«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1982, том 13, вып. 4

УДК 530.12:531.51

НОВАЯ ТЕОРИЯ ПРОСТРАНСТВА—ВРЕМЕНИ И ТЯГОТЕНИЯ

В. И. Денисов,
Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ, Москва

А. А. Логунов
Институт физики высоких энергий, Серпухов

Показано, что общая теория относительности (ОТО) не является удовлетворительной физической теорией, поскольку в ней отсутствуют законы сохранения вещества и гравитационного поля вместе взятые и она не удовлетворяет принципу соответствия с теорией Ньютона. В настоящей работе построена новая теория гравитации, которая обладает законами сохранения, позволяет описать всю совокупность имеющихся гравитационных экспериментов, удовлетворяет принципу соответствия и предсказывает ряд фундаментальных следствий.

Show that the General Theory of Relativity is not a satisfactory physical theory as it doesn't comprise the laws of conservation of matter and gravitational field taken together. It doesn't satisfy the principle of correspondence to the theory of Newton. In the paper under review the authors built a new theory of gravitation, which has the laws of conservation and makes it possible to describe all the variety of the gravitational experiments. It satisfies the principle of correspondence and predicts a number of fundamental consequences.

ВВЕДЕНИЕ

Общая теория относительности (ОТО) Эйнштейна представляет собой одну из основных физических теорий современности. В ней нашла воплощение глубочайшая идея о связи материи и пространства. Эта теория позволила объяснить и предсказать ряд гравитационных эффектов, что явилось ее подлинным триумфом.

Однако ряд проблем ОТО не нашел своего решения до настоящего времени. Одна из наиболее фундаментальных среди этих проблем — проблема энергии — импульса гравитационного поля в ОТО. Всестороннее ее изучение [1—9] привело нас к выводу, что ее решение в принципе невозможно, поскольку гравитационное поле в теории Эйнштейна не является полем в духе Фарадея — Максвелла, т. е. не характеризуется плотностью тензора энергии — импульса. В этом можно убедиться, сравнивая физические характеристики гравитационного поля и других полей материи.

Во всех физических теориях, описывающих различные формы материи, одна из важнейших характеристик поля — плотность тензора энергии — импульса, которую обычно получают вариацией плотности лагранжиана поля L по компонентам метрического тензора пространства — времени g_{ni} *:

$$T^{ni} = -2\delta L/\delta g_{ni} = \sqrt{-g}\,\mathbf{T}^{ni}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{T}^{ni}$ — тензор энергии — импульса поля.

Данная характеристика отражает существование поля: отличие от нуля плотности тензора энергии — импульса в некоторой области пространства — времени является необходимым и достаточным условием наличия в этой области физического поля, при этом энергия — импульс любого физического поля вносит вклад в полный тензор энергии — импульса системы и не обращается в тождественный нуль вне источника поля. Это позволяет рассматривать перенос энергии волнами в духе Фарадея — Максвелла: изучать характер распределения интенсивности поля в пространстве, определять потоки энергии через поверхность, вычислять изменение энергии — импульса в процессах излучения и поглощения, а также проводить и другие энергетические расчеты. В общей теории относительности гравитационное поле не обладает свойствами, присущими другим физическим полям, так как оно лишено такой характеристики.

Действительно, в теории Эйнштейна плотность лагранжиана состоит из двух частей: плотности лагранжиана гравитационного поля $L_g = L_g(g_{ni})$, зависящей только от метрического тензора g_{ni}, и плотности лагранжиана вещества $L_M = L_M(g_{ni}, \varphi_A)$, зависящей от метрического тензора g_{ni} и остальных полей материи φ_A. Таким образом, в ОТО Эйнштейна величины g_{ni} имеют двойной смысл: переменных поля и метрического тензора пространства — времени.

В результате такого физико-геометрического дуализма выражение для плотности полного симметрического тензора энергии — импульса (вариация плотности лагранжиана по компонентам метрического тензора) совпадает с уравнениями поля (вариацией плотности лагранжиана по компонентам гравитационного поля). Это приводит к тому, что плотность полного симметрического тензора энергии — импульса системы строго равна нулю:

$$T^{ni} + t^{ni} = 0, \qquad (A)$$

где $T^{ni} = -2\delta L_M/\delta g_{ni}$ — плотность симметрического тензора энергии — импульса вещества (при этом веществом будем считать и все поля материи, кроме гравитационного поля);

$$t^{ni} = -2\delta L_g/\delta g_{ni} = -c^4\sqrt{-g}\,[R^{ni} - g^{ni}R/2]/8\pi G. \qquad (2)$$

* Здесь и далее латинские индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, а греческие —1, 2, 3. Сигнатура метрики выбрана в виде (+, —, —, —).

Из выражения (2) следует также, что все компоненты плотности симметрического тензора энергии — импульса гравитационного поля t^{ni} равны нулю всюду вне вещества.

Таким образом, уже из этих результатов следует, что гравитационное поле в ОТО Эйнштейна не обладает свойствами, присущими другим физическим полям, так как вне источника оно лишено основной физической характеристики — тензора энергии — импульса.

Физическая характеристика гравитационного поля в теории Эйнштейна — тензор кривизны R^i_{nlm}. Ясным осознанием этого мы обязаны Сингу [10, с. 8]: «...Если мы принимаем идею о том, что пространство — время является римановым четырехмерным пространством (а если мы релятивисты, так мы должны это сделать), то, очевидно, первая наша задача будет состоять в том, чтобы прочувствовать эту четырехмерность, подобно тому как мореплаватели далеких времен должны были ощутить сферичность океана. И первое, что нам нужно осмыслить,— это тензор Римана, поскольку *этот тензор* и *есть* гравитационное поле: если он обращается в нуль (и только в этом случае) — поля не существует. И, однако, что довольно странно, этот важнейший факт был отодвинут на задний план...». И далее он отмечал: «...В теории Эйнштейна в зависимости от того, отличен от нуля тензор Римана или равен нулю, гравитационное поле присутствует или отсутствует. Это свойство абсолютно; оно никак не связано с мировой линией какого-то наблюдателя...». К сожалению, именно этот фундаментальный факт еще до сих пор не осознан некоторыми теоретиками, которые занимаются вопросами ОТО. Отсутствие такого понимания ведет к непониманию самой сущности ОТО.

Однако физическая характеристика гравитационного поля отражает, скорее, способность гравитационного поля изменять энергию — импульс вещества, т. е. отражает силовое воздействие гравитационного поля на вещество, описываемое уравнением [11]

$$\delta^2 n^i/\delta s^2 + R^i_{mkl} u^m u^l n^k = 0, \tag{3}$$

где $u^i = dx^i/ds$ — 4-вектор скорости; n^i — бесконечно малый вектор отклонения геодезических. Но о потоке энергии, переносимой волной, описание с помощью волн кривизны никакой информации не дает.

Таким образом, ОТО Эйнштейна связывает воедино вещество и гравитационное поле, причем, если первое характеризуется, как и во всех физических теориях, тензором энергии — импульса, т. е. тензором второго ранга, характеристикой второго является тензор кривизны — тензор четвертого ранга. Из-за различной размерности физических характеристик гравитационного поля и вещества в теории Эйнштейна непосредственно следует, что в ОТО в принципе не существует законов сохранения, связывающих вместе вещество и гравитационное поле. Этот фундаментальный факт, впервые установленный нами [6], означает, что теория Эйнштейна построена ценой отказа от законов сохранения вещества и гравитационного поля вместе взятых.

Г. А. Лоренц и Леви-Чивита предлагали рассматривать величины (2) как компоненты плотности тензора энергии — импульса гравитационного поля, а выражение (А) как своеобразный закон сохранения плотности полного тензора энергии — импульса. Своеобразие закона сохранения (А) состоит в том, что он является локальным законом сохранения, позволяющим по изменению тензора энергии — импульса вещества в какой-либо точке определить изменение тензора энергии — импульса гравитационного поля в этой же точке:

$$\frac{\partial}{\partial t} T^{0i} = -\frac{\partial}{\partial t} t^{0i}. \qquad (4)$$

Но в теории Эйнштейна тензор t^{ni} — всего лишь характеристика геометрии внутри вещества, поэтому в ОТО изменение энергии — импульса вещества непосредственно связано только с изменением скалярной кривизны R и тензора второго ранга R^{ni} в области, занимаемой веществом. Волны кривизны, описываемые тензором четвертого ранга R^i_{nlm}, в общей теории относительности не связаны непосредственно с изменением энергии — импульса вещества, а связаны косвенно, через метрический тензор g_{ni}. Поэтому для волн кривизны в ОТО не существует никаких законов сохранения, связывающих изменение тензора энергии — импульса вещества (тензора второго ранга) с изменением тензора кривизны (тензора четвертого ранга). Таким образом, риманово пространство — время в общей теории относительности, с одной стороны, является своеобразным источником энергии — импульса, поскольку тензор кривизны в силу уравнения (3) воздействует на движение частиц, а с другой стороны, энергия риманова пространства — времени создана без соблюдения законов сохранения энергии — импульса вещества и гравитационного поля вместе взятых.

Введение закона сохранения на основе выражения (А) не удовлетворяло Эйнштейна. Он писал [12, с. 645]: «...Конечно, нельзя выдвинуть *логического* возражения против такого рода *наименования*. Однако я нахожу, что из уравнений (А) нельзя вывести таких следствий, какие мы привыкли делать из законов сохранения. Это связано с тем, что согласно (А) компоненты тензора *полной энергии* всюду обращаются в нуль»*. Далее Эйнштейн подчеркнул, что согласно (А) материальная система может полностью раствориться, не оставив какого-либо следа, так как ее энергия (А) равна нулю.

---

* Курсив авторов обзора.

Эйнштейн правильно отмечал, что из уравнения (А) нельзя вывести таких следствий, какие привыкли делать из законов сохранения, но дело здесь *не в наименовании*, а в сущности общей теории относительности, в ней другого не дано.

Однако Эйнштейн считал, что в ОТО гравитационное поле с веществом должно обладать каким-либо законом сохранения [12, с. 299]: «... безусловно следует требовать, чтобы вещество и гравитационное поле вместе удовлетворяли законам сохранения энергии — импульса».

Свою цель он видел в нахождении таких законов сохранения вещества и гравитационного поля, которые по смыслу были бы аналогичны законам сохранения в классической механике или в теории электромагнитного поля. Как известно, эта программа привела его к введению в ковариантную теорию нековариантной величины — псевдотензора энергии — импульса, только такой ценой была достигнута формальная аналогия с законами сохранения классической механики и электродинамики.

Для получения таких «законов сохранения» обычно [11] поступают следующим образом.

Если уравнения Эйнштейна записать в виде

$$-(c^4/8\pi G)\, g\, [R^{ik} - g^{ik}R/2] = -gT^{ik}, \tag{5}$$

то левую часть можно тождественно представить в виде суммы двух нековариантных величин

$$-(c^4/8\pi G)\, g\, [R^{ik} - g^{ik}R/2] = \frac{\partial}{\partial x^l} h^{ikl} + g\tau^{ik}, \tag{6}$$

где τ^{ik} — псевдотензор энергии — импульса гравитационного поля; $h^{ikl} = -h^{ilk}$ — псевдотензор спина.

Используя тождество (6), уравнения Эйнштейна (5) можно записать в другом, эквивалентном виде:

$$-g\, [T^{ik} + \tau^{ik}] = \frac{\partial}{\partial x^l} h^{ikl}. \tag{7}$$

На основании очевидного равенства

$$\frac{\partial^2}{\partial x^k\, \partial x^l} h^{ikl} = 0,$$

из уравнений Эйнштейна (7) следует дифференциальный закон сохранения:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} [-g\, (T^{ik} + \tau^{ik})] = 0. \tag{8}$$

Интегрируя это соотношение по некоторому объему и полагая, что через поверхность, ограничивающую этот объем, отсутствуют потоки вещества, из выражения (8) обычно [12] получают и интегральные «законы сохранения энергии — импульса» системы:

$$\frac{d}{dt}\int(-g)\,[T^{0i}+\tau^{0i}]\,dV=-\oint(-g)\,\tau^{\alpha i}\,dS_\alpha. \tag{9}$$

Эйнштейн [12, с. 645] считал, что правая часть этого соотношения при $i=0$ «наверняка представляет собой потерю энергии материальной системой». При отсутствии потоков энергии — импульса гравитационного поля через поверхность, ограничивающую объем интегрирования, из выражения (9) получают закон сохранения энергии — импульса системы:

$$P^i=\frac{1}{c}\int(-g)\,[T^{0i}+\tau^{0i}]\,dV=\text{const}. \tag{10}$$

С помощью уравнений Эйнштейна (7) соотношение (10) можно переписать в следующем виде:

$$P^i=\frac{1}{c}\oint h^{i0\alpha}\,dS_\alpha=\text{const}. \tag{11}$$

По мнению Эйнштейна [12, с. 652], четыре величины P^i представляют собой энергию ($i=0$) и импульс ($i=1, 2, 3$) физической системы. При этом обычно утверждают [11, с. 362], что «...Величины P^i — 4-импульс поля и материи — имеют вполне определенный смысл, оказываясь не зависящими от выбора системы отсчета как раз в такой степени, как это необходимо на основании физических соображений». Однако, как покажем ниже, это утверждение неправильно.

Аналогичные результаты получают и при записи уравнений Эйнштейна в смешанных компонентах:

$$\sqrt{-g}\,[T^i_k+\tau^i_k]=\partial_n\sigma^{ni}_k. \tag{12}$$

Выбор псевдотензоров энергии — импульса гравитационного поля в большой степени зависел от наклонностей авторов и, как правило, осуществлялся на основе вторичных свойств. Так, выбирая h^{ikl} в виде

$$h^{ikl}=\frac{c^4}{16\pi G}\frac{\partial}{\partial x^m}\,[-g\,(g^{ik}g^{ml}-g^{il}g^{km})], \tag{13}$$

получаем симметрический псевдотензор Ландау — Лифшица, который содержит только первые производные от метрического тензора.

Выбирая

$$\sigma^{ni}_k=\frac{g_{km}c^4}{16\pi G\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^l}\,[-g\,(g^{im}g^{nl}-g^{nm}g^{il})], \tag{14}$$

приходим к псевдотензору Эйнштейна, который совпадает с каноническим (псевдо)тензором энергии — импульса, получаемым из нековариантной плотности лагранжиана гравитационного поля:

$$L_g = \sqrt{-g}\,[\Gamma^n_{mk}\Gamma^l_{nl} - \Gamma^n_{lm}\Gamma^l_{nk}]\, g^{mk}.$$

При

$$\sigma^{ni}_k = \frac{c^4\sqrt{-g}}{16\pi G}\, g^{im}g^{nl}\,[\partial_l g_{km} - \partial_m g_{kl}] \qquad (15)$$

имеем псевдотензор Лоренца, который совпадает с каноническим (псевдо)тензором энергии импульса, получаемым на основе нековариантного метода бесконечно малых смещений из ковариантной плотности лагранжиана гравитационного поля $L_g = \sqrt{-g}R$. Важно подчеркнуть, что при всем разнообразии свойств псевдотензоров энергии — импульса все они обладают одинаковым свойством — любой псевдотензор энергии — импульса можно обратить в нуль в любой точке пространства.

В этом факте обычно видят отражение принципа эквивалентности. Однако утверждения об эквивалентности гравитационного поля и поля сил инерции неправильны. Эти два поля существенно различаются, так как при наличии поля сил инерции тензор кривизны всегда равен нулю, а в случае гравитационного поля он отличен от нуля. Поэтому поле сил инерции и гравитационное поле не эквивалентны для всех физических процессов, для которых существенную роль играет тензор кривизны. Следовательно, к общей теории относительности принцип эквивалентности не имеет прямого отношения, хотя он и сыграл эвристическую роль при ее построении Эйнштейном.

Обращение же любого псевдотензора энергии — импульса в нуль в любой заданной точке пространства — следствие нетензорного закона преобразования их компонент при переходе от одной координатной системы к другой. Так, все псевдотензоры энергии — импульса, содержащие производные от метрического тензора риманова пространства — времени не выше первого порядка, обращаются в нуль при переходе к локально-геодезической системе координат, поскольку все компоненты связанностей Γ^i_{nm} в этой системе равны нулю. Таким образом, энергию — импульс гравитационного поля, определенную с использованием псевдотензоров энергии — импульса, можно локально обратить в нуль.

Гравитационное же поле, описываемое тензором кривизны, переходом к любой допустимой системе * координат обратить в нуль

* Допустимыми преобразованиями будем называть преобразования координат между системами отсчета, которые можно реализовать реальными физическими телами и процессами. Математически это условие эквивалентно [13] требованию, чтобы в этих системах отсчета квадратичная форма с коэффициентами $g_{\alpha\beta}$ была отрицательно определенной, а компонента g_{00} метрического тензора — положительной:

$$g_{00} > 0, \; g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta < 0.$$

нельзя, а следовательно, из-за воздействия волн кривизны на физические процессы нельзя утверждать и об отсутствии гравитационного поля в какой-либо системе координат. Поэтому псевдотензоры энергии — импульса, как уже указывалось [1—9], не являются энергетически импульсными характеристиками гравитационного поля и не отражают его существования ни локально, ни глобально. В результате определения энергии — импульса системы и потоков энергии в общей теории относительности, основанные на их использовании, физически бессмысленны.

Этот общий вывод был проиллюстрирован в [8] на примере определения в общей теории относительности «инертной массы» и «энергии» статической сферически-симметричной системы. На основании определения (10) энергии — импульса системы, состоящей из вещества и гравитационного поля, в ОТО вводится понятие инертной массы m системы:

$$m = \frac{1}{c} P^0 = \frac{1}{c^2} \int (-g)\,[T^{00} + \tau^{00}]\,dV = \frac{1}{c^2} \oint h^{00\alpha}\,dS_\alpha. \qquad (16)$$

Для вычисления инертной массы системы обычно используют решение Шварцшильда. В изотропных декартовых координатах метрику риманова пространства — времени в этом случае можно записать в виде

$$g_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}\,[1 + r_g/4r]^4; \qquad (17)$$
$$g_{00} = [1 - r_g/4r]^2\,[1 + r_g/4r]^{-2},$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $r_g = 2GM/c^2$; M — гравитационная или, как ее иногда называют, тяжелая масса. Эти координаты являются асимптотически галилеевскими, поскольку при $r \to \infty$ справедливы оценки:

$$g_{00} = 1 + O\,(1/r); \quad g_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}\,[1 + O\,(1/r)]. \qquad (18)$$

Используя ковариантные компоненты метрики (17), из выражения (11) получаем

$$P^0 = c^3 r_g/2G = Mc. \qquad (19)$$

Именно это совпадение инертной массы с тяжелой массой давало основание для утверждений об их равенстве в общей теории относительности [11, с. 424]: «...$P^\alpha = 0$, $P^0 = Mc$ — результат, который естественно было ожидать. Он является выражением факта равенства, как говорят, «тяжелой» и «инертной» масс («тяжелой» называют массу, определяющую создаваемое телом гравитационное поле,— это та масса, которая входит в метрический тензор в гравитационном поле или, в частности, в закон Ньютона; «инертная» же масса определяет соотношение между импульсом и энергией тела и, в частности, энергия покоя тела равна этой массе, умноженной на c^2)».

Однако такое утверждение Эйнштейна [12, с. 660] и других авторов неправильно. Как показано в [8], энергия системы (10), а следовательно, и ее инертная масса (16) не имеют никакого физического смысла, поскольку их величина зависит даже от выбора трехмерной системы координат.

Вполне очевидно, что элементарное требование, которому должно удовлетворять в любой физической теории определение инертной массы,— условие независимости ее величины от выбора трехмерной системы координат. Однако в общей теории относительности определение (16) инертной массы этому требованию не удовлетворяет. Действительно, совершим, например, переход от трехмерных декартовых координат x_c^α к новым координатам x_H^α, связанным со старыми координатами соотношением

$$x_c^\alpha = x_H^\alpha\,[1 + f(r_H)], \tag{20}$$

где $r_H = \sqrt{x_H^2 + y_H^2 + z_H^2}$; $f(r_H)$ — произвольная несингулярная функция, удовлетворяющая условиям $f(r_H) \geqslant 0$;

$$\lim_{r_H\to\infty} f(r_H) = 0; \quad \lim_{r_H\to\infty} r_H \frac{\partial}{\partial r_H} f(r_H) = 0. \tag{21}$$

Легко убедиться, что преобразование (20) соответствует изменению арифметизации точек трехмерного пространства вдоль радиуса:

$$r_c = r_H\,[1 + f(r_H)].$$

Чтобы преобразование (20) имело обратное и являлось взаимно однозначным, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\partial r_c/\partial r_H = 1 + f + r_H f' > 0,$$

где

$$f' = \frac{\partial}{\partial r_H} f(r_H).$$

Тогда и якобиан преобразования будет отличен от нуля:

$$J = \det\left\| \frac{\partial x_c}{\partial x_H} \right\| = (1+f)^2\,\frac{\partial r_c}{\partial r_H} \neq 0.$$

В частности, всем поставленным требованиям удовлетворяет функция

$$f(r_H) = \alpha^2 \sqrt{8GM/(c^2 r_H)}\,[1 - \exp(-\varepsilon^2 r_H)], \tag{22}$$

где α и ε — произвольные числа, отличные от нуля.

Так как в данном случае

$$\frac{\partial r_c}{\partial r_H} = 1 + \alpha^2 \sqrt{\frac{8GM}{c^2 r_H}} \left[\frac{1}{2} + \left(\varepsilon^2 r_H - \frac{1}{2}\right) \exp(-\varepsilon^2 r_H)\right] > 1,$$

то $f(r_H)$ — монотонная функция от r_H. Легко убедиться, что $f(r_H)$ является неотрицательной несингулярной функцией во всем пространстве. Якобиан преобразования в этом случае строго больше единицы:

$$J = (1+f)^2\,\partial r_c/\partial r_H > 1.$$

Поэтому преобразование (20) с функцией $f(r_H)$, определенной выражением (22), имеет обратное преобразование и является взаимно однозначным.

Вычислим теперь величину инертной массы (16) в новых координатах x_H^α. Используя закон преобразования метрического тензора

$$g_{ik}^H(x_H) = \frac{\partial x_c^l}{\partial x_H^i}\frac{\partial x_c^m}{\partial x_H^k} g_{lm}^c(x_c(x_H)), \qquad (23)$$

находим компоненты метрики Шварцшильда в новых координатах. В результате получим:

$$\left.\begin{aligned} g_{00} &= \left[1-\frac{r_g}{4r_H(1+f)}\right]^2\left[1+\frac{r_g}{4r_H(1+f)}\right]^{-2};\\ g_{\alpha\beta} &= \left[1+\frac{r_g}{4r_H(1+f)}\right]^4\Big\{-\delta_{\alpha\beta}(1+f)^2-\\ &\quad -x_\alpha^H x_\beta^H\left[(f')^2+\frac{2}{r_H}f'(1+f)\right]\Big\}. \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Определитель метрического тензора (24) имеет вид:

$$g = -g_{00}\left[1+\frac{r_g}{4r_H(1+f)}\right]^{12}(1+f)^4\times$$
$$\times\left[(1+f)^2+r_H^2(f')^2+2r_Hf'(1+f)\right]. \qquad (25)$$

Следует особо отметить, что метрика (24) является асимптотически галилеевской:

$$\lim_{r_H\to\infty} g_{00} = 1, \qquad \lim_{r_H\to\infty} g_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}.$$

В частном случае, когда функция $f(r_H)$ задана соотношением (22) и $r_H\to\infty$, метрика риманова пространства — времени будет иметь следующую асимптотику:

$$g_{00} = 1+O\left(\frac{1}{r_H}\right); \quad g_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}+O\left(\frac{1}{\sqrt{r_H}}\right). \qquad (26)$$

Из выражений (18) и (26) видно, что степень стремления трехмерной части метрического тензора риманова пространства — времени к галилеевскому значению зависит даже от выбора пространственных координат, т. е. зависит от способа арифметизации точек пространства, а не определяется какими-либо физическими условиями. Поэтому какие-либо требования, накладываемые на асимптотическое поведение трехмерной части метрического тензора, не являются физическими, а лишь диктуют тот или иной способ арифметизации точек пространства. Однако теория всегда должна обеспечивать возможность выбора любой допустимой системы координат. Поэтому и ограничение каким-либо избранным способом арифметизации точек пространства является бессмысленным требованием.

Подставляя в выражение (16) контравариантные компоненты метрики (24), получаем

$$m = \frac{c^2}{2G} \lim_{r_H \to \infty} \{r_g + r_H^3 (f')^2\}. \tag{27}$$

Таким образом, инертная масса существенно зависит от скорости стремления f' к нулю при $r_H \to \infty$. В частности, выбирая функцию $f(r_H)$ в виде (22), для инертной массы из выражения (27) получаем

$$m = M (1 + \alpha^4). \tag{28}$$

Отсюда следует, что для инертной массы системы (16), состоящей из вещества и гравитационного поля, в общей теории относительности можно получить ввиду произвольности величины α любое наперед заданное число $m \geqslant M$ в зависимости от выбора пространственных координат, хотя гравитационная масса M этой системы, а следовательно, и все три эффекта ОТО останутся неизменными. Отметим также, что при более сложных преобразованиях пространственных координат, оставляющих метрику асимптотически галилеевской, инертная масса системы (16) может принимать любые наперед заданные значения, как положительные, так и отрицательные.

Таким образом, мы видим, что в ОТО инертная масса, впервые введенная Эйнштейном и заимствованная впоследствии многими авторами [11, 14—18], зависит от выбора трехмерной системы координат, а поэтому не имеет никакого физического смысла. Следовательно, и утверждения о равенстве инертной и тяжелой масс в теории Эйнштейна также не имеют никакого физического смысла. Это равенство имеет место только в узком классе трехмерных систем координат, а так как инертная и гравитационная массы имеют различные трансформационные законы, то при переходе к другим трехмерным системам координат их равенство уже не выполняется. Кроме того, определение инертной массы (16) в ОТО не удовлетворяет принципу соответствия с теорией Ньютона. Действительно, так как инертная масса m в теории Эйнштейна зависит от выбора трехмерной системы координат, ее выражение в общем случае произвольной трехмерной системы координат не перейдет в соответствующее выражение теории Ньютона, в которой инертная масса не зависит от выбора пространственных координат. Таким образом, в общей теории относительности отсутствует классический ньютоновский предел, а следовательно, она не удовлетворяет и принципу соответствия.

Аналогично обстоит дело и в определении потоков энергии гравитационного излучения. «Интенсивность гравитационного излучения» в ОТО определяют с использованием компонент $\tau^{0\alpha}$ псевдотензора энергии — импульса:

$$\frac{dI}{d\Omega} = -\lim_{r\to\infty} c\,(-g)\,r^2\,\tau^{0\alpha}n_\alpha. \tag{29}$$

Из-за существенной нелинейности уравнений Эйнштейна при исследовании волновых решений обычно ограничиваются первым приближением по малому волновому возмущению. В этом случае, проводя вычисления в асимптотически декартовых координатах, для интенсивности гравитационного излучения получают следующее выражение:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{G}{36\pi c^5}\left\{\frac{1}{4}(\dddot{D}_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta)^2 + \frac{1}{2}\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}^{\alpha\beta} + \dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}^{\alpha\gamma}n^\beta n_\gamma\right\}, \tag{30}$$

где

$$D^{\alpha\beta} = \int dV\,(3x^\alpha x^\beta - \gamma^{\alpha\beta}x_\varepsilon x^\varepsilon)\,T^{00},$$

а точка обозначает производную по времени.

Интегрирование выражения (30) по сфере дает известную квадрупольную формулу Эйнштейна, которая обычно служит доказательством «реальности» существования потока энергии гравитационных волн от излучающей островной системы:

$$I = -dE/dt = (G/45c^5)\,\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}^{\alpha\beta}. \tag{31}$$

Таким образом, выражения (30) и (31), казалось бы, подтверждают вывод, сделанный Эйнштейном [12, с. 642]: «...интенсивность излучения ни в одном направлении не может стать отрицательной, тем более не может быть отрицательной и полная интенсивность излучения...»

Однако этот вывод ошибочен. В ОТО, как показано в [9], величина интенсивности гравитационного излучения (30), а также полная интенсивность, определяемые по Эйнштейну, существенно зависят от выбора координат. Поэтому соответствующим допустимым преобразованием координат, оставляющим метрику риманова пространства — времени асимптотически галилеевской на бесконечности, эти величины могут быть обращены в нуль или стать отрицательными в области пространства, заключенной между двумя сферами с радиусами $r_1 = ct - u_1$ и $r_2 = ct - u_2$. Отсюда следует, что интенсивность гравитационного излучения (30) и полная интенсивность (31) не являются энергетически импульсными характеристиками гравитационного поля в ОТО, поскольку излучение как объективную физическую реальность нельзя уничтожить никаким допустимым преобразованием координат. Так, в электродинамике, как легко убедиться, поток энергии электромагнитного излучения не может быть обращен в нуль никаким допустимым преобразованием координат: если в одной системе отсчета поток энергии электромагнитных волн через некоторую поверхность отличен от нуля, то после перехода к любой другой допустимой системе отсчета он не может обратиться в нуль, а тем более изменить знак.

Таким образом, формула для расчета потерь энергии источником на гравитационное излучение (31) в принципе не содержится в ОТО, поскольку в теории Эйнштейна отсутствует какая-либо возможность для энергетических расчетов.

Обращение в нуль потока энергии гравитационного излучения, определяемого с использованием псевдотензоров энергии — импульса, в наинизшем порядке теории возмущений при соответствующем выборе координат является отражением общего утверждения о возможности выбора для любого псевдотензора энергии — импульса такой системы координат, в которой поток энергии гравитационного излучения всегда строго равен нулю. Координатную систему с такими свойствами можно установить для любого псевдотензора энергии — импульса приведением компонент $g^{0\alpha}$ метрического тензора к виду, обеспечивающему выполнение условия $\partial_n \sigma_0^{n\alpha} \equiv 0$ для псевдотензоров энергии — импульса со смешанными компонентами. Тогда в этих системах координат на основании выражений (12) и (9) поток энергии гравитационных волн будет отсутствовать:

$$\frac{d}{dt}\int dV\,(-g)^{1/2}\,[T_0^0+\tau_0^0]\equiv 0.$$

Совершенно аналогично можно установить соответствующие координатные системы и для другого типа псевдотензоров энергии — импульса.

Однако в данных координатных системах остается все богатство решений уравнений Эйнштейна, для которых тензор кривизны отличен от нуля, а следовательно, в этих координатных системах существуют волны кривизны, способные передавать энергию — импульс физическим телам. Наиболее просто это утверждение можно проиллюстрировать на примере псевдотензора Лоренца. В этом случае переходом к синхронной системе отсчета ($g_{00} = 1$, $g_{0\alpha} = 0$), как легко убедиться из выражений (15) и (12), можно обратить в нуль полную плотность энергии — импульса гравитационного поля $\sqrt{-g}\,[T_0^i + \tau_0^i] \equiv 0$. Отсюда следует, что вне вещества должны отсутствовать и энергия — импульс гравитационного поля. Но волны кривизны, являющиеся решениями уравнений Эйнштейна, в синхронной системе отсчета существуют и, воздействуя на физические процессы, изменяют их энергию—импульс.

В последнее время в работах [19—21] появились утверждения, что в ОТО на основе гамильтонова формализма якобы удалось получить выражение для массы системы, состоящей из вещества и гравитационного поля, и показать ее положительную определенность. На основе этих утверждений был даже сделан [126] поспешный вывод, что проблема энергии — импульса гравитационного поля в теории Эйнштейна решена. Однако такие утверждения свидетельствуют лишь о непонимании авторами работ [19—21, 126] существа проблемы. Действительно, как легко убедиться, все исследования [19—21] существенно опираются на требование определенного закона асимптотического поведения метрического тензора риманова пространства — времени на пространственной бесконечности [126]:

$$g_{ik} = \delta_{ik} + O(1/r); \quad \partial_n g_{ik} = O(1/r^2). \tag{32}$$

Именно данное требование и позволяет получить выражение для массы системы в ОТО и доказать ее положительную определенность. Однако это требование не является физическим требованием, что достаточно просто можно показать на примере решения Шварцшильда, которое в изотропных декартовых координатах (17) имеет асимптотическое поведение (18), удовлетворяющее всем условиям (32).

Если теперь проведем арифметизацию точек трехмерного пространства другим способом (арифметизация трехмерного пространства всегда произвольна, и все теории должны допускать произвол в выборе арифметизации), то, как легко убедиться, в общем случае получим другой закон асимптотического поведения пространственной части метрического тензора риманова пространства — времени.

В частности, после преобразования (20) компоненты метрического тензора, как мы видели, имеют асимптотику:

$$g_{00} = 1 + O(1/r); \qquad g_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta} + O\left(1/\sqrt{r}\right).$$

Отсюда следует, что асимптотическое поведение трехмерной части метрического тензора риманова пространства — времени определяется способом арифметизации точек пространства, а не диктуется какими-либо физическими требованиями. Изменение же асимптотики трехмерной части метрического тензора при изменении арифметизации точек пространства полностью сводит на нет те большие усилия, которые затрачены [19—21] на доказательство математических утверждений. Математические доказательства — это, конечно, важнейшие составные элементы теоретической физики. Однако эти доказательства лишь тогда имеют смысл, когда задача сформулирована физически корректно. В противном случае эти доказательства, быть может даже и изящные, не представляют никакой ценности для физики. Как любил повторять академик А. Н. Крылов [125]: «Математика, подобно жернову, перемалывает то, что под него засыпают, и как, засыпав лебеду, вы не получите пшеничной муки, так, исписав целые страницы формулами, вы не получите истины из ложных предпосылок». Все это в полной мере относится к данному циклу работ. Таким образом, с одной стороны, работы [19—21, 126] ложны по самой физической постановке задачи. С другой стороны, используемое в этих работах выражение для массы системы (см., например, [126])

$$m = \oint \partial_i q^{ik}\, dS_k = \oint \frac{\partial}{\partial x^m}\, [-g\, (g^{00} g^{im} - g^{0i} g^{0m})]\, dS_i,$$

также явно зависит от способа арифметизации точек трехмерного пространства, или, говоря иными словами, оно не является скаляром относительно выбора трехмерной системы координат, что является физически бессмысленным, поскольку соответствующим выбором трехмерной системы координат массу системы можно сделать равной любому наперед заданному числу.

Следует также отметить, что подход, основанный на гамильтоновой технике, по идеологии близок к формализму псевдотензоров, что особенно легко заметить из приведенной выше формулы для массы системы, и лишь только приукрашен рядом математических упражнений. Выше мы указали, в чем ошибочность работ [19—21, 126]. К этому можно было бы добавить также, что авторы работ [19—21, 126] не поняли фундаментального факта: в ОТО в принципе отсутствуют законы сохранения энергии — импульса вещества и гравитационного поля вместе взятых, а следовательно, в ней нельзя ввести и понятия энергии — импульса системы. Ниже мы еще раз вернемся к этому вопросу и поясним, почему ОТО в некоторых системах координат дает физически приемлемые формулы, которые тем не менее не содержатся в ней.

Другой подход к проблеме энергии — импульса в ОТО, который нашел применение главным образом в приближенных вычислениях, основывается якобы на получении интегралов движения из уравнений движения вещества, построенных на основе ковариантного уравнения сохранения тензора энергии — импульса вещества. При таком подходе несохранение энергии вещества, как бы обнаруженное на некотором этапе приближенных вычислений, обычно объясняется излучением гравитационных волн веществом, что позволяет определить их энергию, а также силу гравитационного радиационного трения.

На этом пути получены противоречивые результаты. Так, в [22—24] был сделан вывод об отрицательном знаке энергии гравитационных волн, поскольку энергия системы увеличивалась при излучении ею гравитационных волн. В то же время результаты аналогичных работ [25—27] свидетельствуют об уменьшении энергии системы при излучении гравитационных волн, а следовательно, они должны переносить положительную энергию.

Однако из ковариантного уравнения сохранения тензора энергии — импульса вещества, строго говоря, можно получить только тривиальный закон сохранения вида (4). Действительно, в силу уравнения сохранения плотности тензора энергии — импульса вещества

$$\nabla_n T^{ni} = \partial_n T^{ni} + \Gamma^i_{nm} T^{nm} = 0 \tag{33}$$

имеем

$$\nabla_n\,[(-g)^a T^n_i] = (-g)^a g_{ik} \nabla_n T^{nk} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\partial_n \{(-g)^a\, T^n_i\} = (-g)^a\,[\Gamma^m_{ni} T^n_m + 2a\Gamma^m_{nm} T^n_i].$$

Используя уравнения Эйнштейна

$$T^n_i = -t^n_i,$$

где

$$t^n_i = \left(-c^4 \sqrt{-g}/8\pi G\right) [R^n_i - \delta^n_i R/2],$$

получаем

$$\partial_n \{(-g)^a\, T^n_i\} = (-g)^a\,[-\Gamma^m_{ni} t^n_m - 2a\Gamma^m_{nm} t^n_i]. \tag{34}$$

Из соотношения

$$\nabla_m R^m_n = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x^n}\,R$$

следует, что

$$(-g)^a\,[\Gamma^m_{ni} t^n_m + 2a\Gamma^m_{nm} t^n_i] = \partial_n\,[(-g)^a\, t^n_i].$$

Подставляя это выражение в правую часть равенства (34), получаем закон сохранения:

$$\partial_n\,\{(-g)^a\,\,[T^n_i + t^n_i]\} = 0. \tag{35}$$

Совершенно аналогично можно получить закон сохранения в виде

$$\partial_n \{(-g)^a\,[T^{ni} + t^{ni}]\} = 0. \tag{36}$$

Из выражения (36) в силу равенств (2), (6) следуют также и два дифференциальных соотношения:

$$\partial_n \partial_m h^{inm} = 0;\ \partial_n\,\{(-g)^a\,[T^{ni} + \tau^{ni}]\} = 0,$$

которые отражают лишь локальное выполнение уравнений Эйнштейна, а не являются какими-либо законами сохранения.

Таким образом, ковариантное уравнение сохранения (33) и уравнения Эйнштейна приводят нас к соотношениям (35) и (36), которые тривиально выполняются в силу уравнений поля. Частным случаем этих соотношений является и равенство (4).

Как показано в [6], неоднозначные результаты, полученные при приближенных вычислениях энергии и силы гравитационного радиационного трения, именно и являются простым следствием произвольного переноса части членов тензора t^{0i} в (4) справа налево, после чего правая часть полученного выражения объявлялась потоком энергии гравитационных волн. Вполне очевидно, что такая процедура совершенно бессмысленна, так как дает различные результаты в зависимости от того, что перенесено налево — положительное или отрицательное значение.

Таким образом, подводя итог сказанному выше, приходим к следующим выводам:

1. Общая теория относительности не имеет и не может иметь законов сохранения энергии — импульса гравитационного поля и вещества вместе взятых.

2. Инертная масса, определенная в ОТО, не имеет физического смысла.

3. Квадрупольная формула Эйнштейна для гравитационного излучения не является следствием ОТО.

4. Из ОТО в принципе не следует, что двойная система теряет энергию из-за гравитационного излучения.

5. Общая теория относительности не имеет классического ньютоновского предела, а следовательно, она не удовлетворяет одному из наиболее фундаментальных принципов физики — принципу соответствия.

Таким образом, гравитационное поле в ОТО совершенно отличается от других физических полей и не является полем в духе Фарадея — Максвелла. Все это свидетельствует о том, что ОТО не является удовлетворительной физической теорией. Следует отметить, что ОТО — одна лишь из возможных реализаций великой идеи Эйнштейна о римановой геометрии пространства — времени, поэтому когда мы говорим о неудовлетворительности теории Эйнштейна, то имеем в виду неудовлетворительность именно этой конкретной реализации. Поскольку в теориях других физических полей существует единый закон сохранения энергии — импульса различных форм материи и в настоящее время нет никаких экспериментальных данных о его нарушении (более того, развитие физики всегда демонстрировало его незыблемость и правомерность), то у нас нет оснований для отказа от него. Поэтому будем считать, что закон сохранения, связывающий энергию — импульс различных форм материи, должен быть основой любой физической теории. Только экспериментальные данные могли бы заставить нас отказаться от этого положения. Закон сохранения должен быть справедлив для всех полей материи, в том числе и для гравитационного поля. Поэтому задача построения классической теории гравитации, которая удовлетворяла бы всем предъявляемым к физической теории требованиям, является насущной проблемой сегодняшнего дня.

Какие же здесь пути? Что мы можем сохранить из великого творения Эйнштейна и от чего должны отказаться, чтобы в новой теории гравитации имели место фундаментальные законы физики: закон сохранения энергии — импульса вещества и гравитационного поля вместе взятых и принцип соответствия? Для ответа на эти вопросы, рассмотрим, какие идеи лежат в основе ОТО Эйнштейна.

Наиболее глубокой из них, на наш взгляд, является идея о римановой геометрии пространства — времени, метрический тензор которой g_{ni} определяется материей. Другой гипотезой, на которой зиждется все здание ОТО, является единство тяготения и метрики пространства — времени. Последнее достигается тем, что тяготение описывается метрическим тензором g_{ni}.

Эти две гипотезы, как предельно ясно установил Гильберт, в простейшем случае приводят к знаменитым уравнениям ОТО Эйнштейна. Поскольку ОТО отошла от обычных представлений о гравитационном поле как о поле в духе Фарадея — Максвелла, то при построении новой теории гравитации, аналогичной теориям других физических полей, с теми же обычными свойствами гравитационного поля как носителя энергии — импульса, нам следует сохранить и обогатить первую идею Эйнштейна и отказаться от второй его гипотезы. Этот путь и избран авторами.

Решению этой задачи и были посвящены работы [28—33], в которых сформулирована полевая теория гравитации, при этом на протяжении последних лет взгляды авторов претерпели некоторую эволюцию, в результате чего работы [1—7, 28—31] явились в определенном смысле ступенями к современным представлениям авторов, изложению которых и посвящена настоящая статья.

1. ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА — ВРЕМЕНИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

В любой физической теории, в которой полевая переменная — тензорная величина, форма дифференциальных уравнений поля не должна зависеть от выбора координат, в которых описывается данный процесс. Это может быть достигнуто двумя путями: или при наличии в уравнениях поля только ковариантных производных в естественной для этого процесса метрике пространства — времени, или при составлении из функций поля и их частных производных тензорной величины. В последнем случае уравнения поля будут существенно нелинейными.

При построении ОТО Эйнштейн пошел по второму пути, связав нелинейными уравнениями (А) метрический тензор риманова пространства — времени g_{ni} с веществом. Таким образом, возникла идея о влиянии вещества на метрику пространства — времени.

Но, как было отмечено выше, такой подход не позволяет считать гравитационное поле в ОТО физическим полем, обладающим энергией — импульсом. Кроме того, естественной геометрией гравитационного поля в ОТО стала геометрия риманова пространства — времени, что не следовало ни из каких экспериментальных фактов, а являлось, скорее, гипотезой об определенном характере действия гравитационного поля самого на себя.

Однако такое действие гравитационного поля не обязательно может сводиться к изменению геометрии, хотя может быть и нелинейным. В этой связи возникает вопрос о выборе естественной геометрии для гравитационного поля, которая позволяла бы считать его физическим полем, обладающим плотностью энергии — импульса.

Любому физическому полю соответствует некоторая естественная геометрия, такая, что при отсутствии взаимодействия с другими полями фронт свободной волны этого физического поля движется по геодезическим естественного пространства — времени.

Распространение фронта волны безмассового поля (уравнение характеристик) [11]:

$$g^{ni}\frac{\partial\psi}{\partial x^n}\frac{\partial\psi}{\partial x^i}=0, \tag{37}$$

а также движение свободных материальных частиц (уравнение Гамильтона — Якоби)

$$g^{ni}\frac{\partial\psi}{\partial x^n}\frac{\partial\psi}{\partial x^i}=1 \tag{38}$$

определяются метрическим тензором естественной для этих процессов геометрии.

Вопрос о выборе естественной геометрии — это вопрос о том, посредством какого эффективного метрического тензора свертываются старшие производные в плотности лагранжиана. Вполне возможна отмечавшаяся еще Лобачевским [34] ситуация, когда различные физические явления будут описываться в терминах различных естественных геометрий.

Из уравнений (37) и (38) следует, что естественная геометрия физической теории допускает экспериментальное определение на основе данных по движению пробных частиц и полей. Изучение движения пробных частиц с массой и безмассовых полей позволяет определить метрический тензор естественного пространства — времени с точностью до постоянного множителя [35]. Таким образом, изучение движения различных форм материи позволяет экспериментально проверить характер геометрии пространства — времени мира. Поэтому с развитием наших знаний о природе происходило и развитие представлений о пространстве — времени.

Так, механика Ньютона (механические явления) в соединении с принципом относительности Галилея (как мы теперь знаем) вновь подтвердила, что пространство является евклидовым, а время абсолютно, т. е. одинаково во всех системах координат. Однако связь принципа относительности Галилея с геометрией в механике Ньютона не была установлена, а поэтому он рассматривался как независимый принцип, применимый только к инерциальным системам координат. Вначале этот принцип относился только к механическим явлениям, а затем в работах Пуанкаре [36] он был распространен на все физические явления и сформулирован следующим образом: «... законы физических явлений будут одинаковыми как для покоящегося наблюдателя, так и для наблюдателя, находящегося в состоянии равномерного поступательного движения, так что мы не имеем и не можем иметь никаких средств, чтобы различить, находимся ли мы в таком движении или нет». Следует отметить, что, хотя этот принцип и казался естественным, его истинная природа не была ясна.

В дальнейшем электродинамика Фарадея — Максвелла (электромагнитные явления) в соединении с принципом относительности привела к открытию псевдоевклидовой геометрии пространства — времени мира. Этим мы в высшей степени обязаны Минковскому. В работе [37] он писал: «...Воззрения на пространство и время, которые я намерен перед Вами развить, возникли на экспериментально-физической основе. В этом их сила. Их тенденция радикальна. Отныне пространство само по себе и время само по себе должны обратиться в фикцию и лишь некоторый вид соединения обоих должен еще сохранить самостоятельность...», далее он отмечал, что «... в явлениях нам дается только четырехмерный в пространстве и времени мир, но проекции этого мира на пространство и на время могут быть взяты с некоторым произволом...».

Именно Минковский первый открыл, что пространство — время, в котором протекают все физические процессы, едино и геометрия его псевдоевклидова. Последующее изучение сильных, электромагнитных и слабых взаимодействий показало, что для полей, связанных с этими взаимодействиями, естественная геометрия — псевдоевклидова геометрия.

Однако в результате этого открытия принцип относительности утратил свою фундаментальную роль и превратился в частное следствие того, что все физические процессы протекают в пространстве — времени, геометрия которого псевдоевклидова. Таким образом, фундаментальную роль стала играть геометрия пространства — времени. Содержание принципа относительности состоит в утверждении, что существует класс инерциальных систем отсчета, в которых все физические процессы протекают одинаковым образом. На математическом языке это означает, что уравнения, описывающие физические процессы, форминвариантны относительно преобразований Лоренца. В предельном случае $v/c \to 0$ преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея и обеспечивают форминвариантность уравнений механики Ньютона.

Но, как показано в [38, 39], утверждение о том, что все физические явления происходят в пространстве — времени, геометрия которого псевдоевклидова, гораздо богаче содержания принципа относительности, поскольку это утверждение позволяет сформулировать обобщенный принцип относительности, справедливый не только в инерциальных, но и в неинерциальных системах координат. В этой связи необходимо отметить, что в научной литературе довольно часто можно встретить утверждение о том, что к специальной теории относительности относится только описание явлений в инерциальных системах отсчета, в то время как описание явлений в неинерциальных системах отсчета — прерогатива общей теории относительности.

Эти утверждения неправильны. Из фундаментального открытия Минковского тривиально следует, что для описания физических явлений можно пользоваться любым классом допустимых систем отсчета: инерциальных и неинерциальных. Тензор кривизны этого пространства — времени, который определяет всю его внутреннюю геометрию, остается равным нулю как в инерциальных, так и в неинерциальных системах отсчета. Поэтому в рамках специальной теории относительности полностью возможно описание физических явлений и в неинерциальных системах отсчета. Это предельно ясно понимал Фок [13].

Прежде чем приступить к формулировке обобщенного принципа относительности, кратко напомним различие понятий общей ковариантности и форминвариантности.

Понятие ковариантности довольно часто употребляют в значении форминвариантности, ему не свойственном, ввиду того что определения этих двух понятий близки друг к другу.

Уравнение называется *ковариантным* при некотором преобразовании координат, если новые неизвестные функции, которые входят в него и выражены в новых переменных, будут удовлетворять уравнениям того же вида, что и старые функции в старых переменных. Таким образом, требование ковариантности уравнений не является отражением какого-либо физического принципа, а является математическим требованием.

Как показал В. А. Фок [13], для того чтобы какое-либо уравнение было ковариантным, достаточно чтобы при произвольных допустимых преобразованиях координат оно преобразовывалось по тензорному закону. Поясним это примером. Уравнения релятивистской механики

$$Du^i(x)/Ds = \mathcal{F}^i(x) \tag{39}$$

ковариантны, так как в силу тензорного характера при произвольном допустимом преобразовании координат

$$x'^i = x'^i(x) \tag{40}$$

новые функции, выраженные в новых переменных $u'^i(x')$, будут удовлетворять уравнению того же вида, что и исходное уравнение (39):

$$D'u'^i(x')/D's' = \mathcal{F}'^i(x'),$$

т. е. при переходе от координат x к координатам x' все величины в (39) заменяются на соответствующие величины со штрихами. При этом следует особо подчеркнуть, что функциональная зависимость метрического тензора пространства — времени g'_{ni} от новых координат при преобразованиях (40) может меняться. Это означает, что если в первоначальной системе отсчета метрический тензор g_{ni} был одной функцией от координат x, то в «штрихованной» системе координат он может быть совершенно другой функцией от координат x'. Так как в ковариантные уравнения всегда входят метрический тензор пространства — времени или его производные, то и функциональная форма ковариантных уравнений при преобразовании (40) в общем случае изменяется.

В этом легко убедиться, если учесть, что при преобразованиях координат (40) метрический тензор пространства — времени преобразуется по закону

$$g'_{ni}(x') = \frac{\partial x^l}{\partial x'^n}\frac{\partial x^m}{\partial x'^i} g_{lm}(x(x')).$$

Таким образом, функциональная форма ковариантных уравнений физических процессов при преобразованиях (40) не сохраняется, а поэтому в различных системах координат описание явлений различно, т. е. в общем случае одни и те же явления в разных системах координат будут протекать различным образом.

Требование *форминвариантности* метрики при некоторых преобразованиях координат, т. е. неизменности функциональной зависимости метрического тензора при этом преобразовании, более жесткое, чем требование ковариантности уравнений. Это требование ограничивает класс координатных систем лишь такими системами, преобразования между которыми оставляют функциональную форму метрического тензора пространства — времени неизменной: функциональная зависимость тензора g_{ni} от координат x в одной системе отсчета является той же самой, что и зависимость тензора g'_{ni} от координат x' в любой другой системе отсчета из этого класса. Однако это требование гарантирует, что для всей группы преобразований, оставляющих метрику форминвариантной, функциональная форма уравнений поля будет неизменной. Поэтому во всех системах отсчета, преобразования между которыми оставляют метрику форминвариантной, все физические явления при соответствующих начальных и граничных условиях протекают одинаковым образом, так что невозможно установить, в какой именно из этих систем отсчета мы находимся.

Таким образом, ковариантность и форминвариантность — разные понятия. Преобразования, которые обеспечивают ковариантность уравнений поля, в общем случае включают преобразования между различными допустимыми, но неравноправными для описания физических явлений системами отсчета. В противоположность этому преобразования, обеспечивающие форминвариантность метрического тензора пространства — времени (а следовательно, и форминвариантность уравнений), включают преобразования только между эквивалентными с физической точки зрения системами отсчета, в которых все физические явления протекают одинаковым образом при соответственных начальных и граничных условиях.

Поскольку геометрия пространства — времени при переходе между различными системами отсчета не изменяется и остается псевдоевклидовой, то для любой как инерциальной, так и неинерциальной системы отсчета существует десятипараметрическая группа преобразований координат, оставляющих метрику форминвариантной. Таким образом, в псевдоевклидовом пространстве — времени для любой системы отсчета можно указать бесконечную совокупность других систем отсчета, преобразования между которыми оставляют метрику форминвариантной.

В псевдоевклидовом пространстве — времени справедлив обобщенный принцип относительности [38—39]: какую бы физическую систему отсчета мы ни избрали (инерциальную или неинерциальную), всегда можно указать бесконечную совокупность других систем отсчета, таких, что все физические явления в них протекают одинаковым образом с исходной системой отсчета. Следовательно, мы не имеем и не можем иметь никаких средств, чтобы различить на эксперименте, в какой именно системе отсчета из этой бесконечной совокупности мы находимся.

Таким образом, геометрия Минковского имеет всеобщий характер, являясь естественной геометрией для всех известных полей. Псевдоевклидово пространство — время не является априорным, заданным с самого начала и существующим независимо. Его существование неотделимо от существования материи, так как это геометрия, в которой происходит развитие материи. От характера геометрии пространства — времени в большой степени зависит возможность получения законов сохранения для замкнутой системы взаимодействующих полей.

Математически закон сохранения энергии — импульса и момента импульса — отражение определенных свойств пространства — времени: его свойств однородности и изотропности. Существует три типа пространств [40], обладающих свойствами однородности и изотропности в такой степени, что они допускают введение десяти интегралов движения для замкнутой системы: пространство постоянной отрицательной кривизны (пространство Лобачевского), пространство нулевой кривизны (псевдоевклидово пространство) и пространство постоянной положительной кривизны (пространство Римана). Первые два пространства бесконечны, имеют бесконечный объем, третье пространство замкнуто, имеет конечный объем, но не имеет границ.

2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПОЛЕВОГО ПОДХОДА К ОПИСАНИЮ ГРАВИТАЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Таким образом, для того чтобы гравитационное поле можно было считать физическим полем в духе Фарадея — Максвелла с его обычными свойствами носителя энергии — импульса, достаточно выбрать в качестве естественной геометрии для гравитационного поля одну из приведенных выше геометрий. Поскольку экспериментальные данные, полученные при изучении сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий, свидетельствуют, что для полей, связанных с этими взаимодействиями, естественная геометрия пространства — времени псевдоевклидова, то, по крайней мере на данной ступени наших знаний, можно считать, что эта геометрия — единая естественная геометрия для всех физических процессов, в том числе и для гравитационных.

Это утверждение составляет одно из основных положений развиваемого нами полевого подхода к теории гравитационного взаимодействия. Совершенно очевидно, что оно приводит к выполнению всех законов сохранения энергии — импульса и момента импульса и ко всем десяти интегралам движения для системы, состоящей из гравитационного поля и остальных полей материи. Гравитационное поле в полевом подходе аналогично всем другим физическим полям характеризуется своим тензором энергии — импульса, который вносит свой вклад в полный тензор энергии — импульса системы. В этом состоит основное принципиальное отличие нашего подхода от ОТО Эйнштейна. Следует также заметить, что в псевдоевклидовом пространстве — времени наряду с общей простотой интегрирование тензорных величин имеет вполне определенный смысл.

Другим ключевым вопросом, который возникает при построении теории гравитационного поля, является вопрос о характере взаимодействия гравитационного поля с веществом. Гравитационное поле при действии на вещество может эффективно изменять его геометрию, если оно входит в члены при высших производных в уравнения движения вещества. Тогда движение материальных тел и других физических полей в псевдоевклидовом пространстве — времени под действием гравитационного поля будет неотличимым от их движения в некотором эффективном римановом пространстве — времени. Из экспериментальных данных следует универсальность действия гравитационного поля на вещество, поэтому эффективное риманово пространство — время будет единым для всего вещества независимо от его вида.

Это приводит нас к утверждению, которое назовем *принципом тождественности* (*принципом геометризации*), определив его следующим образом: уравнения движения вещества под действием гравитационного поля в псевдоевклидовом пространстве — времени с метрическим тензором γ_{ni} можно тождественно представить как уравнения движения вещества в некотором эффективном римановом пространстве — времени с метрическим тензором g_{ni}, зависящим от гравитационного поля и метрического тензора γ_{ni}.

Этот принцип был введен и сформулирован в [28], хотя по существу он уже был высказан и в [3]. Описание движения вещества под действием гравитационного поля в псевдоевклидовом пространстве — времени физически тождественно описанию движения вещества в соответствующем эффективном римановом пространстве — времени. При таком подходе гравитационное поле (как физическое поле) при описании движения вещества как бы исключается и его энергия, образно говоря, идет на формирование эффективного риманова пространства — времени. Таким образом, эффективное риманово пространство — время — своеобразный носитель энергии — импульса; в согласии с принципом тождественности в него закладывается столько энергии, сколько ее содержится в гравитационном поле, а поэтому распространение волн кривизны в римановом пространстве — времени отражает обычный перенос энергии гравитационными волнами в псевдоевклидовом пространстве — времени. Это означает, что в полевом подходе волны кривизны в римановом пространстве — времени — прямые следствия существования гравитационных волн в духе Фарадея — Максвелла, которые обладают плотностью энергии — импульса.

Следует подчеркнуть, что принцип тождественности не вытекает из каких-то других физических принципов. Это есть независимый принцип, определяющий, с одной стороны, эквивалентность описания движения вещества, а с другой — характер взаимодействия гравитационного поля с веществом и соответствующий, таким образом, определенному выбору плотности лагранжиана взаимодействия между ними. Принцип тождественности, в частности, отражает и тот физический факт, что инертная масса точечного тела равна его гравитационной массе.

Отметим также, что при введении принципа геометризации мы сохраняем великую идею Эйнштейна о римановой геометрии пространства — времени для вещества. Однако это не означает что мы неизбежно должны вернуться к ОТО. Теория Эйнштейна является частной реализацией этой идеи, а не наоборот. Поэтому идея о гравитационном поле как о физическом поле, переносящем энергию, объединенная с принципом тождественности, приводит к другим уравнениям гравитационного поля, отличным от уравнений Эйнштейна, и изменяет наши представления о пространстве — времени и гравитации. Новая теория гравитации, реализующая эту идею, позволяет описать всю имеющуюся совокупность гравитационных экспериментов, удовлетворяет принципу соответствия и приводит к ряду фундаментальных следствий.

Следует подчеркнуть, что полевой подход к теории гравитационного взаимодействия не конкретизирует заранее природу гравитационного поля. Мы не знаем, какова природа реального гравитационного поля. Возможно, что для его адекватного описания необходимо использовать спин-тензоры или скалярное поле. Пока еще недостаток экспериментального материала в области гравитации предоставляет широкий простор для теоретических построений, поэтому только время и новые экспериментальные факты позволят сделать окончательный выбор варианта теории.

3. СИММЕТРИЧЕСКОЕ ТЕНЗОРНОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ

Одна из возможных реализаций полевого подхода заключается в использовании симметрического тензорного поля второго ранга для описания гравитационного поля. Следует отметить, что ранее многие авторы пытались сформулировать теорию гравитации в плоском пространстве — времени, используя для этого различные поля: скалярное, векторное и симметрическое тензорное. Однако эти попытки носили случайный характер и не содержали четкой формулировки теоретико-полевых требований к теории гравитации. В результате этого простейшие варианты, предложенные в работах [41—71], или противоречили имеющимся экспериментальным данным, или не обладали логической последовательностью и требовали формулировки дополнительных условий для обеспечения положительной определенности энергии гравитационных волн [72].

Это обстоятельство дало основания Тиррингу [73], а впоследствии и другим авторам [74—75] для утверждений о том, что любой путь построения теории тяготения на базе плоского пространства — времени, исходящий из представлений о гравитационном поле как о физическом поле в духе Фарадея — Максвелла, неизбежно приведет к ОТО Эйнштейна.

Однако анализ теории Эйнштейна, проделанный нами [1—8], а также поиск других возможностей для построения теории гравитации [28—31] показали полную необоснованность этих утверждений. С одной стороны, теория Эйнштейна отошла от понятия гравитационного поля как физического поля, обладающего энергией — импульсом, и ввела поле нового типа — поле, характеризуемое тензором кривизны, а с другой стороны, она лишена фундаментального принципа — законов сохранения энергии — импульса вещества и гравитационного поля вместе взятых. Это слишком дорогая цена, которую следует платить за объяснение небольшого числа гравитационных экспериментов. Поэтому возникает необходимость сравнить между собой различные классы теорий гравитации, которые традиционно используют симметрическое тензорное поле второго ранга, и выяснить, какой из них вводит гравитационное поле наиболее приемлемо с физической точки зрения.

При построении теории гравитации ключевым моментом является выбор естественной геометрии для гравитационного поля. Для линейных теорий естественная геометрия — геометрия плоского пространства — времени и теории гравитации с линейными уравнениями свободного гравитационного поля формулируются в терминах плоского пространства — времени с метрическим тензором γ_{ni}. Теории гравитации, формулируемые в терминах плоского пространства — времени, будем называть *теориями класса А*. Теории класса А могут быть и нелинейными, но важно то, что эта нелинейность не входит в члены со старшими производными в уравнениях поля и не меняет, таким образом, геометрию естественного пространства — времени. Таким образом, в теориях класса А имеем единое плоское пространство — время, что гарантирует наличие всех десяти законов сохранения для замкнутой системы; риманово же пространство — время, в терминах которого описывается движение вещества, эффективно и возникает как результат действия гравитационного поля φ_{ni} на вещество.

Среди теорий класса *А* следует отметить подкласс двуметрических теорий, у которых гравитационное поле φ_{ni} в комбинации с метрическим тензором γ_{ni} образует в плотности лагранжиана гравитационного поля L_g новую полевую переменную — метрический тензор эффективного риманова пространства — времени g_{ni}, в терминах которого формулируются уравнения движения вещества, причем естественной геометрией для этой полевой переменной является псевдоевклидова геометрия:

$$L = L_g(\gamma_{ni}, g_{ni}(\gamma_{mk}, \varphi_{mk})) + L_M(g_{ni}, \varphi_A).$$

Пример нелинейной теории этого подкласса — теория Розена [65] с плотностью лагранжиана:

$$L_g = \frac{\sqrt{-\gamma}}{64\pi}\gamma^{ik}g^{nm}g^{pl}\left[D_i g_{nl} D_k g_{mp} - \frac{1}{2} D_i g_{nm} D_k g_{pl}\right],$$

где γ — определитель метрического тензора плоского пространства — времени; D_i — ковариантная производная в плоском пространстве — времени; здесь и далее полагается, что $G = c = 1$.

В двуметрических теориях гравитационное поле φ_{ni} фактически отсутствует, так как полевая переменная — метрический тензор g_{ni}, поэтому здесь нет достаточно глубокого физического обоснования связи между эффективным римановым пространством — временем и единым плоским пространством — временем.

В теориях класса А фактически имеем два физических пространства — времени — плоское пространство — время с метрическим тензором γ_{ni}, в терминах которого формулируются уравнения гравитационного поля, и неевклидово пространство — время с метрическим тензором g_{ni}, в терминах которого формулируется движение вещества. Оба эти пространства — времени — реальные наблюдаемые пространства — времени. Фронт гравитационной волны движется по геодезическим плоского пространства — времени, поэтому гравитационные волны можно использовать для определения геометрии псевдоевклидова пространства — времени. Фронт электромагнитной волны движется по геодезическим эффективного риманова пространства — времени, поэтому электромагнитные волны и массивные частицы можно использовать для определения геометрии этого риманова пространства — времени.

