«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1982, том 13, вып. 2

УДК 539.12

КВАЗИРЕЛЯТИВИСТСКИЕ СИСТЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ

Р. П. Гайда

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Исходя из общих принципов релятивистской теории прямых взаимодействий (причинность, пуанкаре-инвариантность и разделимость) излагаются основы квазирелятивистской (классической и квантовой) механики системы частиц, позволяющей учитывать малые релятивистские эффекты в объектах, обладающих внутренней структурой. Проанализировано соотношение между разными формализмами теории, обсужден физический смысл переменных, найден общий вид постньютоновских лагранжианов и гамильтонианов взаимодействия, рассмотрена их физическая интерпретация и связь с полевыми подходами. Путем введения квазирелятивистских переменных центра масс решена задача отделения движения слабо релятивистской системы частиц в целом от ее внутреннего движения при произвольном взаимодействии.

On the base of general principles of the relativistic direct interaction theory (causality, Poincaré invariance and separability) the fundamentals of quasi-relativistic (classical and quantum) particle system mechanics are given anabling to account small relativistic effects in objects having an inner structure. Relations among different formalisms of the theory is analysed, physical meaning of variables is discussed, the general form of post-Newtonian interaction Lagrangians and Hamiltonians is found, their physical interpretation and connection with field approaches are considered. For weakly relativistic particle system with arbitrary interaction the problem of separating the motion of the system as a whole from its inner motion is solved.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в различных областях физики все сильнее ощущается потребность последовательной релятивистской теории систем многих частиц, отличной от локальной теории поля. Это связано, с одной стороны, с развитием экспериментальной техники, позволяющей значительно повысить точность измерений, и, с другой — с тем фактом, что современное состояние релятивистской квантовой теории поля таково, что она может служить основой описания лишь ограниченного круга физических объектов. Существование прекрасно разработанного аппарата нерелятивистской классической и квантовой механики системы взаимодействующих частиц побуждает многих авторов к попыткам построения аналогичной релятивистской или хотя бы приближенно релятивистской теории. Сюда относится тесно связанный с теоретико-полевым описанием квазипотенциальный подход [1, 2].

В последнее время большие успехи достигнуты в построении релятивистской теории прямых взаимодействий частиц, представляющей собой описание, альтернативное полевому. Хотя ее непосредственное применение к расчетам ядерных систем находится в начальной стадии, имеются основания ожидать в этом направлении серьезных успехов [3].

Существует область явлений, для описания которых нерелятивистские теории оказываются явно недостаточными, но вместе с тем требуемая точность позволяет учитывать релятивизм приближенно, с помощью разложений по c^{-2}. Известным примером этого типа может служить тонкая структура спектра водорода, которую можно рассчитать как на основе строго релятивистского уравнения Дирака, так и в рамках соответствующего приближенного метода [4]. Если в этом простом примере (его простота связана с тем, что мы имеем здесь дело с релятивистской задачей одного тела) выбор точного или приближенного релятивистского уравнения диктуется требуемой точностью результатов, то в более сложных случаях систем нескольких слабо релятивистских частиц ситуация другая: отсутствие точной теории или ее недостаточное (с точки зрения физической интерпретации или вычислительных возможностей) развитие часто приводит к необходимости применения приближенных подходов. Это особенно важно для систем с ядерными взаимодействиями, не поддающимися в настоящее время описанию квантово-полевыми теориями; однако даже для объектов, в которых основную роль играют хорошо изученные электромагнитные взаимодействия, общие методы приближенно релятивистских (или, как мы их будем называть, квазирелятивистских) теорий оказываются весьма полезными. Если, например, рассматривать системы многих частиц с парными взаимодействиями, то при заданных законах взаимодействия для любой пары частиц, выраженных в системе отсчета их центра инерции, для теоретического изучения системы в целом необходимо умение проводить расчеты в произвольной инерциальной системе, т. е. пользоваться гамильтонианами взаимодействия, зависящими от движения центра инерции двухчастичных подсистем. Эта зависимость, составляющая один из аспектов проблемы сложения релятивистских (или квазирелятивистских) взаимодействий, определяется требованиями лоренц-инвариантности теории и не связана с природой взаимодействия [5—8]. С аналогичной ситуацией встречаемся в задаче отделения движения сложной системы как целого от внутреннего движения составляющих ее частиц [9—11].

Цель настоящей работы — изложение с единой точки зрения основных моментов квазирелятивистской теории прямых взаимодействий частиц, обобщающей нерелятивистскую (классическую и квантовую) механику системы частиц на область явлений, где релятивистские эффекты можно рассматривать как небольшие поправки к соответствующим нерелятивистским результатам. Мы исходим из общих принципов и уравнений релятивистской теории прямых взаимодействий частиц, однако конкретные результаты будут ограничиваться квазирелятивистской областью, в основном так называемым постньютоновским приближением, под которым понимаем учет поправок порядка c^{-2} к нерелятивистским потенциалам, зависящим только от межчастичных расстояний.

Весьма интересным аспектом квазирелятивистской механики является то, что ее, подобно нерелятивистской, можно изложить в классической и в квантовой версии, связь между которыми осуществляется фактически традиционным путем. Это важно как в принципиальном отношении, так и ввиду того, что классическое рассмотрение полезно для физической интерпретации квазирелятивистской квантовой механики. В этой связи можно указать на вопрос о физическом смысле канонических переменных, а также на проблему сопоставления результатов теории прямых взаимодействий с теоретико-полевыми подходами. Следует иметь в виду, что классический вариант теории представляет и самостоятельный интерес из-за его применимости, например, к объектам, состоящим из массивных гравитирующих тел [12].

Применение приближенно релятивистских уравнений к описанию структуры и свойств ядер имеет длительную, хотя до недавнего времени довольно скудную по содержанию историю. Пионерское рассмотрение этого вопроса было выполнено Брейтом еще в 1937 г. [13]. Ю. М. Широков и сотрудники [5] изучали задачу нахождения релятивистских поправок к феноменологическим потенциалам нуклон-нуклонного взаимодействия (см. также [6, 7, 9]). Влияние релятивистских эффектов в движении нуклонов в ядрах на рассеяние электронов на ядрах исследовалось в [14], релятивистские поправки к форм-фактору дейтона — в [15]. Дальнейшие ссылки на некоторые другие примеры процессов, в которых существенны релятивистские эффекты в сложных системах частиц, можно найти в [9]. Не претендуя ни в какой степени на полноту этой исторической справки, отметим, что в последнее время интерес к релятивистским эффектам в ядрах и других системах частиц значительно усилился. В качестве примеров укажем на некоторые актуальные проблемы, отраженные в недавних публикациях, требующие релятивистского (или, по крайней мере, приближенно релятивистского) рассмотрения: вклад релятивистских поправок в энергию связи малонуклонных систем (например, тритона) и в сечение реакции упругого pd-рассеяния на большие углы при средних энергиях [16], вычисление уровней и ширин для систем типа позитрония, мюония, бариония, а также связанных состояний в системе кварка и антикварка [17]; μ-мезоатомы и μ-мезомолекулы изотопов водорода [18]; релятивистская трактовка некоторых процессов в $NN\pi$-системах [19].

Главная задача обзора — сформулировать основы и результаты квазирелятивистской механики, которые являются аппаратом для исследования релятивистских эффектов указанного выше типа в объектах, состоящих из фиксированного числа частиц при не слишком высоких энергиях. Изложенные в работе результаты представляют интерес и в том отношении, что они могут оказаться полезными для развития строго релятивистской теории прямых взаимодействий в смысле принципа соответствия: в области достаточно низких энергий выводы точной и приближенной теорий обязаны практически совпадать.

Необходимость такого обзора обусловлена тем, что в литературе имеется много результатов, относящихся к квазирелятивистской механике системы частиц, полученных самыми различными путями: на основе классической или квантовой теории поля (в частности, электродинамики), с использованием интегралов действия типа Фоккера, в рамках классической и квантовой релятивистской гамильтоновой теории прямых взаимодействий, с помощью лагранжева и ньютонова формализмов. Соотношение между этими подходами и соответствующими результатами изучено пока слабо, следовательно, их в настоящее время трудно рассматривать в качестве отдельных фрагментов или различных вариантов единой физической теории, которая построена на фундаменте ясных физических представлений, хорошо разработанного математического аппарата и имеет четкую область применения. Вместе с тем целесообразность развития подобной теории не вызывает сомнений. Настоящий обзор представляет собой попытку сделать шаг в этом направлении.

1. О ФИЗИЧЕСКИХ ОСНОВАХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ТЕОРИЙ ПРЯМЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ЧАСТИЦ

Причинность и действие на расстоянии. Создание специальной теории относительности (СТО) и последовавшие за ним успехи полевого подхода к исследованию физической реальности привели к общепринятому до середины нашего столетия мнению, что описание систем взаимодействующих частиц, основанное на концепции дальнодействия, допустимо только в нерелятивистской (галилей-инвариантной) физике. Отсюда делался вывод, что взаимодействие между частицами может осуществляться только посредством распространения поля-носителя взаимодействия. Оказалось, однако, что это недоразумение, возникшее в результате недостаточно тщательного анализа всех аспектов принципа причинности СТО, согласно которому события A и B, разделенные пространственно-подобным четырехмерным интервалом, не могут (в силу конечности скорости распространения сигналов) оказать друг на друга какое-либо воздействие.

Первые попытки построения релятивистской (основанной на электродинамике Максвелла) теории прямых взаимодействий как альтернативы полевому описанию были сделаны Шварцшильдом [20], Тетроде и Фоккером [21] еще в начале двадцатого столетия, которые показали, что электромагнитное взаимодействие заряженных частиц можно описать в терминах переменных самых частиц без понятия электромагнитного поля (с помощью так называемых интегралов действия типа Фоккера, см. также [22]). Широкую известность этот подход получил после работ Уилера и Фейнмана [23]. Последовательное изучение возможностей неполевого подхода к построению лоренц-инвариантной динамики системы частиц, весьма интенсивно развивающееся на протяжении двух последних десятилетий, восходит к классической работе Дирака 1949 г. [24]. Наиболее детальный и полный анализ соотношения понятия причинности и релятивистского описания прямых взаимодействий частиц принадлежит Хавасу [25] (см. также [26]). Сформулируем главный вывод этого анализа.

Следует отличать два понятия причинности. Первое, возникшее в нерелятивистской механике и обобщенное позже на другие области физики, касается только замкнутых систем и состоит в следующем утверждении: знание начальных условий в момент t_0 в замкнутой системе σ позволяет определить с помощью законов движения ее дальнейшую эволюцию во времени. Такое описание замкнутых систем часто называют *причинным* или *предиктивным* (предсказуемым). Второе понятие причинности, а именно упомянутый выше принцип причинности СТО, связано всегда с рассмотрением незамкнутых систем: распространение сигнала от события А («причины») к событию В («следствию») предполагает, что событие А является определенным актом взаимодействия данной системы с некоторым внешним возмущением. Поскольку релятивистская теория прямых взаимодействий претендует на адекватное описание только замкнутых систем σ, то принцип причинности СТО не может служить аргументом против ее правомерности.

Проблема лоренц-инвариантности в релятивистских теориях прямых взаимодействий. Традиционный путь построения лоренц-инвариантных уравнений механики или теории поля состоит в стремлении придать этим уравнениям четырехмерную тензорную форму. Этот способ весьма эффективен в механической задаче одного тела, взаимодействующего (локальным образом) с внешним полем (например, электромагнитным) и в локальной теории поля. Главное его достоинство — явная лоренц (или пуанкаре)-инвариантность. Обобщение такого подхода на описание системы прямо взаимодействующих частиц, которое нелокально по своей природе, лежит в основе ряда направлений релятивистской теории дальнодействия. Сюда относятся: теории, в которых исходным пунктом являются явно пуанкаре-инвариантные интегралы действия типа Фоккера [20—23, 27—32], интегро-дифференциальные уравнения движения Ван Дама — Вигнера [33] или дифференциально-разностные уравнения Хаваса — Плебанского [34]; четырехмерная формулировка дифференциальных уравнений движения второго порядка для системы взаимодействующих частиц [35—42]; четырехмерный лагранжев формализм, использующий сингулярные лагранжианы [43—46] или индивидуальные вариационные принципы с лоренц-инвариантным параметром эволюции для каждой частицы [47]; четырехмерный гамильтонов подход [48—54], опирающийся на разработанный Дираком канонический формализм со связями [55, 56] и некоторые другие подходы [57—60]. В такого рода теориях пуанкаре-инвариантность описания достигается формой записи исходных выражений или уравнений и, таким образом, не составляет проблемы.

Однако в этих теориях возникают другие трудности, вызванные именно их явной пуанкаре-инвариантностью. Ситуация здесь аналогична той, которая характерна для уравнений типа Бете — Солпитера. Главная трудность — это многопараметрическое описание эволюции системы (как правило, параметрами являются собственные времена отдельных частиц), приводящее как к математическим усложнениям (например, в теориях типа Фоккера уравнения движения являются интегродифференциальными или дифференциальными с отклоняющимся аргументом), так и к трудностям в физической интерпретации теории. Отметим также, что многовременное релятивистское описание по своей форме резко отличается от нерелятивистского и требует развития новых методов практически на каждом этапе построения теории.

В связи с изложенным вызывают большой интерес, особенно с точки зрения интересующей нас задачи описания слабо релятивистских систем, трехмерные подходы к релятивистской теории прямых взаимодействий, использующие единый параметр эволюции системы частиц; в мгновенной форме динамики [24], изложением которой мы ограничимся в настоящей работе, этим параметром служит координатное время t. Такие подходы, называемые далее *одновременными*, сравнительно близки по своей математической форме и физической интерпретации к нерелятивистской (классической или квантовой) механике системы частиц. Ввиду неинвариантного характера одновременности относительно преобразований Лоренца они не обладают явной (четырехмерной) пуанкаре-инвариантностью. Это не означает, однако, что они не могут удовлетворять при определенных условиях принципу относительности Пуанкаре — Эйнштейна (см., например, [56]). Именно изучение этих условий составляет основную проблему в одновременных теориях прямых взаимодействий. Она формулируется и решается с помощью теоретико-групповых методов, которые будут описаны в разд. 2 и 3. Указанные условия налагают определенные ограничения на функции, описывающие прямые взаимодействия частиц. В различных формализмах (ньютоновом, лагранжевом и гамильтоновом) набор этих функций и способ реализации условий инвариантности теории различны. Связь между названными тремя формализмами гораздо сложнее, чем в нерелятивистской механике, и в настоящее время в точной теории практически не изучена. Однако в квазирелятивистском приближении она оказывается довольно простой, и это обстоятельство позволяет также решать задачу квантования методами, развитыми в нерелятивистской механике. Отметим также, что существует тесная связь между одновременным подходом и четырехмерным фоккеровским (см. разд. 4).

Физический смысл переменных и разделимость взаимодействий. Начиная с работы Дирака [24], главным направлением развития теории прямых взаимодействий было построение релятивистской гамильтоновой теории (РГТ) для системы с заданным числом частиц (задача Дирака).* Решение задачи Дирака в рамках классической механики натолкнулось на серьезную трудность, связанную с теоремой об отсутствии взаимодействия (no interaction theorem) [26, 63—66], согласно которой каноническими координатами могут служить физические положения частиц (ковариантные координаты) лишь невзаимодействующих частиц. Поскольку в квантовой механике понятие мировой линии отсутствует и требование ковариантности канонических координат, отображающее условие инвариантности мировой линии, казалось бы, не должно играть существенную роль, основные усилия были направлены на разработку квантовой РГТ прямых взаимодействий. Ее развитие связано прежде всего с именами Бакамжиана и Томаса [67], Фолди [68], Фонга и Сучера [69], Кестера [70] и С. Н. Соколова [3, 8, 61, 62, 71—75], в работах которого квантовая задача Дирака получила наиболее полное решение.

Однако такое противопоставление квантового и классического варианта теории нельзя признать удовлетворительным из-за его логической неоправданности и ввиду того, что для физической интерпретации квантовой теории, для возможности сравнения ее результатов с экспериментом важное значение имеет физический смысл используемых в теории переменных, глубокое понимание которого вряд ли возможно без соответствующего анализа на классическом уровне.

---

* С. Н. Соколов [61, 62] предложил также вторично квантованный вариант РГТ, описывающий процессы рождения и уничтожения частиц. При сравнительно низких энергиях, которыми мы здесь ограничимся, они несущественны.

Поэтому представляет интерес параллельное исследование проблемы построения классической и квантовой теории прямых взаимодействий, тем более, что, как отмечалось в [3], все успешные, но различные по форме попытки построения релятивистского описания замкнутой системы частиц постепенно развиваются в физически эквивалентные версии единой теории.

Кроме вопросов, обусловленных необходимостью сочетания взаимодействия частиц и обычных трансформационных свойств их пространственных координат, проблема выбора переменных (особенно в гамильтоновом формализме, где свобода в выборе канонических переменных достигается ценой потери их ясного физического смысла) связана с другим (после пуанкаре-инвариантности) фундаментальным требованием к теории прямых взаимодействий, а именно *сепарабельностью* (separability) или *разделимостью* (*кластерной разделимостью*) взаимодействий [68, 6, 70, 71]. Это условие будет обсуждаться более подробно ниже (см. разд. 2), а здесь ограничимся лишь предварительными замечаниями.

Пусть система частиц σ разделяется на две подсистемы σ_I и σ_{II}, которые в пределе удаляются друг от друга на бесконечность. Поскольку взаимодействие между бесконечно удаленными частицами отсутствует, любые характеристики, например, подсистемы σ_I должны быть независимыми в указанном пределе от переменных подсистемы σ_{II}. Ясно, что сама возможность количественной формулировки этого условия предполагает, что среди переменных, характеризующих систему, есть и такие, асимптотическое поведение которых способно отразить рассматриваемый предельный процесс, т. е. переменные, имеющие смысл пространственного расстояния.

В связи с этим весьма целесообразно рассмотреть возможность построения гамильтоновой формулировки релятивистской теории прямых взаимодействий (как квантовой, так и классической) на основе предварительного решения этой задачи в рамках ньютонова или лагранжева формализма, в которых с самого начала можно пользоваться физическими координатами частиц, обладающими известными трансформационными свойствами относительно преобразований Лоренца. Задачу гамильтонизации релятивистских уравнений типа Ньютона на основе теоремы Ли-Кенигса рассматривали Кернер и Хилл [76—78]. Другой путь — это переход от лагранжева формализма к гамильтоновому. В общем случае он требует выхода за рамки обычного преобразования Лежандра и заслуживает глубокого изучения. Однако в проблеме, представляющей в данной статье главный интерес, а именно, в построении первого постньютоновского приближения релятивистской механики системы частиц, переход от лагранжева описания к гамильтоновому осуществляется, как увидим ниже, традиционным методом.* Поэтому будем исходить из обобщенного формализма Лагранжа — Остроградского [81], использованного автором совместно с Ю. Б. Ключковским и В. И. Третяком [82] в качестве основы релятивистской лагранжевой теории (РЛТ) прямых взаимодействий частиц. Вместе с тем в постньютоновском приближении будет нетрудно проследить эквивалентность такого подхода с результатами, получаемыми непосредственно в гамильтоновом формализме.

Отметим еще одно важное достоинство классической РЛТ прямых взаимодействий, а именно возможность установления ее связи с полевыми подходами с помощью фоккеровской формулировки теории дальнодействия. Этим воспользуемся в разд. 4 для теоретико-полевой интерпретации приближенно релятивистских лагранжианов и гамильтонианов.

2. ОДНОВРЕМЕННЫЕ ФОРМУЛИРОВКИ ПУАНКАРЕ-ИНВАРИАНТНЫХ ТЕОРИЙ ПРЯМЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Алгебра Ли группы Пуанкаре. Пусть G_r — r — параметрическая группа Ли точечных преобразований пространства Минковского M_4 с параметрами λ^α,

$$\left.\begin{aligned} &x'^\mu = \varphi^\mu(x, \lambda);\\ &x = \{x^\mu\} \equiv \{ct, \mathbf{r}\};\ \mu = 0, 1, 2, 3;\\ &\lambda = \{\lambda^\alpha\},\ \alpha = 1, \ldots, r, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

причем $\varphi^\mu(x, 0) = x^\mu$. Соответствующие инфинитезимальные преобразования **

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu = x^\mu + \xi^\mu_\alpha(x)\,\delta\lambda^\alpha + o(\delta\lambda) \tag{2}$$

определяются касательными векторными полями [83] [генераторами преобразований (1)]:

$$\mathscr{X}_\alpha = \xi^\mu_\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x^\mu};\quad \xi^\mu_\alpha(x) = \left.\frac{\partial\varphi^\mu(x, \lambda)}{\partial\lambda^\alpha}\right|_{\lambda=0}. \tag{3}$$

Они удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\mathscr{X}_\alpha, \mathscr{X}_\beta] = c^\gamma_{\alpha\beta}\mathscr{X}_\gamma, \tag{4}$$

или, что эквивалентно,

$$\xi^\mu_\alpha\frac{\partial\xi^\nu_\beta}{\partial x^\mu} - \xi^\mu_\beta\frac{\partial\xi^\nu_\alpha}{\partial x^\mu} = c^\gamma_{\alpha\beta}\xi^\nu_\gamma, \tag{5}$$

* Такой переход нетрудно выполнить также в линейном приближении по взаимодействию [79, 80].

** По повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

где $c_{\alpha\beta}^{\gamma}$ — тензор структурных констант группы G_r. Тем самым операторы $\mathcal{X}_\alpha$ порождают алгебру Ли AG_r группы G_r.

В случае 10-параметрической группы Пуанкаре * $\mathcal{P}$ генераторы временных ($\mathcal{X}_0^T$) и пространственных ($\mathcal{X}_i^T$) трансляций, пространственных ($\mathcal{X}_j^R$) и лоренцовых ($\mathcal{X}_j^L$) поворотов имеют вид **:

$$\mathcal{X}_0^T = -\frac{\partial}{\partial t}; \quad \mathcal{X}_j^T = -\frac{\partial}{\partial x^j}; \tag{6}$$

$$\mathcal{X}_j^R = -\varepsilon_{jki} x^k \frac{\partial}{\partial x_i}; \tag{7}$$

$$\mathcal{X}_j^L = -\frac{1}{c^2} x_j \frac{\partial}{\partial t} - t \frac{\partial}{\partial x^j}, \tag{8}$$

где ε_{jki} — символ Леви-Чивита с $\varepsilon_{123} = +1$. Отсюда для $A\mathcal{P}$ получаются следующие перестановочные соотношения:

$$[\mathcal{X}_i^T, \mathcal{X}_0^T] = 0; \quad [\mathcal{X}_j^R, \mathcal{X}_0^T] = 0; \quad [\mathcal{X}_i^T, \mathcal{X}_j^T] = 0; \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} &[\mathcal{X}_i^R, \mathcal{X}_j^T] = \varepsilon_{ijk}\mathcal{X}_k^T; \quad [\mathcal{X}_i^R, \mathcal{X}_j^R] = \varepsilon_{ijk}\mathcal{X}_k^R; \\ &[\mathcal{X}_i^R, \mathcal{X}_j^L] = \varepsilon_{ijk}\mathcal{X}_k^L; \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$[\mathcal{X}_i^L, \mathcal{X}_0^T] = \mathcal{X}_i^T; \tag{11}$$

$$[\mathcal{X}_i^L, \mathcal{X}_j^T] = \delta_{ij}\mathcal{X}_0^T/c^2; \quad [\mathcal{X}_i^L, \mathcal{X}_j^L] = -\varepsilon_{ijk}\mathcal{X}_k^R/c^2. \tag{12}$$

Алгебра Ли $A\mathcal{G}$ группы Галилея определяется коммутационными соотношениями, отличающимися от выписанных выше только заменой (12) на равенства:

$$[\mathcal{X}_i^G, \mathcal{X}_j^T] = 0; \quad [\mathcal{X}_i^G, \mathcal{X}_j^G] = 0, \tag{13}$$

которые можно получить из (12) с помощью формального предельного перехода $c \to \infty$ ($\mathcal{X}_i^G$ — генератор преобразований Галилея).

Для того чтобы сформулировать условия пуанкаре-инвариантности одновременного описания релятивистской системы прямо взаимодействующих частиц с мировыми линиями $\mathbf{x}_a(t)$, необходимо построить представление группы Пуанкаре, действующее в некотором пространстве состояний этой системы (конфигурационном, фазовом и пр.). Первым шагом является конкретизация пространства представления; трем основным формализмам теории (лагранжеву, ньютонову и гамильтонову) соответствуют три возможности: 1) бесконечное продолжение $J^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{E}^{3N}) \equiv \mathbf{E}$ (см.

* Под $\mathcal{P}$ подразумеваем основную компоненту связности $\mathcal{P}_+^\uparrow$ [84], содержащую тождественное преобразование.

** Поскольку в дальнейшем используем трехмерные обозначения, нижние и верхние индексы i, j, k считаем эквивалентными.

[82, 85, 91]) расширенного конфигурационного пространства системы частиц со стандартными координатами $(t, \mathbf{x}, \overset{1}{\mathbf{x}}, \ldots, \overset{\sigma}{\mathbf{x}}, \ldots)$, где $\overset{\sigma}{\mathbf{x}} = \{\overset{\sigma}{\mathbf{x}}_a\}$, $a = 1, \ldots, N$; $\overset{1}{\mathbf{x}}_a \equiv \dot{\mathbf{x}}_a$, $\overset{\sigma}{\mathbf{x}}_a = d^\sigma \mathbf{x}_a / dt^\sigma$; 2) первое продолжение $\mathbf{R} \times \mathbf{TE}^{3N}$ расширенного конфигурационного пространства с координатами $(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$; 3) фазовое пространство $\mathbf{P}$ системы с координатами (q, p), где $q = \{q_a^i\}$, $p = \{p_{ai}\}$, $a = 1, \ldots, N$; $i = 1, 2, 3$ — канонические координаты и импульсы частиц; связь канонических переменных с конфигурационными будет обсуждена ниже. В качестве канонических переменных будем использовать также переменные центра масс, имеющие коллективный характер.

