

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К АНАЛИТИЧЕСКИМ ПРОДОЛЖЕНИЯМ В СИЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ

Я. Пилишт

Университет им. Коменского,
Братислава

После введения в проблематику аналитического продолжения дается обзор основных идей статистического подхода к аналитическим экстраполяциям и к представлению данных аналитическими функциями. Обсуждаются некоторые приложения подхода в сильных взаимодействиях.

After an introduction to problems of analytic extrapolations basic ideas are presented of the statistical approach to analytic extrapolations and to the representation of data by analytic functions. Emphasis is placed upon illustrative examples and practical applications to strong interactions.

ВВЕДЕНИЕ

Аналитичность амплитуд рассеяния и форм-факторов используется в физике сильных взаимодействий уже более двадцати лет. В последние десять лет большое внимание уделялось теоретическим основаниям этих методов. В настоящее время можно сказать, что при одной комплексной переменной ситуация ясна: Каткоским, Део, Чулли найдены конформные отображения, оптимальные для разложения амплитуд в сходящиеся ряды полиномов; кроме того, изучались и решались проблемы оптимизации взвешенных дисперсионных соотношений.

Но эти, сегодня уже классические, проблемы не соответствуют статистическому характеру экспериментальных данных. В 1968 г. Каткоски предложил новый метод представления статистических экспериментальных данных аналитическими функциями. Этот метод был позднее разработан самим Каткоским, Пьетариненом и др. Указанные статистические методы часто используются в фазовых и амплитудных анализах для определения основных параметров сильных взаимодействий при низких энергиях (константы связи, длины рассеяния и т. п.).

В последнее время появились хорошие и сравнительно исчерпывающие обзоры по классическим проблемам аналитических экстраполяций (полиномиальным разложениям и взвешенным дисперсионным отношениям) [1—7].

Цель настоящей статьи — дать обзор основных идей статистического подхода к представлению экспериментальных данных аналитическими функциями и коротко напомнить о некоторых применениях этого подхода. Особое внимание будет уделено принципам, а за техническими деталями следует обратиться к оригинальной литературе. Кроме того, часто будут приводиться простые примеры, иллюстрирующие основные идеи. Им и будем отдавать предпочтение перед стремлением к математически корректным доказательствам.

Вначале кратко напомним проблемы аналитических экстраполяций, оптимальные конформные отображения, разложения в степенные ряды и взвешенные дисперсионные соотношения. Во многом эти результаты существенным образом используются и в статистическом подходе, о котором пойдет речь далее. Важнейшим применением этого подхода являются фазовые и амплитудные анализы адрон-адронных столкновений. Дальше будут проведены проверка аналитичности амплитуд рассеяния и определение сингулярностей. Из практических проблем кроме современных методов проверки микропричинности сюда относятся определение параметров πN - и $\pi\pi$ -резонансов, рассматриваемых в качестве полюсов на нефизической плоскости, определение длин рассеяния и т. п., приводятся результаты исследований братиславской группы.

Обзор ни в коей мере нельзя считать исчерпывающим, поэтому приносим извинения авторам работ, которым мы не уделили должного внимания.

1. ПРОБЛЕМЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ЭКСТРАПОЛЯЦИЙ. ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Проблемы стабильности. В этой статье речь пойдет об экстраполяциях в односвязных областях. Такие области всегда можно конформно отобразить на единичный круг. Область аналитичности на практике чаще всего вся комплексная плоскость с одним или двумя разрезами вдоль реальной оси, а конформное отображение на единичный круг — простое. Исходную область аналитичности и ее границу обозначим буквами \mathcal{D} и \mathcal{R} , единичный круг и единичную окружность — символами D и B .

Важнейшей проблемой аналитических экстраполяций является вопрос о стабильности результата по отношению к небольшим изменениям исходных данных. С этой точки зрения проблемы экстраполяции можно классифицировать [4, 7] в зависимости от

того, экстраполируем ли мы функцию на границу области аналитичности или же в точки, лежащие внутри этой области.

Проблему стабильности и пути ее решения проиллюстрируем на следующих простых примерах.

Пример 1. Пусть функция $f(z)$ аналитична в единичном круге D . Рассмотрим экстраполяцию из данных на интервале (a, b) в точку c (рис. 1). Пусть $f_{\text{эксп}}(z)$ — экспериментальные данные, $f_1(z)$ — функция аналитична в единичном круге и имеет место соотношение

$$|f_1(z) - f_{\text{эксп}}(z)| \leq \varepsilon, \quad z \in (a, b),$$

причем ε сравнимо с экспериментальными погрешностями. Функция $f_1(z)$ хорошо описывает данные в интервале (a, b) , следовательно, можно взять $f_1(c)$ в качестве решения нашей проблемы. Спрашиваем: какую погрешность следует ожидать?

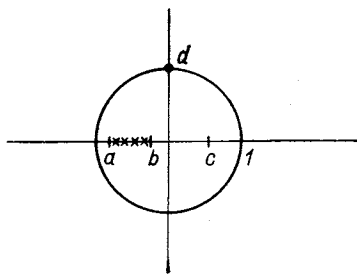


Рис. 1. Экстраполяция с интервала (a, b) в точку c внутри области аналитичности и в точку d на границе.

Интервал с экспериментальными данными обозначен крестиками

Легко убедиться в том, что и $f_2(z) = f_1(z) + \varepsilon \exp [K(z - b)]$

хорошо описывает (при любом $K > 0$) данные в интервале (a, b) . В точке c разность $|f_2(c) - f_1(c)|$ принимает сколь угодно большое значение (достаточно выбрать K большим). Разность между $f_2(z)$ и $f_1(z)$ будет самая большая в точке $z = 1$. Следовательно, требуя, чтобы экстраполяция из (a, b) в точку c была стабильной,

необходимо ограничить класс рассматриваемых аналитических функций. Простым решением проблемы является, например, условие $|f(z)| < M$ (где M — некоторое заданное значение), причем неравенство должно выполняться во всей области D .

К указанному примеру следует добавить следующее: константа M в условии $|f(z)| < M$ определяется, как правило, произвольно; при этом мы исходим более из априорной интуиции, чем из конкретной информации; так как $|f(z)|$ достигает максимума на границе, достаточно наложить ограничение на $|f(z)|$ только на границе; стабильности экстраполяции можно добиться, требуя ограничения на производную функции $f(z)$, например, $|f'(z)| < M'$, и т. п. (в этом нетрудно убедиться).

Пример 2. Рассмотрим ситуацию, указанную на рис. 1, и попытаемся экстраполировать в точку d на границе. Пусть опять $f_1(z)$ обладает аналитическими свойствами и находится в согласии с данными в рамках экспериментальных погрешностей.

Тогда

$$f_2(z) = f_1(z) + \varepsilon/(1 + \varepsilon + iz) \tag{1}$$

хорошо описывает данные, ограничена той же постоянной на границе, но в точке d справедливо соотношение $f_2 - f_1 = 1$. Кроме окрестности точки d , функции f_2 и f_1 очень мало отличаются друг от друга. Разница вызвана полюсом в точке $z = (1 + \varepsilon) i$, которая лежит вне области аналитичности и вблизи границы. Полюс проявится в виде флуктуации $f_2(z)$ в окрестности точки d .

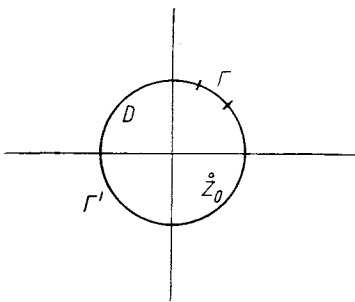


Рис. 2. Аппроксимация функции с полюсом аналитической функцией.

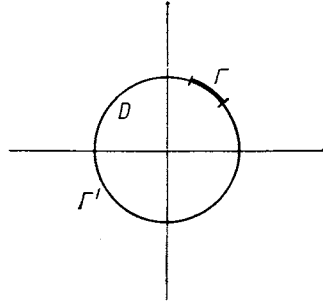


Рис. 3. Экстраполяция с дуги Γ на границу

Примечание. При экстраполяции на границу нельзя без дополнительных условий воспроизвести флуктуации, которые происходят от сингулярностей с небольшими вычетами, расположенных вне области аналитичности вблизи границы. Такие флуктуации локализованы в небольшой части границы. Стабильной экстраполяции можно добиться в том случае, если нас интересует не значение функции в определенной точке на границе, а среднее значение вдоль определенной дуги на границе.

Дифференцируя обе части уравнения (1), получаем

$$f'_2(z) = f'_1(z) - i\varepsilon/(1 + \varepsilon + iz)^2.$$

В точке $z = i$ имеет место $|f'_2 - f'_1| = 1/\varepsilon$. Отсюда видно, что ограничения на производную функции (или более высокие производные) способны стабилизировать экстраполяцию на границу.

Пример 3. Пусть $F(z) = \varphi(z) + g/(z - z_0)$, где $\varphi(z)$ аналитична в единичном круге D , точка z_0 лежит в круге D и Γ — часть единичной окружности (рис. 2). Согласно обобщенной теореме Вейерштрасса [8] можно найти последовательность полиномов $\{P_N(z)\}$, которая на Γ равномерно сходится к $F(z)$. Однако эту последовательность нельзя ограничить на всей границе и ряд $\max |P_N(z)|$ для $z \in \Gamma'$ должен расходиться.

Примечание. Аппроксимируя неаналитическую функцию на части границы Γ очень точно аналитической функцией, мы не добьемся точного результата на остающейся части границы: аппроксиманта «взорвется» на Γ' .

Принцип Неванлинна. Интуитивные представления о нестабильности экстраполяций нашли свое отображение в принципе Неванлинна. Предположим, что мы пытаемся экстраполировать из дуги Γ на всю область аналитичности D (рис. 3). Пусть $F(z) = f_1(z) - f_2(z)$ — разность двух функций, хорошо описывающих данные на дуге Γ . Тогда $|F(z)| < \varepsilon$ для всех $z \in \Gamma$. Предположим

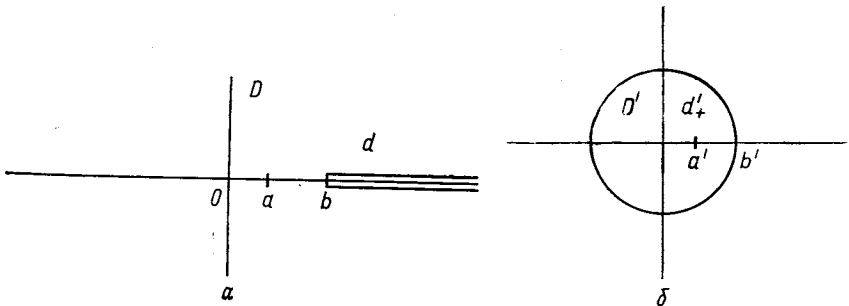


Рис. 4. Оптимальное конформное отображение для задачи, когда данные расположены лишь в небольшой окрестности начала координат

также, что на основе априорной информации (или интуиции) $|F(z)| < M$ для $z \in \Gamma'$. Узнаем, каким окажется $|F(z)| = |f_1(z) - f_2(z)|$ в D . Для этого следует, в первую очередь, сконструировать гармоническую меру $\omega(z)$, которая является реальной гармонической функцией в D и на границе $\omega(z) = 0$, $z \in \Gamma$ и $\omega(z) = 1$, $z \in \Gamma'$. Этими условиями функция $\omega(z)$ задана однозначно. Если $F(z)$ не обладает нулями в D , тогда $\varphi(z) = \ln |F(z)| - (1 - \omega(z)) \ln \varepsilon - \omega(z) \ln M$ и будет гармонической функцией в D . Легко убедиться и в том, что $\varphi(z) \leq 0$ на Γ и Γ' . Так как гармоническая функция достигает своего максимума на границе и имеет место $\varphi(z) \leq 0$ в D , то

$$|F(z)| = |f_1(z) - f_2(z)| \leq M^{\omega(z)} \varepsilon^{1-\omega(z)}. \quad (2)$$

Такой же результат получим и в том случае, если $F(z)$ обладает нулями в D .

Экстраполяция стабильна для всех точек внутри области аналитичности, но сильно ухудшается по мере приближения к дуге Γ' (фактор $1 - \omega$ стремится к нулю).

Экстраполяция полиномиальным разложением. Оптимальные конформные отображения. В первых практических применениях процедуры экстраполяции использовали полиномиальные разло-

жения амплитуд. Однако вскоре стало ясно, что сходимость разложений по степеням можно ускорить с помощью подходящего конформного отображения [9—11].

Идея оптимизации основана на следующих соображениях (рис. 4). Пусть $F(t)$ — функция, аналитичная в комплексной t -плоскости с разрезом (b, ∞) . Пусть кроме того (имеем дело с идеализацией) обладаем информацией о $F(t)$ в небольшой

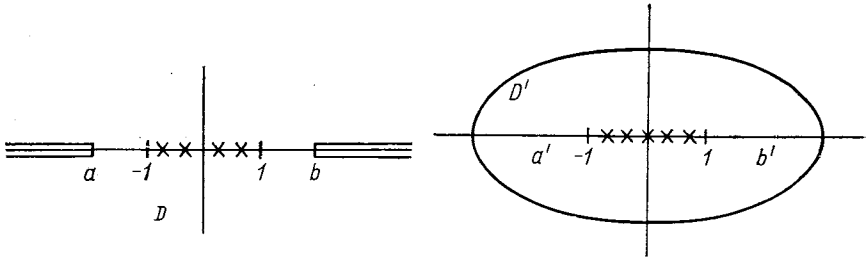


Рис. 5. Оптимальное отображение плоскости с двумя разрезами на эллипс

окрестности точки $t = 0$. Тогда функцию можем вычислить в точке $t = a$ с помощью разложения Тейлора

$$F(a) \approx F_N(a) \equiv \sum_{n=0}^N c_n a^n. \tag{3}$$

Из теоремы Коши вытекает, что $|c_n| < Mb^{-n}$, где M — ограничение $|F(z)|$ на границе; b — расстояние до ближайшей сингулярности. Для остатка в (3) получим оценку $|F(a) - F_N(a)| \leq K(a/b)^{N+1}$.

Точность экстраполяции из окрестности начала координат в точку a определена, таким образом, отношением $(a/b)^{N+1}$, где b — расстояние от начала координат до ближайшей сингулярности. Ряд Тейлора (3) будет сходиться лишь для точек внутри круга с радиусом b . Чулли и Фишер показали, что отображение разрезанной плоскости на единичный круг минимизирует частную производную a/b и в этом смысле является оптимальным. Более того, после конформного отображения ряд Тейлора будет сходиться для всех точек внутри области аналитичности (ср. d и d' на рис. 4, a и b).

Идеализация указанного случая состоит в предположении, что данные лежат в небольшой окрестности начала координат. В более реалистичных случаях данные размещены вдоль отрезка и вместо ряда Тейлора данные следует аппроксимировать разложением по системе полиномов, ортогональных на этом отрезке. Такие разложения сходятся уже не в круге, а внутри эллипса (рис. 5). Соответствующее отображение оптимально [12, 13] в том смысле, что разложение по ортогональным полиномам сходится

в каждой точке внутри области аналитичности и скорость сходимости в каждой точке асимптотически максимальна.

Оптимальные отображения Каткоского и Део [12] и Чулли [13] завершили первый этап применения теории аналитических экстраполяций в сильных взаимодействиях.

Проблемой разложения по полиномам является оценка степени полинома, которую необходимо использовать в конкретной ситуации. Если степень слишком низка, остаток ряда может оказаться слишком большим; если степень чересчур высока, полином может воспроизводить шум, обусловленный погрешностями данных. Оказывается, что эту проблему можно непротиворечиво решить, лишь применяя статистический подход к представлению данных аналитическими функциями. Оптимизированные методы конформных отображений часто и с успехом использовали для практических расчетов [1, 2, 4—6].

