«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1979, ТОМ 10, ВЫП. 2

УДК 539.17.01:539.171.5

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ π-МЕЗОНОВ НА ЯДРАХ

Т. И. Копалейшвили

Тбилисский государственный университет, Тбилиси

На основе релятивистской потенциальной теории изложена общая теория многократного рассеяния пионов на ядрах. Рассмотрены разные формулировки этой теории. В рамках общей теории изучен вопрос связи t-матрицы рассеяния пиона на нуклоне в их системе ц.м. с той же матрицей в произвольной системе. На основе уравнения Липмана — Швингера для T-матрицы рассеяния пиона на ядре получено общее выражение (в виде ряда) для амплитуды πA-рассеяния в приближении фиксированных центров (ПФЦ) и рассмотрены разные решаемые модели в этом приближении. Детально обсуждены имеющиеся в настоящее время приближенные методы решения задачи πA-рассеяния. На основе оптического потенциала первого порядка изучен вопрос учета разных эффектов, позволяющих выйти за пределы ПФЦ. Обсуждены также результаты первых попыток построения оптического потенциала второго порядка и вопрос учета в процессах πA-рассеяния реального поглощения пионов ядрами. Отдельно рассмотрена задача пион-дейтронного рассеяния на основе релятивистских трехчастичных уравнений. В обзоре основное внимание уделено пион-ядерному рассеянию в области (3.3) резонанса.

The general theory of pions multiple scattering on nuclei is expounded on the basis of the relativistic potential theory. In the framework of general theory the problem of the relation pion-nucleon scattering t-matrix in their c.m.f. with the same matrix in the arbitary frame is considered. The general expression (as a series) for the πA-scattering amplitude is obtained in the fixed-scatterer approximation (FSA) on the basis of the Lippmann—Schwinger equation for T-matrix and the different solvable models are considered in this approximation. The approximation methods which exist at present for the solving πA-scattering on the basis of the first-order optical potential are considered in detail and problem of taking into account different effects letting us to go beyond the FSA are considered. The results of first attempt to obtain the secondorder optical potential the problem of the account the genuine pion absorption by nuclei in the πA-scattering processes are discussed as well. The pion-deuteron scattering is considered separetely. The consideration is carried out on the basis of three-body relativistic equations. In the review the main attention is paid to the pion-nuclear scattering in the resonance region.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение взаимодействия π-мезонов с ядрами является одной из центральных задач физики промежуточных энергий. Имеющиеся в настоящее время «мезонные фабрики» открывают широкие возможности для всестороннего и детального количественного изучения этого взаимодействия. На данном этапе теории отсутствует единая динамическая схема рассмотрения всех явлений, которые возникают при взаимодействии π-мезонов с ядром. Поэтому при исследовании тех или иных аспектов проблемы используются разные теоретические подходы. Один из таких подходов к проблеме пион-ядерного взаимодействия — общая теория многократного рассеяния (ТМР) частицы на связанной системе. Эта теория позволяет найти дифференциальное и интегральное сечения упругого рассеяния $\sigma_{\text{упр}}$ и полное сечение $\sigma_{\text{пол}}$ рассеяния пиона на ядре, как функции кинетической энергии пиона T_π.

Теория многократного рассеяния пиона на ядре связывает матрицу столкновения пиона с ядром с матрицей пион-нуклонного столкновения в свободном состоянии, которая считается, в той или иной степени, известной. В этом отношении теория является феноменологической, но вместе с тем достаточно общей для того, чтобы на ее основе исследовать разные аспекты пион-ядерной динамики.

Вопросы ТМР, применительно к пион-ядерному рассеянию, обсуждены в работе [1], как часть общей проблемы пион-ядерного взаимодействия. Но в ней, во-первых, вопросы ТМР рассмотрены лишь схематически и, во-вторых, обсуждены результаты работ, опубликованных лишь до середины 1974 г. В последние три-четыре года появилось множество статей, которые посвящены как основам теории и ее развитию, так и применению этой теории к конкретным задачам по пион-ядерному рассеянию.

Данный обзор посвящен более детальному анализу состояния теории многократного рассеяния пионов на ядрах. При этом основное внимание уделяется вопросам формулировки теории и ее дальнейшему развитию, анализу приближенных решений задачи, основным допущениям, которые используются в настоящее время в конкретных расчетах, и другим вопросам. Отдельно рассматривается рассеяние пионов на дейтоне, где возможна (в определенной области энергии T_π) трехчастичная формулировка задачи, на основе уравнений Фаддеева или релятивистских обобщений этих уравнений.

1. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ π-МЕЗОНОВ НА ЯДРАХ

Теория многократного рассеяния по своей основе — теория потенциальная и предполагает, что взаимодействие падающей частицы, в рассматриваемом случае π-мезона, с ядрами носит двухчастичный характер. Вследствие этого гамильтониан системы пион + ядро (πA) представляется в виде

$$H = h_\pi + H_A + \sum_{i=1}^{A} v_i, \tag{1}$$

где h_π — гамильтониан свободного пиона; H_A — гамильтониан ядра; v_i — потенциал взаимодействия пиона с i-м нуклоном ядра. В рамках релятивистской потенциальной теории (РПТ) [2—6] получается, что даже в первом порядке по квадрату отношения скорости частицы к скорости света в разложении взаимодействия возникают трехчастичные силы. Следовательно, гамильтониан (1)— приближенный, не учитывающий многочастичные силы во взаимодействии пиона с ядром. Кроме того, теория, основанная на гамильтониане (1), пренебрегает важным физическим процессом — реальным поглощением пиона ядром, которое в основном идет через двухнуклонный механизм (см., например, [7]). Ниже сформулируем общую теорию многократного рассеяния пионов на ядрах, основываясь на работах [8—11].

T-Матрица рассеяния, соответствующая гамильтониану (1.1), определяется решением уравнения Липмана — Швингера:

$$T(E) = \begin{cases} \sum_i v_i + \sum_i v_i G(E)\, T(E); & (2) \\ \sum_i v_i + T(E)\, G(E) \sum_i v_i, & (3) \end{cases}$$

где

$$G(E) = [E + \mathrm{i}0 - h_\pi - H_A]^{-1}; \qquad (4)$$

E — энергия системы.

Заметим, что такая запись уравнения для T-матрицы предполагает сходимость итерационных рядов уравнений (2) и (3) или существование соответствующих обратных операторов.

Примем во внимание то обстоятельство, что векторы состояния ядра, по которым берутся матричные элементы от оператора T и вообще от физических операторов, должны быть антисимметричными относительно перестановки нуклонов. Обозначим через $\mathcal{A} = a^2$ оператор, проектирующий гильбертово пространство ядра на антисимметризованные векторы состояния, образующие подпространство, которое ортогонально к остальной части гильбертова пространства. Из-за симметричности оператора $\sum_i v_i$ относительно перестановки нуклонов его матричные элементы между векторами состояний из этих двух разных частей гильбертова пространства равны нулю. Поэтому уравнения (2) и (3) без нарушения общности можно написать в виде:

$$T = \begin{cases} Av + Av G \mathcal{A} T; & (5) \\ Av + T \mathcal{A} G v A, & (6) \end{cases}$$

где

$$\mathcal{A} v = \sum_i v_i. \qquad (7)$$

Основной физической величиной, которая определяется в ТМР, является подматрица общей T-матрицы, соответствующая упругому рассеянию. Нахождение этой матрицы часто бывает удобным свести к нахождению некоторого эффективного потенциала, который называется оптическим потенциалом. При этом желательно и удобно эту величину выразить через матрицу рассеяния пиона на нуклоне, которая в принципе является наблюдаемой в эксперименте величиной.

Проекционный оператор a представим в виде суммы оператора p, проектирующего пространство антисимметричных векторов состояния ядра на основное состояние, и оператора Q, который выделяет всевозможные возбужденные антисимметричные векторы состояния

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{P}+Q=\mathcal{A} \\ \mathcal{A}^2=\mathcal{A}, \quad \mathcal{P}^2=\mathcal{P}, \quad Q^2=Q, \quad \mathcal{P}Q=Q\mathcal{P}=0. \end{array}\right\} \tag{8}$$

Очевидно, что имеют место равенства $\mathcal{A}G=G\mathcal{A}$; $\mathcal{P}G=G\mathcal{P}$; $QG=GQ$, которые будут часто использованы ниже.

По определению оптическим потенциалом называется оператор, с помощью которого матрица упругого рассеяния определяется из уравнения Липмана — Швингера следующего вида:

$$T(E)=\begin{cases} U(E)+U(E)\,\mathcal{P}G(E)\,T(E); & (9)\\ U(E)+T(E)\,G(E)\,\mathcal{P}U(E). & (10)\end{cases}$$

Введем вспомогательные операторы:

$$\tau(E)=\begin{cases} v+vG(E)\,\mathcal{A}\tau(E); & (11)\\ v+\tau(E)\,\mathcal{A}G(E)\,v; & (12)\end{cases}$$

$$\hat{\tau}(E)=\begin{cases} v+vG(E)\,Q\hat{\tau}(E); & (13)\\ v+\hat{\tau}(E)\,QG(E)\,v. & (14)\end{cases}$$

Определяя оператор v из уравнения (12) и подставляя в (5), получаем

$$T=[1+\tau\mathcal{A}G]^{-1}A\tau+[1+\tau\mathcal{A}G]^{-1}A\tau G\mathcal{A}T,$$

которое эквивалентно уравнению

$$T=A\tau+(A-1)\,\tau G\mathcal{A}T. \tag{15}$$

Совершенно аналогично можно показать, что

$$T=A\hat{\tau}+[A\hat{\tau}\mathcal{A}G-\hat{\tau}QG]\,T. \tag{16}$$

Вводя новый оператор

$$T'=T\,(A-1)/A, \tag{17}$$

уравнение (15) можно привести к виду

$$T' = (A-1)\tau + (A-1)\tau G \mathcal{A} T'. \tag{18}$$

Определим оператор U' таким образом, чтобы уравнение для T' матрицы имело вид (10), т. е.

$$T'(E) = \begin{cases} U'(E) + U'(E) G(E) \mathcal{P} T'(E); & (19) \\ U'(E) + T'(E) \mathcal{P} G(E) U'(E). & (20) \end{cases}$$

Формально решая уравнение (18) относительно T' и подставляя найденное выражение T' в (20), после алгебраических преобразований, аналогичных тем, которые использовались при выводе (15), получаем уравнение для оптического потенциала

$$U'(E) = (A-1)\tau(E) + (A-1)\tau(E) G(E) Q U'(E). \tag{21}$$

На основе (16) совершенно аналогично можно получить

$$T(E) = \begin{cases} \hat{U}(E) + \hat{U}(E) G(E) \mathcal{P} T(E); & (22) \\ \hat{U}(E) + T(E) \mathcal{P} G(E) \hat{U}(E), & (23) \end{cases}$$

где U определяется из уравнения

$$\hat{U}(E) = A\hat{\tau}(E) + (A-1)\hat{\tau}(E) G(E) Q \hat{U}(E). \tag{24}$$

Формулы (13), (14), (22) — (24) являются основными соотношениями ТМР в формулировке Ватсона [8], а соотношения (11), (12), (17), (19) — (21) — в формулировке Кермана, Макмануса, Талера (КМТ) [9]. Из вывода видно, что обе эти формулировки эквивалентны при точном решении задачи. Различие между ними возникает при приближенном решении. Это различие связано с тем, что отличаются друг от друга вспомогательные операторы τ (11), (12) и $\hat{\tau}$ (13), (14), представляющие собой t-матрицы рассеяния пиона на нуклоне в ядре. Из определения видно, что τ и $\hat{\tau}$ являются многочастичными операторами, по-разному учитывающими влияние ядерной среды на выделенный нуклон, который взаимодействует с пионом. Определяя v из уравнения (14) и подставляя полученное выражение в (11), в результате используемых выше алгебраических преобразований легко можно найти связь между τ и $\hat{\tau}$:

$$\tau(E) = \begin{cases} \hat{\tau}(E) + \hat{\tau}(E) G(E) \mathcal{P} \tau(E); & (25) \\ \hat{\tau}(E) + \tau(E) \mathcal{P} G(E) \hat{\tau}(E). & (26) \end{cases}$$

Рассмотрим теперь вопрос выполнения условия унитарности для матрицы упругого рассеяния

$$T_{\text{упр}} = \mathcal{P} T \mathcal{P}. \tag{27}$$

Для этого заметим, что с учетом равенства $\mathscr{P}^2 = \mathscr{P}$ из уравнений (19), (20), (22), (23) следует:

$$T'_{\text{упр}}(E) = \begin{cases} V'_{\text{опт}}(E) + V'_{\text{опт}}(E)\, G_0(E)\, T'_{\text{упр}}(E); & (28) \\ V'_{\text{опт}}(E) + T'_{\text{упр}}(E)\, G_0(E)\, V'_{\text{опт}}(E), & (29) \end{cases}$$

где

$$T'_{\text{упр}} = \mathscr{P} T' \mathscr{P}; \quad V'_{\text{опт}} = \mathscr{P} U' \mathscr{P}; \quad G_0 = \mathscr{P} G \mathscr{P}, \tag{30}$$

и

$$T_{\text{упр}}(E) = \begin{cases} \hat{V}_{\text{опт}}(E) + \hat{V}_{\text{опт}}(E)\, G_0(E)\, T_{\text{упр}}(E); & (31) \\ \hat{V}_{\text{опт}}(E) + T_{\text{упр}}(E)\, G_0(E)\, V'_{\text{опт}}(E), & (32) \end{cases}$$

где

$$\hat{V}_{\text{опт}} = \mathscr{P} \hat{U} \mathscr{P}. \tag{33}$$

Уравнения (28), (29) и (31), (32) являются уравнениями вида:

$$\mathscr{T}(E) = \begin{cases} \mathscr{V}(E) + \mathscr{V}(E)\, \mathscr{G}(E)\, \mathscr{T}(E); \\ \mathscr{V}(E) + \mathscr{T}(E)\, \mathscr{G}(E)\, \mathscr{V}(E), \end{cases}$$

где $\mathscr{V}(E)$ — в общем случае неэрмитовый оператор; $\mathscr{G}(E)$ — гриновский оператор. Нетрудно показать [12], что для $\mathscr{T}(E)$-матрицы имеет место соотношение унитарности следующего вида:

$$\mathscr{T}(E) - \mathscr{T}^+(E) = \mathscr{T}^+(E)\,[\mathscr{G}(E) - \mathscr{G}^+(E)]\,\mathscr{T}(E) +$$
$$+ [1 + \mathscr{T}^+(E)\, \mathscr{G}^+(E)]\,[\mathscr{V}(E) - \mathscr{V}^+(E)]\,[1 + \mathscr{G}(E)\, \mathscr{T}(E)].$$

Применим это соотношение для матриц $T_{\text{упр}}$ и $T'_{\text{упр}}$, определенных соотношениями (27), (31) — (33), (28) — (30). При этом используем соотношение, получаемое из (4):

$$G(E) - G^+(E) = -2\pi i \delta(E - h_\pi - H_A).$$

В результате получим равенство

$$T_{\text{упр}}(E) - T^+_{\text{упр}}(E) = -2\pi i T^+_{\text{упр}}(E)\, \mathscr{P} \delta(E - h_\pi - H_A)\, \mathscr{P} T_{\text{упр}}(E) +$$
$$+ [1 + T^+_{\text{упр}}(E)\, G_0^+(E)]\,[\hat{V}_{\text{опт}}(E) - \hat{V}^+_{\text{опт}}(E)]\,[1 + G_0(E)\, T_{\text{упр}}(E)] \tag{34}$$

для формулировки Ватсона, и

$$T_{\text{упр}}(E) - T^+_{\text{упр}}(E) = -2\pi i \frac{A-1}{A} T^+_{\text{упр}}(E)\, \mathscr{P} \delta(E - h_\pi - H_A) \times$$
$$\times \mathscr{P} T_{\text{упр}}(E) + \frac{A}{A-1} [1 + T'^+_{\text{упр}}(E)\, G_0^+(E)]\,[V'_{\text{опт}}(E) - V'^+_{\text{опт}}(E)] \times$$
$$\times [1 + G_0(E)\, T'_{\text{упр}}(E)] \tag{35}$$

для формулировки КМТ.

Видно, что первый член в правой части соотношения (34) пропорционален сечению упругого рассеяния, а второй член соответствует неупругим процессам, непосредственно связанным с неэрмитовой частью оптического потенциала $\hat{V}_{\text{опт}}$. Что же касается первого члена в правой части соотношения (35), то в нем до сечения упругого рассеяния недостает величины

$$T^{+}_{\text{упр}}(E)\,\mathcal{P}\,\delta(E-h_{\pi}-H_{A})\,\mathcal{P}\,T_{\text{упр}}(E)/A.$$

И поскольку соотношение (35) является точным и, следовательно, эквивалентным соотношению (34), то второй член в правой части (35) должен содержать вклад от упругого рассеяния, т. е. первый член полностью не исчерпывает упругий канал. Таким образом, в то время как в формулировке Ватсона вклад в условии унитарности от упругого рассеяния строго отделен от вклада неупругих процессов, в формулировке КМТ эти вклады неполностью разделены. Поэтому при приближенном решении задачи рассеяния в формулировке КМТ не определено, какие именно неупругие каналы были отброшены в этом приближении. На этот недостаток формулировки КМТ было обращено внимание в [13] и этот вопрос обсуждался в [14].

При приближенном решении задачи рассеяния пионов на ядрах иногда удобно использовать представление T-матрицы в виде ряда (ватсоновский ряд). Для его получения заметим, что, согласно определению (7), матричные элементы от v_i и v по антисимметричным волновым функциям совпадают и, следовательно, будут совпадать также матричные элементы от оператора τ (11), (12) и оператора τ_i, определенного уравнениями:

$$\tau_i(E)=\begin{cases} v_i+v_iG(E)\mathcal{A}\tau_i(E); & (36)\\ v_i+\tau_i(E)\mathcal{A}G(E)v_i. & (37)\end{cases}$$

Определим операторы

$$T_i=v_i+v_iG\mathcal{A}T. \tag{38}$$

Используя уравнения (5), видим, что

$$T=\sum_i T_i. \tag{39}$$

Если из уравнения (37) найдем v_i и подставим в (38), то с учетом (39) находим

$$T_i(E)=\tau_i(E)+\tau_i(E)G(E)\mathcal{A}\sum_{j\neq i}T_j(E). \tag{40}$$

Решая эту систему уравнений итерационным методом, для T (39) получим искомый ряд

$$T(E)=\sum_i\tau_i(E)+\sum_i\sum_{j\neq i}\tau_i(E)G(E)\mathcal{A}\tau_j(E)+$$
$$+\sum_i\sum_{j\neq i}\sum_{k\neq j}\tau_i(E)G(E)\mathcal{A}\tau_j(E)G(E)\mathcal{A}\tau_k(E)+\ldots \tag{41}$$

Прежде чем рассмотреть вопрос о разных приближениях, используемых в настоящее время при исследовании рассеяния пиона на ядре в рамках изложенной выше теории многократного рассеяния, следует конкретизировать способ описания ядра. Пусть H_A^{cm} — гамильтониан внутреннего движения ядра, тогда в рамках РПТ H_A будет иметь вид ($\hbar = c = 1$)

$$H_A = \sqrt{\mathbf{K}_A^2 + (H_A^{cm})^2} - M_A. \tag{42}$$

Здесь и далее энергия отсчитывается от энергии основного состояния ядра (M_A — соответствующая масса), а $\mathbf{K}_A$ — полный импульс ядра.

Введем антисимметризованные векторы состояния ядра $|\mathbf{K}_A\alpha\rangle = |\mathbf{K}_A\rangle|\alpha\rangle$, которые удовлетворяют уравнению Шредингера:

$$H_A|\mathbf{K}_A\alpha\rangle = E_{A\alpha}|\mathbf{K}_A\alpha\rangle, \tag{43}$$

где

$$E_{A\alpha} = \sqrt{\mathbf{K}_A^2 + \mathscr{E}_{A\alpha}^2} - M_A. \tag{44}$$

Здесь $\mathscr{E}_{A\alpha} = MA + \mathscr{E}_\alpha$ — полная энергия ядра A в системе ц. м.; $\mathscr{E}_\alpha$ — энергия внутреннего движения ядра, которая определяется из уравнения

$$H_A^{cm}|\alpha\rangle = (MA + \mathscr{E}_\alpha)|\alpha\rangle. \tag{45}$$

Ядра с числом нуклонов $A \geqslant 3$ в современной теории рассматриваются на основе нерелятивистской квантовой механики (для дейтона возможна квазирелятивистская трактовка задачи). В соответствии с этим следует рассмотреть нерелятивистский предел выражения H_A (42):

$$H_A \approx H_A^{cm} - M_A + \mathscr{K}_A^c; \quad \mathscr{K}_A^c = \mathbf{K}_A^2/(2MA). \tag{46}$$

В этом случае для энергии имеем

$$E_{A\alpha} \approx E_A(K_A) + \mathscr{E}_\alpha + B_A, \tag{47}$$

где

$$B_A = MA - M_A; \quad E_A(K_A) = \mathbf{K}_A^2/(2MA) \approx \sqrt{\mathbf{K}_A^2 + M_A^2} - M_A. \tag{48}$$

Ясно, что векторы состояния $|\mathbf{K}_A\alpha\rangle$ удовлетворяют следующему условию полноты:

$$\sum_\alpha \int |\mathbf{K}_A\alpha\rangle\, d\mathbf{K}_A \langle\alpha\mathbf{K}_A| = \mathscr{A}. \tag{49}$$

Будем считать эти векторы состояния ортонормированными, согласно равенству

$$\langle \mathbf{K}'_A\alpha' | \alpha \mathbf{K}_A \rangle = \delta(\mathbf{K}'_A - \mathbf{K}_A)\,\delta_{\alpha'\alpha}. \tag{50}$$

2. МАТРИЦА πN-РАССЕЯНИЯ

В ТМР желательно, как об этом указывалось в предыдущем разделе, матрицу πA-рассеяния выразить через матрицу πN-рассеяния. В данном разделе рассмотрим некоторые модели πN-взаимодействия и вопросы, связанные с использованием матрицы πN-рассеяния в теории многократного рассеяния пионов на ядрах.

В потенциальной теории исходным является уравнение Липмана — Швингера для t-матрицы, которое сначала запишем в системе ц. м. пион + нуклон:

$$t^{cm}(\omega_{cm}) = v + v g_{cm}(\omega_{cm})\, t^{cm}(\omega_{cm}), \tag{51}$$

где

$$g_{cm}(\omega_{cm}) = [\omega_{cm} + i0 - h_\pi^{cm} - h_n^{cm}]^{-1} \equiv [\omega_{cm} + i0 - h_0^{cm}]^{-1}; \tag{52}$$

h_π^{cm} и h_n^{cm} — операторы Гамильтона свободного пиона и нуклона в системе ц. м. πN; v — в общем случае нелокальный оператор $N\pi$-взаимодействия, зависящий от спинов и изоспинов частиц. Его можно представить в виде

$$\langle \mathbf{p}' | v | \mathbf{p} \rangle = 4\pi \sum_{ljIm_jm_I} v_{ljI}(p', p) \langle \hat{\mathbf{p}}' | ljIm_jm_I \rangle \langle ljIm_jm_I | \hat{\mathbf{p}} \rangle, \tag{53}$$

где $\langle \hat{\mathbf{p}} | ljIm_jm_I \rangle$ — собственные функции орбитального, полного и изоспинного моментов πN-системы и удовлетворяют известным условиям ортонормировки и полноты

$$\int \langle l'j'I'm_{j'}m_{I'} | \hat{\mathbf{p}} \rangle\, d\hat{\mathbf{p}}\, \langle \hat{\mathbf{p}} | ljIm_jm_I \rangle = \delta_{l'l}\delta_{j'j}\delta_{I'I}\delta_{m_{j'}m_j}\delta_{m_{I'}m_I}; \tag{54}$$

$$\sum_{ljIm_jm_I} \langle \hat{\mathbf{p}}' | ljIm_jm_I \rangle \langle ljIm_jm_I | \hat{\mathbf{p}} \rangle = \delta(\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{p}}). \tag{55}$$

В (53) $\mathbf{p}$ — относительный импульс πN-системы. Ясно, что t-матрица может быть записана в аналогичном (53) виде

$$\langle \mathbf{p}' | t^{cm}(\omega_{cm}) | \mathbf{p} \rangle = 4\pi \sum_{ljIm_jm_I} t_{ljI}^{cm}(p', p; \omega_{cm}) \times$$
$$\times \langle \hat{\mathbf{p}}' | ljIm_jm_I \rangle \langle ljIm_jm_I | \hat{\mathbf{p}} \rangle. \tag{56}$$

На основе формул (51) — (56) легко можно получить уравнение для парциальных t-матриц

$$t_{ljI}^{cm}(p',\ p;\ \omega_{cm}) = v_{ljI}(p',\ p) + \\ + 4\pi \int \frac{v_{ljI}(p',\ p'')\, t_{ljI}^{cm}(p'',\ p;\ \omega_{cm})\, p''^2\, dp''}{\omega_{cm} + \mathrm{i}0 - \omega_{cm}(p'')}, \tag{57}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \omega_{cm}(p) &= \omega_\pi(p) + \omega_n(p); \\ \omega_\pi(p) &= \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}; \\ \omega_n(p) &= \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}; \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

m и M — масса пиона и нуклона. Парциальная амплитуда πN-рассеяния связана с t_{ljI}^{cm} известным соотношением

$$f_{ljI}(k) = -(2\pi)^2 \mu_{\pi N}(k)\, t_{ljI}^{cm}(k,\ k;\ \omega_{cm}(k)) = \\ = \exp[\mathrm{i}\delta_{ljI}(k)] \sin \delta_{ljI}(k)/k, \tag{59}$$

где δ_{ljI} — фазы рассеяния;

$$\mu_{\pi N}(k) = \omega_\pi(k)\, \omega_n(k)/[\omega_\pi(k) + \omega_n(k)] \tag{60}$$

— приведенная «масса» πN-системы. Для парциальных t-матриц из уравнения (57) следует условие унитарности вне энергетической поверхности

$$t_{ljI}^{cm}(p',\ p;\ \omega_{cm}(k)) - t_{ljI}^{cm*}(p,\ p';\ \omega_{cm}(k)) = \\ = -\frac{\mathrm{i}\mu_{\pi N}(k)\, k}{2}\, t_{ljI}^{cm}(p',\ k;\ \omega_{cm}(k))\, t_{ljI}^{cm*}(p,\ k;\ \omega_{cm}(k)). \tag{61}$$

Одной из моделей πN-взаимодействия, часто используемой в теории рассеяния пионов на ядрах, является сепарабельная модель, которая в области (3.3)-резонанса ($l = 1,\ j = I = {}^3/_2$) имеет определенное теоретическое обоснование [15]. В рамках потенциальной теории эта модель предполагает, что $v_\gamma(p',\ p)$ (ниже, во избежание громоздких обозначений, полагаем $\gamma \equiv ljI$) можно представить в виде

$$v_\gamma(p',\ p) = \lambda_\gamma v_\gamma(p')\, v_\gamma(p), \tag{62}$$

где λ_γ — константа; $v_\gamma(p)$ — форм-фактор. Тогда в результате решения уравнения (57) получим

$$t_\gamma^{cm}(p',\ p;\ \omega_{cm}(k)) = v_\gamma(p')\, D_\gamma^{-1}(\omega_{cm}(k))\, v_\gamma(p), \tag{63}$$

где

$$D_\gamma(\omega_{cm}(k)) = \lambda_\gamma^{-1} - 4\pi \int \frac{v_\gamma^2(p)\, p^2\, dp}{\omega_{cm}(k) + \mathrm{i}0 - \omega_{cm}(p)}. \tag{64}$$

Форм-факторы $v_\gamma(p)$, входящие в (62), (63), обычно определяются двумя методами. В первом функции $v_\gamma(p)$ задаются по возможности в простом виде, который совместим с правильным поведением амплитуды πN-рассеяния при малых энергиях ($f_\gamma(k) \sim k^{2l}$). При этом параметры функции $v_\gamma(p)$ определяются таким образом, чтобы получить измеренные в эксперименте фазы рассеяния в определенном интервале энергии. Во втором — решается обратная задача πN-рассеяния с использованием всей информации о фазах рассеяния в интервале энергии $(0, +\infty)$. Такая задача была решена, например, в работах [16, 17]. В работе [16] потенциал брался в виде (63), где λ_γ считается не зависящим от энергии. Оказалось, что определенные таким образом форм-факторы $v_\gamma(p)$, во-первых, являются комплексными даже при импульсах меньших соответствующим порогу неупругих процессов πN-столкновения и, во-вторых, обладают нежелательными осцилляциями в широком интервале импульсов. В работе [17] все неупругие каналы в πN-столкновениях учитываются эффективно через зависящий от энергии оптический потенциал упругого канала, который имеет сепарабельную форму

$$\mathscr{V}_\gamma(p', p; \omega_{cm}(k)) = \lambda_\gamma(\omega_{cm}(k))\, \mathscr{V}_\gamma(p')\, \mathscr{V}_\gamma(p). \qquad (65)$$

Здесь $\lambda_\gamma(\omega_{cm}(k))$ — функция действительная, ниже порога неупругих процессов (дальше комплексная); форм-факторы упругих каналов действительны. Соответствующую потенциалу (65) t-матрицу можно получить решением уравнения типа (57), в котором вместо $v_\gamma(p', p)$ подставлен потенциал (65). В результате получается

$$t_\gamma^{cm}(p', p; \omega_{cm}(k)) = \mathscr{V}_\gamma(p')\, D_\gamma^{-1}(\omega_{cm}(k))\, \mathscr{V}_\gamma(p), \qquad (66)$$

где

$$D_\gamma^{-1}(\omega_{cm}(k)) = \lambda_\gamma^{-1}(\omega_{cm}(k)) - 4\pi \int \frac{\mathscr{V}_\gamma^2(p)\, p^2\, dp}{\omega_{cm}(k) + i0 - \omega_{cm}(p)} = \qquad (67)$$

$$= \lambda_\gamma^{-1} - 4\pi \int \frac{g_\gamma^2(p)\, p^2\, dp}{\omega_{cm}(k) + i0 - \omega_{cm}(p)}. \qquad (68)$$

Функции $\mathscr{V}_\gamma(p)$ и $g_\gamma(p)$ были определены в работе [17] через фазы рассеяния. Заметим, что для определения $D_\gamma^{-1}(\omega_{cm}(k))$ не обязательно знать функцию $g_\gamma(p)$ и ее можно определить по формуле

$$D_\gamma^{-1}(\omega_{cm}(k)) = t_\gamma^{cm}(k, k; \omega_{cm}(k)) / \mathscr{V}_\gamma^2(k), \qquad (69)$$

которая непосредственно следует из (66). Это соотношение требует знания t-матрицы на энергетической поверхности при всех значениях энергии.

