  требует особого разъяснения. Использование в качестве первого члена паде-приближения для  $h_{11}$ -волны выражения из (47) приводит к отрицательной фазе  $\delta_{11}$ , что находится в вопиющем противоречии с экспериментом. Как известно [30], фаза 11 становится положительной при  $\omega = 1,7$  и проходит через резонанс в окрестности  $\omega = \omega_{11} \approx 3,7$ . Член второго порядка  $h_{11} = -8f^2/3\omega$  происходит от нуклонного обмена в  $s$ -канале ( $-9f^2/3\omega$ ) и в  $u$ -канале ( $f^2/3\omega$ ). Только этот второй, численно малый член может рассматриваться как потенциал, обеспечивающий необходимое притяжение для формирования положительной фазы и резонанса. По-видимому, член ( $-3f^2/\omega$ ) нельзя рассматривать как исходный для построения паде-приближения. Из дисперсионных соотношений следует [31], что основной вклад в притяжение в этой волне обусловлен обменом (33) — резонансом в  $u$ -канале — и имеет вид  $(16/9) \gamma_{33} (\omega + \omega_{33})^{-1}$ , где  $\gamma_{33} = 4f^2/3$ . Исходя из этих соображений, мы выделили в 11-волне член  $(16/9) \gamma_{33} (\omega + \omega_{33})^{-1}$  и рассматривали его как исходный при построении паде-приближения для данной волны.  $p$ -Волновые амплитуды также приближенно удовлетворяют условиям кроссинг-симметрии (см. приложение).

## 6. СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

Исследование трансцендентного уравнения (39) указывает на то, что один из корней равен  $1,3 < g_A < 1,35$ , что вполне приемлемо с физической точки зрения. Таким образом, СП-метод действительно приводит к амплитудам, для которых выполняются НЭ теоремы при близких к экспериментальным значениям  $g_A$ .

Известно, что  $s$ -волна обусловлена главным образом обменом  $\rho$ -мезоном в  $t$ -канале. Выражение для  $s$ -волны, рассчитанное с помощью линейного  $\rho$ -обменного лагранжиана типа Юкавы,

имеет вид

$$\operatorname{Re} s^- \approx \frac{g_{\rho\pi\pi} g_{\rho NN}}{4\pi} \frac{2\omega}{m_\rho^2 + 4\nu}, \quad (52)$$

если при этом учесть гипотезу универсальности  $g_{\rho\pi\pi} = 2g_{\rho NN}$ . Выражение (42') для  $\operatorname{Re} s^-$  совпадает по форме с (52) с той существенной разницей, что параметры  $\rho$ -мезона здесь не вводятся извне, а получаются динамически. Действительно, сравнивая числители и знаменатели в (42') и (52), получаем следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} 2g_{\rho\pi\pi} g_{\rho NN} / 4\pi &\approx \pi / [g_A^2 (g_A^2 - 1)]; \\ m_\rho^2 &\approx \pi / [2f^2 (g_A^2 - 1)]. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Если подставить второе из этих соотношений в первое и учесть гипотезу универсальности взаимодействия  $\rho$ -мезона с  $\pi$ -мезонными и нуклонными полями, а также соотношение Гольдбергера — Траймана, то получим

$$g_{\rho\pi\pi}^2 = m_\rho^2 / 2F_\pi^2,$$

что является хорошо известным соотношением Каварабаяши — Судзуки — Фаязуддина — Риазуддина (КСФР).

Перейдем к рассмотрению  $s^+$ -волны. Условие отсутствия членов порядка  $m\nu$  в (45) выполняется при значениях  $g_A \approx 1,25$ , что весьма близко к значениям  $g_A$ , взятым из уравнения (39). Как известно,  $s^+$ -волна описывается  $\sigma$ -мезонным обменом, причем, как указывалось Д. В. Ширковым и В. В. Серебряковым [10], существенную роль здесь играет учет коротковолнового отталкивания. Выражение для  $\operatorname{Re} s^+$ , рассчитанное с помощью линейного  $\sigma$ -обменного лагранжиана типа Юкавы с учетом коротковолнового отталкивания, имеет вид [10]

$$\operatorname{Re} s^+ \approx - \frac{g_{\sigma\pi\pi} g_{\sigma NN}}{4\pi m_\sigma^2} \frac{4\nu}{m_\sigma^2 + 4\nu}, \quad (54)$$