2. МЕТОД ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ (ВЗВЕШЕННЫЕ ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ)

Формулировка проблемы. Метод взвешенных дисперсионных соотношений по существу — обобщение различных модификаций, которые применялись ранее [14, 15]. Однако лишь в конце 60-х годов удалось сформулировать проблему в достаточно общем виде [16—20] и позднее полностью ее решить [21, 1, 2]. Эта проблема независимо друг от друга была сформулирована группами теоретиков из Бухареста и Братиславы. В настоящей статье опишем метод братиславской группы, исходя из работы [16] и более поздних [18—20].

Для простоты предположим, что функция $f(z)$ аналитична в единичном круге D и экспериментальные данные о ней расположены вдоль дуги Γ (см. рис. 3). Наша задача — оценить значение функции $f(z)$ в точке $z = a$ внутри D . Запишем сначала теорему Коши

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma + \Gamma'} \frac{f(z)}{z-a} dz. \quad (4)$$

В таком виде ее нельзя эффективно использовать, так как значение функции $f(z)$ на дуге Γ' неизвестно. Следовательно, нам нужен метод, который подавил бы вклад от Γ' в интеграл (4). Пусть $h(z)$ — функция, аналитичная в единичном круге, и справедливо выражение

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma + \Gamma'} f(z) h(z) dz. \quad (5)$$

Из уравнений (4) и (5) получаем

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) \left[\frac{1}{z-a} - h(z) \right] dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} f(z) \left[\frac{1}{z-a} - h(z) \right] dz. \quad (6)$$

Если $h(z)$ выбрать так, чтобы $|(z - a)^{-1} - h(z)|$ было мало на дуге Γ' , то можно добиться подавления влияния дуги Γ' на значение $f(a)$.

Этот метод рассмотрен в работе [16] и применен для решения более сложной задачи. Там же можно найти и расчет функции $h(z)$, минимизирующей некоторую верхнюю оценку аналога правой стороны уравнения (6) в предположении, что погрешность $f(z)$ на дуге Γ приблизительно равна ε и что $f(z)$ на Γ' ограничена постоянной M .

Записанная в виде соотношения (6) задача выбора оптимальной функции $h(z)$ сводится к вопросу об аппроксимации $1/(z - a)$ на части границы. Оказалось [17—21], что задачу можно переформулировать в более удобном виде.

Если ввести функцию

$$g(z) = 1 - (z - a)h(z), \tag{7}$$

то уравнение (6) можно переписать так:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_B \frac{f(z)g(z)}{z - a} dz, \quad B = \Gamma + \Gamma'. \tag{8}$$

Функция $g(z)$ аналитична в D , $g(a) = 1$ и $g(z)$ будет мало на Γ' (и большое на Γ), как это следует из (7) и свойств $h(z)$.

Функцию $g(z)$ в (8) называем *весовой*. Оптимальной является такая весовая функция, которая минимизирует погрешность $f(a)$ при заданной информации о $f(z)$. В работах [16, 19] такая оптимальная весовая функция определялась как минимум некоторой верхней оценкой погрешности $f(a)$. Оценки погрешности не противоречили принципу Неванлинна. Однако позднее выяснилось, что такой подход нельзя считать самым удобным.

Оптимальная весовая функция. Проблема отыскания оптимальной весовой функции весьма элегантно решена Чулли и Фишером [21] и сформулирована следующим образом.

Пусть функция $f(z)$ дана на дуге Γ (см. рис. 3) экспериментальными значениями $f_{\text{эксп}}(z)$ с погрешностью $\delta(z)$. Следовательно, имеет место неравенство

$$|f(z) - f_{\text{эксп}}(z)| < \delta(z). \tag{9}$$

На дуге Γ' дано лишь верхнее ограничение

$$|f(z)| < M(z). \tag{10}$$

Уравнения (9) и (10) можно записать вместе как

$$|f(z) - F_e(z)| < \varepsilon(z), \quad z \in \Gamma + \Gamma', \tag{11}$$

где

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} \delta(z), & z \in \Gamma; \\ M(z), & z \in \Gamma'; \end{cases} \quad F_e(z) = \begin{cases} f_{\text{эксп}}(z), & z \in \Gamma; \\ 0, & z \in \Gamma'. \end{cases}$$

Если $\varepsilon(z) \equiv 1$, то погрешность на границе везде одинакова и интуитивно кажется очевидным, что самое точное представление для $f(a)$ есть выражение

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_B \frac{F_\varepsilon(z)}{z-a} dz.$$

Идея Чулли и Фишера состоит в том, что общий случай (11) переводится в случай с единичной погрешностью. С этой целью вводится функция $g(z)$, которая аналитична в D , не имеет нулей в D и $|g(z)| = \varepsilon(z)$ для $z \in B$. Такая функция однозначно задана выражением, которое приведем ниже.

Если $g(z)$ известно, построим функции

$$\varphi(z) = f(z)/g(z), \quad \varphi_\varepsilon(z) = F_\varepsilon(z)/g(z). \quad (12)$$

Вместо (11) получим

$$|\varphi(z) - \varphi_\varepsilon(z)| < 1, \quad z \in B.$$

Функция $\varphi_\varepsilon(z)$ представляет собой экспериментальные значения $\varphi(z)$, а погрешность такого определения равна единице. Поэтому лучшая оценка $\varphi(a)$ будет следующая:

$$\varphi(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_B \frac{\varphi_\varepsilon(z)}{z-a} dz.$$

Если сюда подставить $\varphi_\varepsilon(z)$ из (12), получим

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} g(a) \int_B \frac{F_\varepsilon(z)}{g(z)} \frac{dz}{z-a}. \quad (13)$$

Функция $g(z)$ в явном виде дана выражением [22]

$$g(z) = \exp \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp(i\vartheta) + z}{\exp(i\vartheta) - z} \ln \varepsilon[\exp(i\vartheta)] d\vartheta \right]. \quad (14)$$

Позднее выяснилось, что эта оптимальная весовая функция (будем ее называть *весовой функцией Чулли — Фишера*) очень полезна и для статистического подхода к экстраполяциям.

Трудности при экстраполяции на границу. Экстраполяция в среднем. Классический случай экстраполяции на границу — определение спектральных функций нуклонного форм-фактора по данным о рассеянии электронов на нуклонах. Аналогичная проблема, однако, встречается и в других задачах. В прошлом проводились многие практические экстраполяции нуклонного форм-фактора [23—25]; проблема изучалась и теоретически [23, 26]. Выяснилось (кроме прочего это следует из принципа Неванлинна и примеров, приведенных в разд. 1), что экстраполяция на границу в принципе нестабильна и, если не наложить ограничения на

гладкость производных, справедливыми можно считать лишь средние значения результатов. Метод весовых функций особенно подходит для экстраполяции в среднем. Следуя работе [18], опишем практически применимую версию метода экстраполяции в среднем. Область аналитичности форм-фактора — разрезанная t -плоскость с разрезом (t_0, ∞) (рис. 6, а). Предположим, что данные

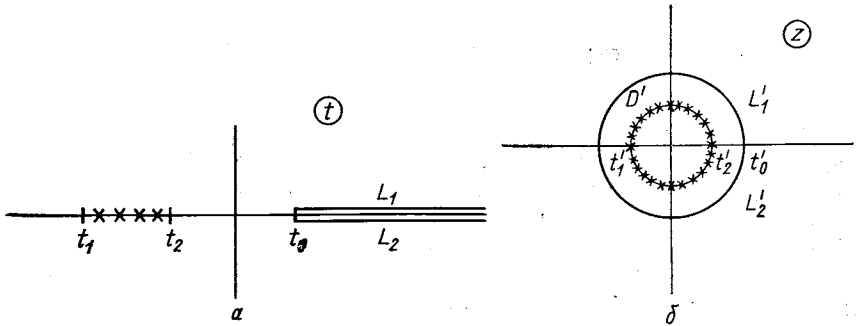


Рис. 6. Отображение t -плоскости с разрезом (t_0, ∞) и с дополнительным разрезом (t_1, t_2) на круговое кольцо в комплексной плоскости z

лежат в интервале (t_1, t_2) , где $t_2 \leq 0$. Для наших целей целесообразно разрезать плоскость вдоль интервала (t_1, t_2) и такую t -плоскость с двумя разрезами отобразить на круговое кольцо (рис. 6, б) в комплексной плоскости z .

Если $f(z)$ является форм-фактором, а $g(z)$ аналитична в круговом кольце, то на основании теоремы Коши справедливо соотношение

$$\int_{\Gamma_1} f(z) g(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) g(z) dz = 0. \quad (15)$$

Первый интеграл можно вычислить, исходя из экспериментальных значений, во втором выбрать функцию $g(z)$ так, чтобы из него получить приблизительно среднее значение форм-фактора в окрестности определенной точки z_0 на Γ_2 . Нетрудно построить такую функцию $g(z)$. Если радиус окружности Γ_2 равен единице, то весовой функцией, подходящей для продолжения в среднее значение на дуге в окрестности $z_0 = \exp(i\vartheta_0)$, является

$$g(z) = (K/iz) \exp \{ -A [(z + 1/z)/2 - \cos \vartheta_0]^2 \}. \quad (16)$$

Подходящим выбором K отбираем комбинацию реальной и мнимой частей форм-фактора, которую хотим получить; с помощью постоянной A регулируем длину интервала, по которому усредняем.

Подробные оценки погрешностей экстраполяции приведены в работе [18]. С помощью аналогичного технического аппарата в работе [19] рассматривалась экстраполяция из части границы (односвязной области) в среднее значение на выбранной дуге на остающейся части границы. В работе [20] при помощи весовых функций изучались некоторые типы модифицированных дисперсионных соотношений.

3. СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ПРЕДСТАВЛЕНИЮ ДАННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

Основные идеи. Работа Катковского. Основные идеи статистического подхода к представлению данных аналитическими функциями были сформулированы Катковским [27].

Из примеров, приведенных в разд. 1, а также из принципа Неванлинна очевидно, что экстраполяция нестабильна, если не ввести априорные ограничения на функцию $f(z)$ в областях, где нет экспериментальных данных. В простейшем случае указанные ограничения можно сформулировать в виде абсолютного ограничения типа $|f(z)| \leq M(z)$ и т. п. На первый взгляд это вполне естественно, но более глубокий анализ выявляет определенные трудности. Например, трудно объяснить, почему точной верхней границей $|f(z)|$ должно быть именно $M(z)$, а почему нельзя выбрать $M(z) = (1 + 10^{-3})$. Более того, а это, пожалуй, еще важнее, если априорные ограничения формулируем в виде строгих математических верхних пределов, тем самым создаем рамки, в которые нельзя, естественно, включить статистический характер экспериментальных значений и их погрешностей. Поэтому Катковский [27] предложил ввести в пространство функций, аналитичных в рассматриваемой области, априорную вероятность, определенную поведением функции на границе.

Исходя из интуиции (или информации, априорной для данной проблемы), вводим «функцию отсчета» $F_0(z)$ и неотрицательное ядро $K(z, z') = K^*(z', z)$; каждой функции $F(z)$ сопоставляем (ненормированную) вероятность

$$P(F) \sim \exp \left[- \int_B \Delta F^*(z) K(z, z') \Delta F(z') |dz| |dz'| \right], \quad (17)$$

где $\Delta F(z) = F(z) - F_0(z)$, причем интеграл берем вдоль границы B области аналитичности.

Если $R(F)$ — некоторый функционал в пространстве аналитических функций, то его среднее значение

$$\langle R \rangle = \int P(F) R(F) DF / \int P(F) DF, \quad (18)$$

где интегралы следует понимать в функциональном смысле. Выражение (18), на первый взгляд, очень сложно, но в практических применениях его можно существенно упростить.

Характер ограничений, вводимых в пространство аналитических функций вероятностей $P(F)$, дается ядром $K(z, z')$. Ниже приведем некоторые примеры, иллюстрирующие эти ограничения.

В самом простом случае

$$K(z, z') = \delta(z - z')/\varepsilon^2(z), \quad \varepsilon(z) > 0, \quad (19)$$

вероятность

$$P(F) \sim \exp \left[- \int_B \frac{|F(z) - F_0(z)|^2}{\varepsilon^2(z)} |dz| \right], \quad (20)$$

и, как покажем позднее, это выражение допускает простую физическую интерпретацию, в которой F_0 играет роль, формально соответствующую данным, а $\varepsilon(z)$ — аналог погрешностей.

Существенное преимущество этого подхода заключается в том, что действительные данные тоже можно легко понимать как факторы, вводящие вероятность в пространство аналитических функций. Оба источника информации — априорный и апостериорный — описаны формально одинаковым статистическим аппаратом.

Экспериментальные данные и вероятность в пространстве аналитических функций. Гипотезы как «данные с погрешностями». Следуя работе [28], покажем, как экспериментальные данные вводят вероятность в пространство аналитических функций. Затем обсудим аппроксимацию экспериментальных значений и их погрешностей в дискретных точках непрерывными функциями и, наконец, покажем, что априорные вероятности Катковского можно получить, если априорные ограничения на амплитуды понимать как гипотетические экспериментальные значения с погрешностями.

Предположим, что мы измерили амплитуду $F(z)$ в единственной точке z_i и в результате получили число Y_i с погрешностью ε_i (одинаковой для реальной и мнимой частей). Если $F_T(z_i)$ — настоящее значение амплитуды в точке z_i , то при повторных измерениях результаты Y_i являются случайными значениями с распределением по Гауссу

$$P(Y_i/F_T(z_i)) \sim \exp[-|Y_i - F_T(z_i)|^2/2\varepsilon_i^2].$$

Если провести единственное измерение, а настоящее значение неизвестно, то естественно интерпретировать результат Y_i с погрешностью ε_i как фактор, вводящий в пространство аналитических функций вероятность

$$P(F) \sim \exp[-|F(z_i) - Y_i|^2/2\varepsilon_i^2]. \quad (21)$$

Если имеется m независимых измерений в точках z_i с результатами Y_i и с погрешностями ε_i ($i = 1, 2, \dots, m$), то для вероятности

в функциональном пространстве получим

$$P(F) \sim \exp \left\{ - \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} [|F(z_i) - Y_i|^2 / \varepsilon_i^2] \right\}. \quad (22)$$

Нетрудно проверить внутреннюю непротиворечивость такого введения $P(F)$. Вероятность, которая индуцирована двумя измерениями с результатами (Y_1, ε_1) , (Y_2, ε_2) , полученными в той же точке, равна вероятности, которую мы нашли бы из одного измерения с результатом (Y, ε) , если бы имели место соотношения $\varepsilon^{-2} = \varepsilon_1^{-2} + \varepsilon_2^{-2}$, $Y\varepsilon^{-2} = Y_1\varepsilon_1^{-2} + Y_2\varepsilon_2^{-2}$. Но два измерения (Y_1, ε_1) , (Y_2, ε_2) эквивалентны единственному измерению (Y, ε) .

Если данные в некоторой области расположены густо, то целесообразно сделать подстановку

$$\sum_{i=1}^m \varepsilon_i^{-2} |F(z_i) - Y_i|^2 \rightarrow \int_L \varepsilon^{-2}(z) |F(z) - Y(z)|^2 dz, \quad (23)$$

где $Y(z)$ — гладкая интерполяция данных на дуге L , и $\varepsilon(z)$ необходимо, согласно (23), выбрать так, чтобы

$$\rho(z_i) \varepsilon_i^{-2} \rightarrow \varepsilon^{-2}(z_i), \quad (24)$$

где $\varepsilon(z)$ — непрерывная функция погрешностей; ε_i — погрешность в точке z_i ; $\rho(z_i)$ — плотность экспериментальных значений в окрестности точки z_i .