Следующий шаг заключается в том, чтобы для группы G_r построить набор r генераторов X_α, действующих в соответствующем пространстве и удовлетворяющих перестановочным соотношениям (4).

Представление группы Пуанкаре в конфигурационных переменных системы частиц. Генераторы группы преобразований G_r в $\mathbf{E}$ запишем в следующем виде [82]:

$$X_\alpha = \omega_\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{a=1}^{N} \sum_{\sigma=0}^{\infty} \xi_{a\alpha}^{(\sigma)i} \frac{\partial}{\partial \overset{\sigma}{x}{}_a^i}, \quad \alpha = 1, \ldots, r. \tag{14}$$

Векторные поля ω_α и $\xi_{a\alpha}^{(\sigma)i}$ определяют инфинитезимальные преобразования координат точки в $\mathbf{E}$:

$$t' = t + \omega_\alpha \delta\lambda^\alpha; \quad \overset{\sigma}{x}{}_a'^i(t') = \overset{\sigma}{x}{}_a^i(t) + \xi_{a\alpha}^{(\sigma)i} \delta\lambda^\alpha. \tag{15}$$

Для групп пространственных трансляций ($\alpha \equiv \overset{T}{j}$) и поворотов ($\alpha \equiv \overset{R}{j}$), не затрагивающих переменную t ($\omega_\alpha = 0$), имеем:

$$X_j^T = -\sum_a \frac{\partial}{\partial x_a^j}; \quad X_j^R = -\varepsilon_{ijk} \sum_a \sum_\sigma \overset{\sigma}{x}{}_a^k \frac{\partial}{\partial \overset{\sigma}{x}_{ai}}. \tag{16}$$

Переходя к преобразованиям буста (лоренцовым поворотам) Λ с параметрами δV^j (компонентами относительной скорости $\mathbf{V}$ систем отсчета S' и S), первую из формул (15) запишем в виде:

$$t' = t + \omega_j^L \delta V^j \equiv t - R_j \delta V^j / c^2, \tag{17}$$

где $\mathbf{R}$ можно интерпретировать как положение наблюдателя, связывающего «новую» одновременность $t' = \mathrm{const}$ со «старой» $t = \mathrm{const}$ [26, 63, 82, 86—88]. Задание ω^L эквивалентно установлению взаимно однозначного соответствия между семействами гиперповерхностей $t = \mathrm{const}$ и $t' = \mathrm{const}$. Как показано в [82], без потери общности можно взять $\omega_j^L = 0$, т. е. $t' = t$. Для получения второй формулы (15) при $\sigma = 0$ заметим, что одновременные в системе отсчета S' положения частиц $\mathbf{x}'_a(t')$ соответствуют согласно преобразованиям Лоренца неодновременным в S положениям $\mathbf{x}_a(t_a)$:

$$x'_{ai}(t') = \{\Lambda[t_a, \mathbf{x}_a(t_a)]\}_i; \quad t_a = \{\Lambda^{-1}[t', \mathbf{x}'_a(t')]\}_0/c. \tag{18}$$

Подставляя второе равенство (18) в первое и учитывая, что $t' = t$, с точностью до членов, линейных по δV^j, получаем [26, 63, 82]:

$$\delta x^i_a \equiv x'^i_a(t') - x^i_a(t) = (-\delta^i_j t + v^i_a x_{aj}/c^2)\,\delta V^j \equiv \xi^{Li}_{ja}\delta V^j, \tag{19}$$

где $v^i_a = dx^i_a/dt = \dot{x}^i_a$. Поскольку равенства (19) являются следствием обычных преобразований Лоренца для точек пространства Минковского, лежащих на мировых линиях частиц, будем называть их *условиями ковариантности координат* x^i_a, а сами координаты, удовлетворяющие им — *ковариантными координатами*. Подчеркнем, что $\mathbf{x}_a(t)$ и $\mathbf{x}'_a(t')$ соответствуют *различным* точкам мировой линии a-й частицы, так что равенства (19) не являются обычными преобразованиями Лоренца; их можно назвать преобразованиями Лоренца с пересчетом к новой одновременности [86].

Из равенств (19) находим соответствующие преобразования производных:

$$\frac{d^\sigma x'^i_a}{dt'^\sigma} \equiv \overset{\sigma}{x}{}'^i_a(t') = \overset{\sigma}{x}{}^i_a(t) + \xi^{(\sigma)Li}_{ja}\delta V^j, \quad \sigma = 0, 1, \ldots, \tag{20}$$

где

$$\xi^{(\sigma)Li}_{ja} = \frac{d}{dt}\xi^{(\sigma-1)Li}_{ja} = \frac{d^\sigma}{dt^\sigma}\xi^{Li}_{ja}, \quad \xi^{(0)Li}_{ja} \equiv \xi^{Li}_{ja}. \tag{21}$$

Таким образом, для генераторов буста находим:

$$X^L_j = \sum_a \sum_{\sigma=0}^{\infty}\left[\frac{d^\sigma}{dt^\sigma}\left(-t\delta_{jk} + \frac{1}{c^2}v_{ak}x_{aj}\right)\right]\frac{\partial}{\partial \overset{\sigma}{x}_{ak}}. \tag{22}$$

Нам осталось определить генератор временных сдвигов X^T_0. Если бы нас интересовала только группа Аристотеля (прямое произведение группы Евклида и группы временных трансляций, см. [36, 82]), то для системы частиц его можно было бы выбрать, как и в (6), в виде $\tilde{X}^T_0 = -\partial/\partial t$. Однако такой выбор не согласуется со структурой группы Пуанкаре, если генераторы лоренцовых поворотов определены формулами (22), т. е. если $\omega^L_j = 0$. Для получения $A\mathcal{P}$ мы должны взять X^T_0 в виде

$$X^T_0 = \sum_{a=1}^{N}\sum_{\sigma=0}^{\infty}\overset{\sigma+1}{x}{}^k_a\frac{\partial}{\partial \overset{\sigma}{x}{}^a_k} = \frac{d}{dt} - \frac{\partial}{\partial t}. \tag{23}$$

Это соответствует представлению временных трансляций $t' = t - \delta\tau$ сдвигом вдоль траектории частицы [89]: $x_a'^i(t) = x_a^i(t + \delta\tau) = x_a^i(t) + \dot{x}_a^i(t)\,\delta\tau + o(\delta\tau)$.

С помощью непосредственных расчетов нетрудно проверить, что генераторы (16), (22) и (23) образуют базис алгебры $A\mathcal{P}$, т. е. удовлетворяют соотношениям (9)—(12). Следует отметить, что представление группы Пуанкаре преобразованиями, не затрагивающими времени, возникают при анализе симметрий релятивистских полевых уравнений, выполненном В. И. Фущичем [90].

В построении одновременной теории прямых взаимодействий существенную роль играет наличие в (22) скоростей $\mathbf{v}_a$, обусловленное тем обстоятельством, что переход к новой одновременности (на новую гиперповерхность $t' = \mathrm{const}$) сопровождается сдвигом вдоль мировых линий частиц, неустранимым при $N \geqslant 2$*. Мы сталкиваемся, таким образом, с необходимостью рассмотрения неточечных преобразований координат. Именно этот факт вместе с условием касательности преобразования, состоящем в требовании, чтобы для преобразованных скоростей выполнялось равенство $v_a'^i(t') = dx_a'^i(t')/dt'$, приводит к важному следствию: для формулировки пуанкаре-инвариантности лагранжева описания релятивистских взаимодействий необходимым является построение представления группы $\mathcal{P}$ касательными преобразованиями бесконечного порядка, называемыми также преобразованиями Ли — Беклунда (см. [91]), действующими в бесконечномерном пространстве $\mathbf{E} = \mathbf{R} \times \mathbf{E}_\infty^{3N}$. Последний вывод, являющийся отображением строгих результатов, полученных в указанных работах, можно объяснить с помощью следующих простых рассуждений. Если рассмотреть композицию двух, трех и т. д. преобразований Лоренца, т. е. переход $S \to S' \to S'' \to S''' \to \ldots$, то, как видно из (19) — (21), в формулах перехода $\mathbf{x}_a(t) \to \mathbf{x}_a''(t'')$, $\mathbf{x}_a(t) \to \mathbf{x}_a'''(t''')$ и т. д. появятся ускорения, третьи производные и т. п. Учитывая групповую структуру преобразований, приходим к сформулированному выше утверждению.

Отметим следующее важное обстоятельство. Если функции $\mathbf{x}_a(t)$ удовлетворяют уравнениям движения второго порядка, то в рассмотренной выше цепочке преобразований эти уравнения можно использовать для исключения ускорений. В результате придем к преобразованиям пространства $\mathbf{R} \times \mathbf{TE}^{3N}$, являющимся касательными относительно данных уравнений движения [92, 93]. Они будут использованы ниже для установления условий пуанкаре-инвариантности уравнений движения типа Ньютона. Однако в исследовании инвариантности лагранжева формализма следует

* В случае одной частицы для получения обычных преобразований Лоренца точек мировой линии γ_a мы должны положить в (17) $\omega_j^L = -c^{-2}x_{aj}$, т. е. $R_j = x_{aj}$.

пользоваться лишь преобразованиями, касательными безотносительно к уравнениям движения, так как функция Лагранжа задается не только на реальных, но и на виртуальных траекториях частиц [94].

Канонические представления группы Пуанкаре. Как уже отмечалось, задачу нахождения канонической реализации алгебры $A\mathcal{P}$ на фазовом пространстве **P** динамической системы впервые сформулировал Дирак [24]. В той же работе были предложены три различные формы релятивистской динамики (мгновенная, точечная и фронтальная), отличающиеся в канонической теории тем, в какие из десяти генераторов группы $\mathcal{P}$ (временных и пространственных трансляций H и P_i, пространственных и лоренцовых поворотов J_i и K_i) входят члены, описывающие взаимодействие частиц. Для исследования квазирелятивистского приближения наиболее удобной является мгновенная форма, в которой H и **K** содержат взаимодействие, а **P** и **J** имеют свободночастичный вид. Связь между различными формами динамики в РГТ исследовалась в работах [62, 72, 75, 95].

Детально канонические представления групп Ли (в том числе групп Пуанкаре и Галилея) изучены в работах [96, 97]. Приведем кратко те результаты, которые необходимы для формулировки классического варианта задачи Дирака.

Пусть группа Ли G_r реализуется некоторыми преобразованиями фазового пространства, генерируемыми набором операторов вида

$$X_\alpha = \sum_m \left(\xi^m_\alpha \frac{\partial}{\partial q^m} + \eta^m_\alpha \frac{\partial}{\partial p^m} \right) \quad \alpha = 1, \ldots, r. \tag{24}$$

Если эти преобразования канонические, т. е. они сохраняют гамильтонову структуру уравнений движения

$$\dot{q}^m = \partial H/\partial p_m; \; \dot{p}_m = -\partial H/\partial q^m, \tag{25}$$

то существуют функции $Y_\alpha(q, p)$, называемые *каноническими генераторами*, такие, что

$$\xi^m_\alpha = -\partial Y_\alpha/\partial p_m; \; \eta^m_\alpha = \partial Y_\alpha/\partial q^m. \tag{26}$$

Тогда операторы X_α можно записать в виде

$$X_\alpha = \sum_m \left(\frac{\partial Y_\alpha}{\partial q^m} \frac{\partial}{\partial p_m} - \frac{\partial Y_\alpha}{\partial p_m} \frac{\partial}{\partial q^m} \right) \equiv \{Y_\alpha, \ldots\}, \tag{27}$$

где для любой пары функций $f(q, p)$, $g(q, p)$:

$$\{f, g\} = \sum_m \left(\frac{\partial f}{\partial q^m} \frac{\partial g}{\partial p_m} - \frac{\partial f}{\partial p_m} \frac{\partial g}{\partial q^m} \right) \tag{28}$$

— скобка Пуассона. Из соотношений (4) для канонических генераторов Y_α следуют классические перестановочные соотношения (в терминах скобок Пуассона):

$$\{Y_\alpha, Y_\beta\} = c^\gamma_{\alpha\beta} Y_\gamma + d_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, r, \tag{29}$$

где $d_{\alpha\beta}$ — набор постоянных, удовлетворяющих ряду соотношений.

Для того чтобы генерируемые Y_α преобразования были симметриями уравнений Гамильтона (25), достаточно (и при небольших оговорках необходимо), чтобы Y_α были интегралами движения [98], т. е. удовлетворяли соотношениям:

$$\partial Y_\alpha / \partial t + \{Y_\alpha, H\} = 0. \tag{30}$$

В случае группы Пуанкаре без ущерба для общности можно положить $d_{\alpha\beta} = 0$ для всех α и β [56, 63, 97]. Тогда соотношения (29) для группы $\mathcal{P}$ примут вид

$$\{P_i, H\} = 0; \ \{J_i, H\} = 0; \ \{P_i, P_j\} = 0; \tag{31}$$

$$\{J_i, P_j\} = \varepsilon_{ijk} P_k; \ \{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk} J_k; \ \{J_i, K_j\} = \varepsilon_{ijk} K_k; \tag{32}$$

$$\{K_i, H\} = P_i; \ \{K_i, P_j\} = \delta_{ij} H/c^2; \ \{K_i, K_j\} = -\varepsilon_{ijk} J_k/c^2, \tag{33}$$

где использованы обозначения:

$$H = -Y^T_0; \ P_i = Y^T_i; \ J_i = Y^R_i; \ K_i = -Y^L_i. \tag{34}$$

Если в (31) — (33) канонические генераторы заменить на эрмитовые операторы — генераторы унитарных преобразований, а скобки Пуассона — на коммутаторы (умноженные на $-i/\hbar$), то получим коммутационные соотношения, лежащие в основе квантовой РГТ.

Задача построения канонических представлений группы Пуанкаре (классический вариант задачи Дирака) заключается в нахождении десяти функций H, P_i, J_i, K_i (отождествляемых с энергией, импульсом, моментом импульса и интегралом движения центра масс), удовлетворяющих перестановочным соотношениям (31) — (33), т. е. в нахождении решений этой нелинейной системы дифференциальных уравнений первого порядка.

Отметим здесь существенное отличие гамильтонова формализма от лагранжева. Если в последнем трансформационные свойства конфигурационных переменных $\overset{\sigma}{x}{}^i_a$ являются чисто кинематическими, что позволяет построить представление группы $\mathcal{P}$ до постановки вопроса о динамике системы, то в гамильтоновом подходе ситуация принципиально иная. Физический смысл, а тем самым и трансформационные свойства канонических координат не могут быть заданы априори, так как определяются производящими функциями Y_α, являющимися одновременно динамическими характеристиками (интегралами движения) системы, существенно зависящими от наличия и вида взаимодействия.

Для системы N невзаимодействующих частиц представление группы $\mathcal{P}$ в $\mathbf{P}$ является прямым произведением неприводимых представлений, а его генераторы — суммами одночастичных генераторов. Такие представления были изучены и проклассифицированы в квантовой механике Вигнером, Баргманом и Ю. М. Широковым [99, 100], а соответствующий анализ в терминах канонических представлений дан в работе [97]. Записанные ниже классические результаты можно интерпретировать (после симметризации произведений некоммутирующих операторов) и в терминах квантовой механики.

Системе невзаимодействующих бесспиновых частиц соответствует решение [24, 63, 68, 97]:

$$\mathbf{P}=\sum_a \mathbf{p}_a, \quad (\text{а}); \quad \mathbf{J}=\sum_a \mathbf{J}_a=\sum_a \mathbf{q}_a\times\mathbf{p}_a; \quad (\text{б}) \tag{35}$$

$$H_f=\sum_a H_a=\sum_a \sqrt{m_a^2c^4+c^2p_a^2}; \tag{36}$$

$$\mathbf{K}_f=\sum_a \mathbf{K}_a=\sum_a(-t\mathbf{p}_a+H_a\mathbf{q}_a/c^2). \tag{37}$$

Индекс f, указывающий на отсутствие взаимодействий между частицами, пропущен у генераторов $\mathbf{P}$ и $\mathbf{J}$ ввиду того, что в используемой нами мгновенной форме динамики эти генераторы сохраняют свой вид безотносительно к наличию взаимодействия [24, 68, 63]. При наличии спинов частиц, которые в классической механике можно ввести феноменологически, выражения (35б) и (37) модифицируются следующим образом [67, 68, 97]:

$$\mathbf{J}=\sum_a(\mathbf{q}_a\times\mathbf{p}_a+\mathbf{s}_a); \tag{38}$$

$$\mathbf{K}_f=\sum_a\left(-t\mathbf{p}_a+\frac{1}{c^2}H_a\mathbf{q}_a-\frac{\mathbf{s}_a\times\mathbf{p}_a}{m_ac^2+H_a}\right) \tag{39}$$

Важный вопрос о связи групп Пуанкаре и Галилея, а также их представлений исследован Иненю и Вигнером [101]. Не вдаваясь в математические аспекты перехода от представлений группы $\mathcal{P}$ к группе Галилея $\mathcal{G}$, отметим, что перестановочные соотношения для канонических (эрмитовых) генераторов группы $\mathcal{G}$ можно формально получить из (31) — (33), полагая $c\to\infty$. При этом для H и $\mathbf{K}$ мы должны записать:

$$H\approx Mc^2+H^{(0)}; \quad \mathbf{K}\approx\mathbf{K}^{(0)}, \tag{40}$$

где $M=\sum_a m_a$ — масса покоя нерелятивистской системы частиц, а выражения для $\mathbf{P}$ и $\mathbf{J}$ сохранить в виде (35) [или (35а) и (38)].

Соотношения (31) и (32) не меняют своего вида при $c \to \infty$ (за исключением замены H на $H^{(0)}$ и $\mathbf{K}$ на $\mathbf{K}^{(0)}$), а вместо (33) будем иметь:

$$\{K_i^{(0)},\ H^{(0)}\} = P_i,\ \{K_i^{(0)},\ P_j\} = \delta_{ij}M,\ \{K_i^{(0)},\ K_j^{(0)}\} = 0. \tag{41}$$

К тем же результатам можно прийти и с помощью исследования самой группы Галилея, в рамках которого M является нейтральным элементом алгебры Ли группы $\mathcal{G}$ [96, 56]. Отметим, что в квантовой механике с наличием в перестановочных соотношениях членов этого типа связана необходимость рассмотрения проективных представлений группы Галилея (см. [102—104]).

Релятивистские уравнения движения типа Ньютона. Ньютонов формализм в релятивистской теории прямых взаимодействий заключается в постулировании уравнений движения системы частиц в виде

$$\ddot{x}_a^i - \mu_a^i(x,\ \dot{x},\ t) = 0;\ x = \{x_b^i(t)\};\ \dot{x} = \{\dot{x}_b^i(t)\}. \tag{42}$$

Пуанкаре-инвариантность такого подхода требует, чтобы система уравнений (42) допускала представление группы $\mathcal{P}$ в конфигурационном пространстве системы частиц с генераторами (14). Это условие выражается равенством

$$X_\alpha[\ddot{x}_a^i - \mu_a^i(x,\ \dot{x},\ t)]|_\mu = 0, \tag{43}$$

где символ $|_\mu$ указывает, что выражение (43) следует вычислять с учетом уравнений (42). Подставляя в (43) выражения (16), (22) и (23), находим для функций μ_a^i систему уравнений:

$$\frac{\partial \mu_a^i}{\partial t} = 0;\quad \sum_b \frac{\partial \mu_a^i}{\partial x_b^j} = 0; \tag{44}$$

$$\sum_b \varepsilon_{jkl}\left(x_b^k \frac{\partial \mu_a^i}{\partial x_b^l} + \dot{x}_b^k \frac{\partial \mu_a^i}{\partial \dot{x}_b^l}\right) = \varepsilon_{jnl}\mu_a^n; \tag{45}$$

$$\sum_b \frac{\partial \mu_a^i}{\partial \dot{x}_b^j} + \frac{1}{c^2}\left\{\sum_b \left[r_{ab}^j\left(\dot{x}_b^k \frac{\partial \mu_a^i}{\partial x_b^k} + \mu_b^k \frac{\partial \mu_a^i}{\partial \dot{x}_b^k}\right) - \dot{x}_b^k \dot{x}_b^j \frac{\partial \mu_a^i}{\partial \dot{x}_b^k}\right] + 2\mu_a^i \dot{x}_a^j + \mu_a^j \dot{x}_a^i\right\} = 0. \tag{46}$$

Согласно (44) и (45), μ_a^i должны быть трансляционно инвариант ными (содержащими лишь относительные координаты частиц $r_{ab}^i = x_a^i - x_b^i$), не зависящими явно от времени компонентами 3-векторов. Эти условия относятся как к релятивистским, так и к нерелятивистским уравнениям движения. Уравнения (46), носящие название условий Карри — Хилла, выражают условия форм-инвариантности уравнений (42) относительно преобразований Лоренца (с пересчетом к новой одновременности). Они впервые были найдены в [105 и 106] в качестве необходимых условий пуанкаре-инвариантности; Бель [107] установил их достаточность (см. также обзоры [108, 36]. Основные трудности этого подхода обусловлены нелинейностью системы (46). Мы не будем рассматривать приближенных способов решения уравнений (46) (см. [37, 38, 109—112]), поскольку более удобным нам представляется лагранжев формализм, позволяющий находить не только приближенно лоренц-ковариантные уравнения движения, но и соответствующие законы сохранения. Что касается точных решений этих уравнений, то известно лишь общее решение для системы двух частиц в одномерном случае [113].

Релятивистская лагранжева теория (РЛТ). Формализм Лагранжа базируется на вариационном принципе [82]

$$\delta S=\delta\int_{t_1}^{t_2} L(t,\ x,\ \dot{x},\ \ldots,\ \overset{s}{x})\,dt=0, \tag{47}$$

где на высший порядок s производных, содержащихся в лагранжиане, априори не налагаются никакие ограничения. Уравнения экстремалей функционала (47) (уравнения Эйлера — Лагранжа) имеют вид

$$\mathscr{L}_{ai}L\equiv\sum_{\sigma=0}^{\infty}\left(-\frac{d}{dt}\right)^{\sigma}\frac{\partial L}{\partial \overset{\sigma}{x}{}_a^i}=0. \tag{48}$$

Условие инвариантности РЛТ относительно группы G_r приводит к системе уравнений * [85, 82]

$$X_\alpha L+d\Omega_\alpha/dt=0, \tag{49}$$

где операторы X_α определены в (14). В (49) Ω_α — некоторые функции, удовлетворяющие соотношениям

$$X_\alpha\Omega_\beta-X_\beta\Omega_\alpha=c^\gamma_{\alpha\beta}\Omega_\gamma, \tag{50}$$

выражающим условия интегрируемости системы (49).

Задача построения общего вида лагранжиана L, совместимого с требованием ковариантности системы уравнений (48) относительно G_r, состоит в интегрировании системы уравнений (49), (50).

В [82] установлен следующий важный факт: для получения общего решения L системы (49) достаточно в качестве набора функций Ω_α взять любое частное решение системы (50), так как

* Мы полагаем $t'=t$, как это было принято в (22) и (23) для группы Пуанкаре.

любое другое решение приводит к лагранжиану, отличающемуся от L на полную производную, т. е. дающему те же уравнения Эйлера. В частности, можно использовать тривиальное решение (50): $\Omega_\alpha = 0$, $\alpha = 1, \ldots, r$, однако это не всегда удобно.

Запишем систему уравнений (49) для группы $\mathscr{P}$. Полагая $\Omega_i^T = 0$, $\Omega_i^R = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, для группы Евклида получаем уравнения

$$-X_i^T L \equiv \sum_a \frac{\partial L}{\partial x_a^i} = 0; \tag{51}$$

$$-X_i^R L \equiv \sum_a \sum_{\sigma=0}^{\infty} \varepsilon_{ijk} \overset{\sigma}{x}{}_a^j \frac{\partial L}{\partial \overset{\sigma}{x}_{ak}} = 0, \tag{52}$$

выражающие условия трансляционной и вращательной инвариантности лагранжиана L. Для временных сдвигов и бустов имеем:

$$X_0^T L + d\Omega_0^T/dt \equiv dL/dt - \partial L/\partial t + d\Omega_0^T/dt = 0; \tag{53}$$

$$X_i^L L + \frac{d\Omega_i^L}{dt} \equiv \sum_a \sum_{\sigma=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{d^\sigma}{dt^\sigma} \left(-t\delta_i^j + \frac{1}{c^2} x_{ai} v_a^j \right) \right] \frac{\partial L}{\partial \overset{\sigma}{x}{}_a^j} + \right.$$

$$\left. + \overset{\sigma+1}{x}{}_a^j \frac{\partial \Omega_i^L}{\partial \overset{\sigma}{x}{}_a^j} \right\} = 0. \tag{54}$$

Выбор $\Omega_0^T = -L$ в (53) приводит к обычному условию

$$\partial L/\partial t = 0, \tag{55}$$

выражающему инвариантность лагранжева описания замкнутых систем относительно временных трансляций.

Условия интегрируемости (50) сводятся к следующей системе уравнений для трех функций Ω_i^L:

$$\frac{\partial \Omega_i^L}{\partial t} = 0; \quad \sum_a \sum_{\sigma=0}^{\infty} \varepsilon_{ikl} \overset{\sigma}{x}{}_a^k \frac{\partial \Omega_j^L}{\partial \overset{\sigma}{x}{}_a^l} = -\varepsilon_{ijn} \Omega_n^L; \tag{56}$$

$$\sum_a \frac{\partial \Omega_j^L}{\partial x_a^i} = -\frac{1}{c^2} \delta_{ij} L; \quad X_i^L \Omega_j^L - X_j^L \Omega_i^L = 0. \tag{57}$$

Уравнения (56) означают, что Ω_i^L должны быть составляющими 3-вектора, не зависящими явно от t. Первое из соотношений (57) запрещает выбор $\Omega_i^L = 0$.