Если в нелинейной теории тензорного поля φ_{ni} нелинейные члены входят в свертку производных в плотности лагранжиана (в члены со старшими производными в уравнениях поля), то для такой теории естественным является неевклидово пространство — время с некоторым эффективным метрическим тензором $g_{ni} = g_{ni}(\gamma_{mk}, \varphi_{mk})$. Теории гравитации, формулируемые в терминах эффективного риманова пространства — времени, будем называть *теориями класса Б*. Плотность лагранжиана теорий этого класса имеет вид:

$$L = L_g(g_{ni}, \varphi_{ni}) + L_M(g_{ni}, \varphi_A).$$

Теории этого класса заслуживают специального рассмотрения.

Поскольку плоское пространство — время в теориях этого класса не наблюдается, то здесь, очевидно, отсутствует достаточное обоснование связи $g_{ni} = g_{ni}(\gamma_{mk}, \varphi_{mk})$ между единым римановым пространством — временем и гравитационным полем φ_{ni}. Единое риманово пространство — время в теориях этого класса возникает на базе гравитационного поля φ_{ni} и ненаблюдаемого плоского пространства — времени. Следует отметить также, что уравнения гравитационного поля в теориях класса Б обязательно нелинейны.

Подклассом геометризованных теорий класса Б является множество теорий с полной геометризацией, в которых плотность лагранжиана гравитационного поля зависит только от метрического тензора g_{ni}:

$$L = L_g(g_{ni}) + L_M(g_{ni}, \varphi_A).$$

Теория Эйнштейна относится к этому подклассу теорий и соответствует частному выбору плотности лагранжиана в форме $L_g = \sqrt{-g}R$. В теориях с полной геометризацией плоское пространство — время полностью исключено из описания движения как вещества, так и гравитационного поля. Ни гравитационное поле φ_{ni}, ни метрический тензор γ_{ni} нигде в теории не появляются. Величины g_{ni} имеют при этом двойной смысл: переменных физического поля и метрического тензора пространства — времени. Это приводит к тому, что в теориях этого подкласса гравитационное поле не является полем Фарадея — Максвелла, обладающим плотностью энергии — импульса.

Следует подчеркнуть, что теории классов А и Б — это существенно различные теории гравитации. Никаким преобразованием переменных поля или преобразованием координат нельзя преобразовать теорию одного класса в теорию другого класса.

Таким образом, анализируя имеющиеся возможности, приходим к выводу что только теории класса А вводят гравитационное поле наиболее приемлемо с физической точки зрения. Теории этого класса позволяют считать гравитационное поле физическим полем в духе Фарадея — Максвелла и обладают всеми десятью интегралами движения для замкнутой системы взаимодействующих полей. Эффективное риманово пространство — время, используемое для описания движения вещества, в теориях этого класса естественным образом отражает существование физического гравитационного поля и единого псевдоевклидова пространства — времени.

Следовательно, мы вновь приходим к необходимости первоочередного изучения возможностей построения теории гравитации, реализующей полевой подход к описанию гравитационного взаимодействия.

4. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ И ВЕЩЕСТВА

Изучим характер законов сохранения для всех локальных теорий класса А, не связывая себя конкретным выбором плотности лагранжиана. Исходя из основных принципов полевого подхода плотность лагранжиана системы, состоящей из вещества и гравитационного поля, для теорий этого класса запишем в виде

$$L = L_g(\gamma_{ni}, \varphi_{ni}) + L_M(g_{ni}, \varphi_A), \tag{41}$$

где γ_{ni} — метрический тензор псевдоевклидова пространства — времени с сигнатурой $(+, -, -, -)$; φ_{ni} — гравитационное поле; φ_A — остальные поля материи.

Не ограничивая общности, будем считать, что метрический тензор риманова пространства — времени g_{ni} — локальная функция, зависящая от метрического тензора плоского пространства — времени, гравитационного поля φ_{ni} и их частных производных до второго порядка включительно:

$$g_{ml} = g_{ml}(\gamma_{ni}, \partial_p\gamma_{ni}, \partial_{pk}\gamma_{ni}, \varphi_{ni}, \partial_p\varphi_{ni}, \partial_{pk}\varphi_{ni}), \tag{42}$$

где

$$\partial_{nm}\varphi = \partial^2\varphi/\partial x^n \partial x^m.$$

Плотность лагранжиана вещества L_M будем считать зависящей только от полей φ_A, их частных производных первого порядка и метрического тензора g_{ni}. Легко убедиться, что в этом случае в плотность лагранжиана вещества войдут частные производные гравитационного поля вплоть до второго порядка. Плотность лагранжиана гравитационного поля считаем зависящей от метрического тензора γ_{ni}, гравитационного поля φ_{ni} и их частных производных до третьего порядка включительно. Для получения законов сохранения воспользуемся ковариантным методом бесконечно малых смещений.

Поскольку действие J — скаляр, то при произвольном бесконечно малом преобразовании координат

$$x'^i = x^i + \xi^i(x) \tag{43}$$

вариации действия вещества δJ_M и гравитационного поля δJ_g будут равны нулю.

Так как в плотность лагранжиана вещества войдут как ковариантные, так и контравариантные компоненты метрического тензора риманова пространства — времени, будем варьировать плотность лагранжиана по ним как по независимым, а затем учтем соотношения между их вариациями

$$\delta g^{nm} = -g^{ni}g^{ml}\delta g_{il},$$

тогда плотность симметрического тензора энергии — импульса вещества в римановом пространстве — времени T^{ni} будет иметь вид

$$T^{ni} = -2\frac{\Delta L_M}{\Delta g_{ni}} = -2\left(\frac{\delta L_M}{\delta g_{ni}} - g^{im}g^{nl}\frac{\delta L_M}{\delta g^{ml}}\right), \tag{44}$$

где $\delta L/\delta\varphi$ — вариация Эйлера — Лагранжа:

$$\frac{\delta L}{\delta\varphi} = \frac{\partial L}{\partial\varphi} - \partial_n\left(\frac{\delta L}{\partial(\partial_n\varphi)}\right) + \partial_{nl}\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_{nl}\varphi)}\right) - \partial_{nli}\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_{nli}\varphi)}\right). \tag{45}$$

Совершенно аналогично будем поступать и при варьировании по компонентам γ_{ni} и γ^{in} метрического тензора плоского пространства — времени.

Вариацию интеграла действия вещества при преобразовании (43) запишем в виде

$$\delta J_M = \int d^4x\left\{\frac{\Delta L_M}{\Delta g_{ni}}\delta g_{ni} + \frac{\delta L_M}{\delta\varphi_A}\delta\varphi_A + \mathrm{Div}\right\} = 0, \tag{46}$$

где Div — дивергенциальные члены, учет которых приводит к соотношениям, несущественным для целей нашего рассмотрения.

Вводя обозначение

$$\left.\begin{aligned} t_M^{mn} &= -2\frac{\Delta L_M}{\Delta\gamma_{nm}} = -2\left(\frac{\delta L_M}{\delta\gamma_{nm}} - \gamma^{ns}\gamma^{mk}\frac{\delta L_M}{\delta\gamma^{sk}}\right);\\ t_{Mi}^{n} &= \gamma_{im}t_M^{nm}, \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

для плотности тензора энергии — импульса вещества в плоском пространстве — времени, вариацию интеграла действия δJ_M при преобразованиях координат (43) можно записать и в другом виде, эквивалентном выражению (46):

$$\delta J_M = \int d^4x\left\{\frac{\delta L_M}{\delta\varphi_{nm}}\delta\varphi_{nm} + \frac{\Delta L_M}{\Delta\gamma_{mn}}\delta\gamma_{nm} + \frac{\delta L_M}{\delta\varphi_A}\delta\varphi_A + \mathrm{Div}\right\} = 0. \tag{48}$$

Вариации $\delta\gamma_{nm}$, $\delta\varphi_{nm}$, $\delta\varphi_A$ и δg_{nm} при преобразованиях координат (43) имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \delta\gamma_{nm} &= -\gamma_{nl}D_m\xi^l - \gamma_{ml}D_n\xi^l;\\ \delta\varphi_{nm} &= -\varphi_{nl}D_m\xi^l - \varphi_{ml}D_n\xi^l - \xi^l D_l\varphi_{nm};\\ \delta\varphi_A &= -\xi^l D_l\varphi_A + F_{A;\,l}^{B;\,n}\varphi_B D_n\xi^l;\\ \delta g_{nm} &= -g_{nl}D_m\xi^l - g_{ml}D_n\xi^l - \xi^l D_l g_{nm}. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

С учетом этих равенств вариацию действия вещества (48) можно записать так:

$$\begin{aligned} \delta J_M = \int d^4x\Big\{\xi^l\Big[&2D_n\left(\frac{\delta L_M}{\delta\varphi_{nm}}\varphi_{ml}\right) - \\ &- D_n t_{Ml}^n - \frac{\delta L_M}{\delta\varphi_{nm}}D_l\varphi_{mn} - D_n\left(\frac{\delta L_M}{\delta\varphi_A}F_{A;\,l}^{B;\,n}\varphi_B\right) - \\ &- \frac{\delta L_M}{\delta\varphi_A}D_l\varphi_A\Big] + \mathrm{Div}\Big\} = 0. \end{aligned} \tag{50}$$

Из произвольности вектора смещения ξ^l в выражении (50) следует тождество

$$D_l t^l_{Mn} - 2D_l\left(\frac{\delta L_M}{\delta\varphi_{lm}}\varphi_{mn}\right) + \frac{\delta L_M}{\delta\varphi_{lm}} D_n\varphi_{lm} + $$
$$+ D_l\left(\frac{\delta L_M}{\delta\varphi_A} F^{B;\,l}_{A;\,n}\varphi_B\right) + \frac{\delta L_M}{\delta\varphi_A} D_n\varphi_A \equiv 0. \qquad (51)$$

Другое важное тождество получим, если подставим соотношения (49) в выражение (46):

$$D_l(g_{nm}T^{lm}) - \frac{1}{2}T^{lm}D_n g_{ml} = -D_l\left(\frac{\delta L_M}{\delta\varphi_A} F^{B;\,l}_{A;\,n}\varphi_B\right) - \frac{\delta L_M}{\delta\varphi_A} D_n\varphi_A. \qquad (52)$$

Выразим теперь ковариантные производные, стоящие в левой части тождества (52), через частные производные и связности плоского пространства — времени γ^i_{nl}. Учитывая, что T^{ni} — плотность тензора веса 1, получаем

$$\partial_i(g_{nm}T^{mi}) - \frac{1}{2}T^{im}\partial_n g_{im} = -D_i\left(\frac{\delta L_M}{\delta\varphi_A} F^{B;\,i}_{A;\,n}\varphi_B\right) - \frac{\delta L_M}{\delta\varphi_A} D_n\varphi_A.$$

Но левая часть этого выражения представляет собой ковариантную дивергенцию в римановом пространстве — времени от плотности тензора энергии — импульса вещества T^i_n:

$$\partial_i(g_{nm}T^{mi}) - \frac{1}{2}T^{im}\partial_n g_{im} = \partial_i T^i_n - \Gamma^m_{ni}T^i_m = \nabla_i T^i_n = g_{nm}\nabla_i T^{im},$$

где Γ^m_{ni} — связность риманова пространства — времени.

Поэтому соотношение (52) принимает вид:

$$g_{ni}\nabla_m T^{im} = -D_i\left(\frac{\delta L_M}{\delta\varphi_A} F^{B;\,i}_{A;\,n}\varphi_B\right) - \frac{\delta L_M}{\delta\varphi_A} D_n\varphi_A.$$

Вычитая из выражения (51) это равенство, получаем

$$D_i t^i_{Mn} - 2D_i\left(\frac{\delta L_M}{\delta\varphi_{im}}\varphi_{mn}\right) + \frac{\delta L_M}{\delta\varphi_{im}} D_n\varphi_{im} = g_{ni}\nabla_m T^{im}. \qquad (53)$$

Следует подчеркнуть, что это тождество справедливо независимо от выполнения уравнений движения вещества и гравитационного поля.

Аналогичным образом из инвариантности действия гравитационного поля при преобразовании (43) получим

$$D_i t^i_{gn} - 2D_i\left(\frac{\delta L_g}{\delta\varphi_{im}}\varphi_{mn}\right) + \frac{\delta L_g}{\delta\varphi_{im}} D_n\varphi_{im} = 0. \qquad (54)$$

Для плотности симметрического тензора энергии — импульса гравитационного поля t^i_{gn} как обычно имеем:

$$t^i_{gn} = -2\gamma_{nm}\Delta L_g/\Delta\gamma_{im}. \qquad (55)$$

Из соотношений (53) и (54) следует, что

$$D_i\,(t^i_{Mn}+t^i_{gn})-2D_i\left(\frac{\delta L}{\delta\varphi_{im}}\varphi_{mn}\right)+\frac{\delta L}{\delta\varphi_{im}}D_n\varphi_{im}=\nabla_i T^i_n. \qquad (56)$$

При условии выполнения уравнений гравитационного поля

$$\delta L/\delta\varphi_{im}=\delta L_g/\delta\varphi_{im}+\delta L_M/\delta\varphi_{im}=0 \qquad (57)$$

выражение (56) упрощается:

$$D_i\,(t^i_{Mn}+t^i_{gn})=g_{ni}\nabla_m T^{im}. \qquad (58)$$

Это равенство является проявлением принципа тождественности. Из него следует, что ковариантная дивергенция в псевдоевклидовом пространстве — времени от суммы плотностей тензоров энергии — импульса вещества и гравитационного поля преобразовалась в ковариантную дивергенцию в римановом пространстве — времени от плотности тензора энергии — импульса только вещества. Таким образом, это различные формы записи одного и того же выражения.

При условии выполнения уравнений движения вещества

$$\delta L_M/\delta\varphi_A=0 \qquad (59)$$

выражение (51) упрощается:

$$D_i t^i_{Mn}-2D_i\left(\frac{\delta L_M}{\delta\varphi_{im}}\varphi_{mn}\right)+\frac{\delta L_M}{\delta\varphi_{im}}D_n\varphi_{im}=0, \qquad (60)$$

а из соотношения (52) автоматически следует ковариантное уравнение сохранения в римановом пространстве — времени:

$$\nabla_n T^{ni}=0. \qquad (61)$$

Это утверждение — общее для теорий с геометризованной плотностью лагранжиана вещества и не связано с каким-либо конкретным вариантом теории гравитации.

Далее видим, что из соотношений (60) и (54) при условии выполнения уравнений гравитационного поля (57) следует ковариантный закон сохранения для плотности полного симметрического тензора энергии — импульса в псевдоевклидовом пространстве — времени:

$$D_i\,(t^i_{Mn}+t^i_{gn})=0. \qquad (62)$$

Таким образом, на основе лагранжева формализма мы получили закон сохранения энергии — импульса вещества и гравитационного поля в псевдоевклидовом пространстве — времени. Этот фундаментальный закон природы означает, что в полевой теории гравитации отсутствуют какие-либо процессы (независимо от эрудиции их изобретателей), идущие с несохранением энергии — импульса. Из выражения (62) следует также, что гравитационное поле, рассматриваемое в псевдоевклидовом пространстве — времени, ведет себя аналогично всем другим физическим полям. Оно обладает энергией — импульсом и вносит вклад в плотность полного тензора энергии — импульса системы.

На основании равенства (62) и тождества (58) имеем

$$D_i\ (t^i_{Mn} + t^i_{gn}) = g_{nm}\nabla_i T^{im} = 0.$$

Следовательно, закон сохранения для плотности полного тензора энергии — импульса (62) и закон сохранения в форме (61) при выполнении уравнений гравитационного поля (57) и уравнений движения вещества (59) представляют собой просто различные формы записи одного и того же закона сохранения. Закон сохранения (62) выражает тот факт, что в псевдоевклидовом пространстве — времени сохраняется плотность полного тензора энергии — импульса системы, состоящей из вещества и гравитационного поля. Этот закон имеет обычный вид закона сохранения. Закон сохранения (61) в римановом пространстве — времени не является законом сохранения в обычном понимании, так как плотность тензора энергии — импульса вещества T^{ni} не должна сохраняться $\partial_n T^{ni} \neq 0$.

Как указывал еще Эйнштейн [12, с. 492]: «...Наличие второго члена в левой части с физической точки зрения означает, что для одной лишь материи законы сохранения импульса и энергии в их подлинном смысле не выполняются; точнее говоря, они выполняются лишь тогда, когда g_{ni} постоянны, т. е. когда компоненты напряженности гравитационного поля равны нулю. Этот второй член представляет собой выражение для импульса и, соответственно, для энергии, которые в единицу времени и в единице объема передаются материи от гравитационного поля...».

В этом случае второе слагаемое в (61) выражает энергетическое воздействие гравитационного поля на материю и показывает, что материя получает энергию как бы «запасенную» в римановой геометрии. Энергия же гравитационного поля в этом случае как бы пошла на создание римановой геометрии. Из выражения (61) не видно, какая величина сохраняется.

Отсутствие законов сохранения в их подлинном смысле присуще всему подклассу теорий гравитации с полной геометризацией, а не только теории Эйнштейна. Плотность лагранжиана гравитационного поля L_g теорий этого подкласса зависит от поля φ_{ni} и метрического тензора γ_{ni} только через метрический тензор риманова пространства — времени g_{ni}. В теориях этого подкласса для плотности симметрического тензора энергии — импульса вещества и гравитационного поля в псевдоевклидовом пространстве времени имеем

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}t^{ni} &= \frac{\Delta L}{\Delta\gamma_{ni}} = \frac{\Delta L_g}{\Delta\gamma_{ni}} + \frac{\Delta L_M}{\Delta\gamma_{ni}} = \frac{\Delta L}{\Delta g_{ml}}\frac{\partial g_{ml}}{\partial\gamma_{ni}} - \\
&- \partial_p\left[\frac{\Delta L}{\Delta g_{lm}}\frac{\partial g_{lm}}{\partial(\partial_p\gamma_{ni})}\right] + \partial_{pq}\left[\frac{\Delta L}{\Delta g_{lm}}\frac{\partial g_{lm}}{\partial(\partial_{pq}\gamma_{ni})}\right] - \\
&- \gamma^{is}\gamma^{np}\left\{\frac{\Delta L}{\Delta g_{lm}}\frac{\partial g_{lm}}{\partial\gamma^{sp}} - \partial_q\left[\frac{\Delta L}{\Delta g_{lm}}\frac{\partial g_{lm}}{\partial(\partial_q\gamma^{sp})} - \partial_k\left(\frac{\Delta L}{\Delta g_{lm}}\frac{\partial g_{lm}}{\partial(\partial_{qk}\gamma^{sp})}\right)\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

Так как в геометризованной теории уравнения гравитационного поля

$$\Delta L/\Delta g_{lm} = \delta L/\delta g_{lm} - g^{li}g^{mn}\delta L/\delta g^{ni} = 0,$$

то плотность симметрического тензора энергии — импульса вещества и гравитационного поля в псевдоевклидовом пространстве — времени в силу уравнений гравитационного поля обращается в нуль:

$$\Delta L/\Delta\gamma_{ni} = -t^{ni}/2 = 0. \tag{63}$$

Аналогичный вывод о равенстве нулю плотности симметрического тензора энергии — импульса получаем и для свободного гравитационного поля. Но уравнения свободного гравитационного поля содержат решения, для которых тензор кривизны R^i_{nlm} отличен от нуля. Поэтому в теориях с полной геометризацией обращение в нуль плотности тензора энергии — импульса свободного гравитационного поля не ведет к исчезновению поля φ_{ni} и, следовательно, существует некоторое фиктивное поле, не обладающее плотностью энергии — импульса, но приводящее к искривлению пространства — времени (образованию римановой геометрии). Отсюда следует, что теория физического гравитационного поля, обладающего энергией — импульсом, на базе плоского пространства — времени в принципе не может быть сведена к ОТО. Следовательно, утверждения некоторых авторов [74, 75] о неизбежности такого сведения неправильны. Подкласс теорий гравитации с полной геометризацией в принципе не позволяет ввести понятие гравитационного поля, обладающего энергией — импульсом.

Таким образом, приходим к следующим выводам: 1. В локальных теориях класса А гравитационное поле, описываемое в псевдоевклидовом пространстве — времени, является физическим полем с энергией — импульсом. Движение вещества на основании принципа тождественности описывается в эффективном римановом пространстве — времени, на создание которого идет энергия — импульс гравитационного поля. В этом подходе геометрическое описание возникает на основе теоретико-полевых представлений о гравитационном поле, и в его основе лежат законы сохранения. 2. В подклассе теорий с полной геометризацией гравитационное поле и вещество имеют единую геометрию, но гравитационное поле теряет свойства физического поля, оно не обладает плотностью энергии — импульса. В этом подходе отсутствуют теоретико-полевые представления о гравитационном поле как о поле в духе Фарадея — Максвелла.

Общая теория относительности реализует данную возможность построения теории. Она ввела поле нового типа, описываемое тензором кривизны, которое не является полем Фарадея — Максвелла. Здесь отсутствуют законы сохранения вещества и гравитационного поля вместе взятых, а следовательно, эта теория не удовлетворяет принципу соответствия с теорией гравитации Ньютона.

5. КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНОЕ ТЕНЗОРНОЕ ПОЛЕ

В этом разделе все соотношения и уравнения будем формулировать в декартовых координатах, хотя, конечно, их можно записать ковариантным образом и в произвольной криволинейной системе координат.

Рассмотрим теории класса A с плотностью лагранжиана в форме (41). Уравнения гравитационного поля и уравнения движения вещества имеют вид:

$$\delta L_g/\delta\varphi_{nm} + \delta L_M/\delta\varphi_{nm} = 0; \qquad (64)$$

$$\delta L/\delta\varphi_A = 0. \qquad (65)$$

Среди множества теорий с плотностью лагранжиана (41) имеются теории, в которых интеграл действия инвариантен относительно калибровочного преобразования:

$$\varphi_{ni} \to \varphi_{ni} + \partial_i a_n + \partial_n a_i, \qquad (66)$$

где a_i — произвольный калибровочный 4-вектор. Из инвариантности интеграла действия свободного гравитационного поля при калибровочном преобразовании (66) имеем

$$\delta J_g = \int d^4x\,[-2a_n\partial_i\,(\delta L_g/\delta\varphi_{ni}) + \mathrm{Div}] = 0.$$

В силу произвольности калибровочного вектора a_n получим

$$\partial_i\,(\delta L_g/\delta\varphi_{ni}) = 0.$$

Из этого уравнения и уравнения поля (64) следует уравнение сохранения для источника гравитационного поля

$$\partial_i\,(\delta L_M/\delta\varphi_{ni}) = 0.$$

Как известно [76], в электродинамике из инвариантности плотности лагранжиана $L = L_A + L_M$ относительно калибровочного преобразования вектор-потенциала $A_i \to A_i + \partial_i f$ следуют аналогичные уравнения сохранения:

$$\partial_i \delta L_A / \delta A_i = 0; \; \partial_i \delta L_M / \delta A_i = 0.$$

Поскольку в калибровочной теории источник в уравнениях поля является сохраняющимся, обычно предполагают, что источник в уравнениях калибровочной теории гравитации — полный тензор энергии — импульса системы вещество плюс гравитационное поле. Это приводит к тому, что уравнения поля становятся нелинейными, и обычно высказывается предположение, что последовательное включение таких нелинейностей может привести к нелинейной теории гравитации Эйнштейна [74, 75, 77].

Однако в действительности подобная гипотеза приводит прежде всего к тому, что гравитационное поле теряет свойства носителя энергии — импульса. Если предположить возможность отождествления источника $\delta L_M / \delta \varphi_{ni} = J^{ni}/2$ с полным тензором энергии — импульса $t^{ni} = t_g^{ni} + t_M^{ni}$, то отсюда непосредственно следует, что тензор энергии — импульса свободного гравитационного поля (при $L_M = 0$) равен нулю. Подобная теория не обладает свойствами, характерными для других физических систем, и поэтому мы ее считаем неприемлемой.

Согласно теореме Нётер инвариантность интеграла действия относительно некоторой группы преобразований влечет существование определенных сохраняющихся величин. Инвариантность относительно преобразований координат приводит, как известно, к сохранению плотности тензора энергии — импульса t^{ni}. Инвариантность интеграла действия относительно калибровочных преобразований (66) приводит к сохранению тока j^{ni}. Так как координатные и калибровочные преобразования — это совершенно различные преобразования, то и величины t^{ni} и j^{ni} представляют собой, естественно, совершенно различные физические величины.

Проблема построения калибровочно-инвариантной теории тензорного поля — это прежде всего проблема построения сохраняющегося тензорного тока j^{ni}, или, другими словами, проблема построения плотности лагранжиана вещества L_M, который приводит к сохраняющейся вариации $\delta L_M / \delta \varphi_{ni}$. Для решения этой проблемы необходимо рассмотреть вопрос о спиновых состояниях поля, описываемого симметрическим тензором второго ранга.

Как показано в [78, 79], симметрический тензор второго ранга φ_{ni} можно представить в виде суммы неприводимых представлений: одного представления со спином 2, одного — со спином 1 и двух представлений со спином 0:

$$\varphi_{ni} = (P_2 + P_1 + P_0 + P_{0^*})_{ni}^{lm} \varphi_{lm}.$$

Величины P_S удобно записать в импульсном представлении. Введем вспомогательные операторы:

$$X_{ni} = (1/\sqrt{3})(\gamma_{ni} - q_n q_i/q^2); \quad Y_{ni} = q_n q_i/q^2,$$

с помощью которых операторы P_S можно представить в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} &P_0 = X_{ni}X^{lm}; \quad P_{0'} = Y_{ni}Y^{lm}; \\ &P_1 = (\sqrt{3}/2)(X_i^l Y_n^m + X_n^l Y_i^m + X_i^m Y_n^l + X_n^m Y_i^l); \\ &P_2 = (3/2)(X_i^l X_n^m + X_n^l X_i^m) - X_{ni}X^{lm}. \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

В X-представлении проекционные операторы P_S— нелокальные интегродифференциальные операторы:

$$P_{ni}^{lm}\varphi_{lm} = \int d^4y P_{ni}^{lm}(x, y)\varphi_{lm}(y).$$

Используя выражения (67), легко убедиться, что сохраняющимися являются только операторы P_2 и P_0:

$$q_l P_{2ni}^{lm} = q_m P_{2ni}^{lm} = q_l P_{0ni}^{lm} = q_m P_{0ni}^{lm} = 0.$$

Поэтому если в плотность лагранжиана гравитационного поля L_g поле φ_{ni} будет входить только в виде комбинации

$$f_{ni} = [(P_2 + \alpha P_0)\varphi]_{ni}, \tag{68}$$

то плотность лагранжиана, а следовательно, и уравнения свободного гравитационного поля будут инвариантными относительно калибровочного преобразования (66). Однако применение выражения (68) не совсем удобно, так как оно является интегродифференциальным и поэтому приводит к нелокальным уравнениям поля.

Для того чтобы уравнения поля были локальными, необходима дифференциальная связь между полями f_{ni} и φ_{ni}. Этого можно добиться, если взять, например, следующую комбинацию:

$$f_{ni} = \Box^2[(P_2 + \alpha P_0)\varphi]_{ni}.$$

В этом случае тензор f_{ni} будет содержать четвертые производные от функции поля φ_{ni}. Но среди всех значений α значение $\alpha = -2$ является выделенным в том смысле, что позволяет записать f_{ni} в виде комбинации не четвертых производных от поля φ_{ni}, а лишь используя вторые производные:

$$f_{ni} = \Box[(P_2 - 2P_0)\varphi]_{ni}. \tag{69}$$

Легко убедиться, что оператор $\Box(P_2 - 2P_0)$ — градиентно-инвариантный и локальный оператор самого низшего порядка: в теории, использующей симметрическое тензорное поле второго ранга, нет другого локального оператора, использующего более низшие производные и приводящего к калибровочной инвариантности. Таким образом, имеем

$$f_{ni} = \Box\, \theta_{ni} - \partial_i \partial^m \theta_{mn} - \partial_n \partial^m \theta_{mi} + \\ + \gamma_{ni} \partial^l \partial^m \theta_{lm}; \ \partial^i f_{ni} = 0, \tag{70}$$

где введено обозначение

$$\theta_{lm} = \varphi_{lm} - \gamma_{lm} \varphi^n_n / 2. \tag{71}$$

В этом случае векторное поле и поле спина $0'$, которые не инвариантны при градиентном преобразовании (66), будут исключены из теории.

Поскольку вся теория должна быть калибровочно-инвариантной, то считаем, что в уравнения связи $g_{ni} = g_{ni}(\varphi_{lm})$ поля φ_{lm} входят только через поле f_{lm}. Более того, считаем, что метрический тензор риманова пространства — времени g_{ni} является локальной функцией только от полей f_{lm} и от метрического тензора плоского пространства — времени. Относительно вида этой функции сейчас не будем делать никаких предположений, кроме требования, чтобы квадратичная форма с коэффициентами $g_{\alpha\beta}$ была отрицательно определенной, а компонента g_{00} была положительной величиной. Тогда параметр x^0 будет иметь характер времени, а параметры x^α — характер пространственных координат в римановом пространстве — времени.

6. УРАВНЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ В ПОЛЕВОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Калибровочно-инвариантная теория, приводящая к линейным уравнениям свободного гравитационного поля, является простейшим вариантом среди всех теорий класса A. Эту теорию гравитации в дальнейшем будем называть полевой теорией гравитации. Плотность лагранжиана гравитационного поля полевой теории с использованием производных от полей f_{nm} не выше первого порядка в самом общем виде можно записать:

$$L_g = \frac{1}{64\pi} \{\partial_i f_{nm} \partial^i f^{nm} - b \partial_i f \partial^i f - m_g^2 [\alpha f_{nm} f^{nm} + \beta f^2]\},$$

где $f = f^n_n$.

При $\alpha \neq 0$ или $\beta \neq 0$ полученные уравнения будут описывать гравитационное поле, квант которого (гравитон) обладает не равной нулю массой покоя. Так как мы ожидаем, что фронт гравитационной волны распространяется с фундаментальной скоростью $v = c$, масса покоя гравитона должна быть равна нулю. Для этого необходимо положить $\alpha = \beta = 0$.

Перебором различных значений b можно реализовать различные физические ситуации. Можно показать, что энергия свободного гравитационного поля является знакоположительной величиной, если $b \leqslant 1/2$. Кроме того, при $b < 1/2$ происходит излучение скалярной компоненты гравитационных волн, причем величина этой компоненты и ее энергия существенно зависят от b, так как при $b < 1/2$ скалярная компонента переносит положительную энергию. Однако такая степень общности в дальнейшем нам не потребуется, так как мы предполагаем, что гравитационные волны (гравитоны) характеризуются значением спина $S = 2$ и положительно определенной энергией. Поэтому в дальнейшем положим $b = 1/2$, чтобы исключить излучение скалярной компоненты.

Итак, приходим к плотности лагранжиана свободного гравитационного поля в виде

$$L_g = (1/64\pi) \{\partial_i f_{nm} \partial^i f^{nm} - \partial_i f \partial^i f/2\}. \tag{72}$$

Эта плотность лагранжиана гравитационного поля является самой простейшей плотностью лагранжиана, инвариантной при калибровочных преобразованиях полей φ_{ni} (66). Поля f_{nm} можно также подвергнуть калибровочному преобразованию:

$$f_{nm} \to f_{nm} + \partial_n a_m + \partial_m a_n - \gamma_{nm} \partial_i a^i, \tag{73}$$

не нарушающему условий $\partial^n f_{nm} = 0$, если калибровочные векторы a^n удовлетворяют однородным уравнениям: $\Box a^n = 0$.

Следует подчеркнуть тот факт, что симметрические поля f_{nm} не являются независимыми в силу четырех условий $\partial^n f_{nm} = 0$, которым они удовлетворяют, поэтому при выводе уравнений поля вариацию Эйлера — Лагранжа надо брать по полю φ_{ni}, так как только у этого поля все десять компонент — независимые.

Отметим также, что в рассматриваемом случае вариацию плотности лагранжиана вещества можно получить двумя способами: или непосредственно, записывая вариацию Эйлера — Лагранжа (45) по полю φ_{ni}, или используя то обстоятельство, что в плотность лагранжиана вещества гравитационное поле входит лишь посредством поля f_{nm} (70), а поле f_{nm}, в свою очередь, входит в плотность лагранжиана вещества посредством метрического тензора риманова пространства — времени. В обоих случаях получим одинаковый результат.

Вводя обозначение

$$h^{lm} = \frac{1}{2} T^{np} \frac{\partial g_{np}}{\partial f_{ik}} (\delta_i^l \delta_k^m + \delta_k^l \delta_i^m - \gamma_{ik} \gamma^{lm}) \tag{74}$$

и учитывая соотношение (70), уравнения гравитационного поля (64) получаем в следующем виде:

$$\begin{gathered}\square^3\theta^{lm} - \partial^l\partial_n\square^2\theta^{nm} - \partial^m\partial_n\square^2\theta^{nl} + \\ + \gamma^{lm}\,\partial_n\partial_p\square^2\theta^{np} = -16\pi J^{lm},\end{gathered} \tag{75}$$

где

$$J^{lm} = \square h^{lm} - \partial^l\partial_n h^{nm} - \partial^m\partial_n h^{nl} + \gamma^{lm}\partial_n\partial_i h^{ni}.$$

Уравнения поля (75) с учетом определения (70) принимают вид

$$\square^2 f^{lm} = -16\pi J^{lm}. \tag{76}$$

Легко убедиться, что уравнения гравитационного поля как в форме (75), так и форме (76) являются инвариантными при калибровочных преобразованиях (66) с произвольным калибровочным вектором a^n. Если взять полную дивергенцию по одному из индексов в уравнениях поля (75) и (76), то получим тождественно $0 = 0$. Поэтому, хотя поле φ_{ni} и имеет десять независимых компонент, структура уравнений такова, что четыре компоненты со спинами 1 и 0′ автоматически исключаются из уравнений, в результате чего в уравнения поля будут входить только шесть независимых компонент со спинами 2 и 0. Для них имеем шесть независимых уравнений поля, поскольку в силу калибровочной инвариантности выполняются четыре условия (70).

Уравнения гравитационного поля (76) можно упростить, воспользовавшись калибровочным преобразованием (66) и наложив дополнительные условия на функции поля. Произвол в выборе калибровки означает, что при решении конкретных задач необходимо явно определить калибровочные условия каким-либо способом, например наложением дополнительных условий. Тот факт, что вариация Эйлера — Лагранжа в калибровочной теории удовлетворяет четырем тождествам $\partial_i\delta L/\delta\varphi_{im} = 0$, также означает, что при решении уравнений поля в конкретной задаче необходимо наложить по меньшей мере четыре дополнительных условия на поле. При калибровочных преобразованиях (66) в силу соотношения (71) поля θ_{nm} подвергаются калибровочному преобразованию:

$$\theta_{nm} \to \theta_{nm} + \partial_n a_m + \partial_m a_n - \gamma_{nm}\partial_k a^k. \tag{77}$$

Наиболее общими дополнительными условиями, линейными по полю $\square^2\theta^{nm}$, являются условия

$$\partial_n\square^2\theta^{nm} = A\partial^m\square^2\theta^n_n. \tag{78}$$

При выполнении (78) уравнения гравитационного поля записываются в следующем виде:

$$\square^3\theta^{lm} - 2A\partial^l\partial^m\,\square^2\theta^n_n + A\gamma^{ml}\square^3\theta^n_n = -16\pi J^{lm}.$$

Легко убедиться, что левая часть уравнений также сохраняется при учете дополнительных условий (78). При $A = 0$ получим уравнения гравитационного поля в наиболее простом виде

$$\Box^3\theta^{lm} = -16\pi J^{lm} \tag{79}$$

с дополнительными условиями

$$\partial_n\Box^2\theta^{nm} = 0. \tag{80}$$

Таким образом, уравнения гравитационного поля в нашем случае — уравнения с высшими производными, при этом (79) также инвариантны при калибровочных преобразованиях (77), не нарушающих дополнительные условия (80).

Введем поле H^{nm} в соответствии с уравнением

$$\Box H^{nm} = h^{nm}, \tag{81}$$

тогда уравнения (79) принимают вид:

$$\Box^3\theta^{lm} = -16\pi\Box\,\{h^{lm} - \partial^l\partial_n H^{nm} - \partial^m\partial_n H^{nl} + \gamma^{lm}\partial_n\partial_p H^{np}\}.$$

Так как нас в дальнейшем будут интересовать лишь причинно обусловленные решения, то согласно [80] мы можем «сократить» эти уравнения на оператор Даламбера. Вводя обозначение

$$\psi_{nm} = \Box\theta_{nm}, \tag{82}$$

для причинно обусловленных решений получим уравнения гравитационного поля в следующем виде:

$$\Box\psi^{lm} = -16\pi\,\{h^{lm} - \partial^l\partial_n H^{nm} - \partial^m\partial_n H^{nl} + \gamma^{lm}\partial_n\partial_p H^{np}\}.$$

Тензорный ток, стоящий в правой части этого уравнения, вне источника удовлетворяет условию

$$\Box\,\{h^{lm} - \partial^l\partial_n H^{nm} - \partial^m\partial_n H^{nl} + \gamma^{lm}\partial_n\partial_p H^{np}\} = 0.$$

Поэтому вне вещества этот тензорный ток можно устранить при проведении калибровочного преобразования. Действительно, так как дополнительные условия (80) допускают преобразования (77) с калибровочным 4-вектором, удовлетворяющим уравнению:

$$\Box^3 a^n = 0, \tag{83}$$

имеем возможность провести следующее калибровочное преобразование:

$$\psi^{nm} \to \psi^{nm} + \partial^n\Box a^m + \partial^m\Box a^n - \gamma^{nm}\partial_l\Box a^l. \tag{84}$$

Вне источника в качестве калибровочного 4-вектора выбираем вектор, удовлетворяющий условию $\Box^2 a^n = 16\pi\partial_m H^{mn}$. Так как вне источника выполняются уравнения $\Box H^{nm} = 0$, и калибровочный 4-вектор удовлетворяет в этой области уравнению (83), в результате чего дополнительные условия (80) удовлетворяются автоматически. После калибровочного преобразования (84) вне источника получаем уравнения гравитационного поля в следующем виде:

$$\square\, \psi^{nm} = 0.$$

Это означает, что тензорный ток

$$I^{nm} = h^{nm} - \partial^n \partial_l H^{lm} - \partial^l \partial^m H^n_l + \gamma^{nm} \partial_l \partial_p H^{pl} \tag{85}$$

отличен от нуля только внутри вещества. Поэтому в данной калибровке уравнения гравитационного поля принимают вид

$$\square\, \psi^{nm} = -16\pi I^{nm}. \tag{86}$$

Эти уравнения допускают калибровочные преобразования (77) на классе векторов, удовлетворяющих условию: $\square^2 a^n = 0$. Поэтому будем решать уравнения (86) с дополнительными условиями $\partial_l \psi^{ln} = 0$, которые оставляют возможность проводить калибровочные преобразования только на этом классе. Этот выбор дополнительных условий находится в соответствии с теоремой Фока [13], согласно которой решение однородного волнового уравнения $\square \partial_l \psi^{ln} = 0$, ограниченное во всем пространстве и удовлетворяющее условию излучения Зоммерфельда, тождественно равно нулю: $\partial_l \psi^{ln} = 0$.

Таким образом, получаем уравнения гравитационного поля

$$\square \psi^{nm} = -16\pi I^{nm} \tag{87}$$

с дополнительными условиями

$$\partial_n \psi^{nm} = 0. \tag{88}$$

Заметим далее, что выражение $\square f_{nm}$ с учетом принятого обозначения (82) можно записать в виде:

$$\square f_{nm} = \square \psi_{nm} - \partial_n \partial^l \psi_{lm} - \partial_m \partial^l \psi_{ln} + \gamma_{nm} \partial^l \partial^p \psi_{lp}.$$

Это выражение также является инвариантным при преобразованиях (84) с любым калибровочным вектором a^n, но оператор $\square f_{nm}$ в этом случае имеет первоначальный вид. Мы можем упростить этот оператор, если учтем, что в принятой нами калибровке выполняются дополнительные условия (88). В этом случае

$$\square f_{nm} = \square \psi_{nm}. \tag{89}$$

Отметим, что полученный оператор $\square f_{nm}$ (89) также инвариантен при калибровочных преобразованиях (84), не нарушающих дополнительные условия (88). Соотношения (89) позволяют переписать уравнения гравитационного поля в виде

$$\Box f^{nm} = -16\pi I^{nm} \tag{90}$$

с дополнительными условиями

$$\partial_n f^{nm} = 0. \tag{91}$$

Следует особо подчеркнуть, что тензорный ток I^{nm}, стоящий в правой части (90), сосредоточен только в веществе. Отметим также, что уравнения полевой теории гравитации (90) можно формулировать не только для инерциальных, но и для неинерциальных систем координат, причем при переходе от одной неинерциальной системы координат к другой, уравнения поля — форминвариантные для каждой бесконечной совокупности неинерциальных систем координат. В инерциальных системах координат уравнения поля являются лоренц-инвариантными при переходе от одной инерциальной системы к другой. Это приводит нас к необходимости расширения [30] принципа относительности, который сформулируем в следующем виде: никакими физическими явлениями, в том числе и гравитационными, нельзя определить, находимся мы в покое или в состоянии равномерного и поступательного движения.

Подчеркнем, что принцип относительности не требует постоянства скорости распространения фронта электромагнитной волны — скорости света. Естественно, что при наличии взаимодействия с внешними гравитационными полями скорость света, как и скорость движения любых тел, не является постоянной.

7. УРАВНЕНИЕ МИНИМАЛЬНОЙ СВЯЗИ

Для замкнутости теоретической схемы следует теперь указать уравнение связи между метрическим тензором эффективного риманова пространства — времени g_{ni} и гравитационным полем f_{ni}.

Так как выбор уравнения связи в полевой теории гравитации эквивалентен выбору плотности лагранжиана взаимодействия между гравитационным полем и другими полями материи, то и построение уравнения связи будем производить путем, аналогичным построению плотности лагранжиана взаимодействия в теориях других физических полей. Так, в электродинамике в качестве плотности лагранжиана взаимодействия выбирается «минимальный лагранжиан».

Поэтому и в полевой теории гравитации в качестве уравнения связи уместно выбрать уравнение минимальной связи, которое является минимально необходимым для описания имеющейся совокупности экспериментов для слабого гравитационного поля. В обычно рассматриваемом линейном приближении тензорный ток I^{nm} в формуле (85) должен быть взят в отсутствие гравитационного поля. Так как в этом приближении единственный физический симметрический тензор второго ранга, удовлетворяющий закону сохранения,— тензор энергии — импульса вещества, то потребуем, чтобы выполнялось следующее соответствие: в нулевом приближении по гравитационному полю тензорный ток J^{nm} должен автоматически переходить в тензор энергии — импульса вещества:

$$J^{nm}(f_{lp} = 0) = T^{nm}. \tag{92}$$

Это требование соответствия позволяет однозначно восстановить в линейном приближении структуру уравнения связи $g_{ni} = g_{ni}(f_{lm})$. Действительно, воспользовавшись выражениями (74), (81) и (85), получим, что требование соответствия (92) приводит к следующему уравнению связи в линейном приближении:

$$g_{nm} = \gamma_{nm} + f_{nm} - \gamma_{nm} f/2. \tag{93}$$

Можно было бы предположить, что соотношение (93) представляет собой уравнение минимальной связи и выполняется всегда, а не только в линейном приближении по слабому полю f_{nm}. Но тогда теория с таким уравнением связи будет относиться к классу так называемых «квазилинейных» теорий гравитации (по терминологии Вилла). Однако, как показано в [81], любая квазилинейная асимптотически лоренц-инвариантная теория гравитации противоречит результатам экспериментов. Поэтому соотношение (93) должно представлять собой лишь разложение уравнения минимальной связи с точностью до линейных членов по слабому полю f_{nm}. Таким образом, уравнение минимальной связи должно быть квадратичным уравнением относительно поля f_{nm}:

$$g_{nm} = \gamma_{nm} + f_{nm} - \gamma_{nm} f/2 + \\ + [b_1 f_{nl} f^l_m + b_2 f_{nm} f + b_3 \gamma_{nm} f_{il} f^{il} + b_4 \gamma_{nm} f^2]/4, \tag{94}$$

с неопределенными пока параметрами минимальной связи b_1, b_2, b_3, b_4.

Как увидим в дальнейшем, условие совпадения постньютоновских выражений для инертной и гравитационной масс статического сферически симметричного тела приводит к следующему соотношению между параметрами минимальной связи: $2(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) = 1$.

Можно было бы рассмотреть и другие, более сложные уравнения связи, которые лишь в приближении слабого поля переходили бы в уравнение минимальной связи (94). Однако в настоящее время нет никаких оснований для такого усложнения, поскольку уравнение минимальной связи (94) описывает все гравитационные эксперименты.

Поэтому и все дальнейшее рассмотрение будем проводить, исходя из уравнения минимальной связи (94), при этом в качестве основного физического требования, накладывающего определенные ограничения на значения параметров минимальной связи, будем считать условие отсутствия особенностей метрики эффективного риманова пространства — времени при конечных значениях плотности вещества в источнике гравитационного поля. Это предположение исключает появление в полевой теории гравитации объектов, напоминающих черные дыры. Кроме того, потребуем, чтобы в теории отсутствовал парадокс типа Ольберса при описании модели Вселенной.

Следует отметить, что в силу уравнения минимальной связи (94) недиагональные компоненты метрического тензора риманова пространства — времени g_{nm} могут быть отличными от нуля даже в том случае, когда недиагональные компоненты гравитационного поля f_{nm} равны нулю.

Для того чтобы недиагональные компоненты тензора g_{nm} обращались в нуль при равенстве нулю соответствующих недиагональных компонент гравитационного поля, необходимо и достаточно положить $b_1 = 0$. В этом случае приходим к уравнению простейшей минимальной связи (ПМ-связи):

$$g_{nm} - \gamma_{nm} + f_{nm} - \gamma_{nm} f/2 + \\ + [b_2 f_{nm} f + b_3 \gamma_{nm} f_{il} f^{il} + b_4 \gamma_{nm} f^2]/4. \quad (95)$$

Условие совпадения постньютоновских выражений для гравитационной и инертной масс статического сферически симметричного тела требует, чтобы параметры ПМ-связи удовлетворяли соотношению $2(b_2 + b_3 + b_4) = 1$.

8. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ПОЛЕВОЙ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ

В разд. 4 были получены законы сохранения, справедливые для всех теорий гравитации класса А. Наличие в теориях этого класса дифференциального закона сохранения плотности полного симметрического тензора энергии — импульса системы в плоском пространстве — времени (62) позволяет получить соответствующий интегральный закон сохранения.

В декартовых координатах имеем

$$\partial_n [t_g^{ni} + t_M^{ni}] = 0. \quad (96)$$

Интегрируя это выражение по некоторому объему V при $i = 0$ и предполагая, что через поверхность, ограничивающую этот объем, нет потоков вещества, получаем

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int dV [t_g^{00} + t_M^{00}] = \int dS_\alpha t_g^{0\alpha}. \quad (97)$$

Таким образом, при излучении гравитационных волн энергия источника должна меняться. Причем если гравитационные волны переносят положительную энергию, то энергия источника должна уменьшаться.

Все эти выводы и соотношения справедливы и для полевой теории гравитации, являющейся конкретным представителем теорий класса А. Так как симметрический и канонический тензоры энергии — импульса различаются на дивергенцию антисимметрического тензора третьего ранга, для канонического тензора энергии — импульса также имеют место законы сохранения (62) и (96).

Канонический тензор энергии — импульса свободного гравитационного поля можно получить следующим образом. Запишем равенство

$$\frac{\partial L_g}{\partial x^p} = \partial_n \left[\frac{\partial L_g}{\partial (\partial_n f_{lm})} \partial_p f_{lm} \right] - \partial_p f_{lm} \partial_n \left[\frac{\partial L_g}{\partial (\partial_n f_{lm})} \right]. \tag{98}$$

Свободное гравитационное поле согласно (90) удовлетворяет уравнению

$$\partial_n \left[\partial L_g / \partial (\partial_n f_{lm})\right] = \Box f_{lm} = 0,$$

поэтому выражение (98) означает равенство нулю дивергенции канонического тензора энергии — импульса свободного гравитационного поля. Отсюда получаем

$$\tilde{t}^n_{gp} = -L_g \delta^n_p + \frac{\partial L_g}{\partial (\partial_n f_{lm})} \partial_p f_{lm}. \tag{99}$$

Используя выражение для плотности лагранжиана свободного гравитационного поля (72), имеем

$$\tilde{t}^n_{gp} = \frac{1}{64\pi} \left\{ -\delta^n_p \left[\partial_i f_{lm} \partial^i f^{lm} - \frac{1}{2} \partial_i f \partial^i f \right] + 2\partial_p f_{lm} \partial^n f^{lm} - \partial_p f \partial^n f \right\}. \tag{100}$$

Чтобы получить симметрический тензор энергии — импульса гравитационного поля t_g^{ni}, плотность лагранжиана гравитационного поля L_g и выражение для f_{ni} необходимо записать в явно ковариантной форме. Переходя в выражении (72) от декартовой системы координат к произвольной криволинейной системе, получаем

$$L_g = \frac{\sqrt{-\gamma}}{64\pi} \gamma^{ik} \left[\gamma^{ln}\gamma^{mp} - \frac{1}{2} \gamma^{lm}\gamma^{np} \right] D_i f_{lm} D_k f_{np}. \tag{101}$$

Аналогично из выражения (69) имеем

$$f_{ik} = \gamma^{lm} [D_l D_m \varphi_{ik} - D_i D_l \varphi_{mk} - D_k D_l \varphi_{mi} + $$
$$+ D_i D_k \varphi_{lm} + \gamma_{ik} \gamma^{pn} (D_l D_n \varphi_{mp} - D_n D_p \varphi_{lm})]. \tag{102}$$

Введем также для сокращения записи последующих выражений обозначение

$$\Lambda^{ik} = -A^{lm}[\partial_l\partial_m\varphi^{ik} - \partial^i\partial_l\varphi^k_m - \partial^k\partial_l\varphi^i_m + \partial^i\partial^k\varphi_{lm}] + fA^{ik}/2 +$$
$$+ A^n_n[f^{ik} - \gamma^{ik}f/2] + \partial_s\{\varphi^i_n[-\partial^s A^{kn} + 2\partial^n A^{sk} + 2\gamma^{sk}\partial_l A^{ln} -$$
$$- \gamma^{kn}\partial_l A^{ls} - \partial^k A^{sn} + \gamma^{kn}\partial^s A^l_l - 2\gamma^{sk}\partial^n A^l_l] +$$
$$+ \varphi^s_n[\partial^i A^{kn} - \partial^n A^{ik} - \gamma^{ik}\partial_l A^{ln} + \gamma^{ik}\partial^n A^l_l] + 2\gamma^{ks}A^{np}\partial^i\varphi_{np} -$$
$$- A^{sn}\partial^i\varphi^k_n - 3A^{kn}\partial^i\varphi^s_n + 2A^{ks}\partial^i\varphi^n_n - \gamma^{ik}A^{nm}\partial^s\varphi_{nm} + 3A^{kn}\partial^s\varphi^i_n -$$
$$- A^{ik}\partial^s\varphi^n_n - 2\gamma^{sk}A^{ln}\partial_l\varphi^i_n - 2A^{sk}\partial_l\varphi^{li} + A^{ns}\partial_n\varphi^{ik} + \gamma^{ik}A^{ln}\partial_l\varphi^s_n +$$
$$+ A^{ik}\partial_n\varphi^{ns} + A^l_l[2\partial^i\varphi^{ks} - 2\gamma^{ks}\partial^i\varphi^n_n - 2\partial^s\varphi^{ik} + \gamma^{ik}(\partial^s\varphi^n_n - \partial_n\varphi^{ns}) +$$
$$+ 2\gamma^{ks}\partial_n\varphi^{ni}]\}/2. \qquad (103)$$

Симметрический тензор энергии — импульса гравитационного поля можно получить, подставляя выражения (101) и (102) в соотношение (55). В декартовой системе координат имеем

$$t^{ik}_g = \frac{1}{64\pi}\left\{-\gamma^{ik}\left[\partial_l f_{nm}\partial^l f^{nm} - \frac{1}{2}\partial_n f\partial^n f\right] + 2\partial^i f_{nm}\partial^k f^{nm} - \partial^i f\partial^k f\right\} +$$
$$+ \frac{1}{16\pi}\left\{\partial_l f^{ni}\partial^l f^k_n - \frac{1}{2}\partial_l f^{ik}\partial^l f\right\} - \frac{1}{32\pi}\partial_l\{f^i_p[\partial^l f^{kp} + \partial^k f^{lp}] - f^{ik}\partial^l f +$$
$$+ f^k_n[\partial^l f^{ni} + \partial^i f^{nl}] - f^{nl}[\partial^i f^k_n + \partial^k f^i_n]\} - 2\Lambda^{(ik)}, \qquad (104)$$

где, как обычно, по индексам, заключенным в круглые скобки, производится симметризация:

$$\Lambda^{(ik)} = (\Lambda^{ik} + \Lambda^{ki})/2.$$

Тензор A^{nm}, входящий в выражение (103), в этом случае имеет вид:

$$A^{nm} = -(1/32\pi)\,\Box\,[f^{nm} - \gamma^{nm}f/2].$$

Вне вещества $\Box f_{nm} = 0$, поэтому выражение для t^{ik}_g существенно упрощается:

$$t^{ik}_g = \tilde{t}^{ik}_g + \frac{1}{32\pi}\partial_l\{f^l_n[\partial^i f^{kn} + \partial^k f^{ni}] - f^i_n\partial^k f^{nl} - f^k_n\partial^i f^{nl}\}, \qquad (105)$$

где $\tilde{t}^{ik}_g$ — канонический тензор энергии — импульса свободного гравитационного поля (100).

Покажем, что в волновой зоне симметрический тензор энергии — импульса гравитационного поля t^{ik}_g отличается от канонического тензора энергии — импульса $\tilde{t}^{ik}_g$ лишь на неволновые члены, убывающие быстрее, чем $1/r^2$. Так как в волновой зоне справедливо разложение

$$f_{nm} = \frac{a_{nm}(t-r,\ \theta,\ \varphi)}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

то для произвольной функции $F(f_{nm})$ имеем

$$\partial_\alpha F = n_\alpha \frac{\partial}{\partial t} F + O\left(\frac{1}{r} F\right),$$

где $n_\alpha = x_\alpha / r$. Поэтому выражение (105) можно записать в виде

$$t_g^{ik} = \tilde{t}_g^{ik} + \frac{1}{32\pi}\frac{\partial}{\partial t}\{[f^{0l} + n_\alpha f^{\alpha l}][\partial^i f_l^k + \partial^k f_l^i] - f_n^i \partial^k [f^{0n} + n_\alpha f^{\alpha n}] - f_l^k \partial^i [f^{0l} + n_\alpha f^{\alpha l}]\} + O\left(\frac{1}{r^3}\right).$$

Обозначая дифференцирование по времени точкой, из дополнительных условий (91) имеем

$$\dot{f}^{0m} + n_\alpha \dot{f}^{\alpha m} = O(1/r^2). \tag{106}$$

Интегрируя это выражение по времени и полагая константы интегрирования равными нулю, так как волны не должны иметь не зависящей от времени части, получаем

$$f^{0m} + n_\alpha f^{\alpha m} = O(1/r^2). \tag{107}$$

Отсюда следует, что в волновой зоне симметрический тензор энергии — импульса гравитационного поля отличается от канонического тензора энергии — импульса на неволновую величину, убывающую быстрее, чем $1/r^2$, с ростом r:

$$t_g^{ik} = \tilde{t}_g^{ik} + O(1/r^3). \tag{108}$$

Поэтому в волновой зоне расчеты, выполненные как с использованием симметрического, так и канонического тензоров энергии — импульса гравитационного поля, дадут один и тот же результат. Эти тензоры эквивалентны и при расчете интегральных характеристик гравитационного излучения. Действительно, из выражения (105) имеем

$$t_g^{00} = \tilde{t}_g^{00} + \frac{1}{16\pi}\partial_\alpha \{f^{\alpha l}\dot{f}_l^0 - f_l^0 \dot{f}^{\alpha l}\},$$

поэтому

$$\int t_g^{00}\, dV = \int \tilde{t}_g^{00}\, dV + \frac{1}{16\pi}\int dS_\alpha [f^{\alpha l}\dot{f}_l^0 - f_l^0 \dot{f}^{\alpha l}].$$

Если граница области интегрирования находится в волновой зоне, то на основании соотношений (106) и (107) имеем

$$f^{\alpha l}\dot{f}_l^0 - f_l^0 \dot{f}^{\alpha l} = n_\beta [f^{\alpha l}\dot{f}_l^\beta - \dot{f}^{\alpha l} f_l^\beta] + O(1/r^3).$$

Выбрав в качестве поверхности интегрирования сферу радиусом r ($dS_\alpha = -r^2 n_\alpha d\Omega$), получим

$$\int dV t_g^{00} = \int dV \tilde{t}_g^{00} + O\left(\frac{1}{r}\right). \qquad (109)$$

Кроме того, из соотношения (108) следует, что

$$\int t_g^{0\alpha} dS_\alpha = \int \tilde{t}_g^{0\alpha} dS_\alpha + O\left(\frac{1}{r}\right). \qquad (110)$$

Таким образом, из выражений (109) и (110) очевидна эквивалентность канонического и симметрического тензоров энергии — импульса при расчете интегральных характеристик гравитационного излучения. Как будет показано в разд. 9, компоненты $\tilde{t}_g^{00}$ и $\tilde{t}_g^{0\alpha}$ являются знакоположительными величинами, причем в энергию — импульс дают вклад только поперечные компоненты гравитационной волны. Поэтому на основании выражения (97) энергия источника при излучении волн уменьшается.

Для получения плотности симметрического тензора энергии — импульса вещества в плоском пространстве — времени t_M^{in} заметим, что метрический тензор γ_{ni} входит в плотность лагранжиана вещества только через метрический тензор риманова пространства — времени. Поэтому плотность тензора t_M^{ni} можно записать в следующем виде:

$$t_M^{ni} = T^{ni}\left[1 - f/2 + (b_3/4) f_{lm} f^{lm} + (b_4/2) f^2\right] + f^{ni} T^{lm}\gamma_{lm} -$$
$$- \left[b_1 T^{lm} f_l^n f_m^i + b_2 T^{lm} f_{lm} f^{ni} + 2b_3 f_p^i f^{np} T^{lm}\gamma_{lm} +\right.$$
$$\left. + 2b_4 f^{ni} f T^{lm}\gamma_{lm}\right]/4 - 2\Lambda^{(ni)}. \qquad (111)$$

Выражение для Λ^{ni} получим из (103), если положить

$$A^{lm} = -T^{lm}/2 + \gamma^{lm} T^{ni}\gamma_{ni}/4 -$$
$$- \left[b_1 T^{ln} f_n^m + b_1 T^{nm} f_n^l + b_2 \gamma^{lm} T^{ni} f_{ni} + b_2 T^{lm} f +\right.$$
$$\left. + 2b_3 f^{lm} T^{ni}\gamma_{ni} + 2b_4 \gamma^{lm} f T^{ni}\gamma_{ni}\right]/8. \qquad (112)$$

9. ИЗЛУЧЕНИЕ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В ПОЛЕВОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Одна из важнейших проблем теории гравитации и всей современной физики — проблема излучения и приема гравитационных волн. Усилившийся в последнее время интерес исследователей к этой проблеме привел к появлению большого количества экспериментальных и теоретических работ, направленных как на совершенствование методики и техники эксперимента, так и на расчет возможных излучателей и детекторов гравитационных волн. Большой интерес к этим вопросам объясняется тем, что проблема гравитационных волн важна в теоретическом и в прикладном плане. В настоящее время предложено несколько вариантов теорий гравитации, которые дают достаточно удовлетворительное описание имеющихся постньютоновских экспериментов, но существенно различаются между собой в описании гравитационных волн. Экспериментальное доказательство существования гравитационных волн и изучение их свойств позволят произвести не только отбор теории, адекватной действительности, но и дальнейшее ее совершенствование. Кроме того, существование гравитационных волн и возможность их приема позволят освоить гравитационно-волновую астрономию и новые каналы связи.

Проблема излучения и приема гравитационных волн в полевой теории гравитации содержит ряд аспектов. В настоящей работе сосредоточим основное внимание только на некоторых из них: проведем исследование волновых решений полевой теории гравитации в приближении слабого поля, изучим взаимодействие слабых гравитационных волн с полем магнитного диполя, а также укажем ряд гравитационно-волновых экспериментов, позволяющих проверить предсказания полевой теории гравитации и ОТО Эйнштейна о свойствах слабых гравитационных волн при наличии внешних гравитационных полей.

Уравнения гравитационного поля полевой теории гравитации с учетом принятой нами калибровки имеют вид

$$\Box f^{lm} = -16\pi I^{lm}, \tag{113}$$

причем тензорный ток I^{lm} (85) задан только в веществе.

Так как метрический тензор g_{nm}, а также тензор энергии — импульса свободного гравитационного поля, т. е. поля вне вещества, зависят только от полей f_{nm}, то уравнения поля (113) будем решать относительно f_{nm}. Запишем тензоры f^{lm} и I^{lm} в виде интегралов Фурье по времени. Выделим в спектре $I^{ln}(\omega, \mathbf{r})$ статическую часть $J_0(\mathbf{r})$. Очевидно, что статическая часть тензорного тока $J_0(\mathbf{r})$ будет давать лишь статические решения, поэтому ее опустим, тогда для Фурье-амплитуд получим следующие уравнения гравитационного поля:

$$\Delta \tilde{f}^{nm} + \omega^2 \tilde{f}^{nm} = 16\pi \tilde{I}^{nm}. \tag{114}$$

Поместим начало декартовой системы координат в какую-либо точку источника, тогда в этой системе решение уравнений поля можно записать в виде

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|;$$

$$\tilde{f}^{nm} = \quad 4 \int \frac{\exp(i\omega R)}{R} \tilde{I}^{nm}(\mathbf{r}', \omega)\, d^3\mathbf{r}'. \tag{115}$$

Воспользовавшись условиями Лоренца (91) $i\omega\tilde{f}^{0m} = \partial_\alpha\tilde{f}^{\alpha m}$, выразим компоненты $\tilde{f}^{0n}$ через пространственные компоненты:

$$\tilde{f}^{00} = -\frac{1}{\omega^2}\partial_\alpha\partial_\beta\tilde{f}^{\alpha\beta}; \quad \tilde{f}^{0\alpha} = -\frac{i}{\omega}\partial_\beta\tilde{f}^{\alpha\beta}.$$

Вне источника гравитационных волн выбором калибровки

$$f^{nm} \to f^{nm} + \partial^n a^m + \partial^m a^n - \gamma^{nm}\partial_l a^l, \tag{116}$$

совместной с условием Лоренца (91) при $\Box a^n = 0$, можно наложить на компоненты волны f'^{nm} еще четыре условия по числу независимых калибровочных векторов. В качестве таких условий можно выбрать следующие условия: $\tilde{f}' = 0, \tilde{f}'^{0\alpha} = 0$ (ТТ-калибровка).