Ясно, что эти два способа определения t-матрицы приводят к разным поведениям вне энергетической поверхности. Поэтому, если их исследовать при нахождении T-матрицы рассеяния пионов на ядрах, то в принципе можно будет получить информацию о внеэнергетическом поведении матрицы πN-рассеяния. Это является одной из целей изучения πA-рассеяния.

Для состояния $\gamma \equiv ljI = 1^3/_2{}^3/_2$ t-матрицу в области резонанса можно представить в виде

$$t^{cm}_{1^3/2\,^3/2}(p',\ p;\ \omega_{cm}(k)) \equiv t^{cm}_{33}(p',\ p;\ \omega_{cm}(k)) = \\ = \frac{\lambda_{33} p' \widetilde{v}_1(p')\, \widetilde{v}_1(p)\, p}{\omega_{cm}(k) - \omega_R + i\Gamma(k)/2}, \tag{70}$$

где $\omega_R \equiv \omega_R(k_R)$ — резонансная энергия; k_R — соответствующий импульс; $\Gamma(k)$ — ширина резонанса; λ_{33} — постоянная. Величины $\Gamma(k)$ и λ_{33} можно выразить через: форм-фактор, значения амплитуды πN-рассеяния и ширину резонанса в точке резонанса $\omega_{cm}(k) = \omega_R$, если использовать условие унитарности (61) и оптическую теорему для амплитуды (59);

$$\lambda_{33} = \frac{\Gamma}{4} \frac{\sigma^{\text{tot}}_{33}(k_R)}{(2\pi)^3 \mu_{\pi N}(\omega_R)\, k_R \widetilde{v}_1^2(k_R)}, \quad \Gamma \equiv \Gamma(k_R); \tag{71}$$

$$\Gamma(k) = \frac{\Gamma}{8} \frac{\mu_{\pi N}(\omega_{cm}(k))}{(2\pi)^3 \mu_{\pi N}(\omega_R)} \frac{k\widetilde{v}_1^2(k)}{k_R \widetilde{v}_1^2(k_R)} k^2 \sigma^{\text{tot}}_{33}(k_R). \tag{72}$$

В ТМР пионов на ядрах в области (3.3)-резонанса используется также модель Чу — Лоу [18], которая описывает рассеяние p-волнового пиона на неподвижном нуклоне. Матрицу рассеяния в этой теории можно получить из выражения (56), если в него подставить $l = 1$; $jI \equiv \alpha = {}^1/_2{}^1/_2$; ${}^3/_2{}^1/_2$; ${}^1/_2{}^3/_2$; ${}^3/_2{}^3/_2$ и

$$t^{cm}_{1\alpha}(p',\ p;\ \omega_{cm}(k)) = \\ = -\frac{p' v(p')}{\sqrt{\omega_\pi(p')}} \frac{h_\alpha(\omega_\pi(k))}{4\pi} \frac{p v(p)}{\sqrt{\omega_\pi(p)}}, \tag{73}$$

где $v(p)$ — форм-фактор нуклона; $h_\alpha(\omega_\pi)$ имеет вид

$$h_\alpha(\omega_\pi) = \\ = \frac{\lambda_\alpha/\omega_\pi}{1 + \lambda_\alpha \omega_\pi \int \frac{p^3 v^2(p)\, d\omega_\pi(p)}{\omega_\pi^2(p)(\omega_\pi + i0 - \omega_\pi(p))} - \omega_\pi \int \frac{p^3 v^2(p)\, B_\alpha(\omega_\pi(p))\, d\omega_\pi(p)}{\omega_\pi^2(p)(\omega_\pi + \omega_\pi(p))}}. \tag{74}$$

Здесь $B_\alpha(\omega_\pi)$ — функция, определяемая из соотношения кроссинг-симметрии; λ_α выражается через компоненту πN-взаимодействия f ($f^2 = 0{,}08$) по формуле

$$\lambda_\alpha = \frac{2}{3}\left(\frac{f}{m}\right)^2 \begin{pmatrix} -4, & \alpha = {}^1/_2\,{}^1/_2 \\ -1, & \alpha = {}^3/_2\,{}^1/_2 \\ -1, & \alpha = {}^1/_2\,{}^3/_2 \\ 2, & \alpha = {}^3/_2\,{}^3/_2 \end{pmatrix}. \tag{75}$$

В теории многократного рассеяния пионов на ядрах соответствующая T-матрица выражается через t-матрицу πN-столкновения в системе ц. м. пион + ядро. Поэтому возникает задача связать эту матрицу с матрицей в системе ц. м. пион + нуклон t^{cm}. Этот вопрос обсуждался в ряде работ [18—22]. Естественное и наиболее удобное, на наш взгляд, решение этой проблемы, соответствующее распространенной постановке задачи пион-ядерного рассеяния, когда взаимодействие пиона с ядром трактуется феноменологически, было дано в работе [23] на основе РПТ. При рассеянии пиона на дейтоне возможна и другая формулировка задачи, которая является более общей и имеет теоретико-полевую основу. Она будет рассмотрена нами отдельно в последнем разделе данной статьи.

В РПТ взаимодействие между частицами (в нашем случае между пионом и нуклоном) не зависит от энергии и в общем случае является нелокальным и вводится феноменологически. Так что в системе ц. м. πN имеем уравнения (51) и (52), где $v = v\,(\mathbf{r}, \mathbf{p})$. Здесь $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$ — относительный радиус вектора и импульс πN-системы. В произвольной системе, где импульсы пиона и нуклона равны $\mathbf{p}_\pi$ и $\mathbf{p}_n$ соответственно, имеем

$$t\,(\omega) = \mathrm{v} + \mathrm{v}g\,(\omega)\,t\,(\omega), \tag{76}$$

где

$$g\,(\omega) = [\omega + i0 - h_0]^{-1} = [\omega + i0 - h_\pi - h_n]^{-1}; \tag{77}$$

$$h_0 = \sqrt{(h_0^{cm})^2 + \mathbf{P}^2}; \quad \omega\,(p, P) = \sqrt{\omega_{cm}^2\,(p) + \mathbf{P}^2}; \quad \mathbf{P} = \mathbf{p}_\pi + \mathbf{p}_n; \tag{78}$$

$$h^{cm} \equiv h_0^{cm} + v\,(\mathbf{r}, \mathbf{p}); \; h = \sqrt{(h^{cm})^2 + \mathbf{P}^2}, \quad \mathrm{v} = h - h_0. \tag{79}$$

Следует подчеркнуть, что в этой теории (потенциальной!) частицы всегда рассматриваются на массовой поверхности.

Относительный импульс, который входит в выражения (51) — (69) и (76) — (79), определен по формулам

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_{\pi n} + \mathbf{P}\,\frac{\mathbf{p}_{\pi n}\mathbf{P}}{\omega_{cm}\,(p)\,[\omega_{cm}\,(p) + \omega\,(p, P)]} \equiv \mathbf{p}\,(\mathbf{p}_\pi, \mathbf{p}_n); \tag{80}$$

$$\mathbf{p}_{\pi n} = \frac{\omega_n\,(p_n)\,\mathbf{p}_\pi - \omega_\pi\,(p_\pi)\,\mathbf{p}_n}{\omega\,(p, P)}. \tag{81}$$

Выражение (80) можно получить, если от 4-импульсов, определенных в произвольной системе:

$$P=(P_0,\ \mathbf{P}),\ P_0=\omega_\pi(p_\pi)+\omega_n(p_n),\ \mathbf{P}=\mathbf{p}_\pi+\mathbf{p}_n;$$
$$p_{\pi n}=p_n^0 p_\pi-p_\pi^0 p_n/P_0=(0,\ \mathbf{p}_{\pi n}), \tag{82}$$

перейти к 4-импульсам в системе ц. м. πN $(P_{cm}=(\sqrt{P^2},\ 0))$ с помощью лоренц-преобразования

$$\mathcal{L}_{i\mu}(P)(p_\pi+p_n)^\mu=0,\quad \mu=0,\ 1,\ 2,\ 3, \tag{83}$$

где

$$\mathcal{L}_{00}(P)=P_0/\sqrt{P^2};\ \mathcal{L}_{0i}(P)=-\mathcal{L}_{i0}(P)=P_i/\sqrt{P^2},$$
$$\mathcal{L}_{ij}=\delta_{ij}-P_iP_j/\sqrt{P^2}\left(P_0+\sqrt{P^2}\right),\quad i,\ j=1,\ 2,\ 3. \tag{84}$$

Якобиан такого преобразования, как нетрудно показать:

$$J(\mathbf{p}_\pi\mathbf{p}_n;\ \mathbf{p}\mathbf{P})=|D(\mathbf{p}_\pi,\ \mathbf{p}_n)/D(\mathbf{p},\ \mathbf{P})|=$$
$$=\frac{\omega_\pi(p_\pi)\,\omega_n(p_n)}{\omega_\pi(p)\,\omega_n(p)}\,\frac{\omega_\pi(p)+\omega_n(p)}{\omega_\pi(p_\pi)+\omega_n(p_n)}. \tag{85}$$

Введем векторы состояния $|\mathbf{p}_\pi\mathbf{p}_n\rangle$ и $|\mathbf{p}\mathbf{P}\rangle$, удовлетворяющие следующим условиям ортонормировки и полноты:

$$\langle\mathbf{p}_n'\mathbf{p}_\pi'|\mathbf{p}_\pi\mathbf{p}_n\rangle=\delta(\mathbf{p}_n'-\mathbf{p}_n)\,\delta(\mathbf{p}_\pi'-\mathbf{p}_\pi); \tag{86}$$
$$\int|\mathbf{p}_\pi\mathbf{p}_n\rangle\,d\mathbf{p}_\pi\,d\mathbf{p}_n\,\langle\mathbf{p}_n\mathbf{p}_\pi|=1; \tag{87}$$
$$\langle\mathbf{P}'\mathbf{p}'|\mathbf{p}\mathbf{P}\rangle=\delta(\mathbf{P}'-\mathbf{P})\,\delta(\mathbf{p}'-\mathbf{p}); \tag{88}$$
$$\int|\mathbf{p}\mathbf{P}\rangle\,d\mathbf{p}\,d\mathbf{P}\,\langle\mathbf{P}\mathbf{p}|=1. \tag{89}$$

Учитывая равенство $d\mathbf{p}_\pi\,d\mathbf{p}_n=J(\mathbf{p}_\pi\mathbf{p}_n;\ \mathbf{p}\mathbf{P})\,d\mathbf{p}\,d\mathbf{P}$, легко видеть, что матрица, связывающая эти два набора векторов состояний $|\mathbf{p}_\pi\mathbf{p}_n\rangle$ и $|\mathbf{p}\mathbf{P}\rangle$, имеет вид:

$$\langle\mathbf{P}\mathbf{p}|\mathbf{p}_\pi\mathbf{p}_n\rangle=\delta(\mathbf{P}-\mathbf{p}_\pi-\mathbf{p}_n)\,\delta[\mathbf{p}-\mathbf{p}(\mathbf{p}_\pi,\ \mathbf{p}_n)]\,J^{-1/2}(\mathbf{p}_\pi\mathbf{p}_n;\ \mathbf{p}\mathbf{P}). \tag{90}$$

Из уравнений (51) и (76) непосредственно следует равенство

$$\langle\mathbf{P}'\mathbf{p}'|t(\omega)|\mathbf{p}\mathbf{P}\rangle=\delta(\mathbf{P}'-\mathbf{P})\,t(\mathbf{p}',\ \mathbf{p};\ \omega,\ \mathbf{P}). \tag{91}$$

Используя известную связь между t-матрицей и волновой функцией и то обстоятельство, что из-за независимости потенциала $v(\mathbf{r},\ \mathbf{p})$ от энергии в волновой функции в импульсном представлении переменные ц. м. и относительного движения разделяются, можно показать [23], что имеет место равенство

$$t(\mathbf{p}',\ \mathbf{p};\ \omega(p,\ P),\ \mathbf{P})=F(p',\ p;\ P)\,t^{cm}(\mathbf{p}',\ \mathbf{p};\ \omega(p)), \tag{92}$$

где

$$F'(p', p; P) = [\omega_{cm}(p') + \omega_{cm}(p)]/[\omega(p', P) + \omega(p, P)]. \quad (93)$$

Соотношение (92) связывает t-матрицу наполовину вне энергетической поверхности в произвольной системе отсчета с той же t-матрицей в системе ц. м.

На основе соотношений (86)—(91) получается

$$\langle \mathbf{p}'_n \mathbf{p}'_\pi | t(\omega) | \mathbf{p}_\pi \mathbf{p}_n \rangle = \delta(\mathbf{P}' - \mathbf{P})\, t(\mathbf{p}'_\pi \mathbf{p}'_n, \mathbf{p}_\pi \mathbf{p}_n; \omega), \quad (94)$$

где

$$t(\mathbf{p}'_\pi \mathbf{p}'_n, \mathbf{p}_\pi \mathbf{p}_n; \omega) = t(\mathbf{p}', \mathbf{p}; \omega, \mathbf{P}) \times$$
$$\times [J(\mathbf{p}'_\pi p'_n; \mathbf{p}'\mathbf{P})\, J(\mathbf{p}_\pi \mathbf{p}_n; \mathbf{p}\mathbf{P})]^{-1/2}. \quad (95)$$

Используя равенства (92), (93), из (95) получаем соотношение

$$\sqrt{\omega_\pi(p'_\pi)\,\omega_n(p'_n)}\, t(\mathbf{p}'_\pi \mathbf{p}'_n, \mathbf{p}_\pi \mathbf{p}_n; \omega_\pi(p_\pi) + \omega_n(p_n)) \sqrt{\omega_\pi(p_\pi)\,\omega_n(p_n)} =$$
$$= \sqrt{\omega_\pi(p')\,\omega_n(p')}\, t^{cm}(\mathbf{p}', \mathbf{p}; \omega(p)) \sqrt{\omega_\pi(p)\,\omega_n(p)}\, \Phi(p', p; P), \quad (96)$$

где

$$\Phi(p', p; P) = \sqrt{\frac{\omega(p', P)}{\omega(p')}}\, \frac{\omega(p') + \omega(p)}{\omega(p', P) + \omega(p, P)} \sqrt{\frac{\omega(p, P)}{\omega(p)}}. \quad (97)$$

Из определения видно, что $\Phi(p, p; P) = 1$ и тогда равенство (96) сводится к известной [8] связи t-матрицы полностью на энергетической поверхности в произвольной системе отсчета с той же t-матрицей в системе ц. м.:

$$\sqrt{\omega_\pi(p'_\pi)\,\omega_n(p'_n)}\, t(\mathbf{p}'_\pi \mathbf{p}'_n, \mathbf{p}_\pi \mathbf{p}_n; \omega_\pi(p_\pi) + \omega_n(p_n)) \sqrt{\omega_\pi(p_\pi)\,\omega_n(p_n)} =$$
$$= \sqrt{\omega_\pi(p')\,\omega_n(p')}\, t^{cm}(\mathbf{p}', \mathbf{p}; \omega(p)) \sqrt{\omega_\pi(p)\,\omega_n(p)}, \quad (98)$$
$$\omega_\pi(p_\pi) + \omega_n(p_n) = \omega(p).$$

В работе [19] и во всех последующих работах [20—22], где рассматривался вопрос нахождения связи t-матрицы πN-рассеяния в системе ц. м. пион + ядро с t-матрицей в системе ц. м. пион + нуклон, предполагалось, что равенство (98) имеет место для t-матриц и вне энергетической поверхности. Как видно из изложенного выше, это предположение не оправдывается.

Обратим внимание на то, что если нуклон рассматривать в нерелятивистском пределе (что означает переход к пределу

$m/M \to 0$ при вычислении кинематических множителей), то функция $\Phi(p', p; P)$ вновь будет равна единице:

$$\Phi(p', p; P) \xrightarrow[\frac{m}{M}\to 0]{} 1. \tag{99}$$

Принимая во внимание, что в нерелятивистском пределе для полной энергии $\omega_i(p_i)$ имеем

$$\omega_i(p_i) \approx m_i + \mathbf{p}_i^2/2m_i \equiv m_i + E_i(p_i), \tag{100}$$

из (96) в нерелятивистском пределе по нуклону получим

$$\sqrt{\omega_\pi(p'_\pi)}\, t(\mathbf{p}'_\pi\mathbf{p}'_n, \ \mathbf{p}_\pi\mathbf{p}_n; \ \omega_\pi(p_\pi) + M + E_n(p_n))\sqrt{\omega_\pi(p_\pi)} = \\ = \sqrt{\omega_\pi(p')}\, t^{cm}(\mathbf{p}', \ \mathbf{p}; \ \omega_\pi(p) + M + E_n(p))\sqrt{\omega_\pi(p)}. \tag{101}$$

Если пион будем рассматривать в нерелятивистском пределе, то получим соотношение

$$t(\mathbf{p}'_\pi\mathbf{p}'_n, \ \mathbf{p}_\pi\mathbf{p}_n; \ E(p, P)) = t^{cm}(\mathbf{p}', \ \mathbf{p}; \ E_r(p)), \tag{102}$$

где

$$E(p, P) = \mathbf{P}^2/[2(m+M)] + \mathbf{p}^2/(2\mu_{\pi N}) \equiv E_c(P) + E_r(p), \tag{103}$$

которое выражает галилеева инвариантность t-матрицы и непосредственно следует из (51) и (76).

Связь между полностью внеэнергетическими матрицами πN-столкновения в произвольной системе и в системе ц. м. πN легко можно найти [23] из уравнения (76), если предположить, что πN-система не обладает связанными состояниями (следовательно, векторы состояния непрерывного спектра образуют полную систему), и использовать соотношение (92). В результате имеем

$$t(\mathbf{p}', \mathbf{p}; \ \omega, P) = F(p', \ p; \ P)\, t^{cm}(\mathbf{p}', \mathbf{p}; \ \omega(p)) + \\ + \int d\mathbf{p}'' F(p', \ p''; \ P)\, F(p'', \ p; \ P) \times \\ \times t^{cm}(\mathbf{p}', \mathbf{p}''; \ \omega(p''))\, t^{cm*}(\mathbf{p}, \mathbf{p}''; \ \omega(p'')) \times \\ \times \left[\frac{F^{-1}(k, p''; P)}{\omega(k) + i0 - \omega(p'')} - \frac{F^{-1}(p, p''; P)}{\omega(p) + i0 - \omega(p'')}\right], \tag{104}$$

где k определяется из $\omega(k) = \sqrt{\omega^2 - \mathbf{P}^2}$. Выражение (104) вместе с (94), (95) определяет искомую связь между t и t^{cm}. Заметим, что эта связь в работе [24] получена на основе иной формулировки РПТ, чем это предлагается Бакамджаном и Томасом [2], и имеет вид

$$\langle \mathbf{p}_n' \mathbf{p}_\pi' \mid t(\omega) \mid \mathbf{p}_\pi \mathbf{p}_n \rangle = [J(\mathbf{p}_\pi' \mathbf{p}_n';\ \mathbf{p}'\mathbf{P})\, J(\mathbf{p}_\pi \mathbf{p}_n;\ \mathbf{p}\mathbf{P})]^{-1/2} \times$$
$$\times \frac{\delta(\mathbf{p}'/\omega(p') - \mathbf{P}/\omega(p))}{[\omega(p')\,\omega(p)]^{3/2}} \frac{\omega(p,P)}{\omega(p)} t^{cm}\left(\mathbf{p}',\ \mathbf{p};\frac{\omega(p)}{\omega(p,P)}\omega\right). \qquad (105)$$

Следует подчеркнуть, что полностью на энергетической поверхности матрица (105) совпадает с матрицей, определенной формулами (94), (95), (104).

В работе [23] предлагается выражение (104) разложить по степеням $\mathbf{P}^2/(m+M)^2$. По нашему мнению, вместо такого разложения следует использовать разложение по k/M и (k — импульс нуклона в ядре), где это отношение действительно является малым, что, в свою очередь, является основным аргументом для использования в расчетах нерелятивистских волновых функций ядер.

3. ПРИБЛИЖЕНИЕ ФИКСИРОВАННЫХ ЦЕНТРОВ

Введем векторы состояния $|\mathbf{k}_0\rangle$ для свободного движения пиона с импульсом $\mathbf{k}_0$ (изоспин пиона из-за простоты не учитываем), которые определены равенствами:

$$\left.\begin{aligned} &h_\pi |\mathbf{k}_0\rangle = \omega_\pi(k_0)\,|\mathbf{k}_0\rangle, \\ &\int |\mathbf{k}_0\rangle\, d\mathbf{k}_0 \langle \mathbf{k}_0| = 1, \\ &\langle \mathbf{k}_0' | \mathbf{k}_0\rangle = \delta(\mathbf{k}_0' - \mathbf{k}_0). \end{aligned}\right\} \qquad (106)$$

Тогда на основе (4), (45) — (49) для оператора Грина будем иметь

$$G(E)\mathcal{A} = \sum_\alpha \int \frac{|\mathbf{k}''\mathbf{K}_A''\alpha\rangle\, d\mathbf{k}_0''\, d\mathbf{K}_A'' \langle \alpha \mathbf{K}_A'' \mathbf{k}_0''|}{\omega_\pi(k_0) + E_A(K_A) + i0 - \omega_\pi(k_0'') - E_A(K_A'') - \mathcal{E}_\alpha^*}. \qquad (107)$$

В этом выражении, пренебрегая энергией возбуждения ядра $\mathcal{E}_\alpha^*$, а также энергией отдачи ядра по сравнению с кинетической энергией падающего пиона, т. е. полагая

$$E_A(k_A'') - E_A(K_A) + \mathcal{E}_\alpha^* \ll \omega_\pi(k_0) - m \qquad (108)$$

и используя условия полноты (49) и (106), получаем

$$G(E)\mathcal{A} \approx G_\pi(\omega_\pi(k_0))\mathcal{A}, \qquad (109)$$

где

$$G_\pi(\omega_\pi(k_0)) = \int \frac{|\mathbf{k}_0''\rangle\, d\mathbf{k}_0'' \langle \mathbf{k}_0''|}{\omega_\pi(k_0) + i0 - \omega_\pi(k_0'')} = [\omega_\pi(k_0) + i0 - h_\pi]^{-1} \qquad (110)$$

— оператор Грина для свободного движения пиона.

В гильбертовом пространстве ядра введем базисные векторы $|\mathbf{r}_1 \ldots \mathbf{r}_A\rangle$ и $|\mathbf{k}_1 \ldots \mathbf{k}_A\rangle$ (соответственно для $\mathbf{r}$- и $\mathbf{p}$-представлений), удовлетворяющие соотношениям полноты и ортонормировки:

$$\left.\begin{aligned} &\int |\mathbf{r}_1 \ldots \mathbf{r}_A\rangle \prod_{i=1}^{A} d\mathbf{r}_i \langle \mathbf{r}_A \ldots \mathbf{r}_1| = 1; \\ &\langle \mathbf{r}'_1 \ldots \mathbf{r}'_A | \mathbf{r}_1 \ldots \mathbf{r}_A\rangle = \prod_{i=1}^{A} \delta(\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}_i). \end{aligned}\right\} \tag{111}$$

Аналогичные соотношения справедливы и для $|\mathbf{k}_1 \ldots \mathbf{k}_A\rangle$. Тогда в $\mathbf{r}$-представлении на основе (109), (110) получаем

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{r}'_A \ldots \mathbf{r}'_1 \mathbf{r}'_0 | G(E) \mathcal{A} | \mathbf{r}_0 \mathbf{r}_1 \ldots \mathbf{r}_A\rangle \approx \\ &\approx \prod_{i=1} \delta(\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}_i) \langle \mathbf{r}'_0 | G_\pi(\omega_\pi(k_0)) | \mathbf{r}_0\rangle \mathcal{A}. \end{aligned} \tag{112}$$

Предположим, что оператор $Av = \sum_i v_i$ в $\mathbf{r}$-представлении имеет вид

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{r}'_A \ldots \mathbf{r}'_1 \mathbf{r}'_0 | \sum_i v_i | \mathbf{r}_0 \mathbf{r}_1 \ldots \mathbf{r}_A\rangle = \\ &= \prod_i \delta(\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}_i) \sum_i \langle \mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}_i | v_i | \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i\rangle. \end{aligned} \tag{113}$$

Тогда, подставляя выражения (112), (113) в уравнение (5), легко проверить, что для T-матрицы справедливо приближенное равенство

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{r}'_A \ldots \mathbf{r}'_1 \mathbf{r}'_0 | T(E) | \mathbf{r}_0 \mathbf{r}_1 \ldots \mathbf{r}_A\rangle \approx \\ &\approx \prod_i \delta(\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}_i) \langle \mathbf{r}'_0 | T^{\text{фц}}(\omega_\pi(k_0);\ \mathbf{r}_1 \ldots \mathbf{r}_A) | \mathbf{r}_0\rangle, \end{aligned} \tag{114}$$

где $T^{\text{фц}}$ определяется из уравнения

$$\begin{aligned} T^{\text{фц}}(\omega_\pi(k_0); \mathbf{r}_1 \ldots \mathbf{r}_A) &= \sum_i \langle \mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}_i | v_i | \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i\rangle + \\ + \sum_i \int \langle \mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}_i | v_i | \mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}_i\rangle\, &d\mathbf{r}''_0 \langle \mathbf{r}''_0 | G_\pi(\omega_\pi(k_0)) \mathcal{A} | \mathbf{r}'''_0\rangle\, d\mathbf{r}'''_0 \times \\ &\times \langle \mathbf{r}'''_0 | T^{\text{фц}}(\omega_\pi(k_0));\ \mathbf{r}_1 \ldots \mathbf{r}_A | \mathbf{r}'''_0\rangle. \end{aligned} \tag{115}$$

Ясно, что $T^{\text{фц}}(\omega_\pi(k_0);\ \mathbf{r}_1 \ldots \mathbf{r}_A)$ представляет собой матрицу рассеяния пиона с импульсом $\mathbf{k}_0$ на фиксированных центрах $\mathbf{r}_1 \ldots \mathbf{r}_A$.