Итак, задача нахождения релятивистских лагранжианов L сводится к решению системы уравнений (54), (57), в которой L —

не зависящая от времени трансляционно инвариантная, т. е. содержащая координаты частиц только в виде $r^i_{ab} = x^i_a - x^i_b$, скалярная функция, а Ω^L_i — не зависящие явно от времени функции, являющиеся компонентами трехмерного вектора.

Указанная система уравнений имеет решение:

$$L_f = \sum_a L_a = -\sum_a m_a c^2 \sqrt{1 - v_a^2/c^2}; \tag{58}$$

$$\Omega^L_{if} = \sum_a \Omega^L_{ia} = \sum_a m_a x_{ai} \sqrt{1 - v_a^2/c^2}, \tag{59}$$

описывающее систему невзаимодействующих частиц.

Если ввести функции U и Ψ_i, исчезающие при отсутствии взаимодействия, полагая

$$L = L_f - U; \quad \Omega^L_i = \Omega^L_{if} + \Psi_i, \tag{60}$$

то из (51) — (57) получаем для них систему уравнений:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0; \quad \sum_a \frac{\partial U}{\partial x^i_a} = 0; \quad \sum_a \sum_{\sigma=0}^{\infty} \varepsilon_{ijk} \overset{\sigma}{x}{}^j_a \frac{\partial U}{\partial \overset{\sigma}{x}_{ak}} = 0; \tag{61}$$

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial t} = 0; \quad \sum_a \sum_{\sigma=0}^{\infty} \varepsilon_{ijk} \overset{\sigma}{x}{}^j_a \frac{\partial \Psi_n}{\partial \overset{\sigma}{x}_{ak}} = -\varepsilon_{inl} \Psi^l; \tag{62}$$

$$X^L_i U = d\Psi_i/dt; \tag{63}$$

$$\sum_a \frac{\partial \Psi_i}{\partial x^j_a} = -\frac{1}{c^2} \delta_{ij} U; \tag{64}$$

$$X^L_i \Psi_j - X^L_j \Psi_i = 0. \tag{65}$$

Основная трудность в решении системы (61) — (65) обусловлена бесконечномерностью пространства **E**, являющегося областью определения U и Ψ_i. Вместе с тем следует отметить ее линейность.

Согласно теореме Нетер [81, 114—116], с группой симметрии G_r вариационного принципа связаны r законов сохранения, имеющих для лагранжианов с высшими производными следующий вид [117]:

$$\frac{dG_\alpha}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \left\{ \sum_a \sum_{\sigma=0}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \xi^{(\lambda-1)i}_{\alpha a} \left(-\frac{d}{dt} \right)^\sigma \frac{\partial L}{\partial \overset{\sigma+\lambda}{x}_{ai}} + \Omega_\alpha \right\} = 0. \tag{66}$$

Для десяти интегралов движения (энергии E, импульса **P**, момента импульса **J**, интеграла движения центра масс **K**), соответствующих пуанкаре-инвариантности, получаем:

$$E \equiv G_0^T = \sum_a \sum_{\sigma=0}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \overset{\lambda}{x}_{ai} \left(-\frac{d}{dt}\right)^{\sigma} \frac{\partial L}{\partial \overset{\sigma+\lambda}{x}_{ai}} - L; \tag{67}$$

$$P_i \equiv -G_i^T = \sum_a \sum_{\sigma=0}^{\infty} \left(-\frac{d}{dt}\right)^{\sigma} \frac{\partial L}{\partial \overset{\sigma+1}{x}_{ai}}; \tag{68}$$

$$J_i \equiv -G_i^R = \sum_a \sum_{\sigma=0}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \varepsilon_{ijk} \overset{\lambda-1}{x}_{aj} \left(-\frac{d}{dt}\right)^{\sigma} \frac{\partial L}{\partial \overset{\sigma+\lambda}{x}_{ak}}, \tag{69}$$

$$K_i \equiv G_i^L = \sum_a \sum_{\sigma=0}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left[\frac{d^{\lambda-1}}{dt^{\lambda-1}}\left(-t\delta_i^j + \frac{1}{c^2} x_{ai} v_a^j\right)\right] \times$$
$$\times \left(-\frac{d}{dt}\right)^{\sigma} \frac{\partial L}{\partial \overset{\sigma+\lambda}{x}_{aj}} + \Omega_i^L. \tag{70}$$

Поскольку свободночастичный лагранжиан (58) от высших производных не зависит, переход к гамильтоновому формализму для систем без взаимодействий осуществляется обычным способом (преобразованием Лежандра). Соответствующие интегралы движения E, $\mathbf{P}_f$, $\mathbf{J}_f$, $\mathbf{K}_f$ в канонических переменных принимают, как легко проверить, вид (35) — (37).

Релятивистская гамильтонова теория (РГТ). Теорема об отсутствии взаимодействия. В гамильтоновом формализме, как уже говорилось выше, основная задача заключается в нахождении десяти канонических генераторов H, $\mathbf{P}$, $\mathbf{J}$ и $\mathbf{K}$, удовлетворяющих соотношениям (31) — (33) и являющихся интегралами движения [равенство (30)].

Если в гамильтониан H и генератор буста $\mathbf{K}$ ввести взаимодействие в виде функций U и $\mathbf{\Psi}$, полагая *

$$H = H_f + U; \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}_f + \mathbf{\Psi}, \tag{71}$$

то из перестановочных соотношений (31) — (33) для функций U и Ψ_i получаем следующую систему уравнений:

$$\{P_i,\ U\} = 0; \ \{J_i,\ U\} = 0, \tag{72}$$

$$\{J_i,\ \Psi_j\} = \varepsilon_{ijk}\Psi^k, \tag{73}$$

$$\{K_{if},\ U\} + \{\Psi_i,\ H_f\} + \{\Psi_i,\ U\} = 0; \tag{74}$$

$$\{\Psi_i,\ P_j\} = \delta_{ij} U/c^2; \tag{75}$$

$$\{K_{if},\ \Psi_j\} + \{\Psi_i,\ K_{jf}\} + \{\Psi_i,\ \Psi_j\} = 0. \tag{76}$$

---

* Хотя функции U и Ψ_i определены на $\mathbf{P}$, используем для них те же обозначения, что и в формулах (60), где областью определения служит $\mathbf{E}$. В общем случае это оправдано ввиду их взаимного соответствия, а в постньютоновском приближении, как будет видно в разд. 3, они фактически совпадают.

Отметим следующее обстоятельство. В [9] установлено, что три из перестановочных соотношений, а именно те, которые в скобке Пуассона содержат H [первое и второе (31) и первое (33)] могут рассматриваться как следствие остальных. Однако в методе последовательных приближений, основанном на разложениях по c^{-2}, этот вывод, как указано в [118], теряет силу в каждом фиксированном приближении вследствие того, что для его доказательства требовалось бы рассмотрение следующего приближения. Поэтому при нахождении приближенных выражений для U и Ψ_i мы должны пользоваться полным набором уравнений (72) — (76).

Учитывая (35а), перестановочные соотношения, содержащие P_i, можем переписать в виде:

$$\sum_a \frac{\partial U}{\partial q_a^i} = 0; \quad \sum_a \frac{\partial \Psi_i}{\partial q_a^j} = \frac{1}{c^2} \delta_{ij} U. \tag{77}$$

Первое из них означает, что канонические координаты могут входить в U только через $q_{ab}^i = q_a^i - q_b^i$. Из (72) и (73) также следует, что U — 3-скаляр, а Ψ_i — компоненты 3-вектора.

Если принять во внимание, что для функций U и Ψ_i в каноническом формализме в силу (30) выполняются равенства $\partial U/\partial t = 0$ и $\partial \Psi_i/\partial t = 0$, то сравнивая системы уравнений (61) — (65) и (72) — (76), нетрудно установить их взаимное соответствие и формальную аналогию. Однако последняя, будучи отражением условий симметрии относительно одной и той же группы $\mathcal{P}$, является только внешней, поскольку с точки зрения математической структуры между этими уравнениями существует глубокое различие: в лагранжевом формализме они линейны, но выражены с помощью операторов, действующих в бесконечномерном пространстве **E**; в гамильтоновом подходе областью определения искомых функций является $6N$-мерное фазовое пространство **P**, зато уравнения нелинейны. С этим связано и обсуждавшееся выше различие между физическим смыслом и трансформационными свойствами переменных, используемых в двух формализмах. Ниже убедимся, что в постньютоновском приближении, представляющем для нас главный интерес, указанные системы уравнений фактически совпадают.

Рассмотрим теперь дополнительные условия к системе (72) — (76), придающие физический смысл решениям задачи Дирака. Наиболее сильным из них, выполнимым только в постньютоновском приближении (если абстрагироваться от весьма специальных случаев в высших приближениях; см. [111]), является каноническое условие инвариантности мировой линии. В гамильтоновом формализме оно впервые было записано Прайсом [119], обсуждалось Томасом [120] и детально проанализировано в связи с проблемой построения РГТ Карри, Йорданом и Сударшаном [26, 63].

Предположим, что канонические переменные q_a^i — ковариантные координаты положения частиц, т. е. при инфинитезимальном преобразовании Лоренца Λ преобразуются по формуле (19). Требуя, чтобы это преобразование соответствовало каноническому представлению группы $\mathcal{P}$:

$$\delta q_a^i = \{q_a^i,\ K_j\}\,\delta V^j, \tag{78}$$

получаем уравнение

$$\{q_{ai},\ K_j\} = -t\delta_{ij} + \frac{1}{c^2}\,q_{aj}\{q_{ai},\ H\}, \tag{79}$$

выражающее условие инвариантности мировой линии в каноническом формализме. Используя равенство $\{q_{ai},\ K_j\} = \partial K_j/\partial p_{ai}$, из (79) нетрудно получить (в предположении $q_{ai} \neq q_{bi}$, $a \neq b$) уравнение

$$\partial^2 H/\partial p_{ai}\,\partial p_{bj} = 0 \quad (b \neq a), \tag{80}$$

из которого видно, что гамильтониан должен иметь следующую структуру:

$$H = \sum_a H_a(q,\ p_a); \tag{81}$$

здесь каждый член суммы зависит от импульса только одной частицы. Как показано в [26, 63] для $N = 2$, в [64] для $N = 3$ и в [65] для произвольного N, равенство (81) в сочетании с перестановочными соотношениями алгебры $A\mathcal{P}$ приводит к заключению, что $H = H_f$, т. е. $U = 0$. В этом состоит известная *теорема об отсутствии взаимодействия* (no-interaction theorem), гласящая: если канонические координаты являются ковариантными и переходам между инерциальными системами отсчета соответствуют канонические представления группы Пуанкаре, то единственным решением задачи Дирака является набор генераторов H_f, $\mathbf{K}_f$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{J}$, соответствующий невзаимодействующим частицам. Детальное обсуждение различных формулировок этой теоремы можно найти в [121].

Поскольку от гамильтонова формализма с помощью преобразования Лежандра можно перейти к стандартному (без высших производных) лагранжевому методу, то сформулированный результат означает также, что не существуют лагранжианы, зависящие только от ковариантных координат частиц и их первых производных, которые могли бы описывать релятивистские системы с взаимодействием [122, 10, 82].

Таким образом, в РГТ в качестве канонических переменных нельзя использовать ковариантные координаты частиц. Можно лишь требовать асимптотическую ковариантность канонических координат, т. е. их ковариантность в предельном случае, когда частицы удалены друг от друга на бесконечность. Это свойство координат q_a^i тесно связано с условием *разделимости взаимодействий* (см. разд. 1). В терминах гамильтоновой теории оно выражается следующим требованием [68, 70, 71]: для любого разбиения системы σ на непересекающиеся подсистемы σ_α, $\alpha = 1, \ldots, n$; $n \leqslant N$, при стремлении расстояний между ними к бесконечности генераторы канонических (в квантовой механике — унитарных) представлений группы $\mathcal{P}$ для системы σ имеют своим пределом сумму генераторов подсистем σ_α. В мгновенной форме динамики разделимость требует, чтобы в указанном пределе

$$U \to \sum_\alpha U_\alpha; \quad \Psi \to \sum_\alpha \Psi_\alpha, \tag{82}$$

где величины с индексом α содержат только переменные частиц из подсистемы σ_α. Отсюда, в частности, следует, что при бесконечной удаленности всех частиц системы функции U и Ψ должны исчезать. Точная математическая формулировка условий разделимости, долгое время составляющая проблему в релятивистской теории прямых взаимодействий (см. [24, 68, 70, 123]), дана С. Н. Соколовым [71].

Условия (82) — весьма существенные ограничения на функции (в квантовой теории — операторы) U и Ψ, описывающие взаимодействия релятивистских частиц. Они не позволяют получить непосредственное обобщение известной модели Бакамжиана — Томаса [67], представляющей собой решение двухчастичной задачи Дирака, на системы с числом частиц $N > 2$. В приближенном подходе, основанном на разложении по степеням c^{-2}, разделимый квантовый гамильтониан взаимодействия впервые получен Ю. М. Широковым с сотруд. [5], хотя в этих работах понятие разделимости не формулировалось. В точной теории квантовомеханические генераторы группы $\mathcal{P}$ с разделимым взаимодействием для $N = 3$ построены Кестером [70] и С. Н. Соколовым [74] и для системы с произвольным числом частиц — С. Н. Соколовым [73, 62].

Важно подчеркнуть, что именно условие разделимости взаимодействия, присоединенное к коммутационным соотношениям алгебры $A\mathcal{P}$, обеспечивает релятивистскую инвариантность квантового описания процессов рассеяния [71].

К числу дополнительных условий к задаче Дирака можно прибавить требование существования нерелятивистского предела $U^{(0)}$ для функции U. Оно не является необходимым следствием каких-либо физических соображений: допустимы и гамильтонианы взаимодействия, исчезающие в нерелятивистском пределе. Данное условие формулирует априорное ограничение на класс искомых решений задачи Дирака. В дальнейшем будем опираться также на разложения генераторов группы $\mathcal{P}$ по c^{-2}. Они дают, как увидим ниже, вполне разумные результаты, однако вопрос о существовании точных решений, аналитических по c^{-2} является математически весьма тонким и обсуждать его не будем.

3. ПРИБЛИЖЕННО-РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЧАСТИЦ

Применим здесь сформулированные выше условия пуанкаре-инвариантности описания системы частиц для нахождения общего вида квазирелятивистских лагранжианов и гамильтонианов взаимодействия (будем использовать для них также общий термин — «квазирелятивистские потенциалы»); точнее, найдем общий вид релятивистских поправок порядка c^{-2} к заданному нерелятивистскому потенциалу. Основное внимание будет уделено постньютоновскому приближению, математический аппарат и физическая интерпретация которого весьма близки к нерелятивистской теории. Сначала обсудим следующий общий вопрос: какими должны быть трансформационные свойства приближенно релятивистских уравнений движения?

Приближенная лоренц-инвариантность. Понятие приближенной лоренц-инвариантности использовалось давно (см., в частности [13, 86, 68, 124]), хотя и без обсуждения его содержания. Оно было сформулировано и обосновано физически в [125, 126], применительно к квантовой механике рассмотрено в [127, 128].

Пусть σ — физический объект, являющийся системой N взаимодействующих частиц, скорости которых $\mathbf{v}_a$ $(a = 1, \ldots, N)$ в фиксированной инерциальной системе отсчета S удовлетворяют условию $v_a \equiv |\mathbf{v}_a| \ll c$; это условие позволяет использовать в уравнениях механики разложение в ряд по v_a^2/c^2 и при заданной степени точности ограничиться в нем конечным числом членов. Обозначим n максимальный показатель степени релятивистских поправок $(v_a^2/c^2)^n$, учитываемых в системе отсчета S в указанных уравнениях. Пусть далее Σ — класс инерциальных систем отсчета S', движущихся относительно S со скоростями $\mathbf{V}$, для которых $|\mathbf{V}| \lessdot v_a$. Тогда в произвольной системе S', принадлежащей к Σ, порядок величины отношений $v_a'^2/c^2$ совпадает с порядком величины отношений v_a^2/c^2, вследствие чего степень релятивистских поправок, которые необходимо учитывать в S', также равняется n. Это означает, что все системы отсчета $S' \in \Sigma$ эквивалентны не только в смысле принципа относительности, но и с точки зрения описания физического объекта σ. Другими словами, приближенно релятивистские уравнения движения должны иметь одинаковый вид во всех рассматриваемых системах отсчета. Поскольку в уравнениях движения частиц объекта σ членами $(v_a^2/c^2)^k$, $k > n$ пренебрегаем, то из условия $V \lessdot v_a$ следует, что в формулах преобразования физических величин, соответствующих переходам $S \to$

$\to S'$, мы должны пользоваться разложениями по степеням $\beta^2 \equiv V^2/c^2$, пренебрегая при этом членами порядка β^{2k}, $k > n$. Таким образом, приближенно релятивистские уравнения движения, учитывающие релятивистские эффекты n-го порядка, должны обладать вследствие принципа относительности инвариантностью относительно приближенных преобразований Лоренца того же порядка.

Если система отсчета S^* движется относительно S со скоростью $V^* \approx c$, то скорости v_a^* частиц рассмотренного выше объекта σ относительно S^* будут околосветовыми ($v_a^* \approx V^* \approx c$). Следовательно, в уравнениях движения этих частиц, записанных в системе отсчета S^*, нельзя ограничиваться приближением, использованным в S (или в $S' \in \Sigma$), т. е. вид уравнений движения должен измениться при переходе $S \to S^*$. Поскольку такой переход должен описываться точными преобразованиями Лоренца, приходим к выводу, что приближенно релятивистские уравнения (в частности, нерелятивистские) не могут быть инвариантными относительно точных преобразований Лоренца. Это не противоречит принципу относительности, так как можно представить объект σ^* (тождественный по своей внутренней природе объекту σ), движение частиц которого относительно системы S^* происходит со скоростями v_a^{**}, совпадающими по порядку величины с рассмотренными выше скоростями v_a относительно S. Уравнения движения частиц объекта σ^* в системе отсчета S^* будут иметь такой же вид, как и уравнения для σ в S.

Из приведенных рассуждений следует, что преобразование уравнений приближенно релятивистской теории, соответствующих переходу $S \to S' \in \Sigma$, следует выполнять с помощью одновременного разложения по степеням c^{-2} как этих уравнений, так и формул преобразований. Порядок величины отдельных членов в преобразованных уравнениях определяется суммарной степенью параметра c^{-2} [86, 124, 129, 130].

В задаче нахождения общего вида квазирелятивистских потенциалов приведенные выше рассуждения не имеют существенного значения, поскольку она решается интегрированием системы дифференциальных уравнений, соответствующих *инфинитезимальному* преобразованию Лоренца, содержащему параметры V_i только линейно. Однако во всех случаях конечных преобразований Лоренца (например, переход между системой отсчета центра инерции и лабораторной) их следует принимать во внимание.

Условия приближенной пуанкаре-инвариантности лагранжиана взаимодействия. Как уже отмечалось в разд. 2, нахождение релятивистского лагранжиана взаимодействия U сводится к решению системы уравнений (63) — (65), в которой U — трансляционно инвариантный 3-скаляр, не зависящий явно от времени, а Ψ_i — составляющие 3-вектора, также не зависящие от времени. Предполагая, что существуют решения этой системы, аналитичные по c^{-2}, представим искомые функции в виде рядов *

$$U=\sum_{n=0}^{\infty} c^{-2n}\overline{U}^{(n)} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} U^{(n)}; \tag{83}$$

$$\Psi_i=\sum_{n=0}^{\infty} c^{-2n}\overline{\Psi}_i^{(n)} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_i^{(n)}, \tag{84}$$

где $U^{(n)}$ — трансляционно инвариантные 3-скаляры. Тогда из (63) — (65) для функций $U^{(n)}$ и $\Psi_i^{(n)}$ получаем [с учетом второго уравнения (61)] следующую бесконечную цепочку уравнений:

$$\sum_a \left\{\frac{\partial U^{(n)}}{\partial v_a^i}+\sum_{s=0}^{\infty}\left[\overset{s+1}{x}_{aj}\frac{\partial \Psi_i^{(n)}}{\partial \overset{s}{x}_{aj}}-\frac{1}{c^2}\sum_{l=0}^{s}\binom{s}{l}\overset{l}{x}_{ai}\overset{s-l+1}{x}_{aj}\frac{\partial U^{(n-1)}}{\partial \overset{s}{x}_{aj}}\right]\right\}=0; \tag{85}$$

$$\sum_a \frac{\partial \Psi_i^{(n)}}{\partial x_a^j}=\frac{1}{c^2}\delta_{ij}U^{(n-1)}; \tag{86}$$

$$\sum_a \left[\frac{\partial \Psi_j^{(n)}}{\partial v_a^i}-\frac{\partial \Psi_i^{(n)}}{\partial v_a^j}+\frac{1}{c^2}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{s}\binom{s}{l}\overset{s-l+1}{x}_{ak}\left(\overset{l}{x}_{aj}\frac{\partial \Psi_i^{(n-1)}}{\partial \overset{s}{x}_{ak}}-\overset{l}{x}_{ai}\frac{\partial \Psi_j^{(n-1)}}{\partial \overset{s}{x}_{ak}}\right)\right]=0$$

$$n=0, 1, \ldots;\quad U^{(-1)}\equiv 0;\quad \Psi_i^{(-1)}\equiv 0;\quad \binom{s}{l}\equiv\frac{s!}{l!\,(s-l)!}. \tag{87}$$

При последовательном решении системы уравнений (85) — (87) будем пользоваться уже упомянутым в разд. 2 результатом работы [82], позволяющим без ограничения общности подставлять в уравнение (85) для $U^{(n)}$ произвольное частное решение $\Psi_i^{(n)}$ уравнений (86), (87).

В нулевом приближении ($n=0$) имеем уравнения:

$$\sum_a \left(\frac{\partial U^{(0)}}{\partial v_{ai}}+\sum_{s=0}^{\infty}\overset{s+1}{x}_{aj}\frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial \overset{s}{x}_{aj}}\right)=0; \tag{88}$$

$$\sum_a \frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial x_{aj}}=0; \tag{89}$$

$$\sum_a \left(\frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial v_a^j}-\frac{\partial \Psi_j^{(0)}}{\partial v_a^i}\right)=0. \tag{90}$$

* Четность степеней параметра c^{-1} следует из условия инвариантности относительно обращения времени, которое в свою очередь связано с отсутствием в теории прямых взаимодействий реальных процессов излучения.

Выбирая в качестве частного решения однородной системы (89), (90)

$$\Psi_i^{(0)}=0, \tag{91}$$

получаем для $U^{(0)}$ известное условие галилеевой инвариантности

$$\sum_a \frac{\partial U^{(0)}}{\partial v_a^i}=0. \tag{92}$$

Его общее решение с учетом того, что нерелятивистские уравнения движения должны быть уравнениями второго порядка, имеет вид:

$$U^{(0)}=U^{(0)}(\mathbf{r},\ \mathbf{v});\ \mathbf{r}=\{\mathbf{r}_{ab}\};\ v=\{\mathbf{v}_{ab}\}, \tag{93}$$

где $\mathbf{v}_{ab}=d\mathbf{r}_{ab}/dt=\mathbf{v}_a-\mathbf{v}_b$. Как правило, $U^{(0)}$ зависит только от расстояний между частицами:

$$U^{(0)}=u_0(r). \tag{93a}$$

Однако в отдельных случаях (в частности, в некоторых феноменологических моделях ядерной физики [131, 132]) используют нерелятивистские потенциалы, зависящие и от скоростей, что эквивалентно нелокальным потенциалам в квантовой механике (см., например, [133]).

Учитывая (91) и (93), в первом приближении из (85) — (87) получаем систему уравнений

$$\sum_a \left\{\frac{\partial U^{(1)}}{\partial v_a^i}+\sum_{s=0}^{\infty} \overset{s+1}{x}_{aj}\frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial \overset{s}{x}_{aj}}-\frac{1}{c^2}\left[x_{ai}v_{aj}\frac{\partial U^{(0)}}{\partial x_{aj}}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+(v_{ai}v_{aj}+x_{ai}\dot{v}_{aj})\frac{\partial U^{(0)}}{\partial v_{aj}}\right]\right\}=0; \tag{94}$$

$$\sum_a \frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial x_a^j}=\frac{1}{c^2}\delta_{ij}U^{(0)}; \tag{95}$$

$$\sum_a \left(\frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial v_a^j}-\frac{\partial \Psi_j^{(1)}}{\partial v_a^i}\right)=0, \tag{96}$$

схема решения которой следующая: из (95) и (96) находим (при заданном $U^{(0)}$) произвольное частное решение для $\Psi_i^{(1)}$, после чего общее решение системы (94) можно записать в виде $U^{(1)}=U_{\text{ч}}^{(1)}+$ $+u_1$, где $U_{\text{ч}}^{(1)}$ — частное решение этой системы, а u_1 — общее решение уравнения вида (92), содержащее множитель c^{-2}.