что опять совпадает по форме с выражением  $\operatorname{Re} s^+$  (46'). Сравнивая (46') с (54), получаем

$$g_{\sigma\pi\pi} g_{\sigma NN} / 4\pi \approx t_\sigma^2 f^2 / 2m, \quad (55)$$

что является своеобразным аналогом КСФР. Для квадрата массы  $\sigma$ -мезона также получается довольно простое приближенное соотношение:

$$m_\sigma^2 \approx \pi g_A^2 / [f^2 (5g_A^2 - 6)]. \quad (56)$$

В ряде случаев важно знать константы  $g_{\sigma\pi\pi}$  и  $g_{\sigma NN}$  в отдельности. Из соотношения (55) можно получить оценку  $g_{\sigma\pi\pi}$ , если, например, исходить из соотношения  $g_{\pi NN} = g_{\sigma NN}$ , вытекающего

из  $\sigma$ -модели Гелл-Мана — Леви. При этом для  $g_{\sigma\pi\pi}$  находим

$$g_{\sigma\pi\pi}^2/4\pi = t_\sigma^4 f^2/16m^4, \quad (57)$$

что при значениях  $t_\sigma = 20 \div 34$  дает  $g_{\sigma\pi\pi} = 4\pi (0,4 \div 3,3)$ . Интересно отметить, что если полагать  $t_\sigma = 50$ , то из (57) следует соотношение  $g_{\sigma\pi\pi} = g_{\sigma NN} = g_{\pi NN} \approx 60\pi$ . Если же предполагать, что имеет место своеобразный аналог гипотезы универсальности Сакураи [7], т. е.  $g_{\sigma\pi\pi} = g_{\sigma NN}$ , то из (55) следует

$$g_{\sigma\pi\pi}^2/4\pi = t_\sigma^2 f^2/2m. \quad (58)$$

При  $t_\sigma \approx 30$  из (58) следуют также значения  $g_{\sigma NN}$ , при которых получается хорошее описание НЭ нуклон-нуклонного и пион-нуклонного взаимодействий, рассчитанных на основании дисперсионных соотношений [32]. Энергетическое поведение  $s$ -фаз  $\delta_1$  и  $\delta_3$ , рассчитанных согласно (42) и (46) с учетом соотношения (30), приведено на рис. 2 и 3.

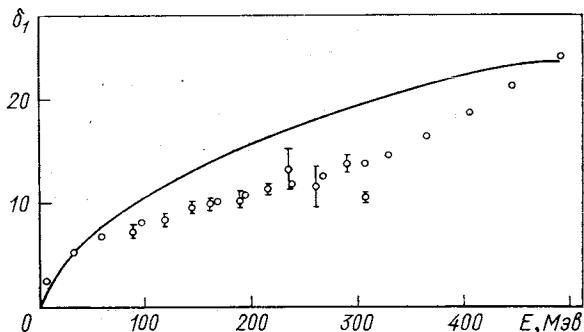


Рис. 2. Энергетическая зависимость фазы  $\delta_1$ : сплошная кривая — теоретические данные, полученные из выражений (42) и (46) при  $g_A = 1,4$ ;  $\circ$  [30] и  $\nabla$  [33] — экспериментальные точки

Как видно, согласие с экспериментальными данными хорошее при значениях  $g_A = 1,25 \div 1,4$ , что находится в согласии с уравнениями (39) и (45). При этих значениях  $g_A$  длина рассеяния  $a^-$  изменяется в пределах  $a^- = 0,107 \div 0,08$ , а квадрат массы  $\rho$ -мезона  $t_\rho \approx 21 \div 35$ ,  $g_{\rho\pi\pi}^2/4\pi = 2,6$  при  $g_A = 1,3$  (напомним, что мы используем систему  $\hbar = c = m_\pi = 1$ ). Длина рассеяния  $a^+ = 0$ , квадрат массы  $\sigma$ -мезона  $t_\sigma = 20 \div 34 m_\pi^2$ , а  $g_{\sigma\pi\pi}g_{\sigma NN} = (2,5 \div 6,5) 4\pi$ .