Обратим внимание на то, что выражение (113) для потенциала πA-взаимодействия является предельным случаем ($m/M \to 0$) галилеево-инвариантного выражения

$$\langle \mathbf{r}'_A \ldots \mathbf{r}'_1 \mathbf{r}'_0 | \sum_i v_i | \mathbf{r}_0 \mathbf{r}_1 \ldots \mathbf{r}_A \rangle = \sum_i \langle \mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}'_i | v_i | \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i \rangle \times$$
$$\times \delta \left[\frac{m\mathbf{r}'_0 + M\mathbf{r}'_i}{m+M} - \frac{m\mathbf{r}_0 + M\mathbf{r}_i}{m+M} \right] \prod_{j \neq i} \delta (\mathbf{r}'_j - \mathbf{r}_i). \qquad (116)$$

Так что потенциал (113) не является галилеево-инвариантным, хотя он трансляционно-инвариантен. Следовательно, t-матрица рассеяния не является галилеево-инвариантной в приближении фиксированных центров (ПФЦ). То обстоятельство, что галилеево-инвариантный двухчастичный потенциал (116) вместе с приближением (109) в общем случае не приводит к ПФЦ, отмечалось в работе [25]. Эффекты, связанные с нарушением галилеево-инвариантности в ПФЦ, исследовались в работе [26] для рассеяния протонов на дейтоне при энергиях $\sim$100 *Мэв*. Было показано, что эти эффекты играют заметную роль. Что же касается рассеяния пионов, то эффекты нарушения галилеево-инвариантности, насколько нам известно, никем еще не исследовались, и следует ожидать, что для пионов эти эффекты не будут большими из-за малости отношения $m/M \approx 1/7$.

Для выполнения соотношения (108), т. е. для справедливости ПФЦ, необходимо (но не достаточно), чтобы энергия отдачи частиц мишени (нуклонов) была бы много меньше энергии падающей частицы (пиона) [27]:

$$(\mathbf{k}'_0 - \mathbf{k}_0)^2/(2M) \ll \omega_\pi (k_0) - m, \qquad (117)$$

где $\mathbf{k}_0$ и $\mathbf{k}'_0$ — импульсы пиона до и после рассеяния.

Матрица упругого рассеяния пиона на ядре в ПФЦ определяется на основе соотношений (114), (115):

$$\langle 0\mathbf{K}'_A \mathbf{k}'_0 | T^{\text{фц}} (E) | \mathbf{k}_0 \mathbf{K}_A 0 \rangle = \int \langle 0\mathbf{K}'_A | \mathbf{r}_1 \ldots \mathbf{r}_A \rangle \times$$
$$\times \langle \mathbf{k}'_0 | T^{\text{фц}} (\omega_\pi (k_0);\ \mathbf{r}_1 \ldots \mathbf{r}_A) | \mathbf{k}_0 \rangle \prod_i d\mathbf{r}_i \langle \mathbf{r}_1 \ldots \mathbf{r}_A | \mathbf{K}_A 0 \rangle, \qquad (118)$$

где $T^{\text{фц}}$ удовлетворяет уравнению

$$\langle \mathbf{k}'_0 | T^{\text{фц}} (\omega_\pi;\ \mathbf{r}_1 \ldots \mathbf{r}_A) | \mathbf{k}_0 \rangle = \sum_i \langle \mathbf{k}'_0 | v_i (\mathbf{r}_i) | \mathbf{k}_0 \rangle +$$
$$+ \sum_i \langle \mathbf{k}'_0 | v_i (\mathbf{r}_i) | \mathbf{k}''_0 \rangle \frac{dk''_0 a}{\omega_\pi + i0 - \omega_\pi (k''_0)} \langle \mathbf{k}_0 | T^{\text{фц}} (\omega_\pi;\ \mathbf{r}_1 \ldots \mathbf{r}_A) | \mathbf{k}_0 \rangle; \qquad (119)$$

$$\langle \mathbf{k}'_0 | v_i (\mathbf{r}_i) | \mathbf{k}_0 \rangle = \exp (-i\mathbf{k}'_0 \mathbf{r}_i) \langle \mathbf{k}'_0 | v_i | \mathbf{k}_0 \rangle \exp (i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}_i). \qquad (120)$$

Вводя радиус-вектор $\mathbf{R}_A$ центра масс ядра и радиус-вектор нуклонов $\mathbf{r}_i^0$ относительно $\mathbf{R}_A$:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i^0 + \mathbf{R}_A; \quad \mathbf{R}_A = \sum_i \mathbf{r}_i/A;$$
$$\sum_i \mathbf{r}_i^0 = 0 \tag{121}$$

и используя очевидное равенство

$$\prod_i d\mathbf{r}_i = \delta\left(\sum_i \mathbf{r}_i^0\right) d\mathbf{R}_A \prod_i d\mathbf{r}_i^0, \tag{122}$$

из (118) можно получить

$$\langle 0\mathbf{K}_A'\mathbf{k}_0' \mid T^{\text{пфц}}(E) \mid \mathbf{k}_0\mathbf{K}_A 0\rangle =$$
$$= \delta(\mathbf{K}_A' + \mathbf{k}_0' - \mathbf{K}_A - \mathbf{k}_0)\, T_{00}^{\text{пфц}}(\mathbf{k}_0', \mathbf{k}_0; \omega_\pi(k_0)), \tag{123}$$

где

$$T_{00}^{\text{пфц}}(\mathbf{k}_0', \mathbf{k}_0; \omega_\pi(k_0)) =$$
$$= \int \rho_{00}(\mathbf{r}_1^0 \ldots \mathbf{r}_A^0)\, \delta\left(\sum_i \mathbf{r}_i^0\right) \times$$
$$\times \prod_i d\mathbf{r}_i^0 \langle \mathbf{k}_0' \mid T^{\text{фц}}(\omega_\pi(k_0);\ \mathbf{r}_1^0 \ldots \mathbf{r}_A^0) \mid \mathbf{k}_0\rangle; \tag{124}$$

$$\rho_{00}(\mathbf{r}_1^0 \ldots \mathbf{r}_A^0) = \langle 0 \mid \mathbf{r}_1^0 \ldots \mathbf{r}_A^0\rangle \langle \mathbf{r}_1^0 \ldots \mathbf{r}_A^0 \mid 0\rangle. \tag{125}$$

Здесь $\langle \mathbf{r}_1^0 \ldots \mathbf{r}_A^0 \mid 0\rangle$ — волновая функция внутреннего движения ядра в основном состоянии; ρ_{00} — соответствующая плотность, а $T^{\text{фц}}(\omega_\pi;\ \mathbf{r}_1^0 \ldots \mathbf{r}_A^0)$ удовлетворяет операторному уравнению

$$T^{\text{фц}}(\omega_\pi;\ \mathbf{r}_1^0 \ldots \mathbf{r}_A^0) = \sum_i v_i(\mathbf{r}_i^0) +$$
$$+ \sum_i v_i(\mathbf{r}_i^0)\, G_\pi(\omega_\pi)\, \mathcal{A} T^{\text{фц}}(\omega_\pi;\ \mathbf{r}_1^0 \ldots \mathbf{r}_A^0), \tag{126}$$

где $v_i(\mathbf{r}_i^0)$ определен равенством

$$\langle \mathbf{k}_0' \mid v_i(\mathbf{r}_i^0) \mid \mathbf{k}_0\rangle = \exp(-i\mathbf{k}_0'\mathbf{r}_i^0) \langle \mathbf{k}_0' \mid v_i \mid \mathbf{k}_0\rangle \exp(i\mathbf{k}_0\mathbf{r}_i^0). \tag{127}$$

Введем оператор $\tau_i(\omega_\pi;\ \mathbf{r}_i^0)$, удовлетворяющий уравнению

$$\tau_i(\omega_\pi;\ \mathbf{r}_i^0) = v_i(\mathbf{r}_i^0) + v_i(\mathbf{r}_i^0)\, G_\pi(\omega_\pi)\, \mathcal{A} \tau_i(\omega_\pi;\ \mathbf{r}_i^0). \tag{128}$$

Уравнения (126) и (128) аналогичны уравнениям (2) и (38) соответственно, и поэтому по аналогии (41) сразу можно написать

$$T^{\text{фц}}(\omega_\pi;\ \mathbf{r}_1^0 \ldots \mathbf{r}_A^0) = \sum_i \tau_i(\omega_\pi;\ \mathbf{r}_i^0) +$$
$$+ \sum_i \sum_{j \neq i} \tau_i(\omega_\pi; \mathbf{r}_i^0)\, G_\pi(\omega_\pi)\, \mathcal{A}\tau_j(\omega_\pi;\ \mathbf{r}_j^0) +$$
$$+ \sum_i \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq j} \tau_i(\omega_\pi;\ \mathbf{r}_i^0)\, G_\pi(\omega_\pi)\, \mathcal{A}\tau_j(\omega_\pi;\ \mathbf{r}_j^0) \times$$
$$\times G_\pi(\omega_\pi)\, \mathcal{A}\tau_k(\omega_\pi;\ \mathbf{r}_k^0) + \ldots \tag{129}$$

Легко видеть, что

$$\langle \mathbf{k}_0' \mid \tau_i(\omega_\pi;\ \mathbf{r}_i^0) \mid \mathbf{k}_0 \rangle = \exp(-i\mathbf{k}_0'\mathbf{r}_i^0)\, \langle \mathbf{k}_0' \mid t_i(\omega_\pi) \mid \mathbf{k}_0 \rangle \exp(-i\mathbf{k}_0\mathbf{r}_i^0), \tag{130}$$

где

$$\langle \mathbf{k}_0' \mid t_i(\omega_\pi) \mid \mathbf{k}_0 \rangle = \langle \mathbf{k}_0' \mid v_i \mid \mathbf{k}_0 \rangle + \int \frac{\langle \mathbf{k}_0' \mid v_i \mid \mathbf{k}_0'' \rangle\, d\mathbf{k}_0''\, \langle \mathbf{k}_0'' \mid t_i(\omega_\pi) \mid \mathbf{k}_0 \rangle}{\omega_\pi + i0 - \omega_\pi(k_0'')}. \tag{131}$$

Из вывода выражения (129) видно, что его можно было бы получить непосредственно из (41) и (36), используя приближение полноты (109). Без нарушения общности в формулах (126), (127) можно опустить оператор $\mathcal{A}$.

Рассмотрим случай, когда потенциал πA-взаимодействия является локальным, т. е. когда

$$\langle \mathbf{r}_A' \ldots \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_0' \mid \sum_i v_i \mid \mathbf{r}_0\mathbf{r}_1 \ldots \mathbf{r}_A \rangle =$$
$$= \prod_i \delta(\mathbf{r}_i' - \mathbf{r}_i) \sum_i \delta(\mathbf{r}_0' - \mathbf{r}_0)\, v_i(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i). \tag{132}$$

Это выражение не только трансляционно-инвариантно, но и галилеево-инвариантно, так как оно является частным случаем выражения (116), когда $\langle \mathbf{r}_0' - \mathbf{r}_i \mid v_i \mid \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i \rangle = \delta(\mathbf{r}_0' - \mathbf{r}_0)\, v_i(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i)$. Вводя новые переменные

$$\mathbf{R} = (m\mathbf{r}_0 + MA\mathbf{R}_A)/(m + MA);$$
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{R}_A \tag{133}$$

и учитывая соотношение (121), потенциал (132) можно представить в виде

$$\langle \mathbf{r}_A' \ldots \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_0' \mid \sum_i v_i \mid \mathbf{r}_0\mathbf{r}_1 \ldots \mathbf{r}_A \rangle =$$
$$= \delta(\mathbf{R}' - \mathbf{R})\, \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \prod_i \delta(\mathbf{r}_i^{0\prime} - \mathbf{r}_i^0) \sum_i v_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i^0). \tag{134}$$

Заметим, что в выражении (116) $\mathbf{r}_0' \neq \mathbf{r}_0$ и поэтому $\mathbf{R}' \neq \mathbf{R}$, как это имеет место в выражении (134). Вследствие этого результаты, полученные ниже на основе (134), не будут справедливыми для нелокального потенциала (116).

Если воспользоваться нерелятивистской кинематикой, то выражение (107) для оператора Грина можно привести к виду

$$G(E)\mathcal{A}=\sum_{\alpha}\int\frac{|\mathbf{k}''\mathbf{K}''\rangle\,d\mathbf{k}''\,d\mathbf{K}''\,\langle\mathbf{K}''\mathbf{k}''|}{E(k)+\mathrm{i}0-E(k'')-\mathcal{E}_{\alpha}^{*}}\,|\alpha\rangle\langle\alpha|, \tag{135}$$

где

$$\mathbf{k}=(MA\mathbf{k}_0-m\mathbf{K}_A)/(m+MA);\quad \mathbf{K}=\mathbf{k}_0+\mathbf{K}_A; \tag{136}$$

$$E(k)=\mathbf{k}^2/(2M_{\pi A});\quad \mu_{\pi A}=mMA/(m+MA). \tag{137}$$

Если в выражении (135) пренебречь энергией возбуждения внутренних состояний ядра $\mathcal{E}_{\alpha}^{*}$ по сравнению с энергией относительного движения пион + ядро, т. е. если положить

$$\mathcal{E}_{\alpha}^{*}\ll E(k), \tag{138}$$

то с учетом условий полноты (49), из (135) получим

$$G(E)\mathcal{A}\approx G_{\pi}(E(k))\,\mathcal{A}, \tag{139}$$

где

$$G_{\pi}(E(k))=\int\frac{|\mathbf{k}''\rangle\,d\mathbf{k}''\,\langle\mathbf{k}''|}{E(k)+i0-E(k'')}=[E(k)+\mathrm{i}0-\mathcal{K}_r]^{-1}. \tag{140}$$

Здесь $\mathcal{K}_r$ — оператор кинетической энергии относительно движения пиона и ядра. Следовательно, в этом случае имеем

$$\langle\mathbf{r}_A'\ldots\mathbf{r}_1'\mathbf{r}_0'\,|\,G(E)\mathcal{A}\,|\,\mathbf{r}_0\mathbf{r}_1\ldots\mathbf{r}_A\rangle\approx$$
$$\approx\delta(\mathbf{R}'-\mathbf{R})\prod_i\delta(\mathbf{r}_i^{0\prime}-\mathbf{r}_i^{0})\,\langle\mathbf{r}'\,|\,G_{\pi}(E(k))\,|\,\mathbf{r}\rangle\,\mathcal{A}. \tag{141}$$

В этом приближении с учетом выражения (140) легко видеть, что решение уравнения (5) имеет вид

$$\langle\mathbf{r}_A'\ldots\mathbf{r}_1'\mathbf{r}_0'\,|\,T(E)\,|\,\mathbf{r}_0\mathbf{r}_1\ldots\mathbf{r}_A\rangle\approx$$
$$\approx\delta(\mathbf{R}'-\mathbf{R})\prod_i\delta(\mathbf{r}_i^{0\prime}-\mathbf{r}_i^{0})\,\langle\mathbf{r}'\,|\,T^{\text{фц}}(E(k);\ \mathbf{r}_1^0\ldots\mathbf{r}_A^0)\,|\,\mathbf{r}\rangle, \tag{142}$$

где $T^{\text{фц}}(E(k);\ \mathbf{r}_1^0\ldots\mathbf{r}_A^0)$ — матрица рассеяния пиона с импульсом $\mathbf{k}$ на фиксированных центрах $\mathbf{r}_1^0\ldots\mathbf{r}_A^0$, для которой справедливы соотношения (123) — (125), (129), где $\omega_{\pi}(k_0)$ следует заменить на $E(k)$.

Таким образом, если взаимодействие падающего пиона с ядром является локальным, то сведение задачи πA-рассеяния к задаче рассеяния на фиксированных центрах не налагает ограничения на энергию отдачи ядра, т. е. достаточно требовать пренебрежения энергией возбуждения внутреннего состояния ядра в функции Грина. При этом нет нарушения галилеево-инвариантности, как это имеет место при нелокальном взаимодействии.

Существует три случая, когда задачу рассеяния пиона (вообще произвольной частицы) на ядре в ПФЦ можно решить в замкнутом виде: 1) когда для матрицы πN-столкновения используется эйкональное приближение; 2) когда πN-взаимодействие является сепарабельным и 3) когда потенциалы взаимодействия пиона с разными нуклонами ядра не перекрываются. Первый случай соответствует глауберовой [28] теории многократного рассеяния (по этому поводу см. также обзор [29]). Вопрос получения выражения для матрицы πA-рассеяния в теории Глаубера из ватсоновского ряда (41) в рамках потенциальной (локальной) модели взаимодействия рассматривался в ряде работ [30—33]. В работах [30, 31] этот вопрос исследовался на примере дейтона, а в работах [32, 33] — в общем случае для любого ядра. Элегантный, на наш взгляд, вывод глауберовой амплитуды дан в работе [33], где к тому же доказывается одно важное обстоятельство. Чтобы получить глауберов результат при суммировании ряда (129), необходимо учитывать и члены, соответствующие πN-рассеянию назад [например, члены с $k = j$ в третьем члене ряда (129)]. Таким образом, показывается некорректность утверждения о том, что теория Глаубера в элементарном акте учитывает только рассеяние вперед.

Решение задачи рассеяния в ПФЦ для сепарабельного потенциала рассматривалось в работе [27], а для неперекрывающихся потенциалов — в [34, 35]. Эти решения можно непосредственно получить суммированием ряда (129) для T-матрицы в ПФЦ. Для сепарабельного потенциала воспользуемся выражениями (53), (56). Опуская спин-изоспиновую зависимость, находим

$$\langle \mathbf{k}' \mid v \mid \mathbf{k}\rangle = 4\pi \sum_{lm_l} \lambda_l v^*_{lm_l}(\mathbf{k}')\, v_{lm_l}(\mathbf{k}); \tag{143}$$

$$\langle \mathbf{k}' \mid t(\omega_\pi(k_0)) \mid \mathbf{k}\rangle = 4\pi \sum_{lm_l} v^*_{lm_l}(\mathbf{k}')\, D_l^{-1}(\omega_\pi(k_0))\, v_{lm_l}(\mathbf{k}), \tag{144}$$

где

$$v_{lm_l}(\mathbf{k}) = v_l(k)\langle \hat{\mathbf{k}} \mid lm_l\rangle; \quad \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k; \quad D_l(\omega_\pi(k_0)) = \lambda_l^{-1} - \tag{145}$$

$$-4\pi \int \frac{v^*_{lm_l}(\mathbf{k})\, v_{lm_l}(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}}{\omega_\pi(k_0) + i0 - \omega_\pi(k)} = -\frac{v_l^2(k_0)\,\mu_{\pi N}(2\pi)^2}{4\pi A_l(k_0)}. \tag{146}$$

Введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned} &e_i' v_{l'm_{l'}} \equiv \exp(i\mathbf{k}'\mathbf{r}_i^0)\, v_{l'm_{l'}}(\mathbf{k}'); \\ &v_{lm_l} e_j \equiv v_{lm_l}(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_j^0); \\ &V_{lm_l} e_j \equiv D_l^{-1}(\omega_\pi)\, v_{lm_l} e_j. \end{aligned}\right\} \tag{147}$$

Тогда на основе формулы (130) получим

$$\langle \mathbf{k}' \mid \tau_i(\omega_\pi;\ \mathbf{r}_i^0) \mid \mathbf{k}\rangle = \\ = \sum_{l'm_{l'}} \sum_{lm_l} (e_i' v_{l'm_{l'}}')^* \delta_{l'l} \delta_{m_{l'}m_l} D_l^{-1}(\omega_\pi)(v_{lm_l} e_i). \tag{148}$$

Далее, для функции Грина пиона (110) имеем выражение

$$\langle \mathbf{k}' \mid G_\pi(\omega_\pi) \mid \mathbf{k}\rangle = \delta(\mathbf{k}'-\mathbf{k})/[\omega_\pi + i0 - \omega_\pi(k)] \equiv \\ \equiv \delta(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\, G_\pi(\omega_\pi;\ k). \tag{149}$$

Введем величины

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{G}^{ij}_{l'm_{l'};\ lm_l} = -D_l^{-1}(\omega_\pi(k_0))\, G^{ij}_{l'm_{l'};\ lm_l}(\omega_\pi(k_0))\, \mathcal{A}; \\ &\mathcal{G}^{i=j}_{l'm_{l'};\ lm_l} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{150}$$

где

$$G^{ij}_{l'm_{l'};\ lm_l}(\omega_\pi) = \int (e_i v_{l'm_{l'}})\, G_\pi(\omega_\pi;\ k)\, (e_j v_{lm_l})^*\, d\mathbf{k}. \tag{151}$$

в частном случае, когда $i=j$, имеем

$$G^{i=j}_{l'm_{l'};\ lm_l}(\omega_\pi) = \delta_{l'l}\delta_{m_{l'}m_l} 4\pi \int v_l^2(k)\, k^2\, dk/[\omega_\pi + \mathrm{i}0 - \omega_\pi(k)]. \tag{152}$$

Эти величины образуют $(2l'+1)A \times (2l+1)A$ матрицу $\mathcal{G}$. В этих обозначениях ряд (129) можно представить в виде

$$\langle \mathbf{k}' \mid T^{\text{фц}}(\omega_\pi;\ \mathbf{r}_1^0 \ldots \mathbf{r}_A^0) \mid \mathbf{k}\rangle = \\ = \sum_{il'm_{l'}lm_l} (e_i' v_{l'm_{l'}})^* \delta_{l'l}\delta_{m_{l'}m_l}(e_i v_l m_l) + \\ + \sum_{il'm_{l'}jlm_l} (e_i' v_{l'm_{l'}}')^* \mathcal{G}^{ij}_{l'm_{l'};\ lm_l} e_j V_{lm_l} + \\ + \sum_{il'm_{l'}jl''m_{l''}k} (e_i' v_{l'm_{l'}}')^* \mathcal{G}^{ij}_{l'm_{l'};\ l''m_{l''}} \mathcal{G}^{jk}_{l''m_{l''};\ lm_l} + \ldots \tag{153}$$

Совокупность величины $e_i v_{lm_l}$ $(e_i V_{lm_l})$ представим в виде столбца, элементы которого нумеруются индексами $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, A$; $-l \leqslant m_l \leqslant l$, $l = 1, 2, \ldots$ Эту совокупность обозначим соответственно $(\underline{ev})$ и $(\underline{Ve})$. Тогда совокупность величин $(e_i v_{lml})$ следует представить в виде строки $(\underline{ev})^+$. В новых обозначениях ряд (153) примет вид [27]

$$\langle \mathbf{k}' \mid T^{\text{фц}}(\omega_\pi;\ \mathbf{r}_1^0 \ldots \mathbf{r}_A^0) \mid \mathbf{k}\rangle = (\underline{e'v'})^+ [1 - \mathcal{G} + \mathcal{G}\mathcal{G} - \ldots] (\underline{Ve}); \tag{154}$$

$$\langle \mathbf{k}' \mid T^{\text{фц}}(\omega_\pi;\ \mathbf{r}_1^0 \ldots \mathbf{r}_A^0) \mid \mathbf{k}\rangle = (\underline{e'v'})^+ [1 + \mathcal{G}]^{-1} (\underline{Ve}). \tag{155}$$

Таким образом, задача нахождения матрицы рассеяния частицы (в нашем случае пиона) на ядре в ПФЦ в модели сепарабельного взаимодействия сводится к построению матрицы $\mathcal{G}$ и к обращению матрицы $1+\mathcal{G}$. Из определения видно, что матрица $\mathcal{G}$ зависит от координат нуклонов ядра $\mathbf{r}_1^0 \ldots \mathbf{r}_A^0$ как параметров, по которым выражение (155) следует усреднить по волновой функции ядра согласно (124). Решение задачи в таком виде крайне затруднительно даже для простейшего ядра — дейтона. С увеличением массового числа ядра A размерность матрицы $\mathcal{G}$ быстро растет и, следовательно, увеличиваются трудности решения задачи. Это является одной из основных причин того, что (155), насколько нам известно, никем не использовалась для ядер с $A \geqslant 3$. Естественно, возникает вопрос, можно ли для конкретных расчетов использовать итерационное разложение (154). Этот вопрос исследовался в [36] на примере рассеяния пиона на дейтоне в области (3.3)-резонанса, и было показано, что при физически разумных значениях параметров (в частности, радиуса отталкивающего корра NN-взаимодействия) ряд (154) не сходится, хотя выражение (155) существует.

