«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1979, ТОМ 10, ВЫП. 3

УДК 539.126

ТЕОРЕМА КВАНТОВАНИЯ ЗАРЯДА

(Ответ на статью Ю. Д. Усачева)

А. О. Барут

Отделение физики Мюнхенского университета, Мюнхен, ФРГ

Релятивистский принцип действия Дирака для взаимодействующих электрических зарядов и магнитных монополей придает определенную физическую реальность линии сингулярности векторного потенциала. Этот факт устраняет различные трудности при выводе условия зарядового квантования с помощью моментов количества движения и условий квантования потока, а также имеет следствия для экспериментальных поисков монополей и в адронных моделях.

The relativistic action principle of Dirac for the interacting electric charges and magnetic monopoles accords a certain physical reality to the singularity lines of the vector potential. This fact removes various difficulties in the derivations of the charge quantization condition via the angular momentum and flux quantizations conditions and has consequences in experimental search for monopoles and in hadron models.

ВВЕДЕНИЕ

Ю. Д. Усачев [1] в тщательном и детальном исследовании поставил вопрос о справедливости доказательств правила квантования для произведения электрического и магнитного зарядов $eg = n/2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $(\hbar = c = 1)$ и, по-видимому, высказал предположение, что следовало бы отказаться от этого условия. Несмотря на то что Ю. Д. Усачев прав, отмечая серьезные трудности в несколько поверхностной интерпретации и выводе условия квантования, тщательное исследование следствий релятивистского принципа действия Дирака [2] снимает в действительности возникающие возражения. Трудности связаны отчасти с конфликтом между нашим предвзятым представлением о магнитном монополе и его точной математической теорией. Так как сама теория подсказывает какие величины наблюдаемы в ней, мы должны обратиться к принципу действия, на котором и основана теория. Основной пункт, который хотелось бы отметить, состоит в том, что принцип действия придает электромагнитным стрингам или сингулярностям потенциала не просто математический, но и определенный физический, наблюдаемый характер *. И это имеет место без каких-либо наложенных извне дополнительных условий, не содержащихся в принципе действия. Из принципа действия и вытекает затем точное условие зарядового квантования **.

Так как критика, высказанная Ю. Д. Усачевым, а также и другими [3], непрерывно продолжается, и вследствие все возрастающего интереса, возникшего в связи с недавними экспериментальными работами по поискам монополей, важно показать, как даются ответы на эти возражения в теории, основанной полностью на принципе действия. Все рассмотрение здесь основано на принципе действия Дирака, однако наш подход отличен от дираковского в одном пункте. Дирак желает сделать стринг ненаблюдаемым и фиктивным и поспешно осуществляет это, вводя свое знаменитое дополнительное «вето», заключающееся в том, что «заряженные частицы никогда не должны пересекать линии сингулярностей», тогда как из самого принципа действия следует только более слабое условие, а именно, что исчезают компоненты тока электрических зарядов, перпендикулярные линии сингулярности. Я полагаю, что это и есть тот решающий пункт, который привел к большой путанице, критике и к проблемам в интерпретации теории. Цель этой статьи — последовательно восстановить потерянные звенья в доказательствах теоремы квантования заряда, отправляясь от принципа действия.

В разд. 1 кратко формулируется принцип действия и рассматривается связь между дираковским, максвелловским и сингулярным электромагнитным полями. В частности, обсудим, какие уравнения получаются для координат стринга. В целом теория электрических и магнитных зарядов была бы неприемлемой, если бы координаты стрингов не рассматривались как динамически значимые переменные на том же самом основании, что и электромагнитное и материальное поля. Физический смысл первых детально рассматривается в разд. 2, а в разд. 3 мы применим эти результаты в трех различных способах вывода условия зарядового квантования и представим дальнейшие аргументы в пользу значимости сингулярностей.