Пусть в нерелятивистском пределе взаимодействие описывается (как обычно принимается) суперпозицией парных симметричных потенциалов:

$$U^{(0)}=\sum_{a<b}\sum U_{ab}^{(0)}(\mathbf{r}_{ab},\ \mathbf{v}_{ab});\ U_{ab}^{(0)}=U_{ba}^{(0)}. \tag{97}$$

Обозначим через $\Psi^{(1)}_{abi}$ произвольное частное решение системы уравнений (95) и (96) для двухчастичной системы σ_{ab}, состоящей из частиц a и b. Тогда функции

$$\Psi^{(1)}_i = \sum_{a<b}\sum \Psi^{(1)}_{abi} \tag{98}$$

будут решениями указанной системы уравнений для произвольного N, а соответствующее общее решение системы (94) будет иметь вид

$$U^{(1)} = \sum_{a<b}\sum U^{(1)}_{ab} + u_1. \tag{99}$$

Поскольку u_1 — произвольная галилей-инвариантная функция, под $U^{(1)}_{ab}$ можно было бы понимать частное решение системы (94), записанной для σ_{ab}. Однако удобнее считать $U^{(1)}_{ab}$ общим решением, т. е. решением, содержащим произвольную двухчастичную галилей-инвариантную функцию u_{1ab}. Тогда в (99) под u_1 следует понимать существенно многочастичные выражения.

Вопрос о многочастичных, т. е. не сводящихся к парным, взаимодействиях заслуживает дальнейшего исследования. Подчеркнем сразу (ниже обсудим этот вопрос более детально), что сами понятия «двухчастичные и многочастичные взаимодействия» (или «силы») можно употреблять только в пределах определенного подхода (ньютонова, лагранжева или гамильтонова), так как при переходах между этими формализмами характер «многочастичности» в общем случае меняется.

В более общем случае, когда уже нерелятивистский потенциал имеет вид кластерного разложения (суперпозиции n-частичных потенциалов):

$$U^{(0)} = \sum_{a_1<a_2}\sum U^{(0)}_{a_1a_2} + \sum_{a_1<a_2<a_3}\sum\sum U^{(0)}_{a_1a_2a_3} + \ldots + \sum_{a_1<a_2<\ldots<a_n}\sum \ldots \sum U^{(0)}_{a_1a_2\ldots a_n}, \tag{100}$$

в силу линейности системы (94) — (96) ее общее решение можно представить такими же разложениями:

$$\Psi^{(1)}_i = \sum_{k=2}^{n} \sum_{a_1<\ldots<a_k} \ldots \sum \Psi^{(1)}_{ia_1\ldots a_k}; \tag{101}$$

$$U^{(1)} = \sum_{k=2}^{n} \sum_{a_1<\ldots<a_k} \ldots \sum U^{(1)}_{a_1\ldots a_k}, \tag{102}$$

где $\Psi^{(1)}_{ia_1\ldots a_k}$ и $U^{(1)}_{a_1\ldots a_k}$ — решения системы (94) — (96) для $N=k$.

В дальнейшем ограничимся парными (в терминах лагранжева формализма) взаимодействиями (97) — (99), когда задача о нахождении общих выражений для $U^{(1)}$ в системе N тел сводится к такой же двухчастичной задаче.

Общий вид постньютоновских лагранжианов взаимодействия. Исследуем подробно в первом квазирелятивистском приближении важный класс взаимодействий, которые в нерелятивистском пределе описываются потенциалом (93а), не зависящим от скоростей (постньютоновское приближение). Этот случай особенно интересен тем, что он допускает лагранжианы взаимодействия, зависящие лишь от координат и скоростей. Их широкий класс для системы двух частиц был впервые указан Брейтом [13] на основе требования приближенной лоренц-инвариантности дифференциала действия, он рассматривался также с других точек зрения в [134, 135, 87, 10] и в рамках общего лагранжева подхода в [136].

Чтобы получить общее решение $U^{(1)}$ системы (94), зависящее лишь от координат и скоростей, целесообразно найти сначала *общее* решение системы (95), зависящее *лишь от координат*, когда уравнения (96) выполняются тривиально.* Для системы двух частиц a и b оно имеет вид

$$\Psi^{(1)}_{iab} = \frac{1}{c^2}\left[\frac{1}{2}(x_{ai}+x_{bj})\,U^{(0)}_{ab} + r_{abi}\varphi_{ab}\right], \tag{103}$$

где $\varphi_{ab} = \varphi_{ab}(r_{ab})$ — произвольные функции расстояния r_{ab}. Из естественного условия симметричности взаимодействия ** $U^{(0)}_{ab} = U^{(0)}_{ba}$, $\Psi_{iab} = \Psi_{iba}$ следует, что $\varphi_{ab} = -\varphi_{ba}$. Последнее соотношение можно выполнить (для нетождественных частиц) за счет антисимметричного (по отношению к перестановке частиц) множителя, построенного из параметров частиц (например, их масс).

Подставляя (103) в (94), получаем уравнение

$$\frac{\partial U^{(1)}_{ab}}{\partial \mathbf{v}_a} + \frac{\partial U^{(1)}_{ab}}{\partial \mathbf{v}_b} = \frac{1}{c^2}\left\{\frac{1}{2}\left[\mathbf{r}_{ab}(\mathbf{v}_a+\mathbf{v}_b)\cdot\mathbf{r}_{ab}\frac{1}{r_{ab}}\frac{dU^{(0)}_{ab}}{dr_{ab}} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - (\mathbf{v}_a+\mathbf{v}_b)\,U^{(0)}_{ab}\right] - \mathbf{v}_{ab}\varphi_{ab} - \mathbf{r}_{ab}(\mathbf{r}_{ab}\mathbf{v}_{ab})\frac{1}{r_{ab}}\frac{d\varphi_{ab}}{dr_{ab}}\right\}. \tag{104}$$

Его общее решение имеет вид ***

$$U^{(1)}_{ab} = -\frac{1}{2c^2}\left\{\mathbf{v}_a\cdot\mathbf{v}_b U^{(0)}_{ab} - (\mathbf{r}_{ab}\mathbf{v}_a)(\mathbf{r}_{ab}\mathbf{v}_b)\frac{1}{r_{ab}}\frac{dU_{ab}}{dr_{ab}} + \mathbf{v}_{ab}\cdot(\mathbf{v}_a+\mathbf{v}_b)\,\varphi_{ab} + \right.$$
$$\left. + (\mathbf{r}_{ab}\mathbf{v}_{ab})\left[\mathbf{r}_{ab}\cdot(\mathbf{v}_a+\mathbf{v}_b)\frac{1}{r_{ab}}\frac{d\varphi_{ab}}{dr_{ab}}\right\} + \frac{1}{c^2}u_{1ab}, \tag{105}$$

---

* Функциям $\Psi^{(1)}_{iab}$, зависящим от скоростей, соответствуют решения системы (9), содержащие существенную зависимость от ускорений, т. е. приводящую к уравнениям движения высших порядков.

** В [134] записаны также соответствующие выражения, не обладающие свойством симметричности по отношению к взаимодействующим частицам.

*** В [136] выражение $U^{(1)}_{ab}$ содержит две функции φ_a и φ_b, однако его легко привести к виду (105), полагая $\varphi_a + \varphi_b = 2\varphi_{ab}$ и переопределяя u_{1ab}.

где u_{1ab} — произвольная скалярная галилей-инвариантная функция.

Отметим следующее обстоятельство. В (105) можно использовать тождество

$$(\mathbf{v}_a+\mathbf{v}_b)\,\mathbf{v}_{ab}\varphi_{ab}+\mathbf{r}_{ab}\cdot(\mathbf{v}_a+\mathbf{v}_b)\,(\mathbf{r}_{ab}\mathbf{v}_{ab})\frac{1}{r_{ab}}\frac{d\varphi_{ab}}{dr_{ab}}=$$
$$=\frac{d}{dt}\,[\mathbf{v}_a+\mathbf{v}_b)\cdot\mathbf{r}_{ab}\varphi_{ab}]-(\dot{\mathbf{v}}_a+\dot{\mathbf{v}}_b)\cdot\mathbf{r}_{ab}\varphi_{ab}. \qquad (106)$$

Если при этом выйти за рамки стандартного лагранжева формализма, в котором лагранжиан зависит от производных не выше первого порядка, то полную производную в (106), не отражающуюся на уравнениях Эйлера — Лагранжа (48), можно пропустить, а последний член в (106). содержащий ускорения и являющийся галилей-инвариантным, можно включить в функцию u_{1ab}. В результате приходим к функции $U^{(1)}$ вида $U^{(1)}=U^{(1)}(\mathbf{r},\ \mathbf{v},\ \dot{\mathbf{v}})$, требующей формализма с высшими производными. При этом ввиду линейной зависимости от ускорений с множителями при $\dot{\mathbf{v}}_a$, не зависящими от скоростей, уравнения Эйлера являются уравнениями второго порядка, совпадающими с уравнениями Эйлера — Лагранжа для выражения (105). Учитывая, что отсутствие в фигурных скобках (105) членов с φ_{ab} соответствует частному решению (103) системы (95) при $\varphi_{ab}=0$, приходим к выводу, что, ограничиваясь этим частным решением для $\Psi^{(1)}_{iab}$ и допуская зависимость лагранжианов от ускорений, мы не теряем общности в решении системы (94). Это замечание служит иллюстрацией к уже упоминавшейся теореме 2 работы [82] о допустимости использования для Ψ какого-либо частного решения системы уравнений (64), (65) в связи с возможностью добавления к лагранжиану полной производной от произвольной функции.

Указанное обстоятельство следует иметь в виду при переходе от двухчастичной системы к случаю N частиц ($N\geqslant 3$). Если принять, что галилей-инвариантные члены u_{1ab} содержат зависимость от ускорений вида (106), то выражение (99) с функцией $U^{(1)}_{ab}$, получаемой из (105) при $\varphi_{ab}=0$ с многочастичной галилей-инвариантной функцией u_1 (также содержащей аналогичную зависимость от ускорений, не приводящую к уравнениям движения высших порядков), будет представлять собой общее решение задачи о нахождении постньютоновских поправок к многочастичному потенциалу взаимодействия $U^{(0)}(r)$. Если же потребовать, чтобы функция $U^{(1)}$ не зависела от ускорений, то как и в случае двух частиц при нахождении общего решения системы (94) нельзя ограничиться каким-либо частным решением системы (95). Общее решение последней системы, зависящее лишь от координат, кроме суперпозиции (98) с двухчастичными функциями вида (103) будет содержать аналогичные трех-, четырех- и т. д. частичные члены с произвольными трансляционно инвариантными многочастичными функциями φ_{abc}, φ_{abcd} и т. п. Соответствующие многочастичные галилей-неинвариантные члены появляются и в общем решении системы (94), так что при таком подходе вместо (99) мы должны писать более общее разложение

$$U^{(1)}=\sum_{a<b}\sum U^{(1)}_{ab}+\sum_{a<b<c}\sum\sum U^{(1)}_{abc}+\ldots+u_1.$$

Не входя в более детальное обсуждение слабо исследованных проблем многочастичных взаимодействий, отметим лишь, что весьма существенные ограничения на функции указанного типа налагает условие разделимости взаимодействий. К этому вопросу вернемся при обсуждении задачи сложения взаимодействий в гамильтоновом формализме.

Постньютоновские уравнения движения и законы сохранения. В первом квазирелятивистском приближении полный лагранжиан системы запишем в виде

$$L=L_f-U\approx\sum_a\left(-m_ac^2+\frac{m_av_a^2}{2}+\frac{m_av_a^4}{8c^2}\right)-\sum_{a<b}\sum\left(U^{(0)}_{ab}+U^{(1)}_{ab}\right). \qquad (107)$$

Если $U^{(0)}=u_0(r)$, то уравнения Эйлера (48) превращаются в обычные уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_{ai}}-\frac{\partial L}{\partial x_{ai}}=0, \qquad (108)$$

которые можно привести к ньютоновой форме (42). Это можно сделать двумя эквивалентными способами. Первый состоит в том, что система уравнений, получаемая подстановкой (107) в (108), решается (с точностью до членов $\sim c^{-2}$) относительно ускорений $\dot v_{ai}$. Во втором способе в членах уравнений (108) порядка c^{-2} используют уравнения движения нулевого порядка: $m_a\dot v_{ai}=-\partial U^{(0)}/\partial x^i_a$. Оба способа приводят к следующим постньютоновским уравнения движения:

$$\begin{aligned}m_a\dot v^i_a={}&-\sum_b{}'\frac{r^i_{ab}}{r_{ab}}\frac{dU^{(0)}_{ab}}{dr_{ab}}-\sum_b{}'\frac{\partial U^{(1)}_{ab}}{\partial r^i_{ab}}+\sum_b{}'\left(\mathbf{v}_{ab}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_{ab}}\right)\frac{\partial U^{(1)}_{ab}}{\partial v^i_a}+\\&+\frac{1}{2c^2}\sum_b{}'\frac{v_a^2r^i_{ab}}{r_{ab}}\frac{dU^{(0)}_{ab}}{dr_{ab}}+\frac{1}{c^2}\sum_b{}'\frac{v^i_a(\mathbf{r}_{ab}\cdot\mathbf{v}_a)}{r_{ab}}\frac{dU^{(0)}_{ab}}{dr_{ab}}-\\&-\frac{1}{m_a}\sum_b{}'\frac{1}{r_{ab}}\frac{dU^{(0)}_{ab}}{dr_{ab}}\left(\mathbf{r}_{ab}\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}_a}\right)\sum_c{}'\frac{\partial U^{(1)}_{ac}}{\partial v_{ai}}-\\&-\sum_{b\neq c}{}'\sum\left[\left(\mathbf{r}_{bc}\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}_b}\right)\frac{\partial U^{(1)}_{ab}}{\partial v_{ai}}\frac{1}{m_br_{bc}}\frac{dU^{(0)}_{bc}}{dr_{bc}}\right]. \qquad (109)\end{aligned}$$

Сделаем два замечания об уравнениях движения (109). Во-первых, в силу того, что $U^{(1)}$ является решением системы (94) — (96), указанные уравнения движения, как нетрудно проверить, удовлетворяют с точностью до c^{-2} условиям Карри — Хилла (46).* Во-вторых, они содержат нелинейные по взаимодействию трехчастичные члены. Другими словами, в терминах уравнений движения или «сил» взаимодействия, если под последними условиться понимать правые стороны уравнений движения типа (109), принцип суперпозиций взаимодействий в постньютоновском приближении не выполняется. Это соответствует общему выводу [137] о несовместимости зависимости сил от ускорений с принципом суперпозиции сил. Такая же ситуация имеет место и в нерелятивистской механике, если потенциал $U^{(0)}$ зависит от скоростей.

Общий вид приближенно релятивистских уравнений движения вида (109) может быть получен также с помощью решения уравнений Карри — Хилла (46) путем разложения функций μ_{ai} по степеням c^{-2}; в [111] этим способом найден общий вид μ_{ai} с точностью до членов порядка c^{-4}. Аналогичный подход, основанный на уравнениях Дро — Венсана, использован в [110].

Для интегралов движения (67) — (70) получаем с помощью (107) и (105) следующие квазирелятивистские выражения:

$$\mathbf{P}=\sum_a m_a\mathbf{v}_a\left(1+\frac{v_a^2}{2c^2}\right)+\frac{1}{2c^2}\sum_{a<b}\sum\Big\{(\mathbf{v}_a+\mathbf{v}_b)\,U_{ab}^{(0)}-$$

$$-\mathbf{r}_{ab}\,(\mathbf{r}_{ab}\cdot(v_a+\mathbf{v}_b))\,\frac{1}{r_{ab}}\,\frac{dU_{ab}^{(0)}}{dr_{ab}}-\mathbf{v}_{ab}\varphi_{ab}-$$

$$-\mathbf{r}_{ab}\,(\mathbf{r}_{ab}\cdot\mathbf{v}_{ab})\,\frac{1}{r_{ab}}\,\frac{d\varphi_{ab}}{dr_{ab}}\Big\}+o\,(c^{-2}); \qquad (110)$$

$$E=\sum_a\left(m_ac^2+\frac{m_av_a^2}{2}+\frac{3m_av_a^4}{8c^2}\right)+\sum_{a<b}\sum U_{ab}^{(0)}+$$

$$+\frac{1}{2c^2}\sum_{a<b}\sum\Big\{\mathbf{v}_a\cdot\mathbf{v}_bU_{ab}^{(0)}-(\mathbf{r}_{ab}\cdot\mathbf{v}_a)\,(\mathbf{r}_{ab}\cdot\mathbf{v}_b)\,\frac{1}{r_{ab}}\,\frac{dU_{ab}^{(0)}}{dr_{ab}}-$$

$$-\frac{1}{2}\,\mathbf{v}_{ab}\cdot(\mathbf{v}_a+\mathbf{v}_b)\,\varphi_{ab}-\frac{1}{2}\,(\mathbf{r}_{ab}\cdot\mathbf{v}_{ab})\,\mathbf{r}_{ab}\cdot(\mathbf{v}_a+\mathbf{v}_b)\,\frac{1}{r_{ab}}\,\frac{d\varphi_{ab}}{dr_{ab}}\Big\}+$$

$$+\frac{1}{c^2}\sum_{a<b}\sum\left(u_{1ab}-\mathbf{v}_{ab}\cdot\frac{\partial u_{1ab}}{\partial\mathbf{v}_{ab}}\right)+o\,(c^{-2}); \qquad (111)$$

---

* Как показано в [136], это имеет место не только в рассматриваемом случае $U^{(0)}=u_0\,(r)$, но и в более общем случае, когда нерелятивистские потенциалы зависят от скоростей.

$$\mathbf{J}=\sum_a m_a \mathbf{x}_a \times \mathbf{v}_a \left(1+\frac{v_a^2}{2c^2}\right)+\frac{1}{2c^2}\sum\sum_{a<b}\left\{(\mathbf{x}_a\times\mathbf{v}_b+\mathbf{x}_b\times\mathbf{v}_a)\,U_{ab}^{(0)}+\right.$$

$$+\mathbf{x}_a\times\mathbf{x}_b(\mathbf{v}_a+\mathbf{v}_b)\,\mathbf{r}_{ab}\frac{1}{r_{ab}}\frac{dU_{ab}^{(0)}}{dr_{ab}}-(\mathbf{x}_a\times\mathbf{v}_a-\mathbf{x}_b\times\mathbf{v}_b)\,\varphi_{ab}+$$

$$\left.+\mathbf{x}_a\times\mathbf{x}_b(\mathbf{r}_{ab}\cdot\mathbf{v}_{ab})\frac{1}{r_{ab}}\frac{d\varphi_{ab}}{dr_{ab}}\right\}-\frac{1}{c^2}\sum\sum_{a<b}\mathbf{r}_{ab}\frac{\partial u_{1ab}}{\partial\mathbf{v}_{ab}}+o(c^{-2}); \qquad (112)$$

$$\mathbf{K}=-t\mathbf{P}+\sum_a m_a\mathbf{x}_a\left(1+\frac{v_a^2}{2c^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{2c^2}\sum\sum_{a<b}\left[(\mathbf{x}_a+\mathbf{x}_b)\,U_{ab}^{(0)}+\mathbf{r}_{ab}\varphi_{ab}\right]+o(c^{-2}). \qquad (113)$$

Как показано в [88], величины, определяемые формулами (110) — (113), по отношению к конечным приближенным преобразованиям Лоренца обладают вследствие уравнения (104) для $U^{(1)}$ трансформационными свойствами, характерными для энергии, импульса, момента импульса и интеграла движения центра инерции. В работе [136] аналогичное свойство установлено для точных интегралов движения.

Общий вид постньютоновских гамильтонианов взаимодействия. Сформулируем рассмотренную выше задачу в рамках гамильтонова формализма, ограничиваясь пока бесспиновыми частицами. Учитывая (35) и (38), разложение по степеням c^{-2} следует применить только к генераторам H и K_i [см. (36), (37) и (71)]:

$$H=Mc^2+H^{(0)}+H^{(1)}+O(c^{-4})\approx Mc^2+$$

$$+\sum_a\left(\frac{p_a^2}{2m_a}-\frac{p_a^4}{8m_a^3c^2}\right)+U^{(0)}+U^{(1)}; \qquad (114)$$

$$K_i=K_i^{(0)}+K_i^{(1)}+O(c^{-4})\approx -t\sum_a p_{ai}+$$

$$+\sum_a\left(m_a+\frac{p_a^2}{2m_ac^2}\right)q_{ai}+\Psi_i^{(1)}. \qquad (115)$$

Здесь мы учли, что, как показано в [68], и в согласии с приведенным выше выводом, полученным в лагранжевом подходе, без ограничения общности можно положить $\Psi_i^0=0$, т. е. что для канонического генератора преобразований Галилея можно взять выражение

$$K_i^{(0)}=-tP_i+\sum_a m_aq_{ai}\equiv -tP_i-MR_i; \qquad (116)$$

где

$$R_i=\frac{1}{M}\sum_a m_aq_{ai} \qquad (117)$$

— координаты нерелятивистского центра масс.

Из (72) и (73) следует, что $U^{(0)}$ и $U^{(1)}$ являются трансляционно-инвариантными 3-скалярами, а $\Psi_i^{(1)}$ образуют 3-вектор. Поскольку $U^{(0)}$ считается известной функцией, а членами порядка c^{-4} пренебрегаем, система уравнений (74) — (76) для $U^{(1)}$ и $\Psi_i^{(1)}$ становится линейной и ее решение не представляет труда. Явный вид этой системы в переменных (q, p) выписывать не будем *, поскольку при $U^{(0)} = u_0(r)$ она отличается от уравнений (94) — (96) для этого случая (при $N = 2$ см. уравнение (104)) только использованием нерелятивистского соотношения $\mathbf{p}_a = m_a\mathbf{v}_a$. Поэтому в предположении парности нерелятивистских потенциалов и независимости $\Psi_i^{(1)}$ от импульсов [последнее предположение обсудим ниже, см. (120)], можем сразу записать общее решение этой системы в виде (98), (99), причем формула (103) сохранит свой вид, а вместо (105) будем иметь (см. [138], где этот результат получен в гамильтоновом подходе):

$$U_{ab}^{(1)} = -\frac{1}{2c^2}\left\{\frac{\mathbf{p}_a}{m_a}\cdot\frac{\mathbf{p}_b}{m_b}U_{ab}^{(0)} - \frac{\mathbf{r}_{ab}\cdot\mathbf{p}_a}{m_a}\frac{\mathbf{r}_{ab}\cdot\mathbf{p}_b}{m_b}\frac{1}{r_{ab}}\frac{dU_{ab}^{(0)}}{dr_{ab}} + \right.$$
$$+\left(\frac{p_a^2}{m_a^2} - \frac{p_b^2}{m_b^2}\right)\varphi_{ab} + \left[\mathbf{r}_{ab}\left(\frac{\mathbf{p}_a}{m_a} - \frac{\mathbf{p}_b}{m_b}\right)\right]\left[\mathbf{r}_{ab}\left(\frac{\mathbf{p}_a}{m_a} + \frac{\mathbf{p}_b}{m_b}\right)\right]\times$$
$$\left.\times\frac{1}{r_{ab}}\frac{d\varphi_{ab}}{dr_{ab}}\right\} + u_{1ab}\mathbf{r}_{ab}\left(\frac{\mathbf{p}_a}{m_a} - \frac{\mathbf{p}_b}{m_b}\right). \qquad (118)$$

Соответствующее выражение (114) для полного гамильтониана H может быть получено из лагранжиана (107) обычным преобразованием Лежандра с использованием равенства

$$\mathbf{p}_a = \partial L/\partial\mathbf{v}_a. \qquad (119)$$

Гамильтониан H, как и выражения (35) и (115) для остальных генераторов группы Пуанкаре, можно рассматривать также как результат перехода в формулах (110) — (113) для десяти интегралов движения от переменных (x, v) к каноническим переменным $(q = x, p)$ на основе соотношения (119).

В выражениях (114) — (118) каноническими координатами q_a^i служат физические координаты частиц x_a^i, удовлетворяющие условию инвариантности мировой линии (79). Такая возможность обусловлена тем, что равенство (79) при подстановке в него разложений (114) и (115) выполняется тривиально в нулевом приближении, а для членов порядка c^{-2} дает уравнение

$$\frac{\partial K_j^{(1)}}{\partial p_a^i} = \frac{x_{aj}p_{ai}}{m_a c^2},$$

* Ниже она будет записана в виде, позволяющем рассматривать поправки $U^{(1)}$ и $\Psi_i^{(1)}$ и в случае нестатического нерелятивистского предела; см. (128) — (130).

из которого находим

$$K_j^{(1)} = \sum_a \frac{p_a^2}{2m_a c^2} x_{aj} + \Psi_j^{(1)}(\mathrm{x}), \tag{120}$$

где $\Psi^{(1)}$ — произвольная векторная функция координат. Сравнивая (120), (115) и (103), приходим к заключению, что интегрирование уравнений, выражающих в гамильтоновом формализме условие инвариантности мировой линии и уравнений для $\mathbf{K}^{(1)}$, вытекающих из перестановочных соотношений для алгебры $A\mathcal{P}$, дает в рассматриваемом приближении один и тот же результат, если в последнем случае ограничиться функциями $\Psi^{(1)}$, не зависящими от импульсов.

Таким образом, первое постньютоновское приближение замечательно в том отношении, что теорема об отсутствии взаимодействия в нем не проявляется. Впервые это обстоятельство было установлено в [139, 126], оно обсуждается также в [10, 140]. Вспоминая равенства (80) и (81), являющиеся следствием условия (79), отметим, что при использовании разложений генераторов H и $\mathbf{K}$ по степеням c^{-2} указанные равенства должны выполняться для $H^{(n-1)}$, если мы требуем, чтобы (79) выполнялось до n-го порядка. В частности, при $n = 1$ равенства (80) и (79) выполняются тривиально для нерелятивистского гамильтониана с $U^{(0)} = u_0(r)$.

С точки зрения связи гамильтонова формализма с лагранжевым обсуждаемый вывод отражает тот факт, что в постньютоновском приближении существуют не зависящие от ускорений лагранжианы, допускающие обычный переход к каноническому методу. Как отмечено в [111], лагранжианы $L(x, \dot{x})$ существуют и во втором приближении по c^{-2}, если $L^{(1)}$ имеет структуру, аналогичную H в равенстве (80).