Рассмотрим теперь решение задачи рассеяния в ПФЦ для неперекрывающихся потенциалов. Предположим, что потенциал v_i является нелокальным, с ограниченным радиусом действия (d_i) и с центром в точке $\mathbf{r}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, A$). Ясно, что два потенциала v_i и v_j не будут перекрываться, если

$$\langle \mathbf{r}_0' - \mathbf{r}_i \mid v_i \mid \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i \rangle \neq 0$$

при

$$\left.\begin{aligned} &| \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i | < d_i; \quad | \mathbf{r}_0' - \mathbf{r}_i | < d_i; \\ &r_{ij} = | \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j | = | \mathbf{r}_i^0 - \mathbf{r}_j^0 | \geqslant d_i + d_j. \end{aligned}\right\} \tag{156}$$

Покажем, что в этом случае ряд (129) можно просуммировать в замкнутом виде. Для этого напишем функцию Грина пиона (110) в координатном представлении:

$$\langle \mathbf{r}_0' \mid G_\pi (\omega_\pi (k_0)) \mid \mathbf{r}_0 \rangle = -\frac{2\omega_\pi (k_0)}{4\pi} \frac{\exp [ik_0 \mid \mathbf{r}_0' - \mathbf{r}_0 \mid]}{\mid \mathbf{r}_0' - \mathbf{r}_0 \mid}. \tag{157}$$

Введем новые переменные

$$\boldsymbol{\rho}_i' = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i^0; \quad \boldsymbol{\rho}_j = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_j^0, \tag{158}$$

которые в соответствии с определением потенциала (156) удовлетворяют условиям

$$\rho_i' \leqslant d_i; \quad \rho_j \leqslant d_j; \quad | \boldsymbol{\rho}_i' - \boldsymbol{\rho}_j | < r_{ij}. \tag{159}$$

Тогда выражение (157) можно представить в виде

$$\langle \mathbf{r}_0' \mid G_\pi(\omega_\pi(k_0)) \mid \mathbf{r}_0 \rangle = -\frac{2\omega_\pi(k_0)}{4\pi} \frac{\exp[ik_0 \mid (\boldsymbol{\rho}_i' - \boldsymbol{\rho}_j) - \mathbf{r}_{ij} \mid]}{\mid (\boldsymbol{\rho}_i' - \boldsymbol{\rho}_j) - \mathbf{r}_{ij} \mid} =$$

$$= -2\omega_\pi(k_0) \sum_{l_0 m_{l_0}} k_0 j_{l_0}(k_0 \mid \boldsymbol{\rho}_i' - \boldsymbol{\rho}_j \mid) h_{l_0}^{(+)}(k_0 r_{ij}) \times$$

$$\times \langle \widehat{\boldsymbol{\rho}_i' - \boldsymbol{\rho}_j} \mid l_0 m_{l_0} \rangle \langle l_0 m_{l_0} \mid \hat{\mathbf{r}}_{ij} \rangle, \tag{160}$$

где $j_l(x)$ и $h_l^{(+)}(x)$ — известные сферические функции Бесселя и Ханкеля соответственно. Определяя

$$j_{l_0}(k_0 \mid \boldsymbol{\rho}_i' - \boldsymbol{\rho}_j \mid) \langle \boldsymbol{\rho}_i' - \rho_j \mid l_0 m_{l_0} \rangle$$

из разложения плоской волны

$$\sum_{l_0 m_{l_0}} i^{l_0} \sqrt{\frac{2}{\pi}} j_{l_0}(k_0 \mid \boldsymbol{\rho}_i' - \boldsymbol{\rho}_j \mid) \langle \widehat{\boldsymbol{\rho}_i' - \boldsymbol{\rho}_j} \mid l_0 m_{l_0} \rangle \langle l_0 m l_0 \mid \hat{\mathbf{k}}_0 \rangle =$$

$$= \langle \boldsymbol{\rho}_i' - \boldsymbol{\rho}_j \mid \mathbf{k}_0 \rangle = (2\pi)^{3/2} \langle \boldsymbol{\rho}_i' \mid \mathbf{k}_0 \rangle \langle \mathbf{k}_0 \mid \boldsymbol{\rho}_j \rangle =$$

$$= \sum_{l' m_{l'}} i^{l'} \sqrt{\frac{2}{\pi}} j_{l'}(\rho_i' k_0) \langle \hat{\boldsymbol{\rho}}_i' \mid l' m_{l'} \rangle \langle l' m_{l'} \mid \hat{\mathbf{k}}_0 \rangle \times$$

$$\times \sum_{l m_l} i^l \sqrt{\frac{2}{\pi}} j_l(\rho_j k_0) \langle \hat{\mathbf{k}}_0 \mid l m_l \rangle \langle l m_l \mid \hat{\boldsymbol{\rho}}_j \rangle, \tag{161}$$

выражение (160) можно привести к виду

$$\langle \mathbf{r}_0' \mid G_\pi(\omega_\pi(k)) \mid \mathbf{r}_0 \rangle \equiv \langle \boldsymbol{\rho}_i' \mid G_\pi(\omega_\pi(k_0);\ \mathbf{r}_{ij}) \mid \boldsymbol{\rho}_j \rangle =$$

$$= -\frac{\omega_\pi(k_0) k_0}{2\pi} \sum_{l' m_{l'} l m_l} i^{l'-l} j_{l'}(k_0 \rho_i') j_l(k_0 \rho_j) \times$$

$$\times \langle \hat{\boldsymbol{\rho}}_i' \mid l' m_{l'} \rangle \langle l m_l \mid \hat{\boldsymbol{\rho}}_j \rangle F^{ij}_{l' m_{l'};\, l m_l}(k_0;\ \mathbf{r}_{ij}), \tag{162}$$

где

$$F^{ij}_{l' m_{l'};\, l m_l}(k_0;\ \mathbf{r}_{ij}) = \sum_{l_0 m_{l_0}} \sqrt{4\pi(2l'+1)(2l+1)} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} l' & l & l_0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l' & l & l_0 \\ -m_{l'} & m_l & -m_{l_0} \end{pmatrix} (-)^{m_{l'}+m_{l_0}} \times$$

$$\times \langle \hat{\mathbf{r}}_{ij} \mid l_0 m_{l_0} \rangle h_{l_0}^{(+)}(k_0 r_{ij}). \tag{163}$$

На основе (130) и (144), (145) имеем

$$\langle \mathbf{k}_0' \mid \tau_i(\omega_\pi(k_0);\ \mathbf{r}_i^0) \mid \mathbf{k}_0\rangle = \exp(-i\mathbf{k}_0'\mathbf{r}_i^0) \times$$
$$\times [4\pi \sum_{lm_l} \langle k_0' \mid t_l^i(\omega_\pi(k_0)) \mid k_0\rangle \langle \hat{\mathbf{k}}_0' \mid lm_l\rangle \langle lm_l \mid \hat{\mathbf{k}}_0\rangle] \exp(i\mathbf{k}_0\mathbf{r}_i^0), \tag{164}$$

где

$$\langle k_0' \mid t_l^i(\omega_\pi(k_0)) \mid k_0\rangle = v_l(k_0') v_l(k_0)/D_l(\omega_\pi(k_0)). \tag{165}$$

Используя (162) и (164), легко можно показать, что

$$\langle \mathbf{k}_0' \mid \tau_i(\omega_\pi(k_0);\ \mathbf{r}_i^0) G_\pi(\omega_\pi(k_0)) \mathscr{A}\tau_i(\omega_\pi(k_0);\ \mathbf{r}_j^0) \mid \mathbf{k}_0\rangle =$$
$$= \exp(-i\mathbf{k}_0'\mathbf{r}_i^0) [4\pi \sum_{l'lm_{l'}m_l} \langle k_0' \mid t_{l'}^i(\omega_\pi(k_0)) \mid k_0\rangle \times$$
$$\times k_0 F^{ij}_{l'm_{l'};\ lm_l}(k_0;\ \mathbf{r}_{ij}) \mathscr{A} \langle k_0 \mid f_l^j(\omega_\pi(k_0)) \mid k_0\rangle \langle \hat{\mathbf{k}}_0' \mid l'm_{l'}\rangle \times$$
$$\times \langle l'm_{l'} \mid \hat{\mathbf{k}}_0\rangle \exp(i\mathbf{k}_0\mathbf{r}_j^0), \tag{166}$$

где

$$f_l(\omega) = -(2\pi)^2 \omega t_l(\omega). \tag{167}$$

Совершенно аналогично можно получить

$$\langle \mathbf{k}_0' \mid \tau_i(\omega_\pi(k_0);\ \mathbf{r}_i^0) G_\pi(\omega_\pi(k_0)) \times$$
$$\times \mathscr{A}\tau_i(\omega_\pi(k_0);\ \mathbf{r}_j^0) G_\pi(\omega_\pi(k_0)) \mathscr{A}\tau_k(\omega_\pi(k_0);\ \mathbf{r}_k^0) \mid \mathbf{k}_0\rangle =$$
$$= \exp(-i\mathbf{k}_0'\mathbf{r}_i^0) [4\pi \sum_{l'l''lm_{l'}m_{l''}m_l} \langle k_0' \mid t_{l'}^i(\omega_\pi(k_0)) \mid k_0\rangle \times$$
$$\times k_0 F^{ij}_{l'm_{l'};\ l''m_{l''}}(k_0;\ \mathbf{r}_i) \mathscr{A} \langle k_0 \mid f_{l''}^j(\omega_\pi(k_0)) \mid k_0\rangle \times$$
$$\times k_0 F^{jk}_{l''m_{l''};\ lm_l}(k_0,\ \mathbf{r}_{jk}^0) \mathscr{A} \langle k_0 \mid f_l^k(\omega_\pi(k_0)) \mid k_0\rangle \times$$
$$\times \langle \hat{\mathbf{k}}_0' \mid l'm_{l'}\rangle \langle lm_l \mid \hat{\mathbf{k}}_0\rangle \exp(i\mathbf{k}_0\mathbf{r}_k^0). \tag{168}$$

Из (164), (166), (168) видна структура произвольного члена ряда (129). Важно подчеркнуть, что при $k_0' = k_0$ каждый член этого ряда зависит от t-матрицы πN-рассеяния на энергетической поверхности. Это является следствием использования выражений (162), (163) функций Грина, которые, в свою очередь, связаны с выбором потенциала (156). Утверждение о том, что для неперекрывающихся потенциалов взаимодействия падающей частицы с разными нуклонами ядра амплитуда упругого рассеяния частицы на ядре зависит от t-матрицы рассеяния частицы на нуклоне только на энергетической поверхности, впервые было сформулировано в [37] и называется теоремой Бега. Доказательство этой теоремы приводится также в [27, 34, 35, 38].

Введем матрицу F, элементы которой $F^{ij}_{l'm_l';\ lm_l}(k_0;\ \mathbf{r}_{ij})$ нумеруются индексами $i = 1, 2, \ldots, A$; $-l \leqslant m_l \leqslant l = 1, 2, \ldots$

При этом потребуем, чтобы $F^{ii}=0$. В этом представлении ясно, что

$$f_l^j(\omega_\pi(k_0)) \equiv \langle k_0 \mid f_l^j(\omega_\pi(k_0)) \mid k_0\rangle = \exp[i\delta_l^j(k_0)]\sin\delta_l^j(k_0)/k_0 \quad (169)$$

будут элементами диагональной матрицы f. Теперь, если ввести столбец $C(\mathbf{k}_0)$ с элементами $\langle lm_l \mid \hat{\mathbf{k}}_0\rangle \times \exp(i\,\mathbf{k}_0\,\mathbf{r}_i^0)$, то на основе формул (164), (166), (168) и (129) можем написать [34]:

$$\langle \mathbf{k}_0' \mid T^{\text{фц}}(\omega_\pi(k_0);\ \mathbf{r}_1^0 \ldots \mathbf{r}_A^0) \mid \mathbf{k}\rangle =$$

$$=\begin{cases} C^+(\mathbf{k}_0')\,f\,[1+k_0F\mathcal{A}f+k_0F\mathcal{A}fk_0F\mathcal{A}f+\ldots]\,C(\mathbf{k}_0); & (170)\\ C^+(\mathbf{k}_0')\,f\,[1-k_0F\mathcal{A}f]^{-1}\,C(\mathbf{k}_0). & (171)\end{cases}$$

Таким образом, задача нахождения матрицы рассеяния пиона на ядре в ПФЦ для неперекрывающих потенциалов свелась к построению матрицы F, размерность которой зависит от количества парциальных волн, определяющих πN-взаимодействие, и от массового числа ядра. Далее нужно обратить матрицу $[1-k_0F\mathcal{A}f]$, которая зависит от координат нуклонов $\mathbf{r}_i^0$, как от параметров, а потом (171) следует усреднить по волновой функции основного состояния ядра согласно (124). Ясно, что трудности, связанные с практической реализацией схемы расчета матрицы πA-рассеяния на основе (171), такого же порядка, что и трудности, связанные с использованием (155). Отметим, что при получении (170), (171) на потенциал πN-взаимодействия накладывается меньше ограничений, чем это делается при получении (154), (155). Первое выражение (170), (171) получено без конкретизации вида потенциала и ограничение налагается лишь на радиус πN-взаимодействия $r_{\pi N}$, а именно, $2r_{\pi N}$ должно быть много меньше, чем среднее расстояние r_0 между нуклонами в ядре. Принимая во внимание, что $r_{\pi N}\approx 0{,}5$ *ферми*, а $r_0\approx 1{,}2$ *ферми*, можно заключить, что от использования (170), (171) не следует ожидать хороших количественных результатов. Это и подтверждается расчетами [38], выполненными для рассеяния пиона на ядре ^{4}He в области (3.3)-резонанса, когда в разложении (170) учитывались первые два члена.

Заметим, что вопрос сходимости итерационного ряда (170), насколько нам известно, никем не исследовался. Но, по нашему мнению, для (170) следует ожидать того же результата, что и для ряда (154), так как сходимость ряда (129) не должна существенно зависеть от модели, в которой рассчитывается матрица $\tau_i(\omega_\pi)$. Плохая сходимость ряда (129), по-видимому, связана с приближениями, в которых он получен.

4. ОПТИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Экспериментальные и теоретические исследования рассеяния пионов на ядрах в настоящее время ведутся преимущественно в области энергий (3.3)-резонанса. Большой интерес к этой области вызван надеждой получить сведения о поведении Δ-резонанса в ядерном веществе и, в частности, надеждой выяснить вопрос о том, какую роль играет Δ-резонанс в определении различных свойств ядра, т. е. в какой степени динамика ядра определяется Δ-резонансом, являющимся одним из проявлений мезонных степеней свободы ядра.

В ПФЦ для рассеяния пионов на ядрах в области (3.3)-резонанса исключено образование и распространение Δ-резонанса в ядре. Это легко видеть из выражения (130) для матрицы столкновения пиона с нуклоном в ядре, которое соответствует рассеянию пиона на фиксированном в точке $\mathbf{r}_i^0$ нуклоне. На этот аспект, связанный с использованием ПФЦ, было обращено внимание в [41]. Простая оценка длины свободного пробега Δ-резонанса показывает, что ее значение порядка 1 *ферми* и сравнимо со средним межнуклонным расстоянием в ядре. Отсюда следует, что образование и распространение Δ-резонанса в ядре необходимо учитывать при рассмотрении рассеяния пионов на ядрах в области (3.3)-резонанса. И так как эти эффекты в ПФЦ не учтены, то следует выйти за пределы этого приближения. Сомнительность применения ПФЦ в области (3.3)-резонанса видна и из того, что в выражении (130) t-матрица свободного πN-рассеяния не зависит от энергии и импульса нуклона в ядре. Такое приближение мало оправдано, если принять во внимание сильную энергетическую зависимость πN-матрицы столкновения в области (3.3)-резонанса.

Рассмотрим разные приближения, выходящие за рамки ПФЦ в той или иной степени. В общем случае решение такой задачи сводится к уравнению

$$T(E) = T^{\text{фц}}(E_0) + T^{\text{фц}}(E_0)\,[G(E) - G_0(E_0)]\,\mathcal{A}T(E), \qquad (172)$$

которое получается из точного уравнения для T-матрицы (2) и уравнения для $T^{\text{фц}}$ с функцией Грина $G_0(E_0)$ (110), если потенциал нелокален, или с $G_0(E_0)$ (140), если потенциал локален. Один из вариантов (172) рассмотрен в [39] для $\pi^3\text{He}(^3\text{H})$-рассеяния.

Когерентное приближение. Как мы видели в предыдущем разделе, ПФЦ можно получить, если в ватсоновском ряде (41) и функции Грина $G(E)\mathcal{A}$(107) пренебречь энергиями возбуждения ядра во всех состояниях, но сами эти состояния учесть через условие полноты (49). Вместо этого теперь в $G(E)\mathcal{A}$ будем пренебрегать всеми возбужденными состояниями (внутренними) ядра с соответствующими энергиями, оставляя только основное состояние, т. е. положим

$$G(E)\mathcal{A} \approx G_0(E_0)\mathcal{P} =$$

$$= \int \frac{|\,\mathbf{k}_0''\mathbf{K}_A''\rangle\, d\mathbf{k}_0''\, d\mathbf{K}_A''\, \langle \mathbf{K}_A''\mathbf{k}_0''\,|}{\omega_\pi(k_0)+E_A(K_A)+i0-\omega_\pi(k_0'')-E_A(K_A'')}\,|\,0\rangle\langle 0\,|. \qquad (173)$$

Тогда получим

$$T(E) \approx \sum_i \tau_i(E) + \sum_i \sum_{j\neq i} \tau_i(E)\,G_0(E_0)\,\mathcal{P}\tau_j(E) +$$

$$+\sum_i \sum_{j\neq i} \sum_{k\neq j} \tau_i(E)\,G_0(E_0)\,\mathcal{P}\tau_j(E)\,G_0(E_0)\,\mathcal{P}\tau_k(E) + \ldots \qquad (174)$$

Из этого выражения видно, что рассматриваемое приближение сводится к пренебрежению возбуждением ядра во всех актах промежуточного рассеяния пиона на разных нуклонах ядра (отсюда и название приближения — *когерентное*). Вместе с тем возбуждение ядра считается полностью включенным в оператор $\tau_i(E)$ (36), (37) через функцию Грина $G(E)\mathcal{A}$ (107).

Из соотношения (174) для матричных элементов по основному состоянию получим

$$T_{00}(E) \approx A\tau_{00}(E) + A\tau_{00}(E)\,G_0(E_0)\,(A-1)\,\tau_{00}(E) +$$

$$+A\tau_{00}(E)\,G_0(E_0)\,(A-1)\,\tau_{00}(E)\,G_0(E_0)\,(A-1)\,\tau_{00}(E) + \ldots$$

$$\ldots = A\tau_{00}(E) + A\tau_{00}(E)\,G_0(E_0)\left[\frac{A-1}{A}\,T_{00}(E)\right], \qquad (175)$$

где

$$T_{00}(E) \equiv \langle 0\,|\,T(E)\,|\,0\rangle; \qquad (176)$$

$$\tau_{00}(E) \equiv \langle 0\,|\,\tau(E)\,|\,0\rangle = \langle 0\,|\,\tau_i(E)\,|\,0\rangle. \qquad (177)$$

Из уравнения (175) имеем

$$T_{00}^{\prime\,\text{ког}}(E) = U_{00}^{\text{ког}}(E) + U_{00}^{\text{ког}}(E)\,G_0(E_0)\,T_{00}^{\prime\,\text{ког}}(E), \qquad (178)$$

где

$$T_{00}^{\prime\,\text{ког}}(E) = \frac{A-1}{A}\,T_{00}^{\text{ког}}(E); \quad U_{00}^{\text{ког}}(E) = (A-1)\,\tau_{00}(E). \qquad (179)$$

Обратим внимание на то, что (178) можно было бы непосредственно получить из (19), (20), если в (21) для оптического потенциала пренебречь членом, учитывающим возбужденные состояния ядра. Полученный в таком приближении оптический потенциал называется *оптическим потенциалом первого порядка* в формулировке КМТ, т. е.

$$U^{\prime(1)}(E) = U^{\text{ког}}(E) = (A-1)\,\tau(E) = [(A-1)/A]\sum_i \tau_i(E). \qquad (180)$$

Заметим, что последнее равенство имеет место только в пространстве антисимметричных состояний ядра.

Покажем теперь, что в первом (по оптическому потенциалу) приближении формулировка Ватсона теории многократного рассеяния совпадает с формулировкой КМТ. Для этого заметим, что из (24) имеем

$$\hat{U}^{(1)}(E) = A\hat{\tau}(E) = \sum_i \hat{\tau}_i(E), \tag{181}$$

где $\hat{\tau}_i(E)$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{\tau}_i(E) = \begin{cases} v_i + v_i G(E) Q\hat{\tau}_i(E); & (182) \\ v_i + \hat{\tau}_i(E) QG(E) v_i. & (183) \end{cases}$$

На основе равенства (181) из (22) получаем

$$T^{(1)}(E) = \sum_i \hat{\tau}_i(E) + \sum_i \hat{\tau}_i(E) G(E) \mathcal{P} T^{(1)}(E). \tag{184}$$

Ясно, что между операторами τ_i и $\hat{\tau}_i$ имеется связь, аналогичная (25), (26), т. е.

$$\tau_i(E) = \begin{cases} \hat{\tau}_i(E) + \hat{\tau}_i(E) G(E) \mathcal{P}\tau_i(E); & (185) \\ \hat{\tau}_i(E) + \tau_i(E) \mathcal{P} G(E) \hat{\tau}_i(E). & (186) \end{cases}$$

Обратим внимание на то, что (184) и (185), (186) получаются из (5), (7) и (36), (37) соответственно заменой v_i на $\hat{\tau}_i$ и $G\mathcal{A}$ на $G\mathcal{P}$, поэтому для $T^{(1)}(E)$ сразу можно написать ряд, аналогичный ряду (41), полученному из (5), (7) и (36), (37):

$$T^{(1)}(E) = \sum_i \tau_i(E) + \sum_i \sum_{j \neq i} \tau_i(E) G(E) \mathcal{P}\tau_j(E) + $$
$$+ \sum_i \sum_{j=i} \sum_{k=j} \tau_i(E) G(E) \mathcal{P}\tau_j(E) \mathcal{P}\tau_k(E) + \ldots \tag{187}$$

Отсюда непосредственно вытекает выражение (175) и, следовательно, уравнение (178). Таким образом, мы показали, что в первом приближении по оптическому потенциалу, т. е. когда в уравнениях для оптического потенциала (21) и (24) отбрасываются вторые члены в правых частях, матрица рассеяния пиона на ядре оказывается одинаковой как в ватсоновской, так и КМТ формулировках, ТМР [40]. Ясно, что разница между этими формулировками возникает в случае, когда вместо точных решений уравнений (36), (37) и (182), (183) берутся τ_i и $\hat{\tau}_i$ в каком-то приближении. Следовательно, разница в матрицах $T^{(1)}(E)$, получаемая в двух разных формулировках, будет в какой-то степени определять точность данного приближения.

Импульсное приближение и роль ферми-движения. Одно из часто используемых приближений для $\tau_i(E)$ или $\hat{\tau}_i(E)$ является импульсное приближение, которое означает замену τ_i или $\hat{\tau}_i$

матрицей свободного πN-столкновения $t_i(\omega)$ (76). Используя известную операторную алгебру, легко можно показать, что

$$\tau_i(E) = t_i(\omega) + t_i(\omega)\,[G(E)\,\mathcal{A} - g(\omega)]\,\tau_i(E); \tag{188}$$

$$\hat{\tau}_i(E) = t_i(\omega) + t_i(\omega)\,[G(E)\,Q - g(\omega)]\,\hat{\tau}_i(E). \tag{189}$$

Здесь ω — параметр, который обычно выбирается в двух видах

$$\omega = \omega_\pi(k_0) + \omega_n(p_i), \tag{190}$$

где $\mathbf{p}_i$ — импульс i-го нуклона в ядре и

$$\omega = E + M = \omega_\pi(k_0) + E_A(K_A) + M. \tag{191}$$

Вариант (190), который имеет прозрачный физический смысл [8], в нерелятивистском пределе приводит к галилеево-инвариантной матрице $t_i(\omega)$, а варианту (191) соответствует галилеево-неинвариантная матрица $t_i(\omega)$. Выбор ω в виде (190) имеет еще то преимущество перед выбором ω в виде (191), что в первом случае оптический потенциал зависит от $t_i(\omega)$-матрицы наполовину внеэнергетической поверхности, как это будет видно ниже. Поэтому связь между $t_i(\omega)$-матрицами в системе ц. м. пион + + ядро и в системе ц. м. пион + нуклон будет определяться простой формулой (92). При выборе ω в виде (191) оптический потенциал зависит от $t_i(\omega)$-матрицы полностью вне энергетической поверхности и указанная выше связь дается более сложной формулой (104). Но вариант (190) имеет тот недостаток, что в этом случае связь матриц τ_i и $\hat{\tau}_i$ с матрицей $t_i(\omega)$ не дается простым соотношением вида (188) и (189). И, следовательно, найти поправки к импульсному приближению трудно. При варианте (191) эта поправка связана с учетом второго члена в правых частях уравнений (188) и (189).

Чтобы определить оптический потенциал первого порядка в импульсном приближении, необходимо найти матричный элемент от оператора $t_i(\omega)$. При принятой нами в предыдущих разделах нормировке базисных векторов состояний будем иметь

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{k}_0'\mathbf{K}_A'\alpha' \mid t_i(\omega) \mid \alpha\mathbf{K}_A\mathbf{k}_0\rangle &= \\ = \int \langle \mathbf{K}_A'\alpha' \mid \mathbf{p}_1 \ldots \mathbf{p}_i' \ldots \mathbf{p}_A\rangle\, d\mathbf{p}_i' \,&\langle \mathbf{p}_i'\mathbf{k}_0' \mid t_i(\omega) \mid \mathbf{k}_0\mathbf{p}_i\rangle \times \\ \times\, d\mathbf{p}_i \prod_{j\neq i} d\mathbf{p}_j \,&\langle \mathbf{p}_1 \ldots \mathbf{p}_i \ldots \mathbf{p}_A \mid \alpha\mathbf{K}_A\rangle,\end{aligned} \tag{192}$$

где матрица $\langle \mathbf{p}_i'\mathbf{k}_0' \mid t_i(\omega) \mid \mathbf{k}_0\mathbf{p}_i\rangle$ в общем случае (когда для пиона и нуклона используется релятивистская кинематика) определяется формулами (94), (95), (104). Но если принять во внимание тот факт, что волновые функции ядер $A \gg 3$ обычно берутся в нерелятивистском приближении, то было бы более последовательным для $\langle \mathbf{p}_i'\mathbf{k}_0' \mid t_i(\omega) \mid \mathbf{k}_0\mathbf{p}_i \rangle$ использовать выражение, получаемое из (94), (95), (104) в нерелятивистском пределе по нуклону. В таком случае на основе формул (80), (81), (85) — (95), (100), (104) получим

$$\langle \mathbf{p}_i'\mathbf{k}_0' | t_i(\omega) | \mathbf{k}_0\mathbf{p}_i \rangle = \delta(\mathbf{K}_{0i}' - \mathbf{K}_{0i}) N(\mathfrak{k}'\mathbf{k}_0'; \mathfrak{k}\mathbf{k}_0) t(\mathfrak{k}', \mathfrak{k}; \omega, \mathbf{K}_{0i}), \qquad (193)$$

где

$$N(\mathfrak{k}'\mathbf{k}_0'; \mathbf{k}\mathbf{k}_0) = \sqrt{\frac{\omega_\pi(\mathfrak{k}')\,\omega_\pi(\mathfrak{k})\,(M+\omega_\pi(k_0'))\,(M+\omega_\pi(k_0))}{\omega_\pi(k_0')\,\omega_\pi(k_0)\,(M+\omega_\pi(\mathfrak{k}'))\,(M+\omega_\pi(\mathfrak{k}))}}; \qquad (194)$$

$$\mathfrak{k} = \frac{M\mathbf{k}_0 - \omega_\pi(k_0)\,\mathbf{p}_i}{M+\omega_\pi(k_0)} \equiv b\mathbf{k}_0 - a\mathbf{p}_i; \quad a+b=1; \quad \mathbf{K}_{0i} = \mathbf{k}_0 + \mathbf{p}_i; \qquad (195)$$

$$t(\mathfrak{k}', \mathfrak{k}; \omega, \mathbf{K}_{0i}) = t^{cm}(\mathfrak{k}', \mathfrak{k}; \omega(\mathfrak{k})) + \int d\mathbf{k}''\, t^{cm}(\mathfrak{k}', \mathfrak{k}'', \omega(\mathfrak{k}'')) \times$$
$$\times t^{cm*}(\mathfrak{k}, \mathfrak{k}''; \omega(\mathfrak{k}'')) \left[\frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \mathbf{K}_{0i}^2} + i0 - \omega(\mathfrak{k}'')} - \frac{1}{\omega(\mathfrak{k}) + i0 - \omega(\mathfrak{k}'')} \right]. \qquad (196)$$

Вводя новые переменные по формулам

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{k} = \frac{MA\mathbf{k}_0 - \omega_\pi(\mathbf{k}_0)\,\mathbf{K}_A}{MA+\omega_\pi(k_0)} \equiv b_A\mathbf{k}_0 - \\ &- a_A\mathbf{K}_A, \quad a_A - b_A = 1, \quad \mathbf{K} = \mathbf{k}_0 + \mathbf{K}_A; \\ &\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i^0 + \mathbf{K}_A/A, \end{aligned}\right\} \qquad (197)$$

на основе формул (180), (181), (192) получаем

$$\langle \mathbf{k}_0'\mathbf{K}_A' 0 | \begin{bmatrix} U_{\text{имп}}'^{(1)}(E) \\ \hat{U}_{\text{имп}}^{(1)}(E) \end{bmatrix} | 0\mathbf{K}_A\mathbf{k}_0 \rangle = \delta(\mathbf{K}' - \mathbf{K})\, V_{00}^{(1)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}; \omega, \mathbf{K}), \qquad (198)$$

где

$$V_{\alpha'\alpha}^{(1)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}; \omega, \mathbf{K}) = \begin{bmatrix} A-1 \\ A \end{bmatrix} N(\mathfrak{k}'\mathbf{k}_0'; \mathfrak{k}\mathbf{k}_0) \times$$
$$\times \int \rho_{\alpha'\alpha}\left(\mathbf{p}^0 + \frac{A-1}{A}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \mathbf{p}^0\right) d\mathbf{p}^0 \times$$
$$\times t(\mathfrak{k}', \mathfrak{k}; \omega, \mathbf{K}_{0i}) \equiv \begin{bmatrix} A-1 \\ A \end{bmatrix} N t_{\alpha'\alpha}(\mathfrak{k}', \mathfrak{k}; \omega, \mathbf{K}). \qquad (199)$$

Здесь множитель $(A - 1)$ соответствует формулировке КМТ, а множитель A — формулировке Ватсона; векторы $\mathfrak{k}$ и $\mathbf{K}_{0i}$ определены по формулам

$$\mathfrak{k} = \frac{MA+\omega_\pi(k_0)}{A(M+\omega_\pi(k_0))}\,\mathbf{k} - \frac{\omega_\pi(k_0)}{M+\omega_\pi(k_0)}\,\mathbf{p}_i^0; \qquad (200)$$

$$\mathbf{K}_{0i} = \frac{A-1}{A}\,\mathbf{k} + \frac{M+\omega_\pi(k_0)}{MA+\omega_\pi(k_0)}\,\mathbf{K}. \qquad (201)$$

Функция $\rho_{\alpha'\alpha}(\mathbf{p}', \mathbf{p})$, входящая в выражение (199), определена следующим образом:

$$\rho_{\alpha'\alpha}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \int \langle \mathbf{r}' | \mathbf{p}' \rangle \langle \alpha' | \mathbf{x}_{A-2} \ldots \mathbf{x}_1 \mathbf{r}' \rangle \times$$
$$\times d\mathbf{r}' \, d\mathbf{x}_1 \ldots d\mathbf{x}_{A-2} \, d\mathbf{r} \langle \mathbf{r}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{A-2} | \alpha \rangle \langle \mathbf{p} | \mathbf{r} \rangle, \tag{202}$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{A-1}$, $\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{A-2}$ — координаты Якоби для внутреннего движения ядра. Если использовать одночастичное генеалогическое разложение векторов внутреннего состояния ядра

$$|\alpha\rangle = \sum_{\alpha_b \alpha_r} C^{\alpha}_{\alpha_b \alpha_r} |\alpha_b\rangle \, |\alpha_r\rangle, \tag{203}$$

то из (202) получим (схематически)

$$\rho_{\alpha'\alpha}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \sum_{\alpha_b' \alpha_b} a^{\alpha'\alpha}_{\alpha_b' \alpha_b} \rho_{\alpha_b' \alpha_b}(\mathbf{p}', \mathbf{p}), \tag{204}$$

где

$$\rho_{\alpha_b' \alpha_b}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \langle \alpha_b' | \mathbf{p}' \rangle \langle \mathbf{p} | \alpha_b \rangle; \tag{205}$$

$$a^{\alpha'\alpha}_{\alpha_b' \alpha_b} = \sum_{\alpha_r' \alpha_r} C^{\alpha'}_{\alpha_b' \alpha_r'} C^{\alpha}_{\alpha_b \alpha_r} \langle \alpha_{r'} | \alpha_r \rangle. \tag{206}$$

В выражении (203), (205) $|\alpha_b\rangle$ являются векторами одночастичных состояний в ядре.