Если сравнивать с экспериментальными данными не сами  $s$ -фазы  $\delta_1$  и  $\delta_3$ , а изотопические амплитуды  $s^\pm$ , то увидим, что согласие  $s$ -амплитуды с экспериментальными данными весьма хорошее,

в то время как  $s^+$ -амплитуда согласуется с этими данными несколько хуже и находит свое отражение на рис. 2 и 3. Численно это связано с тем, что вычет у  $\sigma$ -полюса, получаемый из кирального лагранжиана, согласно (55) занижен. Тем не менее хотелось бы еще раз подчеркнуть весьма неплохое согласие рассчитанных произвольных параметров.

Отметим в этой связи, что  $s$ -волны в изотопическом состоянии « $\pm$ » являются наиболее подходящими для теоретического анализа,

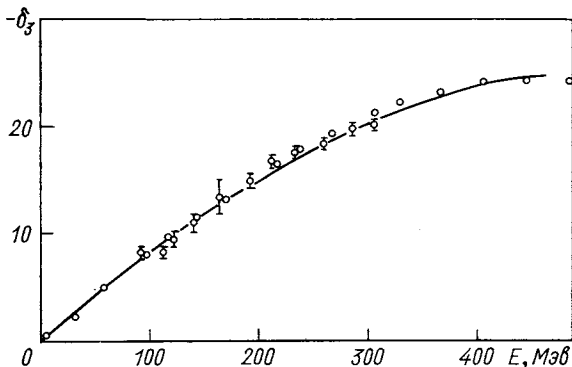


Рис. 3. Энергетическая зависимость фазы  $\delta_3$ : сплошная кривая — теоретические данные, полученные из выражений (42) и (46) при  $g_A = 1,3$ ;  $\circ$  [30] и  $\triangle$  [33] — экспериментальные точки

поскольку парциальные волны обусловлены обменом  $\sigma$ - и  $\rho$ -мезонами в  $t$ -канале. Именно это обстоятельство указывает на то, что паде-приближение необходимо применять к таким амплитудам. Получающиеся с помощью паде-приближения особенности в этих амплитудах имеют четкий физический смысл. Восстановленные же с помощью паде-процедуры особенности амплитуд с полным изотопическим спином  $I = 1/2$  и  $3/2$  (как это обычно делается; см., например, работы [16, 18]) такого четкого физического смысла не имеют, они являются лишь некоторым усреднением с определенными весами реальных физических особенностей.

Интересно отметить, что в то время как использование линейного  $\sigma$ -обменного лагранжиана требует дополнительного введения коротковолнового отталкивания, нелинейный киральный лагранжиан в однопетлевом приближении воспроизводит правильный результат автоматически. Условие отсутствия членов порядка  $m^2\omega$  и  $m\nu$  в  $s^-$ - и  $s^+$ -волнах выполняется при несколько отличающихся, хотя и весьма близких значениях  $g_A$ . В таком отличии нет ничего удивительного, поскольку при получении этих урав-

нений мы пользовались целым рядом приближений, например приближенным выделением парциальных амплитуд, некорректным учетом массы мезона, некоторыми численными приближениями и т. п.

Отметим еще одно важное обстоятельство: не только в первом, но и во втором исчезающем порядке метода возмущений происходит также сильнейшая взаимная компенсация членов порядка

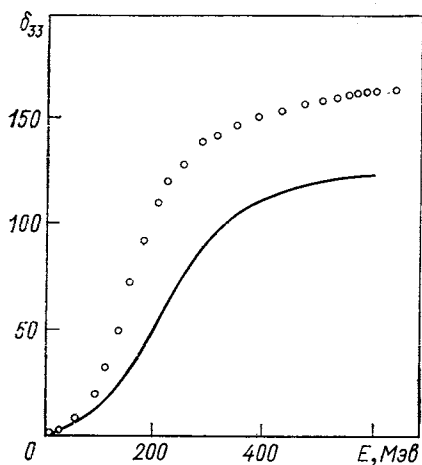


Рис. 4. Энергетическая зависимость фазы  $\delta_{33}$ : сплошная кривая — теоретические данные, полученные из (48) при  $g_A = 1,4$ ;  $\circ$  — экспериментальные точки, взятые из работы [30]

