

ИНКЛЮЗИВНЫЕ ПРОЦЕССЫ И ДИНАМИКА СИЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили, В. А. Петров

Институт физики высоких энергий, Серпухов

Приведены основные результаты инклюзивного подхода к теории сильных взаимодействий, полученные как в рамках общих принципов теории поля, так и в различных моделях.

There are given the main results of inclusive approach to the strong interactions theory, obtained as well as in framework of general principles of quantum field theory and in various models.

ВВЕДЕНИЕ

Физика высоких энергий. Когда говорят о физике высоких энергий, то имеют в виду тот раздел физики, где изучают всевозможные процессы, происходящие при столкновении очень быстрых частиц, которые получают на ускорителях, или тех, которые прилетели из космического пространства и получили большую энергию в разнообразных «естественных ускорителях».

Для какой же цели физики изучают столкновения частиц при высоких энергиях, анализируют рождающиеся при этом частицы? Эта цель очевидна — изучить внутреннюю структуру материи, выяснить, можно ли свести все ее многообразие к нескольким простым элементам.

Вплоть до начала XX в. все попытки объяснить природу на этом пути были по существу умозрительными, хотя, они, в известной мере, и подготовили будущие исследования. Первым, кто взялся за эту проблему «руками», был Резерфорд. В 1911 г. ему и его сотрудникам удалось открыть структуру атома, бомбардируя золотую фольгу α -частицами с энергией около 10 МэВ, что являлось высокой энергией по тем временам. Дальнейшее продвижение в глубины строения материи потребовало уже создания ускорителей и целого арсенала других экспериментальных средств для обнаружения новых частиц и изучения их структуры.

Множественное образование частиц. Особенность физики микромира — взаимопревращение и рождение новых частиц, обнаружение новых форм материи и законов сохранения. При взаимодействии двух частиц они могут отклониться от своих первоначальных траекторий. В данном случае говорят об их упругом рассеянии. Однако кроме этого может происходить также рождение произвольного числа частиц

или образование только двух частиц другой природы, если при этом не нарушаются законы сохранения энергии, импульса, момента количества движения, различных квантовых чисел типа электромагнитного и барионного зарядов и т. д. В первом случае имеем дело с процессами множественного рождения частиц, а во втором — с реакциями «перезарядки».

Множественное образование частиц наиболее ярко проявляется в процессах с участием сильновзаимодействующих частиц. Причина этого в известном смысле заключена в короткодействующем характере сильного взаимодействия. Действительно, поскольку силы, ответственные за сильное взаимодействие (ядерные силы), имеют весьма малый радиус действия — порядка 10^{-13} см, то для того, чтобы ядерное взаимодействие произошло, частицы (например, протоны) должны сблизиться на расстояние порядка действия ядерных сил. Ясно, что если у них большая энергия, то в какой-то момент времени может произойти концентрация этой энергии в очень малом объеме. В данном случае, когда в малом объеме достигается колоссальная плотность энергии, квантовая природа микромира приводит к тому, что начальная энергия может пойти не только на образование тех же самых начальных частиц (упругое рассеяние), но и с большой вероятностью трансформироваться в большое (при достаточно высокой энергии) количество вторичных частиц.

Самые ранние работы по теоретическому исследованию таких характеристик множественных процессов, как плотность числа частиц, энергии, относятся к концу 40-х — началу 50-х годов. Они были инициированы открытиями событий с аномально большим числом частиц в космических лучах.

Среди них необходимо упомянуть работы Гейзенберга, который на основе предположения о том, что распределение вторичных частиц по импульсам определяется уравнениями классического нелинейного поля, получил выражения для распределения числа частиц по энергиям, для средней множественности вторичных частиц и т. п.

В 1949 г. Ферми выдвинул статистическую модель множественного образования частиц, основанную на предположении об установлении термодинамического равновесия в системе сильновзаимодействующих частиц и на применении к этой системе законов излучения абсолютно черного тела.

Впоследствии теория Ферми была подвергнута критике в работах И. Я. Померанчука и Л. Д. Ландау, выдвинувших свои варианты статистического подхода к проблеме множественного образования частиц.

Во всех этих (и последующих) теориях статистического типа характерным предсказанием является сильный (степенной) рост средней множественности с ростом начальной энергии. В дальнейшем исследование процессов множественного рождения проводили также на основе мультипериферического механизма. Средняя множествен-

ность в таком подходе растет с энергией довольно медленно (логарифмически).

Инклюзивные процессы. В то время как при сравнительно малых энергиях число частиц в конечном состоянии невелико, при увеличении энергии сталкивающихся начальных частиц доля процессов с большой множественностью заметно возрастает. Данный факт свидетельствует о том, что при изучении природы сильного взаимодействия множественные процессы должны играть большую роль.