* Как видно из сказанного, А. О. Барут допускает наблюдаемость стрингов Дирака. Однако в этом случае по существу исчезает почва для дискуссии, так как в работе [1] в основном анализировался вопрос — совместимо ли требование Дирака о ненаблюдаемости стрингов с выводом соотношения для квантования зарядов. Допущение же наблюдаемости стрингов ставит вопрос о доказательстве соотношения Дирака, на наш взгляд, на совершенно иную основу.— *Прим. пер.*

** Наличие подобного рода доказательства соотношения Дирака сразу же пресекло бы любую попытку критики этого соотношения. Однако, как будет видно из дальнейшего, автор анализирует все-таки прежние, хорошо известные, выводы теоремы квантования зарядов.— *Прим. пер.*

Никакого доказательства или аргументов, касающихся отсутствия магнитных зарядов, не существует. Более того, из-за условия зарядового квантования, $eg = n/2$, теория является поистине единой теорией, так как в ней нет новой константы связи, однако это обстоятельство автоматически приводит к большой константе взаимодействия g. Обычная электродинамика имеет дело только со значением $n = 0$ в условии зарядового квантования. Следовательно, логически необходимо рассмотреть общую теорию со всеми другими значениями.

1. ПРИНЦИП ДЕЙСТВИЯ

Рассмотрим взаимодействия электрических зарядов с магнитными монополями (или взаимодействие дионов): проблемы возникают только для взаимодействующих систем. Предполагаем, что связь тока $j_\mu(x)$ материальных частиц с электромагнитным полем осуществляется с помощью вектор-потенциала $A_\mu(x)$ в форме $j_\mu A^\mu$. Электромагнитный потенциал $A_\mu(x)$ используем для обоих типов зарядов, как электрических, так и магнитных [3]. Хорошо известно, что потенциал A_μ должен быть сингулярным. Существует неопределенность в выборе типа сингулярности, и позже вернемся к этой проблеме. В настоящий момент достаточно рассмотреть частный вид сингулярности.

Согласно Дираку, действие имеет вид

$$S^{\mathrm{D}} = \frac{1}{16\pi}\int dx F^{\mathrm{D}}_{\mu\nu} F^{\mathrm{D},\,\mu\nu} + \int dx j^e_\mu A^\mu + \sum_i m^e_i \int ds + \sum_i m^g_i \int ds. \tag{1}$$

Здесь $F^{\mathrm{D}}_{\mu\nu}$ — электромагнитное поле, удовлетворяющее симметричным уравнениям Лоренца — Дирака

$$F^{\mathrm{D},\,\nu}_{\mu\nu} = -4\pi j^e_\mu; \quad \widetilde{F}^{\mathrm{D},\,\nu}_{\mu\nu} = -4\pi k^g_\mu, \tag{2}$$

где ток электрических зарядов на мировой линии $z_\mu(s)$ равен

$$j^e_\mu(x) = \sum_i e^i \int ds\, \dot{z}^{(i)}_\mu(s)\, \delta(x - z^i(s)), \tag{3}$$

а магнитный ток имеет вид

$$k^g_\mu(x) = \sum_j g^j \int ds\, [\dot{y}^{j(1)}_\mu \delta(x - y^{j(1)}) - \dot{y}^{j(2)}_\mu \delta(x - y^{j(2)})]. \tag{4}$$

Магнитные заряды на мировых линиях $y^{(i)}_\mu(s)$, $i = 1, 2$, представляют собой пары противоположных зарядов g и $-g$. Заметим, что в (1) отсутствует член $k^g_\mu A^\mu$, однако взаимодействие монополей будет возникать непосредственно. Поле $F^{\mathrm{D}}_{\mu\nu}$ и сингулярный потенциал A_μ связаны не так, как в обычной теории Максвелла, а более общим соотношением

$$F^{\mathrm{D}}_{\mu\nu}=A_{\nu,\,\mu}-A_{\mu,\,\nu}-\widetilde{\Lambda}_{\mu\nu}=F^{\mathrm{M}}_{\mu\nu}-\widetilde{\Lambda}^{\mu\nu}. \qquad (5)$$