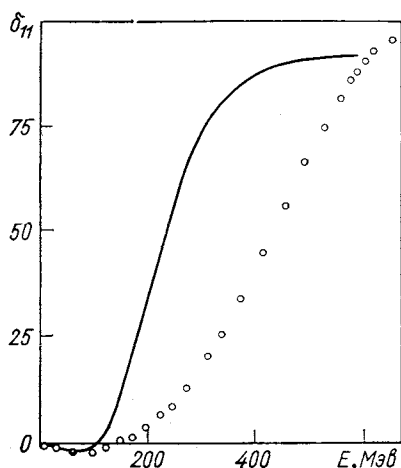


Рис. 5. Энергетическая зависимость фазы  $\delta_{11}$ : сплошная кривая — теоретические данные, полученные из (51) при значении  $g_A = 1,27$ ;  $\circ$  — экспериментальные точки, взятые из работы [30]

$m^0$  и  $m^{-1}$ , т. е. членов, дающих физические результаты. Причем компенсируются в основном диаграммы четвертого и третьего порядков (типа рис. 1, *a—ж*), а основной вклад дается петлевыми диаграммами второго порядка (типа рис. 1, *з и и*). Поэтому не удивительно, что результаты данной работы весьма близки к результатам работы [24], где были учтены вклады лишь петлевых диаграмм. Иными словами, дело обстоит таким образом, будто разложение в ряд методом возмущений в нелинейном киральном лагранжиане осуществлялось по константе, гораздо меньшей  $g_{\pi NN}^2$ .

Перейдем к рассмотрению *p*-волн. Энергетический ход *p*-волновых фаз приведен на рис. 4—6. Как видно из этих рисунков, расчетные кривые находятся в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными вплоть до энергий  $\sim 400$  Мэв. Вряд ли можно требовать лучшего согласия с экспериментом фаз в области кинетических энергий пиона выше 400 Мэв, поскольку

мы полностью пренебрегали неупругими эффектами. Сказанное в первую очередь относится к сильно неупругой (1,1)-фазе. Исследование фазы  $\delta_{11}$  с помощью дисперсионных соотношений свидетельствует о том, что удовлетворительное согласие с экспериментом получается, по-видимому, с учетом дополнительного неупругого канала. Что же касается фазы  $\delta_{33}$ , то все модели приводят к одному

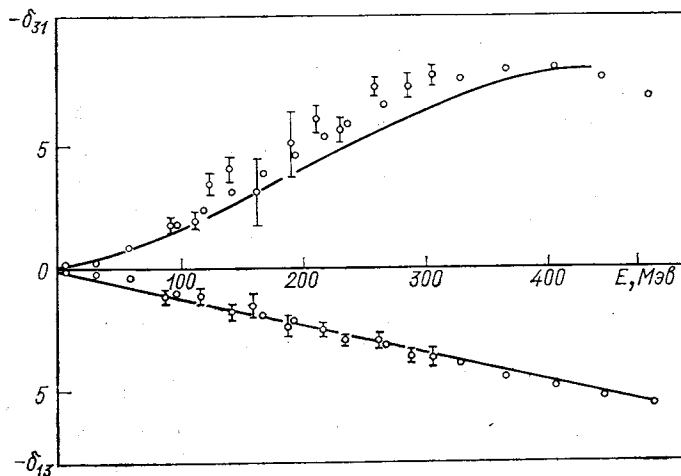


Рис. 6. Энергетическая зависимость фаз  $\delta_{13}$  и  $\delta_{31}$ : сплошные кривые — теоретические данные, полученные из выражений (49) и (50) при  $g_A = 1,4$  и  $g_A = 1,3$ , соответственно; экспериментальные точки заимствованы из [30, 33]