Приведем еще две другие формы записи выражения (118), в которых используются нерелятивистские двухчастичные переменные центра масс:

$$\mathbf{P}_{ab} = \mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b;\ \boldsymbol{\pi}_{ab} = \frac{m_b \mathbf{p}_a - m_a \mathbf{p}_b}{M_{ab}}. \tag{121}$$

Подставляя в (118) формулы

$$\mathbf{p}_a = \frac{m_a}{M_{ab}} \mathbf{P}_{ab} + \boldsymbol{\pi}_{ab};\ \mathbf{p}_b = \frac{m_b}{M_{ab}} \mathbf{P}_{ab} - \boldsymbol{\pi}_{ab}, \tag{122}$$

обратные к (121), получаем

$$U_{ab}^{(1)} = -\frac{1}{2c^2}\left\{\left(\frac{\mathbf{P}_{ab}^2}{M_{ab}^2} + \frac{\varkappa_{ab}}{M_{ab}\mu_{ab}} \mathbf{P}_{ab}\cdot\boldsymbol{\pi}_{ab}\right) U_{ab}^{(0)} - \right.$$
$$- \left[\frac{(\mathbf{r}_{ab}\mathbf{P}_{ab})^2}{M_{ab}^2} + \frac{\varkappa_{ab}}{M_{ab}\mu_{ab}} (\mathbf{r}_{ab}\mathbf{P}_{ab})(\mathbf{r}_{ab}\boldsymbol{\pi}_{ab})\right] \frac{1}{r_{ab}} \frac{dU_{ab}^{(0)}}{dr_{ab}} +$$
$$\left. + \frac{2}{M_{ab}\mu_{ab}}\left[\mathbf{P}_{ab}\cdot\boldsymbol{\pi}_{ab}\varphi_{ab} + (\mathbf{r}_{ab}\mathbf{P}_{ab})(\mathbf{r}_{ab}\boldsymbol{\pi}_{ab}) \frac{1}{r_{ab}} \frac{d\varphi_{ab}}{dr_{ab}}\right]\right\} + \tilde{u}_{1ab}, \tag{123}$$

где

$$\mu_{ab} = m_a m_b / M_{ab};\quad \varkappa_{ab} = (m_b - m_a)/M_{ab}, \tag{124}$$

$$\tilde{u}_{1ab} = u_1 (\mathbf{r}_{ab}, \mu_{ab}^{-1}\pi_{ab}) +$$
$$+ \frac{1}{2c^2} \left\{ \frac{1}{M_{ab}\mu_{ab}} \left[\pi_{ab}^2 U_{ab}^{(0)} - (\mathbf{r}_{ab} \cdot \pi_{ab})^2 \frac{1}{r_{ab}} \frac{dU_{ab}^{(0)}}{dr_{ab}} \right] - \right.$$
$$\left. - \frac{\varkappa_{ab}}{\mu_{ab}^2} \left[\pi_{ab}^2 \varphi_{ab} + (\mathbf{r}_{ab} \cdot \pi_{ab})^2 \frac{1}{r_{ab}} \frac{d\varphi_{ab}}{dr_{ab}} \right] \right\}. \tag{125}$$

В равенстве (123) функция $\tilde{u}_{1ab}(\mathbf{r}_{ab}, \pi_{ab})$ объединяет все галилей-инвариантные члены, т. е. члены, не содержащие полного импульса $\mathbf{P}_{ab}$ двухчастичной системы.

Выражения (123) можно представить также в другом виде, используя скобки Пуассона:

$$U_{ab}^{(1)} = -\frac{1}{2c^2} \left(\frac{P_{ab}^2}{M_{ab}^2} U_{ab}^{(0)} + \frac{1}{M_{ab}^2} \{(\mathbf{r}_{ab} \cdot \mathbf{P}_{ab})(\pi_{ab} \cdot \mathbf{P}_{ab}), U_{ab}^{(0)}\} + \right.$$
$$\left. + \frac{\varkappa_{ab}}{M_{ab}\mu_{ab}} \{(\mathbf{r}_{ab} \cdot \mathbf{P}_{ab})\pi_{ab}^2, U_{ab}^{(0)}\} + \frac{1}{M_{ab}\mu_{ab}} \{\pi_{ab}^2, \theta_{ab}\} \right) + \tilde{u}_{1ab}, \tag{126}$$

где

$$\theta_{ab}(\mathbf{r}_{ab}, \mathbf{P}_{ab}) = -\mathbf{r}_{ab} \cdot \mathbf{P}_{ab} \left(\frac{\varkappa_{ab}}{2} U_{ab}^{(0)} + \varphi_{ab} \right). \tag{127}$$

Последняя форма записи функции $U_{ab}^{(1)}$ может быть получена непосредственным решением перестановочных соотношений для канонических генераторов группы Пуанкаре методом алгебры коммутаторов, разработанным (в квантовом варианте) в [68,6]. Таким путем можно получить общее решение задачи Дирака в приближении c^{-2} и в том случае, когда нерелятивистский потенциал зависит от импульсов и, тем самым, канонические координаты не могут в квазирелятивистском приближении обладать свойством ковариантности. К этому вернемся несколько позже, а сейчас запишем лишь соответствующую систему уравнений для $U^{(1)}$ и $\Psi^{(1)}$, следующую из (74) — (76) с учетом первого соотношения (72). Если для $K_i^{(0)}$ воспользоваться вторым выражением (116), то получим:

$$M\{R_i, U^{(1)}\} + \{K_{ij}, U^{(0)}\} + \{\Psi_i^{(1)}, H^{(0)}\} = 0; \tag{128}$$

$$\{\Psi_i^{(1)}, P_j\} = \frac{1}{c^2} \delta_{ij} U^{(0)}; \tag{129}$$

$$\{R_i, \Psi_j^{(1)}\} - \{R_j, \Psi_i^{(1)}\} = 0, \tag{130}$$

В случае $U_{ab}^{(0)} = U_{ab}^{(0)}(r_{ab})$ система уравнений (128) — (130) эквивалентна системе (94) — (96) для этого же случая, а равенство (126) дает ее общее решение (118), удовлетворяющее с точностью до c^{-2} дополнительному условию (79) ковариантности канонических координат.

Перейдем к рассмотрению *многочастичных* постньютоновских гамильтонианов взаимодействия, т. е. к задаче сложения взаимодействий в гамильтоновом подходе в приближении c^{-2} для $U^{(0)} = u_0(r)$. При ее решении должны быть соблюдены условия приближенной пуанкаре-инвариантности и разделимости. Поскольку уравнения, выражающие условия пуанкаре-инвариантности в гамильтоновом и лагранжевом формализмах, в постньютоновском случае совпадают (с точностью до замены $\mathbf{p}_a$ на $m_a\mathbf{v}_a$), то сюда переносятся все результаты из стандартного лагранжева подхода, в котором $U^{(1)}$ не содержит ускорений. Таким образом, здесь действует принцип суперпозиций, так что поправка $U^{(1)}$ к многочастичному нерелятивистскому потенциалу $U^{(0)}(r) = \sum\sum_{a<b} u_{ab}^{(0)}(r_{ab})$ определяется равенством (99), где под $U_{ab}^{(1)}$ можно понимать любое из выражений (118), (123) или (126).

Требование разделимости взаимодействий в многочастичных ($N \geqslant 3$) системах играет более существенную роль, чем в двухчастичных. В последнем случае для его выполнения достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$u_{1ab} \xrightarrow[r_{ab}\to\infty]{} 0; \quad r_{ab}U_{ab}^{(0)} \xrightarrow[r_{ab}\to\infty]{} 0; \quad r_{ab}\varphi_{ab} \xrightarrow[r_{ab}\to\infty]{} 0. \tag{131}$$

При $N \geqslant 3$ нетрудно построить решения системы (129), не удовлетворяющие условию разделимости. Возьмем, например, частное решение уравнений (129) вида

$$\Psi^{(1)} = \frac{1}{c^2} U^{(0)} \sum_{d=1}^{N} \alpha_d \mathbf{x}_d = \frac{1}{c^2} \left(\sum_{d=1}^{N} \alpha_d \mathbf{x}_d\right) \sum\sum_{a<b} U_{ab}^{(0)}; \quad \sum_{a=1}^{N} \alpha_a = 1. \tag{132}$$

Если одна из частиц (скажем, первая) удаляется на бесконечность, $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_a| \to \infty$, $a = 2, \ldots, N$, то условие разделимости выразится равенством

$$\Psi^{(1)} \to \Psi_1^{(1)} + \overline{\Psi}_1^{(1)},$$

в котором $\Psi_1^{(1)}$ зависит лишь от $\mathbf{x}_1$, а $\overline{\Psi}_1^{(1)}$, наоборот, от $\mathbf{x}_1$ не зависит. Функция (132) этому требованию не удовлетворяет.

С другой стороны, если в (98) подставить двухчастичные выражения (103), удовлетворяющие условиям разделимости, то получим многочастичную функцию $\Psi^{(1)}$, также удовлетворяющую этому условию. Такой же вывод можно сделать относительно выражения (99) с разделимыми двухчастичными функциями $U_{ab}^{(1)}$. Многочастичные релятивистские поправки к нерелятивистскому потенциалу, обладающие свойством разделимости, впервые были получены Ю. М. Широковым и сотруд. [5], хотя само понятие разделимости было сформулировано Фолди несколько позже [68].

Как уже упоминалось в связи с лагранжевым формализмом, можно допустить наличие в $\Psi^{(1)}$ многочастичных членов с произвольными функциями φ_{abc} и соответствующих многочастичных членов в $U^{(1)}$. Вопрос о совместимости подобных выражений с условием разделимости взаимодействий является открытым. В дальнейшем ограничимся в постньютоновском приближении лишь суперпозициями двухчастичных членов, как это делается обычно в литературе.

Обсудим еще один важный аспект соотношения между двухчастичными и многочастичными гамильтонианами взаимодействия в постньютоновском приближении. Поскольку теоретические расчеты для замкнутой системы частиц проводятся, как правило, в системе отсчета ее центра инерции ($\mathbf{P} = 0$), то, как видно из (123) или (126), для $N = 2$ в этой системе отсчета в $U^{(1)}$ исчезают все члены, не обладающие галилей-инвариантностью. Как заметил еще в 1959 г. Ю. М. Широков [5], отсюда следует, что при изучении вопроса о релятивистских поправках к феноменологическим потенциалам нуклон-нуклонных взаимодействий двухчастичная система для этой цели непригодна, поскольку галилей-инвариантные члены в $U^{(1)}$ нельзя отличить от нерелятивистского потенциала.

Ситуация существенно меняется, если двухчастичные выражения (123) или (126) входят в многочастичные гамильтонианы. Поскольку в этом случае не существует системы отсчета, в которой все $\mathbf{P}_{ab} = 0$, многочастичный гамильтониан будет содержать галилей-неинвариантные, т. е. зависящие от $\mathbf{P}_{ab}$ члены выражений (123) или (126), которые отражают эффекты, связанные с движением центра масс двухчастичной подсистемы. Именно эти члены определяют специфически релятивистские поправки к феноменологическим потенциалам. Таким образом, понятие двухчастичного потенциала взаимодействия в квазирелятивистской (и, конечно, в релятивистской) механике отличается от этого понятия в нерелятивистской теории, где $U_{ab}^{(0)}(\mathbf{r}_{ab}, \boldsymbol{\pi}_{ab})$ вследствие условия галилей-инвариантности, т. е. независимости $U_{ab}^{(0)}$ от $\mathbf{P}_{ab}$, определяет взаимодействие частиц a и b не только в системе центра инерции подсистемы σ_{ab}, но и в любой другой инерциальной системе отсчета. Приближенно лоренц-инвариантные потенциалы взаимодействия двух частиц, присутствующие в многочастичных гамильтонианах, следует рассматривать с учетом движения центра масс двухчастичных подсистем. Это обстоятельство делает особенно ценным подход, который основан на пуанкаре-инвариантной теории прямых взаимодействий и позволяет сочетать общие требования, применимые к любым физическим системам, со специфическими свойствами конкретных взаимодействий в двухчастичных подсистемах. Эти подсистемы можно изучать с помощью других методов (например, теоретико-полевого, квазипотенциального, анализа экспериментальных данных по двухчастичному рассеянию и т. д.).

Учет спинов. В рамках классической гамильтоновой механики спины частиц $\mathbf{s}_a$ можно ввести феноменологически [см. (38) и (39)]. В первом приближении по c^{-2} последний член в (39) принимает вид

$$\mathbf{K}_{fs}^{(1)} = -\frac{1}{2c^2}\sum_a \frac{\mathbf{s}_a\times\mathbf{p}_a}{m_a}. \tag{133}$$

При этом свойство ковариантности канонических координат [см. (19) и (79)] теряется даже для свободных частиц [179, 180]. Найдем соответствующую поправку к двухчастичному потенциалу $U_{ab}^{(1)}$. Для компенсации дополнительного члена во второй скобке Пуассона уравнения (128) поправка $U_{ab}^{(1)}$ должна содержать член, зависящий от спинов частиц и имеющий, как легко проверить, вид:

$$U_{sab}^{(1)} = \frac{1}{2M_{ab}c^2}\left\{\left(\frac{\mathbf{s}_a}{m_a}-\frac{\mathbf{s}_b}{m_b}\right)\times\boldsymbol{\pi}_{ab}\cdot\mathbf{P}_{ab},\ U_{ab}^{(0)}\right\}. \tag{134}$$

Кроме того, зависимость от спинов может содержаться в галилей-инвариантных функциях φ_{ab} и u_{1ab}, а также (для $N\geqslant 3$) в соответствующих многочастичных функциях.

Отметим, что системы спиновых частиц в ньютоновом и лагранжевом подходе исследованы слабо; первые результаты были получены недавно [141, 142].

Квантование. Переход от классического квазирелятивистского гамильтониана H к квантовому $\hat{H}$ можно выполнить так же, как это делается в нерелятивистской теории [143], т. е. с помощью замены

$$\mathbf{p}\to -i\hbar\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{p}},\quad \{f,g\}\to -\frac{i}{\hbar}[f,g], \tag{135}$$

где $\mathbf{p}$ — импульс, канонически сопряженный с $\mathbf{q}$. При этом возникает неоднозначность при симметризации выражений, содержащих произведения функций координат и функций импульсов. (Такая симметризация обеспечивает эрмитовость оператора $\hat{H}$.) Не вдаваясь в анализ этой проблемы в случае выражений, билинейных по импульсам, мы воспользуемся способом симметризации, принятой в [6, 68]. Применяя его к выражению (118), получим эрмитов оператор

$$\hat{U}_{ab}^{(1)} = -\frac{1}{4c^2}\left\{\frac{\hat{\mathbf{p}}_a}{m_a}\cdot\frac{\hat{\mathbf{p}}_b}{m_b}U_{ab}^{(0)} + U_{ab}^{(0)}\frac{\hat{\mathbf{p}}_a}{m_a}\cdot\frac{\hat{\mathbf{p}}_b}{m_b} - \right.$$
$$-\frac{1}{m_am_b}\hat{\mathbf{p}}_a(\hat{\mathbf{p}}_b\mathbf{r}_{ab})\mathbf{r}_{ab}\frac{1}{r_{ab}}\frac{dU_{ab}^{(0)}}{dr_{ab}} - \frac{1}{m_am_br_{ab}}\times$$
$$\times\frac{dU^{(0)}}{dr_{ab}}\mathbf{r}_{ab}(\mathbf{r}_{ab}\hat{\mathbf{p}}_a)\hat{\mathbf{p}}_b + \left(\frac{\hat{p}_a^2}{m_a^2}-\frac{\hat{p}_b^2}{m_b^2}\right)\varphi_{ab} +$$

$$+\varphi_{ab}\left(\frac{\hat{p}_a^2}{m_a^2}-\frac{\hat{p}_b^2}{m_b^2}\right)+\left(\frac{\hat{\mathbf{p}}_a}{m_a}+\frac{\hat{\mathbf{p}}_b}{m_b}\right)\left(\left(\frac{\hat{\mathbf{p}}_a}{m_a}-\frac{\hat{\mathbf{p}}_b}{m_b}\right)\mathbf{r}_{ab}\right)\mathbf{r}_{ab}\frac{1}{r_{ab}}\frac{d\varphi_{ab}}{dr_{ab}}+$$

$$+\frac{1}{r_{ab}}\frac{d\varphi_{ab}}{dr_{ab}}\mathbf{r}_{ab}\left(\mathbf{r}_{ab}\left(\frac{\hat{\mathbf{p}}_a}{m_a}-\frac{\hat{\mathbf{p}}_b}{m_b}\right)\right)\left(\frac{\hat{\mathbf{p}}_a}{m_a}+\frac{\hat{\mathbf{p}}_b}{m_b}\right)+\hat{u}_{1ab}, \qquad (136)$$

где $\hat{u}_{1ab}$ получается из u_{1ab} той же процедурой квантования. Если для u_{1ab} записать, как это обычно принято:

$$u_{1ab}=\frac{1}{2c^2}\left\{\left(\frac{\mathbf{p}_a}{m_a}-\frac{\mathbf{p}_b}{m_b}\right)^2\alpha_{ab}(r_{ab})+\right.$$

$$\left.+\left[\mathbf{r}_{ab}\left(\frac{\mathbf{p}_a}{m_a}-\frac{\mathbf{p}_b}{m_b}\right)\right]^2\beta_{ab}(r_{ab})+\gamma_{ab}(r_{ab})\right\}, \qquad (137)$$

где α_{ab}, β_{ab} и γ_{ab} — произвольные функции от r_{ab}, то

$$\hat{u}_{1ab}=\frac{1}{4c^2}\left\{\left(\frac{\hat{\mathbf{p}}_a}{m_a}-\frac{\hat{\mathbf{p}}_b}{m_b}\right)^2\alpha_{ab}(r_{ab})+\alpha_{ab}(r_{ab})\left(\frac{\hat{\mathbf{p}}_a}{m_a}-\frac{\hat{\mathbf{p}}_b}{m_b}\right)^2+\right.$$

$$+\left(\frac{\hat{\mathbf{p}}_a}{m_a}-\frac{\hat{\mathbf{p}}_b}{m_b}\right)\cdot\left(\left(\frac{\hat{\mathbf{p}}_a}{m_a}-\frac{\hat{\mathbf{p}}_b}{m_b}\right)\mathbf{r}_{ab}\right)\mathbf{r}_{ab}\beta_{ab}(r_{ab})+$$

$$\left.+\beta_{ab}(r_{ab})\mathbf{r}_{ab}\left(\mathbf{r}_{ab}\left(\frac{\hat{\mathbf{p}}_a}{m_a}-\frac{\hat{\mathbf{p}}_b}{m_b}\right)\right)\left(\frac{\hat{\mathbf{p}}_a}{m_a}-\frac{\hat{\mathbf{p}}_b}{m_b}\right)+\gamma_{ab}(r_{ab})\right\}. \qquad (138)$$

Если исходить из классического выражения (126), к которому присоединим поправку (134), учитывающую наличие у частиц спинов, то с помощью замены (135) получим оператор

$$\hat{U}_{ab}^{(1)}=-\frac{1}{2c^2}\left\{\frac{P_{ab}^2}{M_{ab}^2}U_{ab}^{(0)}-\frac{\mathrm{i}}{2M_{ab}^2\hbar}\left[(\mathbf{r}_{ab}\hat{\mathbf{P}}_{ab})(\hat{\mathbf{P}}_{ab}\hat{\boldsymbol{\pi}}_{ab})+\right.\right.$$

$$\left.+(\hat{\boldsymbol{\pi}}_{ab}\hat{\mathbf{P}}_{ab})(\hat{\mathbf{P}}_{ab}\mathbf{r}_{ab}),U_{ab}^{(0)}\right]-\frac{\mathrm{i}\varkappa_{ab}}{2M_{ab}\mu_{ab}\hbar}\left[(\mathbf{r}_{ab}\mathbf{P}_{ab})\hat{\pi}_{ab}^2+\hat{\pi}_{ab}^2(\mathbf{r}_{ab}\hat{\mathbf{P}}_{ab}),\right.$$

$$\left.U_{ab}^{(0)}\right]-\frac{\mathrm{i}}{M_{ab}\mu_{ab}\hbar}[\hat{\pi}_{ab}^2,\theta_{ab}]-\frac{\mathrm{i}}{M_{ab}\hbar}\left[\left(\frac{\mathbf{s}_a}{m_a}-\frac{\mathbf{s}_b}{m_b}\right)\times\right.$$

$$\left.\left.\times\hat{\boldsymbol{\pi}}_{ab}\hat{\mathbf{P}}_{ab},U_{ab}^{(0)}\right]\right\}+\hat{u}_{1ab}, \qquad (139)$$

который находится в полном согласии с результатами Фолди — Крайсика [6], полученными решением в приближении c^{-2} квантовой задачи Дирака.

Переход от системы двух частиц к многочастичному гамильтониану осуществляется в постньютоновском приближении квантовой механики так же, как и в классической теории, т. е. на основе принципа суперпозиции.

Общий случай квазирелятивистского приближения. Укажем кратко на осложнения, которые встречает приближенно релятивистская теория прямых взаимодействий, если выйти за рамки рассмотренного выше постньютоновского приближения. Возьмем сначала первое приближение по c^{-2} в случае взаимодействий, описываемых в нерелятивистском пределе потенциалами $U^{(0)}$, зависящими от скоростей. Тогда из уравнений (94) и (95) видно, что в лагранжевом формализме $\Psi^{(1)}$ содержит скорости, а функция $U^{(1)}$ существенно зависит от ускорений, т. е. члены с ускорениями нельзя исключить путем добавления полной производной по времени, и, таким образом, уравнения Эйлера будут уравнениями порядка выше второго. Поскольку высшие производные будут в них только в малых членах, их можно исключить с помощью нерелятивистских уравнений движения, в результате чего придем к уравнениям второго порядка. Такое исключение можно выполнить также в интегралах движения (67) — (70), однако, как уже отмечалось, оно не допустимо в лагранжиане, фигурирующем в вариационном принципе.

Общее решение системы уравнений (94) — (96) в рассматриваемом случае, содержащее производные не выше второго порядка, получено в [136]. Для системы двух частиц $U_{ab}^{(1)}$ имеет вид:

$$U_{ab}^{(1)}=\frac{1}{4c^2}\Big\{-2\mathbf{v}_a\mathbf{v}_bU_{ab}^{(0)}+[\mathbf{r}_{ab}\mathbf{v}_a)\,\mathbf{v}_b+(\mathbf{r}_{ab}\mathbf{v}_b)\,\mathbf{v}_a]\frac{\partial U_{ab}^{(0)}}{\partial\mathbf{r}_{ab}}+$$
$$+[v_a^2\mathbf{v}_b-v_b^2\mathbf{v}_a+3\,(\mathbf{v}_a\mathbf{v}_b)\,\mathbf{v}_{ab}+$$
$$+(\mathbf{r}_{ab}\cdot\mathbf{v}_a+\mathbf{r}_{ab}\cdot\mathbf{v}_b)\,(\dot{\mathbf{v}}_a+\dot{\mathbf{v}}_b)]\cdot\frac{\partial U_{ab}^{(0)}}{\partial\mathbf{v}_{ab}}\Big\}+u_{1ab}. \qquad (140)$$

Соответствующие уравнения движения типа Ньютона и законы сохранения мы выписывать не будем, их можно найти в [136]. Там же приведены и аналогичные результаты для постпостньютоновского (или второго постньютоновского) приближения, учитывающего поправки порядка c^{-4} в случае нерелятивистского потенциала $U^{(0)}=u_0\,(r)$.

В гамильтоновом подходе уравнения (128) — (130) для $U^{(1)}\,(q,\,p)$ и $\Psi^{(1)}\,(q,\,p)$ отличаются от постньютоновских тем, что $U^{(0)}=U^{(0)}\,(q,\,p)$ и канонические координаты q_a^i не могут совпадать с физическими.

В случае двух частиц общее решение системы (129) — (130) имеет вид (в [6] эти результаты получены в квантовом варианте теории):

$$\Psi_{ab}^{(1)}=\frac{1}{c^2}\,\mathbf{R}_{ab}U_{ab}^{(0)}+\Phi_{ab}^{(1)}, \qquad (141)$$

где

$$\Phi_{ab}^{(1)}=-\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial}{\partial\mathbf{P}_{ab}}\,\theta_{ab}\,(\mathbf{P}_{ab},\,\mathbf{r}_{ab},\,\boldsymbol{\pi}_{ab})=-\frac{1}{c^2}\{\mathbf{R}_{ab},\,\theta_{ab}\}, \qquad (142)$$

а θ_{ab} — произвольная скалярная функция указанных переменных, симметричная относительно перестановки индексов a и b.

(В (127) мы имели частный вид этой функции.) Соответствующее общее решение системы уравнений (128) имеет вид (126) с тем, что функция θ_{ab} не определяется равенством (127). Все эти результаты переносятся стандартным образом и на квантовую теорию, в которой оператор $\hat{U}^{(1)}_{ab}$ выражается формулой (139).

Ясно, что переход от лагранжева формализма к гамильтоновому нельзя выполнить в рассматриваемом случае с помощью стандартного преобразования Лежандра из-за существенной зависимости лагранжиана от ускорений. Исследование подобных весьма интересных вопросов выходит за рамки настоящей работы.

Для $U^{(0)} = U^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ возникает важное различие между лагранжевым и гамильтоновым описанием в квазирелятивистском приближении при переходе к N-частичным системам ($N \geqslant 3$). Если в лагранжевом формализме парным нерелятивистским потенциалам вида (97) соответствуют, согласно (99), решения, описывающие парные квазирелятивистские потенциалы, то в гамильтоновом подходе ситуация другая: подставляя суперпозиции (97) и (98) с функциями $\Psi^{(1)}_{iab}$ вида (141) в уравнение (128), в последней скобке Пуассона получим тройные суммы вида

$$\sum_{a<b<c}\sum\sum \{\mathbf{R}_{ab}U^{(0)}_{ab}, U^{(0)}_{ac}\}.$$

Поэтому для многочастичных систем поправка $U^{(1)}$ к парному нерелятивистскому потенциалу с необходимостью содержит трехчастичные члены [6].