Здесь мы определили максвелловское поле $F^{\mathrm{M}}_{\mu\nu}$, являющееся ротором потенциала A_μ, и сингулярное поле $\widetilde{\Lambda}_{\mu\nu}$. Первый член в (5) удовлетворяет уравнениям

$$\left.\begin{aligned}&F^{\mathrm{M},\,\nu}_{\mu\nu}=-4\pi j^e_\mu+\widetilde{\Lambda}^{;\,\nu}_{\mu\nu};\\&\widetilde{F}^{\mathrm{M},\,\nu}_{\mu\nu}=0.\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Поэтому из (2)

$$\Lambda^{;\,\nu}_{\mu\nu}=4\pi k^g_\mu. \qquad (7)$$

Интерпретация этих полей следующая: $F^{\mathrm{M}}_{\mu\nu}$ описывает поле электрических зарядов *и* сингулярные поля стрингов (т. е. линию магнитного потока бесконечно тонкого соленоида). Вычитая сингулярное поле $\widetilde{\Lambda}_{\mu\nu}$ из $F^{\mu}_{\mu\nu}$, получаем несингулярное поле $F^{\mathrm{D}}_{\mu\nu}$ точечных монополей. Следовательно,

$$\widetilde{\Lambda}^{;\,\nu}_{\mu\nu}\equiv-4\pi j^{\text{синг}}_\mu \qquad (8)$$

является сингулярным током, порождающим поле $\widetilde{\Lambda}_{\mu\nu}$. При наличии обычного калибровочного соотношения $A^{;\,\mu}_\mu=0$, получаем из (5), (6) и (2)

$$\Box A_\mu=4\pi j^e_\mu-\widetilde{\Lambda}^{;\,\nu}_{\mu\nu}=4\pi\,(j^e_\mu+j^{\text{синг}}_\mu). \qquad (9)$$

Таким образом, $A_\mu(x)$ порождается как зарядами, так и сингулярными токами. Для одиночного стринга, который описывается релятивистски с помощью мировой поверхности $y_\mu=y_\mu(\tau,\sigma)$, где τ и σ — инвариантные времениподобный и пространственноподобный параметры, полагаем

$$\Lambda_{\mu\nu}(x)=-4\pi\sum_i g^i\int d\tau\, d\sigma\,(\dot{y}_\mu y'_\nu-\dot{y}_\nu y'_\mu)\,\delta(x-y), \qquad (10)$$

где $\dot{y}_\mu\equiv\partial y_\mu/\partial\tau$, $y'_\mu\equiv\partial y_\mu/\partial\sigma$. Образуя дивергенцию от $\Lambda_{\mu\nu}$ в (10), получаем уравнение (7), правая часть которого имеет вид (4): только две конечные точки стринга, как это видно из (4), дают вклад в монопольный ток, что и должно иметь место. С помощью соотношения (10) в (8) определяется сингулярный ток, что дает нам возможность перейти к решению уравнения (9) и получить в этом случае

$$A_\mu(x)=\sum_i e^i\int ds\dot{z}^i_\mu D(x-z^i)+$$
$$+\sum_i g^i\int d\tau\, d\sigma \dot{y}^\nu_i y'^\lambda_i\, \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\frac{\partial}{\partial x_\rho}D(x-y^i). \tag{11}$$

Заметим, что хотя поле $F^{\mathrm{D}}_{\mu\nu}$ несингулярно, тем не менее сингулярность входит в интеграл действия (1) через потенциал A_μ. В интеграле действия поля A_μ координаты зарядов и монополей, так же как и координаты сингулярной поверхности $y_\mu(\tau,\sigma)$ должны рассматриваться вследствие (5) как независимые динамические переменные таким образом, чтобы пары монополей всегда являлись конечными точками стрингов. Вариация интеграла действия дает в этом случае в точности полевые уравнения (2) и уравнения движения зарядов:

$$\left.\begin{aligned} &m^e\ddot{z}_\mu=eF^{\mathrm{M}}_{\mu\nu}(z)\dot{z}^\nu;\\ &m^g\ddot{w}_\mu=g\widetilde{F}^{\mathrm{D}}_{\mu\nu}\dot{w}^\nu, \quad w_\mu=y_\mu\ (\tau;\ \sigma \text{ на концах}).\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Для стринга получаем [5]

$$[\widetilde{F}^{\mathrm{D}}_{\mu\nu,\,\lambda}(y)+\widetilde{F}^{\mathrm{D}}_{\nu\lambda,\,\mu}(y)+\widetilde{F}^{\mathrm{D}}_{\lambda\mu,\,\nu}(y)]\,\dot{y}^\nu y'^\lambda=0, \tag{13}$$