Соотношение (24) важно и для реалистического определения погрешности в «коридорном» подходе, где погрешность понимаем как строгое математическое ограничение типа $|F(z) - Y(z)| < \varepsilon(z)$. Хотя погрешность в этом случае и не носит статистического характера, она вводится количественно, вместо интуитивной оценки. Нетрудно убедиться и в том, что $\varepsilon(z)$ обладает правильными трансформационными свойствами по отношению к конформным отображениям.

С помощью таким образом введенной погрешности вероятность (22) можно переписать в следующем виде:

$$P(F) \sim \exp \left\{ - \frac{1}{2} \left[\int_L \varepsilon^{-2}(z) |F(z) - Y(z)|^2 dz \right] \right\}. \quad (25)$$

Если имеем экспериментальные значения на всей границе, то используем прямо (25). Если часть границы не покрыта измерениями, то на этой части границы мы должны держать функцию «под контролем». Предложение Катковского [20] приводит точно к вероятности в виде (25), если функцию отсчета $F_0(z)$ отождествить с гипотетическими данными и $\varepsilon(z)$ с гипотетическими погрешностями ε_i . Такая интерпретация $F_0(z)$ и $\varepsilon(z)$ показывает, что

в статистическом подходе априорные вероятности можно понимать как гипотетические (нереализованные) измерения с погрешностями.

После этого дополнения экспериментальных значений априорными вероятностями приходим к окончательной формуле для вероятности $P(F)$ в пространстве аналитических функций:

$$P(F) \sim \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^m \varepsilon_i^{-2} |F(z_i) - Y_i|^2 + \frac{1}{L} \int_B |F(z) - Y(z)|^2 \varepsilon^{-2}(z) |dz| \right] \right\}, \quad (26)$$

где первый член — следствие настоящих измерений в точках z_i внутри области аналитичности, а второй происходит от настоящих измерений на части границы и от априорных гипотез на остатке границы.

Для удобства дальнейшего рассмотрения в (26) «ренормируем» погрешность подстановкой $\varepsilon^{-2}(z) \rightarrow \varepsilon^{-2}(z)/L$, где L — длина границы. В некоторых случаях первый член в (26) можно заменить интегралом, в других имеются данные лишь на границе; тогда первый член в правой стороне (26) исчезает. Рассматриваемое функциональное пространство теперь вполне естественно ввести таким образом, что к нему будут относиться все функции, аналитические в D и такие, как

$$\|F\|^2 \equiv \frac{1}{L} \int_B |F(z)|^2 \varepsilon^{-2}(z) |dz| < \infty. \quad (27)$$

Если первый член в правой части (26) отсутствует (что в дальнейшем и предполагается), то в таком пространстве вводится скалярное произведение

$$(F, G) = \frac{1}{L} \int_B \varepsilon^{-2}(z) F^*(z) G(z) |dz|. \quad (28)$$

Интегрирование в функциональном пространстве можно существенно упростить, введя базис, который ортонормирован по отношению к скалярному произведению (28).

Самая вероятная функция. Экстраполяция с части границы в точку внутри области аналитичности. Оценка погрешности. Конформно отобразив область аналитичности на единичный круг D , сформулируем нашу задачу следующим образом [28]. Рассмотрим пространство функций, аналитических в D и таких, что $\|F\|^2 < \infty$, где $\|F\|^2$ дано соотношением (27). В таком про-

пространстве функций имеется вероятность

$$\left. \begin{aligned} P(F) &\sim \exp[-\chi^2(F)/2]; \\ \chi^2(F) &= \frac{1}{2\pi} \int_B |F(z) - Y(z)|^2 \varepsilon^{-2}(z) |dz|. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Теперь найдем «самую вероятную функцию» [28], определим ее значение в точке $z = 0$ и соответствующую погрешность.

Задачу можно существенно упростить, введя подходящую весовую функцию. Пусть $g(z)$ аналитична в единичном круге D , не имеет нулей в D и на границе удовлетворяет условию $|g(z)| = \varepsilon(z)$. Эта функция идентична с функцией Чулли — Фишера (14), известной из взвешенных дисперсионных соотношений. Определим теперь

$$f(z) = F(z)g^{-1}(z); \quad y(z) = Y(z)g^{-1}(z). \quad (30)$$

Функция $f(z)$ аналитична в D , и ее можно записать в виде ряда

Тейлора $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z \in D$; для $y(z)$ используем разложение

Лорана $y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n$. Если эти разложения с помощью (30)

подставить в (29), то можно получить

$$P(f) \sim \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n - C_n|^2 \right\}, \quad (31)$$

где пропущен мультипликативный фактор $\exp \sum_{n=0}^{-1} |C_n|^2$. Из (31) видно, что коэффициенты a_n — независимые случайные значения с распределением по Гауссу со средним значением и дисперсией соответственно:

$$\langle a_n \rangle = C_n; \quad \langle (\Delta a_n)^2 \rangle = 1. \quad (32)$$

Следовательно, «самой вероятной функцией», т. е. функцией, которая в пространстве аналитических функций минимизирует $\chi^2(F)$, является

$$\bar{F}(z) = \bar{f}(z)g(z), \quad (33)$$

где

$$\bar{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \frac{1}{2\pi i} \int_B \frac{y(z')}{z' - z} dz'. \quad (34)$$

Если известна функция $\bar{F}(z)$, то можно легко найти средние значения и дисперсии линейных функционалов.

Для экстраполяции амплитуды в начало отсчета подходит функционал $R(F) = F(0)$. Из уравнений (33), (34) видно, что

$$\langle F(0) \rangle = C_0 g(0); \quad \langle (\Delta F(0))^2 \rangle = g^2(0). \quad (35)$$

Рассмотрение функционала $R(F) = F(z_0)$ для z_0 внутри области аналитичности несколько более сложное [28]. Окончательный результат

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}(z_0) &= \bar{f}(z_0) g(z_0) = g(z_0) \sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n; \\ \langle (\Delta F(z_0))^2 \rangle &= |g(z_0)|^2 / (1 - |z_0|^2). \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

не противоречит принципу Неванлинна [28].

Существенным упрощением всего анализа оказалось предположение о том, что погрешности действительной и мнимой частей одинаковы. Более общая формулировка проблемы будет дана ниже.

Другие возможности априорных вероятностей в пространстве аналитических функций. Хотя априорные вероятности в пространстве аналитических функций весьма естественны и обусловлены

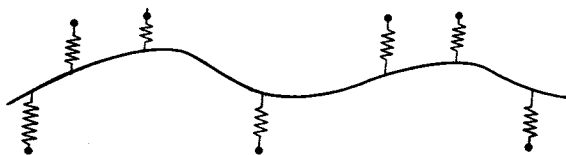


Рис. 7. Механическая иллюстрация Пьетаринена задачи об априорной и экспериментальной вероятностях

необходимостью стабилизировать проблему, они в некоторой степени являются произвольными. Вследствие этого они вводятся по-разному. Очень наглядное представление о значении этих априорных вероятностей дает механическая аналогия, содержащаяся в неопубликованных лекциях Пьетаринена (автору предоставилась возможность познакомиться с ними благодаря дискуссиям с Й. Линг — Петерсенем).

Предположим, что необходимо проложить стержень через точки, положение которых известно с определенными погрешностями. Следовательно, стержень может не проходить точно через точки. Поэтому изобразим это так: к каждой точке прикрепим пружину (жесткость пружины будет обратно пропорциональна погрешности определения положения данной точки). В то же время и сам стержень обладает некоторой жесткостью (рис. 7).

Если стержень очень жесткий, то он будет воспроизводить положение отдельных точек лишь весьма приближенно и неточно.

Если жесткость слишком мала, стержень будет воспроизводить все флуктуации (неточности) в определении положения точек. Интуиция подсказывает, что жесткость стержня должна быть сравнима с жесткостью пружин. Пример хорошо иллюстрирует то обстоятельство, что настоящая задача априорных вероятностей следующая: стабилизировать проблему, воспрепятствовать воспроизведению флуктуаций и дать возможность верного изображения экспериментальных данных. Таким образом, качественно сформулированные рамки достаточно широки для того, чтобы позволить ввести априорную вероятность несколькими способами.

Обсудим здесь более подробно несколько простых примеров введения априорных вероятностей. Априорные вероятности запишем в виде, аналогичном

$$P(F) \sim \exp[-\chi_0^2(F)/2]; \quad (37)$$

$$\chi_0^2(F) \sim \int_B F^*(z) K(z, z') F(z') |dz| |dz'|, \quad (38)$$

и после этого вероятность выразим с помощью коэффициентов разложения Тейлора $F(z)$. Символ χ_0^2 обозначает так называемый *хи-квадрат Катковского*. Областью аналитичности будет единичный круг D и границей — единичная окружность B .

Пример 1. Пусть

$$\chi_0^2(F) = \frac{1}{2\pi} \int_B \frac{|F(z)|^2}{M^2} |dz| \quad (39)$$

и M — постоянная.

Если положить

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (40)$$

то получим

$$\chi_0^2(F) = \frac{1}{M^2} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2. \quad (41a)$$

После подстановки в (37) видим, что a_n — независимое значение с распределением по Гауссу [если $F(z)$ — реальная аналитическая функция, то a_n — действительные числа].

Пример 2. Если

$$\chi_0^2(F) = \frac{1}{2\pi} \int_B \frac{|F(z) - F_0(z)|^2}{M^2} |dz|,$$

то после разложения $F(z)$ в ряд Тейлора и $F_0(z)$ в ряд Лорана получим

$$\chi_0^2(F) = \frac{1}{M^2} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n - c_n|^2 + \frac{1}{M^2} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{-1} |c_n|^2, \quad (41b)$$

где a_n введены в (40) и c_n — коэффициенты в разложении Лорана $F_0(z)$.

Пример 3. В обоих предыдущих примерах ядро $K(z, z') \sim \delta(z - z')$. Теперь выберем случай, когда ядро «размазано». Пусть $z \equiv \exp(i\varphi)$; $z' \equiv \exp(i\psi)$. Положим

$$\left. \begin{aligned} K(z, z') &\equiv K(\exp(i\varphi), \exp(i\psi)) = k(\varphi - \psi); \\ k(\varphi - \psi) &= \frac{1}{2\pi} \frac{1 - b^2}{1 - 2b \cos(\varphi - \psi) + b^2}, \quad 0 < b < 1. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Функция $k(\varphi - \psi)$ изображена на рис. 8. Она выбрана таким

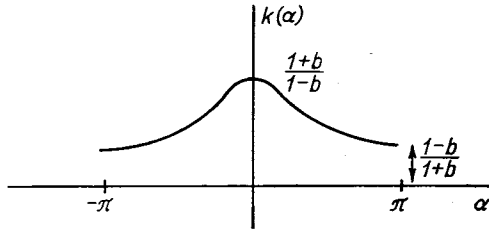


Рис. 8. Вид функции $k(\alpha)$ из уравнения (42)

образом, чтобы для $b = 1 - \varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $k(\alpha) \rightarrow \delta(\alpha)$. Если использовать разложение

$$(1 - b^2)/(1 - 2b \cos \alpha + b^2) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos n\alpha,$$

то из (38) с ядром (42) имеем

$$\chi_c^2(F) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n (a_n)^2. \quad (43)$$

Так как $b < 1$, такое χ_c^2 представляет собой более мягкие ограничения на коэффициенты a_n с большим n , чем простое χ_c^2 из уравнений (41).

Пример 4. Теперь рассмотрим, какие априорные вероятности получим, если в χ_c^2 введем производные функции $F(z)$. Пусть

$$\chi_c^2(F) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{M^2} \int_B \left| \frac{dF}{dz} \right|^2 |dz|. \quad (44)$$

После подстановки разложения (40) будет иметь место

$$\chi_c^2(F) = \frac{1}{M^2} \sum_{n=1}^{\infty} (na_n)^2. \quad (45)$$

Приведенные примеры показывают, что самые жесткие ограничения на коэффициенты a_n с большим n получим, наложив с

помощью χ^2 ограничения на производные функции $F(z)$ на границе [см. (44)]. Ограничения на $|F(z)|$ приводят к более слабым (41), а «размазанные» $K(z, z')$ — к еще более слабым ограничениям на коэффициенты a_n с большим n .

Замечание Пьетаринена по поводу априорных вероятностей. Пьетаринен [29] заметил, что, используя

$$P(F) = \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_B |F(z)|^2 |dz| \right] = \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \right], \quad (46)$$

находим, что вероятность, проинтегрированная по всему пространству функций, удовлетворяющих условию

$$\int_B |F(z)|^2 |dz| < \infty, \quad (47)$$

является нулевой. В качестве альтернативы он предложил определить пространство рассматриваемых аналитических функций с помощью условия

$$\int_B |F'(z)|^2 |dz| = \sum_{n=0}^{\infty} (na_n)^2 < \infty$$

и в качестве вероятности в этом пространстве использовать выражение

$$P(F) = \exp(-\chi^2/2); \quad \chi^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n/\Delta_n)^2, \quad (48)$$

где

$$\Delta_k = \lambda^{-1/2} (k+1)^{-3/2-\varepsilon}; \quad \varepsilon > 0.$$

Следует сказать, что λ — это параметр шкалы, регулирующий относительный вес априорных и апостериорных вероятностей.

Никакие практические трудности не появятся даже тогда, когда применим $P(F)$, основанную на (46) и (47). Дело в том, что при расчете значений функционалов и их флуктуаций используем предельные процедуры типа

$$\langle R \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\int R(F_N) P(F_N) \prod_{n=1}^N da_n}{\int P(F_N) \prod_{n=1}^N da_n},$$

где R — функционал; F_N — сумма первых N членов разложения Тейлора функции $F(z)$. Другие причины применения гауссовых априорных вероятностей типа (38) приведены в работе [30].

Различные погрешности действительных и мнимых частей амплитуды. Все предыдущие рассуждения исходили из предположения, что погрешности действительных и мнимых частей в определении амплитуды рассеяния одинаковы. Такой подход близок к действительности для амплитуд парциальных волн, но не имеет места для амплитуды рассеяния вперед, где мнимая часть определяется с помощью оптической теоремы и σ_T , в то время как действительная часть получается другими, как правило менее точными, методами. Следовательно, желательно иметь методы, определяющие самые вероятные функции и важнейшие функционалы:

$$P(F) \sim \exp(-\chi_c^2/2);$$

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{(\operatorname{Re} F(z_i) - \operatorname{Re} y_i)^2}{\varepsilon_{Ri}^2} + \frac{(\operatorname{Im} F(z_i) - \operatorname{Im} y_i)^2}{\varepsilon_{Ii}^2} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_B \left[\frac{(\operatorname{Re} F(z) - \operatorname{Re} y(z))^2}{\varepsilon_R^2(z)} + \frac{(\operatorname{Im} F(z) - \operatorname{Im} y(z))^2}{\varepsilon_I^2(z)} \right] |dz|, \quad (49)$$

где y_i — результаты измерений в точках z_i , ε_{Ri} и ε_{Ii} — погрешности определения $\operatorname{Re} y_i$ и $\operatorname{Im} y_i$.