В результате такой калибровки получим

$$\tilde{f}'^{\alpha\beta} = \tilde{f}^{\alpha\beta} - \gamma^{\alpha\beta}\tilde{f}/2 - \left(\frac{i}{\omega}\right)[\partial^\beta\tilde{f}^{0\alpha} + \partial^\alpha\tilde{f}^{0\beta}] - \frac{1}{\omega^2}\partial^\alpha\partial^\beta[\tilde{f}^{00} - \tilde{f}/2]. \tag{117}$$

Учитывая условия Лоренца (91), эти выражения запишем в виде

$$\tilde{f}'^{\alpha\beta} = \tilde{P}^{\alpha\beta} - \frac{1}{\omega^2}[\partial^\beta\partial_\eta\tilde{P}^{\alpha\eta} + \partial^\alpha\partial_\eta\tilde{P}^{\beta\eta}] + \\ + \frac{1}{2\omega^2}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\eta\partial_\gamma\tilde{P}^{\eta\gamma} + \frac{1}{2\omega^4}\partial^\alpha\partial^\beta\partial_\gamma\partial_\eta\tilde{P}^{\gamma\eta}, \tag{118}$$

где введено обозначение

$$\tilde{P}^{\alpha\beta} = \tilde{f}^{\alpha\beta} - \gamma^{\alpha\beta}\tilde{f}^\eta_\eta/3. \tag{119}$$

Таким образом, волновое решение уравнений поля содержит в общем случае шесть ненулевых пространственных компонент $\tilde{f}'^{\alpha\beta}$, но независимыми из них являются только две компоненты на основании трех условий Лоренца (91) (четвертое условие Лоренца тривиально в силу ТТ-калибровки) и равенства нулю следа $\tilde{f}' = 0$. Эти дополнительные условия представляют собой известные дополнительные условия для неприводимого представления со спином 2 в ТТ-калибровке, следовательно, свободная гравитационная волна имеет спин 2, а скалярная компонента, соответствующая неприводимому представлению со спином 0, не излучается в виде гравитационных волн.

Обычно волновые решения уравнений гравитационного поля записывают в несколько ином виде, позволяющем наглядно показать квадрупольный характер излучаемых гравитационных волн.

В нашем случае также возможно выразить полученное решение через обобщенные квадрупольные моменты тензорного тока I^{nm}. Для этого учтем, что пространственные компоненты $f^{\alpha\beta}$ (115) на основании сохранения тензорного тока $\partial_n I^{nm} = 0$ можно записать в виде

$$\tilde{f}^{\alpha\beta}=2\omega^2\left\{\int \frac{\exp(i\omega R)}{R}\,\tilde{I}^{00}x^\alpha x^\beta\,dV+\frac{2i}{\omega}\,\partial_\eta\int\frac{\exp(i\omega R)}{R}\,\tilde{I}^{0\eta}x^\alpha x^\beta\,dV-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\omega^2}\,\partial_\eta\partial_\gamma\int\frac{\exp(i\omega R)}{R}\,\tilde{I}^{\eta\gamma}x^\alpha x^\beta\,dV\right\}. \qquad (120)$$

Это соотношение является точным. Оно существенно упрощается, если линейные размеры источника значительно меньше расстояния от его центра до точки наблюдения. Опуская неволновые члены, убывающие быстрее, чем $1/r$, получаем

$$\tilde{f}^{\alpha\beta}=\frac{2\omega^2}{r}\int dV x^\alpha x^\beta \exp(i\omega R)\,[\tilde{I}^{00}+2n_\varepsilon\tilde{I}^{0\varepsilon}+n_\varepsilon n_\gamma\tilde{I}^{\varepsilon\gamma}],$$

где $n_\alpha=x_\alpha/r$; $n_\alpha n^\alpha=-1$. Тогда выражение (119) можно записать в виде

$$\tilde{P}^{\alpha\beta}=\frac{2\omega^2}{r}\int dV\left[x^\alpha x^\beta-\frac{1}{3}\gamma^{\alpha\beta}x_\varepsilon x^\varepsilon\right]\times$$
$$\times\exp(i\omega R)\,[\tilde{I}^{00}+2n_\varepsilon\tilde{I}^{0\varepsilon}+n_\varepsilon n_\gamma\tilde{I}^{\varepsilon\gamma}]. \qquad (121)$$

Вводя операторы проектирования

$$Z^{\alpha\beta}=\gamma^{\alpha\beta}+n^\alpha n^\beta, \qquad (122)$$

которые удовлетворяют условиям

$$Z^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}=2;\quad Z^{\alpha\beta}Z_{\beta\varepsilon}=Z^\alpha_\varepsilon,$$

перепишем соотношение (118) в виде

$$\tilde{f}'^{\alpha\beta}=[Z^\alpha_\varepsilon Z^\beta_\gamma-Z^{\alpha\beta}Z_{\varepsilon\gamma}/2]\,\tilde{P}^{\varepsilon\gamma}. \qquad (123)$$

Подставляя выражение (121) в интеграл Фурье, получаем

$$P^{\alpha\beta}=-\frac{2}{r}\frac{d^2}{dt^2}\int dV\left(x^\alpha x^\beta-\frac{1}{3}\gamma^{\alpha\beta}x_\varepsilon x^\varepsilon\right)[I^{00}+2n_\varepsilon I^{0\varepsilon}+n_\varepsilon n_\gamma I^{\varepsilon\gamma}]_{\text{ret}}. \qquad (124)$$

Здесь $[\ldots]_{\text{ret}}$ означает, что выражение в квадратных скобках берется в запаздывающий момент времени $t'=t-R$. Если ввести бесследовый тензор обобщенного квадрупольного момента

$$\mathcal{D}^{\alpha\beta}=D^{\alpha\beta}+2n_\varepsilon D^{\alpha\beta\varepsilon}+n_\varepsilon n_\gamma D^{\alpha\beta\varepsilon\gamma}, \qquad (125)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
D^{\alpha\beta}&=\int dV\,(3x^\alpha x^\beta-\gamma^{\alpha\beta}x_\varepsilon x^\varepsilon)\,[I^{00}]_{\text{ret}};\\
D^{\alpha\beta\varepsilon}&=\int dV\,(3x^\alpha x^\beta-\gamma^{\alpha\beta}x_\delta x^\delta)\,[I^{0\varepsilon}]_{\text{ret}};\\
D^{\alpha\beta\varepsilon\gamma}&=\int dV\,(3x^\alpha x^\beta-\gamma^{\alpha\beta}x_\delta x^\delta)\,[I^{\varepsilon\gamma}]_{\text{ret}},
\end{aligned}\right\} \qquad (126)$$

то компоненты гравитационной волны (123) можно записать в виде

$$f'^{\alpha\beta} = -\frac{2}{3r}\left(Z^{\alpha}_{\varepsilon}Z^{\beta}_{\gamma} - \frac{1}{2}Z^{\alpha\beta}Z_{\varepsilon\gamma}\right)\dddot{\mathscr{D}}^{\varepsilon\gamma}. \qquad (127)$$

Здесь и далее точка обозначает производную по времени.

Учитывая, что $\partial_{\varepsilon} f_{\alpha\beta} = n_{\varepsilon}\dot{f}_{\alpha\beta}$, для компонент тензора энергии — импульса гравитационной волны $\tilde{t}^{\alpha}_{g0}$, $\tilde{t}^{\alpha}_{g0}$ получаем следующее выражение:

$$\tilde{t}^{\alpha}_{g0} = n^{\alpha}\tilde{t}^{0}_{g0} = \frac{1}{32\pi} n^{\alpha}\dot{f}_{\beta\varepsilon}\dot{f}^{\beta\varepsilon}.$$

Тогда для интенсивности излучения энергии гравитационных волн в элемент телесного угла $d\Omega$ имеем

$$dI/d\Omega = (1/32\pi)\, r^2\dot{f}_{\alpha\beta}\dot{f}^{\alpha\beta} \geqslant 0. \qquad (128)$$

Из этого выражения видно, что интенсивность излучения энергии гравитационных волн в элемент телесного угла является положительной величиной при любых значениях компонент тензора $\dot{f}_{\alpha\beta}$, если все они не равны нулю. Если все компоненты $\dot{f}_{\alpha\beta} = 0$, то и $dI/d\Omega = 0$.

Воспользовавшись соотношениями (122) и (127), выражение (128) можно записать в виде

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{1}{36\pi}\left\{\frac{1}{4}(\dddot{\mathscr{D}}^{\alpha\beta}n_{\alpha}n_{\beta})^2 + \frac{1}{2}\dddot{\mathscr{D}}_{\alpha\beta}\dddot{\mathscr{D}}^{\alpha\beta} + \dddot{\mathscr{D}}_{\alpha\beta}\dddot{\mathscr{D}}^{\beta\gamma}n_{\gamma}n^{\alpha}\right\}. \qquad (129)$$

Рассмотрим далее наиболее распространенный на практике случай излучения слабых гравитационных волн. В обычно рассматриваемом линейном приближении тензорный ток I^{nm} (85) должен быть взят при условии отсутствия гравитационного поля. Из выражений (74) и (94) следует, что в этом случае

$$I^{nm} = T^{nm}. \qquad (130)$$

При излучении гравитационных волн, длина которых значительно больше размеров источника, запаздыванием в системе можно пренебречь и в (126) брать выражения в квадратных скобках в момент времени $t' = t - R$. Тогда для потери энергии по всем направлениям в единицу времени имеем следующее выражение:

$$I = -dE/dt = (G/45c^5)\,\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}^{\alpha\beta}, \qquad (131)$$

где

$$D^{\alpha\beta} = \int dV\,(3x^{\alpha}x^{\beta} - \gamma^{\alpha\beta}x_{\varepsilon}x^{\varepsilon})\,T^{00}(t - R,\ \mathbf{r}')$$

и явно введены гравитационная постоянная G и скорость света c.

Эта формула согласуется с результатами [82, 83] косвенных измерений потерь энергии двойной пульсарной системой PSR 1913+16 на предполагаемое излучение гравитационных волн. Поскольку обычно проводимый в ОТО расчет «потерь энергии» с использованием псевдотензоров энергии — импульса в приближении слабого поля приводит к выражению (131), то в [83] был сделан вывод о совпадении результатов наблюдений с предсказанием теории Эйнштейна.

Однако, как показано в [5, 9], формула (131) не является следствием ОТО Эйнштейна. В теории Эйнштейна можно говорить только о волнах кривизны, именно с ними связана передача энергии веществу, законы же сохранения в их обычном смысле здесь отсутствуют, в результате чего подсчет потерь энергии источником, а также определение потоков энергии гравитационных волн в ОТО невозможны.

Поясним теперь, почему вычисление потоков энергии гравитационных волн в ОТО в некотором узком классе координатных систем приводит к физически приемлемым формулам. Основной причиной этого является то, что в псевдоевклидовом пространстве — времени можно построить теорию гравитации, которая обладает законами сохранения энергии — импульса вещества и гравитационного поля вместе взятых:

$$D_i\,[t_g^{ik} + t_M^{ik}] = 0. \tag{132}$$

Именно в этой теории из закона сохранения (132), записанного в декартовой системе координат

$$\partial_i\,[t_g^{ik} + t_M^{ik}] = 0, \tag{133}$$

можно получить и выражение (128) для интенсивности гравитационного излучения.

В ОТО для энергетических расчетов обычно используется соотношение

$$\partial_i\,[-g\,(T^{ik} + \tau^{ik})] = 0, \tag{134}$$

где τ^{ik} — псевдотензор энергии — импульса Ландау — Лифшица:

$$\begin{aligned}\tau^{ik} = \frac{c^4}{16\pi G}\{&(2\Gamma^n_{ml}\Gamma^p_{np} - \Gamma^n_{lp}\Gamma^p_{mn} - \Gamma^n_{nl}\Gamma^p_{mp})\,(g^{il}g^{km} - g^{ik}g^{lm}) + \\ &+ g^{il}g^{mn}\,(\Gamma^k_{pl}\Gamma^p_{mn} + \Gamma^k_{mn}\Gamma^p_{pl} - \Gamma^k_{np}\Gamma^p_{ml} - \Gamma^k_{ml}\Gamma^p_{np}) + \\ &+ g^{kl}g^{mn}\,(\Gamma^i_{pl}\Gamma^p_{mn} + \Gamma^i_{mn}\Gamma^p_{pl} - \Gamma^i_{np}\Gamma^p_{ml} - \Gamma^i_{ml}\Gamma^p_{np}) + \\ &+ g^{lm}g^{np}\,(\Gamma^i_{nl}\Gamma^k_{mp} - \Gamma^i_{ml}\Gamma^k_{np})\},\end{aligned} \tag{135}$$

которое, естественно, отличается от ковариантного закона сохранения (132) полевой теории гравитации. Но в декартовых координатах выражения (133) и (134) имеют одинаковый вид. Более того, в низшем неисчезающем приближении выражение (135) для компонент $\tau^{0\alpha}$ псевдотензора энергии — импульса, записанное в декартовых координатах, совпадает с выражением для компонент тензора энергии — импульса полевой теории гравитации:

$$(-g)\,\tau^{0\alpha}=t_g^{0\alpha}=\frac{G\dot{h}_{\beta\varepsilon}\dot{h}^{\beta\varepsilon}}{32\pi c^6 r^2}\,n^\alpha+O\left(\frac{1}{r^3}\right).$$

Следовательно, в декартовой системе координат ОТО как бы соприкасается с полевой теорией гравитации. Именно поэтому в ОТО в узком классе координатных систем, близких к декартовой системе, из соотношения (134) получаем выражения (30) для «интенсивности гравитационного излучения» и (31) для «полной интенсивности».

Это обстоятельство создало иллюзию, что формулы (30) и (31) для подсчета потерь энергии являются следствием ОТО. Однако из-за различных трансформационных законов тензора энергии — импульса полевой теории гравитации и псевдотензоров энергии — импульса ОТО в других системах координат их выражения различаются даже в низшем неисчезающем приближении. При этом, как показано в [9], вычисление интенсивности гравитационного излучения с использованием выражения (134) приводит к физически абсурдным результатам. Вычисление же потоков энергии гравитационного излучения в полевой теории гравитации в силу тензорного характера законов сохранения (132) в любой допустимой координатной системе имеет строго определенный физический смысл.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующий простой пример. Пусть источник островного типа излучает слабые гравитационные волны в течение бесконечного промежутка времени, так что процесс излучения можно считать установившимся и влияние начальных условий уже несущественным. В этом случае метрический тензор риманова пространства — времени после перехода к ТТ-калибровке в волновой зоне принимает вид

$$g_{ni}=\gamma_{ni}+\frac{G}{c^4}\,\frac{h_{ni}}{r}, \qquad (136)$$

где $h_{0i}=0$;

$$h^{\alpha\beta}=-\frac{2}{3}[Z^\alpha_\varepsilon Z^\beta_\gamma-\frac{1}{2}Z^{\alpha\beta}Z_{\varepsilon\nu}]\,\dot{D}^{\varepsilon\gamma}.$$

Для упрощения дальнейших расчетов введем обозначение $u=ct-r$ и наряду с декартовыми координатами будем использовать также и сферические координаты $z=r\cos\theta$; $x=r\sin\theta\cos\varphi$; $y=r\sin\theta\sin\varphi$.

Введем также величины

$$\mu_i = \partial u/\partial x^i; \quad n_i = -\partial r/\partial x^i;$$
$$m_i = r\partial\theta/\partial x^i; \quad l_i = r \sin\theta\, \partial\varphi/\partial x^i,$$

имеющие компоненты

$$\mu_i = \{1;\ -\sin\theta\cos\varphi;\ -\sin\theta\sin\varphi;\ -\cos\theta\};$$
$$n_i = \{0;\ -\sin\theta\cos\varphi;\ -\sin\theta\sin\varphi;\ -\cos\theta\};$$
$$m_i = \{0;\ \cos\theta\cos\varphi;\ \cos\theta\sin\varphi;\ -\sin\theta\};$$
$$l_i = \{0;\ -\sin\varphi;\ \cos\varphi;\ 0\}.$$

Если использовать для поднятия индексов у этих величин метрический тензор γ_{ni}, то

$$n_i n^i = m_i m^i = l_i l^i = n_i \mu_i = -1; \quad \mu_i \mu^i = n_i m^i = n_i l^i = = m_i l^i = 0; \quad \mu_i m^i = \mu_i l^i = 0.$$

Вполне очевидно, что в выбранных нами декартовых координатах интенсивность гравитационного излучения и полная интенсивность на основании выражения (136) будут определяться соотношениями (30) и (31) соответственно.

Совершим теперь преобразование от декартовых координат x_c^α к новым координатам x_H^α, связанным со старыми координатами соотношением $t_c = t_H$:

$$x_c^\alpha = x_H^\alpha \left\{1 + \frac{GF(ct_H - r_H,\ \theta_H,\ \varphi_H)}{c^5 r_H^{3/2}} \left[1 - \exp(-\varepsilon^2 r_H^2)\right]\right\}, \quad (137)$$

где F — некоторая произвольная функция, ограниченная при всех значениях $u = ct_H - r_H$ и углов θ_H и φ_H : $\max|F| = A < \infty$.

Легко убедиться, что преобразование (137) соответствует изменению арифметизации точек трехмерного пространства вдоль радиуса:

$$r_c = r_H \left\{1 + \frac{GF(u_H,\ \theta_H,\ \varphi_H)}{c^5 r_H^{3/2}} \left[1 - \exp(-\varepsilon^2 r_H^2)\right]\right\}.$$

Для этого запишем равенства, которые следуют из выражения (137):

$$\cos\theta_H = z_H/r_H = z_c/r_c = \cos\theta_c;$$
$$\sin\theta_H\cos\varphi_H = x_H/r_H = x_c/r_c = \sin\theta_c\cos\varphi_c;$$
$$\sin\theta_H\sin\varphi_H = y_H/r_H = y_c/r_c = \sin\theta_c\sin\varphi_c.$$

Отсюда получаем $\theta_H = \theta_c$; $\varphi_H = \varphi_c$. Следовательно, значения углов θ и φ любой точки пространства в новой координатной системе совпадают со значениями углов этой точки в старой системе. Следует особо подчеркнуть, что основными являются декартовы координаты, сферические координаты r, θ и φ будем рассматривать не более чем удобные обозначения для определенных комбинаций декартовых координат.

Если функция F зависит от времени, то преобразование (137) в общем случае описывает переход к другой системе отсчета, которая совершает радиальные движения относительно старой системы координат.

Чтобы преобразование имело обратное и являлось взаимно однозначным, необходимо и достаточно выполнения условия $\partial r_c/\partial r_H > 0$, тогда и якобиан преобразования (137) будет отличен от нуля:

$$J = \det\left\| \frac{\partial x_c}{\partial x_H} \right\| = \left[1 + \frac{GF}{c^5 r_H^{3/2}} (1 - \exp(-\varepsilon^2 r_H^2)) \right]^2 \frac{\partial r_c}{\partial r_H} > 0.$$

Поскольку в нашем случае

$$\frac{\partial r_c}{\partial r_H} = 1 - \frac{G(F + 2r_H\, \partial F/\partial u)}{2c^5 r_H^{3/2}} [1 - \exp(-\varepsilon^2 r_H^2)] + \\ + \frac{2GF\varepsilon^2}{c^5} \sqrt{r_H} \exp(-\varepsilon^2 r_H^2),$$

то условие $\partial r_c/\partial r_H > 0$ заведомо будет выполняться при

$$\frac{G\varepsilon^{1/2}}{c^5} \left\{ 2\varepsilon A \sqrt{q} \exp(-q^2) + \frac{A\varepsilon + 2qB}{2q^{3/2}} [1 - \exp(-q^2)] \right\} < 1, \qquad (138)$$

где $q = \varepsilon r_H$; $B = \max |\partial F/\partial u| < \infty$. В этом случае преобразование (137) будет являться несингулярным и взаимно однозначным во всем пространстве.

Легко убедиться, что выбором соответствующего значения ε это условие можно всегда удовлетворить. Действительно, поскольку при $q \geqslant 0$ функции

$$f_1(q) = 2\sqrt{q} \exp(-q^2) + \frac{1}{2q^{3/2}} [1 - \exp(-q^2)];$$

$$f_2(q) = \frac{1}{\sqrt{q}} [1 - \exp(-q^2)]$$

являются неотрицательными и обращаются в нуль при $q = 0$ и $q \to \infty$, они должны иметь максимумы в интервале $0 < q < \infty$.

Вполне очевидно, что абсолютные максимумы этих функций в данном интервале являются конечными:

$$\operatorname{Max} f_1(q) = H < \infty; \quad \operatorname{Max} f_2(q) = L < \infty.$$

Поэтому для выполнения условия (138) достаточно, чтобы величина ε удовлетворяла условию $\varepsilon < \alpha^2$, где α — единственный действительный корень уравнения

$$AH\alpha^3 + BL\alpha - c^5/G = 0.$$

Вычислим теперь поток энергии и полную интенсивность гравитационного излучения в новых координатах.

Используя преобразования метрического тензора

$$g_{ik}^H(x_H) = \frac{\partial x_c^l}{\partial x_H^i} \frac{\partial x_c^m}{\partial x_H^k} g_{lm}^c(x_c)$$

и оставляя только члены, линейные по константе связи G/c^4, найдем, что асимптотическое выражение метрики при $r_H \to \infty$ в новых координатах будет иметь вид

$$g_{ik} = \gamma_{ik} + G/c^4 \left[a_{ik}/\sqrt{r_H} + h_{ik}/r_H + b_{ik}/r_H^{3/2}\right] + O\left(\left[Ga_{ik}/c^4\sqrt{r_H}\right]^2\right), \tag{139}$$

где компоненты тензоров a_{ik} и b_{ik} имеют вид:

$$a_{ik} = \frac{1}{c} \frac{\partial F}{\partial u} (\mu_i n_k + \mu_k n_i);$$

$$b_{ik} = \frac{1}{c} F\left[2\gamma_{ik} - 2\mu_i\mu_k + n_i n_k + 2(\mu_i n_k + \mu_k n_i)\right] + \\ + \frac{1}{c} \frac{\partial F}{\partial \theta} [n_i m_k + n_k m_i] + \frac{1}{c \sin\theta} \frac{\partial F}{\partial \varphi} [n_i l_k + n_k l_i].$$

Для тензора h_{ik} в новых координатах имеем $h_{0i} = 0$,

$$h^{\alpha\beta} = -\frac{2}{3}\left[Z_\varepsilon^\alpha Z_\gamma^\beta - \frac{1}{2} Z^{\alpha\beta} Z_{\varepsilon\gamma}\right] \ddot{D}^{\varepsilon\gamma}(u_H)$$

Легко убедиться, что в новой координатной системе метрический тензор (139) является асимптотически галилеевским:

$$g_{00} = 1 + O\left(\left[\frac{Ga_{ik}}{c^4 r_H^{1/2}}\right]^2\right); \quad g_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} + O\left(\frac{Ga_{ik}}{c^4\sqrt{r_H}}\right).$$

Определитель метрического тензора (139) с требуемой точностью можно записать в виде

$$-g = 1 - \frac{G}{c^5}\left[\frac{2}{\sqrt{r_H}} \frac{\partial F}{\partial u_H} - \frac{3F}{r_H^{3/2}}\right].$$

Для компонент связностей риманова пространства — времени из выражения (139) получим

$$\Gamma_{ks}^i = \frac{G}{c^5}\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial u_H^2} \frac{n^i \mu_k \mu_s}{\sqrt{r_H}} + \frac{1}{2r_H}\left[\dot{h}_k^i \mu_s + \dot{h}_s^i \mu_k - \dot{h}_{ks}\mu^i\right] + \right. \\ + \frac{1}{2r_H^{3/2}} \frac{\partial F}{\partial u_H}\left[-2\mu^i\mu_k\mu_s + n^i(\mu_k n_s + \mu_s n_k + 4\mu_k\mu_s) + \right.$$

$$+2\mu_k\delta_s^i+2\mu_s\delta_k^i-2\mu^i\gamma_{ks}-2(\mu^i+n^i)(m_k m_s+l_k l_s)]+$$
$$+\frac{1}{2r_H^{3/2}}\frac{\partial^2 F}{\partial u_H\,\partial\theta}[n^i(\mu_k m_s+\mu_s m_k)+\mu^i(n_k m_s+n_s m_k)-$$
$$-m^i(\mu_k n_s+\mu_s n_k)]+\frac{1}{2r_H^{3/2}\sin\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial u_H\,\partial\varphi}[n^i(\mu_k l_s+\mu_s l_k)+$$
$$+\mu^i(n_k l_s+n_s l_k)-l^i(\mu_s n_k+\mu_k n_s)]+O\left(\left[\frac{Ga_{ik}}{c^4\sqrt{r_H}}\right]^2\right).$$

Подставляя эти выражения в соотношение (135), для компонент $\tau^{0\alpha}$ псевдотензора энергии — импульса имеем

$$-g\tau^{0\alpha}=\frac{G}{32\pi c^6 r^2}n^\alpha\left[\dot h_{\beta\varepsilon}\dot h^{\beta\varepsilon}-8\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\right]+O\left(\frac{1}{r^{5/2}}\right).$$

Следовательно, интенсивность гравитационного излучения в элемент телесного угла в новых координатах будет иметь вид:

$$\frac{dI}{d\Omega}=\frac{G}{32\pi c^5}\left[\dot h_{\beta\varepsilon}\dot h^{\beta\varepsilon}-8\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\right].$$

Используя соотношение

$$h^{\alpha\beta}=-\frac{2}{3}\left[Z^\alpha_\varepsilon Z^\beta_\gamma-\frac{1}{2}Z^{\alpha\beta}Z_{\varepsilon\gamma}\right]\ddot D^{\varepsilon\gamma},$$

имеем

$$\frac{dI}{d\Omega}=\frac{G}{36\pi c^5}\left\{\frac{1}{4}(\dddot D_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta)^2+\frac{1}{2}\dddot D^{\alpha\beta}\dddot D_{\alpha\beta}+\right.$$
$$\left.+\dddot D_{\alpha\beta}\dddot D^{\beta\gamma}n^\alpha n_\gamma-9\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\right\}. \qquad (140)$$

Интегрируя это выражение по всем направлениям, получаем полное излучение в новых координатах:

$$I=\frac{G}{45c^5}\left[\dddot D_{\alpha\beta}\dddot D^{\alpha\beta}-\frac{45}{4\pi}\int d\Omega\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\right]. \qquad (141)$$

Таким образом, как интенсивность гравитационного излучения, так и полная интенсивность, вычисляемые в ОТО с использованием псевдотензора энергии — импульса, зависят от выбора координат даже при условии асимптотической галилеевости метрики и соответствующим выбором координат могут быть приведены к физически абсурдному виду. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующие два частных случая выбора функции F.

1. Пусть функция F имеет вид:

$$F=\pm\frac{a}{3}\int_{-\infty}^{u}du\left\{\sqrt{Q(u)}-c_1\int_{-\infty}^{u}du\,[\theta(u-u_3)-\theta(u-u_4)]\right\}, \qquad (142)$$

где

$$Q(u)=2\int_{-\infty}^{u} du\,[\theta(u-u_1)-\theta(u-u_2)]\Big[\frac{1}{4}(\dddot{D}_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta)^2+$$

$$+\frac{1}{2}\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}^{\alpha\beta}+\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}^{\alpha\gamma}n^\beta n_\gamma\Big];$$

$$c_1=\frac{1}{u_4-u_3}\sqrt{Q(\infty)};$$

$$\theta(x)=\{0 \text{ при } x<0,\ 1 \text{ при } x>0\};$$

$$-\infty<u_1<u_2<u_3<u_4<\infty \text{ и } a \text{ —}$$

произвольные постоянные.

Для того чтобы преобразование (137) было допустимым, необходимо и достаточно, чтобы функция F и ее производная $\partial F/\partial u$ были ограничены при всех значениях u, θ, φ и кроме того выполнялись неравенства:

$$g_{00}>0;\ g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta<0.$$

Легко убедиться, что преобразование (137) с функцией F, определяемой выражением (142), является допустимым. Действительно, из выражения (142) следует, что при всех значениях переменной $u=ct-r$ функция F — величина конечная: при $u<u_1$ она тождественно равна нулю $F\equiv 0$, в интервале $u_1<u<u_4$ функция F ограничена, а при $u>u_4$ $F=\text{const}$. Производная функции F также ограничена:

$$\frac{\partial F}{\partial u}=\pm\frac{a}{3}\left\{\sqrt{Q(u)}-c_1\int_{-\infty}^{u} du\,[\theta(u-u_3)-\theta(u-u_4)]\right\}.$$

Остальные условия, как показывает анализ, легко обеспечить выбором соответствующего значения $\varepsilon>0$ в выражении (137).

Подставляя выражение (142) в соотношение (140), для интенсивности гравитационного излучения имеем

$$\frac{dI}{d\Omega}=\frac{G}{36\pi c^5}\Big[\frac{1}{4}(\dddot{D}_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta)^2+\frac{1}{2}\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}^{\alpha\beta}+$$

$$+\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}^{\alpha\gamma}n^\beta n_\gamma\Big]\Big\{1-a^2[\theta(u-u_1)-\theta(u-u_2)]+$$

$$+\frac{a^2c_1}{\sqrt{Q(u)}}\int_{-\infty}^{u} du\,[\theta(u-u_3)-\theta(u-u_4)]\Big\}+$$

$$+\frac{Ga^2c_1}{36\pi c^5}[\theta(u-u_3)-\theta(u-u_4)]\Big\{\sqrt{Q(u)}-$$

$$-c_1\int_{-\infty}^{u} du\,[\theta(u-u_3)-\theta(u-u_4)]\Big\}.$$

Из этого выражения следует, что при значениях переменной u, заключенных в интервале (u_1, u_2), для интенсивности гравитационного излучения в элемент телесного угла имеем

$$\frac{dI}{d\Omega}=\frac{G(1-a^2)}{36\pi c^5}\left\{\frac{1}{4}(\dddot{D}_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta)^2+\frac{1}{2}\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}^{\alpha\beta}+\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}^{\alpha\gamma}n^\beta n_\gamma\right\}. \qquad (143)$$

Полная интенсивность гравитационного излучения по всем направлениям в этом случае принимает вид:

$$I=\frac{G(1-a^2)}{45c^5}\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}^{\alpha\beta}. \qquad (144)$$

Из выражений (143) и (144) видно, что в интервале $u_1 < u = ct - r < u_2$ интенсивность гравитационного излучения в элемент телесного угла и полная интенсивность зависят от выбора произвольной постоянной a и в результате соответствующего выбора величины a могут быть как равными нулю (при $a^2 = 1$), так и отрицательными (при $a^2 > 1$).

Этот результат можно истолковать двумя способами. С одной стороны, при условии $u_1 < u < u_2$ выражения (143) и (144) определяют плотность потока энергии через любой элемент сферической поверхности некоторого радиуса r и полную интенсивность гравитационного излучения через эту сферу в течение временного промежутка $t_1 = (r + u_1)/c < t < (r + u_2)/c = t_2$.
Следовательно, в зависимости от выбора a интенсивность гравитационного излучения, а также полную интенсивность через эту сферу можно сделать как равными нулю, так и отрицательными в любом наперед заданном промежутке времени $t_1 < t < t_2$.

С другой стороны, выражения (143) и (144) определяют в каждый момент времени t плотность потока энергии, а также полную интенсивность гравитационного излучения в области пространства, заключенной между двумя сферами с радиусами $r_1 = ct - u_1$ и $r_2 = ct - u_2$. Поэтому в зависимости от выбора a плотность потока энергии и полную интенсивность гравитационного излучения можно обратить в нуль или сделать отрицательными величинами во всей области пространства, заключенной между двумя сферами с радиусами $r_1 = ct - u_1$ и $r_2 = ct - u_2$.

2. Пусть функция F имеет следующий вид:

$$F=\pm\frac{a}{3}\int\limits_{-\infty}^{u}du\left\{\sqrt{\frac{2a^2}{45}\int\limits_{-\infty}^{u}du\,\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}^{\alpha\beta}[\theta(u-u_1)-\theta(u-u_2)]-c_2\int\limits_{-\infty}^{u}du\,[\theta(u-u_3)-\theta(u-u_4)]}\right\}, \qquad (145)$$

где $c_2=\dfrac{1}{u_4-u_3}\sqrt{\dfrac{2a^2}{45}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}du\,\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}^{\alpha\beta}[\theta(u-u_1)-\theta(u-u_2)]}$.

Аналогичным образом можно убедиться, что преобразование (137) с функцией F, определяемой выражением (145), является допустимым. В этом случае при $u_1 < u < u_2$ интенсивность гравитационного излучения

$$\frac{dI}{d\Omega}=\frac{G}{36\pi c^5}\left\{\frac{1}{4}(\dddot{D}_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta)^2+\frac{5-2a^2}{10}\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}^{\alpha\beta}+\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}^{\beta\gamma}n_\gamma n^\alpha\right\}$$

и полная интенсивность

$$I=\frac{G(1-a^2)}{45c^5}\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}^{\alpha\beta}$$

будут также зависеть от выбора величины a и могут быть как положительными, так и отрицательными. При $a^2=1$ интенсивность гравитационного излучения будет знаконеопределенной величиной, положительной для одних направлений и отрицательной для других. Полная интенсивность в этом случае равна нулю.

Компоненты же $\tilde{t}_g^{0\alpha}$ тензора энергии — импульса полевой теории гравитации после преобразования к новым координатам (137) имеют следующий вид:

$$\tilde{t}_g^{0\alpha}=\frac{Gn^\alpha}{32\pi c^6 r_H^2}\dot{h}_{\beta\varepsilon}\dot{h}^{\beta\varepsilon}\left[1+O\left(\frac{1}{\sqrt{r_H}}\right)\right]. \tag{146}$$

Следовательно, выражения для интенсивности гравитационного излучения и полная интенсивность, вычисляемые в полевой теории гравитации в новой координатной системе, будут совпадать с соответствующими выражениями (129) и (131), вычисляемыми в старой координатной системе:

$$I=\frac{G}{45c^5}\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}^{\alpha\beta}\left[1+O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)\right]. \tag{147}$$

Следует также отметить, что как в старой, так и в новой координатных системах асимптотическое выражение при $r\to\infty$ для компонент тензора кривизны будет одним и тем же:

$$\left.\begin{aligned}R_{0\alpha0\beta}&=-\frac{G}{2c^6 r}\ddot{h}_{\alpha\beta};\\ R_{\alpha\beta0\varepsilon}&=\frac{G}{2c^6 r}(\ddot{h}_{\alpha\varepsilon}n_\beta-\ddot{h}_{\beta\varepsilon}n_\alpha);\\ R_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}&=\frac{G}{2c^6 r}(\ddot{h}_{\alpha\varepsilon}n_\beta n_\gamma+\ddot{h}_{\beta\gamma}n_\alpha n_\varepsilon-\ddot{h}_{\alpha\gamma}n_\beta n_\varepsilon-\ddot{h}_{\beta\varepsilon}n_\alpha n_\gamma).\end{aligned}\right\} \tag{148}$$

Таким образом, квадрупольная формула Эйнштейна для интенсивности гравитационного излучения не является следствием ОТО, поскольку, как мы видели, в зависимости от выбора системы координат потери энергии на гравитационное излучение могут быть равными нулю или даже стать отрицательными. Следовательно, эту формулу нельзя использовать (ввиду ее отсутствия) для каких-либо энергетических расчетов в ОТО. Таким образом, теория Эйнштейна не в состоянии указать причину наблюдаемой [83] потери энергии двойной пульсарной системой PSR 1913+16.

В полевой теории гравитации гравитационное поле, аналогичное всем другим физическим полям, обладает энергией — импульсом и при излучении слабых гравитационных волн медленно движущимся источником его энергия уменьшается в соответствии с (131). Поэтому экспериментальное доказательство существования гравитационных волн как физического поля, переносящего энергию и уменьшающего тем самым энергию источника, явилось бы подтверждением развиваемых здесь представлений, поскольку ОТО не может объяснить потерю энергии веществом на излучение гравитационных волн.

В заключение этого раздела обсудим кратко вопрос о вычислении тензора Римана в полевой теории гравитации. В теории Эйнштейна была возможна ситуация [2, 4], когда псевдотензор энергии — импульса гравитационных волн был равен нулю, а компоненты тензора Римана не равнялись нулю. Этот факт красноречиво свидетельствовал о незаконности интерпретации псевдотензоров энергии — импульса как энергетических характеристик гравитационного поля.

В полевой теории гравитации, если компоненты тензора энергии — импульса гравитационных волн равны нулю, то и тензор Римана тождественно равен нулю, т. е. на формирование риманова пространства — времени всегда необходимы энергия и импульс гравитационного поля. Следует отметить, что метрика риманова пространства — времени имеет смысл только внутри вещества. Вычислять же компоненты метрического тензора g_{ni}, а также тензор кривизны $R^i_{n\,lm}$ можно в любой точке, в том числе и вне вещества. Однако при этом следует всегда учитывать необходимость проведения должным образом калибровку полей f_{nm} вне вещества, так как физические величины не зависят от компонент поля f_{nm}, которые изменяются при калибровочных преобразованиях. Эти компоненты не входят в выражения для тензора энергии — импульса гравитационного поля. Соответствующим калибровочным преобразованием их всегда можно сделать равными нулю. Поэтому при вычислении вне вещества геометрических характеристик пространства — времени, как, например, метрического тензора g_{ni}, тензора Римана $R^i_{n\,lm}$, мы должны подставлять в уравнение связи (94) только те компоненты f_{nm}, которые входят в тензор энергии — импульса гравитационного поля, все другие компоненты поля будем полагать равными нулю, потому что они соответствующим калибровочным преобразованием могут быть обращены в нуль. Таким образом, наша теория будет всегда внутренне самосогласованной.

Пусть все компоненты канонического тензора энергии — импульса свободных гравитационных волн равны нулю, тогда из выражения (100) при $n = p = 0$ получим

$$\dot{f}_{lm}\dot{f}^{lm} - \dot{f}^2/2 = 0. \quad (149)$$

Покажем, что в ТТ-калибровке у свободной гравитационной волны все компоненты тождественно равны нулю при условии (149), тогда в этой калибровке все компоненты метрического тензора риманова пространства — времени совпадают с компонентами метрического тензора плоского пространства — времени $g_{ni} = \gamma_{ni}$. Поэтому тензор кривизны при равенстве нулю тензора энергии — импульса гравитационного поля также равен нулю.

Рассмотрим некоторую точку. Ориентируем ось x декартовой системы координат так, чтобы она проходила через точку наблюдения. Выделим вокруг этой точки достаточно малую область так, чтобы в этой области можно было считать гравитационную волну плоской. Тогда все ее компоненты будут зависеть только от разности $t - x$. Условия $\partial_n f^{nm} = 0$ в этом случае примут вид:

$$\dot{f}^{00} = \dot{f}^{01} = \dot{f}^{11}; \quad \dot{f}^{02} = \dot{f}^{12}; \quad \dot{f}^{03} = \dot{f}^{13}.$$

Интегрируя эти уравнения и полагая константы интегрирования равными нулю, так как гравитационные волны не имеют не зависящей от времени части, получаем

$$f^{00} = f^{01} = f^{11}; \quad f^{02} = f^{12}; \quad f^{03} = f^{13}.$$

При ТТ-калибровке все эти компоненты равны нулю. Кроме того, из равенства нулю следа $f^n_n = 0$ имеем $f^{22} = -f^{33}$. Из условия равенства нулю тензора энергии — импульса (149) получим

$$2\,(\dot{f}_{23})^2 + (\dot{f}_{22} - \dot{f}_{33})^2/2 = 0,$$

тогда и поперечные компоненты гравитационной волны $f_{23} = f_{22} = f_{33} = 0$.

Таким образом, в ТТ-калибровке из условия равенства нулю тензора энергии — импульса свободной гравитационной волны получаем, что все компоненты этой волны нулевые. Поэтому и все компоненты метрического тензора риманова пространства — времени совпадут с соответствующими компонентами метрического тензора псевдоевклидова пространства — времени $g_{ni} = \gamma_{ni}$, что приводит к равенству нулю всех компонент тензора Римана: $R^i_{nlm} = 0$.

10. ПОСТНЬЮТОНОВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ПОЛЕВОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Для облегчения сравнения результатов экспериментов, выполненных в пределах Солнечной системы, с предсказаниями различных метрических теорий гравитации Нордтведт и Вилл [84] разработали формализм, получивший название параметризованного постньютоновского (ППН).

В этом формализме метрика риманова пространства — времени, которая создается телом, состоящим из идеальной жидкости, записывается в виде суммы всевозможных обобщенных гравитационных потенциалов с произвольными коэффициентами, называемыми постньютоновскими параметрами. Используя пересмотренные параметры Вилла — Нордтведта, метрику риманова пространства — времени можно записать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
g_{00} &= 1 - 2U + 2\beta U^2 - (2\gamma + 2 + \alpha_3 + \xi_1)\Phi_1 + \xi_1 A + \\
&\quad + 2\xi_w \Phi_w - 2[(3\gamma + 1 - 2\beta + \xi_2)\Phi_2 + (1 + \xi_3)\Phi_3 + \\
&\quad + 3(\gamma + \xi_4)\Phi_4] - (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) w_\alpha w^\alpha U + \\
&\quad + \alpha_2 w^\alpha w^\beta U_{\alpha\beta} - (2\alpha_3 - \alpha_1) w^\alpha V_\alpha; \\
g_{0\alpha} &= \frac{1}{2}(4\gamma + 3 + \alpha_1 - \alpha_2 + \xi_1) V_\alpha + \frac{1}{2}(1 + \alpha_2 - \xi_1) W_\alpha - \\
&\quad - \frac{1}{2}(\alpha_1 - 2\alpha_2) w_\alpha U + \alpha_2 w^\beta U_{\alpha\beta}; \\
g_{\alpha\beta} &= (1 + 2\gamma U)\gamma_{\alpha\beta},
\end{aligned}\right\} \tag{150}$$

где w^α — пространственные компоненты скорости системы отсчета относительно гипотетической универсальной системы покоя. Для некоторых теорий гравитации это скорость центра масс Солнечной системы относительно системы покоя Вселенной.

Обобщенные гравитационные потенциалы имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
&U(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho_0(\mathbf{r}', t)}{R} dV; \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|; \\
&\Phi_1 = -\int \frac{\rho_0 v_\alpha v^\alpha}{R} dV; \quad \Phi_2 = \int \frac{\rho_0 U}{R} dV; \\
&\Phi_3 = \int \frac{\rho_0 \Pi}{R} dV; \quad \Phi_4 = \int \frac{p}{R} dV; \\
&A = \int \frac{\rho_0 v_\alpha v_\beta R^\alpha R^\beta}{R^3} dV; \quad V_\alpha = -\int \frac{\rho_0 v_\alpha}{R} dV; \\
&W_\alpha = \int \frac{\rho_0 v_\beta R^\beta R_\alpha}{R^3} dV; \quad U_{\alpha\beta} = \int \frac{\rho_0 R_\alpha R_\beta}{R^3} dV; \\
&\Phi_w = \int \frac{\rho_0(\mathbf{r}', t)\rho_0(\mathbf{r}'', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (x^\alpha - x'^\alpha) \times \\
&\qquad \times \left[\frac{x_\alpha - x''_\alpha}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} - \frac{x'_\alpha - x''_\alpha}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|}\right] d^3\mathbf{r}' d^3\mathbf{r}''; \\
&R^\alpha = x^\alpha - x'^\alpha,
\end{aligned}\right\} \tag{151}$$

где ρ_0 — инвариантная плотность массы тела; v^α — компоненты скорости элементов идеальной жидкости; p — изотропное давление; $\rho_0\Pi$ — плотность внутренней энергии идеальной жидкости.

Каждой метрической теории гравитации будет соответствовать некоторый набор значений десяти параметров: β, γ, α_1, α_2, α_3, ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, ξ_w. Поэтому с точки зрения экспериментов, выполненных в Солнечной системе, одна теория гравитации отличается от другой лишь значениями этих параметров. Для выявления теорий гравитации, которые в постньютоновском пределе позволяют описать эксперименты, выполненные в Солнечной системе, достаточно определить из этих экспериментов значения десяти постньютоновских параметров и отбирать лишь те теории гравитации, постньютоновское приближение которых приводит к значениям параметров, совпадающим с полученными из экспериментов. Тогда все такие теории гравитации будут неразличимыми с точки зрения любых экспериментов, выполненных с постньютоновской точностью.

Дальнейший отбор теории гравитации, адекватной действительности, связан с повышением точности измерений до постпостньютоновского уровня, с поиском возможностей изучать свойства гравитационных волн, а также явлений в сильных гравитационных полях.

Определим, какой набор значений постньютоновских параметров соответствует полевой теории гравитации. Уравнения гравитационного поля этой теории для вычисления постньютоновского приближения запишем в виде:

$$\Box^2 f^{nm} = -16\pi J^{nm}; \quad \Box = \partial_i \partial^i. \tag{152}$$

Если использовать обозначения (66), то для тензорного тока получим следующее выражение:

$$J^{nm} = \Box h^{nm} - \partial^n \partial_l h^{lm} - \partial^m \partial_l h^{ln} + \gamma^{nm} \partial_l \partial_i h^{li}. \tag{153}$$

Следуя Фоку [13], для построения постньютоновского приближения, справедливого в Солнечной системе, будем рассматривать задачу астрономического типа. Будем считать, что компоненты тензора энергии — импульса вещества равны нулю во всем пространстве, кроме некоторых областей. Внутри каждой такой области тензор энергии — импульса должен соответствовать принятой нами модели идеальной жидкости и удовлетворять ковариантному уравнению сохранения в римановом пространстве — времени. Кроме физических свойств модели небесных тел тензор энергии — импульса вещества будет зависеть также и от метрики риманова пространства — времени. Поэтому построение тензора энергии — импульса вещества и определение метрического тензора риманова пространства — времени необходимо производить совместно.

Воспользуемся тем обстоятельством, что в пределах Солнечной системы максимальные значения гравитационного потенциала, квадрата характерной скорости v^2 (скорости небесных тел относительно центра масс Солнечной системы), удельного давления p/ρ_0 и удельной внутренней энергии Π имеют примерно одинаковый порядок малости ε^2, где $\varepsilon \approx 10^{-3}$ — некоторый безразмерный параметр. Поэтому в Солнечной системе будут справедливы следующие оценки:

$$\left.\begin{aligned} U &= O(\varepsilon^2); \ v^\alpha = O(\varepsilon); \\ \Pi &= O(\varepsilon^2); \ p/\rho_0 = O(\varepsilon^2). \end{aligned}\right\} \tag{154}$$

Кроме того рассмотрим поле в ближней зоне, т. е. на расстояниях от Солнца, значительно меньших длины гравитационной волны, излучаемой объектами в Солнечной системе, движущимися с характерной скоростью $v \sim \varepsilon$: $R/\lambda \sim R\partial/\partial t \sim \varepsilon$. В этом случае изменения всех величин со временем обусловлены в первую очередь движением вещества. Поэтому частные производные по времени малы по сравнению с частными производными по координатам:

$$\partial/\partial t = O(\varepsilon)\, \partial/\partial x^\alpha. \tag{155}$$

Задачу совместного определения тензора энергии — импульса вещества и метрического тензора риманова пространства — времени будем решать последовательными этапами, каждый из которых соответствует разложению точных уравнений задачи по степеням безразмерного параметра ε.

Имеем следующие точные соотношения: плотность тензора энергии — импульса идеальной жидкости

$$T^{nm} = \sqrt{-g}\,[(p+\mathscr{E})\, u^n u^m - p g^{nm}], \tag{156}$$

ковариантное уравнение неразрывности

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} [\sqrt{-g}\, \rho_0 u^i] = 0 \tag{157}$$

и уравнение сохранения плотности тензора энергии — импульса вещества в римановом пространстве — времени

$$\nabla_n T^{nm} = \partial_n T^{nm} + \Gamma^m_{nl} T^{nl} = 0, \tag{158}$$

где $\mathscr{E}$ — полная плотность энергии идеальной жидкости; u^i — 4-вектор скорости.

Уравнения гравитационного поля (152) и уравнение минимальной связи (94) для наших целей удобнее записать в виде:

$$\square^2 \chi^{nm} = -16\pi A^{nm}; \tag{159}$$

$$\begin{aligned} g_{nm} = \gamma_{nm} + \chi_{nm} + \frac{1}{4} [b_1 \chi_{nl} \chi^l_m + b_3 \gamma_{nm} \chi^{li} \chi_{li} - \\ - (b_1 + b_2)\, \chi_{nm} \chi + (b_4 + b_2/2 + b_1/4)\, \chi^2 \gamma_{nm}], \end{aligned} \tag{160}$$

где введены обозначения

$$\chi_{nm} = f_{nm} - \gamma_{nm} f/2; \quad \chi = \chi_n^n; \tag{161}$$

$$A^{nm} = \Box\, [h^{nm} - \gamma^{nm} h_l^l/2] - \partial^n \partial_l h^{lm} - \partial^m \partial_l h^{ln}. \tag{162}$$

Разложим все величины, входящие в (158)—(161), в ряды по малому параметру ε. Если пренебречь потерей энергии на излучение гравитационных волн, то эти разложения должны быть справедливыми и при обращении знака времени, т. е. при преобразовании координат $x^{0'} = -x^0$. В этом случае компоненты v^α, $\chi^{0\alpha}$, $T^{0\alpha}$, $g_{0\alpha}$, $A^{0\alpha}$, $\partial/\partial x^0$ изменяют знак на противоположный. Так как $v \sim \varepsilon$ и $\partial/\partial x^0 \sim \varepsilon\partial/\partial x^\alpha$, то при обращении знака времени безразмерный параметр ε также изменяет знак. Отсюда следует, что при условии пренебрежения потерей энергии на излучение гравитационных волн разложения компонент v^α, $\chi^{0\alpha}$, $T^{0\alpha}$, $g_{0\alpha}$, $A^{0\alpha}$ содержат только нечетные степени параметра ε.

Разложения тензорного тока A^{nm} и поля χ^{nm} запишем в виде:

$$\chi^{nm} = \overset{(1)}{\chi}{}^{nm} + \overset{(2)}{\chi}{}^{nm} + \ldots; \tag{163}$$

$$A^{nm} = \overset{(0)}{A}{}^{nm} + \overset{(1)}{A}{}^{nm} + \ldots, \tag{164}$$

где компоненты нулевого $\overset{(0)}{A}{}^{nm}$, первого $\overset{(1)}{A}{}^{nm}$ и второго $\overset{(2)}{A}{}^{nm}$ приближений имеют следующий порядок малости:

$$\left.\begin{array}{l}
\overset{(0)}{A}{}^{0\alpha} = O(\varepsilon);\ \overset{(0)}{A}{}^{00} = O(1);\ \overset{(0)}{A}{}^{\alpha\beta} = O(1);\\
\overset{(1)}{A}{}^{0\alpha} = O(\varepsilon^3);\ \overset{(1)}{A}{}^{\delta\alpha} = O(\varepsilon^2);\ \overset{(1)}{A}{}^{00} = O(\varepsilon^2);\\
\overset{(2)}{A}{}^{0\alpha} = O(\varepsilon^5);\ \overset{(2)}{A}{}^{00} = O(\varepsilon^4);\ \overset{(2)}{A}{}^{\alpha\beta} = O(\varepsilon^4).
\end{array}\right\} \tag{165}$$

Уравнения гравитационного поля (159) с учетом разложений (163), (164) и оценки (155) перепишем в виде ряда последовательных приближений:

$$\Delta^2 \overset{(1)}{\chi}{}^{nm} = -16\pi \overset{(0)}{A}{}^{nm}; \tag{166}$$

$$\Delta^2 \overset{(2)}{\chi}{}^{nm} = -16\pi \overset{(1)}{A}{}^{nm} + 2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta \overset{(1)}{\chi}{}^{nm}. \tag{167}$$

Из выражений (74) и (94) получим

$$h^{nm} = T^{nm} + \frac{b_1}{4}[T^{nl}\chi_l^m + T^{ml}\chi_l^n] - \frac{b_1+b_2}{4}\chi T^{nm} + \frac{b_3}{2}\chi^{nm}T^{li}\gamma_{li} -$$
$$- \frac{b_1+b_2}{4}\gamma^{nm}T^{li}\chi_{li} + \left(\frac{b_2}{4} + \frac{b_1}{8} + \frac{b_4}{2}\right)\gamma^{nm}\chi T^{li}\gamma_{li}. \tag{168}$$

Тогда для тензорного тока A^{nm} имеем:

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{(0)}{A}{}^{nm}=-\Delta\left[\overset{(0)}{T}{}^{nm}-\frac{1}{2}\gamma^{nm}\overset{(0)}{T}{}^{li}\gamma_{li}\right];\\
&\overset{(1)}{A}{}^{nm}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\overset{(0)}{T}{}^{nm}-\frac{1}{2}\gamma^{nm}\overset{(0)}{T}{}^{li}\gamma_{li}\right]+\\
&+\partial^n(\overset{(1)}{\Gamma}{}^m_{li}\overset{(0)}{T}{}^{li})+\partial^m(\overset{(1)}{\Gamma}{}^n_{li}\overset{(0)}{T}{}^{li})-\Delta\left[\overset{(1)}{T}{}^{nm}-\frac{1}{2}\gamma^{nm}\overset{(1)}{T}{}^{li}\gamma_{li}+\right.\\
&+\frac{b_1}{4}(\overset{(0)}{T}{}^{nl}\overset{(1)}{\chi}{}^m_l+\overset{(0)}{T}{}^{ml}\overset{(1)}{\chi}{}^n_l)-\frac{b_1+b_2}{4}\overset{(0)}{T}{}^{nm}\overset{(1)}{\chi}+\frac{b_2}{4}\gamma^{nm}\overset{(0)}{T}{}^{li}\overset{(1)}{\chi}_{li}+\\
&\left.+\frac{b_3}{2}\overset{(1)}{\chi}{}^{nm}\overset{(0)}{T}{}^{li}\gamma_{li}-\left(\frac{b_2}{8}+\frac{b_3}{4}+\frac{b_4}{2}\right)\gamma^{nm}\overset{(0)}{T}{}^{li}\gamma_{li}\chi\right],
\end{aligned}\right\}\qquad(169)$$

где $\Delta=-\partial^\alpha\partial_\alpha$.

Для определения постньютоновских параметров достаточно определить компоненты $g_{\alpha\beta}$ с точностью до ε^2, компоненты $g_{0\alpha}$ с точностью до ε^3 и компоненту g_{00} с точностью до ε^4. Из уравнений связи (160) следует, что для этого необходимо определить компоненты поля $\chi^{\alpha\beta}$ с точностью до ε^2, $\chi^{0\alpha}$ с точностью до ε^3, а χ^{00} с точностью до ε^4.

В исходном приближении считаем, что метрический тензор риманова пространства — времени совпадает с метрическим тензором псевдоевклидова пространства — времени, т. е. пренебрегаем силами тяготения. Тогда уравнения (157) и (158) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x^i}(\rho u^i)=O(\varepsilon^2);\\
&\partial_n T^{n0}=O(\varepsilon^3);\ \ \partial_n T^{n\alpha}=O(\varepsilon^2).
\end{aligned}\right\}\qquad(170)$$

Учитывая оценки (154), из этих уравнений имеем:

$$T^{00}=\rho_0[1+O(\varepsilon^2)];\quad T^{\alpha\beta}=\rho_0 O(\varepsilon^2);\quad T^{0\alpha}=\rho_0 v^\alpha[1+O(\varepsilon^2)].$$

Поэтому компоненты тензорного тока A^{nm} в нулевом приближении можно записать так:

$$\overset{(0)}{A}{}^{00}=-\Delta\rho_0/2;\quad \overset{(0)}{A}{}^{0\alpha}=-\Delta(\rho_0 v^\alpha);\quad \overset{(0)}{A}{}^{\alpha\beta}=\gamma^{\alpha\beta}\Delta\rho_0/2.\qquad(171)$$

Тогда из уравнения (166) получим:

$$\overset{(1)}{\chi}{}^{00}=-2U;\quad \overset{(1)}{\chi}{}^{\alpha\beta}=2U\gamma^{\alpha\beta};\quad \overset{(1)}{\chi}{}^{0\alpha}=4V^\alpha.\qquad(172)$$

В результате компоненты метрического тензора риманова пространства — времени (160) в первом приближении можно записать:

$$\left.\begin{aligned}
&g_{00}=1-2U+O(\varepsilon^4);\ \ g_{0\alpha}=4V_\alpha[1+O(\varepsilon)^2];\\
&g_{\alpha\beta}=\gamma_{\alpha\beta}[1+2U]+O(\varepsilon^4).
\end{aligned}\right\}\qquad(173)$$

Знание метрики в этом приближении позволяет определить компоненты тензора энергии — импульса вещества в следующем приближении. Используя выражения (173), найдем:

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{-g}=1+2U+O(\varepsilon^4);\ u_0=1+U-v_\alpha v^\alpha/2;\\ &\Gamma^0_{00}=-\partial U/\partial t+O(\varepsilon^5);\ \Gamma^\alpha_{00}=\partial^\alpha U+O(\varepsilon^4);\\ &\Gamma^0_{0\alpha}=-\partial_\alpha U+O(\varepsilon^4);\ \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}=O(\varepsilon^2);\\ &\Gamma^\alpha_{0\beta}=O(\varepsilon^3);\ \Gamma^0_{\alpha\beta}=O(\varepsilon^2). \end{aligned}\right\} \tag{174}$$

Введем также сохраняющуюся плотность массы ρ в соответствии с равенством $\rho=\sqrt{-g}\rho_0 u^0$. Чтобы получить метрику в следующем приближении, нам необходимо построить плотность тензора энергии — импульса вещества, которая бы удовлетворяла уравнениям сохранения (158) в силу ковариантного уравнения неразрывности

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\rho v^\alpha)\right]=0 \tag{175}$$

и уравнений движения идеальной жидкости в ньютоновском приближении [13]:

$$\rho\frac{dv^\alpha}{dt}=\gamma^{\alpha\beta}\left[-\rho\frac{\partial U}{\partial x^\beta}+\frac{\partial p}{\partial x^\beta}\right]+\rho O(\varepsilon^4);$$

$$\rho d\Pi/dt=-p\partial_\alpha v^\alpha;\ d/dt=\partial/\partial t+v^\beta\partial/\partial x^\beta.$$

Легко убедиться, что этим условиям удовлетворяют следующие компоненты плотности тензора энергии — импульса вещества:

$$T^{00}=\rho\,[1-v_\alpha v^\alpha/2+\Pi+U]+\rho O(\varepsilon^4);$$

$$T^{0\alpha}=\rho v^\alpha\,[1-v_\beta v^\beta/2+\Pi+U]+pv^\alpha+\rho O(\varepsilon^4);$$

$$T^{\alpha\beta}=\rho v^\alpha v^\beta-p\gamma^{\alpha\beta}+\rho O(\varepsilon^4).$$

В результате имеем следующее соотношение между сохраняющейся ρ и инвариантной ρ_0 плотностями массы:

$$\rho=\rho_0\,[1+3U-v_\alpha v^\alpha/2]+\rho O(\varepsilon^4). \tag{176}$$

Для получения постньютоновского приближения нам осталось определить $\overset{(2)}{\chi}{}^{00}$. Уравнение (167) для компоненты $\overset{(2)}{\chi}{}^{00}$ с учетом выражений (169), (172), (174) принимает вид

$$\Delta^2\overset{(2)}{\chi}{}^{00}=8\pi\frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho_0+$$

$$16\pi\Delta\left\{\frac{3}{2}p+\rho_0\left[\frac{\Pi}{2}-v_\alpha v^\alpha-2(b_1+b_2+b_3+b_4)U\right]\right\}. \tag{177}$$

Решая это уравнение, имеем

$$\overset{(2)}{\chi}{}^{00} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \rho_0 R dV - 4\Phi_1 - 2\Phi_3 - $$
$$- 6\Phi_4 + 8(b_1 + b_2 + b_3 + b_4)\Phi_2. \qquad (178)$$

Используя выражения (160), (172) и (178), метрику риманова пространства — времени в постньютоновском приближении запишем в виде:

$$\left.\begin{aligned} g_{00} = 1 - 2U + 2\beta U^2 - 4\Phi_1 + 4(\beta - 2)\Phi_2 - 2\Phi_3 - 6\Phi_4 - \\ - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \rho_0 R dV + O(\varepsilon^6);\ g_{0\alpha} = 4V_\alpha + O(\varepsilon^5), \\ g_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}(1 + 2U) + O(\varepsilon^4), \end{aligned}\right\} \qquad (179)$$

где $\beta = 2(b_1 + b_2 + b_3 + b_4)$.

Для определения значений постньютоновских параметров нашей теории необходимо перейти в ту координатную систему, в которой записано постньютоновское разложение метрики (150). Если произвести координатное преобразование

$$x'^n = x^n + \xi^n(x) \qquad (180)$$

и считать, что $\xi^\alpha(x) \sim O(\varepsilon^2)$; $\xi^0(x) \sim O(\varepsilon^3)$, то метрика (179) в новой координатной системе будет иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} g'_{00} &= g_{00} - 2\partial_0\xi_0 + O(\varepsilon^6); \\ g'_{0\alpha} &= g_{0\alpha} - \partial_0\xi_\alpha - \partial_\alpha\xi_0 + O(\varepsilon^5); \\ g'_{\alpha\beta} &= g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha\xi_\beta - \partial_\beta\xi_\alpha + O(\varepsilon^4). \end{aligned}\right\} \qquad (181)$$

В качестве «канонической» координатной системы обычно выбирают систему координат, в которой недиагональные компоненты пространственной части метрического тензора g_{ni} равны нулю:

$$g_{12} = g_{13} = g_{23} = 0,$$

и, кроме того, компонента g_{00} не содержит членов вида

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \rho_0 R\, dV.$$

Эти требования позволяют однозначно определить 4-вектор с требуемой точностью. В нашем случае для перехода к канонической координатной системе необходимо выбрать следующий 4-вектор ξ^n:

$$\xi^\alpha(x) = 0;\ \xi^0(x) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int \rho_0 R dV.$$

Используя уравнения непрерывности (175), получаем

$$\partial_\alpha\xi_0 = [V_\alpha - W_\alpha]/2.$$

В результате имеем следующее выражение для метрического тензора эффективного риманова пространства — времени:

$$\left.\begin{aligned} &g_{00}=1-2U+2\beta U^2-4\Phi_1+4(\beta-2)\Phi_2-2\Phi_3-6\Phi_4+O(\varepsilon^6);\\ &g_{0\alpha}=(7/2)V_\alpha+W_\alpha/2+O(\varepsilon^5);\quad g_{\alpha\beta}=\gamma_{\alpha\beta}[1+2U]+O(\varepsilon^4).\end{aligned}\right\}\tag{182}$$

Таким образом, постньютоновское приближение полевой теории гравитации приводит к метрике риманова пространства — времени (182), которая содержит только одну неизвестную константу β.