С точки зрения лагранжева формализма наличие многочастичных поправок к гамильтонианам взаимодействия в общем случае квазирелятивистского приближения связано с тем, что из-за наличия в лагранжианах высших производных гамильтонизация теории усложняется, что, в частности, и приводит к появлению многочастичных гамильтонианов взаимодействия, соответствующих парным лагранжианам взаимодействия.

4. СВЯЗЬ С ИНТЕГРАЛАМИ ДЕЙСТВИЯ ТИПА ФОККЕРА И ПОЛЕВЫМ ПОДХОДОМ

Основной чертой излагаемого подхода к построению релятивистской теории прямых взаимодействий является стремление найти общую структуру соответствующих выражений (функции Лагранжа, канонических генераторов, уравнений движения, законов сохранения), исходя из некоторых естественных требований (пуанкаре-инвариантности, разделимости взаимодействий и т. п.). Эта общность отображается в наличии некоторых произвольных функций, в частности, функций u_{1ab} и φ_{ab} в выражениях для квазирелятивистских лагранжианов и гамильтонианов взаимодействия, полученных в предыдущем разделе. Другими словами, рассматриваемый подход устанавливает общие рамки, в которых должны реализоваться описания конкретных систем и взаимодействий, но не может дать указаний, какой конкретный выбор произвольных функций следует сопоставлять с тем или иным объектом. В конечном счете ответ на этот вопрос может дать только эксперимент; однако и здесь теоретический анализ должен служить основой некоторых рекомендаций.

Важную роль для разработки таких рекомендаций может сыграть решение релятивистской (или квазирелятивистской) обратной задачи рассеяния (восстановление потенциала по S-матрице); в рамках квантовой РГТ эта задача исследована С. Н. Соколовым [62, 144]. Другой путь заключается в сопоставлении «сил» или потенциалов теории прямых взаимодействий с соответствующими выражениями, полученными в рамках теоретико-полевого подхода с помощью последовательного исключения полевых переменных. Подобное исключение (например, с помощью потенциалов Лиенара — Вихерта в электродинамике) можно выполнять в уравнениях движения частиц, в интегралах действия, лагранжианах или гамильтонианах. Для систем частиц с электромагнитным взаимодействием эту процедуру применяли в классической теории в [145—151] (см. также [152]), а в квантовой теории — в [153] и во многих других работах (см. обзоры [2], а также [154]), для систем с произвольным векторным или скалярным взаимодействием — соответственно в [155 и 156]. Для систем с гравитационным взаимодействием переход от описания движения тел в рамках общей теории относительности к описанию в терминах прямых взаимодействий исследовали в первом и втором постньютоновских приближениях в [86, 157—162]. Случай комбинированного гравитационного и электромагнитного взаимодействия рассмотрен в [163]. В качестве примеров использования для аналогичной цели квантовой теории поля укажем на обзор [164], посвященный обсуждению однобозонного обменного потенциала нуклон-нуклонного взаимодействия, и работу [165], в которой исключение полевых переменных приводит (в рамках простой модели) к набору генераторов унитарных представлений группы Пуанкаре, выраженных через переменные частиц.

Удобным промежуточным звеном для сравнения результатов теории прямых взаимодействий и полевых подходов является формализм интегралов действия типа Фоккера, упоминавшийся в разд. 2. Этот формализм основан на действии вида

$$S = -\sum_a m_a c \int d\tau_a \sqrt{u_a^2} -$$
$$-\frac{1}{c}\sum_{a<b}\sum \int' d\tau_a \int d\tau_b \Lambda_{ab}\left[x_a(\tau_a) - x_b(\tau_b),\ u_a(\tau_a),\ u_b(\tau_b)\right], \qquad (143)$$

где $x_a^\nu(\tau_a)$ описывает в 4-форме параметрические уравнения мировых линий частиц; $u_a^\nu \equiv dx_a^\nu/d\tau_a$ — 4-скорость; Λ_{ab} — произвольные пуанкаре-инвариантные функции, построенные из скалярных произведений указанных в (143) 4-векторов.

Использование четырехмерного явно лоренц-инвариантного выражения (143) лежит в основе другого подхода к построению одновременной лагранжевой формулировки релятивистской механики системы частиц, развитого в [134, 135, 166—169] (см. также [32]). Наиболее общая структура постньютоновского лагранжиана взаимодействия, соответствующая (143), впервые получена Вудкоком и Хавасом [134]. С помощью несколько отличной методики, предложенной в [135] и исходя из более общих выражений для функции Λ_{ab}, Ю. Б. Ключковским найден общий вид квазирелятивистского с точностью до c^{-2} лагранжиана для взаимодействий, описываемых в нерелятивистском пределе потенциалами, зависящими от скоростей, поправки порядка c^{-4}, соответствующие статическому нерелятивистскому пределу, а также лагранжиан взаимодействия в линейном приближении по константе взаимодействия [166, 167]. В работах [168, 169] сформулирована общая процедура нахождения одновременного релятивистского лагранжиана взаимодействия, уравнений движения и законов сохранения по заданной функции Λ_{ab}. В этих работах доказано также, что полученные таким образом результаты удовлетворяют условиям пуанкаре-инвариантности лагранжева описания релятивистской системы частиц, рассмотренным в разд. 2 и 3 настоящего обзора.

Для нас представляет здесь главный интерес тот факт, что при некоторой структуре подынтегральной функции Λ_{ab} в (143) фоккеровский формализм в определенном смысле соответствует теоретико-полевым описаниям. Точнее, он эквивалентен теориям «присоединенных полей» [23, 134], в которых отсутствует самодействие и реакция излучения. (О взаимосвязи этих теорий см. [170, 171].) Такие теории основаны на действии (143) с функцией Λ_{ab} вида [29, 134, 31]:

$$\Lambda_{ab} = \Lambda_{ab}^{(n,l)} = g_a g_b (u_a u_b)^{n-l} (u_a^2 u_b^2)^{(1-n)/2} \times$$
$$\times [(u_a(x_a - x_b))(u_b(x_a - x_b))]^l G_{ab}^{n,l}[(x_a - x_b)^2], \qquad (144)$$

где g_a — постоянные числа-константы взаимодействия, $l = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n$; число n характеризует спин (ранг) поля-носителя взаимодействия; G — функция Грина соответствующего полевого уравнения. Значениям $n = 0, 1$ соответствуют скалярное и векторное взаимодействия [27]; частным случаем последнего является электромагнитное взаимодействие, описываемое функцией [20, 21]:

$$\Lambda_{ab} = e_a e_b (u_a, u_b)\, \delta[(x_a - x_b)^2], \qquad (145)$$

(где e_a — заряды частиц), которой соответствует в полевом описании полусумма запаздывающих и опережающих потенциалов Лиенара — Вихерта. (О так называемых условиях полного поглощения [23], обеспечивающих эквивалентность этого подхода обычному, в котором фигурируют чисто запаздывающие поля и реакция излучения Дирака [172, 173], смотри [174, 22, 175].) Аналогичные теории были построены также для произвольного скалярного и векторного взаимодействий [27], линейного приближения ОТО [28, 176, 177], которое можно рассматривать в терминах теории прямых взаимодействий как скалярно-тензорную линейную комбинацию

$$\Lambda_{ab}^{gr} = 2\Lambda_{ab}^{(2,\,0)} - \Lambda_{ab}^{(0,\,0)}, \tag{146}$$

а также для одной из моделей слабого взаимодействия [178] и ряда других систем.

Ограничимся ниже теоретико-полевой интерпретацией рассмотренных в разд. 3 постньютоновских лагранжианов и гамильтонианов взаимодействия. Укажем, прежде всего, связь полученного там выражения (105), (137) с результатом работы [134], найденным на основе фоккеровских интегралов действия. Она выражается соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} &U_{ab}^{(0)} = g_a g_b V_{ab};\ \varphi_{ab} = g_a g_b W_{ab}/2;\\ &\alpha_{ab} = -g_a g_b (V_{ab} + X_{ab} - W_{ab}/2);\\ &\beta_{ab} = g_a g_b \left(-Y_{ab} + \frac{1}{2r_{ab}}\frac{dW_{ab}}{dr_{ab}}\right);\ \gamma_{ab} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{147}$$

Функции $V_{ab}(r_{ab})$, $W_{ab}(r_{ab})$, $X_{ab}(r_{ab})$, $Y_{ab}(r_{ab})$ выражаются по формулам, найденным в [134] через функцию Λ_{ab}. Если последняя имеет вид (144), то нерелятивистский потенциал определяется равенством

$$U_{ab\,(n,\,l)}^{(0)} = g_a g_b \int_{-\infty}^{\infty} d\theta\, G_{ab}^{(n,\,l)}(\theta^2 - r_{ab}^2) \tag{148}$$

и совпадает с кулоновским (или ньютоновским гравитационным), если $G_{ab}^{(n,l)}$ — симметричная функция Грина уравнения Даламбера, и с потенциалом Юкава в случае поля, описываемого уравнением Клейна — Гордона. Для поправки $U_{ab}^{(1)}$ получается следующее выражение:

$$U_{ab\,(n,\,l)}^{(1)} = -\frac{1}{2c^2}\left\{[\mathbf{v}_a\cdot\mathbf{v}_b - (n-1)\,v_{ab}^2]\,U_{ab\,(n,\,l)}^{(0)} - \left[(\mathbf{r}_{ab}\cdot\mathbf{v}_a)(\mathbf{r}_{ab}\cdot\mathbf{v}_b) + \frac{l(l-1)}{2l-1}(\mathbf{r}_{ab}\cdot\mathbf{v}_{ab})^2\right]\frac{1}{r_{ab}}\frac{dU_{ab\,(n,\,l)}^{(0)}}{dr_{ab}}.\right. \tag{149}$$

Отметим, что, как следует из сравнения (149) и (105), функция $\varphi_{ab}(r_{ab}) = 0$; поэтому всем взаимодействиям, допускающим полевую интерпретацию, соответствует в (103) функция $\Psi^{(1)}_{ab}$ вида: $\Psi^{(1)}_{ab} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_a + \mathbf{x}_b)\, U^{(0)}_{ab}$; в связи с этим члены $U^{(1)}_{ab(n,l)}$, неинвариантные относительно преобразований Галилея, имеют одинаковый вид для всех взаимодействий. Галилей-инвариантные члены $U^{(1)}_{ab(n,l)}$ соответствующие в (105) произвольной функции $u_{1ab}(\mathbf{r}_{ab}, \mathbf{v}_{ab})$, однозначно определяются ньютоновым потенциалом и парой чисел n, l. В частности, для скалярного, векторного и тензорного (второго ранга) взаимодействий имеем, соответственно:

$$u^{(0,\,0)}_{1ab} = -\frac{v^2_{ab}}{2c^2}\, U^{(0)}_{ab}; \qquad u^{(1,\,0)}_{1ab} = u^{(1,\,1)}_{1ab} = 0; \tag{150}$$

$$u^{(2,\,0)}_{1ab} = u^{(2,\,1)}_{1ab} = \frac{v^2_{ab}}{2c^2}\, U^{(0)}_{ab}; \tag{151}$$

$$u^{(2,\,2)}_{1ab} = \frac{1}{2c^2}\left[v^2_{ab}U^{(0)}_{ab} + \frac{2}{3}(\mathbf{r}_{ab}\cdot\mathbf{v}_{ab})^2\frac{1}{r_{ab}}\frac{dU^{(0)}_{ab}}{dr_{ab}}\right]. \tag{152}$$

Рассмотрим более общий случай прямых взаимодействий, которым можно сопоставить суперпозицию различных полей. Пусть

$$\Lambda_{ab} = \sum_{n,\,l} a^{(n,\,l)}_{ab}\Lambda^{(n,\,l)}_{ab}; \qquad \sum_{n,\,l} a^{(n,\,l)}_{ab} = 1, \tag{153}$$

где $a^{(n,l)}_{ab}$ — константы. Если всем членам $\Lambda^{(n,l)}_{ab}$ суммы (153) соответствует одна и та же функциональная форма нерелятивистского потенциала $U^{(0)}_{ab}$, то из (149) и (153) получим:

$$U^{(1)} = \sum_{n,\,l} a^{(n,\,l)}_{ab} U^{(1)}_{ab\,(n,\,l)} = -\frac{1}{2c^2}\Big\{(\mathbf{v}_a\cdot\mathbf{v}_b + A_{ab}v^2_{ab})\, U^{(0)}_{ab} -$$

$$-\left[(\mathbf{r}_{ab}\cdot\mathbf{v}_a)(\mathbf{r}_{ab}\cdot\mathbf{v}_b) + B_{ab}(\mathbf{r}_{ab}\cdot\mathbf{v}_{ab})^2\right]\frac{1}{r_{ab}}\frac{dU^{(0)}_{ab}}{dr_{ab}}\Big\}, \tag{154}$$

где A_{ab} и B_{ab} — постоянные (не обязательно целые), определяемые формулами:

$$A_{ab} = \sum_{n,\,l}(1-n)\, a^{(n,\,l)}_{ab}; \qquad B_{ab} = \sum_{n,\,l}\frac{l\,(l-1)}{2l-1}\, a^{(n,\,l)}_{ab}. \tag{155}$$

Из (154) следует, что теоретико-полевая интерпретация заданного постньютоновского потенциала взаимодействия является неоднозначной, так как фиксированную пару чисел A_{ab} и B_{ab}

можно получить, согласно (155), различными способами. Проиллюстрируем это утверждение на примере линейной по взаимодействию части лагранжиана Эйнштейна — Инфельда — Гоффмана (см., например, [152]), когда $A_{ab} = -3$, $B_{ab} = 0$.

Укажем два простейших способа реализации этого случая:

1) $a_{ab}^{(0,\,0)} = -1$, $a_{ab}^{(2,\,0)} = 2$; $a_{ab}^{(n,\,l)} = 0$ при $n \neq 0,\, 2$, $l \neq 0$;

2) $a^{(0,\,0)} = -3$, $a_{ab}^{(1,\,0)} = 4$; $a_{ab}^{(n,\,l)} = 0$ при $n \neq 0,\, 1$, $l \neq 0$.

Таким образом, постньютоновское гравитационное взаимодействие можно интерпретировать в линейном приближении как суперпозицию либо скалярного и тензорного (второго ранга) [177], либо скалярного и векторного взаимодействий [135].

Изложенные результаты могут быть стандартным образом перенесены из лагранжева формализма в гамильтонову и в квантовую механику. Если пользоваться для постньютоновской поправки к потенциалу выражениями (126), (127) и (139), то из равенства $\varphi_{ab} = 0$ следует, что

$$\theta_{ab} = -\varkappa_{ab}\,(\mathbf{r}_{ab}\cdot\mathbf{P}_{ab})\,U_{ab}^{(0)}/2, \tag{156}$$

а для функций $\tilde{u}_{1ab}$ в рассмотренных выше частных случаях согласно (125) и (150) — (152) и с учетом равенства $\boldsymbol{\pi}_{ab} = \mu_{ab}\mathbf{v}_{ab}$ находим:

$$\tilde{u}_{1ab}^{(0,\,0)} = \frac{1}{2c^2\mu_{ab}}\left[\left(\frac{1}{M_{ab}} - \frac{1}{\mu_{ab}}\right)\pi_{ab}^2 U_{ab}^{(0)} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{M_{ab}}(\mathbf{r}_{ab}\cdot\boldsymbol{\pi}_{ab})^2\frac{1}{r_{ab}}\frac{dU_{ab}^{(0)}}{dr_{ab}}\right], \tag{157}$$

$$\tilde{u}_{1ab}^{(1,\,0)} = \tilde{u}_{1ab}^{(1,\,1)} = \frac{1}{2c^2 M_{ab}\mu_{ab}}\left[\pi_{ab}^2 U_{ab}^{(0)} - (\mathbf{r}_{ab}\cdot\pi_{ab})^2\frac{1}{r_{ab}}\frac{dU_{ab}^{(0)}}{dr_{ab}}\right]; \tag{158}$$

$$\tilde{u}_{1ab}^{(2,\,0)} = \tilde{u}_{1ab}^{(2,\,1)} = \frac{1}{2c^2\mu_{ab}}\left[\left(\frac{1}{M_{ab}} + \frac{1}{\mu_{ab}}\right)\pi_{ab}^2 U_{ab}^{(0)} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{M_{ab}}(\mathbf{r}_{ab}\cdot\boldsymbol{\pi}_{ab})^2\frac{1}{r_{ab}}\frac{dU_{ab}^{(0)}}{dr_{ab}}\right]; \tag{159}$$

$$\tilde{u}_{1ab}^{(2,\,2)} = \frac{1}{2c^2\mu_{ab}}\left[\left(\frac{1}{M_{ab}} + \frac{1}{\mu_{ab}}\right)\pi_{ab}^2 U_{ab}^{(0)} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{2}{3\mu_{ab}} - \frac{1}{M_{ab}}\right)(\mathbf{r}_{ab}\cdot\boldsymbol{\pi}_{ab})^2\frac{1}{r_{ab}}\frac{dU_{ab}^{(0)}}{dr_{ab}}\right]. \tag{160}$$

Соответствующие формулы можно записать и для квантовомеханических операторов $\hat{u}_{1ab}$.

Рассмотрим в качестве примера важный частный случай взаимодействия двух точечных зарядов, когда $U_{ab}^{(0)} = e_a e_b / r_{ab}$. Используем в операторе (139) выражение (156) и выберем галилей-инвариантный оператор $\hat{\hat{u}}_{1ab}$ в виде

$$\hat{\hat{u}}_{1ab}=\frac{\pi e_a e_b}{2c^2}\left(\frac{6}{m_a m_b}-\frac{1}{m_a^2}-\frac{1}{m_b^2}\right)\delta(\mathbf{r}_{ab})-$$
$$-\frac{e_a e_b}{2c^2}\frac{\mathbf{r}_{ab}}{r_{ab}^3}\times\pi_{ab}\cdot\left[\frac{1}{m_a}\left(\frac{1}{m_a}+\frac{2}{m_b}\right)\mathbf{s}_a+\frac{1}{m_b}\left(\frac{1}{m_b}+\frac{2}{m_a}\right)\mathbf{s}_b\right]+$$
$$+\frac{e_a e_b}{m_a m_b c^2}\left[\frac{\mathbf{s}_a\cdot\mathbf{s}_b}{r_{ab}^3}-\frac{3(\mathbf{s}_a\cdot\mathbf{r}_{ab})(\mathbf{s}_b\cdot\mathbf{r}_{ab})}{r_{ab}^5}-\frac{8\pi}{3}\mathbf{s}_a\cdot\mathbf{s}_b\,\delta(\mathbf{r}_{ab})\right].$$

Тогда после перехода в (139) к импульсам $\hat{\mathbf{p}}_a$, $\hat{\mathbf{p}}_b$ получим следующее выражение:

$$\hat{U}_{ab}^{(1)}=-\frac{e_a e_b}{2c^2}\left\{\frac{1}{m_a m_b}\frac{1}{r_{ab}}\left[\hat{\mathbf{p}}_a\cdot\hat{\mathbf{p}}_b+\frac{1}{r_{ab}^2}\mathbf{r}_{ab}\cdot(\mathbf{r}_{ab}\cdot\hat{\mathbf{p}}_a)\,\hat{\mathbf{p}}_b\right]+\right.$$
$$+\frac{\mathbf{r}_{ab}\times\hat{\mathbf{p}}_a\cdot\mathbf{s}_a}{m_a^2}-\frac{\mathbf{r}_{ab}\times\hat{\mathbf{p}}_b\cdot\mathbf{s}_b}{m_b^2}+\frac{2}{m_a m_b r_{ab}^3}\left[\mathbf{r}_{ab}\times\hat{\mathbf{p}}_a\cdot\mathbf{s}_b-\mathbf{r}_{ab}\times\hat{\mathbf{p}}_b\cdot\mathbf{s}_a\right]+$$
$$+\pi\hbar^2\left(\frac{1}{m_a^2}+\frac{1}{m_b^2}\right)\delta(\mathbf{r}_{ab})-\frac{2}{m_a m_b}\times$$
$$\left.\times\left[\frac{\mathbf{s}_a\cdot\mathbf{s}_b}{r_{ab}^3}-\frac{3(\mathbf{s}_a\cdot\mathbf{r}_{ab})(\mathbf{s}_b\cdot\mathbf{r}_{ab})}{r_{ab}^5}-\frac{8\pi}{3}\mathbf{s}_a\cdot\mathbf{s}_b\delta(\mathbf{r}_{ab})\right]\right\}.$$

Полагая здесь $\mathbf{s}_a=1/2\hbar\sigma_a$ (σ_{ai} — матрицы Паули), придем к выражению $\hat{U}_{ab}^{(1)}$, определяющему поправку порядка c^{-2} к кулоновскому потенциалу в гамильтониане Брейта [153, 154]. Отметим, что другой способ симметризации $U_{ab}^{(1)}$:

$$p_{ai}p_{bj}f(\mathbf{r}_{ab})\to\frac{1}{2}\left[p_{ai}f(\mathbf{r}_{ab})\,p_{bj}+p_{bj}f(\mathbf{r}_{ab})\,p_{aj}\right]$$

также приводит в рассматриваемом случае к гамильтониану Брейта, если в скобке первого члена оператора $\hat{\hat{u}}$ пропустить слагаемое $6/(m_a m_b)$.

Следует еще раз подчеркнуть, что для всех взаимодействий, имеющих полевую интерпретацию, функция θ_{ab} определяется равенством (156) и, таким образом, отлична от нуля при $\mathbf{P}_{ab}\neq 0$. Поэтому в многочастичных гамильтонианах H соответствующий член двухчастичных потенциалов U_{ab} всегда вносит вклад в зависимость H от движения центра масс двухчастичных подсистем с $m_a\neq m_b$. Это обстоятельство не учтено в [18], где при рассмотрении электромагнитных взаимодействий члены указанного типа неправомерно полагаются равными нулю.

5. КВАЗИРЕЛЯТИВИСТСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ ЦЕНТРА МАСС

Теоретическое исследование системы взаимодействующих частиц очень часто требует отдельного рассмотрения движения системы как целого, когда абстрагируются от ее сложного строения, и внутреннего движения, определяющего вместе с взаимодействием частиц структуру системы, ее физические свойства. Для такого отделения внутреннего и внешнего движения необходимо сопоставить системе набор величин, которые характеризовали бы систему «в целом», т. е. таких величин (можно назвать их внешними переменными), с помощью которых описание движения системы как целого имело бы ту же форму, что и для одной частицы. В нерелятивистской механике таким набором служит радиус-вектор $\mathbf{R}$ центра масс и его скорость $\dot{\mathbf{R}}$ (в ньютоновом и лагранжевом формализме) или импульс $\mathbf{P}$ (в гамильтоновом подходе). Кроме того, нерелятивистской системе в целом сопоставляется масса M и собственный момент импульса $\mathbf{S} = \mathbf{J} - \mathbf{R} \times \mathbf{P}$, определяемые ее внутренним строением.

Отметим три важных свойства координат R_i нерелятивистского центра масс, которые желательно сохранить в релятивистской теории: 1) для замкнутой системы частиц точка с координатами R_i в любой инерциальной системе отсчета движется равномерно и прямолинейно;

2) величинам $\mathbf{R}$, определенным в различных системах отсчета, соответствует одна и та же точка пространства, т. е. координаты R_i преобразуются по формулам Галилея;

3) совокупность величин R_i, P_i можно использовать в качестве канонических переменных благодаря тому, что они удовлетворяют соответствующим перестановочным соотношениям.

Как показал анализ, выполненный Прайсом [119] (см. также работу Флеминга [179]), для систем с отличным от нуля собственным моментом импульса $\mathbf{S}$ не существует такое релятивистское обобщение понятия центра масс, которое обладало бы тремя указанными свойствами * (с заменой преобразований Галилея на преобразования Лоренца). Мы ограничимся тремя обобщениями, которые сохраняют свойство 1), касающееся самого существа этого понятия. В терминологии Флеминга это так называемые центр масс, центр инерции (в [181] он называется собственным центром масс) и центр спина; они совпадают при $\mathbf{S} = 0$. *Центр масс* $\mathbf{Q}_{\mathrm{CM}}$ (его целесообразнее было бы назвать центром энергии) определяется в произвольной инерциальной системе отсчета по аналогии с ньютоновским с учетом соотношения Эйнштейна между энергией и массой. Координаты Q^i_{CM} не обладают (при $\mathbf{S} \neq 0$) свойствами 2) и 3) (см. также [152]). *Центр инерции* $\mathbf{Q}_{\mathrm{CI}}$ — это точка, совпадающая с центром масс в системе отсчета центра инерции ($\mathbf{P} = 0$); по определению, в произвольной системе отсчета Q^i_{CI} получаются с помощью соответствующего преобразования Лоренца, т. е. координаты Q^i_{CI} ковариантны. Обладая свойством 2),

* Эта же трудность возникает при описании одной частицы со спином [179, 180].

это понятие нарушает (при $\mathbf{S} \neq 0$) условие 3). Наконец, *центр спина* Q_{CS} или *канонический центр масс*, способ определения которого будет указан ниже, характеризуется (при $\mathbf{S} \neq 0$) нековариантными координатами [нарушение условия 2)], обладающими свойством 3). В квантовой механике координате Q^i_{CS} соответствует так называемый оператор положения Ньютона — Вигнера [180, см. также 182]. Вид уравнений, определяющих Q_i зависит от формы динамики; как и выше, ограничимся мгновенной формой.