Второе слагаемое в (49) соответствует данным на части границы и гипотезам на той части границы, на которой мы не имеем данных. Физическая формулировка проблемы такая же, как для случая с одинаковыми погрешностями, но с технической точки зрения обстановка сложнее, так как несимметричность $\operatorname{Re} F$ и $\operatorname{Im} F$ в (49) препятствует использованию весовой функции и тем самым упрощению задачи. Однако и в этом случае решения известны. Первое решение, соответствующее случаю, когда нет никаких данных внутри области аналитичности [отсутствует первый член в правой части (49)], дано Россом [31]. Его решение не обладает достаточной общностью, но применимо для реалистических задач. Общее решение дали Ши и Шешпард [32, 33]. Случай с данными внутри области аналитичности описали Ши и Ненсю [32, 34], а в общей формулировке, соответствующей (49), — Прешнайдер [35].

4. АМПЛИТУДНЫЕ И ФАЗОВЫЕ АНАЛИЗЫ В СИЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ

Важнейшая область применения современных статистических методов представления данных аналитическими функциями — амплитудные и фазовые анализы. По существу, нельзя говорить о «применении», так как упомянутые методы возникли [27] и были развиты [29, 36—40] именно при решении амплитудных и фазовых анализов. Новые методы были впервые применены в качестве АСЕ

(Accelerated Convergence Expansions), которые изучались и применялись Каткоским и сотр. [36—38].

Второе важное применение — это амплитудные анализы мезон-нуклонного рассеяния при фиксированном t или u [29, 39—42] и, наконец, амплитудный анализ пион-пионного рассеяния [43, 44].

Разложения Каткоского с ускоренной сходимостью. Фазовые анализы πN -, KN - или NN -рассеяния можно разделить на зависящие и не зависящие от энергии. В первом случае парциальные амплитуды параметризуются как функции энергии и свободные параметры определяются сравнением со всеми данными одновременно. Во втором случае проводятся фазовые анализы при различных энергиях и решения при разных энергиях потом «сшиваются» в предположении «гладкости» энергетических зависимостей. Такое «гладкое сшивание» чаще всего проводят при использовании аналитических свойств парциальных амплитуд.

Разложения Каткоского с ускоренной сходимостью являются методом упрощения и ускорения энергетически-независимого фазового анализа при определенной фиксированной энергии. При таком анализе разлагают амплитуду при фиксированной энергии по полиномам Лежандра и подгоняют свободные коэффициенты к данным о дифференциальных эффективных сечениях. Минимизируется выражение

$$\sum_{i=1}^N [(\delta\sigma/dz)_i - |F(z_i)|^2] \frac{1}{\varepsilon_i^2}, \quad (50)$$

где индекс i обозначает данные при $z_i = \cos \vartheta_i$;

$$F(z) = \sum_{l=0}^L A_l P_l(z), \quad (51)$$

причем A_l — амплитуды парциальных волн. Однако разложение (50) не является самым эффективным представлением амплитуды, если иметь в виду аналитические свойства $F(z)$.

Дело в том, что $F(z)$ аналитична в комплексной плоскости z с разрезами $(-\infty, -z_1)$, (z_2, ∞) , где $z_1, z_2 > 1$. Но разложение в правой части (51) сходится лишь внутри эллипса, изображенного на рис. 9, a ; более того, в асимптотике оно не сходится быстрее всех. Поэтому Каткоски предложил сначала отобразить плоскость z с двумя разрезами на эллипс в плоскости v так, чтобы интервал $(-1, 1)$ отобразить опять на $(-1, 1)$. Такое отображение обеспечивает быстрейшую сходимость в асимптотике. После этого амплитуда $F(z)$ вместо (51) записывается в виде

$$F(z) = F[v(z)] = \sum_{n=0}^M B_n T_n(v), \quad (52)$$

где $\{T_n(v)\}$ — ортонормированная система полиномов в интервале $-1 \leq v \leq 1$. Оказывается, при практических расчетах достаточно взять меньшее количество членов (20—50%), чем в разложении (51), чтобы описание данных было хорошим.

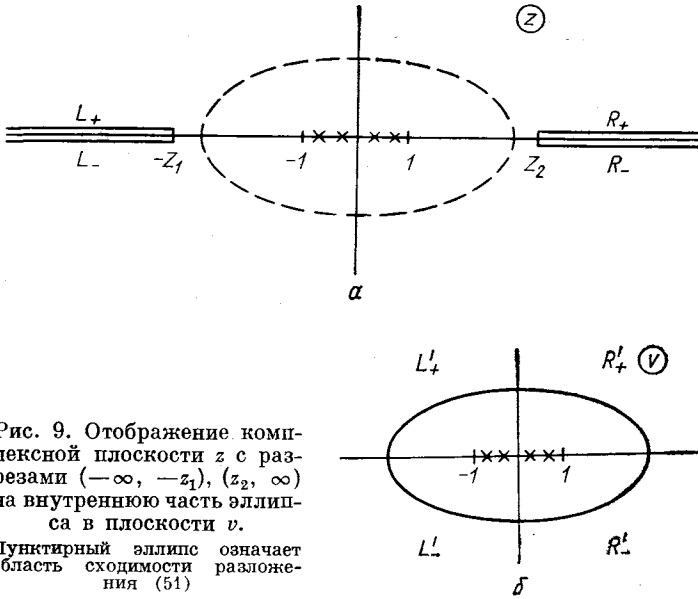


Рис. 9. Отображение комплексной плоскости z с разрезами $(-\infty, -z_1), (z_2, \infty)$ на внутреннюю часть эллипса в плоскости v .

Пунктирный эллипс означает область сходимости разложения (51)

Парциальные волны, соответствующие амплитуде (52), получим, используя обратное соотношение

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(z) = \sum_{n=0}^M B_n T_n(v(z))$$

и, следовательно,

$$A_l = \sum_{n=0}^M B_n \frac{2}{2l+1} \int_{-1}^1 T_n(v(z)) P_l(z) dz. \quad (53)$$

Отсюда очевидны некоторые интересные свойства АСЕ-разложений: при заданной энергии представлены все парциальные волны; между парциальными волнами имеет место корреляция: если в определенном $B_n = B_n(E)$ появится чувствительная зависимость от энергии, то благодаря соотношению (53) она перенесется во все парциальные волны. Указанный факт хотя с первого взгляда и противоречит нашим предубеждениям, но не противоречит физике, где динамика с помощью аналитичности такие корреляции предсказывает.

Действительные проблемы носят лишь технический характер. Условие унитарности верно лишь для парциальных волн A_l , но не для B_n . Следовательно, при фазовом анализе необходимо с помощью дополнительных условий обеспечить, чтобы A_l , полученные при помощи (53), не оказались в противоречии с ограничениями, вытекающими из унитарности. При практическом применении АСЕ минимизируется сумма выражения (50) функцией, похожей на (41а). Этот дополнительный член препятствует тому, чтобы функция $F(z)$ воспроизводила флуктуацию данных. После этого парциальные волны $A_l(E)$ при различных энергиях E_i спаиваются в единственное решение, чаще всего на основе аналитичности $A_l(E)$ [36—38].

Пьетариненовские амплитуды πN -рассеяния при фиксированном t или u . Исходя из подхода Каткоского [27] к представлению данных аналитическими функциями, Пьетаринен предложил [29] и успешно применил [39—42] очень эффективный и с математической стороны элегантный метод для воспроизведения амплитуд (при фиксированном t или u) по экспериментальным данным. Кратко опишем принцип этого метода*.

Пусть $F(s)$ — амплитуда рассеяния при фиксированном t , аналитическая в комплексной плоскости s с разрезами $(-\infty, -s_0)$, (s_0, ∞) . С помощью преобразования $z = z(s)$ отобразим эту плоскость на единичный круг в плоскости z .

Информация об амплитуде состоит из априорной вероятности и из экспериментальных значений. Эти значения дают в χ^2 вклад в виде члена

$$\chi_{\text{эксп}}^2 = \sum_{i=1}^M (\text{Re } F(z_i) - R_i)^2 \varepsilon_{Ri}^{-2} + \sum_{i=M+1}^N (\text{Im } F(z_i) - I_i)^2 \varepsilon_{Ii}^{-2}, \quad (54)$$

где z_i , $i = 1, 2, \dots, M$, — точки, в которых была измерена $\text{Re } F(z_i)$ с результатами R_i и погрешностями ε_{Ri} ; z_i , $i = M+1, \dots, N$, — точки, в которых измерялась $\text{Im } F(z_i)$ с результатами I_i и погрешностями ε_{Ii} .

Априорная «функция пени» [см. текст за уравнением (46)] дает в χ^2 вклад

$$\chi_{\text{априори}}^2 \equiv \Phi = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^3 a_n^2, \quad (55)$$

где a_n — коэффициенты разложения Тейлора функции $F(z)$. Параметр λ определяет относительный вклад обоих членов в χ^2 .

Следовательно, коэффициенты a_n определяются минимизацией выражения

$$\chi^2 = \chi_{\text{эксп}}^2 + \Phi, \quad (56)$$

* Метод Пьетаринена очень четко изложен в обзорах Гамильтона и Петерсена [45, 44]. Аргументация в [44] коротка и ясна. Более подробное описание можно найти в оригинальной работе Пьетаринена [29].

где вместо $F(z)$ в (54) подставим «сокращенный» ряд Тейлора

$$F(z) = \sum_{n=0}^K a_n z^n$$

и ряд в (55) тоже оборвем при $n = K$. Таким образом, χ^2 в (56) является квадратической функцией коэффициентов a_0, \dots, a_k . Коэффициенты a_0, \dots, a_k , минимизирующие (56), затем получим инверсией матрицы. На основе нескольких попыток параметр λ можно выбрать так, чтобы $\chi_{\text{экс}}^2$ и Φ в минимуме давали приблизительно одинаковый вклад в χ^2 .

С помощью указанного метода Пьетаринен [41] анализировал πN -амплитуды при фиксированном t . Полученные при отдельных энергиях амплитуды использовались в качестве дополнительных ограничений на фазовые смещения, определяемые при энергетически-независимом анализе (следовательно, при энергии E имел на входе не только $d\sigma/d\Omega$ и поляризации, но и значения амплитуды при нескольких t_i). Такое применение амплитуд с фиксированным t обеспечивает непрерывность амплитуд парциальных волн как функций энергии.

Пион-пионные амплитуды при фиксированном t или u . Пион-пионные амплитуды при фиксированном t с помощью метода Пьетаринена нашли Фрогатт и Петерсен [43]. Далее наметим кратко их методику, следуя обзорной статье Петерсена [44].

Определяя амплитуды при фиксированном t , важно иметь хорошее и гладкое описание амплитуды при большом s . Поэтому амплитуда F^{+-} $\pi^+\pi^-$ -рассеяния записывается как

$$F^{+-}(v, t) = F_R^{+-}(v, t) + \mathcal{F}^{+-}(v, t), \quad (57)$$

где $v = (s - u)/4$; $F_R^{+-}(v, t)$ — сумма вкладов полюсов Редже от траекторий Померанчука ρ и f . Вид $F_R^{+-}(v, t)$ выбирается таким образом, чтобы при малых v был подходящим. Тогда комплексная плоскость v с двумя разрезами вдоль действительной оси конформно отобразится на единичный круг в плоскости z и функция $\mathcal{F}^{+-}(v, t)$ в (57) в дальнейшем параметризуется как

$$\mathcal{F}^{+-}(v, t) = A^{+-}(v, t) R(v, t) \Psi_{+-}(v, t). \quad (58)$$

Первый член в правой части $A^{+-}(v, t)$ — простое, явно заданное выражение, обеспечивающее ожидаемое асимптотическое поведение при больших v . Главные полюсы Редже мы уже вычли, так что асимптотика $A^{+-}(v, t)$ соответствует более низким траекториям. Следующий фактор $R(v, t)$ может содержать полюса вне единичного круга, соответствующие резонансам в прямом канале и лишь $\Psi_{+-}(v, t)$ разлагается в ряд Тейлора:

$$\Psi_{+-}(z, t) = \sum_{n=0}^N a_n z^n. \quad (59)$$

Аналогичным образом следует конструировать амплитуду $F^{++}(\nu, t)$, которая перекрестной симметрией связана с $F^{+-}(\nu, t)$.

Фроггатт и Петерсен [43] использовали в качестве входных данных амплитуды по фазовым анализам, но лишь там, где такие анализы достаточно надежны (под порогом реакции $K\bar{K}$). Они применили решение, полученное в анализе [44], и эти данные дополнили амплитудой, рассчитанной из длин рассеяния при низких энергиях.

Такая входная информация послужила основанием для выражения $\chi^2_{\text{эксп}}$ [см. (54)]. Вторая часть χ^2 происходит от априорных вероятностей и вычислялась с помощью (55) так, что ряд обрывался при определенном N . Минимизируя χ^2 , определяли коэффициенты a_n .

Говоря на языке аналитических экстраполяций, Фроггатт и Петерсен по существу экстраполировали амплитуды $F(\nu, t)$ (при фиксированном t) из области под порогом $K\bar{K}$ к более высоким энергиям. При этих более высоких значениях энергии, где фазовые анализы не совсем однозначны, вычисленные значения $F(\nu, t)$ использовались в качестве дополнительной информации при фазовых анализах. Оказалось, что таким методом можно практически ликвидировать неоднозначности и прийти к фазовым анализам, однозначным начиная с порога при $W = 2m_\pi$ и кончая при $W = 1,8 \text{ Гэв}$ [43, 44].

5. ПРОВЕРКА АНАЛИТИЧНОСТИ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИНГУЛЯРНОСТЕЙ АМПЛИТУД РАССЕЯНИЯ

Вводные замечания. Локальность (микрочричинность) взаимодействий — один из принципов современной физики элементарных частиц. С математической точки зрения локальность выражается аналитичностью амплитуд рассеяния. Поэтому проверке аналитичности уделяется большое внимание начиная с половины 50-х годов. В связи с этим, естественно, ставится вопрос, каким образом эффективнее всего проверять аналитичность и оценить погрешности отдельных методов проверки. Оптимизация проверки аналитичности — дело весьма деликатное, и, по-видимому, на вопрос о ее качестве можно дать ответ, лишь проверяя гипотезу аналитичности по сравнению с гипотезой об определенном характере сингулярностей амплитуды. Погрешности можно оценивать корректно лишь тогда, когда примененный метод учитывает статистический характер экспериментальных данных.

В общем кажется (по крайней мере автору), что проверка аналитичности относится к числу центральных проблем описания данных аналитическими функциями. Многие другие проблемы можно свести именно к этому вопросу. Приведем несколько примеров.

Экстраполяция с части границы на остаток границы. Значения амплитуды на «известной» части границы хотим дополнить значениями на «неизвестной» так, чтобы результат явился граничным значением аналитической функции (чтобы результат удовлетворял проверке аналитичности).]

Определение постоянных связи как вычетов в полюсах. Если $f(z)$ — амплитуда с полюсом в точке z_0 , то вычет можно определить из условия, чтобы

$$F(z) = f(z) - g(z - z_0)^{-1}, \quad (60)$$

удовлетворяло проверке аналитичности.

Определение положения резонансов. Резонансы можно непротиворечивым и однозначным образом определить как полюсы на нефизических плоскостях амплитуд парциальных волн. Определение параметров резонансов (положение в комплексной плоскости и вычет) можно понимать как проверку аналитичности выражений, полученных так, что от амплитуды вычитаются резонансные полюсы.

Определение нулей амплитуд рассеяния. Нули амплитуды $f(z)$ являются полюсами функции $F(z) = 1/f(z)$.

В настоящем разделе будем говорить о проверке аналитичности, а в следующем — о применении проверок для решения упомянутых выше проблем.