и тому же результату — заниженному значению этой фазы в области за резонансом (ср. с [17]). По-видимому, низкоэнергетические теории в состоянии описать  $\delta_{33}$ -фазу лишь в дорезонансной области (достаточно вспомнить теорию эффективного радиуса Чу — Лоу). Полученные результаты правильно отражают наиболее существенные и в то же время сложные черты  $p$ -волновых амплитуд: наличие резонансов в (1,1)- и (3,3)-волнах, переход  $\delta_{11}$ -фазы через нуль в окрестности  $\omega \approx 1,5$ , отсутствие низкоэнергетических резонансов в малых  $p_{13}$ - и  $p_{31}$ -амплитудах. При этом для положения  $p$ -волновых резонансов также получаются замкнутые выражения через фундаментальные константы, а именно:

$$\omega_{33} \approx \frac{\pi g_A^2}{4,4 f^2 m (g_A^2 - 1)} ; \quad \omega_{11} \approx \frac{4\pi g_A^2}{9,9 f^2 m (g_A^2 - 1)} - \omega_{33}. \quad (59)$$

Из (59) вытекают следующие численные значения для положения резонансов:  $\omega_{33} \approx 2,6$ ;  $\omega_{11} \approx 3$ , в то время как их экспериментальные значения равны соответственно  $\omega_{33} \approx 2$  и  $\omega_{11} \approx 3,7$  [30, 33].



Из выражений (48) — (51), взятых на пороге, получают следующие значения «длин» рассеяния:

$$a_{33} \approx 0,18; \quad a_{13} \approx -0,026; \quad a_{31} \approx -0,032; \quad a_{11} \approx -0,07, \quad (60)$$

в то время как их экспериментальные значения составляют [34]:

$$\left. \begin{aligned} a_{33} &= (204,1 \pm 4,5) 10^{-3}; & a_{13} &= (-26,6 \pm 6,3) 10^{-3}; \\ a_{31} &= (-42,9 \pm 7,1) 10^{-3}; & a_{11} &= (-84,5 \pm 10,2) 10^{-3}. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Как следует из (60) и (61),  $p$ -волновые длины рассеяния находятся в согласии с экспериментом в пределах погрешностей, за исключением  $a_{33}$ . Несколько заниженная длина (3,3)-волны приводит к заниженному значению (3,3)-фазы, как это видно из рис. 4. Хотелось бы отметить, что 30%-ное отличие этой фазы от экспериментальных данных находится в пределах наших приближений. Из выражений (48) и (51) видно, что энергетический ход (3,3)- и (1,1)-фаз в значительной степени определяется малыми членами порядка  $\omega$  в квадратных скобках, точность которых ниже точности определения главных членов  $\sim m$ . Положительный коэффициент при  $\omega$  в (48) и меньший по абсолютному значению коэффициент при  $\omega$  в (51) могут привести к весьма хорошему описанию этих волн. В то же время малые  $p$ -волны определяются главным образом членами порядка  $m$  и мало чувствительны к коэффициентам при  $\omega$ . Таким образом, количественное описание  $p$ -волн требует, по-видимому, привлечения двух дополнительных параметров. Можно полагать, что это является феноменологическим указанием на роль следующих приближений метода возмущений.

Из выражений для инвариантных амплитуд  $A^\pm(s, t, u)$  и  $B^\pm(s, t, u)$  (9) — (20), (26) — (28) и их производных по углу в (1,1)-паде-приближении (41) можно также получить аналитические выражения для парциальных  $d$ -волн. Такие расчеты выполнены в работе [35]. Найденные результаты находятся в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными в рассматриваемой нами области энергий для всех  $d$ -фаз, кроме фазы  $d_{13}$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные в данной работе результаты свидетельствуют о том, что с помощью нелинейных киральных лагранжианов можно получить динамическое описание НЭ  $\pi N$ -рассеяния [36]. Сущность динамического описания взаимодействия элементарных частиц, основанная на использовании такого лагранжиана взаимодействия, состоит в том, что все физические амплитуды определяются малым числом исходных фундаментальных параметров, в нашем случае массами нуклона и  $\pi$ -мезона ( $m, m_\pi$ ) и константами связи  $f^2$  и  $g_A$ . Не вводятся какие бы то ни было произвольные