Для случая, когда источником гравитационного поля является статическое сферически симметричное тело радиусом a, эта метрика принимает вид:

$$\left.\begin{aligned} &g_{00}=1-2M/r+2\beta M^2/r^2+O(M^3/r^3);\\ &g_{\alpha\beta}=\gamma_{\alpha\beta}(1+2M/r)+O(M^2/r^2);\quad g_{0\alpha}=0,\end{aligned}\right\}\tag{183}$$

где M — гравитационная масса источника поля:

$$M=4\pi\int\limits_0^a\rho_0\left[1+\Pi+\frac{3p}{\rho_0}+2(2-\beta)U\right]r^2\,dr.\tag{184}$$

Используя ньютоновскую теорему вириала для статических тел

$$3\int p\,dV=\frac{1}{2}\int\rho_0 U\,dV,$$

а также соотношение (176) между сохраняющейся и инвариантной плотностями массы, выражение (184) приведем к виду

$$M=4\pi\int\limits_0^a\rho\left[1+\Pi+\left(\frac{3}{2}-2\beta\right)U\right]r^2\,dr.\tag{185}$$

Как мы увидим ниже, для совпадения постньютоновских выражений для гравитационной (185) и инертной [см. (200)] масс статического сферически симметричного тела необходимо положить $\beta=1$, тогда постньютоновские параметры полевой теории гравитации будут иметь следующие значения:

$$\left.\begin{aligned} &\gamma=\beta=1;\quad \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0;\\ &\xi_1=\xi_2=\xi_3=\xi_4=\xi_w=0.\end{aligned}\right\}\tag{186}$$

Для сравнения укажем, что в ОТО постньютоновские параметры имеют те же значения (см. [84]). Следует отметить, что в теории Эйнштейна все параметры α и ξ равны нулю. Долгое время это обстоятельство считалось свойством только теории Эйнштейна и рассматривалось как одно из ее достижений. Однако, как мы видим, в полевой теории гравитации эти параметры также равны нулю. Оставшиеся параметры в ОТО и полевой теории гравитации равны единице.

Поскольку постньютоновские параметры ОТО Эйнштейна и полевой теории гравитации совпадают, то эти две теории будут неразличимы с точки зрения любых экспериментов, выполненных с постньютоновской точностью измерений в гравитационном поле Солнечной системы.

Как показано в [85], равенство нулю трех параметров α имеет определенный физический смысл: всякая теория гравитации, в которой $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, не обладает предпочтительной универсальной системой покоя в постньютоновском пределе. В этом случае при переходе от универсальной системы покоя к движущейся системе метрика риманова пространства — времени в постньютоновском пределе является форминвариантной и скорость w^α новой системы координат относительно системы покоя в явном виде не будет входить в метрику.

Из выражений (186) следует, что в полевой теории гравитации отсутствует универсальная предпочтительная система покоя.

Определенный физический смысл имеет и линейная зависимость параметров ξ и α. Как показано в работе [86], при выполнении соотношений:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = \xi_3 = 0; \quad \alpha_2 - \xi_1 - 2\xi_w = 0; \\ \xi_2 = \xi_w; \quad \alpha_3 + \xi_1 + 2\xi_w = 0; \\ 3\xi_4 + 2\xi_w = 0; \quad \xi_1 + 2\xi_w = 0 \end{array}\right\} \tag{187}$$

из постньютоновских уравнений движения можно определить величины, которые в постньютоновском приближении не зависят от времени. Однако интерпретировать их как энергию — импульс и момент импульса системы, т. е. как интегралы движения, можно лишь в тех теориях гравитации, которые обладают законами сохранения тензора энергии — импульса вещества и гравитационного поля.

Так, в теории Эйнштейна соотношения (187) выполняются, но не зависящие от времени в постньютоновском приближении величины, как показывает детальный анализ (см. также разд. 11), не являются интегралами движения системы, состоящей из вещества и гравитационного поля.

В полевой теории гравитации изолированная система имеет в псевдоевклидовом пространстве — времени все десять законов сохранения в их обычном смысле, которые в постньютоновском приближении приводят к десяти интегралам движения системы, поэтому в постньютоновском приближении полевая теория гравитации имеет десять не зависящих от времени величин. Выполнение соотношений (187) в полевой теории гравитации подтверждает этот вывод.

11. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ПОСТНЬЮТОНОВСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ПОЛЕВОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

В полевой теории гравитации гравитационное поле, рассматриваемое в псевдоевклидовом пространстве — времени, ведет себя аналогично всем другим физическим полям. Оно обладает энергией — импульсом и вносит вклад в плотность полного тензора энергии — импульса системы. Ковариантный закон сохранения плотности полного тензора энергии-импульса в псевдоевклидовом пространстве — времени, записанный в декартовой системе координат, имеет обычный смысл:

$$\partial_i \left[t_g^{ni} + t_M^{ni}\right] = 0, \tag{188}$$

где t_g^{ni} — плотность симметрического тензора энергии — импульса гравитационного поля (104); t_M^{ni} — плотность симметрического тензора энергии — импульса вещества (111).

Используя дифференциальный закон сохранения (188), можно получить соответствующий интегральный закон сохранения:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int dV\left[t_g^{0n} + t_M^{0n}\right] = \int dS_\alpha\left[t_g^{n\alpha} + t_M^{n\alpha}\right].$$

Если поток энергии вещества и гравитационного поля через поверхность, ограничивающую объем, отсутствует:

$$\int dS_\alpha\left[t_g^{\alpha n} + t_M^{\alpha n}\right] = 0, \tag{189}$$

то приходим к закону сохранения полного 4-импульса изолированной системы:

$$(d/dt)\, P^n = 0,$$

где

$$P^n = \int dV\left[t_g^{0n} + t_M^{0n}\right]. \tag{190}$$

В этом случае как следствие симметрии плотности полного тензора энергии — импульса сохраняется также и тензор момента импульса системы:

$$(d/dt)\, M^{ni} = 0,$$

где

$$M^{ni} = \int dV\left\{x^n\left[t_g^{0i} + t_M^{0i}\right] - x^i\left[t_g^{0n} + t_M^{0n}\right]\right\}. \tag{191}$$

В силу сохранения компонент

$$M^{0\alpha} = x^0\int dV\left[t_g^{0\alpha} + t_M^{0\alpha}\right] - \int dV x^\alpha\left[t_g^{00} + t_M^{00}\right]$$

центр масс изолированной системы, определяемый формулой

$$X^\alpha = \int x^\alpha [t_g^{00} + t_M^{00}]\, dV \Big/ \int dV\, [t_g^{00} + t_M^{00}] = (P^\alpha t - M^{0\alpha})/P^0, \qquad (192)$$

совершает равномерное прямолинейное движение со скоростью

$$(d/dt)\, X^\alpha = P^\alpha/P^0.$$

Таким образом, для описания движения изолированной системы, состоящей из вещества и гравитационного поля, достаточно определить 4-импульс P^n (190). Следует отметить, что в любой реальной системе из-за движения ее составных частей, теплового движения вещества и других причин может происходить излучение гравитационных волн; любая реальная система обменивается с другими системами веществом в форме электромагнитного излучения и в форме частиц, атомов и т. п. Поэтому в самом общем случае пренебрегать потоками энергии вещества и гравитационного поля нельзя: существует большое количество астрофизических процессов, в которых эти потоки энергии играют ведущую роль; именно их учет и позволяет понять и предсказать многие астрофизические процессы. Но вместе с тем для систем, у которых потоки энергии вещества и гравитационного поля малы, условие изолированности (189) выполняется с некоторой степенью точности. Тогда с той же степенью точности можно утверждать о сохранении 4-импульса этой системы. Именно такая ситуация имеет место для систем, к которым применим постньютоновский формализм. В этом случае условие изолированности системы (189) в постньютоновском приближении выполняется и можно определить сохраняющийся 4-импульс системы.

Найдем постньютоновское выражение для 4-импульса изолированной системы в полевой теории гравитации. Плотность полного симметрического тензора энергии—импульса в плоском пространстве — времени имеет вид:

$$\begin{aligned} t^{ni} = t_g^{ni} + t_M^{ni} = \frac{1}{64\pi} \Big\{ &-\gamma^{ni} \Big[\partial_l f_{ms}\, \partial^l f^{ms} - \frac{1}{2}\, \partial_l f \partial^l f \Big] - \\ &- \partial^n f \partial^i f + 2\partial^n f_{lm}\, \partial^i f^{lm} - 2f^{im} \,\Box\, f_m^n - 2f^{nm} \,\Box\, f_m^i + 2f^{ni} \,\Box\, f \Big\} - \\ &- \frac{1}{32\pi}\, \partial_l \left\{ f_m^i \partial^n f^{lm} + f_m^n \partial^i f^{lm} - f^{lm} (\partial^i f_m^n + \partial^n f_m^i) \right\} - 2\Lambda^{(ni)} + \\ &+ T^{ni} \Big[1 - \frac{1}{2}\, f + \frac{b_3}{4}\, f_{lm} f^{lm} + \frac{b_4}{2}\, f^2 \Big] + \frac{1}{2}\, f^{ni} \gamma_{lm} T^{lm} - \\ &- \frac{1}{4}\, [b_1 T^{lm} f_l^i f_m^n + b_2 f^{ni} T^{lm} f_{lm} + 2b_3 f_s^n f^{is} T^{lm} \gamma_{lm} + 2b_4 f^{ni} f T^{lm} \gamma_{lm}], \end{aligned} \qquad (193)$$

где Λ^{ni} определяется выражением (103), причем тензор A^{lm} в этом случае имеет вид:

$$A^{lm} = -\frac{1}{32\pi} \Big\{ \Box \Big(f^{lm} - \frac{1}{2}\, \gamma^{lm} f \Big) + 16\pi \Big(h^{lm} - \frac{1}{2}\, \gamma^{lm} h_n^n \Big) \Big\}. \qquad (194)$$

Из выражения (193) следует, что компоненты t^{00} и $t^{0\alpha}$ полного симметрического тензора энергии-импульса системы можно определить с точностью до членов $t^{00} \sim \rho O(\varepsilon^2)$, $t^{0\alpha} \sim \rho O(\varepsilon^3)$ включительно. Поэтому будем опускать все величины большего порядка малости, например Λ^{00} и $\Lambda^{0\alpha}$, так как $\Lambda^{00} \sim \rho O(\varepsilon^4)$, $\Lambda^{0\alpha} \sim \rho O(\varepsilon^5)$. Учитывая, что

$$\partial_\alpha \partial^\alpha U = 4\pi\rho_0; \quad \partial V^\beta/\partial x^\beta = \partial U/\partial t,$$

из выражений (193), (172) находим

$$\left.\begin{aligned} t^{00} &= \rho\,[1 + v^2/2 + \Pi - U/2] - \frac{1}{8\pi}\,\partial_\alpha\,[U\partial^\alpha U] + \rho O(\varepsilon^4); \\ t^{0\alpha} &= \rho v^\alpha \left[1 + \frac{v^2}{2} + \Pi + U\right] + p v^\alpha + 2\rho V^\alpha + \\ &+ \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\,\partial^\alpha U + 2\partial_\beta\,[U\partial^\alpha V^\beta - V^\beta \partial^\alpha U]\right\} + \rho O(\varepsilon^5). \end{aligned}\right\} \tag{195}$$

Для нахождения 4-импульса системы в постньютоновском приближении проинтегрируем выражения (195) по всему пространству. Воспользовавшись равенствами:

$$\int \frac{\partial U}{\partial t}\,\partial^\alpha U\,dV = 2\pi \int \rho\,[Uv^\alpha + W^\alpha]\,dV;$$

$$\int \rho V^\alpha\,dV = -\int \rho U v^\alpha\,dV;$$

$$\int \partial_\alpha\,(U\,\partial^\alpha U)\,dV = \int dS_\alpha U\,\partial^\alpha U = 0,$$

получим окончательно:

$$\left.\begin{aligned} P^0 &= \int dV\rho\left[1 + \Pi + \frac{v^2}{2} - \frac{1}{2}\,U\right]; \\ P^\alpha &= \int dV\left\{\rho v^\alpha\left[1 + \Pi + \frac{v^2}{2} - \frac{1}{2}\,U\right] + p v^\alpha + \frac{1}{2}\,\rho W^\alpha\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{196}$$

Используя выражения (196) и (191), легко определить в постньютоновском приближении сохраняющийся тензор момента импульса системы:

$$\left.\begin{aligned} M^{0\alpha} &= -\int dV\rho x^\alpha\left[1 + \Pi + \frac{v^2}{2} - \frac{1}{2}\,U\right] + P^\alpha t; \\ M^{\alpha\beta} &= \int dV\rho\left\{x^\alpha\left[v^\beta\left(1 + \Pi + \frac{v^2}{2} - \frac{1}{2}\,U + \frac{p}{\rho}\right) + \frac{1}{2}\,W^\beta\right] - \right. \\ &\left. - x^\beta\left[v^\alpha\left(1 + \Pi + \frac{v^2}{2} - \frac{1}{2}\,U + \frac{p}{\rho}\right) + \frac{1}{2}\,W^\alpha\right]\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{197}$$

и координаты центра масс системы

$$X^\alpha = \int dV\,\rho x^\alpha\left[1 + \Pi + \frac{v^2}{2} - \frac{1}{2}\,U\right]\Big/P^0. \tag{198}$$

Следует отметить, что в принятой нами системе единиц выражение для компоненты P^0 4-импульса (190) изолированной системы совпадает с выражением для инертной массы этой системы. Поэтому в постньютоновском приближении инертная масса

$$m=\int dV\rho\left[1+\Pi+\frac{v^2}{2}-\frac{1}{2}U\right]. \tag{199}$$

Для статического сферически симметричного тела постньютоновское выражение для инертной массы будет следующим:

$$m=4\pi\int\limits_0^a r^2\,dr\rho\left[1+\Pi-\frac{1}{2}U\right]. \tag{200}$$

Полученные выражения для инертной (200) и гравитационной (185) масс позволяют определить численное значение параметра β в полевой теории гравитации. Действительно, как следует из выражений (185) и (200), условие равенства этих масс однозначно приводит к $\beta=1$.

В противоположность закону сохранения (188) ковариантное уравнение сохранения плотности тензора энергии — импульса вещества в римановом пространстве — времени

$$\nabla_n T^{ni}=\partial_n T^{ni}+\Gamma^i_{nm}T^{nm}=0 \tag{201}$$

не выражает в явном виде сохранения какой-либо величины, а просто отображает тот факт, что плотность тензора энергии-импульса вещества не сохраняется: $\partial_n T^{ni}\neq 0$. Однако, как показано в разд. 3 настоящей работы, закон сохранения (188) и уравнение сохранения (201) — это просто разные формы записи одного и того же закона сохранения в полевой теории гравитации. Этот общий результат можно подтвердить и на любом этапе приближенных вычислений. Поэтому в полевой теории гравитации интегралы движения (196), (197) в постньютоновском приближении можно получить и из уравнения сохранения (201).

Покажем, например, что постньютоновские интегралы движения, определяемые в полевой теории гравитации из ковариантного уравнения (201) в римановом пространстве — времени, совпадают с интегралами движения (196), получаемыми в псевдоевклидовом пространстве — времени из закона сохранения (188). Следует подчеркнуть, что для сопоставления интегралов движения вычисления в обоих случаях необходимо производить в одной и той же координатной системе, поскольку разным координатным системам соответствуют различные выражения для интегралов движения. Поэтому интегралы движения будем вычислять в «неканонической» координатной системе риманова пространства — времени, в которой метрический тензор имеет вид (179) и она соответствует координатной системе псевдоевклидова пространства — времени, в которой были найдены интегралы движения (196), (197). Отметим также, что в данном случае переход к канонической системе координат, в которой метрический тензор g_{ni} имеет вид (182), не изменяет постньютоновских выражений для интегралов движения в полевой теории гравитации. В общем же случае разным системам координат соответствуют различные выражения для интегралов движения.

Используя постньютоновское разложение метрического тензора (179) и определение (156), найдем компоненты плотности тензора энергии-импульса вещества с постньютоновской степенью точности:

$$\left.\begin{aligned} T^{00} &= \rho\,[1+\Pi+v^2/2+U]+\rho O(\varepsilon^4);\\ T^{0\alpha} &= \rho v^\alpha\,[1+\Pi+v^2/2+U]+pv^\alpha+\rho O(\varepsilon^5);\\ T^{\alpha\beta} &= \rho v^\alpha v^\beta\,[1+\Pi+v^2/2+U]+\\ &\quad +pv^\alpha v^\beta-p(1-U)\,\gamma^{\alpha\beta}+\rho O(\varepsilon^6). \end{aligned}\right\} \tag{202}$$

Запишем покомпонентно уравнения (201):

$$\left.\begin{aligned} &\partial_0 T^{00}+\partial_\alpha T^{0\alpha}+\Gamma^0_{00}T^{00}+2\Gamma^0_{0\alpha}T^{0\alpha}+\Gamma^0_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}=0;\\ &\partial_0 T^{0\alpha}+\partial_\beta T^{\alpha\beta}+\Gamma^\alpha_{00}T^{00}+2\Gamma^\alpha_{0\beta}T^{0\beta}+\Gamma^\alpha_{\beta\varepsilon}T^{\beta\varepsilon}=0. \end{aligned}\right\} \tag{203}$$

Так как компоненты плотности тензора энергии-импульса вещества известны с точностью

$$T^{00}\sim\rho O(\varepsilon^4);\quad T^{0\alpha}\sim\rho O(\varepsilon^5);\quad T^{\alpha\beta}\sim\rho O(\varepsilon^6),$$

то связности риманова пространства — времени следует получить с точностью:

$$\begin{aligned} &\Gamma^0_{00}\sim O(\varepsilon^5);\quad \Gamma^0_{0\alpha}\sim O(\varepsilon^4);\quad \Gamma^0_{\alpha\beta}\sim O(\varepsilon^3);\\ &\Gamma^\alpha_{00}\sim O(\varepsilon^6);\quad \Gamma^\alpha_{0\beta}\sim O(\varepsilon^5);\quad \Gamma^\alpha_{\beta\varepsilon}\sim O(\varepsilon^4). \end{aligned}$$

Используя постньютоновское разложение метрики (179), определим с требуемой точностью связности риманова пространства — времени:

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma^0_{00}=-\partial U/\partial t+O(\varepsilon^5);\quad \Gamma^0_{0\alpha}=-\partial_\alpha U+O(\varepsilon^4);\\ &\Gamma^\alpha_{\beta\varepsilon}=\delta^\alpha_\varepsilon\partial_\beta U+\delta^\alpha_\beta\partial_\varepsilon U-\gamma_{\beta\varepsilon}\partial^\alpha U+O(\varepsilon^4);\\ &\Gamma^\alpha_{0\beta}=\delta^\alpha_\beta\,\partial U/\partial t+2\gamma^{\alpha\varepsilon}\,(\partial V_\varepsilon/\partial x^\beta-\partial V_\beta/\partial x^\varepsilon)+O(\varepsilon^5);\\ &\Gamma^0_{\alpha\beta}=O(\varepsilon^3);\\ &\Gamma^\alpha_{00}=4\partial V^\alpha/\partial t+\gamma^{\alpha\beta}(1-2U)\,\partial U/\partial x^\beta-\\ &\quad-\frac{\gamma^{\alpha\beta}}{2}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\,[2\beta U^2-4\Phi_1+4(\beta-2)\,\Phi_2-\\ &\qquad\qquad -2\Phi_3-6\Phi_4-w]+O(\varepsilon^6), \end{aligned}\right\} \tag{204}$$

где введены следующие обозначения:

$$w=\frac{\partial^2}{\partial t^2}Q; \quad Q=\int dV\rho R.$$

Подставляя выражения (202) и (204) в первое уравнение (203), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(1+\frac{v^2}{2}+\Pi+U\right)\right]+\partial_\alpha\left[\rho v^\alpha\left(1+\Pi+U+\frac{v^2}{2}\right)+pv^\alpha\right]- \\ -\rho\frac{\partial U}{\partial t}-2\rho v^\alpha\partial_\alpha U=\rho O(\varepsilon^5). \tag{205}$$

Второе уравнение (203) с учетом выражений (204) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho v^\alpha\left(1+\Pi+\frac{v^2}{2}+U\right)+pv^\alpha\right]+ \\ +\partial_\beta\left[\rho v^\alpha v^\beta\left(1+\Pi+U+\frac{v^2}{2}\right)+pv^\alpha v^\beta-p(1-2U)\gamma^{\alpha\beta}\right]+ \\ +\rho\left(1+\Pi+U+\frac{v^2}{2}\right)\partial^\alpha U+4\rho\frac{\partial V^\alpha}{\partial t}- \\ -(2+2\beta)\rho U\partial^\alpha U+\rho\partial^\alpha[2\Phi_1-2(\beta-2)\Phi_2+\Phi_3+3\Phi_4+w/2]+ \\ +2\rho v^\alpha\frac{\partial U}{\partial t}+4\rho v^\beta(\partial_\beta V^\alpha-\partial^\alpha V_\beta)+2\rho v^\alpha v^\beta\partial_\beta U+ \\ +\rho v^2\partial^\alpha U+p\,\partial^\alpha U=\rho O(\varepsilon^6). \tag{206}$$

Для упрощения этих выражений воспользуемся уравнением неразрывности идеальной жидкости

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\rho v^\alpha)=0; \quad \rho=\rho_0[1+3U+v^2/2+O(\varepsilon^4)],$$

ньютоновыми уравнениями движения упругого тела:

$$\rho\,dv^\alpha/dt=\gamma^{\alpha\beta}(-\rho\,\partial U/\partial x^\beta+\partial p/\partial x^\beta); \quad \rho\,d\Pi/dt=-p\,\partial_\alpha v^\alpha,$$

а также соотношениями:

$$\partial V_\alpha/\partial x^\beta-\partial V_\beta/\partial x^\alpha=\partial W_\alpha/\partial x^\beta-\partial W_\beta/\partial x^\alpha; \quad \partial_\alpha\partial^\alpha U=4\pi\rho_0;$$

$$\rho\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\rho U)+\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\frac{\partial U}{\partial t}\partial^\alpha U-\gamma^{\alpha\beta}U\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial x^\beta}\right].$$

В результате этих преобразований из выражения (205) получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(1+\Pi-\frac{1}{2}U+\frac{v^2}{2}\right)\right]+\partial_\alpha\left[\rho v^\alpha\left(1+\Pi+U+\frac{v^2}{2}\right)+ \\ +pv^\alpha-\frac{1}{8\pi}\frac{\partial U}{\partial t}\partial^\alpha U+\frac{1}{8\pi}\gamma^{\alpha\beta}U\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial x^\beta}\right]=\rho O(\varepsilon^4). \tag{207}$$

Выражение (206) приводим к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho v^{\alpha}\left(1+\Pi+v^{2}/2+U\right)+p v^{\alpha}\right]+$$
$$+\partial_{\beta}\left[\rho v^{\alpha} v^{\beta}\left(1+\Pi+v^{2}/2+U\right)+p v^{\alpha} v^{\beta}-p \gamma^{\alpha \beta}\right]+$$
$$+4 \rho\, dV^{\alpha}/dt+2 \rho \frac{d}{dt}\left(U v^{\alpha}\right)+\rho_{0} \gamma^{\alpha \beta} \frac{\partial U}{\partial x^{\beta}}+(4-2 \beta) \rho U \partial^{\alpha} U+$$
$$+\rho\left(\Pi+2 v^{2}\right) \partial^{\alpha} U+3 p \partial^{\alpha} U+3 \rho \gamma^{\alpha \beta} \partial \Phi_{4} / \partial x^{\beta}-4 \rho v^{\beta} \partial^{\alpha} V_{\beta}+$$
$$+\rho \partial^{\alpha}\left[2 \Phi_{1}+\Phi_{3}-2(\beta-2) \Phi_{2}+w/2\right]=\rho O\left(\varepsilon^{6}\right). \qquad (208)$$

Проинтегрируем эти выражения по всему пространству. Заметим прежде всего, что:

$$\left.\begin{aligned}
&\int dV \rho_{0}\left[\Pi \frac{\partial U}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial \Phi_{3}}{\partial x^{\beta}}\right]=0; \\
&\int dV \rho_{0}\left[U \frac{\partial U}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial \Phi_{2}}{\partial x^{\beta}}\right]=0; \\
&\int dV\left[p \frac{\partial U}{\partial x^{\beta}}+\rho_{0} \frac{\partial \Phi_{4}}{\partial x^{\beta}}\right]=0; \\
&\int dV \rho_{0}\left[v^{2} \frac{\partial U}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial \Phi_{1}}{\partial x^{\beta}}\right]=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (209)$$

Действительно, рассмотрим, например, первое соотношение. Используя выражения (151), имеем

$$\int dV\, dV' \rho_{0} \rho_{0}'\left[\frac{\Pi\left(x_{\beta}-x_{\beta}'\right)}{\left|x-x'\right|^{3}}+\frac{\Pi'\left(x_{\beta}-x_{\beta}'\right)}{\left|x-x'\right|^{3}}\right].$$

Из-за антисимметричности подынтегрального выражения относительно замены $\rho_0 \leftrightarrow \rho_0'$, $x_\beta \leftrightarrow x_\beta'$ данный интеграл равен нулю. Аналогично доказываются и остальные соотношения (209).

Кроме того используем очевидные равенства:

$$\int \rho_{0} v^{\varepsilon} \frac{\partial V_{\varepsilon}}{\partial x^{\beta}} dV=\int \rho_{0} v^{\varepsilon} \frac{\partial W_{\varepsilon}}{\partial x^{\beta}} dV=0;$$
$$\int \rho_{0} \frac{\partial U}{\partial x^{\beta}} dV=0; \quad \int \rho v^{\beta} \frac{\partial^{3} Q}{\partial t\, \partial x^{\alpha}\, \partial x^{\beta}} dV=0;$$
$$\frac{d}{dt} \int \rho f\, dV=\int dV \rho\left[\frac{d}{dt} f+f O\left(\varepsilon^{2}\right)\right].$$

Воспользуемся также тем обстоятельством, что интегралы по объему от пространственной дивергенции после преобразования их в поверхностные исчезают.

В результате из выражения (207) в постньютоновском приближении полевой теории гравитации получаем интеграл энергии

$dP^0/dt = 0$, где

$$P^0 = \int dV\rho \left[1 + \Pi + \frac{v^2}{2} - \frac{U}{2}\right] = \mathrm{const}. \qquad (210)$$

Учитывая, что

$$\rho\partial^\alpha \frac{\partial^2}{\partial t^2} Q = \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\partial^\alpha \frac{\partial}{\partial t} Q\right) + \partial_\beta\left[\rho v^\beta \partial^\alpha \frac{\partial}{\partial t} Q\right] - \rho v^\beta \partial^\alpha \partial_\beta \frac{\partial}{\partial t} Q,$$

из выражения (208) получаем $dP^\alpha/dt = 0$. Отсюда следует, что

$$P^\alpha = \int dV \left[\rho v^\alpha (1 + \Pi + v^2/2 + 3U) + \right.$$
$$\left. + p v^\alpha + 4\rho V^\alpha + \frac{1}{2} \partial^\alpha \frac{\partial}{\partial t} Q\right] = \mathrm{const}. \qquad (211)$$

Поскольку имеют место соотношения:

$$\partial^\alpha \frac{\partial}{\partial t} Q = W^\alpha - V^\alpha; \qquad \int dV\rho V^\alpha = -\int dV\rho U v^\alpha,$$

выражение (211) можно привести к виду

$$P^\alpha = \int dV\rho \left[v^\alpha \left(1 + \Pi + \frac{v^2}{2} - \frac{U}{2} + \frac{p}{\rho}\right) + \frac{W^\alpha}{2}\right]. \qquad (212)$$

Таким образом, в полевой теории гравитации постньютоновские интегралы движения, определяемые из закона сохранения (188) в псевдоевклидовом пространстве — времени и из ковариантного уравнения (201) в римановом пространстве — времени, совпадают. Это прямое следствие того, что в полевой теории гравитации закон сохранения (188) и уравнение (201) представляют собой разные формы записи одного и того же закона сохранения. В полевой теории гравитационное поле является физическим полем, которое обладает плотностью энергии-импульса и вносит вклад в полный тензор энергии-импульса системы. Именно наличие в полевой теории гравитации обычных законов сохранения и позволяет нам проводить различные энергетические расчеты, в том числе находить постньютоновские выражения для интегралов движения.

В ОТО поле не является полем в духе Фарадея — Максвелла, в результате чего в теории Эйнштейна отсутствует возможность производить расчеты энергии гравитационного поля. Однако в ОТО постньютоновские интегралы движения изолированной системы обычно получают из ковариантного уравнения (201) и приходят к выражениям (210) и (212).

Легко понять причину такого совпадения. Действительно, в ОТО из ковариантного уравнения сохранения (201) можно получить либо закон сохранения (36), тривиально выполняющийся на основании уравнений Эйнштейна, либо соотношение, содержащее псевдотензор энергии-импульса:

$$\partial_i[-g(T^{ik} + \tau^{ik})] = 0. \qquad (213)$$

В полевой теории гравитации уравнение сохранения (201) эквивалентно закону сохранения тензора энергии-импульса вещества и гравитационного поля вместе взятых:

$$D_l[t_g^{ik} + t_M^{ik}] = 0. \tag{214}$$

Из соотношения (213) в ОТО можно получить интегральные величины, которые в низшем приближении не будут зависеть от времени:

$$J^k = \int dV\,(-g)[T^{0k} + \tau^{0k}]. \tag{215}$$

Однако интерпретировать их как интегралы движения нельзя, так как величины (215) отражают не столько физические характеристики системы, состоящей из вещества и гравитационного поля, сколько тот или иной выбор координат. В частности, соответствующим выбором координат, оставляющим метрический тензор риманова пространства — времени асимптотически галилеевским, эти величины могут быть сделаны равными любым наперед заданным значениям, как положительным, так и отрицательным. Следовательно, величины (215) не являются интегралами движения в ОТО. Однако в низшем приближении в декартовых координатах выражения (213) и (214) совпадают, что приводит к совпадению в этой координатной системе выражений для величин (215) с выражениями (190) для интегралов движения полевой теории гравитации.

Именно в силу того, что в псевдоевклидовом пространстве — времени можно построить теорию гравитации, обладающую тензорным законом сохранения энергии-импульса вещества и гравитационного поля вместе взятых, низшие приближения для (215) в узком классе систем координат дают результаты, совпадающие с выражениями для интегралов движения полевой теории гравитации (196). Однако из-за различных трансформационных законов в любой другой координатной системе эти выражения существенно различаются, причем величины (190) полевой теории гравитации сохраняют физический смысл интегралов движения. Так как величины (215) общей теории относительности не имеют физического смысла интегралов движения, в других координатных системах из выражения (215) легко получить физически абсурдные результаты. Поэтому общепринятая в теории Эйнштейна интерпретация их в качестве энергии-импульса изолированной системы неправильна.

В заключение этого раздела отметим, что в ньютоновском приближении энергия статического поля в полевой теории гравитации, рассчитываемая с использованием канонического тензора энергии-импульса (100), положительна:

$$\int \tilde{t}_g^{00}\, dV = -\frac{1}{8\pi}\int dV\, \partial_\alpha U\, \partial^\alpha U > 0,$$

а с использованием симметрического тензора энергии-импульса (104) — отрицательна:

$$\int t_g^{00}\, dV = \frac{3}{8\pi} \int dV\, \partial_\alpha U\, \partial^\alpha U < 0.$$

Как известно, в электродинамике имеет место противоположная ситуация: энергия электростатического поля, рассчитываемая по каноническому тензору энергии-импульса, отрицательна, а по симметрическому тензору положительна. Из этой аналогии можно сделать вывод, что статическое гравитационное поле — поле сил притяжения, так как в электродинамике заряды одного знака создают поле сил отталкивания.

Расчет суммарной энергии вещества и статического гравитационного поля в ньютоновском приближении дает один и тот же результат при использовании как канонического, так и симметрического тензоров энергии-импульса:

$$P^0 = \int dV\, [t_g^{00} + t_M^{00}] = \int dV\, [\tilde{t}_g^{00} + \tilde{t}_M^{00}] =$$
$$= \int dV \rho \left[1 + \Pi + \frac{v^2}{2} - \frac{U}{2}\right].$$

Из этого выражения следует, что энергия двух покоящихся частиц возрастает с увеличением расстояния между ними, что также свидетельствует о действии сил притяжения между ними.

12. ГРАВИТАЦИОННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ В СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ

Рассмотрим, какие ограничения на значения постньютоновских параметров накладывают эксперименты, осуществленные в Солнечной системе.

Анализ этих экспериментов будем проводить в следующем порядке: сначала рассмотрим стандартные эффекты — отклонение света и радиоволн в поле Солнца, смещение перигелия Меркурия и измерение временной задержки радиосигнала в гравитационном поле Солнца, затем эффект Нордтведта, а также эффекты, связанные с неравенством нулю параметров α_1, α_2, α_3, ξ_w. Эффект красного смещения в гравитационном поле Солнца рассматривать не будем, так как он полностью описывается в ньютоновском приближении [87].

Отклонение света и радиоволн в гравитационном поле Солнца. Согласно расчетам в работе [88] лучи света и радиоволны, которые рассматриваются как безмассовые частицы, имеющие прицельный параметр b, отклоняются в гравитационном поле Солнца на угол

$$\delta\varphi = 2\,(1 + \gamma)\, M/b.$$

Анализ экспериментальных результатов, полученных при наблюдении искривления в гравитационном поле Солнца лучей света далеких звезд, а также радиоволн, излучаемых квазарами, дает основание считать [72], что постньютоновский параметр $\gamma = 1 \pm 0{,}2$.

Временная задержка радиосигналов в поле Солнца. Другой независимый способ определения постньютоновского параметра γ — измерение временной задержки радиосигналов в поле Солнца [89]. Этот эффект состоит в том, что время распространения радиосигналов (измеряемое часами, находящимися на Земле), которые посылаются с Земли до отражателя, расположенного в другой части Солнечной системы, и обратно, отличается от времени этого же процесса, происходящего при отсутствии гравитационного поля.

При проведении экспериментов по измерению времени задержки радиосигналов в гравитационном поле Солнца в качестве отражателей использовались поверхности планет, а также радиоаппаратура, установленная на спутниках. В результате этих экспериментов [90] имеем $\gamma = 1 \pm 0{,}002$.

В полевой теории гравитации, так же как и в ОТО Эйнштейна, параметр γ имеет значение $\gamma = 1$, что находится в хорошем согласии с результатами этих экспериментов.

Прецессия гироскопа, движущегося по орбите. Если параметры $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ равны нулю, то измерение прецессии гироскопа, движущегося по орбите вокруг Земли, будет третьим независимым способом измерения параметра γ. Согласно расчетам в работе [91] угловая скорость прецессии гироскопа, который находится на круговой орбите в поле Земли:

$$\Omega = \frac{2\gamma+1}{2}\, m\, \frac{[\mathbf{r}\mathbf{v}]}{r^3} + \frac{\gamma+1}{2r^3}\left(-\mathbf{J} + \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{J})}{r^2}\right),$$

где m — масса Земли, $\mathbf{v}$ — линейная скорость гироскопа относительно центра Земли; $\mathbf{J}$ — момент импульса Земли; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки, в которой находится гироскоп.

Уровень современного развития техники [92—94] позволяет надеяться, что этот эксперимент будет осуществлен в ближайшем будущем.

Смещение перигелия Меркурия. На смещение перигелия Меркурия кроме наличия постньютоновских поправок в уравнении движения влияет еще ряд факторов. К их числу относятся притяжение со стороны планет Солнечной системы, наличие квадрупольного момента у Солнца и др. Единственный неопределенный фактор — квадрупольный момент Солнца; влияние всех других факторов можно рассчитать с достаточной точностью.

Суммарное смещение перигелия Меркурия, вызываемое наличием квадрупольного момента J_2 у Солнца и постньютоновскими поправками в уравнении движения, равно [95]:

$$\delta\varphi = 42{,}98[(2 + 2\gamma - \beta)/3] + 1{,}3\cdot 10^5 J_2$$

(угловых секунд за столетие). Из результатов наблюдений следует [72], что $\delta\varphi = 41{,}4 \pm 0{,}9$ угловых секунд за столетие.

Измерения видимой формы Солнца [96], проделанные Дикке и Гольдбергом, для J_2 дали значение $J_2 = (2{,}5 \pm 0{,}2)\cdot 10^{-5}$, а более поздние измерения Хилла с сотрудниками [95] показали, что $J_2 < 0{,}5\cdot 10^{5}$. Сравнение наблюдаемых смещений перигелиев Меркурия и Марса [97] дали оценку $J_2 \leqslant 3\cdot 10^{-5}$.

Таким образом, из-за отсутствия прямых измерений квадрупольного момента Солнца остается большая неопределенность в значении β, определяемом по смещению перигелия Меркурия: $\beta = 1^{+0,4}_{-0,2}$. Отметим, что в полевой теории гравитации параметр β имеет значение $\beta = 1$ и в пределах погрешности позволяет описать этот эффект.

Эффект Нордтведта и лазерная локация Луны. До недавнего времени требования, предъявляемые к возможным теориям гравитации, сводились к необходимости получить закон тяготения Ньютона в пределе слабого поля, а также описать три эффекта, которые были доступны наблюдению: гравитационное красное смещение в поле Солнца, искривление луча света, проходящего возле Солнца, и смещение перигелия Меркурия. Наряду с этим в последнее время большое внимание стало уделяться и установлению в различных теориях гравитации соотношений между инертной и гравитационными массами тела и поиску возможностей для проверки на эксперименте этих соотношений.

В любой теории гравитации, как считал Бонди [127], по способам измерения можно различить три вида массы: инертную m_i, пассивную гравитационную m_p и активную гравитационную m_a.

Инертная масса — масса, которая входит (и определяется им) во второй закон Ньютона:

$$m_i a^\alpha = F^\alpha.$$

Пассивная гравитационная масса — масса, на которую действует гравитационное поле, т. е. масса, определяемая выражением

$$F^\alpha = -m_p \nabla^\alpha V.$$

Активная гравитационная масса — масса, которая является источником гравитационного поля.

В ньютоновской механике третий закон Ньютона требует равенства активной и пассивной масс $m_a = m_p$ независимо от размеров и состава тела; равенство инертной массы с двумя остальными принимается как эмпирический факт. В теории Эйнштейна для точечных тел имеет место равенство инертной и пассивной гравитационных масс, при этом равенство активной и пассивной гравитационных масс не постулируется. В некоторых теориях гравитации все три массы одного и того же тела могут различаться.

Поэтому возникает необходимость установить с помощью эксперимента соответствие между этими тремя массами.

Одна из первых попыток измерения отношения пассивной гравитационной m_p к инертной m_i массе была предпринята в прошлом веке Бесселем и Этвешем. В результате этих измерений было установлено, что для тел лабораторных размеров отношение гравитационной массы к инертной может отличаться от единицы не более чем на 10^{-9} независимо от вещества, из которого состоит тело. Этот результат натолкнул Эйнштейна на формулировку принципа эквивалентности.

Однако, хотя такой результат и воспринимается как равенство гравитационной и инертной масс с очень большой точностью, это не означает, что и тела больших размеров имеют совпадающие гравитационную и инертную массы с такой же точностью. Для тел лабораторных размеров собственная гравитационная энергия, энергия упругих деформаций тела и т. п. являются очень малыми величинами по сравнению с полной энергией тела. В частности, для тела массой M, имеющего характерный размер a, отношение собственной гравитационной энергии тела к его полной энергии

$$\frac{GM^2/a}{Mc^2}=\frac{GM}{c^2a}\sim\frac{G\rho a^2}{c^2},$$

где ρ — плотность тела.

Это отношение по порядку величины равно 10^{-25} для тел лабораторных размеров. Поэтому при точности измерений, равной 10^{-9}, ничего нельзя сказать о том, как распределяется собственная гравитационная энергия между инертной и гравитационной массами тела. И даже гравиметрические эксперименты, выполненные с возросшей точностью (10^{-11} в экспериментах группы Дикке [128], 10^{-12} в экспериментах группы Брагинского [104]), не позволяют ответить на этот вопрос.

Поэтому можно утверждать, что следствие гравиметрических измерений — равенство гравитационной и инертной масс точечного тела, т. е. тела, имеющего пренебрежимо малые размеры, а поэтому и пренебрежимо малые собственную и гравитационную энергию, энергию упругих деформаций и т. п. Чтобы решить вопрос о равенстве гравитационной и инертной масс протяженного тела, необходимо или существенно увеличивать точность гравиметрических экспериментов с телами лабораторных размеров, что при нынешнем уровне развития техники все еще неосуществимо, или проводить измерения с телами больших размеров, например с планетами, у которых отношение собственной гравитационной энергии к полной энергии существенно выше, чем у тел лабораторных размеров.

Однако поскольку гравиметрическое измерение отношения пассивной гравитационной массы протяженного тела (планеты) к его инертной массе невозможно, то возникла необходимость теоретического изучения движения протяженных тел в гравитационном поле других тел с целью выяснения тех особенностей в движении протяженного тела, к которым привело бы возможное неравенство его инертной и гравитационной масс.

Одна из таких особенностей — эффект возможного отклонения на постньютоновском уровне движения центра масс протяженного тела от движения по геодезической риманова пространства — времени. На возможность такого эффекта обратил внимание Дикке [129], высказав предположение, что отношение гравитационной массы к инертной для астрономических тел может незначительно отличаться от единицы, если собственная гравитационная энергия этих тел меняется при изменении их положения в гравитационном поле других тел. Впоследствии этот эффект исследовали Нордтведт [130], Вилл [131] и Дикке [132].

Нордтведт [130] на модели когерентных частиц весьма детально изучил этот эффект, который вследствие этого получил название эффекта Нордтведта, и показал его возможность в некоторых метрических теориях гравитации.

Вилл [131], имея в виду последующее применение результатов своих вычислений к системе, включающей Солнце и одну из его планет, на основе параметризованного постньютоновского разложения показал, что уравнения движения центра масс протяженного тела (планеты) в гравитационном поле покоящегося точечного тела (Солнца) будут иметь вид

$$Ma^{\alpha} = -(M_0/R^2)\, f^{\alpha}, \tag{216}$$

где M — масса протяженного тела; M_0 — активная гравитационная масса покоящегося точечного тела; a^{α} — компоненты ускорения центра масс протяженного тела; R — расстояние между точечным телом и центром масс протяженного тела.

Для вектора f^{α} в этом случае было получено следующее выражение:

$$\begin{aligned} f^{\alpha}/M &= n^{\alpha}[1 - (4\beta - \alpha_1 - \gamma - 3 - \xi_1 + \alpha_2)\,\Omega^{\varepsilon}_{\varepsilon}] + \\ &+ (\xi_2 + \alpha_2 - \xi_1)\,\Omega^{\alpha\beta} n_{\beta}, \end{aligned} \tag{217}$$

где $n^{\alpha} = R^{\alpha}/R$; $\Omega^{\varepsilon}_{\varepsilon}$ и $\Omega^{\alpha\beta}$ — постньютоновские поправки:

$$\Omega^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2M}\int \rho(x, t)\,\rho(x', t)\,\frac{(x^{\alpha}-x'^{\alpha})(x^{\beta}-x'^{\beta})}{|x-x'|^3}\,dx\,dx';$$

$$\Omega^{\varepsilon}_{\varepsilon} = \gamma_{\alpha\varepsilon}\Omega^{\alpha\varepsilon} = \frac{1}{2M}\int \frac{\rho(x, t)\,\rho(x', t)}{|x-x'|}\,dx\,dx'.$$

Полагая, что вектор f^{α} связан с тензором пассивной гравитационной массы $m_p^{\alpha\beta}$ зависимостью

$$f^{\alpha} = -\,m_p^{\alpha\beta} n_{\beta}, \tag{218}$$

Вилл [3] получил для этого тензора следующее выражение:

$$m_p^{\alpha\beta}/M = -\gamma^{\alpha\beta}[1-(4\beta-\alpha_1-\gamma-3-\xi_1+\alpha_2)\,\Omega_\varepsilon^\varepsilon] - \\ -(\xi_2+\alpha_2-\xi_1)\,\Omega^{\alpha\beta}. \quad (219)$$

При таком подходе наличие постньютоновских поправок в выражении (217) для вектора f^α интерпретируется как результат нарушения в некоторых теориях гравитации на постньютоновском уровне равенства пассивной гравитационной и инертной масс протяженного тела. При этом утверждают, что равенство инертной и пассивной гравитационной масс в постньютоновском приближении будет означать, что центр масс протяженного тела движется по геодезической риманова пространства — времени.

Однако в условиях реального эксперимента, определить движется или не движется центр масс протяженного тела по геодезической риманова пространства — времени, также довольно трудно. Поэтому предлагалось найти из экспериментов значения всех необходимых постньютоновских параметров и, используя формулу Вилла (219), дать ответ на ставшие уже академическими вопросы о соотношении между тензором пассивной гравитационной массы протяженного тела и его инертной массой, а также о характере движения центра масс этого тела относительно геодезической риманова пространства — времени. В результате расчета движения системы Земля — Луна в гравитационном поле Солнца Нордтведт [98, 100] указал на ряд возможных аномалий в движении Луны, наблюдение которых позволяет измерить различные комбинации постньютоновских параметров. Одной из таких аномалий является поляризация орбиты Луны в направлении Солнца с амплитудой $\delta r = \eta L$, где L — константа порядка 10 м;

$$\eta = -(1/3)(\xi_2+\alpha_2-\xi_1)+(4\beta-\xi_1-\gamma-\alpha_1+\alpha_2-3) - \\ -(10/3)\,\xi_w. \quad (220)$$

Для обнаружения этого эффекта был проведен анализ данных, полученных при лазерной локации Луны. В результате анализа одна из групп [101] пришла к выводу, что $\eta = 0 \pm 0{,}03$. Другая [102] получила близкий результат: $\eta = -0{,}001 \pm 0{,}015$. Используя эти оценки и теоретическую формулу Вилла (219) для тензора пассивной гравитационной массы, авторы работ [101, 102] пришли к выводу, что отношение пассивной гравитационной массы протяженного тела к его инертной в пределах погрешности измерения равно единице:

$$|\,m_p^{\alpha\beta}/M - \delta^{\alpha\beta}| < 1{,}5\cdot 10^{-11}.$$

Таким образом, данные, полученные при лазерной локации Луны, казалось бы, позволяют утверждать (и эти выводы были сделаны в [72, 101, 102]), что пассивная гравитационная масса протяженного тела равна его инертной массе и центр масс протяженного тела движется по геодезической риманова пространства — времени.

Однако эти выводы ошибочны, так как основаны на использовании ошибочных предположений. Ниже будет специально показано, что центр масс протяженного тела в постньютоновском приближении вообще не движется по геодезической риманова пространства — времени в любой метрической теории гравитации, обладающей законами сохранения энергии-импульса вещества и гравитационного поля вместе взятых. Кроме того, как будет видно из дальнейшего, эксперименты по лазерной локации Луны с учетом других экспериментов позволяют сделать вывод, что отношение пассивной гравитационной массы Земли к инертной не равно единице, и отличается от нее на

$$|\, m_p^{\alpha\beta}/M - \delta^{\alpha\beta} \,| \approx 10^{-8}.$$

Следует отметить, что равенство или неравенство пассивной гравитационной массы протяженного тела инертной не могут служить показателем того, как движется центр масс протяженного тела: по геодезической риманова пространства — времени или нет. Как увидим ниже, равенство этих масс гарантирует лишь совпадение постньютоновских уравнений движения центра масс протяженного тела с соответствующими уравнениями теории Ньютона, что ни в коей мере не является условием их совпадения с уравнениями геодезических. Более того, введение понятия тензора пассивной гравитационной массы, как это было сделано Виллом для Солнечной системы, в общем случае произвольной постньютоновской системы (см. разд. 17) не представляется возможным. Солнечная система — весьма специфический (хотя, возможно, и широко распространенный) тип постньютоновской системы, характеризуемый тем, что одно из тел системы (Солнце) имеет массу, существенно превышающую массу остальных тел системы вместе взятых. Это обстоятельство приводит к тому, что в системе отсчета, связанной с центром масс такой постньютоновской системы, массивное тело имеет пренебрежимо малую скорость, в то время как другие тела системы движутся вокруг него с заметными скоростями $v \approx 10^{-4}c$. В этом случае в правой части уравнений движения протяженного тела (216) можно выделить множитель (как это и было сделано Виллом), который включает все характеристики протяженного тела, и назвать его тензором пассивной гравитационной массы тела.

Однако в произвольной постньютоновской системе все тела могут иметь сравнимые массы; скорости их движения относительно системы отсчета, связанной с системой центра масс, могут быть величинами одного порядка. Разделения характеристик тел в правой части уравнений движения (216) в постньютоновском приближении уже не происходит, а поэтому и введение тензора пассивной гравитационной массы в общем случае не представляется возможным.

Данные выводы полностью относятся и к полевой теории гравитации, которая является конкретным представителем метрических теорий гравитации и обладает законами сохранения энергии-импульса вещества и гравитационного поля вместе взятых.

Следует также отметить, что в полевой теории гравитации $\eta = 0$ и, таким образом, она в пределах погрешности измерения позволяет описать эксперименты по лазерной локации Луны.

Эффекты, связанные с наличием предпочтительной системы отсчета. Теории гравитации, у которых хотя бы один из параметров α_1, α_2, α_3 отличается от нуля, обладают предпочтительной системой отсчета. Предсказания таких теорий гравитации относительно стандартных эффектов могут совпадать с результатами наблюдения только в том случае, если Солнечная система является предпочтительной системой отсчета. Однако разумнее предполагать, что Солнечная система, двигающаяся относительно других звездных систем, ничем не выделена по сравнению с ними, а поэтому не может быть предпочтительной универсальной системой покоя для таких теорий. Так как предпочтительная система покоя должна быть выделенной чем-то по сравнению с другими системами, то разумнее связывать эту систему с центром масс Галактики или даже Вселенной. В этом случае Солнечная система находится в движении относительно предпочтительной системы покоя со скоростью около 10^{-3} с, т. е. того же порядка, что и орбитальная скорость Солнечной системы относительно центра Галактики. В этом случае возможно наблюдение некоторых эффектов, связанных с движением относительно предпочтительной системы покоя [72], что позволяет оценить параметры α_1, α_2, α_3.

В теориях гравитации с предпочтительной системой покоя постоянная тяготения G, измеряемая в гравиметрических экспериментах, будет зависеть от движения Земли относительно такой системы.

Для относительной величины $\Delta G/G$ имеем [72]:

$$\Delta G/G = \left(\frac{\alpha_2}{2} + \alpha_3 - \alpha_1\right) \mathbf{wv} + (1/4)\,\alpha_2\,[(\mathbf{ve}_r)^2 + 2\,(\mathbf{we}_r)\,(\mathbf{ve}_r) + (\mathbf{we}_r)^2],$$

где $\mathbf{v}$ — орбитальная скорость Земли вокруг Солнца; $\mathbf{w}$ — скорость Солнца относительно предпочтительной системы покоя; $\mathbf{e}_r$ — единичный вектор, направленный от гравиметра к центру Земли.

Вследствие вращения Земли вокруг своей оси вектор $\mathbf{e}_r$ изменяет свою ориентацию относительно векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$, что приводит к периодическому изменению скалярных произведений $\mathbf{ve}_r$ и $\mathbf{we}_r$ с периодом, примерно равным 12 ч. Это приводит к соответствующим периодическим изменениям значения ускорения свободного падения: для точки наблюдения, находящейся на широте θ, имеем

$$\Delta g/g \approx 3\alpha_2 \cdot 10^{-8} \cos^2\theta.$$

Вилл [103], анализируя результаты гравиметрических экспериментов, нашел, что относительные изменения величины g не превышают $|\Delta g/g| < 10^{-9}$, отсюда получаем $|\alpha_2| < 3\cdot 10^{-2}$.

Движение Земли вокруг Солнца также приводит к периодическому изменению $\mathbf{wv}$ с периодом порядка года. Эта вариация вызывает сжатие и расширение Земли, что, в свою очередь, приводит к периодическим изменениям угловой скорости вращения Земли в результате изменения ее момента инерции:

$$\Delta\omega/\omega \approx 3\cdot 10^{-9} (\alpha_3 + (2/3)\, \alpha_2 - \alpha_1).$$

Из результатов наблюдений следует, что $|\alpha_3 + (2/3)\, \alpha_2 - \alpha_1| < 0{,}2$.

Движение Солнечной системы относительно центра Вселенной может приводить к аномальному смещению перигелиев планет $\delta\varphi_0$. Для Меркурия [72] дополнительный вклад в смещение перигелия (в угловых секундах за столетие) имеет вид

$$\delta\varphi_0 = 35\alpha_1 + 8\alpha_2 - 4\cdot 10^4\alpha_3.$$

Сравнение с наблюдениями и объединение всех этих оценок параметров α дает

$$|\alpha_1| < 0{,}2; \quad |\alpha_2| < 3\cdot 10^{-2}; \quad |\alpha_3| < 2\cdot 10^{-5}.$$

В полевой теории гравитации, так же как и в ОТО Эйнштейна, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ и, следовательно, все эти эффекты отсутствуют.

Эффекты анизотропии относительно центра Галактики. В тех теориях гравитации, у которых $\xi_w \neq 0$, возможны эффекты анизотропии, вызываемые влиянием гравитационного поля Галактики [81]. Если считать, что масса Галактики M сосредоточена в центре Галактики на расстоянии R от Солнечной системы, то гравитационное поле Галактики приведет к периодическим изменениям показаний гравиметра с периодом 12 ч:

$$\Delta G/G = \xi_w\, [1 - 3K/(mr^2)]\, (M/R)\, (\mathbf{e}_r\mathbf{e}_R),$$

где K — момент инерции; m — масса; r — радиус Земли; $\mathbf{e}_r$ — единичный вектор, направленный от гравиметра к центру Земли, $\mathbf{e}_R = \mathbf{R}/R$.

Другим эффектом является аномальное смещение перигелиев планет, обусловленное анизотропией, вызываемой Галактикой:

$$\delta\varphi_0 = \frac{\pi\xi_w}{2}\, \frac{M}{R} \cos^2\beta \cos^2(\omega - \lambda),$$

где λ и β — угловые координаты центра Галактики; ω — угол перигелия планеты в геоцентрических координатах. Сравнение с наблюдениями дает в качестве верхнего предела $|\xi_w| < 10^{-2}$.

В полевой теории гравитации, так же как и в ОТО Эйнштейна, $\xi_w = 0$ и все эффекты анизотропии, вызываемые гравитационным полем Галактики, отсутствуют.

Заканчивая обзор гравитационных экспериментов, приходим к выводу, что полевая теория гравитации позволяет описать всю совокупность экспериментальных фактов. Следует отметить, что в постньютоновском пределе квадратичные члены в уравнении связи (94) неразличимы: никакой эксперимент в гравитационном поле Солнечной системы на постньютоновском уровне не позволяет определить параметры минимальной связи отдельно.

Как будет показано ниже в разд. 16, измерение параметра замедления расширяющейся однородной Вселенной в окрестности настоящего момента времени позволит определить значение другой линейной комбинации этих параметров минимальной связи. Определить параметры минимальной связи, используя эксперименты в гравитационном поле Солнечной системы, можно будет лишь после увеличения точности измерений до постпостньютоновского уровня.

В заключение отметим, что в полевой теории гравитации принцип эквивалентности справедлив лишь для точечных тел. Для протяженных тел, движущихся в слабом гравитационном поле, он выполняется приближенно, с той точностью, с какой слабое гравитационное поле можно считать однородным в области, занимаемой телом. В этом случае можно «устранить» гравитационное поле, переходя к системе координат, в которой $g_{ni} = \gamma_{ni}$ в области, занимаемой веществом. Как следует из экспериментов группы Брагинского [104] с телами лабораторных размеров в достаточно однородном гравитационном поле, для сильного, электромагнитного и слабого взаимодействий принцип эквивалентности справедлив с точностью, какая достигнута в этих экспериментах. Но для протяженных тел с учетом гравитационного поля этот принцип строго не справедлив ни в ОТО Эйнштейна, ни в полевой теории гравитации.

13. СТАТИЧЕСКОЕ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ

Для статического источника радиуса a со сферически-симметричным распределением вещества уравнения гравитационного поля (90) и выражение для тензорного тока (85) существенно упрощаются.

Исходя из симметрии задачи, определим, какие компоненты тензоров I_{lm} и h^{lm} будут в этом случае отличными от нуля. Поместим начало сферической системы координат в центр источника. При ее поворотах на произвольный угол физическая ситуация в силу сферической симметрии распределения вещества не должна меняться. Поэтому компоненты тензоров I_{lm} и h^{lm} должны после преобразования поворота быть теми же функциями от преобразованного аргумента, что и первоначальные функции от их первоначальных аргументов, т. е. данные тензоры должны быть форминвариантными при преобразовании поворота системы координат. Отсюда следует, что в сферической системе координат отличными от нуля компонентами тензоров I_{lm} и h^{lm} могут быть только компоненты (00), (0r), rr), (θθ), (φφ), так как только в этом случае тензоры I_{lm} и h^{lm} форминвариантны при преобразовании поворота.

Из выражений (85) и (74) следует, что $I_{0r} = 0$. Поэтому для статического сферически-симметричного распределения вещества тензор I_{lm} имеет компоненты:

$$I_{lm} = \{I_{00}, I_{rr}, I_{\theta\theta}, I_{\varphi\varphi} = I_{\theta\theta} \sin^2\theta\}.$$

Уравнения гравитационного поля (90) в этом случае записываются в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\left.\begin{aligned} &f''_{00} + \frac{2}{r} f'_{00} = 16\pi I_{00}(r); \\ &f''_{rr} + \frac{2}{r} f'_{rr} - \frac{4}{r^2} f_{rr} + \frac{4}{r^2}\left(\frac{f_{\theta\theta}}{r^2}\right) = 16\pi I_{rr}(r); \\ &\left(\frac{f_{\theta\theta}}{r^2}\right)'' + \frac{2}{r}\left(\frac{f_{\theta\theta}}{r^2}\right)' - \frac{2}{r^2}\left(\frac{f_{\theta\theta}}{r^2}\right) + \frac{2}{r^2} f_{rr} = 16\pi \frac{I_{\theta\theta}(r)}{r^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (221)$$

(Здесь и далее штрих обозначает производную по r.)

В качестве граничных условий для этих уравнений потребуем ограниченности функций f_{00}, f_{rr} и $f_{\theta\theta}/r^2$ при $r = 0$ и обращения в нуль при $r \to \infty$. Тогда решение уравнений гравитационного поля (221) будет единственным.

Однако входящие в выражения (221) компоненты тензорного тока не являются независимыми в силу условий $D^l I_{lm} = 0$. В нашем случае эти условия принимают вид:

$$I'_{rr} + \frac{2}{r}\left(I_{rr} - \frac{1}{r^2} I_{\theta\theta}\right) = 0. \qquad (222)$$

Выразим отсюда компоненту $I_{\theta\theta}$ и подставим в соотношения (221). Интегрируя уравнения и учитывая, что вне источника $I_{rr} = 0$, компоненты гравитационного поля запишем в виде:

$$\left.\begin{aligned} f_{00} &= -16\pi\left\{\frac{1}{r}\int_0^r r_0^2\,dr_0\,I_{00} + \int_r^a r_0\,dr_0\,I_{00}\right\}; \\ f_{rr} &= -\frac{16\pi}{3}\left\{\frac{1}{r^3}\int_0^r r_0^4\,dr_0\,I_{rr} + \int_r^a \frac{dr_0}{r_0} I_{rr}\right\}; \\ \frac{f_{\theta\theta}}{r^2} &= -\frac{16\pi}{3}\left\{-\frac{1}{2r^3}\int_0^r r_0^4\,dr_0\,I_{rr} + \int_r^a \frac{dr_0}{r_0} I_{rr}\right\}. \end{aligned}\right\} \qquad (223)$$

Рассмотрим внешнее ($r > a$) решение. Вводя величины:

$$M = 4\pi \int_0^a r_0^2\, dr_0\, I_{00};\ \ \mu = \frac{4\pi}{3} \int_0^a r_0^4\, dr_0\, I_{rr}, \tag{224}$$

получаем для внешнего решения следующие выражения:

$$f_{00} = -4M/r;\ f_{rr} = -4\mu/r^3; \tag{225}$$
$$f_{\theta\theta} = 2\mu/r;\ f_{\varphi\varphi} = f_{\theta\theta}\sin^2\theta.$$

Как уже отмечалось в разд. 6, поля f_{lm} можно подвергнуть калибровочному преобразованию

$$f_{lm} \to f_{lm} + D_l a_m + D_m a_l - \gamma_{lm} D_n a^n, \tag{226}$$

с калибровочным вектором a^n, удовлетворяющим уравнению $D_l D^l a^n = 0$. При этом преобразовании плотность лагранжиана гравитационного поля изменяется лишь на четырехмерную дивергенцию, которая несущественна для теории, а изменение метрического тензора риманова пространства — времени g_{nl}, возникающее при преобразовании (226), соответствует преобразованиям координат риманова пространства-времени и его всегда можно устранить подходящим выбором координат.

Воспользуемся калибровочным преобразованием (226) для того, чтобы упростить внешнее решение (225). В силу симметрии задачи калибровочный вектор a_n, удовлетворяющий условию $D_l D^l a_n = 0$, выбираем в виде: $a_r = -\mu/r^2$; $a_0 = a_\theta = a_\varphi = 0$. Тогда в результате этого калибровочного преобразования получим для внешнего решения:

$$f_{00} = -4M/r;\ f_{rr} = f_{\theta\theta} = f_{\varphi\varphi} = 0. \tag{227}$$

Чтобы получить метрический тензор для статического сферически-симметричного источника, необходимо подставить компоненты гравитационного поля (227) в уравнение минимальной связи (94). В результате получим ($r > a$):

$$g_{00} = 1 - 2M/r + 2M^2/r^2;\ \ g_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}\,[1 + 2M/r + 4\lambda M^2/r^2], \tag{228}$$

где $\lambda = b_3 + b_4$.

Легко убедиться, что компонента g_{00} метрического тензора эффективного риманова пространства-времени (228) не имеет физических особенностей вне источника:

$$g_{00} \neq 0;\ |\, g_{00}\,| < \infty$$

при $r > a$.

Для того чтобы и пространственные компоненты $g_{\alpha\beta}$ метрического тензора (228) не имели физических особенностей вне источника гравитационного поля, необходимо выполнение следующего условия:

$$\lambda = b_3 + b_4 \geqslant 0. \tag{229}$$

Из соотношений (224) и (85) имеем

$$M = 8\pi \int_0^a r_0^2\, dr_0 \left[I_{00} - \frac{1}{2} I_n^n \right] = 8\pi \int_0^a r_0^2\, dr_0 \left[h_{00} - \frac{1}{2} h_n^n \right].$$

Чтобы получить постньютоновское разложение величины M, необходимо, как обычно, проводить вычисления последовательными этапами: сначала получить выражение для M в ньютоновском приближении, когда полностью пренебрегаем влиянием гравитации на тензор энергии-импульса вещества, а затем, используя ньютоновское приближение, найдем постньютоновское выражение. В результате

$$M = 4\pi \int_0^a r^2\, dr \left\{ \rho \left[1 + \Pi - \frac{U}{2} + O(\varepsilon^4) \right] \right\}.$$

Как и следовало ожидать, для статического сферически-симметричного тела постньютоновское разложение полной массы совпадает с выражением (200).

14. НОВЫЙ МЕХАНИЗМ ОСВОБОЖДЕНИЯ ЭНЕРГИИ В АСТРОФИЗИЧЕСКИХ ОБЪЕКТАХ

Поскольку метрический тензор эффективного риманова пространства-времени в полевой теории гравитации для статического сферически симметричного источника существенно отличается от решения Шварцшильда в ОТО, то в этих теориях описание явлений, происходящих в сильных гравитационных полях, различно. Это позволяет провести изучение некоторых новых эффектов полевой теории гравитации, принципиально отличающихся от эффектов ОТО, в области сильных гравитационных полей.

Один из них [105] — новый механизм освобождения энергии астрофизических объектов. Его действие легко понять из следующих простых соображений. Используя выражение (228) для метрического тензора эффективного риманова пространства-времени, можно найти выражение для силы, которая действует со стороны статического сферически-симметричного источника поля на покоящееся пробное тело массы M_0, помещенное вне источника ($r \geqslant a$). Радиальная компонента этой силы

$$F^r = - \frac{M_0 m\,(1 - 2m/r)}{r^2\,[1 + 2m/r + 4\lambda m^2/r^2]}, \tag{230}$$

где m — инертная масса источника.