Проверка аналитичности*. Предположим, что область аналитичности функции $F(s)$ уже отображена на единичный круг D . Измеряя амплитуду, получим [внутри D и (или) на границе B] в точках z_i значения Y_i с погрешностями ε_i . Кроме того, предположим, что данные достаточно плотны для того, чтобы на границе ввести непрерывную погрешность $\varepsilon(z)$ и функцию $Y(z)$. Если часть границы не покрыта измерениями, то мы должны дополнить измерения гипотезами об $Y(z)$ и $\varepsilon(z)$ на этой части границы (см. дискуссию в разд. 3).

Выражение $\exp(-\chi^2/2)$, где

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{|F(z_i) - Y_i|^2}{\varepsilon_i^2} + \frac{1}{L} \int_B \frac{|F(z) - Y(z)|^2}{\varepsilon^2(z)} |dz|, \quad (61)$$

можно интерпретировать двумя способами: либо как вероятность в пространстве аналитических функций, индуцированную результатами измерений [обозначение $P(F/Y_1, Y_2, \dots, Y_N, Y(z))$], либо как вероятность $P(Y_1, Y_2, \dots, Y_N, Y(z)/F)$ измерения значений $Y_1, \dots, Y_N, Y(z)$ при заданной функции $F(z)$.

В настоящей работе будем придерживаться *второй* интерпретации. Для простоты представим, что данные (при необходимости дополненные априорными гипотезами) нам известны лишь на

* Этот раздел основан на работе [46].

границе. Тогда

$$P(Y(z)/F) \sim \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_B \frac{|F(z) - Y(z)|^2}{\varepsilon^2(z)} |dz| \right\}. \quad (62)$$

Теперь мы хотим знать, не противоречит ли $Y(z)$, измеренное с погрешностями $\varepsilon(z)$, аналитичности $F(z)$. Выражение (62) целесообразно сначала переписать с помощью весовой функции (14), аналитической в D , не имеющей нулей в D и на границе удовлетворяющей условию $|g(z)| = \varepsilon(z)$. Если ввести

$$F(z) = g(z) f(z), \quad Y(z) = g(z) y(z), \quad (63)$$

то из (62) сразу получим

$$P(y(z)/f) \sim \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_B |y(z) - f(z)|^2 |dz| \right\}. \quad (64)$$

Функция $f(z)$ должна быть аналитической в D , и $y(z)$ должна быть достаточно гладкой на B . Поэтому первую можно разложить в ряд Тейлора, а вторую — в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n; \quad (65a)$$

$$y(z) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n, \quad (65b)$$

где

$$Q_n = \frac{1}{2\pi i} \int_B \frac{Y(z)}{g(z)} z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_B y(z) z^{n-1} dz. \quad (66)$$

Подставляя (65) в (64), получаем *

$$P(y(z)/f) \sim \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^2 - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (q_n - a_n)^2 \right\}. \quad (67)$$

Отсюда видно, что при аналитической $f(z)$ коэффициенты Q_n являются случайными, нормальным образом распределенными переменными с нулевым средним значением и единичной дисперсией. Это утверждение вытекает лишь из аналитичности $f(z)$ и отнюдь не зависит от свойств $f(z)$, так как Q_n — коэффициенты в сингулярной части ряда Лорана. В этом смысле коэффициенты Q_n характеризуют лишь неаналитическую часть измеренных результатов $Y(z)$.

Указанные Q_n — случайные величины с хорошо известным и простым распределением, поэтому их можно использовать при

* Мы предполагаем, что $f(z)$ — реальная аналитическая функция, следовательно, коэффициенты a_n , q_n , Q_n действительны.

проверке аналитичности. Например,

$$K_N \equiv \sum_{n=1}^N Q_n^2 \quad (68)$$

обладает [при аналитическом $f(z)$] χ^2 -распределением с N степенями свободы. Тогда

$$\langle K_N \rangle = N, \quad \langle (\Delta K_N)^2 \rangle = 2N. \quad (69)$$

Сравнение величины K_N , рассчитанной по данным с ожиданиями из (69), является хорошо определенной проверкой аналитичности.

Можно применить и другой метод. Выбрать совокупность неотрицательных коэффициентов $\{c_n\}$ и изучать статистическое распределение

$$T_N = \sum_{n=1}^N c_n Q_n^2 \quad (70)$$

или ввести вектор (d_1, \dots, d_N) и рассматривать случайную величину

$$S_N = \left| \sum_{n=1}^N d_n Q_n \right|^2. \quad (71)$$

Оказывается, что величины T_N или S_N появляются лишь тогда, когда мы хотим отыскать оптимальное значение для проверки гипотезы об аналитичности $f(z)$ по сравнению с гипотезой об определенном типе сингулярностей. К этому вопросу мы еще вернемся.

Определение сингулярностей амплитуд рассеяния*. Сначала наметим общий метод, а потом более подробно рассмотрим определение полюсов амплитуды.

Если функция $f(z)$ состоит из части, аналитической в единичном круге D , и из части, содержащей сингулярности, зависящие от параметров β_1, \dots, β_N , то

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n (\beta_1, \dots, \beta_N) z^{-n}. \quad (72)$$

Повторив предыдущий метод начиная с уравнения (64) и кончая (67), получим распределение для коэффициентов

$$P(Q_1, \dots, Q_n, \dots / f) \sim \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |Q_n - \eta_n(\beta_1, \dots, \beta_N)|^2 \right]. \quad (73)$$

* Настоящий подраздел основан на работах [46, 47].

Параметры β_1, \dots, β_N можно определить, минимизируя выражение

$$\chi_M^2(\beta_1, \dots, \beta_N) = \sum_{n=1}^M |Q_n - \eta_n(\beta_1, \dots, \beta_N)|^2 \quad (74)$$

как функцию параметров β_1, \dots, β_N .

Для практических целей, пожалуй, самый важный случай, когда ряд $f(z)$ кроме аналитической части содержит пару комплексно-сопряженных полюсов. Тогда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \frac{\alpha}{z-\lambda} + \frac{\alpha^*}{z-\lambda^*} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{k=1}^{\infty} [2 \operatorname{Re}(\alpha \lambda^{k-1})] z^{-k}. \quad (75)$$

Параметры α, λ можно определить минимизацией выражения

$$\chi_N^2(\alpha, \lambda) = \sum_{n=1}^N |Q_n - 2 \operatorname{Re}(\alpha \lambda^{n-1})|^2, \quad (76)$$

причем выражение $\chi_N^2(\alpha, \lambda)$ зависит от четырех вещественных параметров: $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2$ ($\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, \lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$).

Еще до численной минимизации $\chi_N^2(\alpha, \lambda)$ целесообразно приблизительно оценить параметры α, λ и убедиться в непротиворечивости совокупности коэффициентов $\{Q_n\}$ гипотезе об единственной паре полюсов. В таком случае полезно на некоторое время забыть о погрешностях и попытаться прямо положить

$$Q_i = 2 \operatorname{Re}(\alpha \lambda^{i-1}). \quad (77)$$

Если взять четыре таких уравнения с $i = n, n+1, n+2, n+3$, то после преобразования имеем:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda &= \frac{1}{2} (Q_{n+1} Q_{n+2} - Q_n Q_{n+3}) / (Q_{n+1}^2 - Q_n Q_{n+2}); \\ |\lambda|^2 &= (Q_{n+2}^2 - Q_{n+1} Q_{n+3}) / (Q_{n+1}^2 - Q_n Q_{n+2}). \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Однако указанные уравнения легче получить, преобразуя уравнение $\int_B f(z)(z-\lambda)(z-\lambda^*)z^k dz = 0$, справедливое для $f(z)$,

заданной соотношением (75). Практические задачи определения резонансных полюсов еще будут рассмотрены.

Оптимизация проверки аналитичности и определение сингулярностей. Проверку аналитичности можно оптимизировать лишь в том случае, если гипотезу об аналитичности амплитуды сравнить с альтернативной гипотезой о наличии определенной сингулярности. В качестве иллюстрации приведем простейшую альтернативу: $f(z)$ обладает полюсом в точке $z = \mu$. Полюс с точки μ можно

записать как

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{z-\mu} &\equiv \frac{1}{\sqrt{1-|\mu|^2}} \varphi_{\mu}(z); \\ \varphi_{\mu}(z) &= \sqrt{1-|\mu|^2} \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{k-1} z^{-k}. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Функция $\varphi_{\mu}(z)$ нормирована: $\frac{1}{2\pi} \int_B \varphi_{\mu}^*(z) \varphi_{\mu}(z) |dz| = 1$, и

определяет «направление» в пространстве сингулярных частей разложения Лорана данных $y(z)$. Если мы хотим проверить гипотезу об аналитичности $f(z)$ по сравнению с гипотезой о полюсе в точке μ (μ фиксировано), то целесообразнее всего сконструировать случайную величину

$$(y, \varphi_{\mu}) = \frac{1}{2\pi} \int_B y^*(z) \varphi_{\mu}(z) |dz| = \sqrt{1-|\mu|^2} \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \mu^{k-1}. \quad (80)$$

Если $y(z)$ — граничное значение функции, аналитической в D , то (y, φ_{μ}) будет обладать распределением $N(0,1)$. Если $f(z)$ обладает полюсом в точке μ с вычетом α , то (y, φ_{μ}) будет обладать распределением $N(\alpha, 1)$. Оптимальное различие между указанными гипотезами получим тогда, когда по данным рассчитаем значение

$$S_{\mu} = |(y, \varphi_{\mu})|^2 \quad (81)$$

и сравним его с тем, которое ожидаем, исходя из обеих гипотез.

Гипотеза, альтернативная по сравнению с аналитичностью $f(z)$, слишком узка. Предположив, что полюс может лежать внутри круга с диаметром Λ , можно для проверки аналитичности взять

$$S_{\Lambda} = \frac{1}{\pi \Lambda^2} \int_{|\mu| < \Lambda} d^2\mu S_{\mu} = \frac{1}{\Lambda^2} \sum_{n=1}^{\infty} |Q_n|^2 \left[\frac{\Lambda^{2n}}{n} - \frac{\Lambda^{2n+2}}{n+1} \right]. \quad (82)$$

Аналогичный метод можно применить и в более сложных случаях. Такие хитроумные проверки аналитичности до сих пор на практике не применялись, поэтому не будем им уделять больше внимания.

При определении резонанса Δ (1236) и пион-пионных резонансов применяли минимизацию выражения (76) и ее более простую альтернативу, состоящую в следующем.

Если $f(z)$ обладает парой комплексно-сопряженных полюсов в точках λ, λ^* , то

$$f(z) \frac{z-\lambda}{1-\lambda^*z} \frac{z-\lambda^*}{1-\lambda z} \quad (83)$$

не обладает полюсами. Более того, $|(z-\lambda)/(1-\lambda^*z)| = 1$ для $|z| = 1$ и мультипликационные факторы в (83) не изменяют

погрешности $\varepsilon(z)$. Следовательно, положение полюсов можно определить так, что вместо $y(z)$ используем для вычисления коэффициентов Q_n выражение (83), в котором $f(z)$ заменим на $y(z)$. Потом из коэффициентов $\{Q_n\}$ составим $\chi^2 = \sum |Q_n(\lambda)|^2$ и это выражение минимизируем как функцию λ .

Проверка аналитичности для неодинаковых погрешностей вещественной и мнимой частей амплитуды рассеяния. Принцип метода не отличается от метода для одинаковых погрешностей. Однако появляются технические затруднения, так как нельзя добиться упрощения введением весовой функции. Для специального, но в целях практического применения, по-видимому, достаточного вида $\varepsilon_R(z)$, $\varepsilon_I(z)$ проблема была решена в работе [48]. Не будем вдаваться в технические подробности, наметим лишь суть проблемы.

Пусть \mathcal{L} — гильбертово пространство функций, определенных для $|z|=1$ и реальных в смысле $f(z^*) = f^*(z)$. Скалярное произведение определено условием

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_B \left[\frac{\operatorname{Re} f \operatorname{Re} g}{\varepsilon_R^2(z)} + \frac{\operatorname{Im} f \operatorname{Im} g}{\varepsilon_I^2(z)} \right] |dz|.$$

Подпространство \mathcal{L} , состоящее из граничных значений функций, аналитических в D , обозначим H . Пусть, кроме того, \tilde{S} является дополнением к H .

Нам нужен базис в \tilde{S} . Обозначим его $\{S_n(z)\}$. Если $f(z)$ аналитична в D , то $Q_n = (S_n, y)$ и полученные из экспериментальных данных $y(z)$ будут обладать распределением $N(0,1)$. Тогда при проверке аналитичности Q_n будет играть ту же роль, что и Q_n при одинаковых погрешностях вещественной и мнимой частей. Если мы хотим найти параметры полюса, то нужно сначала вычислить $A_n(\alpha, \lambda) = (S_n(z), \alpha/z - \lambda + \alpha^*/z - \lambda^*)$, а потом минимизировать выражение $\chi^2(\alpha, \lambda) = \sum_{n=1}^N |Q_n - A_n(\alpha, \lambda)|^2$ как функцию параметров α, λ .

6. ПРОВЕРКА АНАЛИТИЧНОСТИ πN -АМПЛИТУД ДЛЯ РАССЕЯНИЯ ВПЕРЕД.

ПОСТОЯННАЯ СВЯЗИ И ПАРАМЕТРЫ ПРИ НИЗКИХ ЭНЕРГИЯХ

Проверка аналитичности и определение постоянной связи. Для проверки аналитичности применим метод [47, 49], изложенный выше. Пусть $F(\omega)$ — амплитуда для рассеяния вперед с обменом зарядами ($\pi^-p \rightarrow \pi^0n$), деленная на ω :

$$F(\omega) = \frac{1}{\omega} [A_-(\omega) - A_+(\omega) + \omega B_-(\omega) - \omega B_+(\omega)], \quad (84)$$

где ω — энергия падающего пиона в единицах $m_{\pi}c^2$ в л. с. отсчета; индексы « \pm » обозначают соответственно $\pi^+p \rightarrow \pi^+p$ и $\pi^-p \rightarrow \pi^-p$; $A(\omega)$, $B(\omega)$ — инвариантные амплитуды в обычном обозначении. Функция $F(\omega)$ аналитична в комплексной плоскости

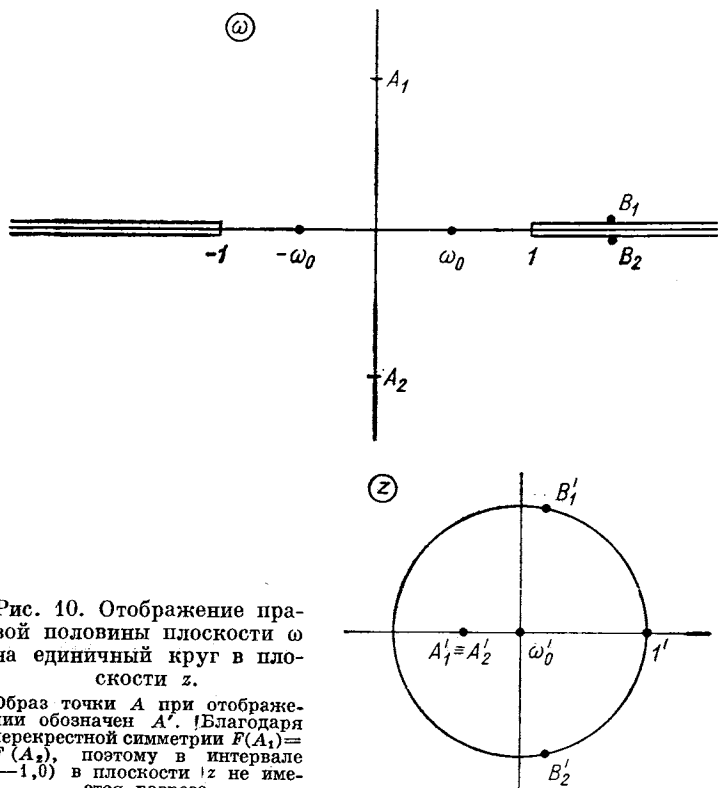


Рис. 10. Отображение правой половины плоскости ω на единичный круг в плоскости z .