Релятивистская (или квазирелятивистская) проблема разделения внутреннего и внешнего движения исследовалась разными авторами только в гамильтоновом формализме [9—11, 48, 52, 67, 183, 184], поэтому будем пользоваться ниже центром спина Q_{CS}. Учитывая, что этот термин не является общепринятым, будем называть его традиционным термином «центр масс» и обозначать $\mathbf{Q}$. В лагранжевом формализме релятивистской механики эта проблема практически не исследована.

С формальной точки зрения задача отделения движения системы в целом от ее внутреннего движения заключается в нахождении такого набора переменных центра масс (ПЦМ), часть которого совпадала бы с внешними переменными Q_i, P_i, S_i, а остальные описывали бы внутреннее движение. Обозначим совокупность внутренних переменных ($\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{\sigma}$), где $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{\pi}$ соответствуют каноническим координатам и импульсам, а $\boldsymbol{\sigma}$ — спинам. Если исходить из индивидуальных переменных отдельных частиц ($\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{s}$), которые были использованы выше, то для решения указанной задачи необходимо найти формулы преобразования

$$F\colon (\mathbf{q},\ \mathbf{p},\ \mathbf{s}) \to (\mathbf{Q},\ \mathbf{P},\ \mathbf{S};\ \boldsymbol{\rho},\ \boldsymbol{\pi},\ \boldsymbol{\sigma}). \tag{161}$$

С другой стороны, решение задачи Дирака с самого начала можно искать, опираясь на постулирование некоторых релятивистских ПЦМ, как это делается, например, в модели Бакамжиана — Томаса (БТ) [67]. Однако и в этом случае из-за неясности физического смысла этих переменных важное значение имеет установление их связи с переменными частицами (ПЧ) в виде преобразования F^{-1}, обратного к (161). В литературе используются оба пути — как прямой, так и обратный. В строго релятивистской теории указанные преобразования известны для произвольного N только для невзаимодействующих частиц [185]. Ограничимся здесь квазирелятивистским приближением, в котором построение ПЦМ для N-частичной системы можно выполнить при произвольном взаимодействии частиц. Для некоторых частных типов взаимодействий соответствующие преобразования были найдены в [186], в общем случае — в [9]. Изложим кратко исходные положения и результаты последней работы, выполненной в рамках квантовой механики.

Пусть генераторы * $\mathbf{T}$, $\mathbf{J}$, H и $\mathbf{K}$ выражены в терминах индивидуальных переменных частиц $\mathbf{q}_a$, $\mathbf{p}_a$ и $\mathbf{s}_a$ формулами (35) — (39) и (71) или в квазирелятивистском приближении равенствами (35), (38), (114) и (115). Исходное требование при нахождении ПЦМ, сформулированное в [9], состоит в том, чтобы в искомых переменных эти же генераторы имели «одночастичный» вид. Другими словами, они должны выражаться через $\mathbf{Q}$, $\mathbf{P}$ и $\mathbf{S}$ теми же формулами, что и генераторы $\mathbf{T}_a$, $\mathbf{J}_a$, H_a, $\mathbf{K}_a$ через $\mathbf{q}_a$, $\mathbf{p}_a$ и $\mathbf{s}_a$ [см. (35) — (39)]. При этом роль энергии покоя частицы $m_a c^2$ должен играть внутренний гамильтониан h всей системы, г. е. гамильтониан H в системе центра масс ($\mathbf{P} = 0$), имеющий смысл собственной энергии системы, а роль спина — собственный момент импульса системы $\mathbf{S} = \mathbf{J} - \mathbf{Q} \times \mathbf{P}$, т. е. $\mathbf{J}$ в системе центра масс. Таким образом, в искомых ПЦМ эти генераторы должны выражаться равенствами **:

$$\mathbf{T}=\mathbf{P} \quad (\text{а}); \qquad \mathbf{J}=\mathbf{Q}\times\mathbf{P}+\mathbf{S} \quad (\text{б}); \tag{162}$$

$$H=\sqrt{h^2+c^2P^2} \quad (\text{а}); \qquad \mathbf{K}=-t\mathbf{P}+\frac{1}{2c^2}(H\mathbf{Q}+\mathbf{Q}H)-\frac{\mathbf{S}\times\mathbf{P}}{H+h} \quad (\text{б}), \tag{163}$$

которые могут служить определением канонического центра масс $\mathbf{Q}$: рассматривая (162) и (163) как систему уравнений относительно $\mathbf{Q}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{S}$ и h, нетрудно выразить «внешние» переменные через генераторы и убедиться, что свойство 3) координат Q_i является следствие перестановочных соотношений алгебры $A\mathscr{P}$. Из этих же соотношений следует также, что h и $\mathbf{S}$ коммутируют с $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}$, т. е. они являются функциями только внутренних переменных. Кроме того, h коммутирует со всеми генераторами группы $\mathscr{P}$.

Генераторы $\mathbf{T}$ и $\mathbf{J}$, выраженные через ПЦМ, сохраняют свою форму (162) в любом приближении по c^{-2}, а выражения (163) в первом приближении по c^{-2} можно представить в виде:

$$H=Mc^2+h^{(0)}+\frac{P^2}{2M}+h^{(1)}-\frac{P^2}{2M^2c^2}h^{(0)}-$$
$$-\frac{P^4}{8M^3c^2}+o(c^2)\equiv Mc^2+H^{(0)}+H^{(1)}+o(c^{-2}); \tag{164}$$

$$\mathbf{K}=-t\mathbf{P}+\left(M+\frac{h^{(0)}}{c^2}\right)\mathbf{Q}+\frac{P^2\mathbf{Q}+\mathbf{Q}P^2}{4Mc^2}-\frac{\mathbf{S}\times\mathbf{P}}{2Mc^2}+$$
$$+o(c^{-2})=\mathbf{K}^{(0)}+\mathbf{K}^{(1)}+o(c^{-2}). \tag{165}$$

---

* Чтобы отличить канонический генератор пространственных трансляций от переменной $\mathbf{P}$, с которой он фактически совпадает, обозначим его $\mathbf{T}$.

** Второй член в (163б) записан в симметричном виде, позволяющем интерпретировать генератор $\mathbf{K}$ в терминах как классической, так и квантовой механики. Для упрощения записи «шапочки» над операторами здесь опускаем.

Таким образом, рассматриваемая задача сводится в первом квазирелятивистском приближении к нахождению преобразования (161), в результате которого выражения (35), (38), (114) и (115) приобретают соответственно вид (162), (164) и (165).

Метод построения релятивистских (в явном виде — только квазирелятивистских) ПЦМ, предложенный в [9], заключается в использовании двух последовательных шагов. Первый — это переход от ПЧ к нерелятивистским ПЦМ, выполняемый согласно равенствам:

$$\mathbf{P}=\sum_a \mathbf{p}_a;\quad \mathbf{Q}=\sum_a \frac{m_a\mathbf{q}_a}{M};\quad \mathbf{S}=\sum_a (\boldsymbol{\rho}_a\times\boldsymbol{\pi}_a+\boldsymbol{\sigma}_a); \tag{166}$$

$$\mathbf{q}_a=\boldsymbol{\rho}_a+\mathbf{Q};\quad \mathbf{p}_a=\boldsymbol{\pi}_a+\frac{m_a}{M}\mathbf{P};\quad \mathbf{s}_a=\boldsymbol{\sigma}_a, \tag{167}$$

где внутренние переменные $\boldsymbol{\rho}_a$ и $\boldsymbol{\pi}_a$ (соответственно положения и импульсы частиц относительно центра масс), не являющиеся независимыми переменными, удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\sum_a m_a\boldsymbol{\rho}_a=0;\qquad \sum_a \boldsymbol{\pi}_a=0. \tag{168}$$

Второй шаг заключается в переходе от нерелятивистских ПЦМ к релятивистским с помощью некоторого унитарного (в классике — канонического) преобразования:

$$\mathbf{q}_a=\exp(\mathrm{i}\Phi)(\boldsymbol{\rho}_a+\mathbf{Q})\exp(-\mathrm{i}\Phi); \tag{169}$$

$$\mathbf{p}_a=\exp(\mathrm{i}\Phi)\left(\boldsymbol{\pi}_a+\frac{m_a}{M}\mathbf{P}\right)\exp(-\mathrm{i}\Phi); \tag{170}$$

$$\mathbf{s}_a=\exp(\mathrm{i}\Phi)\,\boldsymbol{\sigma}_a\exp(-\mathrm{i}\Phi). \tag{171}$$

Оператор Φ ищется из требования, чтобы подстановка (169) — (171) в генераторы группы $\mathcal{P}$, выраженные через ПЧ, привела их к одночастичному виду (162), (163). Представляя Φ в виде ряда по c^{-2} ($\Phi=\Phi^{(0)}+\Phi^{(1)}+\ldots$), авторы [9] показывают, что благодаря перестановочным соотношениям алгебры $A\mathcal{P}$ следующая из указанного требования система уравнений для Φ всегда имеет решение. С точностью до членов порядка c^{-2} имеем [9]:

$$\Phi^{(0)}=1;$$

$$\Phi^{(1)}=-\frac{1}{2c^2}\sum_a\left\{\frac{1}{2M^2}[(\boldsymbol{\rho}_a\cdot\mathbf{P})(\boldsymbol{\pi}_a\cdot\mathbf{P})+(\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\pi}_a)(\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\rho}_a)]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2m_aM}[(\boldsymbol{\rho}_a\cdot\mathbf{P})\pi_a^2+\pi_a^2(\mathbf{P}\cdot\rho_a)]-\frac{1}{2m_aM}\boldsymbol{\sigma}_a\times\boldsymbol{\pi}_a\cdot\mathbf{P}\right\}-$$
$$-\frac{1}{Mc^2}\int_0^{\mathbf{P}} d\mathbf{P}\cdot\mathbf{w}^{(1)}+\frac{1}{c^2}\Pi^{(1)}, \tag{172}$$

где

$$\mathbf{w}^{(1)} = \mathbf{\Psi}^{(1)} - U^{(0)}\mathbf{Q}/c^2, \tag{173}$$

а $\Pi^{(1)}$ — произвольная скалярная функция одних только внутренних переменных. В рамках той же точности из (169) — (171) находим:

$$\begin{gathered}\mathbf{q}_a = \boldsymbol{\rho}_a + \mathbf{Q} - \frac{1}{2c^2}\Big\{\Big(\boldsymbol{\rho}_a \cdot \frac{\mathbf{P}}{M}\Big)\Big(\frac{\boldsymbol{\pi}_a}{m_a} + \frac{\mathbf{P}}{2M}\Big) + \\ + \Big(\frac{\boldsymbol{\pi}_a}{m_a} + \frac{\mathbf{P}}{2M}\Big)\Big(\frac{\mathbf{P}}{M} \cdot \boldsymbol{\rho}_a\Big) + \sum_b \Big[\frac{\pi_b^2\boldsymbol{\rho}_b + \boldsymbol{\rho}_b\pi_b^2}{2m_bM} - \\ - \frac{(\boldsymbol{\rho}_b \times \boldsymbol{\pi}_b)\times\mathbf{P}}{2M^2} - \frac{\boldsymbol{\sigma}_b \times \boldsymbol{\pi}_b}{2m_bM} - \frac{\boldsymbol{\sigma}_b \times \mathbf{P}}{2M^2}\Big] + \frac{\boldsymbol{\sigma}_a \times \mathbf{P}}{2m_aM}\Big\} - \\ - \frac{\mathbf{w}^{(1)}}{M} - \mathrm{i}\Big[\frac{1}{M}\int_0^{\mathbf{P}} d\mathbf{P}\cdot\mathbf{w}^{(1)} - \Pi^{(1)},\ \boldsymbol{\rho}_a\Big] + o(c^{-2});\end{gathered} \tag{174}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{p}_a = \boldsymbol{\pi}_a + \frac{m_a}{M}\mathbf{P} + \frac{1}{Mc^2}\Big(\frac{\pi_a^2}{2m_a} - \frac{m_a}{M}\sum_b \frac{\pi_b^2}{2m_b} + \frac{\boldsymbol{\pi}_a\cdot\mathbf{P}}{2M}\Big)\mathbf{P} - \\ - \mathrm{i}\Big[\frac{1}{M}\int_0^{\mathbf{P}} d\mathbf{P}\cdot\mathbf{w}^{(1)} - \Pi^{(1)},\ \boldsymbol{\pi}_a\Big] + o(c^{-2});\end{gathered} \tag{175}$$

$$\mathbf{s}_a = \boldsymbol{\sigma}_a - \frac{\boldsymbol{\sigma}_a \times (\boldsymbol{\pi}_a \times \mathbf{P})}{2m_aMc^2} - \mathrm{i}\Big[\frac{1}{M}\int_0^{\mathbf{P}} d\mathbf{P}\cdot\mathbf{w}^{(1)} - \Pi^{(1)},\ \boldsymbol{\sigma}_a\Big] + o(c^{-2}). \tag{176}$$

Соответствующие формулы, выражающие ($\mathbf{Q}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{S}$ $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{\sigma}$) через ($\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{s}$), легко получить обращением преобразований (174) — (176) с использованием соотношений (168).

Подстановка выражений (174) — (176) в генераторы (35), (38), (114) и (115) приводит к равенствам (162), (164) и (165), причем для $\mathbf{S}$, как и в нерелятивистском пределе получается выражение (166), а два первых члена разложения внутреннего гамильтониана $h = Mc^2 + h^{(0)} + h^{(1)} + o(c^{-2})$ вычисляются по формулам:

$$h^{(0)} = \sum_a \frac{\pi_a^2}{2m_a} + U^{(0)}, \tag{177}$$

$$\begin{gathered}h^{(1)} = -\sum_a \frac{\pi_a^4}{8m_a^3c^2} - \sum_a \frac{(\boldsymbol{\pi}_a\cdot\mathbf{P})}{m_aMc^2}\Big(\frac{\pi_a^2}{2m_a} + \frac{\boldsymbol{\pi}_a\cdot\mathbf{P}}{2M}\Big) + \\ + \frac{P^2U^{(0)}}{2M^2c^2} + U^{(1)} + \mathrm{i}\,[\Phi^{(1)},\ h^{(0)}],\end{gathered} \tag{178}$$

где

$$U^{(n)} = U^{(n)}\left(\mathbf{q}_a = \mathbf{p}_a + \mathbf{Q};\quad \mathbf{p}_a = \boldsymbol{\pi}_a + \frac{m_a}{M}\mathbf{P};\ \mathbf{s}_a = \boldsymbol{\sigma}_a\right). \qquad (179)$$

Хотя в (178) фигурирует внешняя переменная $\mathbf{P}$, выражение $h^{(1)}$ в действительности от $\mathbf{P}$ не зависит, в чем можно убедиться вычислением коммутатора в (178). Соотношения (172) — (179) можно интерпретировать также классически, если квантовую скобку Пуассона заменить классической и учесть коммутативность всех классических переменных.

Следует отметить наличие в полученных формулах произвольной функции $\Pi^{(1)}$ внутренних переменных. (Она может включать чисто кинематические члены и члены, зависящие от взаимодействия). Тем самым эти формулы определяют целый класс квазирелятивистских переменных центра масс; выбором функции $\Pi^{(1)}$ можно воспользоваться для упрощения расчетов в конкретных задачах.

Представляет интерес несколько модифицированный подход к рассматриваемой задаче, в котором в качестве нулевого приближения используются независимые нерелятивистские ПЦМ, а именно канонические переменные Якоби; соответствующие квазирелятивистские ПЦМ также составляют набор независимых канонических переменных. Для $N = 2$ они построены в рамках классической механики в [11], для $N = 3$ они были введены в [187] постулированием в системе отсчета центра инерции тех же соотношений между независимыми квазирелятивистскими ПЦМ и зависимыми переменными, рассмотренными выше, какие имеют место в нерелятивистской механике для переменных Якоби. Последовательное построение квазирелятивистских ПЦМ типа Якоби для произвольного N будет рассмотрено в отдельной работе (см. также [188]). В строго релятивистской теории введение коллективных ПЦМ является весьма сложной проблемой.

Сделаем еще два замечания о квазирелятивистских ПЦМ. Первое касается формул преобразований (174) — (176), а также обратных преобразований в системе центра инерции. Если абстрагироваться от наличия в них произвольной функции $\Pi^{(1)}$, которую можно положить равной нулю, то при $\mathbf{P} = 0$ соотношения (174) — (176) совпадают с нерелятивистскими преобразованиями (167) за исключением члена $-\mathbf{w}^{(1)}/M$ в равенстве (174). Поскольку этот член исчезает в $\mathbf{q}_{ab} = \mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b$, то преобразование трансляционно-инвариантного гамильтониана замкнутой системы частиц от ПЧ к ПЦМ в системе центра инерции $\mathbf{P} = 0$ осуществляется фактически по нерелятивистским формулам. Благодаря этому обстоятельству широко распространенное в литературе использование в квазирелятивистских гамильтонианах нерелятивистских ПЦМ в целях выделения внутреннего движения не приводит к ошибкам, если оно реализуется только в системе центра инерции. Правомерность такого подхода теряется при описании незамкнутых систем, когда $\mathbf{P} \neq \mathrm{const}$, так что в данном случае возникает необходимость использования полных преобразований (174) — (176). Это приводит к специфическим релятивистским эффектам, которые до недавнего времени не учитывались (см., например, [189], где с помощью преобразований (174) — (176) вычисляются релятивистские поправки к амплитудам электрических и магнитных дипольных однофотонных переходов в системах частиц с электромагнитным взаимодействием).

Второе замечание связано с величиной $\mathbf{w}^{(1)}$, которая фигурирует в обсуждаемых формулах и выражается согласно (173) функциями $\Psi^{(1)}$ и $U^{(0)}$, описывающими взаимодействия частиц. Если $\mathbf{w}^{(1)} \neq 0$, то формулы перехода от ПЧ к ПЦМ содержат члены, зависящие от взаимодействия, т. е. они в отличие от нерелятивистских преобразований не являются чисто кинематическими. В частности, для системы двух частиц условие $\mathbf{w}^{(1)} = 0$ эквивалентно в постньютоновском приближении равенству

$$\varphi_{ab} = \frac{m_a - m_b}{2M_{ab}} U^{(0)},$$

как это видно из сравнения (173) и (103). Оно заведомо не выполняется для всех взаимодействий, допускающих полевую интерпретацию (в частности, электромагнитных, см. [118]), поскольку в этом случае $\varphi_{ab} = 0$ (см. разд. 4).

Если рассматривать многочастичные системы ($N \geqslant 3$), то равенство $\mathbf{w}^{(1)} = 0$ соответствует в постньютоновском приближении функции $\Psi^{(1)}$ вида (132) с коэффициентами $\alpha_a = m_a/M$. Однако, как мы знаем, указанный вид функции $\Psi^{(1)}$ противоречит условию разделимости взаимодействий. Таким образом, преобразования от ПЧ к ПЦМ в квазирелятивистском приближении, а тем более в высших приближениях и в точной теории, могут иметь кинематический характер лишь в весьма специальных случаях. Другими словами, решение квазирелятивистской задачи отделения внутреннего и внешнего движения является специфическим для конкретных систем частиц: соответствующие преобразования к ПЦМ содержат функции, описывающие межчастичные взаимодействия.

С формальной точки зрения указанные преобразования можно всегда привести к виду, в котором взаимодействие в системе не отражено. Это связано с возможностью использования канонических (в квантовой механике — унитарных) преобразований, описывающих замену исходных переменных $\mathbf{q}_a$, $\mathbf{p}_a$ (в постньютоновском приближении мы принимали $\mathbf{q}_a \Leftarrow \mathbf{x}_a$) новыми переменными $\tilde{\mathbf{q}}_a$, $\tilde{\mathbf{p}}_a$, в которых $\tilde{\mathbf{w}}^{(1)} = 0$ [9]. Однако, как отмечалось в [9], подобного рода преобразования сопровождаются потерей ясного физического смысла применяемых переменных, и поэтому их использование требует определенной осторожности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итог, можно констатировать, что имеющиеся в литературе различные трактовки слабо релятивистских систем частиц (классические и квантовые) объединяются в постньютоновском приближении в рамках единой квазирелятивистской (классической или квантовой) механики системы прямо взаимодействующих частиц, основанной на ясных физических представлениях и четко сформулированных исходных положениях. Математический аппарат этой теории — более сложный по сравнению с тем, который используется в нерелятивистской механике и требует дальнейшей разработки. В частности, квазирелятивистское уравнение типа Шредингера является уравнением четвертого порядка (гамильтониан содержит четвертые степени импульсов), что приводит к определенным трудностям.* На наш взгляд, представляет интерес более детальное изучение класса канонических (унитарных) преобразований, не нарушающих ковариантность канонических координат в постньютоновском приближении, но вместе с тем меняющих вид потенциалов; эта проблема тесно связана с физической интерпретацией квазирелятивистских гамильтонианов, т. е. с задачей сопоставления конкретным системам определенных выражений для потенциалов. Нет в настоящее время ясности в вопросе о соотношении между классическим гамильтоновым подходом и квантовым, т. е. требует дальнейшего изучения проблема квантования (неоднозначность симметризации). В этой связи интересным представляется последовательное исключение полевых переменных в квантовой теории поля с помощью процедуры, подобной методу, использованному в [165] при рассмотрении частной модели. Следует ожидать, что таким образом можно получить в квантовой теории результаты, касающиеся теории прямых взаимодействий, аналогичные тем, которые были установлены в классическом подходе на основе интегралов действия типа Фоккера.

С. Н. Соколов предложил другой путь решения указанной проблемы, состоящий в нахождении классического предела квантово-механических генераторов, сохраняющего структуру группы Пуанкарре [191].

Отдельной проблемой, заслуживающей внимания, является использование изложенных в настоящей работе результатов для изучения релятивистских эффектов в незамкнутых системах.

* Для некоторых задач квантовой теории рассеяния они рассмотрены в [138, 190].

Хотя, строго говоря, релятивистская теория прямых взаимодействий применима только к замкнутым системам, использование приближенных подходов можно считать оправданным и для объектов с внутренней структурой, подверженных внешним взаимодействиям. Если внешнее взаимодействие связано с наличием массивной частицы, то этот случай укладывается в общую схему для замкнутых систем с учетом того, что масса одной из частиц системы стремится к бесконечности. Более тщательного анализа требует взаимодействие с полем излучения.

Кроме рассмотренного в обзоре приближения по c^{-2} представляет интерес исследование других приближений в релятивистской теории прямых взаимодействий, а именно по константе связи [37, 39, 76, 80, 147] и по отношению m_a/m_b, когда $m_a \ll m_b$ [38]. Изучение этих подходов в настоящее время находится в начальной стадии.

Напомним, что все наше изложение основано на мгновенной форме динамики. Определенные успехи достигнуты также в развитии других форм релятивистской динамики — точечной [8, 62, 73, 74, 191, 192] и фронтальной [61, 191, 193—195, 16] (в [193—195, 16] последняя применяется для расчетов конкретных систем — кварковых моделей адронов, рассеяния нуклонов на легких ядрах). Поэтому представляется важным исследование квазирелятивистского приближения в точечной и фронтальной формах динамики и установление соответствия между квазирелятивистскими величинами в различных формах динамики. Можно ожидать, что таким путем удастся разработать рекомендации относительно целесообразности использования той или иной формы динамики для изучения релятивистских эффектов в различных физических объектах.

Что касается конкретных приложений квазирелятивистской механики системы взаимодействующих частиц, то они были указаны во введении и мы не будем их повторять (см. также [196, 197]). Отметим лишь дополнительно, что в последнее время началось систематическое изучение релятивистских эффектов в атомах и молекулах, которые часто оказываются весьма существенными для объяснения химических свойств многих элементов, особенно тяжелых (см. [198, где имеются дальнейшие ссылки). Представляет интерес развитие квазирелятивистской статистической физики [199], которая рассматривалась до сих пор в основном применительно к системам частиц с электромагнитным взаимодействием [200—204]. При этом для построения характеристик системы (статистической суммы, функций распределения, кинетических уравнений) можно пользоваться не только обычным методом, основанным на знании гамильтониана системы, но и фейнмановским формализмом интегрирования по путям, позволяющим исходить непосредственно из лагранжева описания [202]. Целесообразность такого подхода обусловлена тем, что при $N \to \infty$ построение гамильтониана системы по заданному лагранжиану связано со значительными трудностями [200, 201]. (Этот момент еще раз подчеркивает важную роль лагранжева формализма в квазирелятивистской механике.) И наконец, в терминах квазирелятивистской теории прямых взаимодействий можно рассматривать в постньютоновском приближении системы гравитирующих тел; как показано в [205] этим подходом охватываются все «жизнеспособные» теории гравитационных взаимодействий точечных частиц, рассматриваемые в рамках так называемого параметризованного постньютоновского формализма.