что может быть записано в виде

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\dot{y}_\nu y'_\lambda j^e_\rho(y)=0, \tag{13$'$}$$

если использовать соотношение

$$\widetilde{F}^{\mathrm{D}}_{\mu\nu,\,\lambda}+\widetilde{F}^{\mathrm{D}}_{\lambda\mu,\,\nu}+\widetilde{F}^{\mathrm{D}}_{\lambda\mu,\,\nu}=-\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F^{\mathrm{D},\,\rho\sigma}_{,\sigma}=4\pi\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}j^\rho_e. \tag{14}$$

Дирак несколько поспешно заключает из (13), что множитель в скобках $[F^{\mathrm{D}}_{\mu\nu,\lambda}+$ (цикл)] равен нулю, или

$$F^{\mathrm{D},\,\nu}_{\mu\nu}(x=y)=j^e_\mu(x=y)=0. \tag{15}$$

Таково происхождение требования, что «стринг никогда не должен пересекать заряженную частицу». Однако точное, но более слабое условие (13) говорит только о том, что на поверхности

$$j^{e\perp}_\mu|_{x=y}=0, \tag{16}$$

где $j^\perp_\mu$ — компонента тока, перпендикулярная сингулярной поверхности. На компоненту тока, параллельную поверхности, ограничение отсутствует. Кроме того, интересной особенностью является то, что условие (16) автоматически удовлетворено вследствие уравнений движения (14). Не требуется вводить никаких дополнительных условий или «вето», как это и должно было быть, потому что принцип действия не допустил бы *добавочных* ограничений *. Электрические заряды реагируют на поле $F^{M}_{\mu\nu}$, которое сингулярно на стринге, но не на поле $F^{D}_{\mu\nu}$.

Можно фактически удостовериться в том, что электрон, приближающийся перпендикулярно к линии сингулярности, будет рассеиваться на 180° и не сможет ее пересечь.

Интересно отметить, что уравнения (5) и (16) были уже предложены Вентцелем [6], как необходимые требования для совместности теории. Мы видим здесь, что они фактически следуют из принципа действия.

В интеграле действия (1) отсутствует кинетическая энергия или массовый член для стринга, поэтому мы назвали его ** «электромагнитным стрингом», для того чтобы отличить его от материального стринга или дуального стринга. Понятие стринга может быть обобщено с помощью таких членов, или же стринг может быть регуляризован приданием ему поперечных размеров таким образом, что имитируется возникновение массового члена [5]. В последующей части статьи мы рассматриваем только интеграл действия Дирака (1).

Так как потенциал A_μ в (5) допускает свободу в калибровочных преобразованиях, то такая свобода имеется и для сингулярного поля $\widetilde{\Lambda}_{\mu\nu}$. Даже более того: $\widetilde{\Lambda}_{\mu\nu}$ является функционалом от $y_\mu(\tau, \sigma)$ [уравнение (10)], и мы можем параметризовать поверхность $y_\mu = y_\mu(\tau, \sigma)$ любым способом, который выберем, т. е. при фиксированном τ стринг может иметь любое положение или форму. Его существование чувствуется, а положение — нет ***. Это

---

* Этот вывод совместно с соотношением (13′) является, на наш взгляд, одним из наиболее интересных результатов работы А. О. Барута. Автор здесь безусловно прав. Однако в классической механике в наиболее интересном физически случае перпендикулярного падения электронов на стринг (13′) приводит, как легко убедиться, к «вето» Дирака. В самом деле, в этом случае $\mathbf{j} = e\mathbf{v}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0$, где $\mathbf{x}$ — координата электрона, а $\mathbf{y}$ — координата стринга, и сразу получаем «вето» Дирака, так как $|\mathbf{v}| \neq 0$ повсюду. В квантовой механике вопрос много сложнее: приводит ли (13′) обязательно к требованию $\psi = 0$ на стринге и, следовательно, к наблюдаемости стринга? Вопрос, как нам кажется, остается открытым.— *Прим. пер.*