Образ точки A при отображении обозначен A' . Благодаря перекрестной симметрии $F(A_1) = F(A_2)$, поэтому в интервале $(-1, 0)$ в плоскости z не имеется разреза

ω с разрезами $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$ перекрестно-симметричная — $F(\omega) = F(-\omega)$, и в точках $\omega = \pm \omega_0 = \pm 1/2 M$ обладает полюсом, соответствующим нуклону в прямом канале. Если использовать перекрестную симметрию $F(\omega)$, то можно конформно отобразить правую половину плоскости ω на единичный круг (рис. 10).

Отображение в явном виде задано соотношением

$$z = z(\omega) = (\sqrt{1 - \omega_0^2} - \sqrt{1 - \omega^2}) / (\sqrt{1 - \omega_0^2} + \sqrt{1 - \omega^2}), \quad (85)$$

и полюс в точке ω_0 в таком случае переходит в начало координат. За исключением этого полюса, $F(z) = F(\omega(z))$ аналитична в единичном круге D .

Экспериментальные данные $y(z)$ об амплитуде на границе B получены из следующих источников:

а) фазовые анализы [50] в области полной энергии в системе центра инерции $1096 < W < 2189$ Мэв;

б) для $W > 2200$ Мэв мнимая часть амплитуды найдена из информации о полном эффективном сечении, а вещественная часть — из данных о кулоновской интерференции на малых углах;

в) значение $F(z)$ в окрестности порога получено из рекомендуемых значений для длины рассеяния $a^{(-)}$ [51]. Погрешности в отдельных точках рассчитаны по погрешностям, приведенным в фазовом анализе [50], а при конструкции усредненной погрешности $\varepsilon(z)$ мы следовали (24). Для заданных $\varepsilon(z)$ построим весовую функцию $g(z)$, аналитичную в D , которая в D не имеет нулей и на границе удовлетворяет условию $|g(z)| = \varepsilon(z)$. Согласно (67) коэффициенты

$$Q_n = \frac{1}{2\pi} \int_B \frac{y(z)}{g(z)} z^n |dz|, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (86)$$

должны быть случайными величинами с нулевым средним значением и единичной дисперсией. Среднее значение коэффициента Q_1 отлично от нуля, так как при конформном отображении $z = z(\omega)$ нуклонный полюс перешел в начало координат в плоскости z . Следовательно, амплитуда $F(z)/g(z)$ принимает вид

$$\frac{F(z)}{g(z)} = \frac{1}{z} \frac{f^2}{2g(0)} \frac{1}{1 - (m/2M)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n;$$

здесь m — масса пиона; M — масса нуклона; f^2 — константа связи л N -взаимодействия.

Рассчитанные коэффициенты Q_1, \dots, Q_{10} [47] имеют следующие значения:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	(87)
Q_n	41,9	1,6	-2,7	1,7	0,1	1,8	0,6	3,5	-3,4	-2,3	

Смотря на эти коэффициенты, замечаем две интересные особенности:

1) коэффициент Q_1 явно больше остальных Q_n . Если бы мы не знали, что амплитуда $F(\omega)$ обладает полюсом, то результат (87) несомненно указывал бы на наличие сингулярности вблизи начала координат плоскости z ;

2) коэффициенты Q_2, \dots, Q_{10} немного больше нашего ожидания, основанного на том, что они должны обладать распределением $(0,1)$. Отсюда видно, что оценка погрешностей в фазовых анализах явно занижена.

Из значения Q_1 можно получить постоянную связи f^2 . Предполагая, что средняя погрешность $Q_1 = 2$, получаем $f^2 = 0,0835 \pm \pm 0,0040$. В независимом анализе Лихарда и Прешнайдера [52] было тем же методом получено значение $f^2 = 0,0803 \pm 0,0010$. Оба определения f^2 непротиворечивы в рамках указанных погрешностей.

Реально оценивая погрешности фазовых анализов, можно отметить, что коэффициенты Q_2, \dots, Q_{10} указывают на аналитичность амплитуды рассеяния. Более строгие утверждения требуют полного анализа экспериментальных данных и подробного рассмотрения возможных неточностей численных методов (интерполяция и численное интегрирование).

Отметим, что, используя метод [48] проверки аналитичности при неодинаковых погрешностях вещественной и мнимой частей амплитуды, мы получили $f^2 = 0,0804 \pm 0,0014$ и $\sum_2^{20} Q_n^2 = 13,6$, что указывает на то, что амплитуда не противоречит аналитичности.

Определение длин рассеяния проверки аналитичности πN -амплитуд. Длины рассеяния πN -взаимодействия нельзя прямо измерить, поэтому, как правило, их определяют из правил сумм, дисперсионных соотношений и т. п.

Следуя работе Лихарда [49], покажем, как можно длины рассеяния определить с помощью статистической проверки аналитичности. Лихард работал с амплитудами $F^+(\omega)$, $B^+(\omega)/\omega$, $F^-(\omega)/\omega$, $B^-(\omega)$. Все они обладают перекрестной симметрией. Амплитуды выбирались таким образом, чтобы некоторые из них оказались чувствительными к значениям s -волновых, а другие — к значениям p -волновых длин рассеяния. С помощью конформного отображения (85) правая половина плоскости ω отобразится на единичный круг. Прямые экспериментальные данные расположены на части границы, обозначенной крестиками на рис. 11. Указанная область соответствует кинетической энергии пиона между 88 Мэв и 2 Гэв . В области $0 < \varphi < 60^\circ$, что соответствует $T_\pi < 88 \text{ Мэв}$, амплитуды парциальных волн s и p были записаны с помощью параметризации

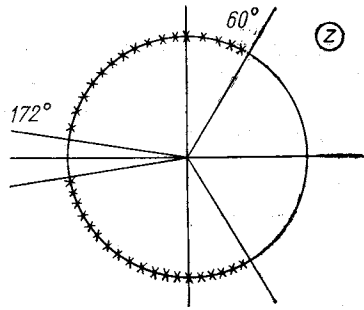


Рис. 11. Конформное отображение плоскости ω на плоскость z с обозначением отдельных областей на границе.

Дуга $60 < \varphi < 172^\circ$ соответствует $88 \text{ Мэв} < T_\pi < 2 \text{ Гэв}$, а данные на ней взяты из фазовых анализов. Для $\varphi < 60^\circ$ амплитуда параметризуется при помощи длин рассеяния

$$q^{2l+1} \text{ctg } \delta_l = 1/a_l + q^2 r_l/2,$$

где длины рассеяния a_l и эффективные радиусы r_l рассматривались как свободные параметры, а q обозначает импульс мезона в системе центра инерции. Для $\varphi > 172^\circ$ ($T_\pi > 2$ Гэв) использовалась доступная информация о πN -взаимодействии при высоких энергиях.

Если нам известна гладкая функция погрешностей $\varepsilon(z)$, то дальнейшие операции, в принципе, просты. Из известных $y(z)$ для $\varphi > 60^\circ$ и из параметризации $y(z, a_l, r_l)$ рассчитаем коэффициенты

$$Q_n(a_l, r_l) = \frac{1}{2\pi} \int_B \frac{y(z)}{g(z)} z^n |dz| \quad (88)$$

и минимизируем *

$$\chi^2(a_l, r_l) = \sum_{n=2}^N Q_n^2(a_l, r_l) \quad (89)$$

как функцию параметров a_l, r_l . Такой минимизацией определим длины рассеяния a_l и оценим их погрешности.

При расчетах выяснилось, что χ^2 очень слабо чувствительно к параметрам r_l , поэтому в дальнейшем анализе они не применялись.

Используя в качестве входных данных комбинацию [53] и [54], Лихард получил для длин рассеяния s -волн

$$a_1 = 0,208 \pm 0,020; \quad a_3 = -0,091 \pm 0,017 \quad (90)$$

и для p -волн

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= -0,109 \pm 0,035; & a_{31} &= -0,063 \pm 0,022 \\ a_{13} &= -0,045 \pm 0,035; & a_{33} &= 0,186 \pm 0,022. \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

Эти результаты согласуются с многими другими определениями длин рассеяния, а также со значениями, рекомендуемыми в обзорах [51]. Следует еще подчеркнуть, что погрешности, приведенные в (90), (91), носят лишь статистический характер и не содержат других возможных источников погрешностей [55].

Добавим еще, что при расчетах такого типа [49] появляется весьма деликатный вопрос о согласованности входных и выходных погрешностей. Дело в том, что метод требует априорного задания $\varepsilon(z)$. В области, где данные нам не известны (т. е. $0 < \varphi < 60^\circ$ на рис. 11), погрешность $\varepsilon(z)$ выбирают на основе предварительных оценок погрешностей низкоэнергетических параметров. Потом минимизируя (89), рассчитывают длины рассеяния и их погрешности. Отсюда можно оценить погрешности амплитуды в низкоэнергетической области. Такие «новые», или «выходные», погреш-

* Сумма в правой части не содержит Q_1 , определенное прежде всего нулевым полюсом. Длины рассеяния, таким образом, не зависят от f^2 .

ности должны приблизительно равняться старым, входным погрешностям. Поэтому целесообразно проводить вычисления с различными оценками входных погрешностей и выбрать ту оценку, которая приводит к приближительной согласованности старых и новых погрешностей [49].

Изучая низкоэнергетическое поведение πN -амплитуд, Лихард [56] рассчитал значение σ члена. Результат $\sigma = 64 \pm 9$. Детали расчета можно найти в работе [56].

7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ШИРИНЫ РЕЗОНАНСОВ КАК ПОЛЮСОВ НА ВТОРОМ ЛИСТЕ

Вводные замечания. При определении основных параметров (массы и ширины) резонансов чаще всего делают так, что данные об эффективном сечении парциальной волны воспроизводят с помощью суммы резонансного члена и фона. Такой метод часто неоднозначен, так как способ параметризации фона может повлиять на результаты определения M и Γ .

Однозначное определение M и Γ получаем тогда, когда резонанс понимаем как полюс на нефизическом листе амплитуды парциальной волны. Положение полюса, соответствующего резонансу Δ (1236), определялось в работах [57, 58], где показано, что полюс лежит на втором листе при

$$W \approx M - i\Gamma/2 = (1211 - i50) Mэв. \quad (92)$$

Выяснилось, что положение полюса удивительно мало чувствительно к разумным изменениям параметризации [57, 58]. Несмотря на это, такие методы зависят от примененных параметризаций и не избавлены от проблемы отделения резонансов и фона.

Приведем здесь сначала метод определения резонансных полюсов [46], затем метод и результаты определения положения резонанса Δ (1236) [59], а в конце упомянем метод и результаты Богачика и Кюнельта, полученные при нахождении положений резонансов в лл-рассеянии.

Метод не зависит от выбранной модели в том смысле, что определяет положение полюса лишь по сингулярной части разложения Лорана независимо от аналитического фона.

Принцип метода. Конформное отображение. В привычном обозначении амплитуда парциальной волны на первом листе

$$f^I(s) = [\eta \exp(2i\delta) - 1]/(2iq). \quad (93)$$

На второй лист мы попадем через упругий разрез

$$f^{II}(s) = f^I(s)/[1 + 2iqf^I(s)]. \quad (94)$$

На втором листе амплитуда (за исключением пар комплексно-сопряженных полюсов) обладает теми же аналитическими свойствами, что и на первом листе.

Область аналитичности $f^I(s)$ и $f^{II}(s)$ указана на рис. 12 [61] (полюсы, соответствующие резонансам, не обозначены). Область D на рис. 12 конформно отображим на единичный круг в плоскости z . Метод конформно-инвариантен, следовательно, отображение не является однозначным. При наших расчетах [59] мы его выбирали

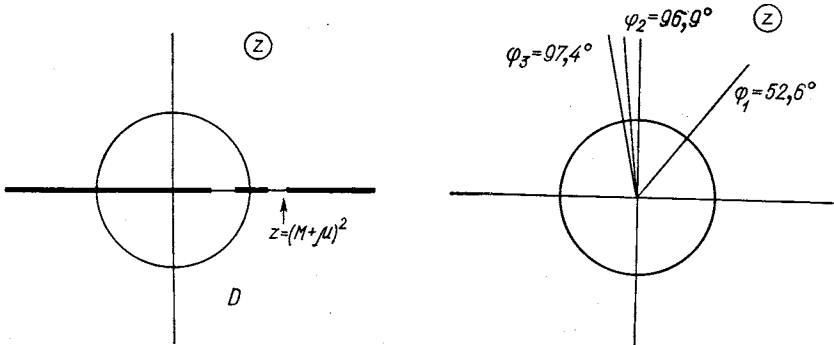


Рис. 12. Отображение области аналитичности парциальной амплитуды πN -рассеяния на единичный круг.

Дуга (φ_1, φ_2) является образом области $1096 < W < 2203 \text{ Мэв}$, в которой имеются фазовые анализы [53]; дуга (φ_2, φ_3) является отображением $2203 \text{ Мэв} < W < \infty$, дуга (φ_3, π) соответствует левым разрезам. На дуге $(0, \varphi_1)$ амплитуда определяется по длинам рассеяния

таким образом, чтобы ожидаемый полюс на втором листе попал приблизительно на мнимую ось в плоскости z .

В качестве результата конформного отображения мы получили амплитуду $f^{II}(z)$, а применяя (94) — и данные на дуге $0 < \varphi < 97^\circ$. На дуге $96,9 < \varphi < 180^\circ$ экспериментальными данными не располагаем. В ходе вычислений был здесь выбран простой вид амплитуды и наложена на нее большая погрешность $\epsilon(z)$. Потом мы построили весовую функцию $g(z)$ и по данным рассчитали коэффициенты

$$Q_n = \frac{1}{2\pi} \int \frac{y(z)}{g(z)} z^n |dz|. \tag{95}$$

Из них впоследствии вычислялось положение полюсов, сначала «грубо» с помощью (78) и, если все в порядке, «точнее» — минимизацией выражения (76).

Перед определением положения полюса Δ (1236) мы проверили метод и его точность на простом примере амплитуды с полюсом на втором листе. В этом иллюстративном примере мы выбрали

$$F^I(s) = \frac{s(k) -}{2iq}, \quad k = \sqrt{s - (M + m)^2 / 2}$$

и параметризовали $s(k)$ с помощью функций Йоста $s(k) = f(k)/f(-k)$, причем $f(k) = (k - a - ib)(k + a - ib)$. Выбирая вещественные постоянные a и b , можно регулировать положение полюса на втором листе комплексной плоскости s . Полюс выбран так, чтобы он лежал примерно там, где ожидается полюс от $\Delta(1236)$. По такому $s(k)$ мы рассчитали фазы $s(k) = \exp[2i\delta(k)]$. На последние мы наложили реалистические случайные погрешности и использовали их в качестве входных данных для определения полюса. Выяснилось, что статистические отклонения малы по сравнению с систематическими погрешностями, вызванными расчетом и не совсем корректным учетом левого разреза. Обобщив опыт иллюстративного примера, мы пришли к заключению, что положение полюса вряд ли можно определить с точностью более ± 10 Мэв. Поэтому впоследствии при нахождении полюса $\Delta(1236)$ приведем эту погрешность.

Определение полюса резонанса $\Delta(1236)$. Положение полюса резонанса $\Delta(1236)$ на втором листе находили с помощью указанного метода в работе [59]. Из выражения (95) определяли коэффициенты Q_n и минимизацией выражения (76) находили положение полюса.