В новых переменных $(\mathbf{f}, \mathbf{K}_{0i})$ и $(\mathbf{k}, \mathbf{K})$ выражения (190) и (191) примут вид:

$$\omega = \sqrt{\omega^2(\mathbf{f}) + \mathbf{K}_{0i}^2}; \quad \omega(\mathbf{f}) = \omega_\pi(\mathbf{f}) + \omega_n(\mathbf{f}) \approx \omega_\pi(\mathbf{f}) + M; \tag{207}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_{\pi A}^2(k) + \mathbf{K}^2 M_A} + M; \omega_{\pi A}(k) = \omega_\pi(k) + \omega_A(k) \approx \omega_\pi(k) + M. \tag{208}$$

Видим, что при выборе ω в виде (190) интегральный член в выражении (104) становится равным нулю. Кроме того, матрица $t(\mathbf{f}', \mathbf{f}; \omega, \mathbf{K}_{0i})$ перестает зависеть от $\mathbf{K}_{0i}$ и, следовательно, от $\mathbf{K}$. В результате для оптического потенциала получаем сравнительно простое выражение. Это и есть одно из важных преимуществ выбора ω в виде (190) по сравнению с выбором ω в виде (191).

Если в подынтегральном выражении (199) пренебречь зависимостью t-матрицы от импульса нуклона в ядре относительно ц. м. $\mathbf{p}^0$ [эта зависимость возникает из (200)], то в результате интегрирования $\rho_{00}[\mathbf{p}^0 + [(A-1)/A](\mathbf{k} - \mathbf{k}')]$ по $\mathbf{p}_0$ получим

$$V_{00}^{(1)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}; \omega, \mathbf{K}) \approx \left[\frac{A-1}{A}\right] N(\mathbf{f}_0' \; \mathbf{k}_0'; \mathbf{f}_0 \mathbf{k}_0) \times$$
$$\times t(\mathbf{f}_0', \mathbf{f}_0; \omega, \mathbf{K}_{0i}) \rho_{00}\left[\frac{A-1}{A}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\right], \tag{209}$$

где

$$\rho_{\alpha'\alpha}\left(\frac{A-1}{A}\,\mathbf{q}\right)=\int \exp\left(i\,\frac{A-1}{A}\,\mathbf{qr}\right)\langle\alpha'|\mathbf{x}_{A-2}\,\ldots\,\mathbf{x}_1\mathbf{r}\rangle\times$$
$$\times\,d\mathbf{x}_1\,\ldots\,d\mathbf{x}_{A-2}\,d\mathbf{r}\,\langle\mathbf{r}\mathbf{x}_1\,\ldots\,\mathbf{x}_{A-2}|\alpha\rangle; \tag{210}$$

$$\mathfrak{f}_0=\frac{MA+\omega_\pi(k_0)}{A\,(M+\omega_\pi(k_0))}\,\mathbf{k}. \tag{211}$$

В пределе бесконечно тяжелого нуклона ($m/M\to 0$) и, следовательно, бесконечно тяжелого ядра $[(A-1)/A\to 1]$ из (209) с учетом (194), (195), (197), (201), (207), (208), (210), (211) получим $\mathfrak{f}\approx k_0\approx k$, $\mathbf{K}_{0i}\approx\mathbf{k}$ и

$$V_{00}^{(1)}(\mathbf{k}',\,\mathbf{k};\;\omega,\;\mathbf{K})\approx(A-1)\,t\,(\mathbf{k}_0',\;\mathbf{k}_0;\;\omega_\pi(k_0))\,\rho_{00}(\mathbf{k}_0-\mathbf{k}_0'). \tag{212}$$

Это выражение и определяет оптический потенциал первого порядка в ПФЦ. Действительно, решения уравнений (36), (37) в ПФЦ, как было показано, имеют вид (124), а соответствующий ряд (129) T-матрицы сводится к уравнению (178), где $U_{00}^{\text{ког}}$ определяется из (198) и (212), если в (129) проекционный оператор $\mathcal{A}$ заменить оператором $\mathcal{P}=|\,0\rangle\langle 0\,|$, т. е. в промежуточных состояниях пренебречь всеми возбужденными состояниями ядра. Заметим, что для улучшения приближения «замораживания» нуклона в ядре, сводящего оптический потенциал (199) к факторизованному виду (209), иногда импульс нуклона в ядре $\mathbf{p}_i=-\mathbf{k}/A+\mathbf{p}^0$ (в системе ц. м. пион + ядро) в t-матрице не полагается равным $-\mathbf{k}/A$, а заменяется некоторым средним значением $\mathbf{p}_0$ и t-матрица вновь выносится за знак интеграла. В работе [42] предлагается $\mathbf{p}^0$ выбрать в виде $\mathbf{p}_0=-\mathbf{k}/A+[(A-1)/2A]\,(\mathbf{k}'-\mathbf{k})$, который естественно возникает [43], если волновая функция ядра имеет гауссову форму (основная компонента волновой функции ядра $A=3{,}4$ в осцилляторной модели).

Таким образом, в отличие от ПФЦ оптический потенциал первого порядка (198) учитывает движения нуклона в ядре в кинематическом и в динамическом отношении (ферми-движение), усреднением свободной πN-матрицы столкновения по импульсам нуклона в ядре. Вопрос учета ферми-движения нуклона в ядре в πA-рассеянии в области (3.3)-резонанса рассматривался в работах [41, 44—46]. В работах [41, 46] этот вопрос изучался в приближении, когда промежуточные состояния учитывались в рамках модели ядерной материи, а в [44, 45] этот вопрос с самого начала изучался в оболочечной модели с осцилляторным потенциалом. В обоих случаях продемонстрировано существенное влияние учета ферми-движения как на сечение в области (3.3)-резонанса, так и на форму энергетической зависимости этого сечения.

Рассмотрим вопрос применимости импульсного приближения. При выборе энергетического параметра ω в виде (191) условие применимости импульсного приближения можно получить на основе оценки второго члена в правых частях уравнений (188), (189). Насколько известно, такая оценка до сих пор никем не проводилась. Что касается выбора (190), то в этом случае, как было отмечено выше, уравнения (188), (189) не имеют места. Условие применимости импульсного приближения для данного случая получено в работе [8] на основе оценки второго члена определенного разложения для $\tau_i(E)$ по t-матрице столкновения падающей частицы и нуклона. При наличии резонанса в рассеянии (в нашем случае в πN-рассеянии) условие применимости импульсного приближения имеет вид [8]

$$\frac{f_{\pi N}}{\lambda}\frac{2\varepsilon_N}{\Gamma} \ll 1, \tag{213}$$

где $f_{\pi N}$ — амплитуда πN-рассеяния; $\lambda = 1/k_0$ — дебройлевская длина волны пиона; Γ — ширина резонанса; ε_N — энергия вырывания нуклона из ядра. Оценка показывает [8], что в области (3.3)-резонанса условие (213) не выполняется, так как параметр $2f_{\pi N}\varepsilon_N/(\lambda\Gamma)$ порядка единицы. Условие (213), которое является достаточным, но не необходимым, оказывается слишком жестким. Исследования рассеяния пиона на дейтоне, проведенные в рамках трехчастичных уравнений, показали [47—50], что итерационный ряд для T-матрицы сходится достаточно хорошо, что обусловлено взаимным частичным сокращением высших членов (начиная со второго) ряда.

При рассеянии пиона на более сложном, чем дейтон, ядре численную оценку точности импульсного приближения, по нашему мнению, можно получить, если воспользоваться доказанной выше теоремой об эквивалентности формулировки Ватсона и формулировки КМТ для T-матрицы в первом приближении по оптическому потенциалу. В этом случае разница между этими формулировками возникнет вследствие импульсного приближения для τ_i и $\hat{\tau}_i$. Такое различие видно из уравнения для T_{00}-матрицы

$$T_{00}(E) = At_{00}(\omega) + \left[\frac{A-1}{A}\right] t_{00}(\omega)\, G_0(E)\, T_{00}(E), \tag{214}$$

которое получается из уравнений (19), (20) и (22), (23), если использовать (180), (192), (199). В (214) множитель $(A-1)$ соответствует формулировке КМТ, а множитель A — формулировке Ватсона.

Учет связи, отдачи и принципа Паули для нуклонов в ядре. Рассмотрим вопрос улучшения импульсного приближения. Такое улучшение всегда связано с учетом того факта, что нуклон, с которым сталкивается падающий пион, находится в окружении остальных нуклонов ядра. Возбуждение ядра при столкновении пиона с выделенным нуклоном, не учитываемое в ПФЦ, является важным аспектом пион-ядерной динамики, который следует учитывать в первую очередь.

При исследовании этого вопроса можно исходить из уравнения (36), (37) для матрицы столкновения пиона с нуклоном ядра. Используя выражение (107) для функции Грина и галилеево-инвариантность потенциала πN-взаимодействия v_i, с учетом (197) нетрудно получить:

$$\langle \alpha' \mathbf{K}'_A \mathbf{k}'_0 | v_i | \mathbf{k}_0 \mathbf{K}_A \alpha \rangle = \delta(\mathbf{K}' - \mathbf{K}) [\langle \mathbf{k}' | v_{\alpha'\alpha} | \mathbf{k} \rangle = \langle \alpha' \mathbf{k}' | v | \mathbf{k} \alpha \rangle]; \tag{215}$$

$$\begin{aligned} \langle \alpha' \mathbf{K}'_A \mathbf{k}'_0 | \tau_i (E) | \mathbf{k}_0 \mathbf{K}_A \alpha \rangle = \delta(\mathbf{K}' - \mathbf{K}) [\langle \mathbf{k}' | \tau_{\alpha'\alpha} (E) | \mathbf{k} \rangle = \\ = \langle \alpha' \mathbf{k}' | \tau_i (E) | \mathbf{k} \alpha \rangle], \end{aligned} \tag{216}$$

где

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}' | \tau_{\alpha'\alpha} (E) | \mathbf{k} \rangle = \langle \mathbf{k}' | v_{\alpha'\alpha} | \mathbf{k} \rangle + \\ + \sum_{\alpha''} \int \frac{\langle \mathbf{k}' | v_{\alpha'\alpha''} | \mathbf{k}'' \rangle \, d\mathbf{k}'' \, \langle \mathbf{k}'' | \tau_{\alpha''\alpha} (E) | \mathbf{k} \rangle}{\begin{array}{r} \omega_\pi (|\mathbf{k} + a_A \mathbf{K}_i|) + E_A (|-\mathbf{k} + b_A \mathbf{K}|) + i0 - \\ - \omega_\pi (|\mathbf{k}'' + a_A \mathbf{K}|) - E_A (|-\mathbf{k}'' + b_A \mathbf{K}|) - \mathscr{E}^*_{\alpha''} \end{array}}; \end{aligned} \tag{217}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}' | v_{\alpha'\alpha} | \mathbf{k} \rangle = \int \rho_{\alpha'\alpha} \left[\mathbf{p}^0 + \frac{A-1}{A} (\mathbf{k} - \mathbf{k}'); \; \mathbf{p}^0 \right] \times \\ \times \, d\mathbf{p}^0 \left\langle \mathbf{k}' - \mathbf{k} + \frac{b}{b_A} \mathbf{k} - a\mathbf{p}^0 | v | \frac{b}{b_A} \mathbf{k} - a\mathbf{p}^0 \right\rangle. \end{aligned} \tag{218}$$

Обратим внимание на то, что знаменатель подынтегрального выражения в (217) для релятивистской кинематики зависит от полного импульса системы и, следовательно, $\langle \mathbf{k}' | \tau_{\alpha'\alpha} (E) | \mathbf{k} \rangle$ также зависит от полного импульса. В нерелятивистском пределе зависимость исчезает, так как

$$\begin{aligned} \omega_\pi (|\mathbf{k} + a_A \mathbf{K}|) + E_A (|-\mathbf{k} + b_A \mathbf{K}|) - \omega_\pi (|\mathbf{k}'' + a_A \mathbf{K}|) - \\ - E_A (|-\mathbf{k}'' + b_A \mathbf{K}''|) \approx E_{\pi A} (E) - E_{\pi A} (k''); \quad E_{\pi A} (k) = \mathbf{k}^2 / (2\mu_{\pi A}). \end{aligned} \tag{219}$$

Обычно уравнение (217) рассматривают в системе ц. м. πA. Встает вопрос о связи τ-матрицы в этой системе с τ-матрицей в произвольной системе, в которой записано уравнение (217) и был уже рассмотрен в разд. 2.

Уравнение (217), записанное в системе ц. м. πA, применялось в работе [51] для оценки поправки к импульсному приближению, возникающей из учета связи нуклона в ядре и возбуждения ядра. В этой работе используется оболочечная модель с осцилляторным потенциалом. Предполагалось, что в области (3.3)-резонанса не только πN, но и πA-взаимодействие факторизуется. Кроме того, делалось приближение, которое каким-то образом эквивалентно приближению полноты по векторам внутреннего состояния ядра, а именно предполагалось, что

$$\langle \mathbf{k}' | v_{\alpha'\alpha} | \mathbf{k} \rangle \approx \lambda \rho^*_{\alpha'\alpha}(\mathbf{k}')\, v^*(\mathbf{k}')\, v(\mathbf{k})\, \rho_{\alpha'\alpha}(\mathbf{k}) \approx$$
$$\approx \lambda \rho^*_{\alpha' 0}(\mathbf{k}')\, v^*(\mathbf{k}')\, v(\mathbf{k})\, \rho_{\alpha 0}(\mathbf{k}), \tag{220}$$

где $\rho_{\alpha'\alpha}(\mathbf{k})$ определяется (210).

Решение уравнения (217) с потенциалом (220) и с учетом (213) имеет вид

$$\langle \mathbf{k}' | \tau_{00}(E) | \mathbf{k} \rangle =$$
$$= \rho^*_{00}(\mathbf{k}')\, v^*(\mathbf{k}')\, v(\mathbf{k})\, \rho_{00}(\mathbf{k}) \Big/ \left[\lambda^{-1} - \sum_{\alpha} \int \frac{|v(\mathbf{q})|^2 \rho_{\alpha 0}(\mathbf{q})\, d\mathbf{q}}{E_{\pi A}(k) + i0 - E_{\pi A}(q) - \mathscr{E}^*_{\alpha}} \right]. \tag{221}$$

Конкретные расчеты, проведенные для ядра ^{12}C, показали [51], что такой учет связи нуклона в ядре и возбуждения ядра в промежуточных состояниях приводит к смещению положения резонанса в сторону больших энергий на $\approx 12\%$ и к сужению резонанса на величину того же порядка.

Возбуждения ядра в промежуточных состояниях в τ-матрице можно учесть через уравнения (217) «квазиклассически», если энергию возбуждения $\mathscr{E}^*_{\alpha}$ заменить некоторой средней энергией возбуждения $\overline{\mathscr{E}}$ и потом использовать условие полноты $\sum |\alpha\rangle\langle\alpha| = 1$. В результате получим

$$\langle \mathbf{k}' | \tau_{00}(E) | \mathbf{k} \rangle \approx \langle 0\mathbf{k}' | t(E - \overline{\mathscr{E}}) | \mathbf{k}0 \rangle, \tag{222}$$

где $t(E - \overline{\mathscr{E}})$ — матрица свободного πN-рассеяния с энергией, смещенной на $\overline{\mathscr{E}}$. Такой учет связи нуклона в ядре проводился в работах [44, 52], в которых продемонстрирована негодность такого приближения в области (3.3)-резонанса, что связано с сильной энергетической зависимостью t-матрицы πN-столкновения в этой области.

Вопрос учета связи нуклона в ядре и принципа Паули можно исследовать на примере рассеяния пиона на нуклоне, движущегося в заданном внешнем поле, имитирующем поле, создаваемое остовом (система $(A-1)$-нуклонов в ядре) в пределе бесконечной массы последнего ($A - 1 \to \infty$). Такая модель рассмотрена в работах [53, 54]. Ее можно применить к реальным ядрам тогда, когда можно пренебречь движением ц. м. ядра в процессе рассеяния. Если в (215) — (218) и (194), (197), (202) — (206) совершить предельный переход ($A \to \infty$, $a_A \to 0$, $b_A \to 1$), то получим основное уравнение модели

$$\langle \mathbf{k}_0' | \tau_{\alpha_b^0 \alpha_b^0}(E) | \mathbf{k}_0 \rangle = \langle \mathbf{k}_0' | v_{\alpha_b^0 \alpha_b^0} | \mathbf{k}_0 \rangle + \\ + \sum_{\alpha_b} \int \frac{\langle \mathbf{k}_0' | v_{\alpha_b^0 \alpha_b^0} | \mathbf{k}_0'' \rangle d\mathbf{k}_0'' \langle \mathbf{k}_0'' | \tau_{\alpha_b^0 \alpha_b^0}(E) | \mathbf{k}_0 \rangle}{E + i0 - \omega_\pi (k_0'') - \mathscr{E}_{\alpha_b}^*}, \quad (223)$$

где α_b — квантовые числа нуклона во внешнем поле, причем α_b^0 соответствует основному состоянию; $\mathscr{E}_{\alpha b}^*$ — энергия возбуждения нуклона в этом поле; и

$$\langle \mathbf{k}_0' | \tau_{\alpha_b' \alpha_b}(E) | \mathbf{k}_0 \rangle = \int \langle \alpha_b' | \mathbf{p}' \rangle d\mathbf{p}' \langle \mathbf{p}' \mathbf{k}_0' | \tau(E) | \mathbf{k}_0 \mathbf{p} \rangle d\mathbf{p} \langle \mathbf{p} | \alpha_b \rangle; \quad (224)$$

$$\langle \mathbf{k}_0' | v_{\alpha_b' \alpha_b} | \mathbf{k}_0 \rangle = \\ = \int \rho_{\alpha_b' \alpha_b}(\mathbf{p}'; \mathbf{p}' + \mathbf{k}_0' - \mathbf{k}_0) d\mathbf{p} \langle \mathbf{k}_0' - a(\mathbf{k}_0' + \mathbf{p}') | v | \mathbf{k}_0 - a(\mathbf{k}_0' + \mathbf{p}') \rangle, \quad (225)$$

где функция $\rho_{\alpha_b' \alpha_b}(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ определена выражением (205).

Основное приближение, которое делается в работе [53] при решении уравнения (223), состоит в замене векторов состояния связанного нуклона $|\alpha_b\rangle$ векторами состояния свободного нуклона. Иначе говоря, в промежуточных состояниях для ядра используется модель ядерной материи. В соответствии с этим E и $\mathscr{E}_{\alpha_b}^*$ берутся в виде (кинематика нерелятивистская!)

$$E = E_\pi (k_0); \quad \mathscr{E}_{\alpha_b}^* = E_N(p) + \langle V_N \rangle - \langle h_N - M \rangle_0 - \langle V_N \rangle_0, \quad (226)$$

где h_N — оператор Гамильтона для свободного нуклона; V_N — потенциал внешнего поля; $\langle h_N - M \rangle_0$, $\langle V_N \rangle_0$ и $\langle V_N \rangle$ — соответствующие средние значения по основному и возбужденным состояниям, при этом $\langle V_N \rangle$ считается независящим от $\mathbf{p}$. В этой модели из (223), (225) (основное состояние) нетрудно получить

$$\langle \mathbf{k}_0' | \tau_{00}(E) | \mathbf{k}_0 \rangle = \\ = \int \langle 0 | \mathbf{p}' \rangle \langle \mathbf{p}' + \mathbf{k}_0' - \mathbf{k}_0 | 0 \rangle \langle b_0 \mathbf{k}_0' - a_0 \mathbf{p}' | \tau(E) | \mathbf{k}_0 - a_0(\mathbf{k}_0' + \mathbf{p}') \rangle d\mathbf{p}', \quad (227)$$

где

$$\langle b_0 \mathbf{k}_0' - a_0 \mathbf{p}' | \tau(E) | \mathbf{k} - a_0(\mathbf{k}_0' + \mathbf{p}') \rangle = \\ = \langle b_0 \mathbf{k}_0' - a_0 \mathbf{p}' | v | \mathbf{k}_0 - a_0(\mathbf{k}_0' + \mathbf{p}') \rangle + \\ + \int \frac{\langle b_0 \mathbf{k}_0' - a_0 \mathbf{p}' | v | \mathbf{y} \rangle d\mathbf{y} \langle \mathbf{y} | \tau(E) | \mathbf{k}_0 - a_0(\mathbf{k}_0' + \mathbf{p}') \rangle}{E_r(|b_0 \mathbf{k}_0 - a_0 \mathbf{p}'|) + i0 - E_r(y) + B}; \quad (228)$$

$$B = \langle h_N - M \rangle_0 - E_N(p') + \langle V_N \rangle_0 - \langle V_N \rangle; \quad E_r(y) = \mathbf{y}^2 / 2\mu_{\pi N}; \quad (229)$$

$$a_0 = m/(m+M); \quad b_0 = M/(m+M). \quad (230)$$

Если потенциал v выбрать в виде (143), (145), то соответствующее решение уравнения (228) будет иметь вид

$$\langle b_0\mathbf{k}_0' - a_0\mathbf{p}' | \tau(E) | \mathbf{k}_0 - a_0(\mathbf{k}_0' + \mathbf{p}')\rangle = \\ = 4\pi \sum_{lm_l} \frac{v^*_{lm_l}(b_0\mathbf{k}_0' - a_0\mathbf{p}')\, v_{lm_l}(\mathbf{k}_0 - a_0(\mathbf{k}_0' + \mathbf{p}'))}{D_l(\mathbf{k}_0', \mathbf{p}'; B)}, \tag{231}$$

где

$$D_l(\mathbf{k}_0', \mathbf{p}'; B) = \lambda_l^{-1} - \int \frac{d\mathbf{y}\, |v_l(\mathbf{y})|^2}{E_r(|b_a\mathbf{k}_0' - a_0\mathbf{p}'|) + i0 - E_r(y) + B}. \tag{232}$$

Подставляя (231) и (232), окончательно получаем

$$\langle \mathbf{k}_0' | \tau_{00}(E) | \mathbf{k}_0\rangle = \int \langle 0 | \mathbf{p}'\rangle\, d\mathbf{p}' \,\langle \mathbf{p}' + \mathbf{k}_0' - \mathbf{k}_0 | 0\rangle \times \\ \times \sum_{lm_l} \frac{4\pi v^*_{lm_l}(b_0\mathbf{k}_0' - a_0\mathbf{p}')\, v_{lm_l}(\mathbf{k}_0 - a_0(\mathbf{k}_0' + \mathbf{p}'))}{D_l(\mathbf{k}_0', \mathbf{p}'; B)}. \tag{233}$$

Величина B (229), входящая в (231), (233) через функцию D_l (232), учитывает возбуждение связанного нуклона (имитация одночастичных возбуждений в реальных ядрах) в промежуточных состояниях при упругом расслоении пиона. Если пренебречь зависимостью от B, то (231) будет представлять собой свободную πN-матрицу столкновения, записанную в системе координат с началом в центре поля. Так что в этом случае выражение (233) будет матрицей рассеяния пиона на связанном нуклоне в импульсном приближении, которая включает в себя эффект отдачи нуклона и усреднения по импульсам связанного нуклона (ферми-движение) в соответствии с общим выражением (199). Если рассматривать предел бесконечной массы нуклона ($m/M \to 0$ и, следовательно, $a_0 \to 0$, $b_0 \to 1$), то мы вернемся к ПФЦ. Анализ, проведенный для $\pi\, ^{16}O$-рассеяния в области (3.3)-резонанса показывает [53], что учет возбуждения «ядра» ($B \neq 0$) приводит к увеличению действительной части оптического потенциала и к уменьшению его мнимой части. Как следствие этого, уменьшается сечение рассеяния вперед и, следовательно, полное сечение, а значение сечения при больших углах (назад) растет. Эти эффекты зависят от выбранного значения $A' \equiv \langle h_N - M\rangle_0 + \langle V_N\rangle_0 - \langle V_N\rangle$. Далее было показано, что для рассеяния на большие углы учет ферми-движения также важен [53], как и учет возбуждения ядра в промежуточных состояниях.