параметры. Удастся получить беспараметрические выражения для  $s$ - и  $p$ -волновых парциальных амплитуд, для масс бозонных и барионных резонансов. Так, масса  $\rho$ -мезона, который воспроизводится как  $t$ -канальная особенность амплитуды  $\pi N$ -рассеяния, выражается через эти константы с помощью выражения (53). Аналогичное выражение для массы  $\rho$ -мезона было получено Леманом [28], который  $\rho$ -мезон воспроизводит как резонанс в прямом лл-канале. Поэтому отпадает необходимость вводить поля, соответствующие мезонным и барионным резонансам. Необходимо отметить, что СП-метод приводит к амплитуде, содержащей один произвольный параметр  $\eta$ . Чтобы устранить произвол, необходимо привлекать дополнительные физические соображения. Обычно используемые условия приводят к выбору  $\eta = 0$  (см., например, работы [1, 37]). Выше мы следовали этому выбору.

Что же касается перспектив применения нелинейных лагранжианов и этих методов к описанию других важных процессов сильных взаимодействий, таких, как нуклон-нуклонное рассеяние, электромагнитные форм-факторы нуклонов, необходимо отметить, что непосредственное использование простейших нелинейных кирально-инвариантных лагранжианов типа (4) не приводит к удовлетворительному описанию этих процессов. Так, из лагранжиана (4) следуют нулевые длины нуклон-нуклонного рассеяния, что резко противоречит экспериментальным данным. Устранить этот недостаток можно несколькими путями. Один из них состоит в выходе за массовую поверхность. Такой путь, приводящий к матричному варианту паде-приближения, был предложен Бессисом и др. [38, 39]. Другой путь, предложенный в работе [40], заключается в привлечении более сложных кирально-инвариантных членов (типа четырехфермионных) лагранжиан взаимодействия.

Из полученных результатов следует, что нелинейный  $SU(2) \times SU(2)$ -кирально-инвариантный лагранжиан позволяет с помощью СП-метода регуляризации и обобщенного метода суммирования перенормированного ряда возмущений, при использовании паде-приближения, получить динамическое описание наряду с лл-взаимодействием, электромагнитных свойств  $\pi$ - и  $K$ -мезонов [19, 20], также весьма важного процесса  $\pi N$ -рассеяния [36].

Авторы выражают глубокую благодарность Д. В. Ширкову, Б. Н. Валуеву, М. К. Волкову, В. Н. Первушину за дискуссии при написании обзора, Д. В. Волкову, А. В. Ефремову, П. С. Исаеву, В. А. Мещерякову, В. В. Серебрякову, Л. В. Филькову за интерес к работе.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

Полученные  $s$ -волны (37), (38) и (43), (44) в I и II порядке метода возмущений удовлетворяют простым условиям кроссинг-симметрии [5]:  $s^\pm(\omega) = \pm s^\pm(-\omega)$ . Интересно, что полученные  $p$ -волны также удовлетворяют

приближению несколько более сложным условиям кроссинг-симметрии. А именно, как показано в работах [4, 5],  $p$ -волны удовлетворяют следующим условиям:

$$\left. \begin{aligned} h_{31}(\omega) - h_{11}(\omega) &= -[h_{31}(-\omega) - h_{11}(-\omega)]; \\ 2h_{31}(\omega) + h_{11}(\omega) &= 2h_{31}(-\omega) + h_{11}(-\omega); \\ h_{33}(\omega) - h_{13}(\omega) &= -h_{33}(-\omega) + h_{13}(-\omega); \\ 2h_{33}(\omega) + h_{13}(\omega) &= 2h_{33}(-\omega) + h_{13}(-\omega). \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.1})$$

Отсюда следует, что постоянные (не зависящие от  $\omega$ ) члены в  $h_{ij}$ -волнах должны быть равны, т. е.