Значение $\chi^2(\alpha, \lambda)$ при $\alpha = 0$, т. е. когда нет полюса, равно приблизительно 10^6 ; если ввести полюс, то $\chi^2(\alpha, \lambda)$ падает до 10—100, что является приемлемым значением. Такое быстрое падение χ^2 убедительно указывает на то, что на втором листе $f^{\text{II}}(s)$ обладает сингулярностью и что ею является именно полюс.

Вычисляя параметры полюса согласно упрощенному методу, основанному на уравнениях (78), сразу же видим (см. [59]), что низшие коэффициенты Q_n не совсем надежны, так как, по-видимому, в них сильно проявляется влияние левого разреза. Коэффициенты Q_n с $n > 30$ тоже уже не надежны, потому что быстрые осцилляции фактора z^n в (95) могут привести к неточностям при численном расчете. Следовательно, целесообразнее всего в $\chi^2(\alpha, \lambda)$ [см. (76)] использовать лишь Q_n с $10 < n < 30$. Во второй из работ [59] мы использовали $13 \leq n \leq 26$ и получили результат

$$M = 1214,5 \pm 10 \text{ Мэв}; \quad \Gamma = 97,2 \pm 10 \text{ Мэв}, \quad (96)$$

где погрешность не носит статистического характера, а происходит из опыта с иллюстративным примером.

Результат согласуется с данными Болла и др. [57, 58] и поразительно точно совпадает и с результатом Спирмана [62], применившего другой метод определения полюса, но опять не зависящий от выбранной модели.

Впоследствии был повторен расчет положения полюса резонанса $\Delta(1236)$ [63]. Были применены более точные вычислительные методы, и точнее был учтен левый разрез. Сначала, проверяя аналитичность $f^{\text{I}}(s)$, получили приблизительную информацию

о парциальной амплитуде на левом разрезе на первом листе, а потом с помощью (94) перенесли эту информацию на второй лист. Результаты показывают, что таким образом можно вдвое уменьшить погрешность (имеем в виду систематические погрешности). Более того, коэффициенты с низким n определены надежно. В таком случае параметры положения полюса Δ (1236)

$$M = 1226 \pm 5 \text{ Мэв}; \quad \Gamma = 110 \pm 5 \text{ Мэв}. \quad (97)$$

В будущем можно ожидать существенного уточнения фазовых анализов. Новое определение положения Δ (1236) или других резонансных полюсов целесообразно провести уже с помощью новых фаз.

«Метод возмущений» для определения поправок к сингулярностям. Уделим здесь внимание интересной и простой проблеме, которая может оказаться важной для нахождения электромагнитных разностей масс резонансов в определенном мультиплете.

Пусть $f_1(z)$ аналитична в единичном круге D , за исключением единственного полюса

$$f_1(z) = \alpha/(z - \lambda) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (98)$$

и пусть $f_2(z)$ лишь слабо отличается от $f_1(z)$:

$$f_2(z) = f_1(z) + \delta f(z) = (\alpha + \delta\alpha)/(z - \lambda - \delta\lambda) + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + \delta_n) z^n. \quad (99)$$

Наша задача — по данным о f_1 и f_2 определить параметры (α, λ) и поправки к ним $(\delta\alpha, \delta\lambda)$.

На первый взгляд, проще всего определить положение полюсов в f_1 и f_2 , а затем вычесть один полюс из другого. Но трудность заключается в том, что малые значения $\delta\alpha$, $\delta\lambda$ получаем как разность двух больших значений, вследствие чего результат будет чувствительным к статистическим и прежде всего к систематическим погрешностям.

Альтернативный метод [64] состоит в том, что положение полюсов определяется по амплитуде f_1 , а $\delta\alpha$, $\delta\lambda$ — по $f_1 - f_2$. Сингулярная часть δf равна

$$\begin{aligned} & (\alpha + \delta\alpha)/(z - \lambda - \delta\lambda) - \alpha/(z - \lambda) = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} [\lambda^{n-1} \delta\alpha + \alpha (n-1) \lambda^{n-2} \delta\lambda], \end{aligned} \quad (100)$$

где было оставлено лишь значение первого порядка по $\delta\alpha$, $\delta\lambda$. Именно коэффициенты при z^{-n} в правой части (100) и являются Q_n для разности $\delta f = f_2 - f_1$.

Формулы (99), (100) легко обобщить на более реалистичный случай двух комплексно-сопряженных полюсов.

Основные параметры пион-пионных резонансов. Недавние эксперименты [65, 66] с большой статистикой способствовали уточнению информации о пион-пионном взаимодействии. В настоящее время можно считать однозначными фазовые анализы лл-рассеяния вплоть до $W = 2 \text{ Гэв}$ [44]. В такой обстановке можно по-

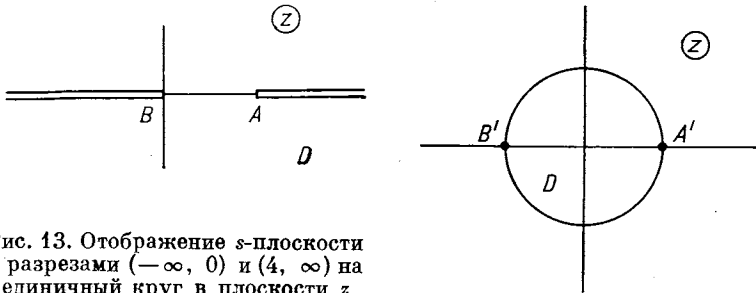


Рис. 13. Отображение s -плоскости с разрезами $(-\infty, 0)$ и $(4, \infty)$ на единичный круг в плоскости z

пытаться определить методами, не зависящими от выбранной модели, положение лл-резонансов как полюсов на вторых листах парциальных амплитуд.

В работах Богачика и Кюнельта [60] применялся, с некоторыми модификациями, метод определения положений резонансов, который обсуждался прежде.

Область аналитичности парциальной волны лл-рассеяния (рис. 13, а) конформно отобразилась на единичный круг D (рис. 13, б). Данные (прямые или восстановленные по длинам рассеяния) покрывают на границе B дуги $0 < \varphi < 90^\circ$ и $270 < \varphi < 360^\circ$. Парциальная амплитуда на втором листе $f^{\text{II}}(s)$ связана с $f^{\text{I}}(s)$ соотношением

$$f^{\text{II}}(s) = f^{\text{I}}(s) / [1 + 2iqf^{\text{I}}(s)]; \quad q = \sqrt{s-4}/2. \quad (104)$$

Погрешности в области, покрытой данными, вычислялись обычным методом, а область, в которой данные не известны, была подавлена весовой функцией.

Богачик и Кюнельт сначала рассмотрели серию пробных задач с известными полюсами. Особенно интересны результаты, указывающие, что метод достаточно чувствителен к тому, чтобы различить случай с одним полюсом и двумя полюсами на втором листе. Метод должен обнаружить два полюса в s -волне с изоспином нуль, если они действительно там имеются. Они применяли два способа определения положения полюса. При первом минимизировали $\chi^2(\alpha, \lambda)$, данное выражением (76); при втором — сумму квадратов

выражением:

$$Q'_n(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_B Y(z) g^{-1}(z) B(z, \mu) B^*(z, \mu) z^n |dz|, \quad (102)$$

где $B(z, \mu) = (z - \mu)/(1 - z\mu^*)$ — фактор Блашке, компенсирующий полюс в точке λ , если $\mu = \lambda$.

Для положения резонансов ρ , f и S^* Богачик и Кюнельт нашли значения:

$$\left. \begin{aligned} m_\rho &= (775 \pm 10) \pm i(70,5 \pm 2) \text{ Мэв}; \\ m_{S^*} &= (999 \pm 1) \pm i(19 \pm 1) \text{ Мэв}; \\ m_f &= (1265 \pm 2) \pm i(72 \pm 1) \text{ Мэв}. \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

Авторы не обнаружили никаких указаний на существование резонанса в s -волне с $l = 0$ в области 1200—1300 Мэв.

Относительно большая погрешность в определении массы ρ -резона происходит от того, что результаты в некоторой мере зависят от вида и значения весовой функции на левом разрезе. Существенное уточнение возможно лишь в случае, если хотя бы грубо определить левый разрез с помощью проверки аналитичности на первом листе.

Ширина ρ -резона, вычисленная Богачиком и Кюнельтом ($\Gamma = 141 \pm 4$ Мэв), несколько ниже 150 ± 2 Мэв, приведенных в работе [66]. Результаты других авторов, относящиеся к параметрам ρ -резонансов, можно найти в работах [60, 44].

8. МОЖНО ЛИ ПРЕДСКАЗАТЬ ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ АМПЛИТУДЫ ПО ДАННЫМ ПРИ БОЛЕЕ НИЗКИХ ЭНЕРГИЯХ ?

В 1973 г. появилось сообщение о росте полных эффективных сечений pp -взаимодействия в области ISR -энергий [67]. Позднее этот эффект был подтвержден и для остальных реакций адронов в области $FNAL$ -энергий.

Можно задать вопрос, нельзя ли было предсказать такой эффект на основе данных о вещественных и мнимых частях амплитуды рассеяния вперед при более низких энергиях? Вопрос естественен. Если бы мы знали амплитуду при более низких энергиях точно (без погрешностей), то тем самым амплитуда была бы определена однозначным образом во всей области аналитичности. В действительности, дело обстоит иначе. Амплитуды нам известны лишь с некоторыми погрешностями, а проблема, о которой идет речь, является лишь экстраполяцией с части границы на часть границы.

Как мы говорили выше, такая экстраполяция стабильна лишь тогда, когда мы экстраполируем в средние значения амплитуды или если предполагаем «приличное» поведение производных на

границе. В общем утвердилось мнение, что в асимптотике амплитуды гладки и «приличны» (без быстрых осцилляций), а поэтому можно, пожалуй, попытаться начать количественную дискуссию об этой проблеме.

Рассмотрим перекрестно парную πN -амплитуду в комплексной плоскости ω (лабораторная энергия пиона). Аналитические свойства амплитуды рассеяния вперед указаны на рис. 14, а. С помощью конформного отображения

$$z = (A - \sqrt{1 - \omega^2}) / (A + \sqrt{1 - \omega^2}) \quad (104)$$

правая половина плоскости ω перейдет в единичный круг в плоскости z . При подходящем A область, покрытая данными, перейдет в правую полуокружность, указанную на рис. 14, б.

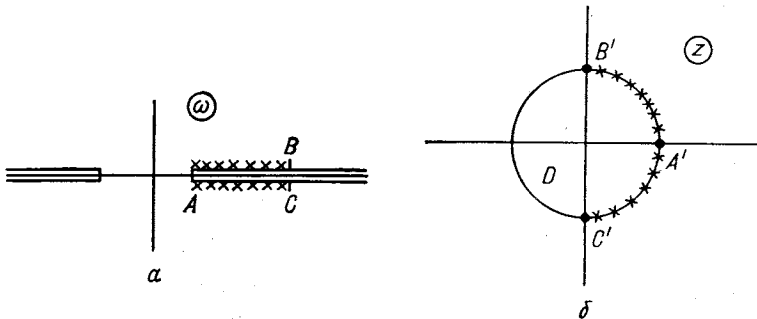


Рис. 14. Конформное отображение правой половины плоскости ω на единичный круг в плоскости z . Область с данными обозначена крестиками. Левая полуокружность в плоскости z соответствует области высоких энергий

Трудности экстраполяции из области, покрытой данными, в окрестность точки $z = -1$ (асимптотическая область), видны из следующего простого примера. Пусть погрешности экспериментальных данных по порядку равны ϵ и пусть $F_1(z)$ хорошо описывает данные на правой полуокружности в плоскости z . Тогда и функции

$$F_2(z) = F_1(z) + \epsilon \exp(-Mz), \quad M > 0;$$

$$F_3(z) = F_1(z) + \epsilon (1 + \delta + z)^{-n}, \quad \delta > 0,$$

должны хорошо описывать данные при $\text{Re } z > 0$, но будут существенно отличаться от F_1 в окрестности $z \approx -1$ (для больших M и малых δ).

Задумавшись над этим или подобными примерами, придем к заключению, что экстраполяция к высоким энергиям возможна лишь тогда, когда располагаем достаточно сильными ограниче-

ниями на поведение амплитуды рассеяния. Чаще всего предполагается, что амплитуда при высоких энергиях имеет простой вид и содержит лишь несколько параметров. Нашу задачу поэтому можно сформулировать следующим образом [68—70].

При низких энергиях, скажем, при $s < s_H$, нам известны данные $F_{\text{эксп}}(s)$ об амплитуде рассеяния $F(s)$ (вещественная и мнимая части) с погрешностью $\varepsilon(s)$. При более высоких энергиях предполагаем, что амплитуду можно параметризовать как $F_H(s; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, где α_i — свободные параметры. Хотим получить ответ на два вопроса: можно ли в совокупности функций $F_H(s; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ найти такую, которая вместе с $F_{\text{эксп}}(s)$ при низких энергиях согласуется с требованием аналитичности; если да, то каковы «правильные» значения параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_m$?

Чтобы можно было дать на поставленный вопрос количественный ответ, необходимо этот вопрос дополнить и уточнить. Введем функцию $y(z)$, определенную для $|z| = 1$:

$$\left. \begin{aligned} y(z) &= F_{\text{эксп}}(z); & |z| = 1; & \operatorname{Re}(z) > 0; \\ y(z) &= F_H(z; \alpha_1, \dots, \alpha_m); & |z| = 1, & \operatorname{Re}(z) < 0; \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

кроме того, нам надо построить функцию

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(z) &= \varepsilon_{\text{эксп}}(z); & |z| = 1, & \operatorname{Re}(z) > 0; \\ \varepsilon(z) &= \varepsilon_H(z); & |z| = 1, & \operatorname{Re}(z) < 0. \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

Погрешность $\varepsilon_{\text{эксп}}(z)$ взята из экспериментальных данных; погрешность $\varepsilon_H(z)$ — это функция, которая нам дает информацию о том, с какой погрешностью $F_H(z; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ должна описывать поведение амплитуды при высоких энергиях. Ставим вопрос: если бы мы измерили амплитуду и для $s > s_H$ (т. е. $|z| = 1$, $\operatorname{Re}(z) < 0$) и получили результат $F_H(z)$ с погрешностью $\varepsilon_H(z)$, то согласовался бы указанный результат, вместе с $F_{\text{эксп}}(z)$ и $\varepsilon_{\text{эксп}}(z)$, с аналитичностью?

Теперь нам уже нетрудно проверить аналитичность. Сначала введем весовую функцию $g(z)$ [$g(z)$ аналитична в D , не имеет нулей в D и для $|z| = 1$ справедливо соотношение $|g(z)| = \varepsilon(z)$]. Потом вычислим коэффициенты

$$Q_n = \frac{1}{2\pi} \int_B \frac{y(z)}{g(z)} z^n |dz|, \quad (107)$$

где Q_n — функции параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ (105):

$$Q_n = Q_n(\alpha_1, \dots, \alpha_m). \quad (108)$$

Наконец, минимизируем выражение

$$\chi^2(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{n=1}^N |Q_n(\alpha_1, \dots, \alpha_m)|^2 \quad (109)$$

как функцию параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ и результаты обрабатываем обычными статистическими методами.

Выбор функции $\varepsilon_n(z)$ — сравнительно деликатное дело. Если $\varepsilon_n(z)$ слишком велико, то любое F_n будет согласоваться с аналитичностью, если же ε_n слишком мало, то практически нельзя будет найти подходящее F_n . Наивно ожидать, что оптимальным окажется случай, когда F_n и $F_{\text{экс}}$ дадут приблизительно одинаковый вклад в коэффициенты Q_n .