Более близкой к реальной задаче рассеяния пиона на легких ядрах является модель осцилляторного потенциала для поля, в котором движется нуклон. Основное уравнение этой модели можно получить из (223), если в этом уравнении положить $E =$

$= \omega_\pi(k_0)$, $\alpha_b = n_b l_b m_b$ и $E_{\alpha b} = E_{Nb} = \eta_b N_b = \eta_b(2n_b + l_b)$, где $n_b = 0,1, \ldots$ — радиальное квантовое число; l_b — орбитальный момент; m_b — его проекция (из-за простоты здесь пренебрегается спин-орбитальным взаимодействием); η_b — частота осциляторного поля. В результате получаем

$$\langle \mathbf{k}_0' | \tau_{n_b^0 l_b^0 m_b^0;\, n_b^0 l_b^0 m_b^0}(\omega_\pi(k_0)) | \mathbf{k}_0 \rangle = \langle \mathbf{k}_0' | v_{n_b^0 l_b^0 m_b^0;\, n_b^0 l_b^0 m_b^0} | \mathbf{k}_0 \rangle +$$
$$+ \sum_{\substack{n_b l_b m_b \\ (N_b = 2n_b + l_b)}} \int \frac{\langle \mathbf{k}_0' | v_{n_b^0 l_b^0 m_b^0;\, n_b l_b m_b} | \mathbf{k}_0'' \rangle d\mathbf{k}_0'' \langle \mathbf{k}_0'' | \tau_{n_b l_b m_b;\, n_b^0 l_b^0 m_b^0}(\omega_\pi(k_0)) | \mathbf{k}_0 \rangle}{\omega_\pi(k_0) + i0 - \omega_\pi(k_0'') - \eta_b N_b}, \tag{234}$$

где

$$\langle \mathbf{k}_0' | v_{n_b' l_b' m_b';\, n_b l_b m_l} | \mathbf{k}_0 \rangle =$$
$$= \int \rho_{n_b' l_b' m_b';\, n_b l_b m_b}(\mathbf{p}';\ \mathbf{p}' + \mathbf{k}_0' - \mathbf{k}_0) \langle \mathbf{k}_0' - a_0(\mathbf{k}_0' + \mathbf{p}') \times$$
$$\times |v| \mathbf{k}_0 - a_0(\mathbf{k}_0' + \mathbf{p}') \rangle d\mathbf{p}'. \tag{235}$$

В работе [54] рассматривался частный случай этой модели, а именно предельный, когда $m/M \to 0$ и, следовательно, в выражении (235) $a_0 \to 0$, $b_0 \to 1$. Такая модель идейно близка к модели Чу — Лоу [18]. Для близости к модели Чу — Лоу радиальная часть потенциала πN-взаимодействия в состоянии с $l = 1$ выбиралась в соответствии (73) в виде:

$$\langle p' | v_1 | p \rangle = \lambda_1 \frac{p' v(p')}{\sqrt{\omega_\pi(p')}} \frac{p \vartheta(p)}{\sqrt{\omega_\pi(p)}}. \tag{236}$$

В этом случае выражение (235) принимает вид

$$\langle \mathbf{k}_0' | v_{n_b' l_b' m_b';\, n_b l_b m_b} | \mathbf{k}_0 \rangle = \langle \mathbf{k}_0' | v_1 | \mathbf{k}_0 \rangle \rho_{n_b' l_b' m_b';\, n_b l_b m_b}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_0'), \tag{237}$$

где

$$\rho_{n_b' l_b' m_b';\, n_b l_b m_b}(\mathbf{q}) = \int \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}_b) \langle n_b' l_b' m_b' | \mathbf{r}_b \rangle d\mathbf{r}_b \langle \mathbf{r}_b | n_b l_b m_b \rangle. \tag{238}$$

При решении уравнения (234) с ядром (237) в работе [54] применялся метод паде-аппроксимации, предварительно проводя парциальное разложение. В частности, использовался второй падеаппроксимант

$$\tau_{l_\pm} = \tau_{l_\pm}^{(1)} [1 - \tau_{l_\pm}^{(2)} / \tau_{l_\pm}^{(1)}], \tag{239}$$

где $\tau_{l_\pm}^{(1)}$ и $\tau_{l_\pm}^{(2)}$ — первая и вторая итерация уравнения для $\tau_{l_\pm}$ ($l_\pm$ соответствует $j = l \pm 1/2$, здесь j — полный момент). Выражение (239) дает точное решение уравнения Липмана — Швингера для матрицы свободного πN-столкновения, и следует ожидать, что оно будет хорошим приближением к точному решению уравнения (234). Конкретные расчеты, проведенные для случая, имитирующего $\pi\ ^{16}O$-рассеяние, без учета принципа Паули, показали [34], что учет связи нуклона в ядре приводит к смещению резонансной энергии вниз по сравнению с резонансной энергией свободного πN-рассеяния. Но если учесть принцип Паули, что сводится к исключению соответствующих членов при суммировании в (234), то резонансная энергия $\pi^{16}O$-рассеяния становится близкой к резонансной энергии свободного πN-рассеяния. Таким образом, эффект принципа Паули и связи нуклона в ядре практически компенсируют друг друга для резонансной энергии.

Следует подчеркнуть, что обсуждаемые выше результаты получены [54] при использовании ряда упрощающих приближений, среди которых основным является приближение «замораживания» нуклона во время взаимодействия с ним пиона, приводимое (235) к выражению (237). Представляется интересным решить уравнение (234), используя (235) без дополнительных допущений. Такая задача в настоящее время вполне реальна, даже для p-волнового πN-взаимодействия (сепарабельного!), являющегося основным для πA-рассеяния в области резонанса. Эта задача для s-волнового взаимодействия рассматривалась в работах [52, 55] и решалась в некоторых дальнейших упрощающих предположениях. Было показано, что для получения сечения в области резонанса реально не пригодны ни импульсное приближение, ни приближение «замораживания» нуклона и ни «квазиклассическое» приближение.

Вопрос нахождения поправок к импульсному приближению, возникающих от учета связи нуклона в ядре и принципа Паули, можно исследовать на основе уравнения (188). В этом уравнении поправки связаны со вторым членом в правой части. Выбирая ω в виде $\omega = E + M$, получаем

$$\tau_i(E) = t_i(E+M) + t_i(E+M)\,[G(E)\mathcal{A} - g(E+M)]\,\tau_i(E), \qquad (240)$$

где $G(E)$ и $g(E)$ определяются по (4) и (77), а $t(E+M)$ — уравнением (76). В нерелятивистском пределе гамильтониан ядра H_A (42) можно представить в виде

$$H_A = H_{A-1} + \mathcal{K}^i_N + V_i + B_i = \mathcal{K}^c_{A-1} + H^{cm}_{A-1} + \mathcal{K}^i_N + V_i + B_i, \qquad (241)$$

где H^{cm}_{A-1} — гамильтониан внутреннего возбуждения ядра $(A-1)$; $\mathcal{K}^c_{A-1}$ — оператор кинетической энергии движения ц. м.; $\mathcal{K}^i_N$ — оператор кинетической энергии выделенного нуклона i; V_i — оператор потенциальной энергии взаимодействия «остаточным ядром» $(A-1)$; B_i — энергия, необходимая для разделения ядра A на i-й нуклон и «остаточное ядро» $(A-1)$. Если в (240) опустить оператор $\mathcal{A}$, т. е. пренебречь принципом Паули, то в предположении того, что остаточное ядро (A — 1) в рассматриваемом процессе не возбуждается («инертный» остов), уравнение (240) примет вид

$$\tau_i(E)=t_i(E)+M)+t_i(E)[E+\mathrm{i}0-h_\pi-\mathscr{K}_N^i]^{-1}\times$$
$$\times V_i[E-B_i+\mathrm{i}0-\mathscr{K}_{A-1}^c-\mathscr{K}_N^i-V_i]^{-1}\tau_i(E). \qquad (242)$$

Используя известное соотношение

$$V_i[E-B_i+\mathrm{i}0-h_\pi-\mathscr{K}_N^i-V_i]^{-1}=$$
$$=t_{ic}(E-B_i-h_\pi)[E-B_i+\mathrm{i}0-\mathscr{K}_N^i-\mathscr{K}_{A-1}^c]^{-1},$$

где t_{ic} — матрица столкновения выделенного нуклона i с «инертным» остовом, уравнение (242) приводим к виду

$$\tau_i(E)=t_i(E+M)+t_i(E+M)[E+\mathrm{i}0-h_\pi-\mathscr{K}_N^i]^{-1}\times$$
$$\times t_{ic}(E-B_i-h_\pi)[E-B_i+\mathrm{i}0-\mathscr{K}_N^i-\mathscr{K}_{A-1}^c]^{-1}\tau_i(E). \qquad (243)$$

В работе [56], где поправка, связанная с учетом связи нуклона в ядре, рассчитывалась на основе уравнения (243), второй член учитывался в первом приближении, т. е. рассматривалась матрица

$$\tau_i^{(2)}(E)=t_i(E+M)+t_i(E+M)[E+\mathrm{i}0-h_\pi-\mathscr{K}_N^i]^{-1}\times$$
$$\times t_{ic}(E-B_i-h_\pi)[E-B_i+\mathrm{i}0-\mathscr{K}_N-\mathscr{K}_{A-1}^c]^{-1}t_i(E+M). \qquad (244)$$

Для расчета этой матрицы в работе [56] делаются дальнейшие упрощающие предложения: 1) для ядра используется модель независимых частиц (МНЧ), и в соответствии с этим для ядер с заполненными одночастичными состояниями (244) опускается оператор кинетической энергии остова $\mathscr{K}_{A-1}^c$; 2) функции Грина заменяются δ-функциями, в результате матрица рассеяния нуклона на остове t_{ic} оказывается на энергетической поверхности. Она рассчитывается в модели оптического потенциала типа прямоугольной ямы со спин-орбитальным взаимодействием; 3) первый член (244) рассчитывается в приближении замороженного в ядре нуклона (приближении «факторизации»); 4) во втором члене (244) матрица πN-рассеяния берется на энергетической поверхности; 5) для усредненной (по волновым функциям одночастичных состояний) матрицы t_{ic} в $\mathbf{r}$-представлении используется локальное приближение.

На примере $\pi\,^{12}C$-рассеяния в рассматриваемой модели показано [56], что учет эффекта связи нуклона в ядре приводит к существенной поправке (50—100%) оптического потенциала низшего порядка при энергиях $120 \leqslant T_\pi \leqslant 420$ *Мэв*, но для полного и дифференциального сечений эта поправка составляет только 10—20%. Большое значение поправки к оптическому потенциалу связано, по-видимому, с использованием приближения факторизации в оптическом потенциале низшего порядка [см. (202)], которое, как много раз отмечалось выше, является плохим приближением в области (3.3)-резонанса.

Для только что рассмотренной модели существенным было пренебрежение как возбуждением внутреннего движения «остаточного ядра» ($A-1$), так и движением его в ц.м. Такое приближение соответствует модели независимых частиц, используемой в работе [56] для ядер с заполненными одночастичными состояниями. Можно рассмотреть модель, где остов вновь считается «инертным», т. е. H_A (241) пренебрегается гамильтониан $H^{\text{ст}}_{A-1}$, но учитывается отдача остова через оператор кинетической энергии $\mathcal{K}^c_{A-1}$. Что же касается оператора V_i, то он заменяется одночастичным оператором V_{ic}. Такая модель, которая называется трехчастичной моделью, была предложена Реваем [57] и затем рассмотрена в работах [40, 58—60]. Покажем, что уравнение для матрицы рассеяния пиона на связанном нуклоне в этой модели имеет вид [40, 60]

$$\tau_i(E) = \hat{t}_i(E-B_i) + \\ + t_i(E-B_i)\hat{G}_{0i}(E-B_i)\hat{t}_{ic}(E-B_i)\hat{G}_{0i}(E-B_i)\tau_i(E). \quad (245)$$

Здесь

$$E = \omega_\pi(k_0) + E_A(K_A);$$

$$\hat{t}_i(E) = v_i + v_i\hat{G}_{0i}(E-B_i)\hat{t}_i(E-B_i); \quad (246)$$

$$\hat{t}_{ic}(E-B_i) = V_{ic} + V_{ic}\hat{G}_{0i}(E-B_i)\hat{t}_{ic}(E-B_i), \quad (247)$$

где

$$\hat{G}_{0i}(E-B_i) = [E - B_i + \mathrm{i}0 + h_\pi - \mathcal{K}^i_N - \mathcal{K}^c_{A-1}]^{-1}. \quad (248)$$

Заметим, что выражение (245) можно получить из уравнения (243), если в нем сделать очевидные замены. Выражение (245) слишком сложно для практического приложения, поэтому в работе [60] сделаны дальнейшие упрощающие приближения: 1) отбрасывается полностью второй член в выражении (245), и тем самым τ_i-матрицу можно получить в импульсном приближении, но с учетом трехчастичной кинематики; 2) оператор $h_\pi - m + \mathcal{K}^i_N$ представляется в виде суммы операторов кинетических энергий относительно движения пиона и нуклона $\mathcal{K}^r_{\pi N}$ движения их ц. м. $\mathcal{K}^c_{\pi N}$. Это, строго говоря, справедливо, когда не только нуклон, но и пион рассматривается в нерелятивистском пределе. В результате этих упрощений получим

$$\tau_i(E) \approx \tau_i^{\text{имп}}(E) = t_i^r(E - m - B_i - \mathcal{K}^c_{\pi N} - \mathcal{K}^c_{A-1}). \quad (249)$$

Если вновь использовать нерелятивистскую кинематику и пренебречь преобразованием t-матрицы из системы ц. м. пион + нуклон в систему ц. м. пион + ядро, то получим [60]

$$\langle \mathbf{k}'\mathbf{p}'_i \mid \tau_i(E) \mid \mathbf{k}\mathbf{p}_i\rangle \approx \delta(\mathbf{k}'+\mathbf{p}'_i-\mathbf{k}-\mathbf{p}_i)\, t_i^r(\mathfrak{k}', \mathfrak{k}; E_{\pi A}^r(k) - \\ - B_i - (\mathbf{k}+\mathbf{p}_i)^2/(2\mu_{\pi N, A-1})), \qquad (250)$$

где $\mathbf{k}$, $\mathfrak{k}(\mathbf{k}', \mathfrak{k}')$ определены по формулам (194), (196), (197) в нерелятивистском пределе по нуклону и

$$E_{\pi A}^r(k) = \mathbf{k}^2/2\mu_{\pi A} = E_{\pi A}(k); \\ \mu_{\pi N, A-1} = (m+M)M(A-1)/(m+MA). \qquad (251)$$

Обратим внимание на то, что при энергиях $E_{\pi A}(k)$ меньших, чем энергии развала ядра на нуклон и остаточное ядро B_i, t-матрица (249) и, следовательно, оптический потенциал $U_{00}^{\prime(1)}$ (180) являются действительными величинами, и поэтому будет обеспечена упругая унитарность (35) (с точностью до $1/A$). Такая унитарность не выполняется, например, для обычного импульсного приближения, так как при любом выборе ω (190) или (191) $t_i(\omega)$ будет комплексной. Хотя импульсное приближение в трехчастичной модели в этом отношении имеет преимущество перед обычным импульсным приближением, но она является менее обоснованной и последовательной, чем модель, в которой (в соответствии с МНЧ) пренебрегается не только возбуждениями остаточного ядра ($A - 1$), но и движением его ц. м. [41, 52, 55]. Дело в том, что для ядер ^{4}He, ^{12}C, ^{16}O, на примере которых исследуется πA-рассеяние, энергия связи нуклона с остовом больше (для ядра ^{4}He значительно больше) или порядка средней энергии связи нуклона в остове, и поэтому его нельзя рассматривать как инертную бесструктурную «частицу», испытывающую отдачу, как целое, как это считается в трехчастичной модели.

В работах [54, 56, 60], результаты которых были обсуждены выше, принцип Паули для нуклонов в ядре учитывается весьма приближенно, что мотивируется трудностями, возникающими при решении уравнений (36), (37) или (182), (183) для конечных ядер. Эти трудности отчасти происходят от необходимости одновременного учета нескольких взаимно связанных эффектов: связи нуклона в ядре, ферми-движения нуклона и принципа Паули. Последние два эффекта проще исследовать в модели ядерной материи для πA-рассеяния, в которой нет проблемы учета связи нуклона. Это было проделано в [61—64]. В [61—63] рассматривался только эффект принципа Паули. Это связано с использованием модели Чу — Лоу для πN-взаимодействия (статическая модель по нуклону!). В [64] эффект принципа Паули исследован совместно с эффектом ферми-движения.

Принимая во внимание, что модель ядерной материи является частным случаем МНЧ, в котором одночастичными состояниями являются состояния свободного движения нуклонов, в выражении H_A (241) следует отбросить H_{A-1} и V_i, а вместо B_i взять $-\varepsilon_n$, где ε_n — одночастичная энергия. Далее, ввиду того, что модель ядерной материи соответствует пределу бесконечно тяжелого ядра ($A \to \infty$) в (197) следует положить $\mathbf{k} = 0$, откуда сразу следует $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ и $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i^0$. Тогда, используя ватсоновскую формулировку ТМР (здесь мы следуем работе [64]), на основе формул (181) — (183) и (4) получаем

$$\langle \mathbf{k}_0' \mid \hat{U}_{00}(E) \mid \mathbf{k}_0 \rangle = \sum_i \langle 0\mathbf{k}_0' \mid \hat{\tau}_i(E) \mid \mathbf{k}_0 0 \rangle =$$

$$= \sum_{n \notin 0} \langle n\mathbf{k}_0' \mid \hat{\tau}(E+\varepsilon_n) \mid \mathbf{k}_0 n \rangle, \tag{252}$$

где

$$\langle n'\mathbf{k}_0' \mid \hat{\tau}(E+\varepsilon_n) \mid \mathbf{k}_0 n \rangle = \langle n'\mathbf{k}_0' \mid v \mid \mathbf{k}_0 n \rangle +$$

$$+ \sum_{n'' \notin 0} \int \frac{\langle n'\mathbf{k}_0' \mid v \mid \mathbf{k}_0'' n'' \rangle \, d\mathbf{k}_0'' \, \langle n''\mathbf{k}_0'' \mid \hat{\tau}(E+\varepsilon_n) \mid \mathbf{k}_0 n \rangle}{E+\varepsilon_n + i0 - \omega_\pi(k_0'') - \varepsilon_{n''}}. \tag{253}$$

Принимая во внимание, что для ядерной материи $\varepsilon_n = E_N(p_n)$, и вводя матрицу свободного πN-рассеяния $t(\omega)$, на основании формул (189), (253) и (77) получим

$$\langle \mathbf{p}'\mathbf{k}_0' \mid \tau(\omega_\pi(k_0) + E_N(p)) \mid \mathbf{k}_0 \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{p}'\mathbf{k}_0' \mid t(\omega) \mid \mathbf{k}_0 \mathbf{p} \rangle +$$

$$+ \int \langle \mathbf{p}'\mathbf{k}_0' \mid t(\omega) \mid \mathbf{k}_0''\mathbf{p}'' \rangle \, d\mathbf{p}'' d\mathbf{k}_0'' \left[\frac{\Theta(p''-p_F)}{\omega_\pi(k_0) + E_N(p) + i0 - \omega_\pi(k_0'') - E_N(p'')} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\omega + i0 - \omega_\pi(k_0'') - E_N(p'')} \right] \langle \mathbf{p}''\mathbf{k}_0'' \mid \tau(\omega_\pi(k_0) + E_N(p)) \mid \mathbf{k}_0 \mathbf{p} \rangle, \tag{254}$$

где $\Theta(x) = \begin{Bmatrix} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{Bmatrix}$; p_F — ферми-импульс.

Здесь возникает задача о преобразовании матрицы $t(\omega)$ при переходе из лабораторной системы пион + ядро в систему ц. м. пион + нуклон. Решение этой задачи дается (193), (196). Они принимают простой вид в тех приближениях, которые использовались в работе [64] при решении уравнений (254): 1) одночастичный потенциал в ядерной материи считается локальным, т. е. потенциал, действующий на нуклон внутри ферми-моря и вне его, считается одинаковым; 2) параметр ω выбирается в виде (190), а именно $\omega = \omega_\pi(k_0) + E_N(p) + M$, что приводит к равенству нулю интегрального члена в (196); 3) используется нерелятивистская кинематика и для пиона.

В конкретных расчетах в работе [64] используется s-волновая сепарабельная πNt-матрица, подобранная таким образом, чтобы имитировать резонансное поведение этой матрицы. Показано, что влияние учета принципа Паули на оптический потенциал сильно зависит от ферми-усреднения, а именно, при учете этого движения эффект принципа Паули в области резонанса очень мал, в то время как в статической модели [61—63] этот эффект существен. При малых энергиях важен эффект принципа Паули [64], но он всегда значительно меньше, чем в статической модели [61—63].

Модель ядерной материи для πA-рассеяния позволяет сравнительно просто исследовать также важные аспекты этой задачи в области резонанса, связанные с образованием и распространением в ядерном веществе Δ-резонанса. Этот вопрос рассматривался в работах [64, 41]. В последней работе в отличие от [64] пренебрегалось принципом Паули. В соответствии с этим удобнее пользоваться КМТ формулировкой ТМР [см. (180) и (36), (37)], и поэтому вместо (252) и (253) с учетом того, что

$$|n\rangle = |\mathbf{p}\rangle \text{ и } \varepsilon_n = E_N(p),$$

будем иметь

$$\langle \mathbf{k}_0' | U_{00}^{(1)}(\omega_\pi) | \mathbf{k}_0 \rangle = \int\limits_{p \leqslant p_F} \langle \mathbf{p}\mathbf{k}_0' | \tau(\omega_\pi + E_N(p)) | \mathbf{k}_0 \mathbf{p} \rangle \, d\mathbf{p}, \tag{255}$$

где

$$\langle \mathbf{p}'\mathbf{k}_0' | \tau(\omega_\pi + E_N(p)) | \mathbf{k}_0\mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{p}'\mathbf{k}_0' | v | \mathbf{k}_0\mathbf{p} \rangle + \\ + \int \frac{\langle \mathbf{p}'\mathbf{k}_0' | v | \mathbf{k}_0''\mathbf{p}'' \rangle \, d\mathbf{k}_0'' d\mathbf{p}'' \, \langle \mathbf{p}''\mathbf{k}_0'' | \tau(\omega_\pi + E_N(p)) | \mathbf{k}_0\mathbf{p} \rangle}{\omega_\pi + E_N(p) + i0 - \omega_\pi(k_0'') - E_N(p'')}.$$

Заметим, что в (255) опущен множитель $(A - 1)/A \approx 1$ $(A \to \infty)$. Принимая во внимание, что согласно формулам (78) и (195) в нерелятивистском пределе по нуклону имеем

$$\omega_\pi(k_0) + \omega_n(p) = \sqrt{[\omega_\pi(\mathfrak{k}) + \omega_n(\mathfrak{k})]^2 + (\mathbf{k}_0 + \mathbf{p})^2} \approx \\ \approx \omega_\pi(\mathfrak{k}) + \omega_n(\mathfrak{k}) + \frac{(\mathbf{k}_0 + \mathbf{p})^2}{2(\omega_\pi(k_0) + M)} = \\ = h_0^{cm}(\mathfrak{k}) + \frac{(\mathbf{k}_0 + \mathbf{p})^2}{2M^*}, \quad M^* = M + \omega_\pi(k_0). \tag{256}$$

В соответствии с формулами (193), (195), (196) из (256) получим

$$\langle \mathbf{p}'\mathbf{k}_0' | \tau(\omega_\pi(k_0) + E_N(p)) | \mathbf{k}_0\mathbf{p} \rangle = \\ = N\delta(\mathbf{k}_0' + \mathbf{p}' - \mathbf{k}_0 - \mathbf{p}) \, t^{cm}(b\mathbf{k}_0' - a\mathbf{p}'; \\ b\mathbf{k}_0 - a\mathbf{p}; \; \omega_\pi(k_0) + E_N(p) - (\mathbf{k}_0 + \mathbf{p})^2/2M^*). \tag{257}$$

Подставляя это выражение в (255), для оптического потенциала получаем:

$$\langle \mathbf{k}_0' \mid U_{00}^{(1)}(\omega_\pi(k_0)) \mid \mathbf{k}_0 \rangle \equiv V_{\text{опт}}^{(1)}(\mathbf{k}_0', \mathbf{k}_0; \omega_\pi(k_0)) =$$
$$= \delta(\mathbf{k}_0' - \mathbf{k}_0) \int N t^{cm} (b\mathbf{k}_0 - a\mathbf{p}, b\mathbf{k}_0 - a\mathbf{p};$$
$$\omega_\pi(k_0) + E_N(p) - (\mathbf{k}_0 + \mathbf{p})^2/2M^*). \qquad (258)$$

Следует отметить, что в работе [41] выражение (258) написано для произвольного ω_π, т. е. и для $\omega_\pi \neq \omega_\pi(k_0)$, что, имеет место, если пренебречь интегральным членом в (196).

При исследовании распространения пиона в ядерной среде с оптическим потенциалом (258) с $\omega_\pi \neq \omega_\pi(k_0)$ в [41] для матрицы πN-рассеяния t^{cm} используется резонансное выражение (70). Было показано [64], что при прохождении пиона с энергией в области (3.3)-резонанса в ядерном веществе возникает два вида движения — собственно пионный и $\Delta - h$ (h — дырка в ядерном веществе) вид движения. Эти два движения взаимно связаны, и непрерывно переходят от одного вида к другому. Их можно разделить только при малых плотностях ядерного вещества ($\rho < \rho_c = 0{,}042$ *ферми*$^{-3}$), где доминирует пионный вид движения. При увеличении плотности относительный вес $\Delta - h$ вида движения возрастает, и при плотностях близких и даже меньших плотности реальных ядер ($\rho \approx 0{,}15$ *ферми*$^{-3}$) $\Delta - h$ вид движения становится таким же важным, как и пионный. Это есть следствие учета ферми-движения. Следует подчеркнуть, что эти результаты получены без учета принципа Паули в τ-матрице, но, как показывают модельные расчеты [64], они остаются практически неизменными и при учете этого эффекта.

Та картина образования Δ-изобары при прохождении пиона с энергиями из области (3.3)-резонанса, которую мы имеем в ядерной материи (обзор о состоянии этой проблемы см. в [65]), может возникнуть и в конечных ядрах, если они описываются МНЧ и состоят из оболочек с заполненными одночастичными состояниями. В отличие от ядерной материи дырка в МНЧ соответствует одночастичному состоянию в некотором самосогласованном поле. Ясно, что состояния $\Delta - h$ будут вырожденными, если не учитывать взаимодействия Δ-изобары с дыркой. При учете этого взаимодействия вырождение будет сниматься, и в результате получим спектр возбуждения ядра типа частично-дырочных возбуждений в ядрах с заполненными одночастичными состояниями. Такой учет возбуждения ядра при построении оптического потенциала первого порядка рассматривался в [66, 67] на примере π^4He. Здесь следует заметить, что применимость этой модели к такому легкому ядру, каким является ^{4}He, вызывает сомнение из-за некорректного учета движения ц. м. ядра в МНЧ. Трудно обосновать также предположение о том, что потенциал взаимодействия i-го нуклона с «остаточным ядром» V_i [см. (241)] можно рассматривать как потенциал взаимодействия Δ-изобары (пион $+$ i нуклон в резонансе) с остаточным ядром, которое делается в работе [66] при формулировке задачи в рамках ТМР. Кроме того, такое рассмотрение вводит в теорию добавочное феноменологическое Δ-ядерное взаимодействие, хотя учет этого взаимодействия является необходимым и важным элементом Δ-изобарной динамики в ядре.