$$c_{31} = c_{13} = c_{33} = c_{11}. \quad (\text{П.2})$$

Члены  $a_{ij}$ , пропорциональные  $\omega$ , должны удовлетворять условиям

$$2a_{31} = -a_{11}; \quad 2a_{33} = -a_{13}. \quad (\text{П.3})$$

Как это следует из соотношений (36) — (38), приближенно будет выполняться равенство [5] (в пренебрежении  $\Delta\beta\pm$ ):

$$h_{11}(\omega) + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} h_{31}(\omega) = h_{13}(\omega) + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} h_{33}(\omega), \quad (\text{П.4})$$

откуда следует

$$2a_{31} = -a_{13} = 2a_{33} = -a_{11}. \quad (\text{П.5})$$

В четвертом порядке метода возмущений, исходя из (10) — (20), (26) — (28) и (31) — (34), имеем:

$$\text{Re } h_{33} \approx \frac{8}{3} \frac{f^4}{\pi} \left[ \frac{108g_A^2 - 109}{48g_A^2} m + \omega \left( -2 + 3,75g_A^{-2} - \frac{\tilde{G}}{3} \ln \frac{m}{2\omega} \right) \right];$$

$$\text{Re } h_{13} \approx \frac{8}{3} \frac{f^4}{\pi} \left[ \frac{108g_A^2 - 109}{48g_A^2} m + \omega \left( 4,79 - 7,5g_A^{-2} + \frac{2}{3} \tilde{G} \ln \frac{m}{2\omega} \right) \right];$$

$$\text{Re } h_{31}(\omega) = \frac{8}{3} \frac{f^4}{\pi} \left[ \frac{108g_A^2 - 109}{48g_A^2} m + \omega \left( -2,82 + 3,75g_A^{-2} - \frac{\tilde{G}}{3} \ln \frac{m}{2\omega} \right) \right];$$

$$\text{Re } h_{11}(\omega) = \frac{8}{3} \frac{f^4}{\pi} \left[ \frac{108g_A^2 - 109}{48g_A^2} m + \omega \left( 4 - 7,5g_A^{-2} + \frac{2}{3} \tilde{G} \ln \frac{m}{2\omega} \right) \right];$$

где  $\tilde{G} = (g_A^2 - 1)/g_A^4$ .

Как и следовало ожидать, условия (П.2) для постоянных членов выполняются точно. Условия для коэффициентов  $a_{ij}$  при  $\omega$  не выполняются точно для всех членов. Это связано с приближенным выполнением условия (П.4). То же самое относится и к выполнению условий для  $p$ -волн в (1,1)-порядке метода возмущений (47). Тем не менее мы видим, что условия кроссинг-симметрии приближенно выполняются. При выполнении паде-заворота свойство кроссинг-симметрии теряется.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волков М. К. В кн.: «ЭЧАЯ». Т. 2. М., Атомиздат, 1971, с. 33; «Fortschr. Phys.», 1974, Bd 22, S. 499.
2. Волков М. К., Первушин В. Н. «ЭЧАЯ», 1975, т. 6, с. 632.
3. Ефремов А. В., Мецераков В. А., Ширков Д. В. «ЖЭТФ», 1960, т. 39, с. 454.