Из этого выражения следует, что при $m/r < 1/2$ сила, действующая на пробное тело,— сила притяжения, в то время как при $m/r > 1/2$ она является силой отталкивания. Таким образом, в полевой теории гравитации с минимальной связью силы гравитационного притяжения с ростом потенциала переходят в силы гравитационного отталкивания. Это свойство гравитационного взаимодействия принципиально новое и существенно отличается от свойств гравитационного взаимодействия в ОТО. Отсюда, в частности, следует, что коллапс в полевой теории гравитации невозможен.

Таким образом, сколь бы ни были велики гравитационные силы, которые сжимают астрофизический объект, сжатие неминуемо должно остановиться, когда размеры объекта будут близки к его шварцшильдовскому радиусу, после чего обязательно произойдет расширение вещества, которое может сопровождаться сбросом части массы этого объекта. Кроме того, статические астрофизические объекты с $m/a \gtrsim 1/2$ будут находиться в состоянии неустойчивого равновесия, из которого они рано или поздно будут переходить в устойчивое статическое состояние $m/a \ll 1/2$ выбросом некоторого количества своей массы, который будет сопровождаться освобождением части внутренней энергии этого объекта в виде излучения.

В результате возникают следующие вопросы. При каком среднем значении гравитационного потенциала тот или иной тип астрофизических объектов (звезды-гиганты, сверхмассивные звездные скопления и т. п.) находится в состоянии неустойчивого равновесия? Каким образом эти объекты могут оказаться в данном состоянии?

Строго говоря, для ответа на эти вопросы нам следовало бы выбрать модель того или иного астрофизического объекта, после чего совместным решением уравнений гравитационного поля и уравнений движения вещества с учетом уравнения изменения энтропии и уравнения состояния вещества построить модель внутреннего строения такого астрофизического объекта. Тогда исследование данной модели на устойчивость к различным возмущениям (случайное возмущение радиуса астрофизического объекта, малое изменение его массы из-за захвата окружающего вещества, выгорание вещества внутри него и т. п.) может дать ответ на поставленные выше вопросы. Однако эта задача не поддается аналитическому решению и требует применения численных расчетов на ЭВМ, что существенно затрудняет анализ вопроса.

Получение качественных оценок с точностью до порядка величины существенно проще, поскольку мы можем воспользоваться хорошо известной схемой аналитического исследования астрофизических объектов на устойчивость [106]. Для такого анализа нам необходимо усредненное уравнение возмущений астрофизического объекта в окрестности статического состояния. В целях простоты рассмотрим сферически симметричный случай. В качестве модели вещества этого объекта будем рассматривать идеальную жидкость, тензор энергии-импульса которой в эффективном римановом пространстве-времени имеет вид

$$T^{ni} = (\varepsilon + p)\, u^n u^i - p g^{ni}, \tag{231}$$

где $u^i = dx^i/ds$ — 4-вектор скорости; ε — плотность массы; p — изотропное давление.

В полевой теории гравитации, так же как и в любой другой метрической теории, тензор энергии-импульса вещества удовлетворяет ковариантному уравнению сохранения:

$$\nabla_n T^{ni} = 0. \tag{232}$$

Спроектируем это уравнение на направление 4-вектора скорости u^i и на направление, ему ортогональное. В результате получим ковариантное уравнение неразрывности идеальной жидкости.

$$\nabla_n[(\varepsilon + p)\, u^n] = u^n \nabla_n p \tag{233}$$

и уравнения движения:

$$(\varepsilon + p)\, u^n \nabla_n u^i = (g^{ni} - u^n u^i)\, \nabla_n p. \tag{234}$$

Для сферически симметричного движения и распределения вещества уравнение неразрывности (233) имеет вид:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial t}\left[(\varepsilon + p)\sqrt{-g}\, u^0\right] + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial r}\left[(\varepsilon + p)\sqrt{-g}\, u^0 v^r\right] = u^0\left[\frac{\partial p}{\partial t} + v^r \frac{\partial p}{\partial r}\right], \tag{235}$$

а уравнение движения (234) для радиальной компоненты 4-вектора скорости записывается следующим образом:

$$(\varepsilon + p)\left[\frac{\partial u^r}{\partial t} + v^r \frac{\partial u^r}{\partial r}\right] = (g^{nr} - u^n u^r)\, \partial_n p - (\varepsilon + p)\left[\Gamma^r_{00} u^0 u^0 + 2\Gamma^r_{0r} u^0 u^r + \Gamma^r_{rr} u^r u^r\right]. \tag{236}$$

Рассмотрим некоторый сферически-симметричный астрофизический объект, находящийся в статическом состоянии. Исследуем этот объект на устойчивость к малым возмущениям его параметров (массы, радиуса, плотности вещества и т. п.). Такое исследование будем проводить в рамках теории возмущений.

Разложим все величины, входящие в уравнения (235) и (236), в ряды по малым возмущениям, ограничиваясь лишь линейными членами по возмущению. В исходном невозмущенном состоянии все величины, входящие в уравнения (235) и (236), считаем независящими от времени. Учтем также, что компонента g_{0r} эффективного метрического тензора риманова пространства-времени для статического сферически симметричного источника равна нулю.

Тогда в нулевом приближении из уравнения (236) получим

$$\overset{(0)}{g}{}^{rr}\,\partial_r\overset{(0)}{p} - (\overset{(0)}{\varepsilon} + \overset{(0)}{p})\,\overset{(0)}{\Gamma}{}^r_{00}\overset{(0)}{g}{}^{00} = 0. \tag{237}$$

Из уравнения неразрывности (235) в этом же приближении имеем

$$\frac{d}{dt}\left[\sqrt{-\overset{(0)}{g}}\,(\overset{(0)}{\varepsilon} + \overset{(0)}{p})\,\overset{(0)}{u}{}^0\right] = 0. \tag{238}$$

Уравнение движения (236) в линейном по возмущению приближении приведем к виду

$$(\overset{(0)}{\varepsilon} + \overset{(0)}{p})\,\overset{(0)}{g}{}^{00}\frac{d^2}{dt^2}\,\delta r = \partial_r\overset{(0)}{p}\,\delta g^{rr} + \overset{(0)}{g}{}^{rr}\delta\,\partial_r p - (\delta\varepsilon + \delta p)\,\overset{(0)}{\Gamma}{}^r_{00}\overset{(0)}{g}{}^{00} -$$

$$- (\overset{(0)}{\varepsilon} + \overset{(0)}{p})\,\overset{(0)}{g}{}^{00}\delta\Gamma^r_{00} - (\overset{(0)}{\varepsilon} + \overset{(0)}{p})\,\overset{(0)}{\Gamma}{}^r_{00}\delta g^{00}. \tag{239}$$

Усредним уравнения (237) и (239) по объему астрофизического объекта. Используя качественные оценки, обычные в данном подходе [105], для усредненных компонент метрики будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \bar{g}_{00} &= 1 - 2m/a + 2m^2/a^2; \\ \bar{g}_{\alpha\beta} &= \gamma_{\alpha\beta}\,[1 + 2m/a + 4\lambda m^2/a^2]. \end{aligned}\right\} \tag{240}$$

Для целей нашего исследования, однако, удобнее записать эти выражения не в терминах инертной массы m источника гравитационного поля, а в терминах суммарной массы покоя M частиц, составляющих вещество астрофизического источника:

$$M = 4\pi\int_0^a r^2\,dr\,\sqrt{-g}\;\varepsilon u^0. \tag{241}$$

Из выражений (200) и (241) следует, что

$$m = M\,[1 - M/2a + O\,(M^2/a^2)].$$

Поэтому соотношения (240) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} \bar{g}_{00} &= 1 - 2M/a + 3M^2/a^2 + O\,(M^3/a^3); \\ \bar{g}_{\alpha\beta} &= \gamma_{\alpha\beta}\,[1 + 2M/a + (4\lambda - 1)\,M^2/a^2 + O\,(M^3/a^3)]. \end{aligned}\right\} \tag{242}$$

Тогда усреднение уравнения (237) приведет к следующему равенству:

$$\frac{\bar{p}}{a} = (\bar{\varepsilon} + \bar{p})\,\frac{M}{a^2}\,\frac{[1 - 3M/a + O\,(M^2/a^2)]}{[1 - 2M/a + 3M^2/a^2]}. \tag{243}$$

Поступая аналогично, из (239) с учетом (238) и (243) получаем усредненное уравнение возмущений сферически симметричного астрофизического объекта

$$(\bar{\varepsilon} + \bar{p})\, \bar{g}^{00} \delta \ddot{a} = \bar{g}^{rr}[-\delta \bar{p}/a + (\bar{p}/a^2)\, \delta a -$$
$$-(\delta \bar{\varepsilon} + \delta \bar{p})\, \bar{\Gamma}_{r,00} \bar{g}^{00} - (\bar{\varepsilon} + \bar{p})\, \bar{\Gamma}_{r,00} \delta \bar{g}^{00} - (\bar{\varepsilon} + \bar{p}) \bar{g}^{00} \delta \Gamma_{r,00}]. \quad (244)$$

Рассмотрим некоторый сферически-симметричный астрофизический объект радиуса a, находящийся в статическом состоянии. Изучим это состояние на устойчивость к малым возмущениям величины радиуса. Будем предполагать, что весь процесс протекает адиабатически и число частиц, а следовательно, и полная масса покоя частиц этого объекта сохраняются. Поскольку усреднение выражения (241) дает

$$M = \frac{4\pi}{3} a^3 \bar{\varepsilon} \left[1 + \frac{2M}{a} + (4\lambda - 1) \frac{M^2}{a^2}\right], \quad (245)$$

условие неизменности полной массы покоя частиц приводит к следующему соотношению между средней плотностью массы $\delta\bar{\varepsilon}$ и возмущением радиуса объекта δa:

$$\frac{\delta\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}} = -\frac{3\delta a}{a} \frac{[1 + M/a]}{[1 + 2M/a + (4\lambda - 1) M^2/a^2]}. \quad (246)$$

Вводя средний показатель адиабаты

$$\bar{\Gamma}_1 = (\bar{\varepsilon}/\bar{p})\, (\partial \bar{p}/\partial \bar{\varepsilon})_{\text{ад}}, \quad (247)$$

для возмущения среднего давления $\delta\bar{p}$ имеем

$$\delta \bar{p} = \bar{\Gamma}_1 \bar{p} \delta \bar{\varepsilon}/\bar{\varepsilon}. \quad (248)$$

Подставляя соотношения (248) в усредненное уравнение возмущений (244) и учитывая равенства (242) и (243), получаем

$$\delta \ddot{a} + \omega^2 \delta a = 0, \quad (249)$$

где введено следующее обозначение:

$$\omega^2 = \frac{M}{a^3} \left\{3(\bar{\Gamma}_1 - 1)\left(1 + \frac{M}{a}\right)\left(1 - 3\frac{M}{a}\right)\left(1 - 3\frac{M}{a} + 6\frac{M^2}{a^2}\right) - \right.$$
$$\left. - \left(1 - 6\frac{M}{a} + 3\frac{M^2}{a^2}\right)\left[1 + \frac{2M}{a} + O\left(\frac{M^2}{a^2}\right)\right]\right\}\left[1 + \frac{2M}{a} + \right.$$
$$\left. + O\left(\frac{M^2}{a^2}\right)\right]^{-2}\left[1 - \frac{2M}{a} + \frac{3M^2}{a^2}\right]^{-1}. \quad (250)$$

Это уравнение при $\omega^2 > 0$ описывает гармонические колебания радиуса астрофизического объекта около положения равновесия, а следовательно, астрофизический объект при $\omega^2 > 0$ будет устойчив к малым возмущениям его радиуса, которые не изменяют суммарную массу покоя частиц, составляющих этот объект. При $\omega^2 < 0$ уравнение (249) описывает экспоненциальный рост начального возмущения δa (0) с течением времени. Таким образом, при $\omega^2 \leqslant 0$ статический сферически-симметричный объект будет неустойчив к малым возмущениям радиуса.

Определим, при каких значениях среднего показателя адиабаты вещества $\overline{\Gamma}_1$ статический астрофизический объект будет неустойчив. В силу неравенства

$$[1 - 2M/a + 3M^2/a^2] > 0$$

из условий $\omega^2 \leqslant 0$ и выражения (250) следует, что статический сферически симметричный объект будет неустойчив к малым возмущениям радиуса, если средний показатель адиабаты будет удовлетворять следующему неравенству:

$$\overline{\Gamma}_1 \leqslant \frac{[4-19M/a+O\,(M^2/a^2)]}{3\,[1-3M/a+6M^2/a^2]\,[1-3M/a]\,[1+M/a]} = F\left(\frac{M}{a}\right). \quad (251)$$

Строго говоря, эта формула применима лишь к области значений усредненного гравитационного потенциала $M/a < 1$, поскольку мы использовали приближенное разложение (242). Однако качественно можно экстраполировать это выражение и на область $M/a \sim 1$. Функция $F(x)$ при $x = 0$ равна 4/3, а при x, стремящемся к 1/3, убывает до минус бесконечности. Таким образом, если средний показатель адиабаты вещества астрофизического объекта в некоторой области значений M/a окажется выше величины, определяемой выражением (251), то в этой области астрофизический объект будет устойчив к малым возмущениям радиуса.

Как следует из результатов наблюдений [106], звезды главной последовательности имеют относительно низкую температуру, поэтому для таких звезд давление газа доминирует над давлением излучения, в результате чего для них показатель адиабаты $\overline{\Gamma}_1 = 5/3$. Для высокотемпературных звезд давление излучения может быть выше давления газа и показатель адиабаты чуть выше, чем $\overline{\Gamma}_1 \approx 4/3$. Однако таких звезд [106] пока не наблюдали, поскольку их время жизни достаточно мало.

Следует, однако, отметить, что приведенные выше значения показателя адиабаты могут использоваться лишь при условии, что усредненное давление звезды положительно: $\overline{p} > 0$. Из соотношения (243) легко получить выражение для усредненного давления

$$\overline{p} = \frac{\overline{\varepsilon}\,(M/a)\,(1-3M/a)}{1-3M/a+6M^2/a^2}. \quad (252)$$

Отсюда следует, что при $M/a < 1/3$ усредненное давление положительно, а при $M > a/3$ — отрицательно.

Таким образом, проделанный нами качественный анализ позволяет утверждать, что при значениях усредненного потенциала астрофизических объектов $M/a < 1/3$ эти объекты будут устойчивы к малым возмущениям их радиуса, а при $M/a \geqslant 1/3$ — неустойчивы. При этом переход от области устойчивости в область неустойчивости будет совершаться скачком: от бесконечно большой устойчивости к бесконечно большой неустойчивости. Это означает, что неустойчивость может иметь взрывной характер, в результате чего любое малое возмущение радиуса астрофизического объекта будет нарушать его равновесие и может приводить к выбросу вещества.

Рассмотрим некоторый сферически симметричный статический астрофизический объект. Изучим, к чему приводит возможный захват вещества этим объектом из окружающего его пространства. Как следует из выражения (245), изменение массы объекта неизбежно будет сопровождаться изменением средней плотности вещества этого объекта и его радиуса:

$$\frac{\delta M}{M}=\frac{\delta\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}}\left[1+3\frac{M}{a}+O\left(\frac{M^2}{a^2}\right)\right]+3\frac{\delta a}{a}\left[1+2\frac{M}{a}+O\left(\frac{M^2}{a^2}\right)\right]. \tag{253}$$

Изменение же средней плотности вещества астрофизического объекта и его радиуса естественно приведет к изменению среднего гравитационного потенциала этого объекта:

$$\delta\left(\frac{M}{a}\right)=\frac{\delta\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}}\frac{M}{a}\left[1+3\frac{M}{a}+O\left(\frac{M^2}{a^2}\right)\right]+$$
$$+2\frac{\delta a}{a}\frac{M}{a}\left[1+3\frac{M}{a}+O\left(\frac{M^2}{a^2}\right)\right]. \tag{254}$$

Определим изменение среднего гравитационного потенциала астрофизического объекта при захвате им массы в следующих двух крайних случаях, соответствующих изменению только одного из двух параметров объекта: или средней плотности его вещества, или радиуса.

Пусть усредненная плотность вещества астрофизического объекта при захвате им массы не изменяется: $\delta\bar{\varepsilon}=0$. Тогда захват массы δM согласно выражению (253) будет приводить к изменению радиуса этого объекта, равному:

$$\delta a/a=(\delta M/3M)\,[1-2M/a+O\,(M^2/a^2)]. \tag{255}$$

Подставляя это соотношение в равенство (254), получаем

$$\delta\,(M/a)=(2/3)\,(\delta M/a)\,[1+M/a+O\,(M^2/a^2)]. \tag{256}$$

Таким образом, для неизменной средней плотности вещества захват массы астрофизическим объектом приводит к увеличению среднего гравитационного потенциала этого объекта.

Пусть радиус объекта при захвате им массы не меняется: $\delta a = 0$. Тогда захват массы δM будет приводить к изменению средней плотности вещества объекта

$$(\delta\bar{\varepsilon}/\bar{\varepsilon}) = (\delta M/M)\,[1 - 3M/a + O\,(M^2/a^2)]. \qquad (257)$$

Для изменения среднего гравитационного потенциала объекта из выражений (254) и (257) найдем

$$\delta\,(M/a) = (\delta M/a)\,[1 + O\,(M^2/a^2)]. \qquad (258)$$

Следовательно, и в данном случае захват массы астрофизическим объектом будет приводить к увеличению среднего гравитационного потенциала этого объекта.

Таким образом, любой астрофизический объект вследствие гравитационного захвата окружающего его вещества имеет тенденцию к увеличению среднего гравитационного потенциала. Проведенный выше качественный анализ эволюции астрофизических объектов показывает, что в полевой теории гравитации с минимальной связью объекты в области значений среднего гравитационного потенциала $M/a < 1/3$ устойчивы к малым возмущениям их радиуса при неизменной массе покоя.

Однако средний гравитационный потенциал этих объектов возрастает при захвате ими вещества, окружающего их. После достижения усредненным потенциалом значения $M/a = 1/3$ объект скачком переходит от бесконечно устойчивого состояния к бесконечно неустойчивому состоянию относительно малых возмущений его радиуса. Поэтому даже малые возмущения радиуса объекта, при достижении критического значения среднего гравитационного потенциала, неизбежно приведут к расширению вещества, которое может сопровождаться выбросом некоторой части массы этого объекта с выделением энергии.

Следовательно, вместо гравитационного коллапса, который происходит при неустойчивости астрофизических объектов в ОТО, в данной теории имеет место новый механизм освобождения энергии.

15. ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ НЕСТАТИЧЕСКОГО СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОГО ИСТОЧНИКА

В теории Эйнштейна гравитационное поле нестатического сферически симметричного источника в силу теоремы Биркгофа вне вещества — статическое поле с метрикой, соответствующей решению Шварцшильда.

Покажем, что в полевой теории гравитации для нестатического сферически симметричного источника гравитационное поле вне вещества также является статическим, компоненты которого выражаются формулами (227) и (228). Рассмотрим случай, когда вещество распределено в некотором шаре радиуса a сферически-симметрично и его движение происходит также сферически-симметрично в радиальных направлениях.

В силу симметрии задачи отличными от нуля компонентами тензоров T^{ni}, h^{ni}, I_{ni}, f_{ni} будут диагональные компоненты, а также компоненты T^{0r}, I_{0r}, h^{0r} и f_{0r}. Все компоненты этих тензоров, кроме ($\varphi\varphi$)-компонент, будут зависеть от r и t. Для ($\varphi\varphi$)-компонент имеем:

$$T^{\varphi\varphi} = T^{\theta\theta}/\sin^2\theta;\; h^{\varphi\varphi} = h^{\theta\theta}/\sin^2\theta;$$
$$I_{\varphi\varphi} = I_{\theta\theta}\sin^2\theta;\; f_{\varphi\varphi} = f_{\theta\theta}\sin^2\theta.$$

4-Вектор скорости вещества $u^i = \{u^0(r, t),\ u^r(r, t), 0, 0\}$.

Разложим компоненты тензорного тока I_{lm} и гравитационного поля f_{lm} в интегралы Фурье по времени:

$$f_{lm} = \int d\omega \exp(-i\omega t) f_{lm}(\omega, r);$$
$$I_{lm} = \int d\omega \exp(-i\omega t) I_{lm}(\omega, r).$$

Выделим в спектре $I_{lm}(\omega, r)$ статическую часть $I_{lm}(r)$. Очевидно, что статическая часть будет давать статические решения, рассмотренные в предыдущем разделе. Поэтому в дальнейшем под $I_{ml}(\omega, r)$ будем понимать нестатическую часть.

Уравнения поля (90) для рассматриваемого случая будут иметь вид обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&f''_{00} + \frac{2}{r} f'_{00} + \omega^2 f_{00} = 16\pi I_{00};\\
&f''_{0r} + \frac{2}{r} f'_{0r} + \left(\omega^2 - \frac{2}{r^2}\right) f_{0r} = 16\pi I_{0r};\\
&f''_{rr} + \frac{2}{r} f'_{rr} + \frac{4}{r^2} f^{\theta}_{\theta} + \left(\omega^2 - \frac{4}{r^2}\right) f_{rr} = 16\pi I_{rr};\\
&f^{\theta''}_{\theta} + \frac{2}{r} f^{\theta'}_{\theta} - \frac{2}{r^2} f_{rr} + \left(\omega^2 - \frac{2}{r^2}\right) f^{\theta}_{\theta} = 16\pi I^{\theta}_{\theta}.
\end{aligned}\right\} \tag{259}$$

В качестве граничных условий для этих уравнений естественно потребовать ограниченности функций f_{00}, f_{0r}, f^{θ}_{θ} и f_{rr} при $r \to 0$ и выполнения условий излучения при $r \to \infty$. Из условий сохранения тензорного тока $D_l I^l_n = 0$ имеем:

$$\left.\begin{aligned}
&i\omega I_{00} + I'_{0r} + (2/r) I_{0r} = 0;\\
&i\omega I_{0r} + I'_{rr} + (2/r) I_{rr} - (2/r^3) I_{\theta\theta} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{260}$$

Решая уравнения (259) с учетом соотношений (260), получаем:

$$f_{rr} = (A_1 + 2A_2)/3;$$

$$f_{\theta\theta} = (r^2/3)(A_1 - A_2);$$

$$f_{00} = -\frac{8\pi^2}{\sqrt{r}}\left\{H^{(1)}_{1/2}(\omega r)\int_0^r x^{3/2}\,dx\,I_{0r}J_{3/2}(\omega x) + \right.$$

$$\left. + J_{1/2}(\omega r)\int_r^a x^{3/2}\,dx\,I_{0r}H^{(1)}_{3/2}(\omega x)\right\};$$

$$f_{0r} = -\frac{8\pi^2 i}{\sqrt{r}}\left\{H^{(1)}_{3/2}(\omega r)\int_0^r x^{3/2}\,dx\,J_{3/2}(\omega x)\,I_{0r} + \right.$$

$$\left. + J_{3/2}(\omega r)\int_r^a x^{3/2}\,dx\,H^{(1)}_{3/2}(\omega x)\,I_{0r}\right\},$$

где введены обозначения

$$A_1 = -\frac{8\pi^2 i\omega}{\sqrt{r}}\left\{H^{(1)}_{1/2}(\omega r)\int_0^r x^{5/2}\,[iI_{0r}J_{1/2}(\omega x) + I_{rr}J_{3/2}(\omega x)]\,dx + \right.$$

$$\left. + J_{1/2}(\omega r)\int_r^a x^{5/2}\,[iI_{0r}H^{(1)}_{1/2}(\omega x) + I_{rr}H^{(1)}_{3/2}(\omega x)]\,dx\right\};$$

$$A_2 = \frac{4\pi^2 i\omega}{\sqrt{r}}\left\{H^{(1)}_{5/2}(\omega r)\int_0^r x^{5/2}\,dx\,[iI_{0r}J_{5/2}(\omega x) - I_{rr}J_{3/2}(\omega x)] + \right.$$

$$\left. + J_{5/2}(\omega r)\int_r^a x^{5/2}\,dx\,[iI_{0r}H^{(1)}_{5/2}(\omega x) - I_{rr}H^{(1)}_{3/2}(\omega x)]\right\}.$$

Используя вне вещества калибровочное преобразование

$$f_{ni} \to f_{ni} + D_n a_i + D_i a_n - \gamma_{ni} D_l a^l,$$

наложим на компоненты гравитационного поля два условия: $f = 0$, $f^{00} = 0$. Чтобы калибровочное преобразование не нарушало условия $D_l f^{lm} = 0$, калибровочный 4-вектор должен удовлетворять вне вещества уравнению $D_l D^l a_i = 0$. Выбирая калибровочные векторы в виде:

$$a_0 = \frac{2\pi^2 i}{\omega\sqrt{r}}H^{(1)}_{1/2}(\omega r)\int_0^a x^{3/2}\,dx\,\{I_{0r}\,[J_{3/2}(\omega x) + \omega x J_{1/2}(\omega x)] - \right.$$

$$\left. - i\omega x I_{rr} J_{3/2}(\omega x)\};$$

$$a_r = \frac{2\pi^2}{\sqrt{r}}H^{(1)}_{3/2}(\omega r)\int_0^a x^{5/2}\,dx\,[I_{0r}J_{5/2}(\omega x) + iI_{rr}J_{3/2}(\omega x)];$$

$$a_\theta = a_\varphi = 0,$$

легко убедиться, что все компоненты нестатического гравитационного поля вне вещества $f_{nm} = 0$.

Таким образом, для нестатического источника со сферически симметричным распределением и движением вещества гравитационное поле вне вещества будет статическим полем, компоненты которого определяются формулами (227) и (228).

16. НЕСТАЦИОНАРНАЯ МОДЕЛЬ ОДНОРОДНОЙ ВСЕЛЕННОЙ

Полевая теория гравитации позволяет построить нестационарные модели Вселенной, способные описать эффект космологического красного смещения и свободные от расходимостей ньютоновского типа. Эти модели соответствуют плоской Вселенной.

Следует отметить, что в полевой теории гравитации модель Вселенной характеризует только часть ее, с линейным размером $r \sim cT$, где T — возраст Вселенной. С этой точки зрения «рождение» Вселенной означает, что в прошлом плотность вещества в данном достаточно большом участке Вселенной была велика. Дальнейшую эволюцию этой области Вселенной можно описать рассматриваемой моделью. Все другие области Вселенной могут развиваться независимо от развития данной области и даже по совершенно другим законам. Но наблюдение их в полевой теории гравитации возможно.

Астрономические наблюдения показывают [107, 108], что вещество во Вселенной распределено весьма неоднородно: основная масса вещества заключена в планетах и звездах, на долю же межзвездного газа и излучения приходится лишь малая часть общей массы. Однако при усреднении по областям пространства, линейные размеры которых значительно больше расстояния между скоплениями галактик, плотность вещества той части Вселенной, которая доступна наблюдению, постоянна и не зависит от положения центра области усреднения. Поэтому естественно с физической точки зрения в качестве первого шага рассмотреть модель однородной изотропной Вселенной.

При таком подходе неоднородность распределения вещества, проявляющуюся при усреднении по меньшим областям пространства (скопления галактик, галактики и т. п.), можно учесть введением малых неоднородных возмущений в фоновое космологическое поле однородной Вселенной. Однородная изотропная Вселенная описывается интервалом

$$dS^2 = U(t)\,dt^2 - V(t)\,[dx^2 + dy^2 + dz^2]. \qquad (261)$$

Вещество во Вселенной будем рассматривать как идеальную жидкость с плотностью тензора энергии-импульса

$$T^{ni} = \sqrt{-g}\,[(\varepsilon + p)\,u^i u^n - p g^{ni}].$$

В силу однородности и изотропности Вселенной имеем:

$$\varepsilon = \varepsilon(t);\ p = p(t);$$
$$u^{\alpha} = 0;\ u^0 \neq 0;\ u^0 u^0 g_{00} = 1.$$

Тогда компоненты плотности тензора энергии-импульса вещества примут вид:

$$T^{00} = \varepsilon \sqrt{V^3/U}\ ;\ T^{\alpha\beta} = -p\sqrt{UV}\,\gamma^{\alpha\beta}. \qquad (262)$$

Используя выражение (261) для интервала, определим связность риманова пространства-времени:

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma^0_{00} = \dot{U}/2U;\ \Gamma^0_{0\alpha} = 0;\ \Gamma^{\alpha}_{00} = 0;\\ &\Gamma^0_{\alpha\beta} = \dot{V}\gamma_{\alpha\beta}/2U;\ \Gamma^{\alpha}_{0\beta} = \dot{V}\delta^{\alpha}_{\beta}/2V;\ \Gamma^{\alpha}_{\beta\varepsilon} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (263)$$

где точка обозначает дифференцирование по t.

Подставляя выражения (262) и (263) в ковариантное уравнение сохранения плотности тензора энергии-импульса вещества (201), получаем

$$\frac{d}{dt}(\varepsilon\sqrt{V^3}) + p\frac{d}{dt}\sqrt{V^3} = 0. \qquad (264)$$

Решение уравнения (264) имеет вид:

$$\ln V = -\frac{2}{3}\int\limits_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{d\varepsilon'}{\varepsilon' + p(\varepsilon')}. \qquad (265)$$

Уравнение связи в самом общем виде может быть записано как

$$g_{ni} = \gamma_{ni} f_1 + f_{ni} f_2 + f_{lm} f_{nl} A^{lm}, \qquad (266)$$

где f_1 и f_2 — некоторые скалярные функции от инвариантов $I_1 = f$, $I_2 = f_{nm}f^{nm}$ и т. п., а тензор A^{lm} строится из тензоров γ^{nm}, f^{nm}, $f^{ni}f^m_i$ ... и инвариантов.

Для однородной Вселенной уравнения гравитационного поля (90) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{f}_{00} = \ddot{f}_{0\alpha} = 0;\\ &\ddot{f}_{\alpha\beta} = -16\pi\{h_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta}h_{00}\} \end{aligned}\right\} \qquad (267)$$

Используя определение (70), получаем:

$$f_{00} = 0;\ f_{0\alpha} = 0. \qquad (268)$$

В силу изотропности Вселенной пространственные компоненты гравитационного поля должны быть

$$f_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}F(t). \qquad (269)$$

Тогда

$$g_{00} = U(F);\ g_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} V(F). \tag{270}$$

Можно показать, что

$$\frac{\partial g_{00}}{\partial f_{\alpha\beta}} = \frac{1}{3}\gamma^{\alpha\beta}\frac{dU}{dF};\ \gamma^{\varepsilon\eta}\frac{\partial g_{\varepsilon\eta}}{\partial f_{\alpha\beta}} = \gamma^{\alpha\beta}\frac{dV}{dF}.$$

Поэтому уравнения поля (267) примут вид

$$\ddot{F} = \frac{64\pi}{3}\left\{\varepsilon\sqrt{V^3}\frac{d}{dF}\sqrt{U} - p\sqrt{U}\frac{d}{dF}\sqrt{V^3}\right\}. \tag{271}$$

В качестве начальных условий для уравнения (271) возьмем условия в настоящий момент времени $t = 0$:

$$\varepsilon = \varepsilon_0;\ U = V = 1;\ dV/dt = 2H, \tag{272}$$

где H — постоянная Хаббла. Следует особо отметить, что начальные условия выбраны исходя из предположения, что плотность энергии вещества $\varepsilon_0 \neq 0$. Поэтому и дальнейший расчет будет относиться только к данному случаю. Из экспериментов следует [17], что $20 \cdot 10^9$ лет $> 1/H > 7{,}5 \cdot 10^9$ лет. При таком выборе начальных условий космологическое поле в настоящий момент будет тем псевдоевклидовым фоном, на котором рассмотрим все другие физические процессы. Из условий (272) следует:

$$F(0) = 0;\ dF/dt\,|_{t=0} = -4H.$$

Уравнение (271) приведем к виду

$$\frac{d}{dt}[\dot{F}^2 + c_1] = \frac{128\pi}{3}\left\{\varepsilon\sqrt{V^3}\frac{d}{dt}\sqrt{U} - p\sqrt{U}\frac{d}{dt}\sqrt{V^3}\right\}.$$

Учитывая уравнение сохранения (264), получаем

$$\dot{F}^2 + c_1 = (128\pi/3)\,\varepsilon\sqrt{V^3U}. \tag{273}$$

Интересно отметить, что уравнение (273) представляет собой видоизмененную запись закона сохранения плотности энергии вещества и гравитационного поля в плоском пространстве-времени. Действительно, если использовать определения (104) и (111), уравнение связи (266), компоненты плотности тензора энергии-импульса вещества в римановом пространстве-времени (262), а также учесть равенства (268) и (269), то получим:

$$t_M^{00} = \varepsilon\sqrt{UV^3};\ t_g^{00} = -\frac{3}{128\pi}\dot{F}^2;\ t_M^{0\alpha} = t_g^{0\alpha} = 0. \tag{274}$$

Поэтому закон сохранения плотности тензора энергии-импульса в плоском пространстве-времени (96) будет:

$$\frac{\partial}{\partial t}[t_M^{00} + t_g^{00}] = 0.$$

Отсюда следует, что $t_M^{00} + t_g^{00} = \mathrm{const}$.

Используя начальные условия (272) и выражения (274), находим

$$\varepsilon\sqrt{V^3U} - \frac{3}{128\pi}\dot{F}^2 = \frac{3}{128\pi}c_1,$$

где

$$c_1 = 16H^2(\alpha - 1);\ \alpha = 8\pi\varepsilon_0/3H^2.$$

Таким образом, полная плотность энергии вещества и гравитационного поля Вселенной в плоском пространстве-времени постоянна на всех этапах ее эволюции. Это означает, что энергия Вселенной в ходе эволюции не меняется, а лишь перераспределяется между веществом и гравитационным полем.

Используя начальные условия, решение уравнения (273) запишем в виде

$$t = -\frac{1}{4H}\int\limits_0^F \frac{dF'}{\sqrt{1-\alpha+(\alpha\varepsilon/\varepsilon_0)\sqrt{V^3U}}}. \qquad (275)$$

Выражения (266), (270) и (275) определяют параметрически всю эволюцию однородной изотропной Вселенной, включая сингулярное состояние (или горячую Вселенную) при произвольном уравнении состояния вещества $p = p(\varepsilon)$ и уравнении связи (266), заданном в самом общем виде.

Перейдем в выражениях (270) и (261) к собственному времени. В том временном промежутке, где $U(t)$ отлична от нуля, можно перейти к собственному времени $\tau(t)$, такому, что $\sqrt{U(t)}\,dt = d\tau$. Интервал в этом случае будет следующий:

$$dS^2 = d\tau^2 - V(\tau)[dx^2 + dy^2 + dz^2]. \qquad (276)$$

Считая настоящий момент $\tau(0) = 0$, получаем выражения, которые определяют эволюцию Вселенной, заданными параметрически:

$$\tau = -\frac{1}{4H}\int\limits_0^F \frac{\sqrt{U}\,dF'}{\sqrt{1-\alpha+(\alpha\varepsilon/\varepsilon_0)\sqrt{UV^3}}}; \qquad (277)$$

$$\ln V(F) = -\frac{2}{3}\int\limits_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{d\varepsilon'}{\varepsilon' + p(\varepsilon')}. \qquad (278)$$

Для функций U и V из уравнения минимальной связи (94) имеем:

$$\left.\begin{aligned} U &= 1-(3/2)F+(1/4)(9b_4+3b_3)F^2; \\ V &= 1-(1/2)F+(1/4)(b_1+3b_2+3b_3+9b_4)F^2. \end{aligned}\right\} \qquad (279)$$

Исследуем полученные решения в окрестности настоящего момента ($|\tau| \ll 1/4H$) собственного времени. Будем считать, что в окрестности настоящего момента собственного времени давление пренебрежимо мало по сравнению с плотностью энергии $p \ll \varepsilon$. Поэтому из (278):

$$\varepsilon = \varepsilon_0/\sqrt{V^3(F)}. \qquad (280)$$

Подставляя выражения для U, V, ε в интеграл (277) и интегрируя, имеем

$$\tau = -\frac{1}{4H}\left[F - \frac{3}{8}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)F^2 + O(F^3)\right].$$

Выражая из этого соотношения F и подставляя в выражение для $V(F)$, получаем

$$V(\tau) = 1 + 2H\tau + H^2\tau^2\left[\frac{3}{2}\alpha - \right.$$
$$\left. - 3 + 4(b_1 + 3b_2 + 3b_3 + 9b_4)\right] + O(H^3\tau^3).$$

Метрика (276) с космологическим масштабным фактором $V(\tau)$ приводит к наблюдаемым на эксперименте эффектам. Одним из них является космологическое красное смещение, открытое в 1929 г. Хабблом [109]. Этот эффект заключается в красном смещении спектральных линий, излучаемых далекими галактиками, причем смещение прямо пропорционально расстоянию от галактики до Земли. В ОТО этот эффект был предсказан советским ученым А. А. Фридманом в 1922 г. [110].

В полевой теории гравитации модель однородной Вселенной в окрестности настоящего момента времени (при $H\tau \ll 1$ или $\tau \ll 10^{10}$ лет) также описывает эффект космологического красного смещения частоты $\Delta\omega = -HL\omega$.

Параметр замедления «расширяющейся» Вселенной $q = 1 - 2V\ddot{V}/\dot{V}^2$ в окрестности настоящего момента времени $\tau = 0$:

$$q_0 = 4 - (3/2)\,\alpha - 4\,(b_1 + 3b_2 + 3b_3 + 9b_4). \qquad (281)$$

Для сравнения укажем, что в теории Эйнштейна параметр замедления однородной Вселенной $q_0 = \alpha/2$. В теории гравитации Эйнштейна параметр замедления — одна из важнейших величин, характеризующих однородную Вселенную в целом: при параметре замедления $q_0 < 1/2$ $(\alpha < 1)$ — Вселенная открытая, а при $q_0 > 1/2$ $(\alpha > 1)$ — Вселенная закрытая (имеет конечный объем, но не имеет границ). В полевой теории гравитации такой взаимосвязи нет — Вселенная имеет бесконечный объем при любых значениях α и q_0.

Из оценок массы вещества в галактиках [107] следует, что $\varepsilon_0 = 3 \cdot 10^{-31}$ г/см³. В этом случае

$$\alpha = 0{,}06. \tag{282}$$

Тогда в теории Эйнштейна параметр замедления $q_0 = 0{,}03$ и Вселенная будет открытой, расширяющейся неограниченно. Однако измерения параметра замедления дали иной результат.

Так, в [111] сделан вывод, что значение q_0 находится в диапазоне от 2 до 32, наиболее вероятно значение $q_0 = 5$. Таким образом, в теории Эйнштейна получаемый из наблюдений параметр замедления вступает в противоречие с наблюдаемой плотностью вещества в галактиках, которая значительно меньше, чем требуется для соответствия. Для устранения этого несоответствия между характеристиками космологического решения теории Эйнштейна и их значениями, получаемыми из наблюдений, в настоящее время предпринимаются попытки по увеличению ε_0 (поиск недостающего вещества в галактиках, «тайна скрытого вещества») и по уменьшению q_0, получаемого из эксперимента (предположение о наличии сильной эволюции функции светимости от величины красного смещения). Эти попытки не внесли пока определенности в решение данного вопроса.

В полевой теории гравитации, в отличие от ОТО Эйнштейна, параметр замедления определяется не только средней плотностью вещества ε_0 (параметр $\alpha = 8\pi\varepsilon_0/3H^2$), но и параметрами минимальной связи, поэтому измерение параметра замедления q_0 позволяет, не обращаясь к постньютоновским экспериментам в Солнечной системе, измерить

$$b_1 + 3b_2 + 3b_3 + 9b_4 = -\left[q_0 + \frac{3}{2}\alpha - 4\right]\Big/4. \tag{283}$$

Характер поведения модели однородной Вселенной в отдаленном прошлом существенно зависит от вида уравнения связи при сильных гравитационных полях.

Если уравнение $V(F_1) = 0$ имеет действительные корни, то при $F = F_1$ определитель метрического тензора, а также его пространственные компоненты обращаются в нуль. Поэтому естественно предположить, что при $F = F_1$ реализуется сингулярное состояние Вселенной. Вблизи сингулярного состояния во Вселенной доминируют ультрарелятивистские частицы, уравнение состояния которых $p = \varepsilon/3$. Подставляя это уравнение в выражение (278), получаем

$$\varepsilon = \varepsilon_0/V^2. \tag{284}$$

Отсюда следует, что при обращении функции $V(F)$ в нуль плотность полной энергии Вселенной обращается в бесконечность, и при $F = F_1$ действительно реализуется сингулярное состояние Вселенной.

Некоторый момент времени в прошлом $\tau = \tau_m$ отвечает наименьшему положительному корню F^* уравнения $V(F) = 0$. Время $T = -\tau_m$ естественно назвать возрастом Вселенной и

$$T = \frac{1}{4H} \int\limits_0^{F^*} \frac{\sqrt{U}\, dF}{\sqrt{1-\alpha+\alpha(\varepsilon/\varepsilon_0)\sqrt{UV^3}}}. \tag{285}$$

Введем время $\tau_0 = T + \tau$, отсчитываемое от сингулярного состояния:

$$\tau_0 = \frac{1}{4H} \int\limits_F^{F^*} \frac{\sqrt{U}\, dE}{\sqrt{1-\alpha+\alpha(\varepsilon/\varepsilon_0)\sqrt{UV^3}}}.$$

В окрестности сингулярного состояния (при $F \sim F^*$) справедливо соотношение (284), поэтому

$$\tau_0 = \frac{1}{4H} \int\limits_F^{F^*} \frac{\sqrt{U}\, dF}{\sqrt{1-\alpha+\alpha\sqrt{U/V}}}. \tag{286}$$

Выражение (286) определяет зависимость собственного времени в окрестности сингулярного состояния от гравитационного поля F и, таким образом, позволяет найти поведение функции $V(\tau)$ в данной окрестности.

Следует отметить, что если уравнение $V(F_1) = 0$ не имеет действительных корней, то модель Вселенной не имеет сингулярного состояния. В этом случае может возникать парадокс Ольберса — расходимость интеграла светимости всех звезд. Действительно, полная энергия звездного света ρ в настоящий момент $\tau = 0$ [17]:

$$\rho = \int\limits_{-\infty}^{0} Z(\tau) V^2(\tau)\, d\tau, \tag{287}$$

где $Z(\tau)$ — собственная плотность светимости звезд: $Z(\tau) = \int n(\tau, L)\, dL$; $n(\tau, L)$ — плотность звезд с абсолютной светимостью L в момент τ. Для сходимости интеграла (287) необходимо либо существование сингулярного состояния Вселенной $[V(F_1) = 0]$ при конечном F_1, в результате чего интеграл (287) эффективно обрезается на нижнем пределе при некотором $\tau = \tau(F_1)$, либо достаточно быстрое убывание к нулю $V(\tau)$ с ростом $|\tau|$:

$$\tau V(\tau) Z(\tau) \to 0; \quad |\tau| \to \infty. \tag{288}$$

Введем следующие обозначения:

$$b_1 + 3b_2 + 3b_3 + 9b_4 = w; \; 3b_3 + 9b_4 = k. \tag{289}$$

С учетом этих обозначений выражение (279) перепишем в виде:

$$U = 1 - (3/2)\, F + (k/4)\, F^2; \quad V = 1 - F/2 + wF^2/4. \qquad (290)$$

Изучим теперь влияние коэффициентов k и w на характер поведения модели Вселенной. При этом потребуем, чтобы в теории отсутствовали парадокс типа Ольберса и физические особенности метрики Вселенной при конечных значениях плотности энергии вещества. Как следует из выражения (290), первое из этих требований можно удовлетворить лишь при условии $w \leqslant 1/4$. Это условие в результате соотношений (281) и (289) приводит к ограничению на значение параметра замедления Вселенной в окрестности настоящего момента времени $q_0 \geqslant 3 - (3/2)\, \alpha$. Второе требование накладывает ограничения на значения действительных корней уравнения $U\,(F) = 0$ и тем самым на значение коэффициента k.

В зависимости от коэффициентов k и w возможны различные типы моделей Вселенной. Рассмотрим их последовательно.

$$\text{I. } 0 \leqslant w \leqslant 1/4 \text{ или } 4 - (3/2)\, \alpha \geqslant q_0 \geqslant 3 - (3/2)\, \alpha. \qquad (291)$$

В этом случае оба корня функции V положительны. Наименьший из них, соответствующий сингулярному состоянию Вселенной, $F^* = (1 - \sqrt{1-4w})/w$. Корень F^* в области значений w (291) заключен в пределах: $2 \leqslant F^* \leqslant 4$. Поскольку область отрицательных значений F соответствует будущему в эволюции Вселенной, то при (291) Вселенная будет «расширяться» неограниченно долго. При этом метрика (290) не будет иметь особенностей вне сингулярного состояния Вселенной, если функция U не обращается в нуль в интервале: $-\infty < F < F^*$. Легко убедиться, что это возможно лишь при выполнении условия

$$k > 9/4. \qquad (292)$$

Временной фактор в момент нахождения Вселенной в сингулярном состоянии

$$U\,(F^*) = - F^* + (k - w)\, F^{*2}/4. \qquad (293)$$

Отсюда следует, что в области (291) изменения параметра w временной фактор U при $F = F^*$ удовлетворяет неравенствам $-5 + 4k \geqslant U \geqslant -2 + k > 1/4$.

Характер эволюции Вселенной в окрестности сингулярного состояния существенно определяется параметром w. Так, при $w = 1/4$ из выражений (286), (284) и (290) имеем:

$$V \sim \tau_0^{4/3}; \quad \varepsilon \sim \tau_0^{-8/3}; \quad U \approx -5 + 4k.$$

При $w = 0$:

$$V \sim \tau_0^{4/5}; \quad \varepsilon \sim \tau_0^{-8/5}; \quad U \approx -2 + k.$$

Таким образом, при больших значениях параметра w происходит более быстрый рост масштабного фактора V в окрестности сингулярного состояния Вселенной с течением времени. Для сравнения укажем, что в ОТО [11] для любого типа модели Вселенной в окрестности сингулярного состояния справедливы оценки: $V \sim \tau_0$, $\varepsilon \sim \tau_0^{-2}$.

Характер поведения функций U и V в окрестности сингулярного состояния существенно определяет плотности потоков и спектральные характеристики реликтовых электромагнитного, нейтринного и гравитационного излучений. При этом частота электромагнитного и нейтринного излучений, а следовательно, и их температура изменяются как в результате влияния космологического гравитационного поля, так и в результате эффекта Доплера. Частота же и температура гравитационного излучения могут изменяться лишь в результате эффекта Доплера. Поэтому измерение плотностей потоков и спектральных характеристик этих реликтовых излучений позволяет определить поведение уравнения связи при сильных гравитационных полях.

Чтобы определить возраст Вселенной, необходимо уравнение состояния вещества. Поскольку точное уравнение состояния вещества мы не знаем, оценим возраст Вселенной приближенно. Заметим прежде всего, что при любом уравнении состояния вещества выполняется неравенство: $0 < p \leqslant \varepsilon/3$. Согласно выражениям (278) и (290) это означает, что при $0 \leqslant F \leqslant F^*$ справедлива оценка:

$$\varepsilon_0/\sqrt{V^3} \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0/V^2.$$

Поэтому для возраста Вселенной (285) имеем $T_1 \geqslant T \geqslant T_2$, где

$$T_1 = \frac{1}{4H} \int_0^{F^*} \frac{\sqrt{U}\,dF}{\sqrt{1-\alpha+\alpha\sqrt{U}}};$$

$$T_2 = \frac{1}{4H} \int_0^{F^*} \frac{\sqrt{U}\,dF}{\sqrt{1-\alpha+\alpha\sqrt{U/V}}}.$$

Как показывает анализ, числовые значения T_1 и T_2 существенно зависят от значений параметров w и k, меняясь в широких пределах при изменении этих параметров. Минимальное значение возраста Вселенной для области изменения параметров (291) и (292) достигается при $w = 0$, $k \approx 9/4$: $3/4H \geqslant T \geqslant 2/9H$.

С увеличением параметров w и k в области изменения (291) и (292) возраст Вселенной монотонно растет. Так, при $w = 1/4$, $k = 12$ имеем $7/H \geqslant T \geqslant 1/H$.

В рассматриваемом случае из неравенств (229), (291) и (292) следует, что параметры минимальной связи b_1 и b_2, а также b_3 и b_4

не равны нулю попарно. Более того, если один из параметров b_1, b_2, b_3, b_4 равен нулю, то все остальные параметры с необходимостью отличны от нуля.

II. $w < 0$ или $q_0 > 4 - (3/2)\,\alpha$.

В этом случае корни функции V имеют разные знаки, а следовательно, «расширение» Вселенной в будущем сменится «сжатием», и она возвратится в сингулярное состояние. Эта смена произойдет при масштабном факторе $V = 1 - 1/4w > 1$. Значение корня F^*, соответствующее начальному состоянию Вселенной, заключено в пределах $0 < F^* < 2$. Возвращение Вселенной в сингулярное состояние произойдет при $F_2 = (1 + \sqrt{1 - 4w})/w$. Легко убедиться, что значение F_2 заключено в пределах $0 > F_2 > -\infty$. Следует отметить, что метрика Вселенной не будет иметь особенностей между этими сингулярными состояниями лишь в том случае, если функция U не имеет корней в области $F_2 < F < F^*$.

Характер эволюции Вселенной в окрестности сингулярного состояния, а также возраст Вселенной в этом случае существенно определяются значениями параметров w и k, причем возраст Вселенной, как показывает анализ, может быть больше и меньше $1/H$.

Таким образом, в полевой теории гравитации нестационарные однородные модели Вселенной описывают космологическое красное смещение и допускают монотонное и немонотонное поведение. Характер поведения модели и время жизни Вселенной существенно зависят от параметра замедления q_0: при значениях q_0, заключенных в пределах $4 - (3/2)\,\alpha \geqslant q_0 \geqslant 3 - (3/2)\,\alpha$, Вселенная будет расширяться неограниченно долго, а при $q_0 > 4 - 3\alpha/2$ расширение с течением времени уступит место сжатию и Вселенная возвратится в сингулярное состояние.

17. ДВИЖЕНИЕ ПРОТЯЖЕННЫХ ТЕЛ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ МЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

В некоторых работах [129—132] на примере системы, включающей Солнце и одну из ее планет, на основе параметризованного постньютоновского приближения произвольной метрической теории гравитации был рассмотрен эффект возможного отклонения движения центра масс протяженного тела от движения по геодезической риманова пространства — времени.

Ограничение авторов [129—132] лишь случаем Солнечной системы, по-видимому, было связано с тем, что единственной постньютоновской системой, доступной в то время для наблюдений, являлась Солнечная система. В настоящее же время в связи с открытием двойной пульсарной системы PSR 1913 + 16 [82, 83] появилась возможность для измерения параметров орбиты постньютоновской системы, состоящей из двух протяженных тел сравнимой массы. Можно надеяться, что в будущем обнаружат и начнут изучать и другие такие системы, а также системы, состоящие из большего количества тел сравнимой массы.

Выяснение характера движения центра масс протяженного тела, входящего в произвольную двойную систему, было проведено в [133, 134]. Необходимость такого изучения кроме достижения большей степени общности была обусловлена еще и двумя другими причинами. Во-первых, имеющееся в литературе решение вопроса о соотношении между инертной и пассивной гравитационной массами протяженного тела и о характере движения его центра масс относительно геодезической риманова пространства — времени нельзя признать правильным из-за некоторых использованных ошибочных допущений. Во-вторых, такое изучение имеет важное значение для любой метрической теории гравитации, а не только для полевой теории гравитации, поскольку измерение отклонения центра масс протяженного тела от движения по геодезической риманова пространства — времени позволяет провести дальнейшее уточнение числового значения постньютоновских параметров.

Следует отметить, что принятое в [133, 134] исходное выражение для метрики риманова пространства — времени несколько отличается от соответствующих выражений, используемых в работах других авторов. Поэтому для удобства сопоставления наших результатов с результатами других авторов выберем исходную метрику риманова пространства — времени в виде (150). Кроме того, для увеличения общности рассмотрения разложение уравнений движения протяженного тела по малому параметру $L/R \ll 1$ (L — характерный размер тела; R — расстояние между телами) в настоящей работе по сравнению с [133, 134] мы будем проводить до более высоких порядков. Однако эти изменения, как будет показано ниже, не отразятся на основных выводах о характере движения центра масс протяженного тела. Рассмотрим задачу астрономического типа: будем считать, что изучаемая система состоит из двух протяженных тел, движущихся в создаваемом ими гравитационном поле и находящихся друг от друга на расстоянии, значительно превышающем их линейные размеры. Назовем их условно первым и вторым. Эти тела будем считать состоящими из идеальной жидкости, плотность тензора (веса 1) энергии — импульса которой имеет вид (156).

Также будем считать, что к данной системе применим постньютоновский формализм. Для этого необходимо, чтобы максимальные значения гравитационного потенциала U, квадрата характерной скорости v^2, удельного давления p/ρ_0 и удельной внутренней энергии Π имели примерно одинаковый порядок малости ε^2, где $\varepsilon \ll 1$ — некоторый безразмерный параметр. В данном случае тела будут находиться в ближней зоне вызываемого их движением гравитационного излучения. Следовательно, в области, занимаемой телами, изменения всех величин со временем будут обусловлены в первую очередь движением вещества, а следовательно, частные производные всех величин по времени будут малы по сравнению с частными производными по координатам. Как известно [84], любая теория гравитации, у которой естественной геометрией для движения вещества является риманова геометрия, в постньютоновском приближении генерирует метрику (150).

Эта метрика в общем случае содержит десять произвольных параметров γ, β, α_1, α_2, α_3, ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, ξ_w и три компоненты w^α скорости системы отсчета относительно некоторой гипотетической универсальной системы покоя. Отметим, что принятая нами модель протяженных тел описывает тела, давление в которых изотропно. Поэтому наш расчет применим только к таким физическим ситуациям, когда сдвиговым напряжением в протяженных телах можно пренебречь по сравнению с изотропным давлением. Если им нельзя пренебречь, то необходимо учесть вклад сдвиговых напряжений в тензор энергии — импульса вещества (156) и в метрику (150).

Следует также подчеркнуть, что предлагаемый нами расчет применим лишь к тем метрическим теориям гравитации, которые обладают законами сохранения энергии — импульса вещества и гравитационного поля, вместе взятых. Для теорий гравитации, которые не обладают этими законами сохранения, расчет должен проводиться особо в рамках каждой из таких теорий и выводы настоящей работы к ним не применимы.

Постньютоновские уравнения движения идеальной жидкости. Чтобы определить силу, действующую на первое тело со стороны второго тела, необходимо построить уравнения гидродинамики (уравнения движения элемента идеальной жидкости) в римановом пространстве — времени с метрикой (150). Следуя В. А. Фоку [13], для построения этих уравнений будем исходить из ковариантного уравнения плотности тензора энергии — импульса вещества в римановом пространстве — времени

$$\nabla_i T^{ni} = \partial_i T^{ni} + \Gamma^n_{mi} T^{mi} = 0, \tag{294}$$

а также из ковариантного уравнения неразрывности идеальной жидкости

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\rho v^\alpha)\right] = 0, \tag{295}$$

где $\rho = \rho_0 \sqrt{-g}u^0$ — сохраняющаяся плотность массы. Очевидно, что в ньютоновском приближении соотношение (294) приводит к хорошо известным уравнениям Эйлера для идеальной жидкости:

$$\rho\, dv^\alpha/dt = -\rho\, \partial^\alpha U + \partial^\alpha p; \quad \rho\, d\Pi/dt = -p\, \partial_\alpha v^\alpha, \tag{296}$$

где $d/dt = \partial/\partial t + v^\beta \partial/\partial x^\beta$ — субстанциональная производная по времени.

Для получения из выражения (294) постньютоновских уравнений движения идеальной жидкости сначала построим с необходимой точностью компоненты плотности тензора энергии — импульса вещества. Используя определение плотности тензора энергии — импульса идеальной жидкости (156), метрику (150), выражение для 4-вектора скорости

$$u^i = \frac{dx^i/dt}{\sqrt{g_{00} + 2g_{0\alpha}v^\alpha + g_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta}}, \tag{297}$$

а также контравариантные компоненты метрического тензора

$$g^{00} = 1 + 2U + O(\varepsilon^4); \quad g^{0\alpha} = O^\alpha(\varepsilon^3); \quad \sqrt{-g} = 1 + (3\gamma - 1)U + O(\varepsilon^4);$$
$$g^{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta}(1 - 2\gamma U) + O(\varepsilon^4),$$

получим следующие выражения для компонент плотности тензора (веса 1) энергии — импульса вещества (156):

$$\left.\begin{aligned} T^{00} &= \rho(1 - v_\alpha v^\alpha/2 + \Pi + U) + \rho O(\varepsilon^4); \\ T^{0\alpha} &= \rho v^\alpha(1 - v_\beta v^\beta/2 + \Pi + U) + p v^\alpha + \rho O^\alpha(\varepsilon^5); \\ T^{\alpha\beta} &= \rho v^\alpha v^\beta - p\gamma^{\alpha\beta} + \rho O^{\alpha\beta}(\varepsilon^4); \\ \rho &= \rho_0[1 + 3\gamma U - v_\alpha v^\alpha/2 + O(\varepsilon^4)]. \end{aligned}\right\} \tag{298}$$

Учитывая, что

$$\partial_\beta U_{\delta\eta} - \partial_\delta U_{\beta\eta} = \gamma_{\beta\eta}\partial_\delta U - \gamma_{\eta\delta}\partial_\beta U;$$
$$\partial_\alpha V_\beta - \partial_\beta V_\alpha = \partial_\alpha W_\beta - \partial_\beta W_\alpha,$$

компоненты связности риманова пространства—времени, необходимые для дальнейших вычислений, запишем в виде:

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^\alpha_{00} &= \frac{1}{2}(4\gamma + 3 + \alpha_1 - \alpha_2 + \xi_1)\frac{\partial V^\alpha}{\partial t} + \frac{1}{2}(1 + \alpha_2 - \xi_1)\frac{\partial W^\alpha}{\partial t} - \\ &\quad - \frac{1}{2}(\alpha_1 - 2\alpha_2)w^\alpha\frac{\partial U}{\partial t} + \alpha_2 w_\beta\frac{\partial U^{\alpha\beta}}{\partial t} + \\ &\quad + \partial^\alpha U + \partial^\alpha\Phi - \xi_w\partial^\alpha\Phi_w - 2(\beta + \gamma)U\partial^\alpha U + O^\alpha(\varepsilon^6); \\ \Gamma^\alpha_{0\beta} &= \gamma\delta^\alpha_\beta\partial U/\partial t + (4\gamma + 4 + \alpha_1)(\partial_\beta V^\alpha - \partial^\alpha V_\beta)/4 - \\ &\quad - \alpha_1(w^\alpha\partial_\beta U - w_\beta\partial^\alpha U)/4 + O(\varepsilon^5); \end{aligned}\right\} \tag{299}$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta\delta} = \gamma[\delta^\alpha_\delta\partial_\beta U + \delta^\alpha_\beta\partial_\delta U - \gamma_{\beta\delta}\partial^\alpha U] + O(\varepsilon^4),$$

где для сокращения записи введено обозначение:

$$\begin{aligned} \Phi = {} & (2\gamma + 2 + \alpha_3 + \xi_1)\Phi_1/2 - \xi_1 A/2 + \\ & + (3\gamma + 1 - 2\beta + \xi_2)\Phi_2 + (1 + \xi_3)\Phi_3 + \\ & + 3(\gamma + \xi_4)\Phi_4 + (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)w_\beta w^\beta U/2 - \\ & - \alpha_2 w^\beta w^\alpha U_{\alpha\beta}/2 + (2\alpha_3 - \alpha_1)w^\beta V_\beta/2. \end{aligned}$$

Постньютоновские уравнения движения идеальной жидкости можно получить, записывая (294) при $n = \alpha$ с точностью до членов $\rho O(\varepsilon^4)$ включительно:

$$\partial_0 T^{0\alpha} + \partial_\beta T^{\alpha\beta} + \Gamma^{\alpha}_{00} T^{00} + 2\Gamma^{\alpha}_{0\beta} T^{0\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\eta} T^{\beta\eta} = \rho O(\varepsilon^6). \tag{300}$$

Легко убедиться, что, используя выражения (298) и (299), все слагаемые уравнения (300), кроме второго $\partial_\beta T^{\beta\alpha}$, можно записать с принятой в этом уравнении точностью. Подставляя выражения (298) и (299) во все слагаемые уравнения (300), кроме второго, получаем:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho v^{\alpha}\left(1+\Pi+U-\frac{v_\beta v^\beta}{2}\right)+p v^{\alpha}\right]+ \\
+\partial_\beta T^{\alpha\beta}+\rho\partial^{\alpha}U+\rho\partial^{\alpha}\Phi+2\gamma\rho v^{\alpha}v^{\beta}\partial_\beta U-\xi_w\rho\partial^{\alpha}\Phi_w+ \\
+\rho\partial^{\alpha}U\left[\Pi-\frac{2\gamma+1}{2}v_\varepsilon v^\varepsilon+\gamma\frac{p}{\rho}-(2\beta+2\gamma-1)U\right]+ \\
+\frac{1}{2}(4\gamma+3+\alpha_1-\alpha_2+\xi_1)\rho\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial t}+\frac{1}{2}(1+\alpha_2-\xi_1)\rho\frac{\partial W^{\alpha}}{\partial t}+ \\
+\frac{1}{2}(4\gamma+4+\alpha_1)\rho v^{\beta}(\partial_\beta V^{\alpha}-\partial^{\alpha}V_\beta)+ \\
+\rho\frac{\partial U}{\partial t}\left[-\frac{1}{2}(\alpha_1-2\alpha_2)w^{\alpha}+2\gamma v^{\alpha}\right]-\frac{1}{2}\alpha_1\rho v^{\beta}(w^{\alpha}\partial_\beta U-w_\beta\partial^{\alpha}U)+ \\
+\alpha_2 w_\beta\rho\frac{\partial U^{\alpha\beta}}{\partial t}=\rho O(\varepsilon^6).
\end{gathered}$$

Приведем это выражение к виду, удобному для дальнейшего исследования. После тождественных преобразований получим постньютоновские уравнения движения идеальной жидкости:

$$\begin{gathered}
\rho\frac{dv^{\alpha}}{dt}+\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left[T^{\alpha\beta}-\rho v^{\alpha}v^{\beta}\left(1+\Pi+U-\frac{v_\varepsilon v^\varepsilon}{2}\right)-p v^{\alpha}v^{\beta}+\gamma^{\alpha\beta}pU\right]+ \\
+\rho\partial^{\alpha}U-2(\beta+\gamma)\rho U\partial^{\alpha}U+(\gamma-2)p\partial^{\alpha}U+v^{\alpha}\frac{\partial p}{\partial t}+ \\
+\partial^{\alpha}p\left(\Pi-\frac{v_\varepsilon v^\varepsilon}{2}+\frac{p}{\rho}\right)-\gamma v_\varepsilon v^\varepsilon\rho\partial^{\alpha}U+(2\gamma+1)\rho v^{\alpha}\frac{\partial U}{\partial t}+ \\
+2(\gamma+1)\rho v^{\alpha}v^{\beta}\partial_\beta U+\frac{1}{2}(4\gamma+3+\alpha_1-\alpha_2+\xi_1)\rho\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial t}+ \\
+\frac{1}{2}(1+\alpha_2-\xi_1)\rho\frac{\partial W^{\alpha}}{\partial t}+\frac{1}{2}(4\gamma+4+\alpha_1)\rho v^{\beta}(\partial_\beta V^{\alpha}-\partial^{\alpha}V_\beta)+\rho\partial^{\alpha}\Phi- \\
-\frac{1}{2}(\alpha_1-2\alpha_2)w^{\alpha}\rho\frac{\partial U}{\partial t}-\xi_w\rho\partial^{\alpha}\Phi_w-\frac{1}{2}\alpha_1\rho v^{\beta}(w^{\alpha}\partial_\beta U-w_\beta\partial^{\alpha}U)+ \\
+\alpha_2 w_\beta\rho\frac{\partial U^{\alpha\beta}}{\partial t}=\rho O(\varepsilon^6).
\end{gathered} \tag{301}$$

Уравнения движения центра масс протяженного тела. Рассмотрим два протяженных тела, которые занимают объемы V_1 и V_2 и находятся на расстоянии R, значительно превышающем их линейные размеры L: $L/R \ll 1$. В этом случае сохраняющаяся плотность массы идеальной жидкости

$$\rho(x, t) = \rho_1(x, t) + \rho_2(x, t),$$

где плотность $\rho_1(x, t)$ отлична от нуля в объеме V_1, а плотность $\rho_2(x, t)$ — в объеме V_2. Для простоты будем считать, что распределение вещества в телах близко к сферически-симметричному, в результате чего приведенные мультипольные моменты каждого из тел малы. Как показывает анализ, это условие помогает избежать громоздких выкладок, но никаким образом не сказывается на окончательных выводах. Учитывая последнее из равенств (298), обобщенные потенциалы (151) перепишем в виде:

$$\left.\begin{aligned}
U &= \widetilde{U} - 3\gamma\widetilde{\Phi}_2 - \frac{1}{2}\widetilde{\Phi}_1 + \int \frac{\rho_2}{|X-y|}\,dy + \frac{1}{2}\int \frac{\rho_2 v_\alpha v^\alpha}{|X-y|}\,dy - \\
&\quad - 3\gamma \int \frac{[\rho_1'\rho_2'' + \rho_2'\rho_1'' + \rho_2'\rho_2'']}{|X-X'|\,|X'-X''|}\,dX'\,dX'' + O(\varepsilon^6);\\
\Phi_1 &= \widetilde{\Phi}_1 - \int \frac{\rho_2 v_\alpha v^\alpha}{|X-y|}\,dy + O(\varepsilon^6);\\
\Phi_2 &= \widetilde{\Phi}_2 + \int \frac{[\rho_1'\rho_2'' + \rho_2'\rho_1'' + \rho_2'\rho_2'']}{|X-X'|\,|X'-X''|}\,dX'\,dX'' + O(\varepsilon^6);\\
\Phi_3 &= \widetilde{\Phi}_3 + \int \frac{\rho_2\Pi}{|X-y|}\,dy + O(\varepsilon^6);\\
\Phi_4 &= \widetilde{\Phi}_4 + \int \frac{p_2}{|X-y|}\,dy + O(\varepsilon^6);\\
V^\alpha &= \widetilde{V}^\alpha - \int \frac{\rho_2 v^\alpha}{|X-y|}\,dy + O(\varepsilon^5);\\
A &= \widetilde{A} + \int \frac{\rho_2[v_\alpha(X^\alpha - y^\alpha)]^2}{|X-y|^3}\,dy + O(\varepsilon^6);\\
W^\alpha &= \widetilde{W}^\alpha + \int \frac{\rho_2 v_\beta (X^\beta - y^\beta)(X^\alpha - y^\alpha)}{|X-y|^3}\,dy + O(\varepsilon^5);\\
U^{\alpha\beta} &= \widetilde{U}^{\alpha\beta} + \int \frac{\rho_2 (X^\alpha - y^\alpha)(X^\beta - y^\beta)}{|X-y|^3}\,dy + O(\varepsilon^4);\\
\Phi_w &= \widetilde{\Phi}_w + \int \frac{[\rho_2'\rho_1'' + \rho_1'\rho_2'' + \rho_2'\rho_2'']}{|X-X'|^3}(X^\beta - X'^\beta) \times \\
&\quad \times \left[\frac{X_\beta - X_\beta''}{|X'-X''|} - \frac{X_\beta' - X_\beta''}{|X-X''|}\right] dX'\,dX'' + O(\varepsilon^6),
\end{aligned}\right\} \quad (302)$$

где для собственных гравитационных потенциалов протяженного тела введены следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned}
&\widetilde{U}=\int\frac{\rho_1}{|X-y|}dy;\quad \widetilde{\Phi}_1=-\int\frac{\rho_1 v_\alpha v^\alpha}{|X-y|}dy;\\
&\widetilde{\Phi}_2=\int\frac{\rho_1\widetilde{U}}{|X-y|}dy;\\
&\widetilde{\Phi}_3=\int\frac{\rho_1\Pi}{|X-y|}dy;\quad \widetilde{\Phi}_4=\int\frac{\rho_1}{|X-y|}dy;\\
&\widetilde{V}^\alpha=-\int\frac{\rho_1 v^\alpha}{|X-y|}dy;\\
&\widetilde{A}=\int\frac{\rho_1[v_\beta(X^\beta-y^\beta)]^2}{|X-y|^3}dy;\quad \widetilde{U}^{\alpha\beta}=\int\frac{\rho_1(X^\alpha-y^\alpha)(X^\beta-y^\beta)}{|X-y|^3}dy;\\
&\widetilde{W}^\alpha=\int\frac{\rho_1 v_\beta(X^\beta-y^\beta)(X^\alpha-y^\alpha)}{|X-y|^3}dy;\\
&\widetilde{\Phi}_w=\int\frac{\rho_1'\rho_1''}{|X-X'|^3}(X^\beta-X'^\beta)\times\\
&\times\left[\frac{X_\beta-X''_\beta}{|X'-X''|}-\frac{X'_\beta-X''_\beta}{|X-X''|}\right]dX'\,dX''.
\end{aligned}\right\}\qquad(303)$$

Для дальнейшего рассмотрения необходимо определить понятия инертной массы и центра масс протяженного тела. В случае теории гравитации, которая обладает законами сохранения энергии — импульса вещества и гравитационного поля, взятых вместе, введем строгие понятия инертной массы и центра масс:

$$m=\int[t_M^{00}+t_g^{00}]\,dX;\quad mX^\alpha=\int[t_M^{00}+t_g^{00}]\,x^\alpha\,dX,\qquad(304)$$

где t_M^{ni}, t_g^{ni} — тензоры энергии — импульса вещества и гравитационного поля соответственно; m — инертная масса тела; X^α — радиус-вектор его центра масс.