Для π^4He-рассеяния имеется возможность правильного учета движения ц. м. ядра и ферми-движения на основе использования волновой функции, полученной в трансляционно-инвариантном осцилляторном базисе [68], что позволяет на этом примере исследовать разные вопросы теории многократного рассеяния пионов на ядрах [69]. Наличие достаточно полных экспериментальных данных по π^4He-рассеянию [70, 71] делает такие исследования желательными.

5. ОПТИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим вопрос нахождения поправок к оптическому потенциалу первого порядка. Эти поправки, естественно, возникают из второго члена в правой части уравнения (21) или (24). Рассмотрим сначала подход к решению этой задачи, предложенный в работе [70]. Будем исходить из уравнения (18) для T-матрицы. Учитывая равенство $\mathcal{A} = \mathcal{P} + Q$ (8), из (18) имеем:

$$\mathcal{P}T' = \mathcal{P}\tau' + \mathcal{P}\tau' G\mathcal{P}T' + \mathcal{P}\tau' GQT'; \tag{259}$$

$$QT' = Q\tau' + Q\tau' G\mathcal{P}T' + Q\tau' GQT', \tag{260}$$

где T' — матрица, связанная с T-матрицей равенством $T' = (A-1)\,T/A$ (17), а τ'-матрица

$$\tau'(E) = (A-1)\,\tau(E). \tag{261}$$

Решая уравнение (260) относительно QT' [при этом учитываем равенства $Q^2 = Q$; $QG = GQ$ (8)]:

$$QT' = \frac{1}{Q(1-G\tau')Q}[Q\tau' + Q\tau' G\mathcal{P}T'] = $$
$$= G^{-1}\frac{1}{Q(G^{-1}-\tau')}[Q\tau' + Q\tau' G\mathcal{P}T'] \tag{262}$$

и подставляя его в (259), получаем

$$\mathcal{P}T' = \mathcal{P}U' + \mathcal{P}U' G\mathcal{P}T', \tag{263}$$

где

$$U' = \tau' + \tau' \frac{1}{Q(E+i0-h_\pi-H_A-\tau')Q} Q\tau' =$$

$$= \tau' + \tau' \frac{Q}{Q(E+i0-h_\pi-H_A)Q} U'. \qquad (264)$$

Ясно, что уравнения (263) и (19), (20) совпадают для упругого рассеяния и, следовательно, оператор U', определенный по (264), совпадает с оптическим потенциалом (21) в формулировке КМТ. Таким образом, для оптического потенциала $U'_{\text{опт}}(E) \equiv \equiv \langle 0 | U'(E) | 0 \rangle$ из (264) получаем

$$U'_{\text{опт}}(E) = \tau'_{00}(E) +$$

$$+ \sum_{\alpha',\, \alpha \neq 0} \tau'_{0\alpha'}(E)\left[E+i0-\mathscr{E}^*_\alpha-\mathscr{K}^c_A-h_\pi-\tau'_{\alpha'\alpha}(E)\right]^{-1}\tau'_{\alpha'0}(E), \qquad (265)$$

где $E = \omega_\pi + E_A$. Уравнение (265) для оптического потенциала с оператором Грина

$$\tilde{G}(E) = [E+i0-h_\pi-H_A-\tau'(E)]^{-1} \qquad (266)$$

является точным. Оператор (266) в общем случае недиагонален по возбужденным внутренним состояниям α ядра из-за недиагональности оператора $\tau'(E)$. Если в (265) пренебречь недиагональными элементами оператора τ' и, следовательно, оператора $G(E)$, то будем иметь

$$U'_{\text{опт}}(E) \approx \tau'_{00}(E) +$$

$$+ \sum_{\alpha \neq 0} \tau'_{0\alpha}(E)\left[E+i0-\mathscr{E}^*_\alpha-\mathscr{K}^c_A-h_\pi-\tau'_{\alpha\alpha}(E)\right]^{-1}\tau_{\alpha 0}(E). \qquad (267)$$

Это выражение получено в работе [72] и называется оптическим потенциалом второго порядка.

Матрица $\tau(E)$, как видно из определения (11),(12)— многочастичный оператор, учитывающий антисимметризацию векторов состояния ядра, следовательно, учитывающий принцип Паули. При нахождении оптического потенциала (267) значительного упрощения можно достичь, если вместо оператора τ_i, определенного по (36), (37), воспользоваться оператором $\bar{t}_i$, который определяется уравнением

$$\bar{t}_i(E) = \begin{cases} v_i + v_i G(E)\, t_i(E); & (268) \\ v_i + \bar{t}_i(E)\, G(E)\, v_i & (269) \end{cases}$$

и не учитывает антисимметризацию. Решая уравнение (269) относительно v_i и подставляя найденное при этом выражение в (36), получим

$$\tau_i(E) = \bar{t}_i(E) + \bar{t}_i(E)\, G(E)\, (\mathscr{A}-1)\, \tau_i(E). \qquad (270)$$

Как уже указывалось выше, операторы τ (25), (26) и τ_i (36), (37) в пространстве антисимметричных состояний ядра связаны соотношением $\tau = \sum_i \tau_i/A$, и поэтому из (270) имеем

$$\tau(E) = \frac{1}{A}\sum_i \bar{t}_i(E) + \frac{1}{A}\sum_i \bar{t}_i(E)\,G(E)\,(\mathcal{A}-1)\,\tau_i(E). \qquad (271)$$

На основе тождества Гильберта

$$A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B-A)\,B^{-1} = B^{-1}(B-A)\,A^{-1}.$$

Из (4) и (266) получим

$$G(E) = \widetilde{G}(E) - \widetilde{G}(E)\,\tau'(E)\,G(E). \qquad (272)$$

Принимая во внимание то обстоятельство, что матричные элементы операторов τ и G между состояниями из пространств $\mathcal{A}$ и $1 - \mathcal{A}$ равны нулю и, следовательно, такие матричные элементы равны нулю и для G, из (271) видим, что оператор $G(\mathcal{A} - 1)$ можно заменить оператором $\widetilde{G}(\mathcal{A} - 1)$. В результате

$$(A-1)\,\tau_{00}(E) = \frac{A-1}{A}\Big(\sum_i \bar{t}_i(E)\Big)_{00} + $$
$$+ \frac{A-1}{A}\Big(\sum_i \bar{t}_i(E)\,\widetilde{G}(E)\,(\mathcal{A}-1)\,\tau_i(E)\Big)_{00}. \qquad (273)$$

Если во втором члене в правой части этого соотношения оператор τ_i заменить оператором $\bar{t}_i$ и принять во внимание, что оператор $\mathcal{A}t_i$ имеет матричные элементы только в пространстве антисимметричных состояний, то можно написать

$$(A-1)\,\tau_{00}(E) \approx \frac{A-1}{A}\Big(\sum_i \bar{t}_i(E)\Big)_{00} + $$
$$+ \frac{A-1}{A}\Big(\sum_i \bar{t}_i(E)\,\widetilde{G}(E)\sum_j \bar{t}_j(E)\Big)_{00} - $$
$$- \frac{A-1}{A}\Big(\sum_i \bar{t}_i(E)\,\widetilde{G}(E)\,\bar{t}_i(E)\Big)_{00}. \qquad (274)$$

Вычислим теперь сумму в выражении (267). Для этого сделаем следующие приближения: 1) величины $\tau_{\alpha\alpha}$ в (266) будем считать независимыми от состояния (α) и заменим их усредненной величиной $\langle\tau'(E)\rangle = \bar{U}_0(E)$; 2) вместо $\mathcal{E}_\alpha^*$ возьмем некоторую среднюю энергию возбуждения ядра $\overline{\mathscr{E}}$. Тогда, оставляя в (271) только первый член и используя полноту векторов состояния $|\alpha\rangle$, получаем

$$\sum_{\alpha\neq 0} \tau'_{0\alpha}(E)\,\widetilde{G}_{\alpha\alpha}(E)\,\tau'_{\alpha 0}(E) \approx$$

$$\approx \frac{(A-1)^2}{A^2}\Big[\Big(\sum_i \bar{t}_i(E)\,\overline{G}(E)\sum_j \bar{t}_j(E)\Big)_{00} -$$

$$-\Big(\sum_i \bar{t}(E)\Big)_{00}\overline{G}(E)\Big(\sum_j \bar{t}_j(E)\Big)_{00}\Big], \tag{275}$$

где

$$\overline{G}(E) = [E + i0 - \mathscr{K}^c_A - h_\pi - \overline{\mathscr{E}} - \overline{U}_0(E)]^{-1}. \tag{276}$$

Складывая выражения (274) и (275) в соответствии с (267) и (261) имеем приближенное выражение для оптического потенциала

$$U'_{\text{опт}}(E) \approx U^{(1)}_{\text{опт}}(E) + U^{(2)}_{\text{опт}}(E), \tag{277}$$

где

$$U^{(1)}_{\text{опт}}(E) = (A-1)\langle 0|\frac{1}{A}\sum_i \bar{t}_i(E)|0\rangle, \tag{278}$$

$$U^{(2)}_{\text{опт}}(E) = (A-1)^2\Big[\frac{1}{A(A-1)}\sum_{i\neq j}\langle 0|\,\bar{t}_i(E)\,\overline{G}(E)\,\bar{t}_j(E)\,|0\rangle -$$

$$-\langle 0|\,\frac{1}{A}\sum_i \bar{t}_i(E)\,|0\rangle\,\overline{G}(E)\,\langle 0|\,\frac{1}{A}\sum_j \bar{t}_j(E)\,|0\rangle\Big]. \tag{279}$$

Этот оптический потенциал применялся в работе [73] при исследовании рассеяния пионов на ядре ^{4}He. В конкретных расчетах делались дальнейшие упрощающие приближения: 1) матрица $\bar{t}_i(E)$ заменялась матрицей свободного πN-рассеяния $t_i(\omega)$, где энергия ω выбиралась в соответствии с упрощенной трехчастичной моделью; 2) для матричных элементов $\langle 0|\,t_i(\omega)\,|\alpha\rangle$ использовалось приближение факторизации

$$\langle 0\mathbf{k}'\,|\sum_i t_i(\omega)\,|\,\mathbf{k}\alpha\rangle \approx \rho_{0\alpha}(\mathbf{q})\,\langle \mathbf{k}',\,\mathbf{p}_0-\mathbf{q}\,|\,t(\omega)\,|\,\mathbf{k}\mathbf{p}_0\rangle,$$

где $\mathbf{k}$ ($\mathbf{k}'$) — импульс пиона до (после) рассеяния в системе ц. м. пион + ядро; $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}' = \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}'_0$ — переданный импульс; $\mathbf{k}_0$ — импульс падающего пиона; $\rho_{0\alpha}(\mathbf{q})$ определяется выражением (210); $\mathbf{p}_0 = -\mathbf{k}/A + (A-1)\,\mathbf{q}/2A$ согласно работам [41, 42]; 3) усредненный оператор оптического потенциала $\overline{U}_0(E)$ и $\overline{G}(E)$ (276) заменялся постоянной величиной $\langle \mathbf{k}_0\,|\,U^{(1)}_{\text{опт}}(E)\,|\,\mathbf{k}_0\rangle$. В результате этих приближений оптический потенциал $U^{(2)}_{\text{опт}}$ выражается корреляционной функцией

$$C(\mathbf{q}', \mathbf{q}) = \rho_{00}(\mathbf{q}', \mathbf{q}) - \rho_{00}(\mathbf{q}')\,\rho_{00}(\mathbf{q}), \tag{280}$$

где $\rho_{00}(\mathbf{q}', \mathbf{q})$ и $\rho_{00}(\mathbf{q})$ определены по (202) и (210) соответственно. Функция $C(\mathbf{q}', \mathbf{q})$ в [73] вычисляется в рамках оболочечной модели с феноменологическим учетом короткодействующей парной корреляции. Учитывалась также корреляция, связанная с корректным учетом движения ц. м. ядра. Ясно, что эту корреляцию обязательно нужно принять во внимание при рассеянии пиона на таком легком ядре, каким является ^{4}He (об этом указывалось выше). Вопрос связи матрицы πN-столкновения в системе ц. м. пион + + нуклон с той же матрицей в системе пион + ядро в работе [73] решается в рамках релятивистской потенциальной теории [23]. Используя разложение по $Q^2/(m + M)^2$, где Q — полный импульс πN-системы (по этому вопросу см. обсуждение ниже).

Оптический потенциал второго порядка обычно исследуется в целях получения информации о парной корреляции нуклонов в ядре, которая в нем действительно содержится. Но следует иметь в виду, что при точном решении задачи информацию о корреляции можно получить и от оптического потенциала первого порядка, так как она включена и в операторы τ (11), (12) или $\hat{\tau}$ (25), (26) через оператор Грина (4) и оператор проектирования $\mathscr{A}$. При использовании импульсного приближения эффектом парной корреляции в τ или $\hat{\tau}$ частично пренебрегаем.

Несколько иное представление, чем рассмотренное выше, для оптического потенциала второго порядка было получено в работе [11] на основе корреляционного разложения полного оптического потенциала в формулировке КМТ. Это разложение, полученное непосредственно на основе уравнения (2), имеет вид

$$U'(E) = U^{(1)}(E) + U^{(2)}(E) + \ldots, \tag{281}$$

где

$$U^{(1)}(E) = \frac{A-1}{A} \sum_i \bar{t}_i(E); \tag{282}$$

$$U^{(2)}(E) = \frac{A-1}{A} \sum_{i>j} (\bar{t}_{ij}(E) - \bar{t}_i(E) - \bar{t}_j(E)). \tag{283}$$

Входящая в эти соотношения матрица $\bar{t}_i$ $(\bar{t}_j)$ определена уравнением (268), (269), а $\bar{t}_{ij} = \Lambda_{ij} + \Lambda_{ji}$, где Λ_{ij} и Λ_{ji} удовлетворяют системе уравнений

$$\Lambda_{ij} = \bar{t}_i + \bar{t}_i G (1 - \mathscr{P}) \Lambda_{ji}; \tag{284}$$

$$\Lambda_{ji} = \bar{t}_j + \bar{t}_j G (1 - \mathscr{P}) \Lambda_{ij}, \tag{285}$$

или эквивалентной ей двум несвязанным уравнениям:

$$\Lambda_{ij}=\bar{t}_i+\bar{t}_iG(1-\mathcal{P})\bar{t}_j+\bar{t}_iG(1-\mathcal{P})\bar{t}_jG(1-\mathcal{P})\Lambda_{ij}; \quad (286)$$

$$\Lambda_{ji}=\bar{t}_j+\bar{t}_jG(1-\mathcal{P})\bar{t}_i+\bar{t}_jG(1-\mathcal{P})\bar{t}_iG(1-\mathcal{P})\Lambda_{ji}. \quad (287)$$

Легко видеть, что в результате итерации этих уравнений для $\bar{t}_{ij}=\Lambda_{ij}+\Lambda_{ji}$ получим ряд

$$\bar{t}_{ij}(E)=\bar{t}_i(E)+\bar{t}_j(E)+\bar{t}_i(E)G(E)(1-\mathcal{P})\bar{t}_j(E)+$$
$$+\bar{t}_j(E)G(1-\mathcal{P})\bar{t}_i(E)+\bar{t}_i(E)G(E)(1-\mathcal{P})\bar{t}_j(E)G(E)(1-\mathcal{P})\times$$
$$\times\bar{t}_i(E)+\bar{t}_j(E)G(E)(1-\mathcal{P})\bar{t}_i(E)G(E)(1-\mathcal{P})\bar{t}_j(E)+\dots \quad (288)$$

Заметим, что (284) — (288) справедливы и тогда, когда в них вместо G стоит $G\mathcal{A}$. В соответствии с этим $G(1-\mathcal{P})$ заменяется на GQ и замену $G\mathcal{A}$ следует произвести также в уравнениях (268), (269), которые в результате сводятся к (36), (37) для τ_i. Если в разложении (288) ограничиться одно- и двухкратными членами, то для оптического потенциала второго порядка

$$U^{(2)}(E)\approx\frac{A-1}{A}\sum_{i\neq j}\bar{t}_i(E)G(E)(1-\mathcal{P})\bar{t}_j(E). \quad (289)$$

Оператор 289), так же как и соответствующая часть оператора (267), в общем случае — многочастичный оператор. Если для $\bar{t}_i$ используем импульсное приближение $\bar{t}_i(E)\approx t_i(\omega)$, то этот оператор превратится в двухчастичный оператор. Но двухчастичным является (в основном) и оператор реального поглощения пиона ядром [7]. Поэтому когда рассматривается оптический потенциал второго порядка, нужно принять во внимание и реальное поглощение пионов ядрами. Этот эффект в работах [69, 74] учитывался феноменологически в оптическом потенциале первого порядка. Такой учет производится и в [75] введением в гамильтониан πA-взаимодействия оператора парного поглощения или рождения R. Приближенный учет этого оператора сводится к замене гриновской функции $G(E)$ в (177), (178) и (25), (26) функцией

$$\tilde{G}(E)=[G^{-1}(E)-\Delta]^{-1}; \quad \Delta=RG(E)R.$$

Конкретные расчеты были произведены в [75] с использованием вместо Δ его среднего значения $\langle\Delta\rangle=-iv_\pi\lambda_a$ [76], где v_π — скорость пиона; λ_a — длина свободного пробега по отношению поглощения в ядерной материи. Расчеты, проведенные для π^4He-рассеяния [60, 75], показали, что учет реального поглощения пиона ядром приводит к заметному уменьшению сечения в области (3.3)-резонанса и с уменьшением энергии этот эффект относительно увеличивается.

По нашему мнению, более последовательный учет эффекта реального поглощения пиона ядром в рассеянии производился в работе [77] для πd-рассеяния. Результаты этой работы будут обсуждаться в следующем разделе.

6. πd-РАССЕЯНИЕ

Изложенная выше общая теория многократного рассеяния пионов на ядрах, основанная на использовании уравнения Липмана — Швингера (1), естественно, применима и к рассеянию пионов на дейтоне. Но при этом надо иметь в виду, что дейтон — слабо связанная система, которая не имеет связанных возбужденных состояний, вследствие чего влияние канала развала дейтона на упругое рассеяние пиона может быть существенным. Канал развала дейтона, как известно, некорректно учитывается в рамках уравнений Липмана — Швингера, и поэтому может оказаться, что уравнение (1) не всегда будет подходящим уравнением для описания πd-рассеяния даже для упругого канала.

Если πd-взаимодействие рассматривается при кинетических энергиях пиона $T_\pi \leqslant 300$ *Мэв*, где можно не учитывать рождение новых сильнодействующих частиц, то к этой задаче применимы уравнения Фаддеева или их релятивистские обобщения. Ясно, что эти уравнения непосредственно описывают следующие каналы:

$$\pi^{\pm}+d \Rightarrow \begin{cases} d+\pi^{\pm}; & (290)\\ np+\pi^{\pm}; & (291)\\ \begin{pmatrix} pp \\ nn \end{pmatrix}+\pi^{0}. & (292) \end{cases}$$

Канал поглощения $\pi d \to NN$ можно учесть для πd-рассеяния, имея решение трехчастичной задачи (290) — (292) (этот вопрос обсуждается ниже).

Уравнения Фаддеева для процессов (290)—(292) корректно учитывают каналы развала (291), (292), т. е. не имеют того недостатка, который имеется в уравнениях Липмана — Швингера (1). Использование уравнений Фаддеева или их релятивистских обобщений имеют то преимущество перед ТМР, изложенной выше, что они непосредственно выражены через матрицы πd-столкновений в свободном состоянии, т. е. нет необходимости использовать импульсное приближение, применимость которого в области $T_\pi \leqslant 300$ *Мэв* сомнительна. Кроме того, поскольку в определенных моделях парных взаимодействий эти уравнения разрешимы численными методами без использования, например, ПФЦ, появляется возможность на примере πd-рассеяния исследовать точность этого приближения. На этом примере можно исследовать также сходимость ряда многократного рассеяния. Далее, используя то обстоятельство, что трехчастичные уравнения Фаддеева содержат двухчастичные матрицы столкновения внеэнергетической поверхности, на основе изучения πd-рассеяния в рамках таких уравнений можно получать сведения о внеэнергетическом поведении матрицы πN- и NN-столкновений. На этом примере возможно исследовать также другие вопросы динамики пион-ядерного взаимодействия. Из сказанного следует, что, фундаментальное значение изучения πd-рассеяния в рамках трехчастичных уравнений для пион-ядерной физики.

Исследованию πd-рассеяния в рамках трехчастичных уравнений посвящено достаточно много работ [47—50, 78—86]. Часть из них [47, 76—80, 82, 85] использует нерелятивистские уравнения (уравнения Фаддеева), а остальные [48—50, 81, 82, 84, 86] — релятивистские уравнения. Эффект релятивистской кинематики заметен даже для длины πd-рассеяния [81], поэтому рассеяние пиона на дейтоне следует изучать на основе релятивистских трехчастичных уравнений. Уравнения, используемые в [82, 86], получены в работе [87] методом Бланкенбеклера — Шугара [88], а в работах [48, 49] применяются уравнения, полученные этим методом в изобарной модели [89]. Что касается работ [50, 81, 84], то там задача исследуется на основе трехчастичных уравнений, полученных в [90] в рамках квазипотенциального подхода Логунова — Тавхелидзе [91]. Подчеркнем, что во всех этих релятивистских уравнениях все частицы находятся на массовой поверхности. Релятивистские уравнения — потенциальные, т. е. схожи с уравнениями в релятивистской потенциальной теории (РПТ), обсуждаемой в разд. 1 и 2 данной статьи. Но в отличие от РПТ, где все пропагаторы линейны по энергиям, уравнения, используемые в работах [48, 49, 82, 86], содержат квадратичные по энергии пропагаторы и, как следствие этого, нарушаются так называемые кластерные свойства уравнений Фаддеева.

Заметим, что эту трудность в уравнениях такого типа можно избежать, если использовать относительные координаты Ватмана—Гоордин [92] (насколько нам известно, этот формализм до сих пор никем не применялся к πd-рассеянию). Что касается релятивистских трехчастичных уравнений, исследуемых в работах [50, 81, 84], для них эта трудность не возникает из-за линейности пропагаторов по энергиям. Эти уравнения наиболее близки к уравнениям Фаддеева и допускают естественный предельный переход к последним, и, следовательно, близки к уравнениям РПТ. Но имеется отличие: если в РПТ потенциал не зависит от энергии [см. (79)], то квазипотенциал зависит от энергии.

Уравнения для задачи рассеяния пиона (частица *1*) на дейтоне, учитывающие тождественность нуклонов (частицы *2* и *3*) и используемые в работах [50, 84], имеют вид [81]:

$$\mathscr{P}_{23}\tilde{u}_{11}(P_0)\mathscr{P}_{23}=\mathscr{P}_{23}\tilde{T}_2(P_0)\tilde{G}_0(P_0)\tilde{u}_{2+3,\,1}(P_0)\mathscr{P}_{23}; \tag{293}$$

$$\tilde{u}_{2+3,\,1}(P_0)\mathscr{P}_{23}=2\tilde{G}_0^{-1}(P)\mathscr{P}_{23}+2\tilde{T}_1(P_0)\tilde{G}_0(P_0)\mathscr{P}_{23}\tilde{u}_{11}(P_0)\mathscr{P}_{23}-$$
$$-P_{23}\tilde{T}_2(P_0)\tilde{G}_0(P_0)\tilde{u}_{2+3,\,1}(P_0)\mathscr{P}_{23}. \tag{294}$$

где P_{23} — оператор перестановки нуклонов; P_0 — полная энергия системы; $G_0(P_0)$ — функция Грина, и

$$\mathscr{P}_{23}=\mathscr{P}_{23}^2=\mathscr{P}_{23}^+=(1-P_{23})/2; \tag{295}$$

$$\tilde{u}_{2+3,\,1}(P_0)=\tilde{u}_{21}(P_0)-P_{23}\tilde{u}_{31}(P_0). \tag{296}$$

Здесь $\tilde{T}_1$ и $\tilde{T}_2$ — двухчастичные матрицы столкновения соответственно для (3.3)- и (3.1)-пар в системе ц. м. трех частиц; $\tilde{u}_{11}$ — оператор перехода $\pi d\to\pi d$; $\tilde{u}_{2+3,1}$ — вспомогательный оператор. Оператор перехода $1+(2,\,3)\to 1+2+3$, т. е. оператор рассеяния пиона на дейтоне с развалом последнего, выражается через решения системы уравнений (293), (294) в виде

$$\mathscr{P}_{23}\tilde{u}_{01}(P_0)\mathscr{P}_{23}=\tilde{G}_0^{-1}(P_0)\mathscr{P}_{23}+\mathscr{P}_{23}\tilde{T}_2(P_0)\tilde{G}_0(P_0)\tilde{u}_{2+3,\,1}(P_0)\mathscr{P}_{23}+$$
$$+\mathscr{P}_{23}\tilde{T}_1(P_0)\tilde{G}_0(P_0)\mathscr{P}_{23}\tilde{u}_{11}(P_0)\mathscr{P}_{23}. \tag{297}$$

Проблема нахождения связи двухчастичных матриц столкновения в системе ц. м. трех частиц с теми же матрицами в системе ц. м. соответствующих пар в данном подходе решается значительно проще в РПТ, рассмотренной во втором разделе данной статьи. Чтобы продемонстрировать это, заметим, что в координатах Якоби

$$\mathbf{p}_{jk}=\frac{m_k\mathbf{p}_j-m_j\mathbf{p}_k}{m_j+m_k};\quad p_{jk}^0=\frac{m_kp_j^0-m_jp_k^0}{m_j+m_k},\quad ijk=123,\ 231,\ 312; \tag{298}$$

$$\mathbf{q}_i=\frac{m_i(\mathbf{p}_j+\mathbf{p}_k)-(m_j+m_k)\mathbf{p}_i}{m_i+m_j+m_k}=\mathbf{P}_i=\mathbf{p}_j+\mathbf{p}_k=-\mathbf{p}_i, \tag{299}$$

где $\mathbf{p}_i$, $\mathbf{p}_j$, $\mathbf{p}_k$; m_i, m_j, m_k — импульсы и массы частиц; p_i^0 — четвертая компонента 4-импульса $p_i=(p_i^0,\,\mathbf{p}_i)$ в системе ц. м. трех частиц. Двухчастичная матрица T_i в этой системе имеет вид [81]

$$\langle\mathbf{p}'_{jk}\mathbf{q}'_i\mid\tilde{T}_i(P_0)\mid\mathbf{p}_{jk}\mathbf{q}_i\rangle=\omega_i(\mathbf{q}_i)\,\delta(\mathbf{q}'_i-\mathbf{q}_i)\,\tilde{T}_i(\mathbf{p}'_{jk}\mathbf{p}_{jk};\,P_{0i}\mathbf{P}_i), \tag{300}$$

где

$$\omega_i(p)=\sqrt{m_i^2+\mathbf{p}^2};\quad P_{0i}=P_0-\omega_i(q_i); \tag{301}$$

$\widetilde{T}_i\,(\mathbf{p}'_{jk}\mathbf{p}_{jk};\ P_{0i}\mathbf{P}_i)$ удовлетворяет квазипотенциальному уравнению [90]

$$\widetilde{T}_i\,(\mathbf{p}'_{jk}\mathbf{p}_{jk};\ P_{0i}\mathbf{P}_i)=\widetilde{V}_i\,(\mathbf{p}'_{jk}\mathbf{p}_{jk};\ P_{0i}\mathbf{P}_i)+ \\ +\int\frac{\widetilde{V}_i\,(\mathbf{p}'_{jk}\mathbf{p}''_{jk};\ P_{0i}\mathbf{P}_i)\,\widetilde{T}_i\,(\mathbf{p}''_{jk}\mathbf{p}_{jk};\ P_{0i}\mathbf{P}_i)\,d\mathbf{p}''_{jk}}{2\omega_j\,(p''_j)\,\omega_k\,(p''_k)\,[P_{0i}+i0-\omega_j\,(p''_j)-\omega_k\,(p''_k)]}. \qquad (302)$$