** Каноническое квантование без потенциалов также приводит в конечном итоге к той же самой проблеме сингулярностей [4].

*** С этим трудно согласиться, так как обращение в нуль ψ на стринге, как того будет фактически требовать автор в дальнейшем, делает наблюдаемым и положение стринга. Заметим также, что никакое калибровочное преобразование типа $\psi' = \exp(i\alpha)\psi$ не может сместить в пространстве линию узлов ψ-функции (т. е. линию, на которой $\psi = 0$), так как при подобных преобразованиях $\psi'^*\psi' = \psi^*\psi$. Верно и обратное: изменение положения стринга в пространстве (при условии $\psi = 0$ на стринге) не соответствует никакому калибровочному преобразованию.— *Прим. пер.*

происходит потому, что интеграл действия (1) не содержит инерциальных членов для стринга.

Наконец, теория явно полностью ковариантна, что обусловлено инвариантной параметризацией координат стринга $y_\mu = y_\mu(\tau, \sigma)$. Оба этих последних свойства, калибровочные преобразования и релятивистская инвариантность, играют существенную роль при квантовании теории.

2. ЗНАЧЕНИЕ СИНГУЛЯРНОСТЕЙ

Тот факт, что желая описать точечный монополь, в конечном итоге приходим к дополнительным сингулярностям, может показаться разочаровывающим. Однако характер симметрии системы заряд — монополь является весьма тонким вопросом, и все замечательные свойства этой системы основываются в конечном итоге на существовании этих сингулярностей, так что выигрыш стоит этого. Ясно, что должна существовать асимметрия, в противном случае монополи встречались бы так же часто, как и заряды. В уравнениях (2) имеется симметрия, однако потенциал $A_\mu(x)$ несимметричен по обоим зарядам, хотя сингулярности и могут быть связаны с каждым из них. Не симметричны ни величины e и g, ни свойства четности: e является скалярной величиной, а g должна быть псевдоскалярной.

Одним из наиболее интересных вопросов в теории магнитных зарядов является построение частиц, состоящих из пар противоположных магнитных зарядов, так что полная система магнитно-нейтральна [7, 8] в согласии с тем фактом, что все до сих пор известные частицы не имеют некомпенсированный полный магнитный заряд. В этом случае электромагнитный стринг, соединяющий пару магнитных зарядов, относится к внутреннему свойству системы; действительно, это есть необходимый ингредиент непротиворечивости таких моделей, которые демонстрируют ряд замечательных свойств. С этой точки зрения существование таинственной внутренней сингулярности и связанной с ней степенями свободы в особенности желательно, так как, например, внутренняя структура и происхождение массы протона в настоящее время являются весьма загадочными. Остается рассмотреть вопрос — должны ли быть свойства сингулярностей дополнены, например, массовыми членами в интеграле действия (1), как мы уже обсуждали это в конце предыдущего раздела. До сих пор подобные модели находятся по крайней мере в качественном согласии со свойствами адронов [9].

Случай одиночного монополя является частным случаем рассмотренного выше, когда один из партнеров удален на бесконечность.

Некоторые из топологических проблем, возникающих с этой точкой на бесконечности, рассматриваются в следующем разделе.

Наше заключение относительно реальности стринга имеет, как ясно, отношение к экспериментальной наблюдаемости магнитных зарядов. Этот факт совместно с необычными свойствами четности и правилами суперотбора [10] для магнитных монополей и препятствует, по-видимому, наблюдению одиночных изолированных магнитных зарядов, так как мы наблюдаем электрические заряды.

3. УСЛОВИЕ ЗАРЯДОВОГО КВАНТОВАНИЯ

Обсудим три независимых вывода условия зарядового квантования.

1. Довольно большое число работ посвящено поведению нерелятивистской системы заряд — монополь. Нерелятивистский гамильтониан диона (e_1, g_1) с массой m в поле другого фиксированного диона (e_2, g_2):

$$H=\frac{1}{2m}(\mathbf{p}-\mu\mathbf{D})^2+\frac{\alpha}{r},$$

$$\mu=e_1g_2-e_2g_1, \quad \alpha=e_1e_2+g_1g_2$$

может быть получен с помощью принципа действия (1) или более точно из уравнений движения зарядов и конечных точек стринга [5], когда одна из конечных точек тяжелая, а другая находится в бесконечности. Здесь $\mathbf{D}$ — вектор-потенциал с сингулярностью, которая может выбираться в различных формах; например, для одиночного стринга из (11) следует, что

$$\mathbf{D}(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r})=\frac{\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{r}}{r\,[r-(\hat{\mathbf{n}}\mathbf{r})]}. \tag{17}$$

Здесь $\mathbf{n}$ * отвечает специальному выбору сингулярности, которая в этом случае сосредоточена вдоль прямой линии.