Однако использовать это определение в рассматриваемом общем случае не представляется возможным, так как разные метрические теории гравитации, обладающие законами сохранения энергии — импульса вещества и гравитационного поля, могут иметь различные выражения для тензоров t_M^{ni} и t_g^{ni}. Поскольку мы хотим охватить в своем исследовании по возможности наиболее широкий класс метрических теорий гравитации, обладающих законами сохранения энергии — импульса вещества и гравитационного поля, то в последующих вычислениях, следуя Виллу [131], определим массы тел и координаты центров масс следующим образом:

$$M=\int\rho\,dx;\quad MX^\alpha=\int\rho x^\alpha\,dx.\qquad(305)$$

Масса M — суммарная масса покоя частиц тела, не зависящая согласно уравнению (295) от времени. Эта масса не равна инертной массе тела (304), отличаясь от нее на постньютоновские поправки $m = M(1+\delta)$, где $\delta \sim O(\varepsilon^2)$. Однако на вычислении ускорения центра массы протяженного тела данное отличие не сказывается.

Действительно, если пользоваться определением (304), то выражение для силы, действующей со стороны второго тела на первое, получим в виде $F_1^\alpha = km[n^\alpha + \Delta^\alpha + O(\varepsilon^4)]$, где k — некоторый коэффициент; $\Delta^\alpha \sim O(\varepsilon^2)$ — постньютоновские поправки.

При использовании же определения (305) будем вычислять выражение в правой части уже в терминах плотности ρ, а поэтому $F_2^\alpha = kM[n^\alpha + \Delta^\alpha + O(\varepsilon^4)]$. Легко убедиться, что в обоих случаях приходим к одному и тому же ускорению:

$$a^\alpha = F_1^\alpha/m = F_2^\alpha/M = k[n^\alpha + \Delta^\alpha + O(\varepsilon^4)].$$

Дополнительным преимуществом определения (305) является достаточно простая связь между координатами центра массы тела, его скоростью и ускорением. Так, для первого тела с учетом ковариантного уравнения неразрывности идеальной жидкости (295) имеем:

$$M_1 V_{(1)}^\alpha = \frac{d}{dt} M_1 X_{(1)}^\alpha = \int \rho_1(x,\ t)\, v^\alpha\, dx;$$

$$M_1 a_{(1)}^\alpha = \frac{d}{dt} M_1 V_{(1)}^\alpha = \int \rho_1(x,\ t)\, \frac{dv^\alpha}{dt}\, dx.$$

Поэтому дальнейший расчет будем производить, основываясь на определении (305).

Так как метрика (150), а следовательно, и уравнения движения (301) заданы в произвольной системе отсчета, в ней скорость центра масс всей постньютоновской системы не равна нулю и имеет вид:

$$V_\Sigma^\alpha = (M_1 V_{(1)}^\alpha + M_2 V_{(2)}^\alpha)/(M_1 + M_2) \neq 0.$$

Однако согласно работам [131, 135] можно произвести «постгалилеевские» преобразования системы отсчета, оставляющие форминвариантными метрику (150) и уравнения движения (301), в результате чего в новой системе отсчета скорость центра масс всей постньютоновской системы будет равна нулю.

Обозначим радиус-вектор центра масс первого тела в этой системе отсчета $Y_{(1)}^\alpha$, второго — $Y_{(2)}^\alpha$, а их разность $Y_{(1)}^\alpha - Y_{(2)}^\alpha = R^\alpha$. Проинтегрируем теперь постньютоновские уравнения движения идеальной жидкости (301) по объему, занимаемому первым телом. Разложим каждое слагаемое в полученном выражении по степеням L/R с точностью $O(1/R^4)$. Для этого используем следующие разложения:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{X_1^\alpha - X_2^\alpha}{|X_1 - X_2|} = \frac{R^\alpha}{R} + \frac{R^\alpha R_\varepsilon (x_1^\varepsilon - x_2^\varepsilon)}{R^3} + \frac{1}{2}\frac{R^\alpha (x_{1\varepsilon} - x_{2\varepsilon})(x_1^\varepsilon - x_2^\varepsilon)}{R^3} + \\
&\quad + \frac{3}{2}\frac{R^\alpha [R_\varepsilon (x_1^\varepsilon - x_2^\varepsilon)]^2}{R^5} + \frac{x_1^\alpha - x_2^\alpha}{R} + \frac{R_\varepsilon (x_1^\varepsilon - x_2^\varepsilon)(x_1^\alpha - x_2^\alpha)}{R^3} + \\
&\quad + \frac{3}{2}\frac{R^\alpha R_\varepsilon (x_1^\varepsilon - x_2^\varepsilon)(x_1^\beta - x_2^\beta)(x_{1\beta} - x_{2\beta})}{R^5} + \frac{5}{2}\frac{[R_\varepsilon (x_1^\varepsilon - x_2^\varepsilon)]^3}{R^6} + \\
&\quad + \frac{(x_1^\alpha - x_2^\alpha)(x_1^\varepsilon - x_2^\varepsilon)(x_{1\varepsilon} - x_{2\varepsilon})}{2R^3} + \frac{3(x_1^\alpha - x_2^\alpha)[R_\varepsilon (x_1^\varepsilon - x_2^\varepsilon)]^2}{2R^5} + \\
&\quad + O\left(\frac{1}{R^4}\right); \\
&\frac{1}{|X_1 - X_2|} = \frac{1}{R} + \frac{R_\varepsilon (x_1^\varepsilon - x_2^\varepsilon)}{R^3} + \\
&\quad + \frac{(x_1^\varepsilon - x_2^\varepsilon)(x_{1\varepsilon} - x_{2\varepsilon})}{2R^3} + \frac{3[R_\varepsilon (x_1^\varepsilon - x_2^\varepsilon)]^2}{2R^5} + O\left(\frac{1}{R^4}\right); \\
&\frac{X_1^\alpha - X_2^\alpha}{|X_1 - X_2|^2} = \frac{R^\alpha}{R^2} + \frac{2R^\alpha R_\varepsilon (x_1^\varepsilon - x_2^\varepsilon)}{R^4} + \\
&\quad + \frac{R^\alpha (x_1^\varepsilon - x_2^\varepsilon)(x_{1\varepsilon} - x_{2\varepsilon})}{R^4} + \frac{4R^\alpha [R_\varepsilon (x_1^\varepsilon - x_2^\varepsilon)]^2}{R^6} + \frac{x_1^\alpha - x_2^\alpha}{R^2} + \\
&\quad + \frac{2(x_1^\alpha - x_2^\alpha) R_\varepsilon (x_1^\varepsilon - x_2^\varepsilon)}{R^4} + O\left(\frac{1}{R^4}\right); \\
&\frac{(X_1^\alpha - X_2^\alpha)(X_1^\beta - X_2^\beta)}{|X_1 - X_2|^3} = \frac{R^\alpha R^\beta}{R^3} + \frac{3R^\alpha R^\beta R_\varepsilon (x_1^\varepsilon - x_2^\varepsilon)}{R^5} + \\
&\quad + \frac{3R^\alpha R^\beta (x_1^\varepsilon - x_2^\varepsilon)(x_{1\varepsilon} - x_{2\varepsilon})}{2R^5} + \frac{3R^\alpha (x_1^\beta - x_2^\beta) R_\varepsilon (x_1^\varepsilon - x_2^\varepsilon)}{2R^5} + \\
&\quad + \frac{15R^\alpha R^\beta [R_\varepsilon (x_1^\varepsilon - x_2^\varepsilon)]^2}{2R^7} + \frac{R^\alpha (x_1^\beta - x_2^\beta) + R^\beta (x_1^\alpha - x_2^\alpha)}{R^3} + \\
&\quad + \frac{(x_1^\alpha - x_2^\alpha)(x_1^\beta - x_2^\beta)}{R^3} + \frac{3R^\beta (x_1^\alpha - x_2^\alpha) R_\varepsilon (x_1^\varepsilon - x_2^\varepsilon)}{2R^5} + O\left(\frac{1}{R^4}\right); \\
&\frac{(X_1^\alpha - X_2^\alpha)(Z_1^\beta - X_2^\beta)}{|X_1 - X_2|^3} = \frac{R^\alpha R^\beta}{R^3} + \frac{3R^\alpha R^\beta R_\varepsilon (x_1^\varepsilon - x_2^\varepsilon)}{R^5} + \\
&\quad + \frac{3R^\alpha R^\beta (x_1^\varepsilon - x_2^\varepsilon)(x_{1\varepsilon} - x_{2\varepsilon})}{2R^5} + \frac{15R^\alpha R^\beta [R_\varepsilon (x_1^\varepsilon - x_2^\varepsilon)]^2}{2R^7} + \\
&\quad + \frac{R^\alpha (z_1^\beta - x_2^\beta) + R^\beta (x_1^\alpha - x_2^\alpha)}{R^3} + \frac{3R^\alpha (z_1^\beta - x_2^\beta) R_\varepsilon (x_1^\varepsilon - x_2^\varepsilon)}{R^5} + \\
&\quad + \frac{3R^\beta (x_1^\alpha - x_2^\alpha) R_\varepsilon (x_1^\varepsilon - x_2^\varepsilon)}{R^5} + \frac{(x_1^\alpha - x_2^\alpha)(z_1^\beta - x_2^\beta)}{R^3} + O\left(\frac{1}{R^4}\right); \\
&\frac{X_1^\alpha - X_2^\alpha}{|X_1 - X_2|^3} = \frac{R^\alpha}{R^3} + \frac{3R^\alpha R_\varepsilon (x_1^\varepsilon - x_2^\varepsilon)}{R^5} + \frac{x_1^\alpha - x_2^\alpha}{R^3} + O\left(\frac{1}{R^4}\right).
\end{aligned}
\right\}
\quad (306)
$$

Здесь и далее X_1^α, Z_1^α, (X_2^α) обозначают радиус-векторы первого (соответственно второго) тела в системе координат, начало которой помещено в центр масс постньютоновской системы, а x_1^α, z_1^α, (x_2^α) — радиусы-векторы тех же точек, но в системе координат, начало которой помещено в центр масс первого (второго) тела.

Вводя обозначения

$$\left.\begin{aligned}
&\Omega_{(1)}^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2M_1}\int \rho_1\rho_1' \frac{(x^\alpha - x'^\alpha)(x^\beta - x'^\beta)}{|x-x'|^3}\, dx\, dx';\\
&\Omega_{(2)}^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2M_2}\int \rho_2\rho_2' \frac{(x^\alpha - x'^\alpha)(x^\beta - x'^\beta)}{|x-x'|^3}\, dx\, dx';\\
&Q_{(1)}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2M_1}\int \rho_1 v^\alpha v^\beta\, dx; \quad Q = Q_\varepsilon^\varepsilon;\\
&Q_{(2)}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2M_2}\int \rho_2 v^\alpha v^\beta\, dx; \quad \Omega = \Omega_\varepsilon^\varepsilon;\\
&P_{(1)} = \frac{1}{M_1}\int p_1\, dx; \quad P_{(2)} = \frac{1}{M_2}\int p_2\, dx; \quad \Pi_{(2)} = \frac{1}{M_2}\int \rho_2 \Pi\, dx
\end{aligned}\right\} \qquad (307)$$

и учитывая тривиальные соотношения

$$\int \frac{\rho\rho'(x^\alpha - x'^\alpha)}{|x-x'|^3}\, dx\, dx' = 0; \qquad \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial V^\beta}{\partial x^\beta} + O(\varepsilon^5);$$

$$\frac{1}{M}\int \frac{\rho\rho'(x^\alpha - x'^\alpha)\, x^\beta}{|x-x'|^3}\, dx\, dx' = -\Omega^{\alpha\beta},$$

получаем ряд равенств, необходимых для дальнейших расчетов:

$$\begin{aligned}
&\int \rho_1 \partial^\alpha U\, dx = \frac{M_1 M_2}{R^2}\left\{n^\alpha\left[1 - 6\gamma\Omega_{(2)} + Q_{(2)} - 3\gamma\frac{M_2}{R}\right] - \right.\\
&\qquad \left. - 3\gamma n_\beta \Omega_{(1)}^{\alpha\beta}\right\} - 3\gamma\int \rho_1 \partial^\alpha \widetilde{\Phi}_2\, dx - \frac{1}{2}\int \rho_1 \partial^\alpha \widetilde{\Phi}_1\, dx;\\
&\int \rho_1 U \partial^\alpha U\, dx = \frac{M_1 M_2}{R^2}\left[2n^\alpha \Omega_{(1)} - n_\varepsilon \Omega_{(1)}^{\alpha\varepsilon} + n^\alpha \frac{M_2}{R}\right] + \\
&\qquad + \int \rho_1 \widetilde{U} \partial^\alpha \widetilde{U}\, dx;\\
&\int p_1 \partial^\alpha U\, dx = \int p_1 \partial^\alpha \widetilde{U}\, dx + \frac{M_1 M_2}{R^2} n^\alpha P_{(1)};\\
&\int \rho_1 v_\varepsilon v^\varepsilon \partial^\alpha U\, dx = \int \rho_1 v_\varepsilon v^\varepsilon \partial^\alpha \widetilde{U}\, dx + \frac{2M_1 M_2}{R^2} n^\alpha Q_{(1)};\\
&\int \rho_1 v^\alpha \frac{\partial U}{\partial t}\, dx = \int \rho_1 v^\alpha \frac{\partial \widetilde{V}^\beta}{\partial x^\beta}\, dx - \frac{M_1 M_2}{R^2} n_\beta V_{(1)}^\alpha V_{(2)}^\beta;\\
&\int \rho_1 v^\alpha v^\beta \partial_\beta U\, dx = \int \rho_1 v^\alpha v^\beta \partial_\beta \widetilde{U}\, dx + \frac{2M_1 M_2}{R^2} n_\beta Q_{(1)}^{\alpha\beta};
\end{aligned}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\int \rho_1 \frac{\partial V^\alpha}{\partial t}\, dx = -\int \rho_1 [\partial^\alpha \widetilde{\Phi}_4 + v^\alpha v_\beta \partial^\beta \widetilde{U} - \widetilde{U}\partial^\alpha \widetilde{U}]\, dx + \\
&+ \frac{M_1 M_2}{R^2}\left[-n^\alpha P_{(2)} + 2n^\alpha \Omega_{(1)} + n_\varepsilon \Omega^{\varepsilon\alpha}_{(2)} + 2n_\varepsilon Q^{\varepsilon\alpha}_{(2)} - n^\alpha \frac{M_1}{R}\right]; \\
&\int \rho_1 \frac{\partial W^\alpha}{\partial t}\, dx = \int \rho_1 [\partial^\alpha \widetilde{\Phi}_4 - \widetilde{U}^{\alpha\varepsilon}\partial_\varepsilon \widetilde{U} - \partial^\alpha \widetilde{A} + \partial^\alpha \widetilde{\Phi}_1 - \\
&- v^\alpha v^\beta \partial_\beta \widetilde{U}]\, dx + \frac{M_1 M_2}{R^2}\left\{n^\alpha\left[P_{(2)} - \Omega_{(2)} - 3n_\varepsilon n_\beta \Omega^{\varepsilon\beta}_{(2)} - \right.\right. \\
&\left.\left. - 2Q_{(2)} - 6n_\varepsilon n_\beta Q^{\varepsilon\beta}_{(2)} - \frac{M_1}{R}\right] - n_\varepsilon \Omega^{\alpha\varepsilon}_{(2)} - 2n_\varepsilon Q^{\alpha\varepsilon}_{(2)} + 2n_\varepsilon \Omega^{\alpha\varepsilon}_{(1)}\right\}; \\
&\int \rho_1 v^\beta \partial_\beta V^\alpha\, dx = \int \rho_1 v^\beta \partial_\beta \widetilde{V}^\alpha\, dx - \frac{M_1 M_2}{R^2} n_\beta V^\beta_{(1)} V^\alpha_{(2)}; \\
&\int \rho_1 v^\beta \partial^\alpha V_\beta\, dx = -\frac{M_1 M_2}{R^2} n^\alpha V^\beta_{(1)} V_{(2)\beta}; \\
&\int \rho_1 \frac{\partial U}{\partial t}\, dx = \int \rho_1 \frac{\partial \widetilde{V}^\beta}{\partial x^\beta}\, dx - \frac{M_1 M_2}{R^2} n_\beta V^\beta_{(2)}; \\
&\int \rho_1 \frac{\partial U^{\alpha\beta}}{\partial t}\, dx = \int \rho_1 v^\varepsilon \partial_\varepsilon \widetilde{U}^{\alpha\beta}\, dx - \\
&- \frac{M_1 M_2}{R^2}[n^\alpha V^\beta_{(2)} + n^\beta V^\alpha_{(2)} + 3n^\alpha n^\beta n_\varepsilon V^\varepsilon_{(2)}]; \\
&\int \rho_1 v^\beta \partial_\beta U\, dx = \int \rho_1 v^\beta \partial_\beta \widetilde{U}\, dx + \frac{M_1 M_2}{R^2} n_\beta V^\beta_{(1)}; \\
&\int \rho_1 v^\beta \partial^\alpha U\, dx = \int \rho_1 v^\beta \partial^\alpha \widetilde{U}\, dx + \frac{M_1 M_2}{R^2} n^\alpha V^\beta_{(1)}; \\
&\int \rho_1 \partial^\alpha \Phi\, dx = \int \rho_1 \partial^\alpha \widetilde{\Phi}\, dx + \frac{M_1 M_2}{R^2}\left\{n^\alpha\left[(1+\xi_3)\Pi_{(2)} + \right.\right. \\
&+ 2(3\gamma + 1 - 2\beta + \xi_2)\Omega_{(2)} + (3\gamma + 1 - 2\beta + \xi_2)\frac{M_1}{R} - \\
&- (2\gamma + 2 + \alpha_3 + \xi_1) Q_{(2)} - 3\xi_1 n_\beta n_\delta Q^{\beta\delta}_{(2)} + 3(\gamma + \xi_4) P_{(2)} - \\
&- \frac{3}{2}\alpha_2 (n_\beta w^\beta)^2 + \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) w_\beta w^\beta - \\
&\left. - \frac{1}{2}(2\alpha_3 - \alpha_1) w_\beta V^\beta_{(2)}\right] + (3\gamma + 1 - 2\beta + \xi_2) n_\beta \Omega^{\alpha\beta}_{(1)} - \\
&\left. - 2\xi_1 n_\beta Q^{\alpha\beta}_{(2)} - \alpha_2 w^\alpha n_\beta w^\beta\right\}; \\
&\int \rho_1 \partial^\alpha \Phi_w\, dx = \int \rho_1 [2\partial^\alpha \widetilde{\Phi}_2 - \widetilde{U}^{\alpha\beta}\partial_\beta \widetilde{U}]\, dx + \\
&+ \frac{M_1 M_2}{R^2}\left\{5n_\beta \Omega^{\alpha\beta}_{(1)} + n^\alpha\left[3n_\beta n_\delta \Omega^{\beta\delta}_{(1)} + \frac{M_1}{R} - 5\Omega_{(1)} - 2\Omega_{(2)}\right]\right\}.
\end{aligned}
\right\}
\quad (308)
$$

Из выражения (303) для собственных гравитационных потенциалов легко установить следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned}
&\int \rho_1 [\Pi \partial_\beta \widetilde{U} + \partial_\beta \widetilde{\Phi}_3]\, dx = 0; \quad \int \rho_1 [\widetilde{U} \partial_\beta \widetilde{U} + \partial_\beta \widetilde{\Phi}_2]\, dx = 0;\\
&\int [p_1 \partial_\beta \widetilde{U} + \rho_1 \partial_\beta \widetilde{\Phi}_4]\, dx = 0; \quad \int \rho_1 [v_\alpha v^\alpha \partial_\beta \widetilde{U} - \partial_\beta \widetilde{\Phi}_1]\, dx = 0;\\
&\int \rho_1 \left[v^\alpha \frac{\partial \widetilde{V}^\beta}{\partial x^\beta} + v^\beta \partial_\beta \widetilde{V}^\alpha \right] dx = 0;\\
&\int \rho_1 \left[\frac{\partial \widetilde{V}^\beta}{\partial x^\beta} - v^\beta \partial_\beta \widetilde{U} \right] dx = 0;\\
&\int \rho_1 \, [v^\beta \partial^\alpha \widetilde{U} - \partial^\alpha \widetilde{V}^\beta]\, dx = 0;\\
&\int \rho_1 \partial^\alpha \widetilde{U}_{\beta\delta}\, dx = 0; \quad M_1 V^\alpha_{(1)} + M_2 V^\alpha_{(2)} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{309}$$

Подставляя разложения (308) в уравнения движения первого тела и учитывая соотношения (309), получаем

$$M_1 a^\alpha_{(1)} = -(M_1 M_2 / R^2)\, f^\alpha - \Phi^\alpha. \tag{310}$$

Для вектора f^α имеем

$$\left.\begin{aligned}
f^\alpha = {} & n^\alpha [1 + (\gamma - 2) P_{(1)} + (3\xi_4 - \xi_1 + \alpha_2 - \alpha_1/2 + \gamma - 1) P_{(2)} +\\
& + (1 + \xi_3) \Pi_{(2)} - 2\gamma Q_{(1)} - (2\gamma + \alpha_2 + \alpha_3 + 2) Q_{(2)} -\\
& - (2\beta + 2\gamma + 1 + \xi_w - \xi_2 + \alpha_1/2)(M_1/R) - 2(\beta + \gamma)(M_2/R) +\\
& + (\alpha_1 - \alpha_2 + \xi_1 + 5\xi_w + 3 - 4\beta)\, \Omega_{(1)} + (3/2 - \alpha_2/2 + \xi_1/2 -\\
& - 4\beta + 2\xi_2 + 2\xi_w)\, \Omega_{(2)} - (3/2)(1 + \alpha_2 - \xi_1)\, n_\beta n_\delta \Omega^{\beta\delta}_{(2)} -\\
& - 3\xi_w n_\beta n_\delta \Omega^{\beta\delta}_{(1)} - 3(1 + \alpha_2)\, n_\beta n_\delta Q^{\beta\delta}_{(2)} +\\
& + (4\gamma + 4 + \alpha_1)\, V^\beta_{(1)} V_{(2)\beta}/2 + (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)\, w_\beta w^\beta/2 -\\
& - (3/2)\, \alpha_2 (n_\beta w^\beta)^2 - (2\alpha_3 + 2\alpha_2 - \alpha_1)\, w_\beta V^\beta_{(2)}/2 -\\
& - 3\alpha_2 n_\beta w^\beta n_\delta V^\delta_{(2)} + \alpha_1 w_\beta V^\beta_{(1)}/2] + 4(\gamma + 1)\, n_\beta Q^{\alpha\beta}_{(1)} +\\
& + (4\gamma + 2 + \alpha_1 - 2\alpha_2)\, n_\beta Q^{\alpha\beta}_{(2)} + (2\gamma + 2 + \alpha_2 - \xi_1 +\\
& + \xi_2 - 5\xi_w)\, n_\beta \Omega^{\alpha\beta}_{(1)} + (2\gamma + 1 + \alpha_1/2 - \alpha_2 + \xi_1)\, n_\beta \Omega^{\alpha\beta}_{(2)} -\\
& - \alpha_2 V^\alpha_{(2)} n_\beta w^\beta - \alpha_2 w^\alpha n_\beta w^\beta - (8\gamma + 6 + \alpha_1)\, [V^\alpha_{(1)} V^\beta_{(2)} +\\
& + V^\alpha_{(2)} V^\beta_{(1)}]\, n_\beta/4 + (\alpha_1 - 2\alpha_2)\, w^\alpha n_\beta V^\beta_{(2)}/2 -\\
& - \alpha_1 w^\alpha n_\beta V^\beta_{(1)}/2 + O(\varepsilon^4).
\end{aligned}\right\} \tag{311}$$

Вектор Φ^α, характеризующий «внутреннюю» силу, имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}\Phi^\alpha = \int \rho_1\,dx \Big\{ & \frac{v^\alpha}{\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho_1}\partial^\alpha p_1\left(\Pi - \frac{v_\varepsilon v^\varepsilon}{2} + \frac{p_1}{\rho_1}\right) + \\ & + \left(1 + \frac{\alpha_1}{2}\right) v^\beta \partial_\beta \widetilde{V}^\alpha + \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1 - \xi_1 - 1 + \\ & + 2\xi_2 - 4\xi_w)\,\partial^\alpha \widetilde{\Phi}_2 + \left(3\xi_4 - \xi_1 + \alpha_2 - \frac{\alpha_1}{2} + 1\right)\partial^\alpha \widetilde{\Phi}_4 + \\ & + \frac{1}{2}(2 + \alpha_2 + \alpha_3)\,\partial^\alpha \widetilde{\Phi}_1 + (1 + \xi_3)\,\partial^\alpha \widetilde{\Phi}_3 - \frac{\alpha_1}{2} v^\alpha v^\beta \partial_\beta \widetilde{U} - \\ & - \frac{1}{2}(1 + \alpha_2)\,\partial^\alpha \widetilde{A} - \frac{1}{2}(1 + \alpha_2 - \xi_1 - 2\xi_w)\,\widetilde{U}^{\alpha\beta}\partial_\beta \widetilde{U} + \\ & + \alpha_3 w_\beta v^\beta \partial^\alpha \widetilde{U} - (\alpha_1 - \alpha_2)\, w^\alpha v^\beta \partial_\beta \widetilde{U} + \alpha_2 w_\beta v_\delta \partial^\delta \widetilde{U}^{\alpha\beta}\Big\}. \end{aligned}\right\} \quad (312)$$

Выражение, стоящее под интегралом (312), представляет собой силу, действующую на элемент объема протяженного тела со стороны других элементов этого же тела. Для теорий гравитации, обладающих законами сохранения энергии — импульса вещества и гравитационного поля, данный вектор с учетом уравнения внутреннего движения тела должен быть равен нулю, так как только в этом случае импульс изолированного протяженного тела, т. е. при $\rho_2 = 0$, $M_2 = 0$, будет сохраняться. Поскольку наш расчет применим только к таким теориям гравитации, следует считать, что в силу уравнений внутреннего движения вещества протяженного тела вектор $\Phi^\alpha = 0$, поэтому уравнения движения центра масс протяженного тела принимают вид

$$M_1 a^\alpha_{(1)} = -\frac{M_1 M_2}{R^2} f^\alpha. \qquad (313)$$

Ускорение центра масс протяженного тела, как следует из выражений (311) и (313), имеет вид:

$$\begin{aligned} a^\alpha_{(1)} = -\frac{M_2}{R^2}\Big\{ n^\alpha \Big[& 1 - 2\gamma Q_{(1)} - (2\gamma + \alpha_2 + \alpha_3 + 2)\, Q_{(2)} + (\gamma - 2)\, P_{(1)} + \\ & + (1 + \xi_3)\,\Pi_{(2)} + \left(3\xi_4 - \xi_1 + \alpha_2 - \frac{\alpha_1}{2} + \gamma - 1\right) P_{(2)} + \\ & + (\alpha_1 - \alpha_2 + \xi_1 + 5\xi_w + 3 - 4\beta)\,\Omega_{(1)} - 3\xi_w n_\beta n_\delta \Omega^{\beta\delta}_{(1)} - \\ & - \left(2\beta + 2\gamma + 1 + \xi_w - \xi_2 + \frac{\alpha_1}{2}\right)\frac{M_1}{R} - 2(\beta + \gamma)\frac{M_2}{R} + \\ & + \left(\frac{3}{2} - \frac{\alpha_2}{2} + \frac{\xi_1}{2} - 4\beta + 2\xi_2 + 2\xi_w\right)\Omega_{(2)} - \\ & - \frac{3}{2}(1 + \alpha_2 - \xi_1)\, n_\beta n_\delta \Omega^{\beta\delta}_{(2)} - \frac{3}{2}\alpha_2 (n_\beta w^\beta)^2 - 3(1 + \alpha_2)\, n_\beta n_\delta Q^{\beta\delta}_{(2)} + \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}(4\gamma+4+\alpha_1)V^{\beta}_{(1)}V_{(2)\beta}+\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)w_\beta w^\beta-$$
$$-\frac{1}{2}(2\alpha_3+2\alpha_2-\alpha_1)w_\beta V^{\beta}_{(2)}-3\alpha_2 n_\beta w^\beta n_\delta V^{\delta}_{(2)}+\frac{1}{2}\alpha_1 w_\beta V^{\beta}_{(1)}\Big]+$$
$$+4(\gamma+1)n_\beta Q^{\alpha\beta}_{(1)}+(4\gamma+2+\alpha_1-2\alpha_2)n_\beta Q^{\alpha\beta}_{(2)}-$$
$$-\frac{1}{4}(8\gamma+6+\alpha_1)[V^{\alpha}_{(1)}V^{\beta}_{(2)}+V^{\alpha}_{(2)}V^{\beta}_{(1)}]n_\beta+$$
$$+\left(2\gamma+1+\frac{\alpha_1}{2}-\alpha_2+\xi_1\right)n_\beta\Omega^{\alpha\beta}_{(2)}-\alpha_2 V^{\alpha}_{(2)}n_\beta w^\beta+$$
$$+(2\gamma+2+\alpha_2-\xi_1+\xi_2-5\xi_w)n_\beta\Omega^{\alpha\beta}_{(1)}-\alpha_2 w^\alpha n_\beta w^\beta+$$
$$+\frac{1}{2}(\alpha_1-2\alpha_2)w^\alpha n_\beta V^{\beta}_{(2)}-\frac{1}{2}\alpha_1 w^\alpha n_\beta V^{\beta}_{(1)}\Big\}+O(\varepsilon^6)/R. \quad (314)$$

Рассмотрим теперь структуру вектора f^α (311). В общем случае произвольного соотношения между массами тел скоростью второго тела $V^{\alpha}_{(2)}=-(M_1/M_2)V^{\alpha}_{(1)}$ пренебрегать нельзя. Тогда из-за наличия в выражении (311) членов вида: $M_1^2M_2/R^3$, $M_1M_2^2/R^3$, $n^\alpha V^{\beta}_{(1)}V_{(2)\beta}$, $[V^{\alpha}_{(1)}V^{\beta}_{(2)}+V^{\alpha}_{(2)}V^{\beta}_{(1)}]n_\beta$ разделение характеристик первого и второго тел произвести нельзя, а поэтому и введение тензора пассивной гравитационной массы в общем случае не представляется возможным.

Следует отметить, что Вилл предлагает уравнения движения центра масс протяженного тела (313) записывать в виде

$$M_1 a^{\alpha}_{(1)}=m_p^{\alpha\beta}\partial_\beta\widetilde{U}+a^{\alpha}_N, \quad (315)$$

где тензор $m_p^{\alpha\beta}$, зависящий от характеристик первого тела, он называет тензором пассивной гравитационной массы и определяет его выражением (219). Все оставшиеся члены в правой части уравнений движения он называет N-тельными ускорениями и включает в a^{α}_N. Однако такое разделение является произвольным, поскольку a^{α}_N, как легко убедиться, содержит члены такой же структуры, как и первый член в правой части (315):

$$a^{\alpha}_N=L^{\alpha\beta}_{(1)}\partial_\beta\widetilde{U}+q^\alpha,$$

где тензор $L^{\alpha\beta}_{(1)}$ зависит только от характеристик первого тела (в частности, от квадрата его скорости) и поэтому может быть объединен в выражении (315) с тензором $m_p^{\alpha\beta}$.

Таким образом, разделение выражения (315), предлагаемое Виллом, ничем не оправдано, кроме как желанием любой ценой добиться формального равенства пассивной гравитационной и инертной масс протяженного тела в ОТО. Но в теории Эйнштейна отсутствуют законы сохранения вещества и гравитационного поля, вместе взятых. Частным следствием этого, как показано во введении, является утверждение, что инертная масса, определенная в ОТО, не имеет физического смысла. Поэтому в теории Эйнштейна и сравнивать ее с пассивной гравитационной массой физически бессмысленно. Однако в метрических теориях гравитации, обладающих законами сохранения вещества и гравитационного поля, вместе взятых, понятие инертной массы имеет строгий физический смысл $m = \int dV\, [t^{00}_M + t^{00}_g]$. Из данного определения следует, что инертная масса тела зависит не только от его внутренних характеристик, но и от квадрата скорости. Следует ожидать, что и пассивная гравитационная масса протяженного тела будет зависеть не только от внутренней структуры этого тела, но и от его скорости. Таким образом, в метрических теориях гравитации, обладающих законами сохранения вещества и гравитационного поля, вместе взятых, сравнение пассивной и активной гравитационных масс протяженного тела с его инертной массой представляет несомненный интерес.

Как же определить в этом случае пассивную гравитационную массу? Естественно, но несколько формально, тензор пассивной гравитационной массы протяженного тела можно определить непосредственно из уравнений движения, если в постньютоновском приближении их возможно представить в квазиньютоновском виде:

$$M_1 a^{\alpha}_{(1)} = m_p^{\alpha\beta} \partial_\beta \mathcal{U}, \qquad (316)$$

причем тензор $p^{\alpha\beta}$ должен зависеть только от характеристик первого тела, а обобщенный ньютоновский потенциал $\mathcal{U}$ — только от характеристик второго тела и расстояния между телами. Если же данные условия не выполняются, как это и имеет место в общем случае произвольной постньютоновской системы, то понятие тензора пассивной гравитационной массы становится беспредметным. Другого более разумного определения тензора пассивной гравитационной массы указать нельзя.

Таким образом, тензор пассивной гравитационной массы протяженного тела можно ввести лишь для узкого класса двойных систем. Однако для ответа на поставленный нами вопрос о характере движения центра масс протяженного тела привлекать понятие тензора пассивной гравитационной массы нет никакой необходимости. Единственное, что нам следует сделать,— это сравнить движение центра масс протяженного тела с некоторой идеализированной картиной: с движением пробного (точечного тела) в римановом пространстве — времени, метрика которого формально эквивалентна метрике, создаваемой двумя движущимися протяженными телами.

Тогда совпадение выражений для ускорения центра масс протяженного тела $a^{\alpha}_{(1)}$ с выражением для ускорения точечного тела a^{α}_{0} будет означать, что при одинаковых начальных условиях центр масс протяженного тела и точечное тело будут двигаться по одной и той же траектории и иметь один и тот же закон движения. Поскольку точечное тело по определению движется по геодезической риманова пространства — времени, то в этом случае и центр масс протяженного тела будет двигаться по геодезической. При отличии выражений для $a^{\alpha}_{(1)}$ и a^{α}_{0} на постньютоновские поправки центр масс протяженного тела в общем случае не будет двигаться по геодезической риманова пространства — времени.

Такой подход, кроме всего прочего, позволяет естественным образом произвести учет вклада собственного гравитационного поля протяженного тела в пространственно-временную кривизну.

Уравнения геодезического движения. Рассмотрим риманово пространство — время, метрика которого совпадает с метрикой двух движущихся протяженных тел, рассматриваемых ранее. Изучим движение точечного тела в некоторой окрестности точки, соответствующей центру масс первого тела. Выражение для ускорения точечного тела a^{α}_{0} можно получить двумя путями: или воспользоваться уравнениями геодезических риманова пространства — времени

$$du^i/ds + \Gamma^i_{nm}u^n u^m = 0, \tag{317}$$

или проделать вычисления, аналогичные вычислению ускорения центра масс протяженного тела. В последнем случае необходимо учесть, что все величины, характеризующие внутреннюю структуру и собственное гравитационное поле точечного тела, пренебрежимо малы. В обоих случаях придем к одному и тому же результату.

Запишем уравнение геодезических с постньютоновской степенью точности. При $i = \alpha$ имеем

$$du^{\alpha}/ds + \Gamma^{\alpha}_{00}u^0u^0 + 2\Gamma^{\alpha}_{0\beta}u^0u^{\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}u^{\delta}u^{\beta} = O(\varepsilon^6).$$

Используя выражения (297) и (299), приведем эти уравнения к виду

$$\frac{d}{dt}\left[V^{\alpha}_{(0)}\left(1 + U - \frac{1}{2}V^{\beta}_{(0)}V_{(0)\beta}\right)\right] + \partial^{\alpha}U\left[1 - \frac{2\gamma+1}{2}V^{\beta}_{(0)}V_{(0)\beta} -\right.$$
$$\left. - (2\beta + 2\gamma - 1)U\right] + \frac{\partial U}{\partial t}\left[2\gamma V^{\alpha}_{(0)} - \frac{1}{2}(\alpha_1 - 2\alpha_2)w^{\alpha}\right] -$$
$$- \xi_w\partial^{\alpha}\Phi_w + \partial^{\alpha}\Phi + \frac{1}{2}(4\gamma + 3 + \alpha_1 - \alpha_2 + \xi_1)\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial t} +$$
$$+ \frac{1}{2}(1 + \alpha_2 - \xi_1)\frac{\partial W^{\alpha}}{\partial t} + \frac{1}{2}(4\gamma + 4 + \alpha_1)V^{\beta}_{(0)}[\partial_{\beta}V^{\alpha} - \partial^{\alpha}V_{\beta}] +$$

$$+2\gamma V^{\alpha}_{(0)}V^{\beta}_{(0)}\partial_{\beta}U+\alpha_2 w_{\beta}\frac{\partial U^{\alpha\beta}}{\partial t}-$$
$$-\frac{\alpha_1}{2}V^{\beta}_{(0)}\left[w^{\alpha}\partial_{\beta}U-w_{\beta}\partial^{\alpha}U\right]=O\left(\varepsilon^6\right), \qquad (318)$$

где $V^{\alpha}_{(0)}=dx^{\alpha}/dt$ — компоненты скорости точечного тела.

Используя ньютоновские уравнения движения точечного тела

$$dV^{\alpha}_{(0)}/dt+\partial^{\alpha}U=O\left(\varepsilon^4\right),$$

выражение

$$\frac{d}{dt}\left[V^{\alpha}_{(0)}\left(1+U-\frac{1}{2}V^{0}_{(\beta)}V_{(0)\beta}\right)\right]$$

преобразуем к виду

$$\frac{d}{dt}\left[V^{\alpha}_{(0)}\left(1+U-\frac{1}{2}V^{\beta}_{(0)}V_{(0)\beta}\right)\right]=a^{\alpha}_{0}-U\partial^{\alpha}U+$$
$$+V^{\alpha}_{(0)}\left[\frac{\partial U}{\partial t}+2V^{\beta}_{(0)}\partial_{\beta}U\right]+\frac{1}{2}V^{\beta}_{(0)}V_{(0)\beta}\partial^{\alpha}U+O\left(\varepsilon^6\right). \qquad (319)$$

Подставляя соотношение (319) в уравнение движения (318), получаем следующее выражение для ускорения a^{α}_{0} точечного тела:

$$a^{\alpha}_{0}=-\partial^{\alpha}U\left[1-\gamma V^{\beta}_{(0)}V_{(0)\beta}-2(\beta+\gamma)U\right]+\xi_w\partial^{\alpha}\Phi_w-$$
$$-\frac{\partial U}{\partial t}\left[(2\gamma+1)V^{\alpha}_{(0)}-\frac{1}{2}(\alpha_1-2\alpha_2)w^{\alpha}\right]-2(\gamma+1)V^{\alpha}_{(0)}V^{\beta}_{(0)}\partial_{\beta}U-$$
$$-\partial^{\alpha}\Phi-\frac{1}{2}(4\gamma+3+\alpha_1-\alpha_2+\xi_1)\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial t}-\frac{1}{2}(1+\alpha_2-\xi_1)\frac{\partial W^{\alpha}}{\partial t}-$$
$$-\alpha_2 w_{\beta}\frac{\partial U^{\alpha\beta}}{\partial t}-\frac{1}{2}(4\gamma+4+\alpha_1)V^{\beta}_{(0)}\left[\partial_{\beta}V^{\alpha}-\partial^{\alpha}V_{\beta}\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\alpha_1 V^{\beta}_{(0)}\left[w^{\alpha}\partial_{\beta}U-w_{\beta}\partial^{\alpha}U\right]+O\left(\varepsilon^6\right). \qquad (320)$$

Изучим движение точечного тела в окрестности точки, соответствующей центру масс протяженного тела. Для этого разложим все потенциалы, входящие в выражение (320), по степеням $1/R$ с точностью $\sim O\left(1/R^4\right)$. В результате получим:

$$a^{\alpha}_{0}=\tilde{a}^{\alpha}_{0}+\left(M_2/R^2\right)\Big\{n^{\alpha}\Big[-1+\gamma V^{\beta}_{(0)}V_{(0)\beta}+(2\beta+\alpha_2/2-\xi_1/2-$$
$$-3/2-\alpha_1/2-2\xi_w)\tilde{U}+(2\gamma+\alpha_3+\alpha_2+2)Q_{(2)}+$$
$$+\left(2\beta+2\gamma+1+\frac{\alpha_1}{2}+\xi_w-\xi_2\right)\frac{M_1}{R}+2(\beta+\gamma)(M_2/R)+$$
$$+(4\beta-2\xi_2-2\xi_w-3/2+\alpha_2/2-\xi_1/2)\Omega_{(2)}-(1+\xi_3)\Pi_{(2)}+$$
$$+(1+\alpha_1/2-\alpha_2+\xi_1-\gamma-3\xi_4)P_{(2)}+3(1+\alpha_2)n_{\beta}n_{\delta}Q^{\beta\delta}_{(2)}+$$

$$+\frac{3}{2}(1+\alpha_2-\xi_1)\,n_\beta n_\delta\Omega^{\beta\delta}_{(2)}-\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)\,w_\beta w^\beta+$$
$$+\frac{3}{2}\alpha_2(n_\beta w^\beta)^2+(\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1/2)\,V^\beta_{(2)}w_\beta-(2\gamma+2+\alpha_1/2)\,V^\beta_{(2)}V_{(0)\beta}+$$
$$+3\alpha_2 n_\beta V^\beta_{(2)}n_\delta w^\delta-\frac{1}{2}\alpha_1 w_\beta V^\beta_{(0)}+\frac{\xi_w}{2}\int\frac{\rho_1'\,dx'}{|x-x'|^3}(3x'_\beta x'^\beta-2x'_\beta x^\beta-$$
$$-x_\beta x^\beta+3(n_\beta x'^\beta)^2-9(n_\beta x^\beta)^2+6n_\beta n_\delta x'^\beta x^\delta)\Big]+$$
$$+(2\alpha_2-2-\alpha_1-4\gamma)\,n_\beta Q^{\alpha\beta}_{(2)}+\left(\alpha_2-1-\xi_1-\frac{\alpha_1}{2}-2\gamma\right)n_\beta\Omega^{\alpha\beta}_{(2)}-$$
$$-2(\gamma+1)V^\alpha_{(0)}n_\beta V^\beta_{(0)}+n_\beta V^\beta_{(2)}\left[(2\gamma+1)\,V^\alpha_{(0)}-\frac{1}{2}(\alpha_1-2\alpha_2)\,w^\alpha\right]+$$
$$+\left(2\gamma+2+\frac{\alpha_1}{2}\right)V^\alpha_{(2)}n_\beta V^\beta_{(0)}+\frac{\alpha_1}{2}w^\alpha n_\beta V^\beta_{(0)}+\alpha_2 V^\alpha_{(2)}n_\beta w^\beta+$$
$$+\alpha_2 w^\alpha n_\beta w^\beta-\left(2\beta-\xi_2+2\xi_w-\frac{3}{2}-\frac{\alpha_2}{2}+\frac{\xi_1}{2}\right)n_\beta\widetilde{U}^{\alpha\beta}-$$
$$-(1-2\gamma-4\beta+\xi_2)\,n_\beta x^\beta\partial^\alpha\widetilde{U}+\frac{3}{2}\xi_w n_\beta\int\frac{\rho_1'(x^\alpha-x'^\alpha)(x^\beta-x'^\beta)}{|x-x'|^5}\times$$
$$\times[x'_\delta x'^\delta-x_\delta x^\delta+3(n_\delta x'^\delta)^2-3(n_\delta x^\delta)^2]\,dx'+E^{\alpha\beta}x_\beta+$$
$$+\xi_w n_\beta\int\frac{\rho_1'(2x^\alpha x'^\beta-x'^\alpha x^\beta-x^\alpha x^\beta)}{|x-x'|^3}\,dx'+$$
$$+3\xi_w n_\beta\int\frac{\rho_1'(x^\alpha-x'^\alpha)(x_\delta-x'_\delta)(x^\delta x'^\beta-x'^\delta x^\beta)}{|x-x'|^5}\,dx'\Big\}+$$
$$+\frac{M_2}{R}\{(4\beta+2\gamma-1-3\xi_w-\xi_2)\,\partial^\alpha\widetilde{U}-\xi_w n_\beta n_\delta\partial^\beta\widetilde{U}^{\alpha\delta}-\xi_w n^\alpha n_\beta\partial^\beta\widetilde{U}\}-$$
$$-\partial^\alpha\widetilde{U}+\partial^\alpha O(\varepsilon^6),\qquad(321)$$

где ускорение $\widetilde{a}^\alpha_0$ целиком обусловлено гравитационным полем, создаваемым первым телом:

$$\widetilde{a}^\alpha_0=\partial^\alpha\widetilde{U}\,[\gamma V^\beta_{(0)}V_{(0)\beta}+2(\beta+\gamma)\,\widetilde{U}]+3\gamma\partial^\alpha\widetilde{\Phi}_2-\partial^\alpha\widetilde{\Phi}+$$
$$+\frac{1}{2}(1+\alpha_2-\xi_1)\,\partial^\alpha\widetilde{A}+\xi_w\partial^\alpha\widetilde{\Phi}_w+\frac{1}{2}(\xi_1-\alpha_2)\,\partial^\alpha\widetilde{\Phi}_1+$$
$$+\frac{1}{2}(4\gamma+2+\alpha_1-2\alpha_2+2\xi_1)\,\partial^\alpha\widetilde{\Phi}_4-2(\gamma+1)\,V^\alpha_{(0)}V^\beta_{(0)}\partial_\beta\widetilde{U}-$$
$$-\frac{1}{2}(4\gamma+3+\alpha_1-\alpha_2+\xi_1)\int\frac{\rho_1'\partial'^\alpha\widetilde{U}\,dx'}{|x-x'|}-$$
$$-\frac{\partial\widetilde{U}}{\partial t}\left[(2\gamma+1)\,V^\alpha_{(0)}-\frac{1}{2}(\alpha_1-2\alpha_2)\,w^\alpha\right]+\frac{\alpha_1}{2}V^\beta_{(0)}[w^\alpha\partial_\beta\widetilde{U}-w_\beta\partial^\alpha\widetilde{U}]-$$

$$-\alpha_2 w_\beta \frac{\partial \widetilde{U}^{\alpha\beta}}{\partial t} - \frac{1}{2}(4\gamma + 4 + \alpha_1) V^\beta_{(0)} [\partial_\beta \widetilde{V}^\alpha - \partial^\alpha \widetilde{V}_\beta] -$$

$$-\frac{1}{2}(4\gamma + 4 + \alpha_1) \int \frac{\rho_1' v'^\alpha v'^\beta (x_\beta - x_\beta')}{|x - x'|^3} dx' +$$

$$+\frac{1}{2}(1 + \alpha_2 - \xi_1) \int \frac{\rho_1' \rho_1'' (x^\alpha - x'^\alpha)(x_\beta' - x_\beta'')(x^\beta - x'^\beta)}{|x - x'|^3 |x' - x''|^3} dx' dx'', \qquad (322)$$

причем вид тензора $E^{\alpha\beta} \sim O(\varepsilon^2)/L$ для дальнейшего несуществен. Пусть центр масс протяженного тела и точечное тело в некоторый начальный момент времени находятся в одной и той же точке пространства и имеют одинаковые скорости. Геодезическую риманова пространства — времени, по которой движется это точечное тело, назовем опорной геодезической. Сравним теперь значения ускорений центра масс протяженного тела (314) и точечного тела (321) в начальный момент времени. Для этого в выражении (321) мы должны положить $V^\alpha_{(0)} = V^\alpha_{(1)}$; $x^\alpha = 0$. Тогда из определения центра масс первого тела следует, что $\int \rho_1' x'^\alpha \, dx' = 0$, а поэтому и $\partial^\alpha \widetilde{U} = 0$ при $x^\alpha = 0$.

В этом случае из выражений (314) и (321) для разности ускорений точечного тела и центра масс протяженного тела имеем:

$$\delta a^\alpha = a^\alpha_0 - a^\alpha_{(1)} = \frac{M_2}{R^2} \Big\{ n^\alpha \Big[\gamma (V^\beta_{(1)} V_{(1)\beta} - 2Q_{(1)}) + (\gamma - 2) P_{(1)} +$$

$$+ (\alpha_1 - \alpha_2 + \xi_1 + 5\xi_w + 3 - 4\beta)\, \Omega_{(1)} - 3\xi_w n_\beta n_\delta \Omega^{\beta\delta}_{(1)} +$$

$$+ \frac{1}{2}(4\beta + \alpha_2 - \xi_1 - 3 - \alpha_1 - 4\xi_w) \widetilde{U} +$$

$$+ \frac{3}{2}\xi_w \int \frac{\rho_1' \, dx'}{|x'|^3} ((n_\beta x'^\beta)^2 + x_\beta' x'^\beta) \Big] + 2(\gamma + 1) [2Q^{\alpha\beta}_{(1)} - V^\alpha_{(1)} V^\beta_{(1)}] n_\beta +$$

$$+ (2\gamma + 2 + \alpha_2 - \xi_1 + \xi_2 - 5\xi_w) n_\beta \Omega^{\alpha\beta}_{(1)} -$$

$$- \left(2\beta - \xi_2 + \frac{7}{2}\xi_w - \frac{3}{2} - \frac{\alpha_2}{2} + \frac{1}{2}\xi_1\right) n_\beta \widetilde{U}^{\alpha\beta} +$$

$$+ \frac{9}{2}\xi_w n_\beta \int \frac{\rho_1' x'^\alpha x'^\beta (n_\delta x'^\delta)^2 \, dx'}{|x'|^5} \Big\} - \xi_w \frac{M_2}{R} n_\beta n_\delta \partial^\delta \widetilde{U}^{\alpha\beta} + 3\gamma \partial^\alpha \widetilde{\Phi}_2 -$$

$$- \partial^\alpha \widetilde{\Phi} + \frac{1}{2}(1 + \alpha_2 - \xi_1) \partial^\alpha \widetilde{A} + \xi_w \partial^\alpha \widetilde{\Phi}_w + \frac{1}{2}(\xi_1 - \alpha_2) \partial^\alpha \widetilde{\Phi}_1 +$$

$$+ \frac{1}{2}(4\gamma + 2 + \alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\xi_1) \partial^\alpha \widetilde{\Phi}_4 -$$

$$- \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial t} \Big[(2\gamma + 1) V^\alpha_{(1)} - \frac{1}{2}(\alpha_1 - 2\alpha_2) w^\alpha \Big] -$$

$$- \frac{1}{4}(4\gamma + 3 + \alpha_1 - \alpha_2 + \xi_1) \int \frac{\rho_1' \partial'^\alpha \widetilde{U}}{|x'|} dx' - \alpha_2 w_\beta \frac{\partial \widetilde{U}^{\alpha\beta}}{\partial t} -$$

$$-\frac{1}{2}(4\gamma+4+\alpha_1)V^{\beta}_{(1)}[\partial_\beta\widetilde{V}^\alpha-\partial^\alpha\widetilde{V}_\beta]+$$
$$+\frac{1}{2}(4\gamma+4+\alpha_1)\int\frac{\rho_1'v'^\alpha v'^\beta x_\beta'\,dx'}{|x'|^3}+\frac{1}{2}(1+\alpha_2-\xi_1)\times$$
$$\times\int\frac{\rho_1'\rho_1''x'^\alpha x'^\beta(x_\beta'-x_\beta'')}{|x'|^3\,|x'-x''|^3}\,dx'\,dx''+\frac{O(\varepsilon^6)}{R}. \qquad (323)$$

Весьма примечательно, что при вычитании ускорений $a^\alpha_{(0)}$ и $a^\alpha_{(1)}$ все члены, характеризующие внутреннюю структуру второго тела ($P_{(2)}$, $\Omega^{\alpha\beta}_{(2)}$, $\Pi_{(2)}$, $Q^{\alpha\beta}_{(2)}$), исчезли.

Нас интересует вопрос, как движется центр масс произвольного протяженного тела: по геодезической риманова пространства — времени или нет. Поскольку различные протяженные тела отличаются друг от друга составом и распределением вещества, распределением давлений и скоростей внутреннего движения, формой и т. п., для разных протяженных тел величины $\Omega^{\alpha\beta}_{(1)}$, $Q^{\alpha\beta}_{(1)}$, $P_{(1)}$, $\widetilde{U}$, $\widetilde{U}^{\alpha\beta}$, $\widetilde{\Phi}$ различны и при переходе от одного тела к другому изменяются и по отношению друг к другу. Если мы решаем вопрос о движении центра масс в принципе для всей совокупности протяженных тел, то должны считать все данные величины независимыми в каждый момент времени. В этом состоит своеобразие общей постановки задачи о движении центра масс, так как соответствующим выбором протяженного тела (изменяя форму и распределение вещества так, что исчезнут одни и появятся другие мультипольные моменты масс, приводя тело во вращение, возбуждая в нем волны давлений и скоростей и т. п.) мы можем варьировать в широких пределах значения (307).

С учетом этого обстоятельства легко убедиться, что ни в одной метрической теории гравитации разность ускорений точечного тела и центра масс произвольного протяженного тела δa^α (323) не обращается в нуль. Следовательно, ни в одной метрической теории гравитации, обладающей законами сохранения энергии — импульса вещества и гравитационного поля, вместе взятых, центр масс произвольного протяженного тела в постньютоновском приближении не движется по геодезической риманова пространства — времени.

В связи с этим возникает вопрос — какой характер имеет движение центра масс протяженного тела относительно опорной геодезической риманова пространства — времени в среднем за достаточно большой промежуток времени. Однако для ответа на него нам потребуется тензорная теорема вириала.

Тензорная теорема вириала для протяженного тела, движущегося во внешнем гравитационном поле. Поскольку формулировка этой теоремы обычно в литературе приводится в не совсем корректной форме, остановимся здесь на ее выводе несколько подробнее.

Разложим движение каждого элемента объема первого тела на сумму двух движений: движения, обусловленного действием гравитационного поля второго тела, и движения, обусловленного действием со стороны других элементов первого тела (действие собственного гравитационного поля, влияние давления и т. д.). При этом будем предполагать, что изменения всех величин со временем, обусловленные действием внутренних сил, происходят достаточно быстро, так что характерное время τ, за которое эти изменения происходят,— малая величина по сравнению с периодом T обращения тела по орбите: $\tau \ll T$.

Для скорости движения элемента объема имеем

$$v_1^\alpha = \tilde{v}^\alpha + \tilde{\tilde{v}}^\alpha, \tag{324}$$

где $\tilde{v}^\alpha$ и $\tilde{\tilde{v}}^\alpha$ — скорости элемента объема первого тела, обусловленные действием внутренних и внешних сил соответственно. Эти скорости по определению удовлетворяют следующим ньютоновским уравнениям движения:

$$\left.\begin{aligned} \rho_1 d\tilde{v}^\alpha/dt &= -\rho_1\partial^\alpha\tilde{U} + \partial^\alpha p_1 + \rho_1 O(\varepsilon^4); \\ \rho_1 d\tilde{\tilde{v}}^\alpha/dt &= -\rho_1\partial^\alpha U_2 + \rho_1 O(\varepsilon^4), \end{aligned}\right\} \tag{325}$$

где

$$U_2 = \int \frac{\rho_2\, dy}{|x-y|}.$$

Из уравнений (313) и (325) следует, что в первом приближении скорость $\tilde{\tilde{v}}^\alpha$ совпадает со скоростью центра масс тела:

$$V^\alpha_{(1)} = dY^\alpha_{(1)}/dt = \tilde{\tilde{v}}^\alpha + O(\varepsilon^3).$$

Поэтому выражение (324) принимает вид $v_1^\alpha = V^\alpha_{(1)} + \tilde{v}^\alpha + O(\varepsilon^3)$. Поскольку $v_1^\alpha = dX^\alpha_{(1)}/dt$, где $X^\alpha_{(1)} = Y^\alpha_{(1)} + x_1^\alpha$, то $\tilde{v}^\alpha = dx_1^\alpha/dt$.