Связь этой матрицы с той же матрицей в системе ц. м. jk-пары имеет вид [81]

$$\widetilde{T}_i\,(\mathbf{p}'_{jk}\mathbf{p}_{jk};\ P_{0i}\mathbf{P}_i)/2= \\ =a_i\,(q'_{jk}q_jP_0)\sqrt{\omega_j\,(q'_{jk})\,\omega_k\,(q'_{jk})}\,T_i\,(\mathbf{q}'_{jk}\mathbf{q}_{jk};\ P_i^2)\times \\ \times\sqrt{\omega_j\,(q_{jk})\,\omega_k\,(q_{jk})}\,a_i\,(q_{jk}q_iP_0) \qquad (303)$$

(аналогично для $\widetilde{V}_i$), где

$$a_i\,(q_{jk}q_iP_0)=\begin{cases}\left[\dfrac{[S_{jk}\,(q)+\mathbf{q}_i^2]^{1/2}\,[\sqrt{S_{jk}\,(q)}+\sqrt{P_i^2}]}{\sqrt{S_{jk}\,(q)}\,[P_{0i}+\sqrt{S_{jk}\,(q)+\mathbf{q}_i^2}]}\right]^{1/2}, & P_i^2>0;\\[2ex] \left[\dfrac{[S_{jk}\,(q)+\mathbf{q}_i]^{1/2}\,[\sqrt{S_{jk}\,(q)+\mathbf{q}_i^2}-P_{0i}]}{\sqrt{S_{jk}\,(q)}\,[\sqrt{S_{jk}\,(q)}+\sqrt{-P_i^2}]}\right]^{1/2}, & P_i^2<0;\end{cases} \qquad (304)$$

$$P_i^2=P_{0i}^2-\mathbf{P}_i^2=[P_0-\omega_i\,(q_i)]^2-\mathbf{q}_i^2;$$

$$S_{jk}\,(q)=[\omega_j\,(q_{jk})+\omega_k\,(q_{jk})]^2=[\omega_j\,(p_j)+\omega_k\,(p_k)]^2-(\mathbf{p}_j+\mathbf{p}_k)^2, \qquad (305)$$

а матрица $T_i\,(q'_{jk}q_{jk};\ P_i^2)$ определена уравнением типа Липмана — Швингера

$$T_i\,(\mathbf{q}'_{jk}\mathbf{q}_{jk};\ P_i^2)=V_i\,(\mathbf{q}'_{jk}\mathbf{q}_{jk};\ P_i^2)+ \\ +\int\frac{V_i\,(\mathbf{q}'_{jk}\mathbf{q}''_{jk};\ P_i^2)\,T_i\,(\mathbf{q}''_{jk}\mathbf{q}_{jk};\ P_i^2)\,d\mathbf{q}''_{jk}}{\xi\,(P_i^2)+i0-\omega_j\,(\mathbf{q}''_{jk})-\omega_k\,(q''_{jk})}; \qquad (306)$$

$$\xi\,(P_i^2)=\begin{cases}\sqrt{P_i^2}, & P_i^2>0;\\ -\sqrt{-P_i^2}, & P_i^2<0.\end{cases} \qquad (307)$$

Относительный импульс jk-пары, входящий в (303) — (307), определен выражением [81]

$$\mathbf{q}_{jk}=-\mathbf{q}_j-\varphi_{jk}\,(\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j)\,\mathbf{q}_i; \qquad (308)$$

$$\varphi_{jk}\,(\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j)=\frac{\omega_i\,(q_j)}{\sqrt{S_{jk}\,(q)}}+ \\ +\frac{\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j}{\sqrt{S_{jk}\,(q)}\,[\omega_j\,(q_j)+\omega_k\,(|\,\mathbf{q}_i+\mathbf{q}_j\,|)+\sqrt{S_{jk}\,(q)}]}, \qquad (309)$$

которое получается лоренц-преобразованием (84) над импульсом $\mathbf{p}_j = -\mathbf{q}_j$. Совершенно аналогично для относительного импульса ki-пары имеем выражение

$$\mathbf{q}_{ki} = \mathbf{q}_i - \varphi_{ki}(\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j)\,\mathbf{q}_j, \tag{310}$$

которое получается из выражения $\mathbf{q}_{ki}$, приведенного в работе [81], после несложных преобразований. Заметим, что если 4-импульс $p_{jk} = (p^0_{jk}, \mathbf{p}_{jk})$ вместо (298) определить по формуле

$$p_{jk} = \frac{\omega_k(|\mathbf{p}_k|)\,p_j - \omega_j(|\mathbf{p}_j|)\,p_k}{\omega_j(|\mathbf{p}_j|) + \omega_k(|\mathbf{p}_k|)}, \tag{311}$$

то в результате лоренц-преобразования над этим 4-импульсом для относительного импульса $\mathbf{q}_{jk}$ получим выражение вида (80), (81). Но при этом вид уравнений, найденных в работе [81], остается неизменным.

Обратим внимание на то, что выражение (303), справедливое для двухчастичной матрицы столкновения полностью вне энергетической поверхности, значительно проще, чем выражение (104), полученное в работе [23] в РПТ. Такое различие обусловлено тем, что в квазипотенциальном подходе, использованном при выводе (303), связь между $\tilde{V}_i$ и V_i, которые зависят от энергии, дается выражением, аналогичным (303), в то время как в лоренц-инвариантной потенциальной теории связь между v_i и v_i, которые считаются независящими от энергии, определяется равенством

$$\mathrm{v} = \sqrt{(h^{cm}_{0i} + v_i)^2 + \mathbf{P}_i^2} - \sqrt{(h^{cm}_{0i})^2 + \mathbf{P}_i^2} \tag{312}$$

[см. (78), (79)], где h^{cm}_{0i} — гамильтониан невзаимодействующих частиц j и k в системе ц. м. пары.

Очень важным для приложения является тот факт, что в (303) матрица, связывающая $\tilde{T}_i$ и T_i, не интегральная, а простая функция, и что она факторизована. В этом отношении аналогичная связь между $\tilde{T}_i$ и T_i получена и в работе [86]*, в которой использован один из вариантов (нековариантный) трехчастичных уравнений [87].

Проблема перехода от системы ц. м. двух частиц к системе ц. м. трех частиц для уравнений, используемых в работах [48, 49], сводится только лишь к правильному выбору относительных импульсов пары частиц, и это обусловлено ковариантностью соответствующих уравнений в изобарной модели [87]. Один из двух вариантов относительных импульсов, используемых в работах [48, 49], совпадает с (310), (311).

---

* Входящая в формулу (1.2) работы [86] величина $\omega_0(q_i) = \sqrt{P_i^2}$ требует определения, согласно формуле (307).

Как отмечалось выше, одним из вопросов, который может быть изучен в результате применения трехчастичных уравнений к πd-рассеянию, является вопрос сходимости ряда многократного рассеяния. По этому вопросу в работе [48] получен интересный результат, касающийся πd-рассеяния в области (3.3)-резонанса и состоящий в том, что ряд многократного рассеяния в трехчастичном подходе сходится значительно быстрее, чем аналогичный ряд в ПФЦ. Таким образом, причина плохой сходимости (расходимости) ряда (154) является основное приближение (109), в котором оно получено. Но вместе с тем ряд многократного рассеяния и в трехчастичном подходе сходится медленно, что связано с NN-перерассеянием в промежуточных состояниях. Этот эффект играет существенную роль при больших углах рассеяния. На это обстоятельство впервые было обращено внимание в работе [47]. В дальнейшем этот результат подтверждался в той или иной степени в последующих расчетах, а согласно работе [50] основной вклад в сечения от многократного рассеяния приходится на NN-перерассеяние, т. е. это означает, что в области (3.3)-резонанса в правой части (294) можно пренебречь последним членом, в результате из уравнений (293), (294) получим отдельное уравнение для упругого рассеяния

$$\mathcal{P}_{23}\widetilde{u}_{11}\mathcal{P}_{23} = 2\mathcal{P}_{23}\widetilde{T}_2\mathcal{P}_{23} + 2\mathcal{P}_{23}\widetilde{T}_2\widetilde{G}_0\widetilde{T}_1\widetilde{G}_0\mathcal{P}_{23}\widetilde{u}_{11}\mathcal{P}_{23}. \qquad (313)$$

Принимая во внимание, что $\widetilde{G}_0\widetilde{T}_1\widetilde{G}_0 = \widetilde{G}_1 - \widetilde{G}_0$, где $\widetilde{G}_1$ — полная функция Грина для 1-го канала ($\pi d \to \pi d$), из (313) получим

$$\mathcal{P}_{23}\widetilde{u}_{11}\mathcal{P}_{23} = 2\mathcal{P}_{23}\widetilde{T}_2\mathcal{P}_{23} + 2\mathcal{P}_{23}\widetilde{T}_2(\widetilde{G}_1 - \widetilde{G}_0)\mathcal{P}_{23}\widetilde{u}_{11}\mathcal{P}_{23}. \qquad (314)$$

Оператор $\widetilde{G}_1$ совпадает с оператором G (4) для πd-системы, следовательно, (314) является уравнением, эквивалентным уравнениям Липмана — Швингера для πd-рассеяния с учетом тождественности нуклонов. Ясно, что значительно проще решать уравнения (314) или (313), чем систему уравнений (293), (294). Еще раз подчеркнем здесь, что уравнения (313) и (314) являются приближенными.

Кратко рассмотрим роль релятивистской кинематики в πd-рассеянии в области (3.3)-резонанса. Этот вопрос рассматривался в работах [49, 50] и было показано, что релятивистскую кинематику для πN-системы необходимо учитывать [49], что приводит к заметному эффекту даже для рассеяния вперед и что эффект полного учета релятивистской кинематики для пиона в сечениях того же порядка, что и эффект многократного рассеяния [50].

Одной из основных целей изучения пион-ядерного взаимодействия, как известно, является получение информации о поведении матрицы πN-столкновения в неэнергетической поверхности. Применение трехчастичных уравнений к πd-рассеянию дает уникальную возможность для извлечения такой информации, так как эти уравнения непосредственно содержат в себе матрицу свободного πN-столкновения в неэнергетической поверхности. Этот вопрос исследовался для рассеяния пионов как с нулевой энергией [84], так и при энергиях в области (3.3)-резонанса [50]. С этой целью использовались две разные матрицы πN-столкновения: одна из них [83] соответствует потенциалу вида (62), параметры которого подобраны таким образом, чтобы описать экспериментальные данные до 300 *Мэв*, а другая [17] получена решением обратной задачи рассеяния и соответствует зависящему от энергии потенциалу (65). Эти две матрицы отличаются друг от друга внеэнергетическим поведением даже в области импульсов $\leqslant 400$ *Мэв/с*, которая, как показывают расчеты, является основной в интегрировании при решении интегральных уравнений (293), (294).

Показано [50], что πd-рассеяние в области (3.3)-резонанса заметно чувствительно внеэнергетическому поведению матрицы πN-столкновения, а для длины πd-рассеяния эффект оказался более заметным [84]. Упомянем здесь о найденной в работе [86] незначительной чувствительности сечений πd-рассеяния к внеэнергетическому поведению матрицы πN-столкновения. Такое различие в результатах, по-видимому, вызвано тем, что в [86] параметры взаимодействия подбирались из условия хорошего описания данных по πN-рассеянию только в области (3.3)-разонанса, беря t-матрицу в виде (70), а изменение внеэнергетического поведения достигалось лишь изменением радиуса πN-взаимодействия, т. е. изменением параметра форм-фактора $\widetilde{v}_1(p)$. При построении использованной же в работе [50] t-матрицы учитывались фазы рассеяния в значительно широкой области энергии ($\leqslant 9$ *Гэв*), и, вероятно, в этом случае эффект внеэнергетического поведения не сводится только к радиусу πN-взаимодействия.

Обсудим теперь вопрос учета канала поглощения пиона $\pi d \to \to NN$ в πd-рассеянии, который в работе [77] рассматривался на основе метода связи каналов, предложенного в работах [93]. Корректный учет поглощения пиона системой нуклонов требует исключения возможности двойного учета (overcounting) акта поглощения и испускания пиона нуклоном $\pi N \rightleftarrows N$. Дело в том, что с точки зрения полевого подхода вершина $\pi N \rightleftarrows N$ участвует как в πN- и NN-взаимодействиях, так и в реальном поглощении пиона системой нуклонов. Чтобы избежать двойного учета $\pi N \rightleftarrows N$ вершин, авторы работы [77] исходят из гамильтониана системы с фиксированным членом нуклонов (в рассматриваемом случае система двух нуклонов) и произвольного числа пионов

$$H = H_0 + V_{\pi N} + V_{NN} + R + R^+,$$

где H_0 — оператор кинетической энергии частиц; V_{NN} — оператор взаимодействия между нуклонами, не включающий обмен пионами, но содержащий обмен тяжелыми мезонами (ρ, ω и т.п .); R и R^+ — операторы уничтожения и рождения пиона отдельным нуклоном; $V_{\pi N}$ — оператор πN-взаимодействия, который не может порождаться любой комбинацией операторов R и R^+. Например, $V_{\pi N}$ включает взаимодействие через обмен тяжелых мезонов. Рассматривая два взаимно связанных канала: безмезонный (канал с двумя нуклонами и ни одного пиона) и одномезонный (канал с двумя нуклонами и с одним пионом), а остальные каналы учитываются эффективно.

В работе [77] получено выражение для T-матрицы переходов между одномезонными состояниями ($\pi NN \rightleftarrows \pi NN$):

$$T_{11}(E) = T_{11}^F(E) + \langle \Psi_1^{(-)} \mid R_{10}[E + i0 - h_0 - W_{NN}(E)]^{-1} R_{01} \mid \Psi_1^{(-)} \rangle. \tag{315}$$

Здесь T_{11}^F-матрица для переходов $\pi NN \rightleftarrows \pi NN$, полученная решением трехчастичных уравнений с неким эффективным πN- и NN-взаимодействиями (в общем случае учитывается и трехчастичное πNN-взаимодействие); $\mid \Psi_1^{(-)} \rangle$ — соответствующие векторы состояния; h_0 — эффективный оператор кинетической энергии двух нуклонов; $W_{NN}(E)$ — соответствующий оператор взаимодействия, который, например, воспроизводит экспериментальные фазы NN-рассеяния; R_{01} и R_{10} — операторы, связывающие безмезонный канал (NN) с одномезонным каналом (πNN). Второй член в (315) учитывает вклад в матрицу переходов $\pi NN \rightleftarrows \pi NN$ от переходов, идущих через безмезонный канал, т. е. учитывает реальное поглощение пиона NN-системой.

Таким образом, формула (315) решает (в принципе) задачу учета поглощения пиона при его рассеянии на дейтоне. На основе этой формулы в работе [77] в определенной модели рассчитывался вклад от второго члена (315) в длину πd-рассеяния. Величина этой поправки оказалась зависящей от деталей модели.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из приведенного выше анализа видно, что теория многократного рассеяния, основанная на релятивистской потенциальной теории, имеет широкие возможности для изучения пион-ядерной динамики. Из анализа результатов, полученных на основе оптического потенциала первого порядка, видно, что при построении t-матрицы рассеяния пиона на связанном в ядре нуклоне необходимо дальнейшее исследование роли возбуждения ядра мишени и принципа Паули. В этой связи представляет значительный интерес точное решение модельной задачи рассеяния пиона на связанном во внешнем поле нуклоне. В настоящее время есть возможность решить (численно) такую задачу для осцилляторного внешнего поля. Полученную таким образом t-матрицу можно применить к реальной задаче рассеяния пиона на легких ядрах, для которых в основном и ведутся экспериментальные исследования.

Учет парного поглощения пионов нуклонами ядра мишени при построении оптического потенциала второго порядка в настоящее время является важной задачей, с изучением которой связан вопрос о получении надежной информации о парной корреляции нуклонов в ядре.

Расчеты πA-рассеяния на основе оптического потенциала второго порядка будут информативными относительно парной корреляции нуклонов в том случае, если сначала выяснена роль всех эффектов, связанных с оптическим потенциалом первого порядка, тем самым можно будет выделить эффекты, которые связаны исключительно с оптическим потенциалом второго порядка.

Очень интересным, на наш взгляд, является изучение роли релятивистской кинематики пиона в πA ($A \geqslant 3$)-рассеянии, которая оказалась ощутимой для πd-рассеяния.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Hüffner J.** «Phys. Reports C», 1975, v. 21, p. 1.
2. **Dirac P. A.** «Rev. Mod. Phys.», 1949, v. 21, p. 392; **Bakamjian B., Thomas L. H.** «Phys. Rev.», 1953, v. 92, p. 1300; **Osborn H.** «Phys. Rev.», 1968, v. 176, p. 1514.
3. **Foldy L. L.** «Phys. Rev.», 1961, v. 122, p. 275.
4. **Fong R., Sucher J.** «J. Math. Phys.», 1964, v. 5, p. 456.
5. **Coester F.** «Helv. phys. acta», 1965, v. 38, p. 7; **Schierholz G.** «Nucl. Phys. B», 1968, v. 7, p. 432.
6. **Foldy L. L., Krajcik R. A.** «Phys. Rev. Lett.», 1974, v. 32, p. 1025; «Phys. Rev. D», 1975, v. 12, p. 1700.
7. **Копалейшвили Т. И.** «ЭЧАЯ», 1971, т. 2, вып. 2, с. 439.
8. **Гольдбергер М., Ватсон К.** Теория столкновений. Пер. с англ. М., «Мир», 1967.
9. **Kerman A. K., McManus H., Thaler R. M.** «Ann. Phys.», 1959, v. 8, p. 551.
10. **Nagarajan M. A., Wang W. L., Ernst D. J., Thaler R. M.** «Phys. Rev. C», 1975, v. 11, p. 1167.
11. **Ernst D. J., Londergan T. J., Miller G. A., Thaler R. M.** «Phys. Rev. C», 1977, v. 16, p. 537.
12. **Freedman D. Z., Lovelace C., Namyslowski J. M.** «Nuovo cimento A», 1966, v. 43, p. 258.
13. **Ernst D. J., Shakin C. M., Thaler R. M.** «Phys. Rev. C», 1974, v. 9, p. 1374.
14. **Tabakin F.** Carnegic-Mellon Conference. AIP Series 33, 1976, p. 38.
15. **Lovelace C.** «Phys. Rev. B», 1964, v. 135, p. 1225.
16. **Landau R. H., Tabakin F.** «Phys. Rev. D», 1972, v. 5, p. 274.
17. **Londergan J. T., McVoy K. V., Moniz E. J.** «Ann. Phys.», 1974, v. 86, p. 147.
18. **Chew G. F., Low F. F.** «Phys. Rev.», 1956, v. 101, p. 1570.
19. **Landau R. H., Phatak S. C., Tabakin F.** «Ann. Phys.», 1973, v. 78, p. 299.
20. **Kujawski E., Miller G. A.** «Phys. Rev. C», 1973, v. 9, p. 1205; **Miller G. A.** «Phys. Rev. C», 1974, v. 10, p. 1242.
21. **Celenza L., Liu L. C., Shakin C. M.** «Phys. Rev. C», 1975, v. 12, p. 1983.
22. **Schmit C., Dedonder J. P., Maillet J. P.** «Nucl. Phys. A», 1975, v. 239, p. 445.

23. **Heller L., Bohanon G. E., Tabakin F.** «Phys. Rev. C», 1976, v. 13, p. 742; **Heller L.** Carnegic-Mellon Conference. AIP Series 33. 1976, p. 93.
24. **Соколов С. Н.** «Докл. АН СССР», 1975, т. 221, с. 809.
25. **Kowalski K. L., Pieper S. C.** «Phys. Rev. C», 1971, v. 4, p. 74.
26. **Benayoun J. J., Gignoux C., Cillesie J.** «Nucl. Phys. A», 1976, v. 274, p. 525.
27. **Foldy L. L., Waleca J. D.** «Ann. Phys.», 1969, v. 54, p. 447.
28. **Glouber R. J.** «Phys. Rev.», 1955, v. 100, p. 242; Lectures in Theoretical Physics. V. 1. N.Y., Interscience, 1959, p. 315.
29. **Ситенко Г. А.** «ЭЧАЯ», 1973, т. 4, вып. 2, с. 546.
30. **Harrington D. R.** «Phys. Rev.», 1969, v. 184, p. 1745.
31. **Osborn T. A.** «Ann. Phys.», 1970, v. 58, p. 417.
32. **Remler R. A.** «Phys. Rev.», 1968, v. 176, p. 2108; «Ann. Phys.», 1971, v. 67, p. 114.
33. **Eisenberg J. M.** «Ann. Phys.», 1972, v. 71, p. 542.
34. **Agassi D., Gal A.** «Ann. Phys.», 1973, v. 75, p. 56.
35. **Hüffner J.** «Nucl. Phys. B», 1973, v. 58, p. 55.
36. **Koch J., Walecka J. D.** «Nucl. Phys. B», 1974, v. 72, p. 283.
37. **Beg M. A. B.** «Ann. Phys.», 1961, v. 13, p. 110.
38. **Belyaev V. B., Wrzecionko J.** Preprint E2210668, JINR, Dubna, 1977.
39. **Agassi D., Gal A.** «Ann. Phys.», 1975, v. 94, p. 184.
40. **Tandy P. C., Redish E. F., Bollé D.** «Phys. Rev. C», 1977, v. 16, p. 1924.
41. **Lenz F.** «Ann. Phys.», 1975, v. 95, p. 348.
42. **Landau R. H.** «Ann. Phys.», 1975, v. 92, p. 205.
43. **Landau P. H., Thomas A. W.** «Phys. Lett. B», 1976, v. 41, p. 361.
44. **Schmith C.** «Nucl. Phys. A», 1972, v. 197, p. 449.
45. **Mach R.** «Nucl. Phys. A», 1973, v. 205, p. 56.
46. **Smith C.** «Nucl. Phys. A», 1977, v. 276, p. 474.
47. **Myhrer F., Koltun D. S.** «Nucl. Phys. B», 1975, v. 86, p. 441.
48. **Moloshyn R. M., Moniz E. J., Aaron R.** «Phys. Rev. C», 1976, v. 13, p. 886.
49. **Rinat A. S., Thomas A. W.** «Nucl. Phys. A», 1977, v. 282, p. 365.
50. **Kopaleishvili T.I.,Machavariani A.I., Emelyanenko G. E.** Preprint E4-10943, JINR, Dubna, 1977. «Nucl. Phys. A», 1978, v. 302, p. 423.
51. **Kohmura T.** «Nucl. Phys. B», 1972, v. 36, p. 288.
52. **Dedonder J. P., Schmith C.** «Phys. Lett. B», 1976, v. 65, p. 131.
53. **Siciliano E. R., Walker G. E.** «Phys. Rev. C», 1976, v. 13, p. 257.
54. **Bajaj K. K., Nogami Y.** «Ann. Phys.», 1977, v. 103, p. 141.
55. **Maillet J. P., Dedonder J. P., Schmit C.** «Nucl. Phys. A», 1976, v. 271, p. 253.
56. **Julius D. I., Rogers C.** «Phys. Rev. C», 1975, v. 12, p. 206.
57. **Revai J.** «Nucl. Phys. A», 1973, v. 205, p. 20.
58. **Kujawski E., Aithken A.** «Nucl. Phys. A», 1974, v. 221, p. 60.
59. **Landau R. H., Thomas A. W.** «Phys. Lett. B», 1976, v. 61, p. 361.
60. **Landau R. H., Thomas A. W.** Preprint TRI PP-77-4, 1977.
61. **Dover C. B., Lemmer R. N.** «Phys. Rev. C», 1973, v. 7, p. 2312.
62. **Eisenberg J. M., Weber H. J.** «Phys. Lett. B», 1973, v. 45, p. 110.
63. **Dover C. B., Ernst D. J., Thaler R. M.** «Phys. Rev. Lett.», 1974, v. 32, p. 557.
64. **Schmith C.** «Nucl. Phys. A», 1977, v. 276, p. 477.
65. **Brown G. F., Weise W.** «Phys. Reports», 1975, v. 22, p. 279.
66. **Hirata M., Lenz F., Yazoki K.** «Ann. Phys.», 1977, v. 108, p. 116.
67. **Weise W.** «Nucl. Phys. A», 1977, v. 278, p. 402.
68. **Гогсадзе Г. Ш., Копалейшвили Т. И.** «Ядерная физика», 1974, т. 19, с. 539.
69. **Kopaleishvili T. I., Skhirtladze V. C.** In: Abstract Volume of Conference Proceeding 7th International Conference on High-Energy Physics and Nuclear Structure. Zürich, 29 VIII-2 IX, 1977, p. 78.

70. **Shcherbakov Yu. A.** In: Carnegic-Mellon Conference. AIP Series 33, 1976, p. 365.
71. **Binon F. G.** Ibid., p. 348.
72. **Feshbach H., Gal A., Hüffner J.** «Ann. Phys.», 1971, v. 66, p. 20.
73. **Lee T. H., Chakravarti S.** «Phys. Rev. C», 1977, v. 16, p. 273.
74. **Ericson M., Ericson T. E.** «Ann. Phys.», 1966, v. 36, p. 323.
75. **Charlton L. A., Eisenberg J. M.** «Ann. Phys.», 1971, v. 63, p. 286.
76. **Watson K. M.** «Phys. Rev.», 1953, v. 89, p. 1975.
77. **Mizutani T., Koltun D. S.** «Ann. Phys.», 1977, v. 109, p. 1.
78. **Petrov N. M., Peresypkin V. V.** «Phys. Lett. B», 1973, v. 44, p. 321.
79. **Thomas A. W., Afnan I. R.** «Phys. Lett. B», 1973, v. 45, p. 437; «Phys. Rev. C», 1974, v. 10, p. 109.
80. **Myhrer F.** «Nucl. Phys. B», 1974, v. 80, p. 491.
81. **Копалейшвили Т. И., Мачавариани А. И.** Препринт Р2-8878, ОИЯИ, Дубна, 1975; «ТМФ», 1977, т. 30, с. 204.
82. **Mandelweig V. B., Galalazo H., Eisenberg J. M.** «Nucl. Phys. A», 1976, v. 256, p. 461.
83. **Thomas A. W.** «Nucl. Phys. A», 1976, v. 258, p. 417.
84. **Kopaleishvili T. I., Machavariani A. I., Emelyanenko G. A.** Preprint E2-9951, JINR, Dubna, 1976; «Phys. Lett. B», 1977, v. 71, p. 13.
85. **Ferreira E. M., Rosa I. P., Thome Z. D.** «Phys. Rev. C», 1977, v. 16, p. 2353.
86. **Rivera J. M., Garcilazo H.** «Nucl. Phys. A», 1977, v. 285, p. 505.
87. **Aleksandrini V. A., Omnes R. L.** «Phys. Rev.», 1965, v. 139, p. 167.
88. **Blankenbecler R., Sugar R.** «Phys. Rev.», 1966, v. 142, p. 1051.
89. **Aaron R., Amado R. D., Young J. E.** «Phys. Rev.», 1968, v. 174, p. 2022.
90. **Квинихидзе А. Н., Стоянов Д. Ц.** «ТМФ», 1972, т. 11, с. 23; 1973, т. 16, с. 42.
91. **Logunov A. A., Tavkhelidze A. N.** «Nuovo cimento», 1963, v. 29, p. 330.
92. **Namyslowski J. H.** «Nuovo cimento A», 1968, v. 57, p. 355;
Weiss U. «Nucl. Phys. B», 1972, v. 44, p. 573;
Weber H. J. «Nucl. Phys. A», 1976, v. 264, p. 365.
93. **Feshbach H.** «Ann. Phys.», 1958, v. 5, p. 357; 1962, v. 19, p. 287.