Момент количества движения $\mathbf{J}$, коммутирующий с H, дается выражением **

$$\mathbf{J}=\mathbf{r}\times(\mathbf{p}-\mu\mathbf{D})+\mu\hat{\mathbf{r}}. \tag{18}$$

Это правильно [1], что, строго говоря, коммутационные соотношения (18) не отвечают алгебре Ли:

$$[J_i, J_j]=\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}J_k+$$
$$+\mathrm{i}\mu\,\{r^2\varepsilon_{ijk}n_k+r_i\,(\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{n}})_j-r_j\,(\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{n}})_i\}\,8g\theta\,(\hat{\mathbf{n}}\mathbf{r})\,\delta\,[r^2-(\hat{\mathbf{n}}\mathbf{r})^2]. \tag{19}$$

---

* $\hat{\mathbf{n}}$ и $\hat{\mathbf{r}}$ обозначают единичный постоянный вектор, направление которого произвольно, и $\mathbf{r}/r$.— *Прим. пер.*

** Замечание не совсем точное, так как коммутация отсутствует на линии сингулярности.— *Прим. пер.*

Однако (19) отвечает представлению алгебры Ли $SO(3) \sim SU(2)$ в пространстве функций с интегрируемым квадратом, обращающихся в нуль вдоль линии сингулярности, т. е. пространство функций отличается от используемого обычно, следовательно, для такого пространства дополнительные члены в (19) не дают вклада и имеем bona fida представление группы вращений, а квантование момента количества движения приводит к зарядовому квантованию *. Эта точка зрения впервые была высказана Хэрстом [11, 12]. Иная топология пространства представлений (т. е. пространства с вырезом вдоль линии сингулярности) приводит, в частности, к тому, что представления полуцелого спина должны возникать также и в проблеме, когда оба диона сами являются бозонами. Согласно второй точке зрения вектор $\hat{\mathbf{n}}$ в (18) и (17) рассматривается как динамическая координата [13], подчиняющаяся калибровочным преобразованиям, так что конфигурационное пространство задачи действительно больше, чем R^3, что снова иллюстрирует почему должны возникать представления спина 1/2.

Координата $\hat{\mathbf{n}}$ является следом сингулярной поверхности $y_\mu(\tau, \sigma)$, фигурирующей в уравнении (10), в ее нерелятивистском приближении.

Действительно, возникновение состояний со спином 1/2 в двухбозонной системе ясно указывает на дополнительную степень свободы в системе, и эта новая степень свободы имеет свое происхождение от стринга. Кроме того, именно поэтому отсутствует противоречие в связи спин-статистика [13]. Таким образом, реальность стринга сохраняет связь между квантованием момента количества движения и квантованием заряда.

2. Второе возражение Ю. Д. Усачева касается именно калибровочных преобразований координаты $\hat{\mathbf{n}}$ в (17).

Им корректно показано, что для двух выборов векторов $\hat{\mathbf{n}}_1$ и $\hat{\mathbf{n}}_2$

$$\mathbf{D}(\hat{\mathbf{n}}_1, \mathbf{r}) - \mathbf{D}(\hat{\mathbf{n}}_2, \mathbf{r}) \neq \nabla\chi(\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2, \mathbf{r}). \tag{20}$$

Наличие знака равенства в (20) является необходимым, для того чтобы вывести условие квантования заряда из требования однозначности волновой функции ψ [14].