4. Исаев П. С., Мещеряков В. А. «ЖЭТФ», 1962, т. 43, с. 1339.
5. Ширков Д. В., Серебряков В. В., Мещеряков В. А. Дисперсионные теории сильных взаимодействий при низких энергиях. М., «Наука», 1967.
6. Лендзел В. И. Препринт ОИЯИ 2-7607, 1973.
7. Sakurai J. J. «Ann. Phys.», 1960, v. 11, p. 1.
8. Gell-Mann M., Levy M. «Nuovo cimento», 1960, v. 16, p. 705.
9. Weinberg S. «Phys. Rev. Lett.», 1967, v. 18, p. 188; Schwinger J. «Phys. Lett.», 1967, v. 24B, p. 473.
10. Серебряков В. В., Ширков Д. В. В кн.: «ЭЧАЯ». Т. 1. М., Атомиздат, 1970, с. 172.
11. Slavnov A. A. «Nucl. Phys.», 1971, v. B31, p. 301.
12. Ефимов Г. В. «ЖЭТФ», 1963, т. 44, с. 2107; «Nuovo cimento», 1964, v. 32, p. 1046; Fradkin E. S. «Nucl. Phys.», 1963, v. 49, p. 624.
13. Bessis D., Pusterla M. «Nuovo cimento», 1968, v. 56, p. 832; Basdevant J., Bessis D., Zinn-Justin J. «Nuovo cimento A», 1969, v. 60, p. 185.
14. Mignaco J. A., Pusterla M., Remiddi E. «Nuovo cimento A», 1969, v. 64, p. 733.
15. Gammel J., Mentzel M., Kubis J. «Phys. Rev.», 1969, v. 172, p. 1664.
16. Mignaco M., Remiddi E. «Nuovo cimento A», 1971, v. 1, p. 395.
17. Basdevant J. «F. Phys.», 1972, Bd 20, S. 283.
18. Filkov L. V., Polyushev V. V. «Nucl. Phys. B», 1972, v. 42, p. 541.
19. Lehmann H., Trute H. «Nucl. Phys. B», 1973, v. 52, p. 280; Lehmann H. «Phys. Lett. B», 1972, v. 41, p. 529.
20. Волков М. К., Первушин В. Н. «Ядерная физика», 1974, т. 20, с. 762; 1974, т. 19, с. 652; 1974, т. 21, с. 214; Volkov M., Pervushin V. «Nuovo cimento A», 1975, v. 27, p. 277.
21. Chang P., Gursev F. «Phys. Rev.», 1967, v. 164, p. 1752.
22. Первушин В. Н. «ТМФ», 1975, т. 22, с. 291.
23. Гайсак М. И., Лендзел В. И. Препринт ИТФ 74-87Е, Киев, 1974; «Письма в ЖЭТФ», 1974, т. 19, с. 772.
24. Гайсак М. И., Лендзел В. И. Препринт ИТФ 74-172Е, Киев, 1974.
25. Delbourgo R., Salam A., Strathdee J. «Phys. Rev.», 1969, v. 187, p. 1999; Salam A., Strathdee J. «Phys. Rev. D», 1970, v. 1, p. 3296.
26. Hunt A., Koller Shafi Q. «Phys. Rev. D», 1971, v. 3, p. 1327; Keck V., Taylor J. «Phys. Rev. D», 1973, v. 3, p. 1846.
27. Capper D., Medrano M. Preprint ICTP 72-141, Trieste, 1974.
28. Lehman H. «Acta Phys. Austr. Suppl.», 1973, v. XI, p. 139.
29. Brown L., Feynman R. «Phys. Rev.», 1952, v. 85, p. 231.
30. Roper L., Wright R., Feld B. «Phys. Rev. B», 1965, v. 190, p. 139.
31. Chew G. «Phys. Rev. Lett.», 1962, v. 9, p. 233.
32. Лендзел В. И., Марина Д. М. «Ядерная физика», 1970, т. 12, с. 860.
33. Carter J., Bugg D., Carter A. «Nucl. Phys. B», 1973, v. 58, p. 378.
34. Samaranyake V., Woolcock W. «Nucl. Phys. B», 1972, v. 49, p. 128.
35. Гайсак М. И., Лендзел В. И., Марина Д. М. Препринт ИТФ 77-6Р, Киев, 1976.
36. Гайсак М. И., Лендзел В. И. «Письма в ЖЭТФ», 1975, т. 22, с. 598; Препринт ИТФ 76-137Е, Киев, 1976; «Ядерная физика», 1977, т. 25, с. 685.
37. Арбузов Б. А., Филиппов А. Т. «ЖЭТФ», 1965, т. 49, с. 990; «Nuovo cimento», 1965, v. 38, p. 796.
38. Bessis D., Turchetti G., Wortman W. «Nuovo cimento A», 1974, v. 22, p. 157.
39. Mery F., Turchetti G. «Phys. Rev. D», 1975, v. 11, p. 2000.
40. Гайсак М. И., Лендзел В. И., Салак М. Препринт ИТФ 76-41Р, Киев, 1976.