Автор признателен В. Б. Беляеву, по инициативе которого написана настоящая статья, Л. И. Кондратюку и С. Н. Соколову за полезные беседы и замечания. Он хотел бы выразить также искреннюю благодарность Ю. Б. Ключковскому и В. И. Третяку за многочисленные обсуждения и большую помощь в работе над обзором.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Logunor A. A., Tavkhelidze A. N.**— Nuovo cimento, 1963, v. 29, p. 380.
2. **Кадышевский В. Г., Тавхелидзе А. Н.** В кн.: Проблемы теоретической физики. М., Наука, 1969, с. 261; **Ризов В. А., Тодоров И. Т.**— ЭЧАЯ, 1975, т. 6, вып. 3, с. 669; **Скачков Н. Б., Соловцов И. Л.**— ЭЧАЯ, 1978, т. 9, вып. I, с. 5.
3. **Соколов С. Н.**— В кн.: Труды Международного симпозиума по проблеме нескольких тел в ядерной физике. Т. I. Дубна, 1980, с. 44.
4. **Бете Г., Солпитер Э.** Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. Пер. с англ. М., Физматгиз, 1960.
5. **Широков Ю. М.**— ЖЭТФ, 1959, т. 36, с. 474; **Живописцев Ф. А., Переломов А. М., Широков Ю. М.**— ЖЭТФ, 1959, т. 36, с. 478; **Зеленская Н. С., Широков Ю. М.**— ЖЭТФ, 1961, т. 41, с. 1934.
6. **Foldy L. L., Krajcik R. A.**— Phys. Rev. D., 1975, v. 12, p. 1700.
7. **Coester F., Pieper S. C., Serduke F. J. D.**— Phys. Rev. C, 1975, v. 11, p. 1.
8. **Соколов С. Н.**— Теор. мат. физ., 1978, т. 36, с. 193.
9. **Krajcik R. A., Foldy L. L.**— Phys. Rev. D, 1974, v. 10, p. 1777.
10. **Pauri M., Prosperi G. M.**— J. Math. Phys., 1976, v. 17 p. 1468.
11. **Гайда Р. П., Крохмальский Т. Е.**— Изв. вузов. Физика, 1980, № 10, с. 49.
12. **Gaida R. P., Kluchkovsky J. B., Tretiak V. I.**— In: 9th Int. Conf. on General Relativity and Gravitation. Abstracts of contributed papers for the discussion groups. V. 1. Jena, 1980, p. 164.

13. **Breit G.**— Phys. Rev., 1937, v. 51, p. 248; 1938, v. 53, p. 153.
14. **Friar J. L.**— Phys. Rev. C, 1975, v. 12, p. 695.
15. **Coester F., Ostebee A.**— Phys. Rev. C, 1975, v. 11, p. 1836.
16. **Kondratyuk L. A., Vogelzang J., Fanchenko M. S.**— Phys. Lett. B, 1981, v. 98, p. 405; **Кондратюк Л. А., Терентьев М. В.**— Ядерная физика 1980, т. 31, с. 1087; **Кондратюк Л. А., Лев Ф. М., Шевченко Л. В.**— Ядерная физика, 1981, т. 33, с. 1208.
17. **Сидоров А. В., Скачков Н. Б.**— Теор. мат. физ., 1981, т. 46, с. 213.
18. **Bakalov D.**— Phys. Lett. B, 1980, v. 93, p. 265; **Бакалов Д. Д.**— ЖЭТФ, 1980, т. 79, с. 1149.
19. **Betz M., Coester F.**— Phys. Rev. C, 1980, v. 21, p. 2505.
20. **Schwarzschild K.**— Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II, 1903, Bd 128, S. 132.
21. **Tetrode H.**— Z. Phys., 1922, Bd 10, S. 317; **Fokker A. D.**— Z. Phys., 1929, Bd 28, S. 386; Physica, 1929, v. 9, p. 33; 1933, v. 12, p. 145.
22. **Hoyle F., Narlikar J. V.** Action at a distance in physics and cosmology. San Francisco, 1974.
23. **Wheeler J. A., Feynman R. P.**— Rev. Mod. Phys., 1945, v. 17, p. 157; 1949, v. 21, p. 425.
24. **Dirac P. A. M.**— Rev. Mod. Phys., 1949, v. 21, p. 392.
25. **Havas P.** In: Proc. of 1964 Intern. Congress on Logic, Methodology and Philosophy of Science. Amsterdam, 1965, p. 347; In: Causality and Physical Theories, Wane State Univ., 1973, p. 23.
26. **Currie D. G.**— J. Math. Phys., 1963, v. 4, p. 1470.
27. **Havas P.**— Phys. Rev., 1952, v. 87, p. 309.
28. **Zhdanov V. I., Pyragas K. A.** Acta Phys. Pol. B, 1972, v. 3, p. 585; p. 599.
29. **Havas P.** In: Problems in the foundations of physics, Ed. by M. Bunge. Berlin e.a., 1971, p. 31.
30. **Cordero P., Chirardi G.-C.**— J. Math. Phys., 1973, v. 14, p. 815.
31. **Ramond P.**— Phys. Rev. D, 1973, v. 7, p. 449.
32. **Marnelius R.**— Phys. Rev. D, 1974, v. 10, p. 2535.
33. **Van Dam H., Wigner E. P.**— Phys. Rev. B, 1965, v. 138, p. 1576; 1966, v. 142, p. 838.
34. **Havas P., Plebański J.**— Bull. Amer. Phys. Soc., 1960, v. 5, p. 433.
35. **Droz-Vincent P.**— Phys. Scr., 1970, v. 2, p. 129; Ann. Inst. H. Poincaré A, 1974, v. 20, p. 269.
36. **Bel. L.**— Ann. Inst. H. Poincaré, A, 1971, v. 14, p. 189.
37. **Bel. L., Salas A., Sanchez J. M.**— Phys. Rev. D, 1973, v. 7, p. 1099.
38. **Bel L., Martin J.**— Phys. Rev. D, 1973, v. 8, p. 4347; 1974, v. 9, p. 2760.
39. **Bel L., Fustero X.**— Ann. Inst. H. Poincaré A, 1976, v. 25, p. 411.
40. **Hirondel D.**— J. Math. Phys., 1979, v. 20, p. 104.

41. **Poincaré H.**— Rend. Circ. Mat. Palermo, 1906, v. 2, p. 129.

42. **Afanasiev G. N., Asanov R. A.**— Commun. JINR, E2-12390, 1979; **Асанов Р. А., Афанасьев Г. Н.** Препринт ОИЯИ, Р2-80-322, 1980.

43. **Takabayasi T., Kojima S.**— Progr. Theor. Phys., 1977, v. 57, p. 2127; **Fujigaki M., Kojima S.**— Ibid., 1978, 59, 1330; **Kojima S.**— Ibid., 1979, v. 62, p. 1403.

44. **Barducci A., Lusanna L., Sorace E.**— Nuovo cimento B, 1978, v. 46, p. 287.

45. **Dominici D., Gomis J., Longhi G.**— Nuovo cimento B, 1978, v. 48, p. 152; Nuovo cimento A, 1978, v. 48, p. 257.

46. **Takabayasi T.**— Progr. Theor. Phys. Suppl., 1979, No. 67, p. 1.

47. **Staruszkiewicz A.**— Ann. Inst. H. Poincaré A, 1971, v. 14, p. 69.

48. **Fronsdal C.** Phys. Rev. D, 1971, v. 4, p. 1689.

49. **Todorov I. T.**— Preprint JINR, E2-10125, 1976.

50. **Molotkov V. V., Todorov I. T.**— Commun. JINR, E2-12270, 1979; — Commun. Math. Phys., 1981, v. 79, p. 111

51. **Komar A.**— Phys. Rev. D, 1978, v. 18, p. 1881; p. 1887; p. 3617.

52. **Rohrlich F.**— Ann. Phys. (U.S.), 1979, v. 117, p. 292;— Physica A, 1979, v. 96, p. 290; — Phys. Rev. D, 1981, v. 23, p. 1305; **King M. J., Rohrlich F.** — Ann. Phys. (U.S.), 1980, v. 130, p. 350.

53. **Kalb M., Van Alstein P.** Yale Univ. Preprints, COO-3075-146, 156, 1976.

54. **Клепиков Н. П., Шатний А. Н.**— Теор. мат. физ., 1981, т. 46, с. 50.

55. **Дирак П.** Лекции по квантовой механике. Пер. с англ. М., Мир, 1968.

56. **Sudarshan E. C. G., Mukunda N.** Classical dynamics: A modern perspective, New York e.a., 1974.

57. **Horwitz L. P., Piron C.**— Helv. Phys. Acta, 1978, v. 51, p. 146.

58. **Черников Н. А., Шавохина Н. С.**— Теор. мат. физ., 1980, т. 42, с. 59; т. 43, с. 356.

59. **Fushchich V. I.**— Lett. Nuovo cimento, 1974, v. 10, p. 163; 1975, v. 14, p. 435.

60. **Aaberge T.**— Helv. Phys. Acta, 1977, v. 50, p. 917; 1978, v. 51, p. 240.

61. **Соколов С. Н.** Препринт ИФВЭ, 76-50, 1976;— Докл. АН СССР, 1975, т. 221, с. 809.

62. **Sokolov S. N.** Preprint IHEP, 78-125, 1978.

63. **Currie D. G., Jordan T. F., Sudarshan E. C. G.**— Rev. Mod. Phys., 1963, v. 35, p. 350.

64. **Cannon J. T., Jordan T. F.**— J. Math. Phys., 1964, v. 5, p. 299.

65. **Leutwyler H.** Nuovo cimento, 1965, v. 37, p. 556.

66. **Jordan T. F.**— Phys. Rev., 1968, v. 166, p. 1308.

67. **Bakamjian B., Thomas L. H.**— Phys. Rev., 1953, v. 92, p. 1300.

68. **Foldy L. L.**— Phys. Rev., 1961, v. 122, p. 275.
69. **Fong R., Sucher J.**— J. Math. Phys., 1964, v. 5, p. 456.
70. **Coester F.**— Helv. Phys. Acta, 1965, v. 38, p. 7.
71. **Соколов С. Н.**— Теор. мат. физ., 1975, т. 23, с. 355.
72. **Соколов С. Н.**— Теор. мат. физ., 1975, т. 24, с. 236.
73. **Соколов С. Н.**— Докл. АН СССР, 1977, т. 233, с. 575.
74. **Sokolov S. N.** Preprint IHEP, 75-94, 1975.
75. **Соколов С. Н., Шатний А. Н.**— Теор. мат. физ., 1978, т. 37, с. 291.
76. **Kerner E. H.**— J. Math. Phys., 1965, v. 6, p. 1218.
77. **Hill R. N., Kerner E. H.**— Phys. Rev. Lett., 1966, v. 17, p. 1156.
78. **Hill R. N.**— J. Math. Phys., 1967, v. 8, p. 1756.
79. **Gaida R. P.** Preprint ITP, 74-145E, 1974.
80. **Kennedy F. J.**— J. Math. Phys., 1975, 6, 1844.
81. **Остроградский М. В.**— В кн.: Полное собрание трудов, Т. 2, Киев, Наукова Думка, 1961, с. 139.
82. **Гайда Р. П., Ключковский Ю. Б., Третяк В. И.**— Теор. мат. физ., 1980, т. 44, с. 194.
83. **Эйзенхарт Л. П.** Непрерывные группы преобразований. М.,Гостехтеориздат, 1947; **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., Наука, 1978; **Овсянников Л. В., Ибрагимов Н. Х.**— В кн.: Итоги науки и техники. Общая механика. Т. 2, М., ВИНИТИ, 1975, с. 5.
84. **Стритер Р. Ф., Вайтман А. С.** РСТ, спин и статистика и все такое М., Наука, 1966.
85. **Хухунашвили З. В.**— Изв. вузов. Физика, 1971, № 3, с. 95.
86. **Фок В. А.** Теория пространства, времени и тяготения. М., Физматгиз, 1961.
87. **Gaida R. P.**— Acta Phys. Pol. B, 1974, v. 5, p. 613.
88. **Ключковский Ю. Б., Гайда Р. П.**— Укр. физ. ж., 1977, т. 22, с. 617.
89. **Kennedy F. J.**— Amer. J. Phys., 1972, v. 40, p. 63.
90. **Фущич В. И.**— Докл. АН СССР, 1979, т. 246, с. 846; В кн.: Теоретико-групповые методы в математической физике. Киев, Институт математики АН УССР, 1978, с. 5.
91. **Ибрагимов Н. Х., Андерсон Р. Л.**— Докл. АН СССР, 1976, т. 227, с. 539;
Ibragimov N. H., Anderson R. L.— J. Math. Anal. Appl., 1977, v. 59, p. 145; **Ибрагимов Н. Х.**— Мат. сборник, 1979, т. 109, с. 229.
92. **Клейн Ф.** Высшая геометрия. М.— Л., ГОНТИ, 1939.
93. **Владимиров С. А.** Группы симметрии дифференциальных уравнений и релятивистские поля М., Атомиздат, 1979.
94. **Медведев Б. В.** Начала теоретической физики. М., Наука, 1977.

95. **Bakamjian B.**— Phys. Rev., 1961, v. 121, p. 1849.
96. **Pauri M., Prosperi G. M.**— J. Math. Phys., 1966, v. 7, p. 366; 1967, v. 8, p. 2256; 1968, v. 9, p. 1146.
97. **Pauri M., Prosperi G. M.**— J. Math. Phys., 1975, v. 15, p. 1503.
98. **Anderson J. L.**— Amer. J. Phys., 1972, v. 40, p. 541.
99. **Wigner E. P.**— Ann. Math., 1939, v. 40, p. 149; — Z. Phys., 1947, Bd. 124, S. 665;
Bargmann V., Wigner E. P.— Proc. Nat. Acad. Sci. U.S., 1948, v. 34, p. 211.
100. **Широков Ю. М.**— ЭЧАЯ, 1972, т. 3, вып. 3, с. 606; 1973, т. 4, вып. 1, с. 42.
101. **Inönü E. I. Wigner E. P.**— Proc. Nat. Acad. Sci. U. S., 1953, v. 39, p. 510.
102. **Bargmann V.**— Ann. Math., 1954, v. 59, p. 1.
103. **Вигнер Е.** Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. литературы, 1961.
104. **Кемпфер Ф.** Основные положения квантовой механики. Пер. с англ. М., Мир, 1965.
105. **Currie D. G.**— Phys. Rev., 1966, v. 142, p. 817.
106. **Hill R. N.**— J. Math. Phys., 1967, v. 8, p. 201.
107. **Bel L.**— Ann. Inst. H. Poincaré A, 1970, v. 12, p. 307.
108. **Currie D. G., Jordan T. F.** In: Lectures in Theoretical Physics, v.X-A. Ed. by W. E. Brittin, A. O. Barut. N. Y. 1968, p. 91.
109. **Salas A., Sanchez-Ron J. M.**— Nuovo cimento B, 1974, v. 20, p. 209.
110. **Lapiedra R., Mas L.**— Phys. Rev. D, 1976, v. 13, p. 2805.
111. **Martin J., Sanz J. L.**— J. Math. Phys., 1978, v. 19, p. 780.
112. **Martin J., Sanz J. L.**— J. Math. Phys., 1978, v. 19, p. 1887; 1979, v. 20, p. 25.
113. **Hill R. N.**— J. Math. Phys., 1970, v. 11, p. 1918.
114. **Noether E.**— Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys, Kl., 1918, S. 235.
115. **Havas P.**— Acta Phys. Austr., 1973, v. 38, p. 145.
116. **Шмутцер Э.** Симметрии и законы сохранения в физике. Пер. с англ. М., Мир, 1974.
117. **Constantelos G. C.**— Nuovo cimento B, 1974, v. 21, p. 279.
118. **Sebastian K. J., Yun D.**— Phys. Rev. D, 1979, v. 19, p. 2509.
119. **Pryce M. H. L.**— Proc. Roy. Soc. (London), 1948, v. 195, p. 62.
120. **Thomas L. H.**- Phys. Rev., 1952, v. 85, p. 868.
121. **Chelkowski S., Nietendel J., Suchanek R.**— Acta Phys. Pol. B, 1980, v. 11, p. 809.
122. **Kerner E. H.**— J. Math. Phys., 1968, v. 9, p. 222.

123. **Peres A.**- Symp. Math., 1973, v. 12, p. 61.
124. **Chandrasekhar S., Contopoulos G.**— Proc. Roy. Soc. (London), 1967, v. 298, p. 123.
125. **Гайда Р. П.** Препринт ИТФ-72-91Р, 1972.
126. **Гайда Р. П.**— Укр. физ. ж., 1974, т. 19, с. 1517.
127. **Гайда Р. П.** Препринт ИТФ-73-159Р, 1973.
128. **Гайда Р. П.**— Укр. физ. ж., 1974, т. 19, с. 1526.
129. **Гайда Р. П.** Препринт ИТФ-72-100Р, 1972.
130. **Гайда Р. П., Ключковский Ю. Б.**— Укр. физ. ж., 1977, т. 22, с. 609.
131. **Бете Г.** Теория ядерной материи. М., Мир, 1974.
132. **Бор О., Моттельсон Б.** Структура атомного ядра. Т. I. Пер. с англ. М., Мир, 1976.
133. **Бабиков В. В.** Метод фазовых функций в квантовой механике. М., Наука, 1976.
134. **Woodcock H. W., Havas P.**— Phys. Rev. D, 1972, v. 6, p. 3422.
135. **Гайда Р. П., Ключковский Ю. Б.** Препринт ИТФ-73-154Р, 1973.
136. **Гайда Р. П., Ключковский Ю. Б., Третяк В. И.**— Теор. мат. физ., 1980, т. 45, с. 180.
137. **Парс А.** Аналитическая механика. Пер. с англ. М., Наука, 1971.
138. **Гайда Р. П., Калыняк Б. Н.** Препринт ИТФ-77-64Р, 1977.
139. **Гайда Р. П.**— Вісник Львівського ун-ту, сер. фіз., 1975, вип. 10, с. 3.
140. **Stachel J., Havas P.**— Phys. Rev. D, 1976, v. 13, p. 1598; **Coester F., Havas P.**— Phys. Rev. D, 1976, v. 14, p. 2556.
141. **Gracia-Bondia J. M.**— Phys. Lett. A, 1980, v. 74, p. 262.
142. **Bel L., Martin J.**— Ann. Inst. H. Poincaré A, 1980, v. 33, p. 409; 1981, v. 34, p. 231.
143. **Дирак П.**— Принципы квантовой механики. Пер. с англ. М., Физматгиз, 1960.
144. **Соколов С. Н.** Препринты ИФВЭ, 79-71, 79-139, 1979.
145. **Darwin C. G.**— Phil. Mag., 1920, v. 39, p. 537.
146. **Голубенков В. Н., Смородинский Я. А.**— ЖЭТФ, т. 31, с. 330.
147. **Kerner E. H.**— J. Math. Phys., 1962, v. 3, p. 35.
148. **Трубников Б. А., Косачев В. В.**— ЖЭТФ, 1974, т. 66, с. 1311.
149. **Гайда Р. П., Гайдак В. П.**— Изв. вузов. Физика, 1973, № 11, с. 73.
150. **Nigam B. P.**— Phys. Rev., 1966, v. 145, p. 1026;— Progr. Theor. Phys., 1967, v. 37, p. 786
151. **Гордеев А. Н.**— Теор. мат. физ., 1978, т. 36, р. 53: **Barker B. M., O'Connell R. F.**— Ann. Phys., 1980, v. 129, p. 358.
152. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теория поля. М., Наука, 1973.
153. **Breit G.**— Phys Rev., 1929, v. 34, p. 553; 1932, v. 39, p. 616.

154. **Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б.** Квантовая электродинамика. М., Наука, 1969; **Берестецкий В. Б., Лившиц Е. М., Питаевский Л. П.** Квантовая электродинамика. М., Наука, 1980.
155. **Bagge E.**— Z. Naturforsch., 1946, Bd 1, S. 361.
156. **Bopp F.**— Ann. Physik, 1940, Bd 38, S. 345.
157. **Einstein A., Infeld L., Hoffmann B.**— Ann. Math., 1938, v. 39, p. 65; 1940, v. 41, p. 455.
158. **Фихтенгольц И. Г.**— ЖЭТФ, 1950, т. 20, с. 233.
159. **Инфельд Л., Плебаньский Е.** Движение и релятивизм. Пер с англ. М., Изд-во иностр. л-ры, 1962.
160. **Брумберг В. А.** Релятивистская небесная механика. М., Наука, 1972.
161. **Рябушко А. П.** Движение тел в общей теории относительности. Минск, Вышэйшая школа, 1979.
162. **Ohta T., Okamura H., Kimura T., Hiida K.**— Progr. Theor. Phys., 1973, v. 50, p. 492; 1974, v. 51, p. 1220; p. 1598.
163. **Bazański S.**— Acta Phys. Pol., 1957, v. 16, p. 423.
164. **Erkerlenz K.**— Phys. Reports, 1974, v. 13, p. 191.
165. **Glöckle W., Müller L.**— Phys. Rev. C, 1981, v. 23, p. 1183.
166. **Ключковский Ю. Б.** Автореф. дисс. на соискание ученой степени. канд. физ.-мат. наук. Киев. КГУ, 1978.
167. **Ключковский Ю. Б.**— Укр. физ. ж., 1978, т. 23, с. 952.
168. **Gaida R. P., Tretyak V. I.**— Acta Phys. Pol. B, 1980, v. 11, p. 509; **Tretyak V. I., Gaida R. P.**- Acta Phys. Pol. B, 1980, v. 11, p. 523.
169. **Третяк В. И.**— В сб.: Материалы VI конференции молодых ученых ИППММ АН УССР. Секция мех. деформ. тв. тела. Львов, 1979, с. 81. Рукопись деп. в ВИНИТИ 13.11.1979 г. № 3851—79ДЕП/РЖФиз, 1980, 2Б92Деп/; **Ключковский Ю. Б., Третяк В. И.** Там же, с. 77/РЖФиз, 1980, 2Б93Деп/.
170. **Anderson J. L., Schiminovich S.**— J. Math. Phys., 1967, v. 8, p. 255.
171. **Narlikar J. V.**— Proc. Cambridge Phil. Soc., 1968, v. 64, p. 1071.
172. **Dirac P. A. M.** Proc. Roy. Soc. (London), 1938, v. 167, p. 148.
173. **Caldirola P.** Riv. Nuovo cimento, 1979, v. 2, p. 1.
174. **Hogarth J. E.** Proc. Roy. Soc. (London), 1962, v. 267, p. 365.
175. **Дэвис П.** Пространство и время в современной картине Вселенной. Пер. с англ. М., Мир, 1979.
176. **Havas P., Goldberg J. N.**— Phys. Rev., 1962, v. 128, p. 389; **Havas P.**— In: Isolated Gravitating Systems in General Relativity. Amsterdam, 1979, p. 74.
177. **Пантюшин А. А.**— В кн.: Гравитация и теория относительности. Вып. 6, Казань, Изд-во Казанского ун-та, 1969, с. 30.
178. **Hoyle F., Narlikar J. V.**— Nuovo cimento A, 1972, v. 7, p. 262.

179. **Fleming G. N.**— Phys. Rev., 1965, v. 137, p. 188.
180. **Newton T. D., Wigner E. P.**— Rev. Mod. Phys., 1949, v. 21, p. 400.
181. **Мёллер К.** Теория относительности. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1975.
182. **Давыдов А. С.** Квантовая механика. М., Наука, 1973.
183. **Клепиков Н. П., Шатний А. Н.**— Ядерная физика, 1980, т. 31, с.841.
184. **Sazdjian H.**- Nucl. Phys. B, 1979, v. 161, p. 469.
185. **Mutze U.**— J. Phys. A, 1978, v. 11, p. 665.
186. **Close F. E., Osborn H.**- Phys. Rev. D, 1970, v. 2, p. 2127.
187. **Калыняк Б. Н.** Препринт ИТФ-78-60Р, Киев, 1978.
188. **Гайда Р. П.**— В кн.: Тезисы докладов 5-й Советской гравитационной конференции. М., 1981, с. 88.
119. **Sebastian K. J.**— Phys. Lett. A, 1980, v. 80, p. 109.
190. **Калыняк Б. Н.**— Укр. физ., ж., 1978, т. 23, с. 257.
191. **Соколов С. Н.** Теор. мат. физ., 1977, т. 32, с. 354; Препринт ИФВЭ 81—87, 1981.
192. Ruijsenaars S. N. M. Ann. Phys. (U.S.), 1980, 126, 399.
193. Терентьев М. В. Ядерная физика, 1976, 24, 207; в кн.:Элементарные частицы, вып. I(IV школа физики ИТЭФ), М., Атомиздат, 1976, с. 79; Берестецкий В. Б., Терентьев М. В. Ядерная физика, 1976, т. 24, с. 1044.
194. Bakker B. L. G., Kondratyuk L. A., Terentyev M. V. Preprint ITEP — 27, 1979; Nucl. Phys., 1979, B 158, 497.
195. Leytwyler H., Stern J. Ann. Phys. (N. Y.), 1978, 112, 94.
196. Friar J. L. Nucl. Phys., 1981, A353, 233.
197. Копалейшвили Т. И. ЭЧАЯ, 1979, 10, вып. 2, 429; Харченко В. Ф. В кн.: Труды международного симпозиума по проблеме нескольких тел в ядерной физике, т. I, Дубна, 1980, с. 9.
198. Pitzer K. S. Accounts Chem. Res., 1979, 12, 271. Pyykkö P., Desclaux J.-P. Accounts Chem. Res., 1979, v. 12, p. 276; Pyykkö P. J. Chem. Soc. Faraday II, 1979, v. 75, p. 1256.
199. Havas P. In: Statistical Mechanics of Equilibrium and Nonequilibrium, ed. by J. Meixner, Amsterdam, 1965, p. 1.
200. Трубников Б. А., Косачев В. В. ЖЭТФ, 1961, 54, 936.
201. Блажиевский Л. Ф. Укр. физ. ж., 1975, т. 20, с. 1273; 1975, т. 20, с. 1282.
202. Блажиевский Л. Ф. Препринт ИТФ-78-149Р, 1978; Укр. физ. ж., 1979, 24, 1737.
203. Krizan J. E. Phys. Rev., 1968, v. 171, p. 1201; Phys. Rev. D, 1980, v. 22, p. 3017; Dengler T. E., Krizan J. E. Phys. Rev. A, 1970, v. 2, p. 2388.
204. Павлоцкий И. П. Докл. АН СССР, 1973, 213, 812; 1975, 224, 563; Препринт ИПМ АН СССР, № 4, 1976.

205. Ключковский Ю. Б. В кн.: Тезисы докладов Всесоюзной конференции «Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации». М., 1981, с. 136.