Неравенство обусловлено следующим фактом: в паре монополей стринг y связывает, как мы уже видели, два полюса. Стринг

* Как уже отмечалось выше, работа с классом функций, обращающихся в нуль на стринге, приводит к наблюдаемости положения стринга в пространстве. В [1] было отмечено, что теория монополя Дирака с условием $\psi = 0$ на стринге описывает по существу бесконечно тонкий и бесконечно длинный наблюдаемый соленоид, один конец которого покоится в начале координат. Поэтому характер ротационной инвариантности монополя Дирака (с условием $\psi = 0$ на стринге) и бесконечно тонкого и бесконечно длинного наблюдаемого соленоида совершенно идентичен.— *Прим. пер.*

может быть произвольно деформирован от y_1 к y_2, так что конечные точки остаются фиксированными. Когда удаляем один из полюсов на бесконечность, различные стринги должны снова образовывать замкнутый путь между полюсами. Так как пространство R^3 некомпактно, два стринга $\hat{\mathbf{n}}_1$, $\hat{\mathbf{n}}_2$, если использовать соотношение (17), не образуют замкнутого пути между полюсами. Однако это легко исправляется [9], если используем компактифицированную форму R^3: отобразим R^3 с помощью стереографической проекции на поверхность 3-сферы S^3, вложенной в R^4. Теперь один полюс помещается на «южном полюсе» сферы, а другой — на «северном полюсе», и два стринга $\hat{\mathbf{n}}_1$ и $\hat{\mathbf{n}}_2$ образуют в этом случае замкнутый путь между полюсами. Всякий раз, когда деформация сингулярной линии оставляет фиксированными конечные точки, изменение соответствует калибровочному преобразованию [15, 6]. Это следует из интегрального представления потенциала для произвольного сингулярного стринга y:

$$\mathbf{D}(y, \mathbf{r}) = \int\limits_y d\boldsymbol{\rho} \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|}.$$

Тогда

$$\mathbf{D}(y_2, \mathbf{r}) - \mathbf{D}(y_1, \mathbf{r}) = \Big(\int\limits_{y_2} - \int\limits_{y_1}\Big) d\boldsymbol{\rho} \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|} =$$

$$= \nabla \int\limits_S \nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|} d\mathbf{f} - \int\limits_S \delta^3(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho})\, d\mathbf{f}$$

и разрыв в первом члене при переходе через поверхность S в точности компенсируется бесконечным вторым членом *.

3. Физическое значение сингулярных стрингов или поверхностей также очень ясно видно из третьего вывода условия заря-

* С этим выводом трудно согласиться. Как очевидно, утверждения $\mathbf{D}(y_1, \mathbf{r}) - \mathbf{D}(y_2, \mathbf{r}) \neq \nabla\chi(y_1, y_2, \mathbf{r})$ и $\operatorname{rot}\mathbf{D}(y_1, \mathbf{r}) - \operatorname{rot}\mathbf{D}(y_2, \mathbf{r}) \neq 0$ полностью эквивалентны. Легко показать, что для монополя с произвольной формой стринга, покоящегося в начале координат,

$$\operatorname{rot}\mathbf{D}(y, \mathbf{r}) = \nabla \frac{1}{r} + 4\pi \int\limits_y d\boldsymbol{\rho}\,\delta(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}).$$

Отсюда

$$\operatorname{rot}\mathbf{D}(y_1, \mathbf{r}) - \operatorname{rot}\mathbf{D}(y_2, \mathbf{r}) = \oint d\boldsymbol{\rho}\,\delta(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}) \neq 0.$$

Следовательно, и $\mathbf{D}(y_1, \mathbf{r}) - \mathbf{D}(y_2, \mathbf{r}) \neq \nabla\chi(y_1, y_2, \mathbf{r})$.

Различие в выводах обусловлено тем, что использование многозначных потенциалов может привести к путанице в написании тех или иных членов, содержащих дельтаобразные особенности. Все сказанное позволяет подтвердить вывод в [1] о том, что доказательство соотношения Дирака не лишено серьезных трудностей.— *Прим. пер.*

дового квантования с помощью условия квантования потока Лондона [16]. Максвелловское поле $F^{\text{M}}_{\mu\nu}$ в уравнении (6) содержит магнитный поток вдоль линии сингулярности, соединяющей один полюс с другим. Магнитный поток, создаваемый конечной точкой, равен $4\pi g$, и мы приравниваем его потоку Φ, подводимому к полюсу вдоль сингулярной линии:

$$\Phi = 4\pi g.$$

Если Φ теперь квантован в единицах $(\hbar/e)\,n$, $n = 0, 1, \ldots$, то получаем

$$eg = n\hbar/2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Этот аргумент может быть в значительной мере обобщен на другие типы сингулярных потоков [17]. Например, для N стрингов входящий поток в N раз больше и это дает

$$eg = Nn\hbar/2,$$

что для $N = 2$ является так называемым швингеровским условием зарядового квантования.