Для перекрестно-четной πN -амплитуды при постоянном или логарифмически растущем σ_T кажется естественной асимптотическая параметризация:

$$F_n(s) = is [A_0 + A_1 (\lg s - i\pi/2) + A_2 (\lg s - i\pi/2)^2] + C \exp(-i\pi/4) \sqrt{s}, \quad (110)$$

где A_0, A_1, A_2, \dots, C — свободные параметры.

Необходимо, однако, подчеркнуть, что (110) является параметризацией всей амплитуды (вещественной и мнимой частей) и что с помощью метода, основанного на минимизации (109), проверим непротиворечивость всей амплитуды в области высоких энергий со всей амплитудой в области низких энергий.

Ногова [69, 70] рассматривала перекрестно-четную амплитуду для πN -рассеяния вперед:

$$C^+(\omega) = [C_{\pi-p}(\omega) + C_{\pi+p}(\omega)]/2. \quad (111)$$

Экспериментальные данные в интервале энергий 0—70 Гэв брались из фазовых анализов, из измерений полного эффективного сечения и из кулоновской интерференции. В области более 70 Гэв применялась параметризация

$$C^+(\omega) = is [a_0 + a_1 (\lg s - i\pi/2)^\beta] + a_2 (1-i) \sqrt{s}. \quad (112)$$

Ниже энергии 70 Гэв функция $\varepsilon(z)$ взята из экспериментальных данных, а выше непрерывно продолжена (после конформного отображения энергии $\omega = 70$ Гэв соответствовала точка с $\arg(z) = 165^\circ$).

Цель расчета — узнать, можно ли минимизацией χ^2 в (109) определить параметр β . Результаты показали, что χ^2 мало чувствительно к параметру β , так как увеличение β можно компенсировать изменением остальных параметров. Однако вопрос нельзя считать решенным. Несомненно, было бы интересно получить результаты аналогичных вычислений, но с другими функциями $\varepsilon_n(z)$ или же с проверкой аналитичности, соответствующей неодинаковым погрешностям вещественной и мнимой частей амплитуды.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Феноменология сильных взаимодействий во многом исходит из аналитичности амплитуд. Статистический подход к экстраполяциям, а в общем случае к описанию данных аналитическими функциями, является самым подходящим способом совмещения статистического характера данных и аналитичности амплитуд в непротиворечивое и практически применимое целое.

Настоящий обзор не ставил целью дать представление о современном состоянии работ, связанных с проблемами аналитической экстраполяции или привести все указанные технические приемы. Цель была скромнее: попытаться дать обзор основных идей статистического подхода к описанию амплитуд рассеяния аналитическими функциями. Этот подход можно лучше всего применить в фазовых и амплитудных анализах, где вопрос о погрешностях и неоднозначности является центральным. В других задачах, где довольствуются реалистической оценкой интуитивно определенной погрешности, можно использовать и другие методы.

Чтобы полнее представить материал по излагаемым вопросам, упомянем еще несколько последних работ, в которых можно найти большую библиографию. Математические вопросы, связанные с экстраполяциями, обсуждены в обзорах Чулли и сотр. [1, 2]. Эта группа недавно составила и систему программ для практического применения методов экстраполяции [71]. Обзор различных практических применений экстраполяций можно найти в статье [4]. Классические и более новые методы анализа пион-нуклонных амплитуд подробно обсуждены в лекциях [45]; современное состояние феноменологии пион-пионных взаимодействий хорошо описано Петерсенем [44]. Многие аспекты пион-нуклонных амплитуд подробно анализируются в лекциях [72].

Феноменология сильных взаимодействий, по-видимому, еще долгое время будет пользоваться аналитичностью амплитуд как одним из основных принципов. В ближайшем будущем, по крайней мере, относительно амплитуды как функции одной переменной, можно ожидать углубления, улучшения и расширения численных методов. Принципы методов в настоящее время хорошо известны, но практические аспекты не всегда доведены до конца. В будущем необходимо разработать прежде всего метод экстраполяции на границу области аналитичности. Кроме того, можно ожидать, что будут разработаны методы, подходящие для специальных задач. Сюда относится применение дополнительного условия: положительность или унитарность для стабилизации экстраполяций [73, 74].

Другой областью, в которой можно ожидать прогресса, являются представления амплитуд рациональными функциями или паде-аппроксимантами [75]. Но эта проблема очень сложна, и пока

не ясно, можно ли рассмотренные методы применять в общем или лишь в задачах, где имеется предварительная информация о поведении амплитуд вне рассматриваемой области аналитичности. Еще более перспективная проблема — это разложение амплитуд как функций двух комплексных переменных [76—78]. Будут развиваться, по-видимому, и методы определения сингулярностей амплитуд рассеяния [46, 79—81]. Несмотря на бесспорную полезность представления данных аналитическими функциями и экстраполяций, необходимо отдавать отчет и в ограничениях этого метода.

Экстраполяция — попытка заменить в некотором смысле более глубокую теорию или прямое измерение индуктивными аргументами. Именно здесь появляются нестабильности, столь типичные не только для экстраполяций, но и для всех обратных задач, в которых причина выводится из следствий. Проще всего это видно на примере определения сингулярностей по данным. Такое определение сильно нестабильно, в то время как нахождение амплитуды по известным сингулярностям является стабильной задачей. Аналогичной проблемой можно считать получение разложения заряда по измерению электростатического поля (нестабильная задача, в которой причины определяются по следствиям).

Несмотря на это, можно надеяться, что феноменологическое применение аналитических функций может явиться вкладом, хотя и не существенным, в построение более глубокой теории сильных взаимодействий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ciulli S., Pomponiu C., Sabba-Stefanescu I. «Phys. Repts», 1975, v. 17, p. 133.
2. Ciulli S., Pomponiu C., Sabba-Stefanescu I. «Particles and Nuclei», 1975, v. 6, p. 72.
3. Fischer J. Use of extrapolation technique in analysis of binary reactions. Lecture at the International seminar on binary reactions at high energies. Dubna, June 3—8, 1971.
4. Pišút J. «Springer Tracts Mod. Phys.», 1970, v. 55, p. 43.
5. Locher M. The use of analyticity in nuclear scattering problems. Lectures at the Nordic Intermediate Physics Seminar. Copenhagen. Oct. 8—10, 1975.
6. Dubnička S., Dumbrajs O. «Phys. Repts», 1975, v. 19, p. 143.
7. Dumbrajs O. «Particles and Nuclei», 1975, v. 6, p. 132.
8. Walsh J. L. Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1956.
9. Ciulli S., Fischer J. «Nucl. Phys.», 1961, v. 24, p. 465.
10. Ciulli I., Ciulli S., Fischer J. «Nuovo cimento», 1962, v. 23, p. 1129.
11. Frazer W. R. «Phys. Rev.», 1961, v. 123, p. 2180.
12. Cutkosky R. E., Deo B. B. «Phys. Rev. Lett.», 1968, v. 22, p. 1272; «Phys. Rev.», 1968, v. 174, p. 1859.
13. Ciulli S. «Nuovo cimento A», 1969, v. 61, p. 787; v. 62, p. 301.
14. Gilbert W. «Phys. Rev.», 1957, v. 108, p. 1078.
15. Lin Y., Okubo S. «Phys. Rev.», 1968, v. 168, p. 1712; Khalfin L. A. «Yadernaya Fizika», 1967, v. 6, p. 651.

16. Pišút J., Prešnajder P. «Nucl. Phys. B», 1969, v. 12, p. 110.
17. Ciulli S. Talk at the International Conference on Particle Physics. Lund, 1969 (unpublished).
18. Pišút J., Prešnajder P., Fischer J. «Nucl. Phys. B», 1969, v. 12, p. 586.
19. Prešnajder P., Pišút J. «Nucl. Phys. B», 1969, v. 14, p. 489.
20. Fischer J., Pišút J., Prešnajder P., Šebesta J. «Czech. J. Phys. B», 1969, v. 19, p. 1486.
21. Ciulli S., Fischer J. «Nucl. Phys. B», 1970, v. 24, p. 537.
22. Hoffmann K. Banach Spaces of Analytic Functions. N.Y., Englewood Cliffs, 1962.
23. Bowcock J. E., Cottingham W. N., Williams J. G. «Nucl. Phys. B», 1967, v. 3, p. 95.
24. Levinger J. S. «Phys. Rev.», 1967, v. 162, p. 1589.
25. Pfister H. «Fortschr. Phys.», 1971, v. 19, p. 1.
26. Bertero M., Viano G. A. «Nuovo cimento», 1965, v. 38, p. 1915.
27. Cutkosky R. E. «Ann. Phys.», 1969, v. 54, p. 350.
28. Prešnajder P., Pišút J. «Nuovo cimento A», 1970, v. 3, p. 603.
29. Pietarinen E. «Nuovo cimento A», 1972, v. 12, p. 522.
30. Cutkosky R. E. «J. Math. Phys.», 1973, v. 14, p. 1231.
31. Ross G. G. «Nucl. Phys. B», 1971, v. 31, p. 113; 1972, v. 41, p. 272.
32. Shih C. C. «Phys. Rev. D», 1971, v. 4, p. 3293.
33. Sheppard H., Shih C. C. «Nucl. Phys. B», 1972, v. 42, p. 397.
34. Nenciu G. «Nuovo cimento Lett.», 1972, v. 4, p. 681.
35. Prešnajder P. «Nuovo cimento Lett.», 1972, v. 5, p. 520.
36. Cutkosky R. E., Shih C. C. «Phys. Rev. D», 1971, v. 4, p. 2750.
37. Cutkosky R. E. e.a. «Nucl. Phys. B», 1976, v. 102, p. 139.
38. Cutkosky R. E. e.a. Proc. of the Topical Conf. on Baryon Resonances. Oxford, 5—9 July, 1976. Rutherford Lab. Eds R.T. Ross, D. H. Saxon, 1976, p. 49.
39. Pietarinen E. «Nucl. Phys. B», 1972, v. 49, p. 315; 1973, v. 55, p. 541; Pietarinen E. Proc. of the Triangle Meeting. Smolenice, 1973, Eds D. Krupa, J. Pišút. Bratislava, VEDA, 1975, p. 129.
40. Pietarinen E. «Nucl. Phys. B», 1974, v. 76, p. 231; «Phys. Lett. B», 1976, v. 61, p. 461; Proc. EPS Conference on High Energy Physics. Ed., A. Zichichi. Palermo, 1975, p. 585.
41. Pietarinen E. Proc. of the Topical Conf. on Baryon Resonances. Oxford, July 5—9, 1976. Eds. R. T. Ross, D. H. Saxon. 1976, p. 20.
42. Pietarinen E. «Nucl. Phys. B», 1976, v. 107, p. 21.
43. Froggatt C. D., Petersen J. L. «Nucl. Phys. B», 1975, v. 91, p. 454; 1976, v. 104, p. 186.
44. Petersen J. L. The Pion-Pion Interaction. CERN Lectures. Preprint CERN, Yellow 77-04.
45. Hamilton J., Petersen J. L. New Developments in Dispersion Theory. V. 1. Nordita Lectures, Nordita, 1974.
46. Nogová A., Pišút J., Prešnajder P. «Nucl. Phys. B», 1973, v. 61, p. 438.
47. Pázman A. e.a. «Nucl. Phys. B», 1972, v. 46, p. 637.
48. Lichard P., Pišút J., Prešnajder P. «Acta phys. slovac», 1975, v. 27, p. 5.
49. Lichard P. «Acta Phys. Slov.», 1976, v. 26, p. 152.
50. Donnachie A., Kirsopp R. G., Lovelace C. CERN Pion-Nucleon Phases. Addendum. CERN TH. 838, 1967.
51. Ebel G. e.a. «Springer Tracts Mod. Phys.», 1970, v. 55, p. 239. Ed. G. Hoehler.
52. Lichard P., Prešnajder P. «Nucl. Phys. B», 1971, v. 33, p. 605.
53. Almehed S., Lovelace C. CERN Preprint, CERN TH. 1408, 1971.
54. Carter J. R. e.a. «Nucl. Phys. B», 1973, v. 58, p. 378.
55. Woolcock W. S. «Nucl. Phys. B», 1974, v. 75, p. 455.
56. Lichard P. «Czech. J. Phys. B», 1976, v. 26, p. 1113.

57. Ball J. S. e.a. «Phys. Rev. Lett.», 1972, v. 28, p. 1143.
58. Particle data group.—«Phys. Lett. B», 1972, v. 39, p. 1.
59. Nogová A., Pišút J. «Nucl. Phys. B», 1973, v. 61, p. 445; 1973, v. 65, p. 544.
60. Boháčik J., Kuehnelt H. Parameters of the Dominant Pion-Pion Resonances. Wien, Preprint, 1977.
61. Hamilton J. Strong Interactions and High Energy Physics. Ed. R. G. Moorhouse. London, Oliver and Boyd, 1964.
62. Spearman T. D. «Phys. Rev. D», 1974, v. 9, p. 1660.
63. Lichard P., Pišút J. Hadron Interactions at Low Energies.— Proc. of the Triangle Meeting. Eds. D. Krupa, J. Pišút. Bratislava, VEDA, 1975, p. 329.
64. Nogová A., Boháčik J. Private communication, 1976.
65. Protopopescu S. D. e.a. «Phys. Rev. D», 1973, v. 7, p. 1280.
66. Hyams B. e.a. «Nucl. Phys. B», 1973, v. 64, p. 134.
67. Amaldi U. e.a. «Phys. Lett. B», 1973, v. 44, p. 112; Amendolia S. R. e.a. «Phys. Lett. B», 1973, v. 44, p. 119.
68. Pišút J. «Czech. J. Phys. B», 1976, v. 26, p. 113.
69. Nogová A. High Energy Particle Interactions. Proc. of the 1975 Smolenice Conference. Eds. D. Krupa, J. Pišút. Bratislava, VEDA, 1976, p. 347.
70. Nogová A. «Acta phys. slovac», 1977, v. 27, p. 20.
71. Ciulli S. e.a. A Guide to Analytic Extrapolations. Parts I, II. CERN Preprint, CERN TH. 2267, 2268, 1977.
72. Hoehler G. Determination of Pion-Nucleon Scattering Amplitudes and Application to the Analysis of Nucleon Form-Factors. Lectures at the 2nd Adriatic Meeting on Particle Physics, 1976. Karlsruhe Preprint TKP 76/19, 1976.
73. Yndurain F. «J. Ann. Phys.», 1973, v. 75, p. 171.
74. Fischer J. «Comm. Math. Phys.», 1973, v. 30, p. 249.
75. Langbein W. Are Conformal Mapping Polynomials Really Optimal Analytic Parametrization of the Scattering Amplitude? Kaiserlautern Preprint, 1975.
76. Cutkosky R. E., Shih C. C. «Phys. Rev. D», 1971, v. 4, p. 2750.
77. Prešnajder P., Pišút J. «Nucl. Phys. B», 1974, v. 82, p. 313.
78. Atkinson D., Kaekebeke M. Crossing Symmetric Amplitudes with Regge Poles. University of Groningen Preprint, 1976.
79. Caprini I. e.a. «Phys. Rev. D», 1972, v. 5, p. 1658.
80. Isaev P. S., Nedyalkov I. P. «Proc. Bulg. Acad. Sci.», 1971, v. 24, p. 451.
81. Kanazawa A., Miyakoshi T. On the Pole Search Problem of Scattering Amplitudes in L^2 Norm. Hokkaido University. Preprint, Sapporo, 1976.