Используя первое из уравнений (325), найдем, что

$$\rho_1 \frac{d^2}{dt^2} x_1^\alpha x_1^\beta = 2\rho_1\tilde{v}^\alpha\tilde{v}^\beta - \rho_1[x_1^\beta\partial^\alpha\tilde{U} + x_1^\alpha\partial^\beta\tilde{U}] + $$
$$+ x_1^\alpha\partial^\beta p_1 + x_1^\beta\partial^\alpha p_1 + \rho_1 O(\varepsilon^4).$$

Интегрируя это выражение по объему первого тела, получаем

$$\frac{1}{2M_1}\frac{d^2}{dt^2} I^{\alpha\beta}_{(1)} = 2q^{\alpha\beta}_{(1)} + \Omega^{\alpha\beta}_{(1)} - \gamma^{\alpha\beta}P_{(1)}, \tag{326}$$

где

$$I^{\alpha\beta}_{(1)} = \int \rho_1 x_1^\alpha x_1^\beta \, dx; \quad q^{\alpha\beta}_{(1)} = \frac{1}{2M_1} \int \rho_1 \tilde{v}_1^\alpha \tilde{v}_1^\beta \, dx;$$

$$\Omega^{\alpha\beta}_{(1)} = -\frac{1}{2M_1} \int \frac{\rho_1 \rho_1' (x^\alpha - x'^\alpha)(x^\beta - x'^\beta)}{|x - x'|^3} \, dx \, dx';$$

$$Q^{\alpha\beta}_{(1)} = \frac{1}{2M_1} \int \rho_1 v_1^\alpha v_1^\beta \, dx; \quad P_{(1)} = \frac{1}{M_1} \int p_1 \, dx.$$

В силу определения скорости центра масс протяженного тела имеем

$$\int \rho_1 \tilde{v}_1^\alpha \, dx = 0.$$

Отсюда следует, что

$$2q^{\alpha\beta}_{(1)} + V^\alpha_{(1)} V^\beta_{(1)} = 2Q^{\alpha\beta}_{(1)}.$$

Поэтому выражение (326) можно записать в виде

$$\frac{1}{2M_1} \frac{d^2}{dt^2} I^{\alpha\beta}_{(1)} = 2Q^{\alpha\beta}_{(1)} + \Omega^{\alpha\beta}_{(1)} - \gamma^{\alpha\beta} P_{(1)} - V^\alpha_{(1)} V^\beta_{(1)}. \tag{327}$$

Усредним теперь выражение (327) по промежутку времени τ_0, значительно большему, чем характерное время τ, но значительно меньшему, чем период обращения T: $T \gg \tau_0 \gg \tau$. Из сказанного выше следует, что среднее значение $\frac{d^2}{dt^2} I^{\alpha\beta}_{(1)}$, как производной по времени от ограниченного значения $\frac{d}{dt} I^{\alpha\beta}_{(1)}$, равно нулю. Учитывая соотношение

$$\overline{V}^\alpha_{(1)} = V^\alpha_{(1)} + O(\varepsilon^3),$$

получаем тензорную теорему вириала для протяженного тела, движущегося во внешнем гравитационном поле:

$$\overline{Q}^{\alpha\beta}_{(1)} = \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\beta} \overline{P}_{(1)} - \frac{1}{2} \overline{\Omega}^{\alpha\beta}_{(1)} + \frac{1}{2} V^\alpha_{(1)} V^\beta_{(1)}. \tag{328}$$

Свертка тензорных индексов в выражении (328) дает

$$\overline{Q}_{(1)} = (3/2)\, \overline{P}_{(1)} - \overline{\Omega}_{(1)}/2 + V^{(\beta)}_{(1)} V_{(1)\beta}/2. \tag{329}$$

Аналогичные соотношения справедливы и для второго тела.

Усреднение движения центра масс протяженного тела относительно опорной геодезической риманова пространства — времени. Как следует из выражения (323), разность ускорений точечного тела и центра масс протяженного тела в начальный момент, когда они совмещены и имеют одинаковые скорости, весьма мала: эта разность имеет постньютоновский порядок величины. Так как эта разность не зависит от смещения δx^α точечного тела от центра масс, можно было бы ожидать, что с течением времени точечное тело удалилось достаточно далеко за пределы протяженного тела. Однако с удалением точечного тела от центра масс протяженного тела в действие вступают возвращающие силы, обусловленные гравитационным полем протяженного тела. Однако они тоже малы. Поэтому относительное движение точечного тела и центра масс протяженного тела происходит достаточно медленно, так что характерное время движения значительно больше времени τ_0. Это позволяет упростить исследование эволюции относительного движения, так как можно усреднить выражения для ускорений точечного тела a_0^α и центра масс протяженного тела $a_{(1)}^\alpha$ по промежутку времени τ_0, исключив тем самым из рассмотрения малые короткопериодические осцилляции орбиты протяженного тела и опорной геодезической, которые обусловлены короткопериодическим внутренним движением вещества протяженных тел, создающих метрику риманова пространства — времени.

Применяя тензорную теорему вириала (328) и (329) к обоим телам, для усредненного ускорения центра масс протяженного тела получаем:

$$\begin{aligned}
\overline{a_{(1)}^\alpha} = &-\frac{M_2}{R^2}\Big\{n^\alpha\Big[1-\gamma V_{(1)}^\beta V_{(1)\beta}-\frac{1}{2}(2\gamma+\alpha_2+\alpha_3+2)V_{(2)}^\beta V_{(2)\beta}-\\
&-\Big(2\beta+2\gamma+1+\xi_W-\xi_2+\frac{\alpha_1}{2}\Big)\frac{M_1}{R}-2(\beta+\gamma)\frac{M_2}{R}+\\
&+(\alpha_1-\alpha_2+\xi_1+5\xi_W+3+\gamma-4\beta)\overline{\Omega}_{(1)}-3\xi_W n_\delta n_\beta\overline{\Omega}_{(1)}^{\beta\delta}+\\
&+\Big(\frac{5}{2}+\frac{\xi_1}{2}+\frac{\alpha_3}{2}+2\xi_2+2\xi_W+\gamma-4\beta\Big)\overline{\Omega}_{(2)}+\\
&+(1+\xi_3)\overline{\Pi}_{(2)}+\Big(3\xi_4-\xi_1-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\alpha_3\Big)\overline{P}_{(2)}+\\
&+\frac{3}{2}\xi_1 n_\beta n_\delta\overline{\Omega}_{(2)}^{\beta\delta}-\frac{3}{2}\alpha_2(n_\beta w^\beta)^2-\frac{3}{2}(1+\alpha_2)(n_\beta V_{(2)}^\beta)^2+\\
&+\frac{1}{2}(4\gamma+4+\alpha_1)V_{(1)}^\beta V_{(2)\beta}+\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)w_\beta w^\beta-\\
&-\frac{1}{2}(2\alpha_3+2\alpha_2-\alpha_1)w_\beta V_{(2)}^\beta+\frac{1}{2}\alpha_1 w_\beta V_{(1)}^\beta-3\alpha_2 n_\beta n_\delta w^\beta V_{(2)}^\delta\Big]+\\
&+2(\gamma+1)V_{(1)}^\alpha n_\beta V_{(1)}^\beta+\frac{1}{2}(4\gamma+2+\alpha_1-2\alpha_2)V_{(2)}^\alpha n_\beta V_{(2)}^\beta+\\
&+\xi_1 n_\beta\overline{\Omega}_{(2)}^{\alpha\beta}-\frac{1}{4}(8\gamma+6+\alpha_1)[V_{(1)}^\alpha V_{(2)}^\beta+V_{(2)}^\alpha V_{(1)}^\beta]n_\beta+\\
&+(\alpha_2-\xi_1+\xi_2-5\xi_W)n_\beta\overline{\Omega}_{(1)}^{\alpha\beta}-\alpha_2 V_{(2)}^\alpha n_\beta w^\beta-\alpha_2 w^\alpha n_\beta w^\beta+\\
&+\frac{1}{2}(\alpha_1-2\alpha_2)w^\alpha n_\beta V_{(2)}^\beta-\frac{\alpha_1}{2}w^\alpha n_\beta V_{(1)}^\beta\Big\}. \qquad (330)
\end{aligned}$$

Поступая аналогично, для усредненной разности ускорения точечного тела и центра масс протяженного тела имеем:

$$\overline{\delta a^{\alpha}} = \overline{a}^{\alpha}_{0} - \overline{a}^{\alpha}_{(1)} = -\overline{\partial^{\alpha}\widetilde{U}} + \frac{M_2}{R^2}\Big\{n^{\alpha}\Big[-3\xi_W n_{\beta} n_{\delta} \overline{\Omega}^{\beta\delta}_{(1)} +$$

$$+\left(2\beta + \frac{\alpha_2}{2} - \frac{\xi_1}{2} - \frac{3}{2} - \frac{\alpha_1}{2} - 2\xi_W\right)\overline{\widetilde{U}} +$$

$$+(\alpha_1 + \xi_1 - \alpha_2 + 3 + \gamma - 4\beta + 5\xi_W)\,\overline{\Omega}_{(1)} +$$

$$+\frac{\xi_W}{2}\int \frac{\bar{\rho}_1'\,dx'}{|x-x'|^3}\,[3x_{\beta}'x'^{\beta} - 2x^{\beta}x_{\beta}' - x_{\beta}x^{\beta} + 3(n_{\beta}x'^{\beta})^2 -$$

$$-9\,(n_{\beta}x^{\beta})^2 + 6n_{\beta}n_{\delta}x'^{\beta}x^{\delta}]\Big] + (\alpha_2 - \xi_1 + \xi_2 - 5\xi_W)\,n_{\beta}\,\overline{\Omega}^{\alpha\beta}_{(1)} -$$

$$-\left(2\beta + 2\xi_W - \xi_2 - \frac{3}{2} - \frac{\alpha_2}{2} + \frac{1}{2}\,\xi_1\right) n_{\beta}\overline{\widetilde{U}}^{\alpha\beta} -$$

$$-(1 - 4\beta - 2\gamma + \xi_2)\,n_{\beta}x^{\beta}\overline{\partial^{\alpha}\widetilde{U}} + \frac{3}{2}\,\xi_W n_{\beta}\int \frac{\bar{\rho}_1'\,(x^{\alpha} - x'^{\alpha})}{|x-x'|^5}\,\times$$

$$\times\,(x^{\beta} - x'^{\beta})\,[x_{\delta}'x'^{\delta} - x_{\delta}x^{\delta} + 3\,(n_{\delta}x'^{\delta})^2 - 3\,(n_{\delta}x^{\delta})^2]\,dx' + 3\xi_W n_{\beta}\,\times$$

$$\times\int \frac{\bar{\rho}_1'\,(x^{\alpha} - x'^{\alpha})\,(x_{\delta} - x_{\delta}')\,(x^{\delta}x'^{\beta} - x'^{\delta}x^{\beta})}{|x-x'|^5}\,dx' +$$

$$+\,\xi_W n_{\beta}\int \frac{\bar{\rho}_1'\,(2x^{\alpha}x'^{\beta} - x'^{\alpha}x^{\beta} - x^{\alpha}x^{\beta})}{|x-x'|^3}\,dx'\Big\} +$$

$$+\frac{M_2}{R}\,\{-\xi_W n_{\beta}n_{\eta}\partial^{\beta}\overline{\widetilde{U}}^{\alpha\eta} - \xi_W n^{\alpha}n_{\beta}\partial^{\beta}\overline{\widetilde{U}} +$$

$$+(4\beta + 2\gamma - 1 - 3\xi_W - \xi_2)\,\partial^{\alpha}\overline{\widetilde{U}}\} + \overline{\widetilde{a}}^{\alpha}_{0} + \partial^{\alpha}O\,(\varepsilon^6). \qquad (331)$$

Здесь учтено, что в рассматриваемом случае $V^{\alpha}_{(1)} = V^{\alpha}_{(0)} + O\,(\varepsilon^3)$.

Данный результат показывает, что ускорение центра масс протяженного тела отличается в постньютоновском приближении от ускорения пробного тела для любой метрической теории гравитации, обладающей законами сохранения энергии — импульса вещества и гравитационного поля, вместе взятых. Нордтведт же [130] пришел к заключению, что эти ускорения в постньютоновском приближении могут быть равными для некоторых метрических теорий гравитации. Отличие наших выводов от выводов Нордтведта обусловлено тем, что Нордтведт не учитывал влияние собственного гравитационного поля протяженного тела на движение пробного тела. Однако его необходимо учитывать, так как оно имеет постньютоновский порядок величины.

Если в выражении (331) для разности ускорений пробного и протяженного тел пренебрежем влиянием собственного гравитационного поля протяженного тела на движение пробного тела и положим параметр $\xi_w = 0$, то приходим к результату

$$\overline{\delta a^\alpha} = (M_2/R^2)\{n^\alpha(\alpha_1 + \xi_1 - \alpha_2 + 3 + \gamma - 4\beta)\overline{\Omega}_1 + \\ + (\alpha_2 - \xi_1 + \xi_2)\, n_\beta \overline{\Omega}^{\alpha\beta}_{(1)}\},$$

который, по существу, аналогичен результатам, полученным Нордтведтом [130] и Виллом [131]. Из этой формулы непосредственно следует, что в метрических теориях гравитации с параметрами, удовлетворяющими равенствам:

$$\alpha_1 + \xi_1 - \alpha_2 + 3 + \gamma - 4\beta = 0; \quad \alpha_2 - \xi_1 + \xi_2 = 0,$$

разность ускорений $\overline{\delta a^\alpha}$ равна нулю и движение центра масс происходит по геодезической риманова пространства — времени. Но такое приближение незаконно, поскольку здесь движение центра масс, происходящее в римановом пространстве — времени, метрика которого создается двумя движущимися телами, сравнивается с геодезической другого риманова пространства — времени, метрика которого создается только вторым телом.

Как следует из выражения (331), разность ускорений центра масс протяженного и пробного тел $\overline{\delta a^\alpha}$ зависит от распределения вещества протяженного тела и от характера его внутреннего движения: вращается ли тело как целое или нет и т. п. Поэтому, чтобы оценить разность ускорения $\overline{\delta a^\alpha}$, необходимо детальное знание структуры протяженного тела. Для качественного анализа движения центра масс протяженного тела относительно геодезической риманова пространства — времени заметим, что правая часть (331) представляет собой разложение по малому параметру ε^2 с точностью до ε^4 включительно. Так как первый член в этом разложении имеет порядок величины $O(\varepsilon^2)$, следует ожидать, что отклонение δx^α точечного тела от центра масс протяженного тела будет мало. Это дает нам основания решать уравнения (331) относительно δx^α последовательными этапами, соответствующими разложению уравнения (331) по степеням ε^2.

В качестве начального момента времени $t = 0$ для целей нашего рассмотрения следует выбрать тот момент времени, когда точечное тело помещено в центр масс протяженного тела и имеет одинаковую с ним скорость:

$$\delta x^\alpha(0) = 0; \quad \delta \dot{x}^\alpha(0) = 0. \tag{332}$$

Тогда решение нашей задачи даст ответ, насколько далеко уклоняется центр масс протяженного тела при своем движении от опорной геодезической риманова пространства — времени.

Представим отклонение δx^α в виде разложения по параметру ε^2:

$$\left.\begin{aligned} &\delta x^\alpha = \overset{(0)}{\delta x^\alpha} + \overset{(2)}{\delta x^\alpha} + \ldots; \\ &\overset{(0)}{\delta x^\alpha} \sim O(1)\,L;\ \overset{(2)}{\delta x^\alpha} \sim O(\varepsilon^2)\,L, \end{aligned}\right\} \qquad (333)$$

где L — характерный размер протяженного тела.

Из выражения (332) следует, что для каждого из членов разложения (333) имеем нулевые начальные условия:

$$\left.\begin{aligned} &\overset{(0)}{\delta x^\alpha}(0) = \overset{(2)}{\delta x^\alpha}(0) = \ldots = 0; \\ &\overset{(\dot{0})}{\delta x^\alpha}(0) = \overset{(\dot{2})}{\delta x^\alpha}(0) = \ldots = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (334)$$

Для дальнейшего рассмотрения необходимо разложить каждое слагаемое в правой части уравнения (331) в ряды по малому параметру δx^α.

Построим, например, разложение первого члена. В сферической системе координат, начало которой помещено в центр масс протяженного тела, сохраняющаяся плотность идеальной жидкости ρ является непрерывной функцией переменных t, r, θ, φ:

$$\rho = \rho(t,\ r,\ \theta,\ \varphi) \geqslant 0.$$

Как и всякую функцию, разложим плотность ρ в бесконечный ряд по сферическим гармоникам на каждой из сферических поверхностей, центр которых помещен в центр масс протяженного тела, причем коэффициенты ряда будут зависеть от r и t:

$$\rho(\mathbf{r},\ t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} r^n \rho_{n,m}(r,\ t)\, Y^*_{n,m}(\theta,\ \varphi), \qquad (335)$$

где $Y_{n,m}(\theta,\ \varphi)$ — сферическая гармоника: при $m \geqslant 0$

$$Y_{n,m}(\theta,\ \varphi) = (-1)^m i^n \sqrt{\frac{(2n+1)}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\, P_n^m(\theta) \exp(im\varphi);$$

при $m<0$:

$$Y_{n,-|m|}(\theta,\ \varphi) = (-1)^{n-m}\, Y^*_{n,|m|}(\theta,\ \varphi),$$

а коэффициенты ряда (335) определяются соотношениями

$$\left.\begin{aligned} &\rho_{n,m}(r,\ t) = \frac{1}{r^n} \int d\Omega\, \rho(\mathbf{r},\ t)\, Y_{n,m}(\theta,\ \varphi) \\ &(d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi). \end{aligned}\right\} \qquad (336)$$

Легко убедиться, что в разложении (335) дипольный член будет отсутствовать. Действительно, из определения центра масс протяженного тела $\int \rho_1 x^\alpha dx = 0$ и выражений (335) следует, что в системе координат, начало которой помещено в центр масс тела:

$$\rho_{1,m}(r,\ t) = 0.$$

Для потенциала $\widetilde{U}$ имеем следующее выражение:

$$\widetilde{U} = \int \frac{\rho_1(\mathbf{r}',\ t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3\mathbf{r}'.$$

Так как точка наблюдения $\mathbf{r}$ находится внутри области интегрирования, этот интеграл является несобственным, с особой точкой $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$. Однако этот интеграл сходится и абсолютно. По определению абсолютной сходимости несобственного интеграла имеем

$$\int\limits_{(V)} f d^3\mathbf{r}' = \lim_{V_\delta \to 0} \int\limits_{(V-V_\delta)} f d^3\mathbf{r}',$$

и этот предел не зависит от способа стягивания области V_δ к особой точке $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$. Для наших целей удобно в качестве области V_δ выбрать область, заключенную между двумя сферами радиусов $r - \delta$ и $r + \delta$, и потом устремить $\delta \to 0$. Поэтому выражение для $U(\mathbf{r},\ t)$ перепишем в виде

$$\widetilde{U}(\mathbf{r},\ t) = \lim_{\delta\to 0}\left\{\int\limits_0^{r-\delta}(r')^2\,dr'\int\frac{d\Omega\rho_1(\mathbf{r}',\ t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{r+\delta}^{L}(r')^2\,dr'\int\frac{d\Omega\rho_1(\mathbf{r}',\ t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right\}, \qquad (337)$$

где L — расстояние от центра масс первого тела до его наиболее удаленной точки.

В каждом из интегралов выражения (337) заменим $\rho_1(\mathbf{r},\ t)$ его рядом (335), а также воспользуемся известным разложением $(r_2 > r_1)$

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|} = 4\pi\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{r_1^n}{r_2^{n+1}}\,\frac{Y^*_{n,m}(\theta_2,\ \varphi_2)\,Y_{n,m}(\theta_1,\ \varphi_1)}{(2n+1)}. \qquad (338)$$

Таким образом, под знаками интегралов в выражении (337) будут стоять произведения двух бесконечных рядов по сферическим гармоникам. Но в силу ортогональности сферических гармоник на сфере

$$\int Y^*_{n,m}(\theta,\ \varphi)\,Y_{l,p}(\theta,\ \varphi)\,d\Omega = \delta_{nl}\delta_{mp}$$

после интегрирования по $d\Omega$ получим выражение для $\widetilde{U}$ в виде обычного ряда:

$$\widetilde{U}(\mathbf{r},\ t)=4\pi\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}A_{n,m}(r,t)\,Y^*_{n,m}(\theta,\ \varphi), \tag{339}$$

где

$$A_{n,m}(r,\ t)=\frac{1}{2n+1}\left\{\frac{1}{r^{n+1}}\int\limits_0^r(r')^{2n+2}dr'\,\rho_{n,m}(r',\ t)+\right.$$
$$\left.+r^n\int\limits_r^L(r')^{1-n}dr'\,\rho_{n,m}(r',\ t)\right\}. \tag{340}$$

Преобразуем теперь выражение (339) к виду, удобному для дальнейшего исследования. Воспользуемся тем обстоятельством, что при малых r коэффициенты (340) ряда (339) достаточно быстро убывают с ростом r. Поэтому для наших целей можно ограничиться лишь несколькими членами ряда (339):

$$\widetilde{U}=4\pi\left\{A_{0,0}(r,\ t)+\sum_{m=-2}^{2}A_{2,m}(r,\ t)\,Y_{2,m}(\theta,\ \varphi)+\ldots\right\}.$$

Используя соотношения (335), это выражение можно записать в виде

$$\widetilde{U}=\frac{M(r,\ t)}{r}+\frac{1}{2}D_{\alpha\beta}\frac{x^\alpha x^\beta}{r^5}+\ldots, \tag{341}$$

где введены обозначения:

$$\left.\begin{aligned}
&M(r,\ t)=\int\limits_0^r(r')^2dr'\int\rho_1(\mathbf{r}',\ t)\,d\Omega+\\
&+r\int\limits_r^L r'\,dr'\int\rho_1(\mathbf{r}',\ t)\,d\Omega;\\
&D_{\alpha\beta}(r,\ t)=\int\limits_0^r(r')^4dr'\int d\Omega\rho_1(\mathbf{r}',\ t)\,[3n'_\alpha n'_\beta+\gamma_{\alpha\beta}]+\\
&+r^5\int\limits_r^L\frac{dr'}{r'}\int d\Omega\rho_1(\mathbf{r}',\ t)\,[3n'_\alpha n'_\beta+\gamma_{\alpha\beta}];\ n'_\alpha=x'_\alpha/r'.
\end{aligned}\right\} \tag{342}$$

Отметим, что в силу непрерывности функции ρ при $r\to0$ выполняется соотношение

$$\int d\Omega\,Y^*_{n,m}(\theta,\ \varphi)\,\rho_1(\mathbf{r},\ t)\sim r^n,$$

поэтому все интегралы в выражениях (342) не имеют особенностей при $r=0$. Тогда из выражения (341) получим необходимое для дальнейшего разложение

$$\partial^\alpha \widetilde{U} = \Phi^\alpha_\beta \delta x^\beta + \widetilde{U} O\left((\delta x^\alpha)^2\right), \tag{343}$$

где

$$\Phi^\alpha_\beta = \frac{4\pi}{3}\rho(0,\ t)\,\delta^\alpha_\beta + \int_0^L \frac{dr'}{r'} \int d\Omega \rho_1(\mathbf{r}',\ t)\,[3n'_\alpha n'_\beta + \gamma_{\alpha\beta}]\,. \tag{344}$$

Будем считать далее, что вещество в протяженном теле распределено достаточно однородно $\rho(0,\ t) \neq 0$ и второе слагаемое в выражении (344) заведомо меньше первого. Разлагая аналогично и остальные слагаемые уравнения (331) с учетом выражения (333), в первом приближении получаем

$$\frac{d^2}{dt^2}\overset{(0)}{\delta x^\alpha} + \overline{\Phi}^\alpha_\beta \overset{(0)}{\delta x^\beta} = 0.$$

Очевидно, что решение этого уравнения в силу начальных условий (334) будет $\overset{(0)}{\delta x^\alpha} \equiv 0$.

Во втором приближении имеем

$$\frac{d^2}{dt^2}\overset{(2)}{\delta x^\alpha} + \overline{\Phi}^\alpha_\beta \overset{(2)}{\delta x^\beta} = b^\alpha = \mathrm{const}, \tag{345}$$

где

$$b^\alpha = \frac{M_2}{R^2}\Big\{n^\alpha\,[(\alpha_1 - \alpha_2 + \xi_1 + 3 + \gamma - 4\beta + 5\xi_W)\,\overline{\Omega}_{(1)} -$$

$$- 3\xi_W n_\beta n_\delta \overline{\Omega}^{\beta\delta}_{(1)} + (2\beta + \alpha_2/2 - \xi_1/2 - 3/2 - \alpha_1/2 - (7/2)\,\xi_W)\overline{\widetilde{U}(0)} +$$

$$+ (3/2)\,\xi_W n_\beta n_\delta \overline{\widetilde{U}}^{\beta\delta}(0)] + (\alpha_2 - \xi_1 + \xi_2 - 5\xi_W)\, n_\beta \overline{\Omega}^{\alpha\beta}_{(1)} -$$

$$- (2\beta - \xi_2 + (7/2)\,\xi_W - 3/2 - \alpha_2/2 + \xi_1/2)\, n_\beta \overline{\widetilde{U}}^{\alpha\beta}(0) +$$

$$+ \frac{9}{2}\xi_W \int \frac{\overline{\rho'_1 x'^\alpha (n_\beta x'^\beta)^3}}{|x'|^5}\,dx'\Big\} - \xi_W \frac{M_2}{R}\int \frac{\overline{\rho'_1 x'^\alpha (n_\beta x'^\beta)^2}}{|x'|^5}\,dx' +$$

$$+ \frac{1}{2}(1 + \alpha_2 - \xi_1)\int \frac{\overline{\rho'_1 \rho''_1 x'^\alpha x'^\beta (x'_\beta - x''_\beta)}}{|x'|^3\,|x' - x''|^3}\,dx'\,dx'' -$$

$$-(2\beta - 1 - \xi_2 + \xi_W)\int \frac{\overline{\rho'_1\rho''_1 x'^\alpha}\,dx'\,dx''}{|x'|^3\,|x' - x''|} -$$

$$-\left(1 - \gamma - \alpha_2 + \frac{\alpha_1}{2} + \xi_1 - 3\xi_4\right)\int \frac{\overline{p'_1 x'^\alpha}\,dx'}{|x'|^3} + (1 + \xi_3)\int \frac{\overline{\rho'_1 \Pi\, x'^\alpha}}{|x'|^3}\,dx' -$$

$$-\left(1 + \gamma + \frac{\alpha_3}{2} + \frac{\alpha_2}{2}\right)\int \frac{\overline{\rho'_1 v'_\beta v'^\beta}}{|x'|^3}\,x'^\alpha\,dx' +$$

$$+\frac{1}{2}(4\gamma+2+\alpha_1-2\alpha_2)\int\frac{\overline{\rho_1' v'^\alpha v'^\beta}}{|x'|^3}x_\beta'\,dx'-$$

$$-\frac{3}{2}\alpha_2 w_\beta w_\eta\int\frac{\overline{\rho_1' x'^\alpha x'^\beta x'^\eta}}{|x'|^5}dx'-\frac{1}{2}(2\alpha_3+2\alpha_2-\alpha_1)w_\beta\times$$

$$\times\int\frac{\overline{\rho_1' v'^\beta x'^\alpha dx'}}{|x'|^3}-\left[(1+2\gamma)V^\alpha_{(1)}-\frac{1}{2}(\alpha_1-2\alpha_2)w^\alpha\right]\times$$

$$\times\int\frac{\overline{\rho_1' v_\beta' x'^\beta}}{|x'|^3}dx'-\frac{3}{2}(1+\alpha_2)\int\frac{\overline{\rho_1'(v_\beta' x'^\beta)^2 x'^\alpha}}{|x'|^5}dx'+$$

$$+\frac{1}{2}(4\gamma+4+\alpha_1)V^\beta_{(1)}\int\frac{\overline{\rho_1'(v_\beta' x'^\alpha-v'^\alpha x_\beta')}}{|x'|^3}dx'-$$

$$-\frac{1}{2}(4\gamma+3+\alpha_1+\xi_1-\alpha_2)\int\frac{\overline{\rho_1'\rho_1''(x'^\alpha-x''^\alpha)}}{|x'|\,|x'-x''|^3}dx'\,dx''+$$

$$+\alpha_2 w_\beta\int\frac{\overline{\rho_1'(v'^\alpha x_\delta' x'^\delta-3v_\delta' x'^\delta x'^\alpha)x'^\beta}}{|x'|^5}dx'+$$

$$+\xi_W\int\frac{\overline{\rho_1'\rho_1''}(x''^\alpha x_\delta' x'^\delta-3x'^\alpha x_\beta'' x'^\beta)}{|x'|^5\,|x'-x''|}dx'\,dx'', \qquad (346)$$

причем $v'^\alpha=V^\alpha_{(1)}+\tilde{v}^\alpha$.

Уравнения (345) описывают колебательное движение точки относительно положения равновесия, которое отстоит примерно на $\varepsilon^2 L$ от центра масс протяженного тела. При сделанных выше предположениях о слагаемых в выражении (344) для Φ^α_β, уравнение (345) упрощается:

$$\frac{d^2}{dt^2}\overset{(2)}{\delta x^\alpha}+\omega^2\overset{(2)}{\delta x^\alpha}=b^\alpha,$$

где

$$\omega^2=(4\pi/3)\bar{\rho}(0,\ t). \qquad (347)$$

Решение этого уравнения с учетом начальных условий (334) имеет вид:

$$\overset{(2)}{\delta x^\alpha}=(b^\alpha/\omega^2)[1-\cos\omega t]. \qquad (348)$$

Поскольку правая часть выражения (331) определена лишь с точностью $O(\varepsilon^6)$, дальнейшее разложение его по малому параметру δx^α будет приводить к превышению точности определения δa^α.

Как уже указывалось, разность ускорений точечного тела и центра масс протяженного тела существенно зависит от внутренней структуры тела. Однако для простоты изучим полученное решение на следующих частных случаях.

1. Пусть протяженное тело представляет собой однородный сферически-симметричный, невращающийся шар радиуса L. В этом

случае частота осцилляций центра масс протяженного тела относительно геодезической риманова пространства — времени

$$\omega = \sqrt{M_1/L^3} \sim \varepsilon.$$

Для вычисления разности ускорений точечного тела и центра масс протяженного тела учтем, что:

$$\int d\Omega \frac{x^\alpha x^\beta}{x^2} = -\frac{4\pi}{3} \gamma^{\alpha\beta};$$

$$\int d\Omega \frac{x^\alpha x^\beta x^\delta x^\eta}{x^4} = \frac{4\pi}{15} [\gamma^{\alpha\beta}\gamma^{\delta\eta} + \gamma^{\alpha\delta}\gamma^{\beta\eta} + \gamma^{\alpha\eta}\gamma^{\beta\delta}];$$

$$\int d\Omega \frac{x^\alpha}{x} = \int d\Omega \frac{x^\alpha x^\beta x^\delta}{x^3} = 0.$$

Тогда для потенциалов, входящих в выражение (345), получим

$$\tilde{U}(0) = \frac{3}{2}\frac{M_1}{L}; \quad \tilde{U}^{\alpha\beta}(0) = -\frac{1}{2}\frac{M_1}{L}\gamma^{\alpha\beta};$$

$$\Omega_{(1)} = \frac{3}{5}\frac{M_1}{L}; \quad \Omega^{\alpha\beta}_{(1)} = \frac{1}{5}\frac{M_1}{L}\gamma^{\alpha\beta}.$$

Подставляя эти соотношения в выражение (346), имеем

$$b^\alpha = \frac{M_1 M_2}{R^2 L} n^\alpha \frac{1}{10}\left[6\gamma + 16\beta - 12 - 3\xi_2 - \frac{3}{2}\alpha_1 - \xi_1 + \alpha_2 - 15\xi_W\right].$$

Из этого равенства следует, что разность ускорений точечного тела и центра масс шара имеет постньютоновский порядок малости: $|b^\alpha| \sim \varepsilon^4$. В этом случае амплитуда колебаний

$$|A^\alpha| = \frac{|b^\alpha|}{\omega^2} = \frac{1}{10}\frac{M_2}{R}\left(\frac{L}{R}\right) L \left[6\gamma + 16\beta - 12 - \right.$$
$$\left. - 3\xi_2 - \frac{3}{2}\alpha_1 - \xi_1 + \alpha_2 - 15\xi_W\right].$$

2. Пусть протяженное тело представляет собой однородный сферически симметричный шар радиуса L, вращающийся с угловой частотой ω_0 вокруг оси, проходящей через центр масс шара. В этом случае скорость движения элемента объема шара

$$v'^\alpha = V^\alpha_{(1)} + \omega^\alpha_\beta x^\beta,$$

где $\omega^{\alpha\beta} = -\omega^{\beta\alpha}$ — трехмерный тензор угловой скорости.

Подставляя это соотношение в выражение (346), получаем

$$b^\alpha = \frac{M_2 M_1}{10 R^2 L} n^\alpha \left[6\gamma + 16\beta - 12 - 3\xi_2 - \frac{3}{2}\alpha_1 - \xi_1 + \alpha_2 - 15\xi_w\right] +$$
$$+ \frac{M_1}{4L}[(\alpha_1 - 2\alpha_3)\omega^{\alpha\beta} w_\beta + (2 + \alpha_1 - 2\alpha_3)\omega^\alpha_\beta V^\beta_{(1)}].$$

Для амплитуды колебаний

$$A^\alpha = \frac{M_2}{10R}\left(\frac{L}{R}\right) L n^\alpha \left[6\gamma + 16\beta - 12 - 3\xi_2 - \frac{3}{2}\alpha_1 - \xi_1 + \alpha_2 - 15\xi_w\right] + \\ + \frac{L}{4}\left[(\alpha_1 - 2\alpha_3)\,\omega^{\alpha\beta} w_\beta L + (2 + \alpha_1 - 2\alpha_3)\,\omega^\alpha_\beta V^\beta_{(1)} L\right] \sim \varepsilon^2 L. \qquad (349)$$

3. Рассмотрим теперь протяженное тело со сферически симметричным распределением вещества. Пусть это тело вращается с угловой частотой ω_0 вокруг оси, проходящей через его центр масс. Тогда для разности ускорений центра масс протяженного тела и пробного тела из выражения (346) имеем

$$b^\alpha = \frac{M_2 M_1 n^\alpha}{10R^2 L}\{2q_1(3\alpha_1 + 2\xi_1 - 2\alpha_2 + 9 + 3\gamma - 12\beta + 13\xi_w + \xi_2) + \\ + q_2\left(40\beta - 30 + 5\alpha_2 - 5\xi_1 - \frac{15}{2}\alpha_1 - 5\xi_2 - 41\xi_w\right)\} + \\ + \frac{M_1}{4L} q_2\left[(\alpha_1 - 2\alpha_3)\,\omega^{\alpha\beta} w_\beta + (2 + \alpha_1 - 2\alpha_3)\,\omega^\alpha_\beta V^\beta_{(1)}\right\},$$

где

$$q_1 = \frac{80\pi^2 L}{3M_1^2}\int\limits_0^L r'\,dr'\rho_1(r')\int\limits_0^{r'} r^2\,dr\rho_1(r); \qquad q_2 = \frac{8\pi L}{3M_1}\int\limits_0^L r\,dr\rho_1(r)$$

являются коэффициентами, характеризующими меру неоднородности распределения вещества вдоль радиуса шара. Для однородного распределения вещества в шаре эти коэффициенты равны единице, в общем же случае протяженного тела со сферически симметричным распределением вещества коэффициенты q_1 и q_2 — некоторые положительные числа.

Амплитуда колебаний центра масс протяженного тела относительно опорной геодезической

$$A^\alpha = \frac{3M_2 M_1 n^\alpha}{40\pi R^2 L\rho(0)}\left\{2q_1(3\alpha_1 + 2\xi_1 - 2\alpha_2 + 9 + 3\gamma - 12\beta + 13\xi_w + \xi_2) + \right. \\ + q_2\left(40\beta - 30 + 5\alpha_2 - 5\xi_1 - \frac{15}{2}\alpha_1 - 5\xi_2 - 41\xi_w\right)\} + \\ + \frac{3M_1 q_2}{16\pi\rho(0)L}\left[(\alpha_1 - 2\alpha_3)\,\omega^{\alpha\beta} w_\beta + (2 + \alpha_1 - 2\alpha_3)\,\omega^\alpha_\beta V^\beta_{(1)}\right] \sim \varepsilon^2 L.$$

Если теперь подставить в приведенные выше формулы значения постньютоновских параметров полевой теории гравитации: $\beta = \gamma = 1$; $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$; $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_w = 0$, то легко убедиться, что движение центра масс протяженного тела со сферически симметричным распределением вещества будет происходить не по геодезической риманова пространства — времени.

Если протяженное тело не обладает сферической симметрией, то в выражении для разности ускорений его центра масс и пробного тела появятся дополнительные слагаемые, обусловленные наличием мультипольных моментов масс протяженного тела, и движение такого произвольного протяженного тела будет происходить не по геодезической риманова пространства — времени для любой метрической теории гравитации, обладающей законами сохранения энергии — импульса вещества и гравитационного поля, вместе взятых. Конкретное значение разности ускорений пробного тела и центра масс протяженного тела будет зависеть от постньютоновских параметров теории и от мультипольных моментов масс протяженного тела, а также от характера его движения.

Таким образом, в любой метрической теории гравитации, обладающей законами сохранения энергии — импульса вещества и гравитационного поля, вместе взятых, центр масс произвольного протяженного тела при своем движении по орбите совершает малые осцилляции относительно опорной геодезической риманова пространства — времени. Частота этих колебаний $\omega \sim \sqrt{M_1/L^3}$ — величина малая, порядка ε, а амплитуда $|b^\alpha|/\omega^2$ — порядка $\varepsilon^2 L$.

Применение полученных результатов к системе Солнце — Земля. Для сравнения наших результатов с результатами исследования Вилла [131] применим полученные общие формулы к конкретной постньютоновской системе Солнце — Земля. Эта система характеризуется следующими величинами.

1. Среднее значение гравитационного потенциала Солнца в окрестности орбиты Земли [72]

$$U_\odot \approx 10^{-8}.$$

2. Среднее значение собственного гравитационного потенциала Земли [72]

$$\tilde{U}_\oplus \approx 2\cdot 10^{-9}.$$

3. Средняя скорость Земли по орбите вокруг Солнца [72]

$$v_\oplus \approx 10^{-4}\ c.$$

4. Отношение массы Солнца к массе Земли [72]

$$M_\odot/M_\oplus \approx 3\cdot 10^5.$$

5. Отношение собственной гравитационной энергии Земли к ее полной энергии [102]

$$\Omega_\oplus \approx 5\cdot 10^{-10}.$$

6. Радиус Земли [72]

$$R_\oplus \approx 6\cdot 10^6 \text{ м}.$$

7. Частота вращения Земли вокруг своей оси

$$\omega_{\oplus} \approx 7 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с}.$$

8. Среднее расстояние между Солнцем и Землей

$$R \approx 1{,}5 \cdot 10^{11} \text{ м}.$$

9. Плотность вещества в окрестности центра масс Земли [136]

$$\overline{\rho_{\oplus}}\,(0,\ t) \approx 13 \text{ г/см}^3.$$

10. Эксцентриситет орбиты Земли

$$e_{\oplus} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-2}.$$

Необходимо также отметить, что для всех тел Солнечной системы [72] сдвиговые напряжения существенно меньше значения изотропного давления, поэтому все тела Солнечной системы можно считать состоящими из идеальной жидкости.

Из этих оценок следует, что характерный параметр малости ε для описания движения системы Солнце — Земля следует принять $\varepsilon \approx 10^{-5}$. Тогда $\widetilde{U}_{\oplus}$, $U_{\odot}$, $\Omega_{\oplus}$ будут порядка ε^2. Скорость Земли в системе отсчета, связанной с центром масс системы Солнце — Земля, порядка ε, а скорость Солнца — порядка ε^2:

$$v_{\odot} \approx \frac{M_{\oplus}}{M_{\odot}}\, v_{\oplus} \approx 3 \cdot 10^{-10} c.$$

Среднее значение гравитационного потенциала Земли в окрестности Солнца

$$M_{\oplus}/R = \widetilde{U}_{\oplus} R_{\oplus}/R \sim 10^{-5} \widetilde{U}_{\oplus}$$

будет порядка ε^3.

Скорость Солнечной системы относительно гипотетической универсальной системы покоя w^{α} для общности будем считать порядка ε. Кроме того, следуя Виллу, Солнце будем считать массивным точечным телом. При этих условиях полученные выше общие формулы существенно упрощаются. В этом случае из выражения (330) для усредненного ускорения центра масс Земли имеем

$$\begin{gathered}
a^{\alpha}_{\oplus} = -\frac{M_{\odot}}{R^2} \Big\{ n^{\alpha} \Big[1 + \gamma v^2_{\oplus} + (\alpha_1 - \alpha_2 + \xi_1 + 5\xi_w + 3 + \gamma - 4\beta) \times \\
\times \Omega_{\oplus} - 3\xi_w n_{\beta} n_{\delta} \Omega^{\beta\delta}_{\oplus} - 2(\beta + \gamma)\frac{M_{\odot}}{R} - \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) w^2 - \\
- \frac{3}{2}\alpha_2 (n_{\beta} w^{\beta})^2 + \frac{\alpha_1}{2} w_{\beta} v^{\beta}_{\oplus} \Big] + \\
+ 2(\gamma + 1) v^{\alpha}_{\oplus} n_{\beta} v^{\beta}_{\oplus} + (\alpha_2 - \xi_1 + \xi_2 - 5\xi_w) n_{\beta} \Omega^{\alpha\beta}_{\oplus} - \\
- \alpha_2 w^{\alpha} n_{\beta} w^{\beta} - \frac{\alpha_1}{2} w^{\alpha} n_{\beta} v^{\beta}_{\oplus} + O(\varepsilon^3) \Big\}. \qquad (350)
\end{gathered}$$

Как мы видели, разделение характеристик тел в правой части уравнений (314) и (330) на активную и пассивную гравитационные массы в общем случае произвести не удавалось, а поэтому и введение тензора пассивной гравитационной массы там не представлялось возможным. В случае же системы Солнце — Земля такое разделение возможно.

Действительно, в данном случае величиной приведенных мультипольных моментов массы Солнца можно пренебречь, в результате чего определение (316) тензора пассивной массы тела принимает вид:

$$M_{\oplus}a^{\alpha}_{\oplus}=\frac{M_{\odot}m^{\alpha\beta}_{p}n_{\beta}}{R^2}.$$

Таким образом, выражение для ускорения центра масс Земли (350) нам необходимо привести к квазиньютоновскому виду. Для этого мы должны преобразовать правую часть соотношения (350) так, чтобы она не содержала членов, убывающих быстрее, чем $1/R^2$, с ростом расстояния между телами. Используя уравнение орбиты

$$r=p/(1-e_{\oplus}\cos\varphi),$$

найдем соотношение между радиальной и трансверсальной компонентами скорости Земли:

$$v_r/v_{\varphi}=(1/r)\,(dr/d\varphi)=e_{\oplus}\sin\varphi/(1-e_{\oplus}\cos\varphi)=e_{\oplus}\sin\varphi+O\,(e^2_{\oplus}).$$

Поскольку $e^2_{\oplus}=O\,(\varepsilon)$, для квадрата скорости Земли имеем

$$v^2_{\oplus}=v^2_r+v^2_{\varphi}=v^2_{\varphi}\,[1+O\,(\varepsilon)].$$

Тогда уравнения движения центра масс Земли в ньютоновском приближении принимают вид:

$$(v^2_{\oplus}/R)\,[1+O\,(e_{\oplus})]=M_{\odot}/R^2.$$

Отсюда следует, что

$$M_{\odot}/R=v^2_{\oplus}+O\,(\varepsilon^2 e_{\oplus}).$$

Учитывая это соотношение, правую часть выражения (350) приведем к квазиньютоновскому виду:

$$\begin{aligned}a^{\alpha}_{\oplus}= & -(M_{\odot}/R^2)\Big\{n^{\alpha}\Big[1-(2\beta+\gamma)\,v^2_{\oplus}+\\ & +(\alpha_1-\alpha_2+\xi_1+5\xi_w+3+\gamma-4\beta)\,\Omega_{\oplus}-\\ & -3\xi_w n_{\beta}n_{\delta}\Omega^{\beta\delta}_{\oplus}-\frac{1}{2}\,(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)\,w^2-\frac{3}{2}\,\alpha_2\,(n_{\beta}w^{\beta})^2+\\ & +\frac{\alpha_1}{2}\,w_{\beta}v^{\beta}_{\oplus}\Big]+2\,(\gamma+1)\,v^{\alpha}_{\oplus}n_{\beta}v^{\beta}_{\oplus}+(\alpha_2-\xi_1+\xi_2-5\xi_w)\times\\ & \times n_{\beta}\Omega^{\alpha\beta}_{\oplus}-\alpha_2 w^{\alpha}n_{\beta}w^{\beta}-\frac{\alpha_1}{2}\,w^{\alpha}n_{\beta}v^{\beta}_{\oplus}+O^{\alpha}\,(\varepsilon^2 e_{\oplus})\Big\}.\end{aligned}$$

В этом случае можно ввести тензор пассивной гравитационной массы Земли в соответствии с выражением:

$$\begin{aligned} m_p^{\alpha\beta}/M_\oplus = &-\gamma^{\alpha\beta}[1-(2\beta+\gamma)v_\oplus^2+ \\ &+(\alpha_1-\alpha_2+\xi_1+5\xi_w+3+\gamma-4\beta)\Omega_\oplus-3\xi_w n_\beta n_\delta\Omega_\oplus^{\beta\delta}+ \\ &+(\alpha_1/2)w_\beta v_\oplus^\beta-(3/2)\alpha_2(n_\beta w^\beta)^2-(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)w^2/2]- \\ &-2(\gamma+1)v_\oplus^\alpha v_\oplus^\beta-(\alpha_2-\xi_1+\xi_2-5\xi_w)\Omega_\oplus^{\alpha\beta}+ \\ &+\alpha_2 w^\alpha w^\beta+(\alpha_1/2)w^\alpha v_\oplus^\beta+O(\varepsilon^2 e_\oplus). \end{aligned} \tag{351}$$

Если теперь положить в выражении (351) $w^\alpha=0$, $\xi_w=0$, то получим

$$\begin{aligned} m_p^{\alpha\beta}/M_\oplus = &-\gamma^{\alpha\beta}[1-(2\beta+\gamma)v_\oplus^2+(\alpha_1-\alpha_2+\xi_1+3+\gamma-4\beta)\Omega_\oplus]- \\ &-2(\gamma+1)v_\oplus^\alpha v_\oplus^\beta-(\alpha_2-\xi_1+\xi_2)\Omega_\oplus^{\alpha\beta}+O(\varepsilon^3). \end{aligned} \tag{352}$$

Сравним теперь это выражение с (219), полученным Виллом. Принципиальным различием этих выражений является отсутствие членов $v_\oplus^2$ и $v_\oplus^\alpha v_\oplus^\beta$ в (219). Однако учет членов $v_\oplus^2$ и $v_\oplus^\alpha v_\oplus^\beta$ необходим, так как они имеют постньютоновский порядок малости $v_\oplus^2\sim\varepsilon^2$ и более чем на один порядок превышают остальные постньютоновские поправки в выражениях (219) и (352). Данные по лазерной локации Луны с учетом других экспериментов позволили достаточно точно определить значения всех постньютоновских параметров, входящих в выражение (352). Оценим отклонение от единицы отношения пассивной массы к инертной массе.

Действительно, результаты экспериментов [101, 102] по лазерной локации Луны с учетом других экспериментов показали, что

$$\left.\begin{aligned} &|(\alpha_2-\xi_1+\xi_2)\Omega_\oplus^{\alpha\beta}+\gamma^{\alpha\beta}(\alpha_1-\alpha_2+\xi_1+3+ \\ &+\gamma-4\beta)\Omega_\oplus|<2\cdot10^{-11}; \\ &|\gamma-1|<0{,}005;\ |\beta-1|\leqslant0{,}01. \end{aligned}\right\} \tag{353}$$

Эти ограничения на значения постньютоновских параметров представляют серьезный барьер для ряда метрических теорий гравитации, но тем не менее имеется ряд теорий гравитации, удовлетворяющих условиям (353). Одной из таких теорий является полевая теория гравитации [30]. Подставляя оценки (353) в (352), получаем

$$m_p^{\alpha\beta}/M_\oplus=-\gamma^{\alpha\beta}[1-3v_\oplus^2+O(10^{-10})]-4v_\oplus^\alpha v_\oplus^\beta+O^{\alpha\beta}(10^{-10}). \tag{354}$$

Таким образом, в любой метрической теории гравитации, удовлетворяющей условиям (353) и обладающей законами сохранения энергии — импульса вещества и гравитационного поля, вместе взятых, в постньютоновском приближении отношение пассивной гравитационной массы к ее инертной массе в результате (354) не равно единице, отличаясь от нее приблизительно на 10^{-8}, в противовес утверждениям о равенстве пассивной гравитационной и инертной масс Земли в постньютоновском приближении, сделанным в [101, 102] на основе данных по лазерной локации Луны. Однако такая интерпретация результатов экспериментов по лазерной локации Луны, приведенная авторами работ [101, 102], неправильна, так как эти выводы сделаны на основе формулы Вилла для пассивной гравитационной массы (219). Как показано в этом разделе, такое определение пассивной гравитационной массы совершенно произвольно и не имеет физического смысла.

Но тем не менее не члены, нарушающие равенство между пассивной гравитационной и инертной массами Земли, являются причиной ее негеодезического движения. Как следует из выражения (331), усредненная разность ускорений точечного тела и центра масс Земли не содержит членов вида: $(M_\odot/R^2)\, v^2_\oplus n^\alpha$, $(M_\odot/R^2) \times \times\, v^\alpha_\oplus v^\beta_\oplus n_\beta$. Это позволяет утверждать, что отличие пассивной массы Земли от инертной массы не служит причиной негеодезического движения ее центра масс.

Для того чтобы оценить величины, характеризующие колебательное движение центра масс Земли относительно опорной геодезической, воспользуемся формулами (346) — (348), положив $\gamma = \beta = 1$; $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$; $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_w = 0$.

Следует отметить, что полученные здесь оценки будут иметь приближенный характер, поскольку для нахождения их точного значения требуется более детальный анализ с учетом внутреннего строения Земли. Если считать Землю однородным сферически-симметричным невращающимся шаром, то, как следует из формул, приведенных в конце предыдущего раздела, ее центр масс будет совершать осцилляции относительно опорной геодезической с периодом

$$T = 2\pi \Big/ \sqrt{\frac{4\pi G}{3}\rho_\oplus} \approx 3{,}3\cdot 10^3 \text{ с}$$

и амплитудой

$$|\mathbf{A}| = (M_\odot/R^2)\, R^2_\oplus \approx 3\cdot 10^{-4} \text{ см}.$$

Вращение же Земли приводит к существенному увеличению амплитуды колебаний:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} R^2_\oplus [\boldsymbol{\omega}_\oplus \mathbf{v}_\oplus] + \frac{M_\odot \mathbf{R}}{R^3} R^2_\oplus. \qquad (355)$$

Поскольку $\omega_\oplus \approx 7\cdot 10^{-5}$ рад/с, то для амплитуды колебаний в этом случае имеем

$$|\mathbf{A}| \approx 4{,}6\cdot 10^{-2} \text{ см} \sim \varepsilon^2 R_\oplus.$$

Так как ось вращения Земли составляет с плоскостью эклиптики угол $\alpha \approx 66°33'$, эта амплитуда будет подвержена сезонным вариациям, изменяясь примерно от $4{,}6\cdot 10^{-2}$ см (зимой и летом) до $4{,}2\cdot 10^{-2}$ см (в моменты весеннего и осеннего равноденствий). В этом случае отношение разности ускорений центра масс Земли и пробного тела к ускорению Земли будет

$$\frac{|\delta a^{\alpha}|}{|a^{\alpha}|} \approx \frac{1}{2}\frac{M_{\oplus}}{M_{\odot}}\frac{R^2}{R_{\oplus}}\,|[\omega_{\oplus}\mathbf{v}_{\oplus}]| \approx 10^{-7}. \tag{356}$$

Если учесть, что Земля не шар, а сфероид, то в выражении для амплитуды колебаний имеются дополнительные слагаемые, обусловленные наличием мультипольных моментов масс Земли, которые дают только поправки к амплитуде (355).

Укажем, например, что для отношения разности ускорений центра масс Земли и пробного тела к ускорению Земли среди других поправок к выражению (356) получим следующую:

$$|\delta a^{\alpha}|/|a^{\alpha}| \sim J_3 v_{\oplus}^2 (M_{\oplus}/M_{\odot})(R/R_{\oplus})^2,$$

где J_3 — коэффициент, стоящий множителем перед $P_3(\cos\theta)$ в разложении ньютоновского потенциала Земли по сферическим гармоникам. Согласно данным Аллена [137] имеем $J_3 \approx -2{,}5\cdot 10^{-6}$. Отсюда следует, что эта поправка $|\delta a^{\alpha}|/|a^{\alpha}| \approx 10^{-10} \approx \varepsilon^2$.

Таким образом, мы показали, что в любой метрической теории гравитации, обладающей законами сохранения энергии-импульса вещества и гравитационного поля, вместе взятых, движение центра масс протяженного тела происходит не по геодезической риманова пространства-времени.

Усреднение движения центра масс, которое предпринято для устранения короткопериодических осцилляций орбиты, вызываемых внутренним движением вещества, позволило выяснить, что центр масс протяженного тела при своем движении по орбите совершает колебательное движение относительно опорной геодезической.

Применение полученных общих формул к системе Солнце — Земля и использование результатов экспериментов по лазерной локации Луны с учетом других экспериментов показало с высокой точностью $O(10^{-10})$, что отношение пассивной массы Земли к инертной не равно единице, отличаясь от нее приблизительно на 10^{-8}. Земля при своем движении по орбите совершает колебательное движение относительно опорной геодезической с периодом порядка 1 ч и амплитудой не менее 10^{-3} см. Хотя эта амплитуда—величина малая, однако она имеет постньютоновский порядок малости $A \sim \varepsilon^2 R_{\oplus}$, а следовательно, отклонение движения центра масс Земли от геодезического движения можно обнаружить в соответствующем эксперименте, имеющем постньютоновскую степень точности.

В данном разделе показано только одно из следствий эффекта отклонения движения центра масс Земли от движения по геодезической риманова пространства — времени — наличие движения центра масс Земли относительно пробного тела, помещенного в достаточно малой полости в окрестности центра масс Земли. Однако негеодезичность движения центра масс Земли будет, конечно, приводить к наблюдаемым следствиям и в других постньютоновских экспериментах, в частности в экспериментах, проводимых с пробными телами на поверхности Земли. Поэтому теоретический анализ различных гравиметрических экспериментов и последующая целенаправленная их постановка позволят провести дальнейшее уточнение численного значения постньютоновских параметров.

18. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СЛАБЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ ПОЛЯМИ В ПОЛЕВОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

В последнее время в литературе большое внимание уделяется изучению процессов взаимодействия слабых гравитационных волн с электромагнитными полями различных объектов. Интерес исследователей к этим процессам в основном обусловлен тем, что полученные здесь результаты могут служить теоретической основой для расчета различных детекторов высокочастотного гравитационного излучения.

Схема расчета взаимодействия слабых гравитационных волн с электромагнитными полями в полевой теории гравитации полностью совпадает со схемой расчета этого взаимодействия в любой другой метрической теории гравитации и основана на применении теории возмущений к общековариантным уравнениям Максвелла.

Уравнения Максвелла в этом случае записываются в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} F^{ik}{}_{;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^k}[\sqrt{-g}\,F^{ik}] = -\frac{4\pi}{c}j^i;\\ F_{ik;l}+F_{kl;i}+F_{li;k}=0.\end{aligned}\right\} \tag{357}$$

Если ввести четырехмерный вектор-потенциал A_i с помощью соотношения

$$F_{ik} = A_{k;i} - A_{i;k}, \tag{358}$$

то при выполнении условия $A^i_{;i} = 0$ уравнения (357) можно записать так:

$$A_i{}^{;k}{}_{;k} - R_{ik}A^k = \frac{4\pi}{c}j_i.$$

При наличии слабых гравитационных волн метрический тензор эффективного риманова пространства—времени можно разложить по малому параметру $h \ll 1$ — амплитуде слабой гравитационной волны:

$$g^{ni} = \gamma^{ni} - h\overset{(1)}{f^{ni}} - h^2\overset{(2)}{f^{ni}} - \ldots, \qquad (359)$$

причем $f^{0i} = 0$ в силу ТТ-калибровки гравитационной волны. Аналогичному разложению подвергается также и 4-вектор тока

$$j^n = \overset{(0)}{j^n} + h\overset{(1)}{j^n} + h^2\overset{(2)}{j^n} + \ldots, \qquad (360)$$

где $\overset{(0)}{j^n}$ — исходный невозмущенный 4-вектор тока; $\overset{(p)}{j^n}h^p$ — поправки, обусловленные влиянием гравитационных волн на движение источника.

В этом случае 4-потенциал следует искать в виде

$$A_i = \overset{(0)}{A_i} + h\overset{(1)}{A_i} + h^2\overset{(2)}{A_i} + \ldots, \qquad (361)$$

где $\overset{(0)}{A_n}$ — 4-потенциал исходного невозмущенного электромагнитного поля; $h^p\overset{(p)}{A_n}$ — поправки к 4-потенциалу в p-м порядке теории возмущений, обусловленные влиянием гравитационных волн.

Подставляя разложения (359) — (361) в уравнения Максвелла (357), разлагая полученное соотношение в ряд по степеням h и приравнивая к нулю выражения, играющие роль коэффициентов этого ряда, получим уравнения Максвелла в приближении p-порядка.

Ограничиваясь приближением первого порядка по h, имеем:

$$\Box\overset{(0)}{A^n} = \frac{4\pi}{c}\overset{(0)}{j^n}; \quad \Box\overset{(1)}{A^n} = \frac{4\pi}{c}[j^n_{\text{int}} + \overset{(1)}{j^n}], \qquad (362)$$

где

$$\left.\begin{aligned} j^0_{\text{int}} = -\frac{c}{4\pi}\operatorname{div}\mathbf{D}; \quad \mathbf{j}_{\text{int}} = -\frac{c}{4\pi}\left[\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial x^0} + \operatorname{rot}\mathbf{B}\right]; \\ D^\alpha = \overset{(1)}{f^{\alpha\beta}}\overset{(0)}{E_\beta}; \quad B^\alpha = \overset{(1)}{f^{\alpha\beta}}\overset{0}{H_\beta}. \end{aligned}\right\} \qquad (363)$$

Таким образом, чтобы рассчитать взаимодействие слабых гравитационных волн с электромагнитным полем в первом порядке теории возмущений, необходимо сначала по заданному распределению зарядов и токов в отсутствие гравитационных волн определить исходное невозмущенное электромагнитное поле [первое из уравнений (362)]. Затем, используя полученное решение, а также поправку к 4-вектору тока, линейную по h, из уравнения (362) найдем вектор-потенциал в первом порядке теории возмущения, обусловленный воздействием гравитационных волн на систему. Из выражений (363) видно, что в первом приближении воздействие гравитационных волн на исходное электромагнитное поле аналогично введению тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей вакуума, зависящих от координат и от времени.

Эффективность процесса взаимодействия характеризуется коэффициентом превращения α, равным отношению плотности потока энергии возникающей электромагнитной волны к плотности потока энергии исходной гравитационной волны: $\alpha = S_{\text{эмв}}/S_{\text{гв}}$.

Следует отметить, что в общем случае необходимо рассматривать уравнения Максвелла совместно с уравнениями гравитационного поля (113) полевой теории гравитации, так как во внешнем поле, наряду с переходом энергии гравитационных волн в энергию электромагнитных волн, происходит и обратный процесс. Если $\alpha \ll 1$, то обратный процесс можно не учитывать. Если же α близко или больше единицы, то необходимо рассматривать оба процесса совместно, а также учитывать возмущения других типов, которые сделают неполным переход энергии гравитационной волны в энергию электромагнитных волн. В качестве примера расчета взаимодействия слабых гравитационных волн с электромагнитными полями в полевой теории гравитации изучим, например, возможности использования нейтронных звезд в качестве космических детекторов гравитационных волн.

Как известно, в настоящее время решение проблемы обнаружения гравитационных волн обычно связывают с возможностью их детектирования в лабораторных условиях. Однако гравитационные волны можно обнаружить и по наличию характерных особенностей у электромагнитной волны, возникающей в результате взаимодействия гравитационных волн с полями астрофизических объектов, например с полем нейтронной звезды.

Этот новый способ обнаружения гравитационных волн, предлагаемый нами, в отдельных случаях может оказаться гораздо эффективнее, чем традиционное использование лабораторных детекторов, так как нейтронные звезды имеют электромагнитные поля, напряженность которых недостижима в лабораторных условиях ($H \approx 10^{14} \div 10^{16}$ А/м), и поля такой напряженности простираются на значительные расстояния ($r \approx 10^4 \div 10^6$ м), образуя тем самым космический детектор гравитационных волн.

Другое преимущество этого способа состоит в том, что возникающую в результате взаимодействия электромагнитную волну можно регистрировать с применением современных радиотелескопов, собирающая поверхность которых достигает 10^4 м^2. Создание же лабораторных детекторов гравитационных волн с таким поперечным сечением маловероятно в ближайшем будущем.

Поэтому в отдельных случаях целесообразно использовать космические детекторы гравитационных волн, представленные в наше распоряжение природой. И хотя такие детекторы не позволяют экспериментатору воздействовать на них для получения всесторонней и полной информации о гравитационных волнах, тем не менее регистрация гравитационных волн с использованием космического детектора важна для решения вопроса о существовании гравитационных волн и для правильного и целенаправленного совершенствования лабораторных детекторов.

В этой связи следует особо подчеркнуть, что непременным условием, позволяющим утверждать о регистрации гравитационных волн космическим детектором, должно быть наличие таких особенностей у возникающей электромагнитной волны, которые позволяют с большой степенью достоверности отличить ее от электромагнитной волны, возникающей в любом другом процессе. Этому условию в достаточной мере отвечают рассматриваемые ниже процессы.

Взаимодействие плоской гравитационной волны с полем магнитного диполя. Рассмотрим поле магнитного диполя с магнитным моментом $\mathbf{m}$, помещенного в начало координат:

$$\mathbf{H} = [3\,(\mathbf{rm})\,\mathbf{r} - r^2\mathbf{m}]/r^5. \tag{364}$$

Примером таких полей могут служить магнитные поля частиц, планет, нейтронных звезд.