Этот вывод условия зарядового квантования наводит (возможно) на мысль, что квантование потока является более фундаментальной концепцией, чем квантование заряда.

Таким образом, мы полагаем, что все дискуссионные вопросы, касающиеся взаимодействия заряд — монополь, а именно: релятивистская инвариантность, связь спина со статистикой, представления группы вращения, калибровочные преобразования линий сингулярности могут быть разрешены на основе того обстоятельства, вытекающего из принципа действия, что стринг не является полностью фиктивным.

Остается, однако, один дополнительный пункт, который не является непоследовательностью теории, но свидетельствует о ее неоднозначности. Как было отмечено Ю. Д. Усачевым [1], мы можем выбрать не один или два, а любое число сингулярных линий в потенциале. Можем пойти даже дальше и выбрать двумерные сингулярные поверхности, являющиеся множествами мерой нуль в 3-мерном пространстве. Так как выбор типа сингулярности меняет условие зарядового квантования, так же как и свойства момента количества движения системы, то в целом теория была бы неприемлемой, если тип сингулярности не имеет определенного физического смысла. Системы с различными сингулярностями являются топологически и физически различными. Поэтому в моделях частиц, построенных из дионов, я предложил [18] использовать N сингулярных стрингов, или тип сингулярности как новое внутреннее квантовое число.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Усачев Ю. Д.** «ЭЧАЯ», 1973, т. 4, вып. 1, с. 225.
2. **Dirac P. A. M.** «Phys. Rev.», 1948, v. 74, p. 817.
3. **Hagen C. R.** Ibid., 1965, v. 140, p. 8804; Proc. Orbis Scientific Conf. Coral Gables, 1976.
4. **Villaroel D.** Univ. Colorado preprint, 1976.
5. **Barut A. O., Bornzin G.** «Nucl. Phys. B», 1974, v. 81, p. 477.
6. **Wentzel** «Suppl. Progr. Theor. Phys.», 1966, N 37—38, p. 163.
7. **Schwinger J.** «Science», 1969, v. 165, p. 757.
8. **Barut A. O.** Proc. Coral Gables Conf. on Fundamental Interactions. N.Y., 1970; «Phys. Rev. D», 1971, v. 3, p. 1747.
9. **Barut A. O.** «Acta phys. austriaca (Suppl. Schladming Proc.), 1973, v. 11, p. 565.
10. **Barut A. O.** «Phys. Lett. B», 1972, v. 38, p. 97; 1973; v. 46, p. 81.
11. **Hurst C. A. G.** «Ann. Phys.», 1968, v. 50, p. 51.
12. **Miller J. G.** «J. Math. Phys.», 1976, v. 17, p. 643.
13. **Barut A. O.** «Phys. Rev.», 1974, v. 10, p. 2709; In Proc. 2nd Internat. Colloqiium in Group Theoretical Methods in Physics (Univ. of Nijmegen, The Netherlands). 1973, v. 1, p. A213.
14. **Dirac P. A. M.** «Proc. Roy. Soc. A», 1931, v. 133, p. 60.
15. **Gronblom B. O.** «Z. Phys.», 1935, v. 98, p. 283; **Jordan P.** «Ann. Phys.», 1938, v. 32, p. 66; **Zumino B.** In: Proc. Internat. School of Physics «Ettore Majorana», v. 6, Erice, Italy, 1966. N.Y. Academic Press, 1966, p. 711.
16. **London F.** Superfluids. N.Y. Wiley, 1950.
17. **Barut A. O., Schneider H.** «J. Math. Phys.» в печати.
18. **Barut A. O.** Условие зарядового квантования с N стрингами: новое квантовое число системы заряд — монополь. Препринт, 1976.