Пусть на оси z, достаточно далеко от магнитного диполя, находится источник, который излучает монохроматические сферические гравитационные волны (127). В области пространства, линейные размеры которой значительно меньше расстояния от центра этой области до источника гравитационных волн, сферическую гравитационную волну можно рассматривать как эллиптически поляризованную плоскую волну. Поэтому в нашем случае выражение (127) в окрестности магнитного диполя ($n^3 \approx 1$, $n^1 = n^2 \approx 0$) принимает вид:

$$\left.\begin{aligned} f^{11} &= -f^{22} = h_0 \cos 2\beta \exp\left[\mathrm{i}\,(kz - \omega t)\right]; \\ f^{12} &= \mathrm{i} h_0 \sin 2\beta \exp\left[\mathrm{i}\,(kz - \omega t)\right], \end{aligned}\right\} \tag{365}$$

где h_0 — амплитуда гравитационной волны, причем $h_0 \ll 1$. Используя выражения (365) и (100) и усредняя по поляризациям, амплитуду h_0 можно выразить через плотность потока F энергии гравитационной волны:

$$h_0^2 = 32\pi GF/(k^2c^5).$$

Степень эллиптичности поляризации гравитационной волны (365) измеряется величиной $\operatorname{tg} 2\beta$. Если $\operatorname{tg} 2\beta = 0$ или ∞, то волна линейно-поляризованна; если $|\operatorname{tg} 2\beta| = 1$, то волна поляризована по кругу. При других значениях $\operatorname{tg} 2\beta$ волна является эллиптически-поляризованной. Если $\operatorname{tg} 2\beta > 0$, то волна имеет правовинтовую поляризацию, если $\operatorname{tg} 2\beta < 0$, то левовинтовую. Изучим взаимодействие плоской эллиптически-поляризованной гравитационной волны (365) с полем магнитного диполя (364). Из уравнений Максвелла (362) после линеаризации по малому параметру h_0 получим достаточно простые уравнения:

$$\Box \overset{(1)}{\mathbf{A}} = \operatorname{rot} \mathbf{B}; \quad \Box \overset{(1)}{A^0} = 0. \tag{366}$$

Следует заметить, что если мы рассматриваем поле (364) как поле частицы с магнитным моментом $\mathbf{m}$, то считаем, что гравитационная волна не изменяет $\mathbf{m}$. Если же поле (364) — поле планет или звезд, то считаем, что оно создается кольцевыми токами, циркулирующими внутри объема проводящей планеты или звезды. В этом случае исходная гравитационная волна воздействует на кольцевые токи и в выражении (360) имеем

$$\overset{(1)}{j^n} = f^n(\mathbf{r}) \exp[\mathrm{i}(kz - \omega t)]. \tag{367}$$

Легко убедиться, что вклад этих токов в излучение мал по сравнению с излучением, возникающим в результате взаимодействия гравитационной волны с магнитным полем вне звезды, так как излучение, обусловленное токами (367), возникает внутри проводящих планет или звезд и поэтому практически поглощается на расстоянии, равном нескольким длинам волн от точки излучения, превращаясь в джоулево тепло планеты или звезды. Считая, что $\Box \overset{(1)}{\mathbf{A}} = \operatorname{rot} \mathbf{L}$, уравнения (366) перепишем в виде: $\Box \mathbf{L} = \mathbf{B}$.

Легко убедиться, что:

$$\left.\begin{aligned} L^1 &= \frac{\partial\psi}{\partial y} \mathrm{i} \sin 2\beta + \frac{\partial\psi}{\partial x} \cos 2\beta; \\ L^2 &= \frac{\partial\psi}{\partial x} \mathrm{i} \sin 2\beta - \frac{\partial\psi}{\partial y} \cos 2\beta, \end{aligned}\right\} \tag{368}$$

а функция ψ удовлетворяет уравнению

$$\Box \psi = (\mathbf{m}\mathbf{r}/r^3) \exp[\mathrm{i}(kz - \omega t)]. \tag{369}$$

Запишем решение уравнения (369) в виде запаздывающих потенциалов. Так как в (369) источник задан во всем пространстве, необходимо производить точный учет запаздывания. После интегрирования просуммируем полученные бесконечные ряды. В результате имеем

$$\psi = \frac{\mathrm{i}}{2k} \left[\frac{m_1 x + m_2 y}{r(r-z)} - \frac{m_3}{r} \right] [\exp(\mathrm{i}kr) - \exp(\mathrm{i}kz)] \exp(-\mathrm{i}\omega t). \tag{370}$$

Используя выражения (368) и (370), найдем выражение для радиальной компоненты плотности потока энергии электромагнитной волны, возникающей в результате взаимодействия. Опуская слагаемые, убывающие быстрее $1/r^2$ для всех значений углов θ и φ, получаем

$$S_r = \frac{k^2GF}{2c^4r^2}\Big\{[(1+\cos\theta)(m_1\cos\varphi + m_2\sin\varphi) -$$
$$- m_3\sin\theta]^2[1+\cos^2\theta - \sin^2\theta\cos 4\varphi\cos 4\beta] -$$
$$-\frac{2(m_1\cos\varphi + m_2\sin\varphi)^2\cos^3\theta\,(1+\cos\theta)^2}{kr(1-\cos\theta)}\sin k(r-z) +$$
$$+\frac{2(m_1^2+m_2^2)\cos^2\theta\,(1+\cos\theta)}{k^2r^2(1-\cos\theta)^2}[1-\cos k(r-z)]\Big\}. \qquad (371)$$

Исследуем это выражение подробнее, поскольку измерение плотности потока энергии возникающей электромагнитной волны (371) и выявление всех особенностей этого излучения дает наблюдателю возможность получить информацию об исходной гравитационной волне (365).

Из формулы (371) для излучения вперед ($\theta = 0$) имеем

$$S_r = S_z = \frac{k^2GF}{c^4r^2}(m_1^2 + m_2^2). \qquad (372)$$

Поэтому если гравитационная волна распространяется через облако, содержащее большое число N хаотически расположенных, но поляризованных частиц одного сорта, то для излучения вперед на большом расстоянии от облака согласно [138] имеем

$$S_{z\,\mathrm{tot}} = \frac{k^2GF}{c^4r^2}(m_1^2 + m_2^2)N^2.$$

Интенсивность излучения электромагнитных волн при взаимодействии гравитационной волны с поляризованной частицей будет

$$I = \frac{\pi k^2GF}{30c^4}[101(m_1^2+m_2^2) + 48m_3^2].$$

Если частица не поляризована, то

$$I = \frac{25\pi k^2GF}{9c^4}|\mathbf{m}|^2.$$

Из формул (371) и (372) видно, что S_r и S_z меняются не только с изменением точки наблюдения (θ, φ), но и с изменением ориентации магнитного момента $\mathbf{m}$. Предположим, что магнитный диполь вращается квазистационарно вокруг некоторой оси, лежащей в плоскости xz с частотой $\omega_0 \ll \omega$.

Условие квазистационарности в данном случае означает, что расстояние от магнитного диполя до точки наблюдения удовлетворяет соотношению: $r \ll c/\omega_0$. Тогда на этом расстоянии взаимодействием гравитационной волны с возникшим магнитодипольным излучением можно пренебречь по сравнению с взаимодействием гравитационной волны с полем (364). При $r > c/\omega_0$ необходимо учитывать и взаимодействие гравитационной волны с возникшим магнитодипольным излучением. Будем считать для определенности, что ось вращения перпендикулярна к вектору $\mathbf{m}$ и составляет угол β_1 с осью z. В этом случае

$$\mathbf{m} = |\,\mathbf{m}\,|\,\{-\cos\beta_1\cos\omega_0 t;\ -\sin\omega_0 t;\ \sin\beta_1\cos\omega_0 t\}. \tag{373}$$

Тогда в результате взаимодействия гравитационной волны (365) с магнитным полем вращающегося диполя возникает электромагнитная волна с частотой ω, модулированная по амплитуде частотой ω_0, и с глубиной модуляции, зависящей от углов β_1, θ, φ:

$$S_z = \frac{k^2GF\mathbf{m}^2}{2c^4r^2}\,[1+\cos^2\beta_1-\sin^2\beta_1\cos 2\omega_0 t] \tag{374}$$

и при $\theta^2 \gg \pi/kr$

$$S_r = \frac{k^2GF\mathbf{m}^2}{2c^4r^2}\,[(1+\cos\theta)(\cos\varphi\cos\beta_1\cos\omega_0 t+\sin\varphi\sin\omega_0 t)+ \\ +\sin\theta\sin\beta_1\cos\omega_0 t]^2\,[1+\cos^2\theta-\sin^2\theta\cos 4\varphi\cos 4\beta_1]. \tag{375}$$

Поэтому к наблюдателю высокочастотная электромагнитная волна будет приходить импульсами, с периодом $T = 2\pi/\omega_0$ (аналогично излучению пульсара). Усредняя выражения (374) и (375) по периоду $T = 2\pi/\omega_0$, найдем количество энергии электромагнитной волны, проходящей через площадку с поперечным сечением 1 см² в каждом импульсе:

$$\overline{S}_r = \frac{\pi k^2GF\mathbf{m}^2}{2c^4r^2\omega_0}\,[(1+\cos\theta)\sin\theta\cos\varphi\sin 2\beta_1+\sin^2\theta\sin^2\beta_1+ \\ +(1+\cos\theta)^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\cos^2\beta_1)]\,[1+\cos^2\theta- \\ -\sin^2\theta\cos 4\varphi\cos 4\beta_1]. \tag{376}$$

В направлении оси z имеем

$$\overline{S}_z = \frac{2\pi k^2GF\mathbf{m}^2}{c^4r^2\omega_0}\left[1-\frac{\sin^2\beta_1}{2}\right]. \tag{377}$$

Энергия электромагнитных волн, излучаемая в одном импульсе по всем направлениям:

$$\overline{I} = \frac{\pi k^2GF\mathbf{m}^2}{15c^4\omega_0}\left[101-\frac{53}{2}\sin^2\beta_1\right]. \tag{378}$$

Таким образом, в результате взаимодействия плоской гравитационной волны с полем вращающегося магнитного диполя возникает электромагнитная волна с частотой, равной частоте гравитационной волны, и амплитудой, модулированной частотой вращения диполя.

Оценим, на каком расстоянии от нейтронной звезды можно зарегистрировать возникающую в результате такого взаимодействия электромагнитную волну. Следуя работе [120], считаем, что в радиодиапазоне можно зарегистрировать электромагнитную волну с плотностью энергии

$$S_{\min} = 10^{-19}\ \text{Вт/м}^2. \tag{379}$$

Используя параметры нейтронных звезд [120, 139], получаем, что магнитный момент звезды

$$|\mathbf{m}| \approx 10^{28} \div 10^{29}\ \text{А}\cdot\text{м}^2. \tag{380}$$

Из выражения (377) имеем

$$r = (\omega\,|\mathbf{m}|/c^3)\sqrt{GF/S}.$$

С учетом оценок (379) и (380) получим, что

$$r \leqslant 2\,(10^{15} \div 10^{16})\,(\omega/c)\,\sqrt{F}\ \text{м}.$$

Поскольку большинство известных нейтронных звезд [130—142] находится на расстоянии $r \approx 10^{17} \div 10^{19}$ м от Земли, наблюдатель на Земле зарегистрирует возникающую в результате взаимодействия электромагнитную волну, если плотность потока энергии гравитационной волны, падающей на нейтронную звезду, $F \approx (10^5 \div 10^7)$ Вт/м^2.

Оценим также минимальное значение потока энергии гравитационных волн, которое можно обнаружить в результате взаимодействия плоской гравитационной волны (365) с магнитными моментами частиц, составляющих облако астрофизических размеров. На расстояниях значительно больших по сравнению с размером облака применима формула (372) для излучения вперед, поэтому, полагая радиус облака L порядка 10^{14} м, концентрацию частиц облака $n \approx 10^9$ м$^{-3}$, расстояние от облака до точки наблюдения $r \approx 10^{17}$ м, получаем, что минимальное значение потока энергии гравитационной волны, которое можно обнаружить в результате этого взаимодействия, $F = 10^{-3}$ Вт/м^2.

Взаимодействие слабой гравитационной волны с полем вращающегося магнитного диполя. Другая схема космического детектора реализуется, когда источник слабых гравитационных волн находится внутри вращающейся нейтронной звезды. Согласно [121, 122] в недрах звезд происходит фоторождение гравитонов в кулоновских и магнитных дипольных полях частиц, составляющих вещество звезды, а также в магнитном поле всей звезды. Таким образом, звезды — источники слабых гравитационных волн, причем в зависимости от спектра исходных фотонов результирующее гравитационное излучение может принадлежать любой области частот. Многие звезды имеют поле, совпадающее с полем вращающегося магнитного диполя, у которого магнитная ось расположена под углом к оси вращения. Не ставя целью детальное описание реальных процессов, проходящих внутри звезд и приводящих к появлению поля магнитного диполя, рассмотрим простейшую модель вращающегося магнитного диполя.

Предположим, что звезда представляет собой проводящий шар радиуса b, который вращается с постоянной частотой $\omega_0 \ll c/b$ вокруг оси, проходящей через центр шара. Пусть внутри шара циркулируют замкнутые токи, магнитный момент которых $\mathbf{m}$ жестко связан с шаром и составляет угол β с осью вращения. После несложных вычислений получим следующее выражение для электромагнитного поля вне шара ($r \gg b$):

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{E} = [\mathbf{r}\dot{\mathbf{m}}(t')]/(cr^3) + [\mathbf{r}\ddot{\mathbf{m}}(t')]/(c^2r^2);\\ &\mathbf{H} = [3\mathbf{r}(\mathbf{m}(t')\mathbf{r}) - r^2\mathbf{m}(t')]/r^5 +\\ &+ 3\mathbf{r}(\dot{\mathbf{m}}(t')\mathbf{r})/(cr^4) - \dot{\mathbf{m}}(t')/(cr^2) +\\ &+ [\mathbf{r}(\ddot{\mathbf{m}}(t')\mathbf{r}) - r^2\ddot{\mathbf{m}}(t')]/(c^2r^3), \end{aligned}\right\} \quad (381)$$

где $\mathbf{m} = |\mathbf{m}|\,\{\sin\beta\cos\omega_0 t';\ \sin\beta\sin\omega_0 t';\ \cos\beta\}$; $t' = t - r/c$.

Предположим, что источник гравитационных волн внутри звезды излучает на фоне плоского пространства — времени гравитационные волны частоты $\omega \gg \omega_0$.

Рассмотрим простейшую слабую ($h \ll 1$) гравитационную волну, компоненты которой вне источника записываются в виде:

$$\left.\begin{aligned} &f^{12} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi}f^{11};\quad f^{23} = -\frac{\partial}{\partial\varphi}f^{13};\quad f^{33} = 0;\\ &f^{11} = -f^{22} = hkb\,\frac{H^{(1)}_{7/2}(kr)}{\sqrt{kr}}\,P_3^2(\theta)\sin 2\varphi\exp(-i\omega t);\\ &f^{13} = -\frac{hkb}{\sqrt{kr}}\,[2H^{(1)}_{7/2}(kr)\,P_3^1(\theta) + 12H^{(1)}_{3/2}(kr)\,P_1^1(\theta)]\times\\ &\times\sin\varphi\exp(-i\omega t). \end{aligned}\right\} \quad (382)$$

Интенсивность гравитационного излучения после усреднения по периоду волны имеет вид:

$$dI/d\Omega = 225h^2k^2b^2c^5\sin^4\theta/(16\pi G). \quad (383)$$

Выражая амплитуду гравитационной волны h через мощность источника F, получаем $h = \sqrt{\pi FG/(30k^2b^2c^5)}$. Будем считать, что взаимодействие гравитационной волны (382) с полем вращающегося магнитного диполя (381) происходит в вакууме.

Решение уравнений (362) будет единственным, если потребовать выполнения условия излучения Зоммерфельда и непрерывности касательных составляющих полей **E** и **H** на поверхности шара. Подставляя выражения (381) и (382) в (363), находим:

$$\left.\begin{aligned} q_{\text{int}} &= q_1(\mathbf{r})\exp[-\mathrm{i}(\omega+\omega_0)t]+q_2(\mathbf{r})\exp[-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t];\\ \mathbf{j}_{\text{int}} &= \mathbf{j}_0(\mathbf{r})\exp(-\mathrm{i}\omega t)+\mathbf{j}_1(\mathbf{r})\exp]-\mathrm{i}(\omega+\omega_0)t]+\\ &\quad+\mathbf{j}_2(\mathbf{r})\exp[-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t]. \end{aligned}\right\}\qquad(384)$$

Легко убедиться, что взаимодействия волновой части гравитационной волны (382) с волновой частью электромагнитной волны (381) не происходит и вклад в выражения (384), соответствующий этому взаимодействию, равен нулю. Отметим также, что выражения (384) разлагаются в ряды с конечным числом членов по сферическим функциям первого рода.

Запишем решение уравнений (362) в виде запаздывающих потенциалов. Правая часть уравнений (362) задана во всем пространстве вне шара радиуса b, поэтому точка наблюдения находится внутри области интегрирования. Таким образом, существенно необходимо произвести точный учет запаздывания. Используя теорему Гегенбауэра, позволяющую производить точный учет запаздывания, для напряженностей полей E и H, возникающей электромагнитной волны при $r \gg b$, получаем (оставлены только главные члены):

$$\left.\begin{aligned} E_\theta &= \frac{15\mathrm{i}hkb\,|\mathbf{m}|}{4r}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}\right]\Big[\sin\beta\cos\theta\,\times\\ &\quad\times\cos\Big(\varphi-\omega_0 t+\frac{\omega_0 r}{c}\Big)-\cos\beta\sin\theta\Big]\sin^2\theta\exp[-\mathrm{i}(\omega t-kr)];\\ E_\varphi &= \frac{15\mathrm{i}hkb\,|\mathbf{m}|}{4r}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}\right]\sin\beta\sin^2\theta\,\times\\ &\quad\times\sin\Big(\varphi-\omega_0 t+\frac{\omega_0 r}{c}\Big)\exp[-\mathrm{i}(\omega t-kr)];\ H_\varphi=E_\theta;\ H_\theta=-E_\varphi. \end{aligned}\right\}\qquad(385)$$

Из (385) видно, что в результате взаимодействия гравитационной волны (382) с полем вращающегося магнитного диполя (381) возникает электромагнитная волна частоты ω, амплитуда которой модулирована частотой $\omega_0 \ll \omega$, причем глубина модуляции зависит от координат точки наблюдения и от угла β. Интересно отметить, что основной вклад в результат взаимодействия дает взаимодействие волновой части гравитационной волны с неволновой частью магнитного поля $\mathbf{H}_0 = \mathbf{m}/r^3$.

Эффект амплитудной модуляции можно понять из следующих простых соображений: гравитационная волна не взаимодействует с волновой частью электромагнитного поля вращающейся нейтронной звезды, а взаимодействует лишь с неволновыми частями. Поле, описываемое этими членами, достаточно быстро убывает с ростом расстояния от звезды, следовательно, и основная часть возникающего излучения образуется вблизи поверхности звезды. На этих же расстояниях поле можно считать полем магнитного диполя, вращающегося квазистационарно, т. е. его мгновенное значение в некоторой точке определяется положением магнитного диполя в тот же момент времени. Гравитационная волна в первом порядке теории возмущения взаимодействует только с компонентами магнитного поля, поперечными к направлению ее распространения, следовательно, в направлении магнитной оси излучение возникшей электромагнитной волны отсутствует, а в направлениях, перпендикулярных к направлению магнитной оси, оно максимально. Таким образом, амплитуда электромагнитной волны различна для разных направлений. При вращении магнитного диполя вокруг оси, не совпадающей с магнитной осью, вся эта диаграмма направленности электромагнитного излучения вращается с частотой вращения диполя, в результате амплитуда высокочастотной электромагнитной волны у неподвижного наблюдателя будет периодически меняться, т. е. будет происходить амплитудная модуляция. Глубина модуляции и ее частота определяются как углом между магнитной осью и осью вращения, так и месторасположением наблюдателя.

Для плотности потока энергии электромагнитной волны в элемент телесного угла после усреднения по периоду $T = 2\pi/\omega$ имеем

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{15FGm^2}{256c^4}\left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\right]^2 \sin^4\theta\,[1 - \cos^2\beta\cos^2\theta - \sin^2\theta\sin^2\beta\cos 2(\varphi - \omega_0 t + \omega_0 r/c) - \sin 2\beta\sin\theta\cos\theta\cos(\varphi - \omega_0 t + \omega_0 r/c)]. \tag{386}$$

Поэтому к наблюдателю высокочастотная электромагнитная волна будет приходить импульсами (аналогично излучению пульсаров), форма и частота которых зависят от r, θ, φ, β. Для невращающегося магнитного диполя в (386) следует положить $\omega_0 = 0$.

Полный поток излучения через сферу радиуса r_0:

$$I = \frac{FGm^2}{8c^4}\left[1 - \frac{\cos^2\beta}{7}\right]\left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r_0^2}\right]^2. \tag{387}$$

Из формулы (387) следует, что основная часть высокочастотного электромагнитного излучения образуется в области $b < r < 10b$; а вне ее — только около $2\cdot 10^{-2}$ мощности излучения.

Определим коэффициент превращения энергии гравитационной волны в электромагнитную:

$$\alpha = \frac{\pi G m^2}{8c^4}\left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\right]^2 [1 - \cos^2\beta\cos^2\theta - \sin^2\theta\sin^2\beta\cos 2 \times (\varphi - \omega_0 t + \omega_0 r/c) - \sin 2\beta\sin\theta\cos\theta\cos(\varphi - \omega_0 t + \omega_0 r/c)]. \tag{388}$$

Коэффициент α отражает свойства преобразователя — поля (381). До этого предполагалось, что источник излучает строго когерентные гравитационные волны. Однако разумнее предполагать, что гравитационные волны создаются большим числом отдельных излучателей, каждый из которых излучает цуги гравитационных волн со случайной фазой и произвольно ориентированной диаграммой направленности (383), в результате возникает некогерентная гравитационная волна со сферической диаграммой направленности излучения. В данном случае плотность потока энергии электромагнитных волн

$$S = F\alpha/(4\pi r^2). \tag{389}$$

Следует заметить, что мы всюду пренебрегали влиянием на процесс взаимодействия показателя преломления среды, собственного статического гравитационного поля звезды, а также возмущения других типов. Но все приведенные выше возмущения лишь уменьшат плотность потока возникшей электромагнитной волны, качественно же эффект амплитудной модуляции от этого не меняется.

Из (388) следует, что если $2\,|\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\theta\,|$ значительно больше или значительно меньше единицы, то импульсы будут приходить с частотами ω_0 или $2\omega_0$ соответственно. Если величина $2\,|\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\theta\,|$ сравнима с единицей, то импульсы будут иметь сложную форму, так как будут складываться импульсы частот ω_0 и $2\omega_0$, причем амплитуда и фаза каждого из них будет зависеть от координат точки наблюдения и угла β. Следует отметить, что амплитудная модуляция дает только «окно», в котором можно наблюдать высокочастотную электромагнитную волну. Источник же гравитационных волн может давать нерегулярные по амплитуде гравитационные волны, поэтому наблюдатель на Земле зарегистрирует возникшую электромагнитную волну только тогда, когда в «окне» имеется достаточно мощный всплеск высокочастотной гравитационной волны.

Отметим еще две существенные особенности возникающего излучения. Из (385) следует, что излучение линейно-поляризованно, но состоит из двух частей. Плоскость поляризации одной части неподвижна, а у другой — вращается с частотой вращения звезды. При $\cos\theta > 0$ вращение плоскости поляризации происходит по часовой стрелке, при $\cos\theta < 0$ — против.

Таким образом, поляризация электромагнитного излучения, возникающего в результате взаимодействия слабой гравитационной волны с полем вращающегося магнитного диполя, является уникальной. Следует также отметить, что по поляризации электромагнитной волны и направлению вращения плоскости поляризации можно определить значения углов β, θ.

Из выражения (388) следует, что движение Земли вместе с наблюдателем относительно звезды приводит к изменению амплитуды и разности фаз импульсов частот ω_0 и $2\omega_0$, что, в свою очередь, вызывает изменение формы импульса — дрейф субимпульсов, составляющих результирующий импульс. Если движение Земли происходит вдоль направления r со скоростью v_r, то дрейф будет иметь периодический характер, причем за время, равное периоду дрейфа, пройдет $N = c/v_r$ импульсов. Считая, что $v_r = 380$ км/с (скорость движения Земли относительно нейтронных звезд [143]), получим $N \approx 10^3$. Это значение можно уменьшить, если радиальная скорость Земли относительно звезды больше. Из формулы (388) также следует, что при движении наблюдателя к оси вращения ($\sin\theta \to 0$) эффект амплитудной модуляции постепенно уменьшается.

Таким образом, и в этом случае возникающая электромагнитная волна имеет ряд особенностей (амплитудная модуляция, уникальные состояния поляризации, дрейф субимпульсов), которые позволяют отождествить ее возникновение как результат взаимодействия гравитационной волны с полем вращающейся нейтронной звезды.

Оценим расстояние, на котором можно зарегистрировать электромагнитную волну, возникающую в результате взаимодействия слабой гравитационной волны (382) с полем вращающейся нейтронной звезды (381). Используя параметры нейтронных звезд [139—143]: $b \approx 10^4$ м, $H \approx 10^{14} \div 10^{16}$ А/м, получаем, что в этом случае максимальное значение коэффициента превращения энергии гравитационных волн в энергию электромагнитных волн равно $\alpha_{\text{макс}} = 10^{-10}$. Согласно же работе [122] нейтронные звезды являются потенциальными источниками слабых гравитационных волн, мощность которых может достигать $F = 6 \cdot 10^{27}$ Вт, что соответствует амплитуде гравитационной волны $h \approx 10^{-20}$. Поэтому возникающую в результате взаимодействия электромагнитную волну можно зарегистрировать на расстоянии $r \approx 10^{18}$ м от нейтронной звезды.

Так как расстояние до большинства известных нейтронных звезд $r \approx 10^{17} \div 10^{19}$ м, рассмотренное нами взаимодействие позволяет по особенностям электромагнитной волны, возникающей в результате этого взаимодействия, не только осуществлять поиск достаточно мощного источника гравитационного излучения, но и проводить эксперименты в целях изучения свойств гравитационных волн и сравнения их с предсказаниями различных теорий гравитации. Тогда данные, полученные при таком измерении, наряду с ограничениями на величину постньютоновских параметров и коэффициентов Петерса—Мэтьюза, позволяют провести дальнейшее сужение круга теорий гравитации, претендующих на адекватное описание действительности.

12—0103

19. ВОЗМОЖНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ПОИСКУ РАЗЛИЧИЙ МЕЖДУ ПРЕДСКАЗАНИЯМИ ПОЛЕВОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ И ОТО ЭЙНШТЕЙНА

Полевая теория гравитации и ОТО Эйнштейна — совершенно разные теории гравитации, поскольку основные принципы этих теорий и уравнения гравитационного поля различны. Следовательно, в одной и той же физической ситуации эти теории будут давать различающиеся предсказания.

Особенно ярко различие между ними должно проявляться при описании в этих теориях гравитационных волн, а также эффектов, обусловленных сильными гравитационными полями. Следует отметить, что поскольку квадрупольная формула Эйнштейна не содержится в ОТО и вообще в теории Эйнштейна отсутствует какая-либо прямая связь между изменением энергии вещества и излучением волн кривизны, то ОТО в принципе не может объяснить потери энергии веществом на гравитационное излучение. Поэтому изучение движения двойных систем и определение возможных потерь энергии ими на гравитационное излучение явилось бы принципиальным экспериментальным тестом для полевой теории гравитации и ОТО. При этом наблюдение на эксперименте потерь энергии вещества на гравитационное излучение однозначно бы отвергало ОТО и служило бы подтверждением идей полевой теории гравитации.

Как было показано выше, характер поведения Вселенной на ранних стадиях ее эволюции при сильном гравитационном поле в полевой теории гравитации качественно отличается от соответствующего описания Вселенной в ОТО. Поскольку ранние стадии эволюции Вселенной существенно определяют плотности потоков и спектральные характеристики реликтовых электромагнитного, нейтринного и гравитационного излучений, то измерение перечисленных выше характеристик позволяет провести качественное сравнение результатов измерений с предсказаниями ОТО и полевой теории гравитации.

Кроме того, сильные гравитационные поля существенно определяют и внутреннее строение сверхплотных объектов. Поэтому различие описаний внутреннего строения звезд в полевой теории гравитации и ОТО Эйнштейна, таким образом, должно привести к отличающимся значениям для предельных масс устойчивых звезд. Существенно различаются также и свойства гравитационных волн в полевой теории гравитации и ОТО Эйнштейна при наличии внешних гравитационных полей.

Обычно в ОТО гравитационными волнами называют волны метрики и теоретическое исследование этих волн проводят на основе псевдотензоров энергии — импульса.

Но такой подход мы считаем абсолютно лишенным какого-либо физического смысла. Псевдотензоры энергии — импульса ОТО в принципе не имеют никакого отношения к существованию гравитационного поля, в результате чего все выводы, полученные на их основе, не отражают существа вопроса. В теории Эйнштейна можно говорить только о волнах кривизны, поскольку физической характеристикой гравитационного поля в ней является тензор кривизны. Именно этот тензор входит в уравнение девиации (3), лежащее в основе принципа действия любого из квадрупольно-массовых детекторов гравитационных волн.

Наличие волн кривизны в какой-либо области пространства-времени служит явным показателем наличия в данной области гравитационных волн, излучаемых некоторым источником. При этом волны кривизны не могут быть ни созданы, ни уничтожены в результате преобразования координатной системы. Волны же метрики не могут служить критерием наличия гравитационных волн, излучаемых каким-либо источником, поскольку волны метрики могут быть созданы и в результате простого преобразования координатной системы. Поэтому под гравитационными волнами в ОТО мы всегда будем подразумевать волны кривизны, описываемые тензором четвертого ранга — тензором кривизны.

В ОТО естественная геометрия для электромагнитных волн и волн метрики — единая риманова геометрия. Поскольку волны кривизны выражаются через вторые производные от поперечной части волн метрики, то и для волн кривизны естественная геометрия — риманова геометрия. Поэтому в теории Эйнштейна распространение электромагнитных волн и волн кривизны будет происходить единообразно: волны кривизны в той же мере, что и электромагнитные волны, подвержены гравитационному смещению частоты $\delta\nu/\nu = U_1 - U_2$, испытывают равное с ними искривление луча $\delta\varphi = 4M/b$ и имеют равные скорости распространения, а следовательно, и одинаковые времена задержки во внешних гравитационных полях.

В полевой теории гравитации естественной геометрией для гравитационного поля является псевдоевклидова геометрия, в то время как вещество описывается в эффективной римановой геометрии. Следовательно, в полевой теории гравитации внешние гравитационные поля оказывают влияние только на распространение электромагнитных волн. Гравитационные волны в полевой теории гравитации распространяются по геодезическим псевдоевклидова пространства — времени и для них отсутствуют эффекты гравитационного красного смещения частоты, искривления луча и временной задержки сигнала во внешних гравитационных полях. Скорость распространения гравитационных волн в полевой теории не зависит от внешних гравитационных полей.

Приведенные выше отличия свойств гравитационных волн в полевой теории гравитации и ОТО Эйнштейна позволяют предложить ряд экспериментов с использованием слабых гравитационных волн, в которых эти теории дают различающиеся предсказания. В принципе возможны следующие две постановки таких экспериментов.

Эксперименты с использованием лабораторных детекторов гравитационных волн. Ожидается [112—119], что в ближайшем будущем появится возможность регистрации в лабораторных условиях гравитационного излучения, приходящего от внеземных источников. Тогда использование двух или более детекторов гравитационных волн позволит [32] измерить с достаточной точностью угол искривления гравитационного луча в слабом гравитационном поле Солнца. Постановка этого эксперимента будет зависеть от того, является ли внеземной источник гравитационных волн еще и источником электромагнитного излучения или нет.

Если источник гравитационных волн не излучает электромагнитные волны, то данный эксперимент будет аналогичен измерению искривления светового луча. Тогда сравнение полученного значения угла искривления гравитационного луча с соответствующими значениями, предсказываемыми полевой теорией гравитации ($\delta\varphi = 0$) и ОТО Эйнштейна ($\delta\varphi = 4M/b$), покажет, в какой степени предсказания этих теорий согласуются с результатами экспериментов.

Если источник гравитационных волн излучает и электромагнитные волны, то схема эксперимента значительно упрощается, так как по теории Эйнштейна «электромагнитное» и «гравитационное» изображения источника всегда должны совпадать.

Согласно полевой теории гравитации картина будет несколько иная. При приближении края диска Солнца к линии, соединяющей источник гравитационных волн и наблюдателя, гравитационное и электромагнитное изображения источника начнут раздваиваться, причем электромагнитное изображение будет наблюдаться отстоящим дальше от центра Солнца, чем гравитационное. При касании краем диска Солнца линии, соединяющей наблюдателя и источник гравитационных волн, угловое расстояние между электромагнитным и гравитационным изображениями источника будет максимально и $\delta\varphi = 4\ M/b$. Перекрывание диском Солнца линии источник — наблюдатель приведет к исчезновению электромагнитного изображения. После прохождения диском Солнца этой линии электромагнитное изображение вновь возникнет, причем опять будет наблюдаться отстоящим дальше от центра Солнца на угловое расстояние $\delta\varphi = 4\ M/b$, чем гравитационное изображение. При удалении диска Солнца от линии источник — наблюдатель угловое расстояние между электромагнитным и гравитационным изображениями будет уменьшаться, и при $b \to \infty$ оба изображения совпадут.

Эксперименты, использующие лабораторные и космические детекторы гравитационных волн. Следует, однако, ожидать, что достаточно мощные источники слабых гравитационных волн в астрофизических условиях встречаются чрезвычайно редко. Может оказаться, что те источники гравитационных волн, которые можно зарегистрировать на Земле, достаточно далеко удалены от плоскости орбиты Земли, а следовательно, не перекрываются диском Солнца. В этом случае для постановки эксперимента, в котором полевая теория гравитации и ОТО дают различные предсказания, наряду с лабораторным детектором гравитационных волн существенно необходимо использовать и космические детекторы. В зависимости от взаимного расположения источника гравитационных волн и космического детектора возможны следующие две схемы экспериментов.

Первая из них реализуется, если источник слабых гравитационных волн находится внутри вращающейся нейтронной звезды. Многие нейтронные звезды [120] имеют электромагнитное поле, совпадающее с полем вращающегося магнитного диполя, магнитная ось которого составляет некоторый угол ψ_0 с осью вращения. Кроме того, согласно работам [121, 122] в недрах звезд происходит фоторождение гравитонов в кулоновских и магнитных дипольных полях частиц, составляющих вещество звезды, а также в магнитном поле всей звезды.

Таким образом, звезды — источник слабых гравитационных волн, причем в зависимости от спектра исходных фотонов результирующее гравитационное излучение может принадлежать любой области частот.

Расчеты показывают, что в полевой теории гравитации, так же как и в ОТО Эйнштейна, в результате взаимодействия слабых гравитационных волн с электромагнитным полем вращающейся нейтронной звезды возникает электромагнитная волна, которая будет иметь ряд уникальных особенностей (амплитудная модуляция, необычная поляризация, дрейф субимпульсов и т. д.). Таким образом, наблюдатель на Земле по этим особенностям с большой степенью достоверности может сделать вывод, что данная электромагнитная волна возникла в результате взаимодействия гравитационной волны с электромагнитным полем вращающейся звезды. Амплитуда возникшей электромагнитной волны будет несколько различная в этих теориях из-за различного влияния статического гравитационного поля на процесс взаимодействия, что в общем несущественно. Для нас более важно то обстоятельство, что во внешнем статическом гравитационном поле дальнейшее распространение возникшей электромагнитной и исходной гравитационной волн в полевой теории гравитации и в ОТО Эйнштейна будет происходить различным образом.

Согласно ОТО Эйнштейна обе волны будут распространяться по одним и тем же траекториям (лучам), претерпевая одинаковые гравитационные красные смещения частоты, испытывая одинаковые искривления луча и имея одинаковые групповые скорости. Поэтому наблюдатель на Земле, регистрируя их, должен обнаружить у них совпадение частот, одинаковую форму импульсов внутри окна, отсутствие временной задержки между приходом электромагнитного и гравитационного импульсов, а также совпадение электромагнитного и гравитационного изображений источника.

В полевой теории гравитации возникающая электромагнитная волна при ее распространении во внешнем гравитационном поле также будет подвержена гравитационному красному смещению частоты, ее лучи будут искривляться и групповая скорость зависеть от потенциала внешнего поля. Гравитационные же волны в полевой теории гравитации не подвержены влиянию гравитационного поля, вследствие этого они будут распространяться с постоянной скоростью, не изменяя частоты и не искривляясь во внешних гравитационных полях.

Следовательно, наблюдатель на Земле, регистрируя обе волны, должен обнаружить красное смещение электромагнитного спектра относительно спектра гравитационного, а также наличие временного запаздывания между приходом гравитационного и электромагнитного импульсов внутри окна. Кроме того, гравитационное и электромагнитное изображения источника в общем случае не будут совпадать.

Отметим также, что результаты этого эксперимента позволяют получить и ряд важных астрофизических данных. Действительно, как показано в [123, 124], по частоте и глубине амплитудной модуляции, а также по поляризации электромагнитной волны можно определить частоту вращения ω_0 нейтронной звезды, угол ψ_0 между осью вращения и магнитным моментом звезды, а также угол θ между осью вращения и направлением на Землю. Измеряя плотности потоков гравитационной и электромагнитной волн на Землю, можно определить коэффициент превращения α, а тем самым и произведение напряженности магнитного поля на поверхности звезды и ее радиуса.

Кроме того, в полевой теории гравитации этот эксперимент позволяет по значению красного смещения электромагнитного спектра относительно гравитационного спектра измерить разность гравитационных потенциалов между точкой наблюдения и поверхностью звезды:

$$U_2 - U_1 = -\delta\nu/\nu.$$

Измеряя время запаздывания между приходом гравитационного и электромагнитного импульсов ΔT, можно определить средний гравитационный потенциал U на пути распространения электромагнитной волны:

$$\overline{U}=\frac{1}{L}\int U\,dl\approx\frac{\Delta T}{2L},$$

где L — расстояние между нейтронной звездой и Землей.

Если источник гравитационных волн находится вне нейтронной звезды, то анализ результатов наблюдений будет несколько сложнее, так как источник, космический детектор и лабораторный детектор будут расположены в вершинах треугольника. Однако и в этом случае результаты наблюдений позволяют сделать вывод о свойствах гравитационных волн, а также получить ряд сведений об астрофизических объектах.

Таким образом, в ближайшем будущем после создания лабораторных детекторов гравитационных волн появится реальная возможность проверить предсказания полевой теории гравитации и ОТО Эйнштейна о свойствах гравитационных волн во внешних гравитационных полях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели формулировку полевой теории гравитации как теории симметрического тензорного поля второго ранга в плоском пространстве — времени. При этом в теории имеют строгий смысл обычные представления о переносе энергии физическими полями, и гравитационное поле, так же как и все другие физические поля, переносит положительно-определенную энергию — импульс. Уравнения движения материи формулируются в терминах эффективного риманова пространства — времени с метрическим тензором g_{ni}, что обеспечивает теории равенство инертной и гравитационной масс точечного тела. Объединение представлений о гравитационном поле как о физическом поле, переносящем энергию, с принципом тождественности приводит к новым уравнениям гравитационного поля и изменяет наши представления о пространстве — времени. Уравнения гравитационного поля в веществе нелинейны из-за нелинейной зависимости источника от компонент гравитационного поля. Источником в уравнениях гравитационного поля является вещество, само гравитационное поле служит источником лишь постольку, поскольку выражение $T^{ki}\partial g_{ki}/\partial f_{nm}$ зависит от компонент гравитационного поля. Вне вещества уравнения поля линейны. При этом из-за калибровочной инвариантности уравнения гравитационного поля, являющиеся уравнениями в частных производных четвертого порядка, вне вещества переходят в уравнения второго порядка.

Постньютоновское приближение полевой теории гравитации и анализ результатов современных гравитационных экспериментов показывают, что полевая теория гравитации с минимальной связью позволяет описать всю имеющуюся совокупность экспериментальных фактов. В полевой теории гравитации отсутствует предпочтительная система покоя, поскольку геометрия псевдоевклидова пространства — времени является не априорной, а естественной геометрией для всех физических полей, в том числе и для гравитационного. Риманово же пространство — время для движения вещества служит эффективным пространством — временем, отражающим лишь воздействие гравитационного поля на вещество в псевдоевклидовом пространстве — времени. Поэтому полевая теория гравитации ни по смыслу, ни по уравнениям поля не попадает в класс так называемых двуметрических теорий гравитации.

В полевой теории гравитации понятие тензора энергии — импульса — общее для всех физических полей, поэтому существование волн кривизны в римановом пространстве — времени отражает перенос энергии — импульса гравитационными волнами в псевдоевклидовом пространстве — времени. Следовательно, в полевой теории гравитации имеется возможность проводить различные энергетические расчеты. В полевой теории гравитации потери на излучение слабых гравитационных волн медленно движущимся источником определяются выражением

$$-dE/dt = (G/45c^5)\,\dddot{D}^2_{\alpha\beta}. \tag{390}$$

В отличие от полевой теории гравитации в ОТО законы сохранения в их обычном смысле отсутствуют, в результате чего теория Эйнштейна имеет только нулевые интегралы движения. В ОТО подсчет потерь энергии источником, а также определение потоков энергии гравитационных волн оказывается невозможным, так как в теории Эйнштейна нет каких-либо законов сохранения, связывающих изменение тензора энергии — импульса вещества с существованием волн кривизны. Следовательно, и формула (390) в принципе не следует из ОТО.

Уравнения поля полевой теории гравитации отличаются от уравнений теории Эйнштейна, что приводит к существенно различным описаниям в этих теориях эффектов в сильных гравитационных полях, а также свойств гравитационных волн. К числу отличий относится отсутствие в полевой теории искривления гравитационного луча, проходящего возле массивных тел, в результате чего массивные тела не оказывают фокусирующего действия на гравитационные волны. Кроме того, в отличие от теории Эйнштейна в полевой теории изменение частоты свободных гравитационных волн, излучаемых каким-либо источником, происходит только в результате относительного движения источника и наблюдателя (доплер-эффект), так как гравитационное красное смещение свободных гравитационных волн в вакууме отсутствует.

Как и в теории Эйнштейна, в полевой теории гравитации гравитационное поле нестатического сферически-симметричного источника вне вещества является статическим полем. Нестационарные однородные модели Вселенной в полевой теории гравитации описывают космологическое красное смещение и допускают монотонное и не монотонное поведение. В отличие от теории Эйнштейна параметр замедления определяется не только средней плотностью вещества во Вселенной, но и параметрами минимальной связи, поэтому в полевой теории гравитации не возникает тех трудностей, которые имеют место в ОТО Эйнштейна, связанных с недостаточной средней плотностью вещества для получения наблюдаемого параметра замедления.

В полевой теории гравитации с минимальной связью силы гравитационного притяжения с ростом гравитационного потенциала переходят в силы гравитационного отталкивания. Поэтому вместо гравитационного коллапса астрофизических объектов, который присущ ОТО, в данной теории имеет место новый механизм освобождения энергии, поскольку малые возмущения радиуса астрофизического объекта при достижении критического значения среднего гравитационного потенциала неизбежно приведут к расширению вещества, которое может сопровождаться выбросом некоторой части массы этого объекта с выделением энергии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Логунов А. А., Фоломешкин В. Н.** О геометризованных теориях гравитации.— ТМФ, 1977, т. 32, № 2, с. 147.
2. **Логунов А. А., Фоломешкин В. Н.** Энергия — импульс гравитационных волн в общей теории относительности.— ТМФ, 1977, т. 32, № 2, с. 167.
3. **Логунов А. А., Фоломешкин В. Н.** Проблема энергии — импульса и теория гравитации.— ТМФ, 1977, т. 32, № 3, с. 291.
4. **Логунов А. А., Фоломешкин В. Н.** Изменяется ли энергия источника при излучении гравитационных волн в теории гравитации Эйнштейна? — ТМФ, 1977, т. 33, № 2, с. 174.
5. **Денисов В. И., Логунов А. А.** Существует ли в общей теории относительности гравитационное излучение? — ТМФ, 1980, т. 43, № 2, с. 187.
6. **Денисов В. И., Логунов А. А.** Имеет ли общая теория относительности классический ньютоновский предел? — ТМФ, 1980, т. 45, № 3, с. 291.
7. **Logunov A. A., Denisov V. I.** Is There Possibility for Calculation of the Gravitational Energy in GR? — In: Abstr. Contrib., papers 9 Intern. Conf. on Gen. Relat., Jena, 1980, v. 3, p. 184.
8. **Денисов В. И., Логунов А. А.** Инертная масса, определенная в общей теории относительности, не имеет физического смысла.— Препринт ИЯИ АН СССР, 1981, П-0206.
9. **Власов А. А., Денисов В. И.** Формула Эйнштейна для гравитационного излучения не является следствием ОТО.— Препринт ИФВЭ, 1981, ОТФ 81-141.
10. **Синг Дж.** Общая теория относительности. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит. 1963.

11. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теория поля. 6-е изд., испр. и доп. М., Наука, 1973.
12. **Эйнштейн А.** Собрание научных трудов. Т. 1. М., Наука, 1965.
13. **Фок В. А.** Теория пространства, времени и тяготения. М., Физматгиз, 1955.
14. **Меллер К.** Теория относительности. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1975.
15. **Станюкович К. П.** Гравитационное поле и элементарные частицы. М., Наука, 1965.
16. **Толмен Р.** Относительность, термодинамика и космология. Пер. с англ. М., Наука, 1974.
17. **Вейнберг С.** Гравитация и космология. Пер. с англ. М., Мир, 1975.
18. **Эддингтон А. С.** Теория относительности. Пер. с англ. М., Гостехиздат, 1934.
19. **Brill D., Deser S., Faddeev L.** Sign of Gravitational Energy.— Phys. Lett. A, 1968, v. 26, p. 538.
20. **Choquet-Bruhat I., Marsden J. E.** Solution of the Local Mass Problem in GR.— Math. Phys., 1976, v. 51, p. 283.
21. **Schoen R., Yan S.-T.** On the Proof of the Positive Mass Conjecture in GR.— Math. Phys., 1979, v. 65, p. 45.
22. **Hu N.** Radiation Damping in the General Theory of Relativity.— Proc. Roy. Irish. Acad. A, 1947, v. 51, p. 87.
23. **Smith S., Havas P.** Effects of Gravitational Reaction in General Relativistic Two-body Problem by a Lorentz-invariant Approximation Method.— Phys. Rev. B, 1965, v. 138, N 2, p. 495.
24. **Infeld L.** Equation of Motion and Gravitational Radiation.— Ann. Phys., 1959, v. 6, N 4, p. 341.
25. **Trautman A.** On Gravitational Radiation Damping.— Bull. Acad. Polon. Sci., 1958, v. 6, N 10, p. 627.
26. **Сандина И. В.** Уравнения движения и излучение в релятивистской теории гравитации.— Дис. на соиск. канд. физ.-мат. наук. Алма-Ата, 1972.
27. **Петрова Н. М., Сандина И. В.** Гравитационное излучение для системы двух сферически-симметричных тел.— Докл. АН СССР, 1974, т. 217, № 2, с. 319.
28. **Логунов А. А. и др.** Новые представления о пространстве — времени и гравитации.— ТМФ, 1979, т. 40, № 3, с. 291.
29. **Власов А. А. и др.** Гравитационные эффекты в полевой теории гравитации.— ТМФ, 1980, т. 43, № 2, с. 147.
30. **Денисов В. И., Логунов А. А., Мествиришвили М. А.** Полевая теория гравитации и новые представления о пространстве — времени.— ЭЧАЯ, 1981, т. 12, вып. 1 с. 5.
31. **Denisov V. I., Logunov A. A.** The Field Theory of Gravitation.— In: Abstr. Contrib. Papers 9th Intern. Conf. on Gen. Relat. Gravit., Jena, 1980, v. 2, p. 468.
32. **Денисов В. И., Логунов А. А.** Новая теория пространства — времени и гравитации.— Препринт ИЯИ АН СССР, 1981, П-0199.
33. **Денисов В. И., Логунов А. А.** Полевая теория гравитации с минимальной связью.— В кн.: Тезисы докладов V Советской гравитационной конференции. 1981. Под ред. А. А. Соколова. М., Изд-во МГУ, 1981.
34. **Лобачевский Н. И.** Полное собрание сочинений. В 5 томах. М., Гостехиздат, 1949, т. 2, с. 159.
35. **Петров А. З.** Новые методы в общей теории относительности. М., Наука, 1966.
36. **Пуанкаре А.** Избранные труды. Т. 3. М., Наука, 1971.
37. **Minkowski H.** Raum und Ziet.— Z. Phys., 1909, Bd 10, S. 104.
38. **Логунов А. А.** Новые представления о пространстве — времени и тяготении.—Вопросы философии, 1981, № 6, с. 21.

39. **Логунов А. А.** Методические указания к циклу лекций «Основы теории относительности». М., МФТИ, 1980.
40. **Рашевский П. К.** Риманова геометрия и тензорный анализ. М., Наука, 1967.
41. **Einstein A.** Lichtgeschwindigkeit und Statik des Gravitationsfeldes.— Ann. Phys., 1912, Bd 38, S. 355.
42. **Einstein A.** Zum gegenwärtigen Stande des Gravitationsproblems.— Z. Phys., 1913, Bd 14, S. 1249.
43. **Nordström G.** Träge und schwere Masse in der Relativitätstheorie.— Ann. Phys., 1913, Bd 40, S. 856.
44. **Nordström G.** Zur Theorie der Gravitation vom Standpunkt des Relativitätsprinzips.— Ann. Phys., 1913, Bd 42, S. 533.
45. **Einstein A., Fokker A. D.** Die Nordströmische Gravitationstheorie vom Standpunkte des Absoluten Differentialkalküls.— Ann. Phys., 1914, Bd 44, S. 321.
46. **Whitehead A. N.** The Principle of Relativity. Cambridge, Cambridge Press. 1922, p. 221.
47. **Littlewood D. E.** Conformal Transformations and Kinematical Relativity.— Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, v. 49, N 1, p. 90.
48. **Papapetrou A.** Eine Theorie des Gravitationsfeldes Mit Einer Feldfunktion.— Z. Phys., 1954, Bd 139, S. 518.
49. **Papapetrou A.** Eine neue Theorie des Gravitationsfeldes.— Math. Nachr., 1954, Bd 12, S. 129.
50. **Bergmann O.** Scalar Field Theory as a Theory of Gravitation.— Amer. J. Phys., 1956, v. 24, N 1, p. 38.
51. **Dicke R. H.** Gravitation Without a Principle of Equivalence.— Rev. Mod. Phys., 1957, v. 29, N 3, p. 363.
52. **Yilmaz H.** New Approach to General Relativity.— Phys. Rev., 1958, v. 111, N 5, p. 1417.
53. **Пугачев Я. И.** Использование плоского пространства в теории гравитационного поля.— Изв. вузов. Сер. Физика, 1959, № 6, с. 152.
54. **Thirring W.** Lorentz-Invariante der Gravitations theorien.— Forsch. Phys., 1959, Bd 7, S. 79.
55. **Whitrow G. J., Morduch G. E.** General Relativity and Lorentz-Invariant Theories of Gravitations.— Nature, 1960, v. 188, N 4753, p. 790.
56. **Yilmaz H.** A New Gravitational Theory.— In: Evidence for Gravitational Theories. N.Y., Academic Press, 1962, p. 34—41.
57. **Dehnen H.** Zur Allgemein — Relativitäts Dynamuk.— Ann. Phys., 1964, Bd 13, N 3, S. 101.
58. **Codelupi R.** Possibilita di Una Teoria Isometrica Della Gravitazione.— Note Recens. Notiz., 1970, v. 19, N 2, p. 258.
59. **Muraskin M.** A Reexamination of Unified Field Theory.— Ann. Phys., 1970, v. 59, N 1, p. 27.
60. **Wagoner R. V.** Scalar-tensor Theory and Gravitational Waves.— Phys. Rev. D, 1970, v. 1. N 12, p. 3209.
61. **Петров А. З.** О выборочном моделировании поля тяготения Солнца.— Докл. АН СССР, 1970, т. 190, № 2, с. 305.
62. **Бриллюэн Л.** Новый взгляд на теорию относительности. Пер. с франц. М., Мир, 1972.
63. **Ni W. T.** A Compendium of Metric Theories of Gravity and Their Post-Newtonian Limits.— Astrophys. J., 1972, v. 176, N 3, p. 769.
64. **Rosen N.** Theory of Gravitation.— Phys. Rev. D, 1971, v. 3, N 10, p. 2317.
65. **Rosen N.** A Bi-metric Theory of Gravitation.— Gen. Relat. and Gravit., 1973, v. 4, N 6, p. 435.
66. **Rosen N.** A Theory of Gravitation.— Ann. Phys., 1974, v. 84, N 1, p. 455
67. **Ni W. T.** A New Theory of Gravity.— Phys. Rev. D, 1973, v. 7, N 10 p. 2880.

68. **Lightman A. P., Lee D. L.** New Two-metric Theory of Gravity with a Prior Geometry.— Phys. Rev. D, 1973, v. 8, N 10, p. 3293.
69. **Тредер Г. Ю.** Теория гравитации и принцип эквивалентности. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1973.
70. **Petry W.** Über eine Lorentz-Invariante Gravitationstheorie.— Ann. Inst. H. Poincaré A, 1975, Bd 22, N 4, S. 277.
71. **Petry W.** Eine nichtlineare Lorentz-Invariante Gravitationstheorie.— Ann. Phys., 1976, Bd 33, N 1, S. 6.
72. **Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.** Гравитация. Пер. с англ. Т. 3. М., Мир, 1977.
73. **Thirring W.** An Alternative Approach to the Theory of Gravitation.— Ann. Phys., 1961, v. 16, N 1, p. 96.
74. **Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.** Теория тяготения и эволюция звезд. М., Наука, 1971.
75. **Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.** Гравитация. Пер. с англ. Т. 1. М., Мир, 1977.
76. **Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.** Введение в теорию квантованных полей. Изд. 2-е, перераб. М., Наука, 1973.
77. **Ogievetsky V. I., Polubarinov I. V.** Interacting Field of Spin 2 and the Einstein Equation.— Ann. Phys., 1965, v. 35, p. 167.
78. **Fronsdal C.** On the Theory of Higher Spin Fields.— Nuovo cimento, 1958, v. 9, N 2, p. 416.
79. **Barnes K. J.** Lagrangian Theory for the Second Rank Tensor. Field.— J. Math. Phys., 1965, v. 6, N 5, p. 788.
80. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. Изд. 2-е, перераб. и доп. М., Наука, 1971.
81. **Will C. M.** Experimental Disproof of a Class of Linear Theories of Gravitations.— Astrophys. J., 1973, v 185, N 1, p. 31.
82. **Hulse R. A., Taylor J. H.** Discovery of a Pulsar in a Binary System.— Astrophys. J., 1975, v. 195, N 2, p. L51.
83. **Taylor J. H. e.a.** Measurements of General Relativistic Effects in the Binary Pulsar PSR 1913+16.— Nature, 1979, v. 277, p. 437.
84. **Will C. M., Nordtvedt K.** Preferred frame Theories and an Extended PPN Formalism.— Astrophys. J., 1972, v. 177, N 3, p. 757.
85. **Will C. M.** Conservation Laws Lorentz Invariance and Values of the PPN Parameters.— Astrophys. J., 1971, v. 169, N 1, p. 125.
86. **Lee D. L. e.a.** Conservation Laws and Variational Principles in Metric Theories of Gravity.— Phys. Rev. D, 1974, v. 10, N 6, p. 1685.
87. **Иваницкая О. С.** Лоренцев базис и гравитационные эффекты в эйнштейновой теории тяготения. Минск, Наука и техника, 1979.
88. **Shapiro I.** New Method for the Detection of Light Deflection by Solar Gravity.— Science, 1967, v. 157, N 3790, p. 806.
89. **Shapiro I.** Fourth Test of General Relativity.— Phys. Rev. Lett., 1964, v. 13, N 26, p. 789.
90. **Reasenberg R. D. e.a.** Viking Relativity Experiment: Verification of Signal Retardation by Solar Gravity.— Astrophys. J. Lett., 1979, v. 234, N 3, p. 219.
91. **Oconnel R. F.** Present Status of the Theory of the Relativity Gyroscope Experiment.— Gen. Relat. and Gravit., 1972, v. 3, N 2, p. 123.
92. **Коноплева Н. П.** Гравитационные эффекты в космосе.— УФН, 1977, т. 123, № 4, с. 537.
93. **Брагинский В. Б., Полнарев А. Г.** Релятивистский спин-квадрупольный гравитационный эффект.— Письма в ЖЭТФ, 1980, т. 31, № 8, с. 444.
94. **Гольденблат И. И., Ульянов С. В.** Введение в теорию относительности и ее приложения к новой технике. М., Наука, 1979.
95. **Will C. M.** The Confrontation between General Relativity and Experiment.— In: Proc. of the IX Texas Symposium on Relativistic Astrophysics. Münich 1978 p. 1—26.

96. **Dicke R. H., Goldberg H. M.** Solar Oblateness and General Relativity.— Phys. Rev. Lett., 1967, v. 18, N 9, p. 313.
97. **Shapiro I.** Testing General Relativity.— Gen. Relat. and Gravit., 1972, v. 3, N 2, p. 135.
98. **Nordtvedt K.** Testing Relativity with Laser Ranging to the Moon.— Phys. Rev., 1968, v. 170, N 5, p. 1186.
99. **Thorne K., Will C. M.** High-precision Tests of General Relativity.— Comm. Astrophys. and Space Phys., 1970, v. 2, N 1, p. 35.
100. **Nordtvedt K.** Post-Newtonian Effects in Lunar Laser Ranging.— Phys. Rev. D, 1973, v. 7, N 8, p. 2347.
101. **Williams J. G. e.a.** New Test of the Equivalence Principle from Lunar Laser Ranging.— Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, N 11, p. 551.
102. **Shapiro I. e.a.** Verification of the Principle of Equivalence for Massive Bodies.— Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, N 11, p. 555.
103. **Will C. M.** Anisotropy in the Newtonian Gravitational Constant.— Astrophys. J., 1971, v. 169, N 1, p. 141.
104. **Брагинский В. Б., Панов В. И.** Проверка эквивалентности инертной и гравитационной масс.— ЖЭТФ, 1971, т. 61, № 3, с. 873.
105. **Денисов В. И., Логунов А. А.** Новый механизм освобождения энергии в астрофизических объектах.— ТМФ, 1981, т. 48, № 3, с. 275.
106. **Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.** Гравитация. Пер. с англ. М., Мир, 1977, т. 2, с. 297—298, 300—301.
107. **Oort J.** Distribution of galaxies and density in the Universe. Brussels, 1959, p. 183.
108. **Мартынов Д. Я.** Курс общей астрофизики. М., Наука, 1971.
109. **Hubble E. P.** The Velocity — Distance Diagram for Galaxies.— Proc. Nat. Acad. Sci., 1929, v. 15, p. 169.
110. **Friedman A.** Über die Krümmung des Rautes.— Z. Phys., 1922, Bd 10, N 11, S. 377.
111. **Turner E. L.** Statistics of the Hubble Diagram.— Astrophys. J., 1979, v. 230, N 2, p. 291.
112. **Брагинский В. Б., Манукин А. Б.** Измерение малых сил в физических экспериментах. М., Наука, 1974.
113. **Мицкевич Н. В.** Физические поля в ОТО. М., Наука, 1969.
114. **Брагинский В. Б., Руденко В. Н.** Релятивистские гравитационные эксперименты.— УФН, 1970, т. 100, № 3, с. 395.
115. **Захаров В. Д.** Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна. М., Наука, 1972.
116. **Брагинский В. Б., Менский М. Б.** Высокочастотное детектирование гравитационных волн.— Письма в ЖЭТФ, 1971, т. 13, № 1, с. 585.
117. **Брагинский В. Б. и др.** Электромагнитные детекторы гравитационных волн.— ЖЭТФ, 1973, т. 65, № 5, с. 1729.
118. **Тернов И. М., Халилов В. Р.** Фоторождение гравитонов на электронах в магнитном поле.— В кн.: Классическая и квантовая теория гравитации. Тезисы докладов Всесоюзной конференции. Минск, 1976, с. 135.
119. **Тернов И. М., Халилов В. Р., Чижов Г. А.** О генерации гравитационных волн сильной электромагнитной волной при рассеянии на электронах в магнитном поле.— ЖЭТФ, 1975, т. 68, № 6, с. 1969.
120. **Дайсон Ф., Тер-Хаар Д.** Нейтронные звезды и пульсары. Пер. с англ. М., Мир, 1973.
121. **Гальцов Д. В.** Фотокулоновские гравитоны и гравитационная светимость Солнца.— ЖЭТФ, 1974, т. 67, № 2, с. 425.
122. **Papini G., Valluri S. R.** Photoproduction of Gravitations in Static Electromagnetic Fields.— Can. J. Phys., 1975, v. 53, N 20, p. 2306; **Papini G., Valluri S. R.** Photoproduction of Gravitational Radiation by Pulsars.— Can. J. Phys., 1975, v. 53, N 20, p. 2312.

123. **Денисов В. И.** Взаимодействие слабой гравитационной волны с полем вращающегося магнитного диполя.— ЖЭТФ, 1978, т. 74, с. 401.
124. **Денисов В. И.** Взаимодействие плоской гравитационной волны с полем магнитного диполя.— Изв. вузов. Сер. Физика, 1978, № 3, с. 152.
125. **Собрание** трудов академика А. Н. Крылова. В 12 томах. Т. 1. Под ред. и с коммент. С. Я. Штрайха. М., Изд-во АН СССР, 1951.
126. **Фаддеев Л. Д.** Проблема энергии в теории тяготения Эйнштейна.— Препринт ЛОМИ АН СССР, 1981, Р-8-81.
127. **Bondi H.** Negative mass in general relativity.— Rev. Mod. Phys., 1957, v. 29, p. 423.
128. **Roll P. G., Krotkov R., Dicke R. H.** The Equivalence of Inertial and Passive Gravitational Mass.— Ann. Phys., 1964, v. 26, p. 442.
129. **Dicke R. H.** Lecture on Gravitation.— In: Proc. Intern. School of Physics «Enrico Fermi». N.Y., Academic Press, 1962, p. 16.
130. **Nordtvedt K., Jr.** Equivalence Principle for Massive Bodies.— Phys. Rev., 1968, v. 169, N 5, p. 1014.
131. **Will C. M.** Parametrized Post-Newtonian Hydrodynamics and the Nordtvedt Effect.— Astrophys. J., 1971, v. 163, N 3, p. 611.
132. **Dicke R. H.** General Relativity: Survey and Experimental Test.— In: Gravitation and the Universe. Philadelphia, 1969, p. 19.
133. **Денисов В. И., Логунов А. А., Мествиришвили М. А.** Движутся ли протяженные тела по геодезическим риманова пространства — времени? — ТМФ, 1981, т. 47, № 1, с. 3.
134. **Денисов В. И., Логунов А. А., Мествиришвили М. А.** Движение протяженных тел в произвольной метрической теории гравитации.— В кн.: Тезисы докл. на V Советской гравитационной конференции, 1981. Под ред. А. А. Соколова. М., Изд-во МГУ, 1981, с. 82.
135. **Chandrasekhar S., Contopoulos G.** On a Post-Galilean Transformation Apprpriate to the Post-Newtonian Theory of Einstein, Infeld and Hoffmann.— Proc. Roy. Soc. A, 1967, v. 298, N 1453, p. 123.
136. **Жарков В. Н.** Внутреннее строение Земли и планет. М., Наука, 1978.
137. **Аллен К. У.** Астрофизические величины. М., Мир, 1977.
138. **Ньютон Р.** Теория рассеяния волн и частиц. М., Мир, 1969.
139. **Taylor J. H., Manchester R. H.** Observed Properties of 147 Pulsars.— Astron. J., 1975, v. 80, N 10, p. 794.
140. **Hulse R. A., Taylor J. H.** A High-Sensitivity Pulsar Survey.— Astrophys. J. Lett., 1974, v. 191, N 2, p. 59.
141. **Hulse R. A., Taylor J. H.** A Deep Sample on New Pulsars and their Spatial Extent in the Galaxy.— Astrophys. J. Lett., 1975, v. 201, N 2, p. 55.
142. **Taylor J. H., Manchester R. H.** Galactic Distribution and Evolution of Pulsars.— Astrophys. J., v. 215, N 3, p. 885.
143. **Manchester R. H. e.a.** Detection of Pulsar Proper Motion.— Astrophys. J. Lett., 1974, v. 189, N 3, p. 119.