Однако экспериментальное и теоретическое исследования множественного образования частиц сопряжены с принципиальными трудностями, связанными с резким увеличением числа степеней свободы и усложнением кинематики процесса с ростом числа вторичных частиц. Действительно, если любая амплитуда процесса $2 \rightarrow 2$ зависит от двух кинематических переменных, то амплитуда любого процесса $2 \rightarrow n$ зависит уже от $3n - 4$ кинематических переменных.

Наиболее изучены процессы, в которых число частиц не меняется, т. е. процессы упругого рассеяния и перезарядки (бинарные процессы). В этих процессах достаточно следить лишь за импульсом одной из конечных частиц — импульс второй восстанавливается автоматически благодаря закону сохранения энергии — импульса.

Насколько для понимания многих особенностей процессов множественного рождения необходимо полное кинематическое описание их амплитуды? К чему мы придем, если в любом другом процессе поступить точно также, как в случае бинарной реакции? Более конкретно, в любом процессе, происходящем при столкновении двух частиц, будем детектировать лишь одну из конечных частиц и строить ее импульсное распределение, не интересуясь, что происходит с остальными. В качестве следующего шага можно просуммировать соответствующие распределения от всех процессов, где содержится частица интересующего нас вида. Не достаточно ли ограничиться изучением таких усредненных и суммарных (поэтому более простых) характеристик процессов множественного образования частиц?

Положительный ответ на эти вопросы был дан в 1967 г. в работах [1, 2], где впервые было показано, что для описания динамики взаимодействия частиц важное значение приобретает изучение нового класса процессов множественного образования, когда в конечном состоянии измеряются импульсные характеристики только одной или двух выделенных частиц заданного вида, а остальные частицы сопровождения не регистрируются.

В [1, 2] было введено суммарное дифференциальное сечение совокупности процессов с одной выделенной частицей заданного вида в конечном состоянии, и для этого сечения в рамках аксиоматической квантовой теории поля были получены высокоэнергетические ограничения сверху. Такие процессы по предложению Фейнмана, начиная с 1969 г., стали называться *инклюзивными процессами**, а усред-

* Фиксированный канал перехода $2 \rightarrow n$ принято называть *эксклюзивным каналом*.

ненные и суммарные величины, введенные в [1, 2], и их модификации — *инклюзивными характеристиками*.

Концепция инклюзивного процесса позволяет с единой точки зрения рассмотреть на первый взгляд совершенно разные реакции, каковыми, например, являются чисто адронные процессы множественного рождения и глубоконеупругое рассеяние лептонов на протонах. Необходимость такого подхода особенно остро чувствовалась начиная с середины 60-х годов, когда в строй стали входить ускорители нового поколения, дающие пучки частиц высокой энергии.

Экспериментальное изучение инклюзивных процессов, проведенное в 1968 г. на ускорителе ИФВЭ с энергией 76 ГэВ, привело к открытию совершенно нового для микромира закона масштабной инвариантности сечений, заключающегося в том, что относительные поперечные сечения образования сильновзаимодействующих частиц (адронов) при высоких энергиях — универсальные функции приведенного импульса $p/p_{\text{макс}}$, не зависящие от энергии первичных частиц [3].

После экспериментального открытия масштабной инвариантности появилось большое количество работ, в которых с большей или меньшей степенью успеха было описано и объяснено это интересное явление. Среди них надо отметить работы Янга и сотр. [4] и Фейнмана [5], в которых на основе обобщения экспериментальных наблюдений были выдвинуты гипотезы предельной фрагментации [4] и масштабной инвариантности [5]. Открытие масштабной инвариантности привело к созданию партонной модели [5], в которой быстро движущийся адрон представляется в виде набора слабовзаимодействующих составных частей — партонков. В настоящее время партонная модель как теория кварков, связанных полями Янга — Миллса, получила широкое распространение и позволяет довольно успешно объяснить основные закономерности глубоконеупругих процессов. По существу, именно изучение инклюзивных адрон-адронных и глубоконеупругих лептон-адронных процессов подтолкнуло исследования неабелевых калибровочных теорий и привело к обнаружению асимптотической свободы.

В чисто адронных инклюзивных процессах известный прогресс был достигнут Мюллером [6], который применил метод комплексных угловых моментов к инклюзивным процессам. К настоящему времени общая картина теоретического понимания динамики, управляющей поведением инклюзивных сечений, выглядит примерно следующим образом.

В процессах «жесткого» типа (глубоконеупругое рассеяние, электрон-позитронная аннигиляция, рождение массивных лептонных пар, процессы инклюзивного рождения адронов с большими поперечными импульсами) достигнуто довольно хорошее понимание и количественное описание эволюции инклюзивных сечений с ростом энергии. Однако изучение тех деталей множественного рождения, которые связаны с проблемой перехода партонков (кварков и глюонов)

в адронные состояния, сталкивается с рядом значительных трудностей. То же самое относится к «мягким» процессам, т. е. тем процессам, где, например, детектируемые частицы имеют небольшой поперечный импульс. Здесь приходится прибегать к феноменологическим построениям, не вытекающим непосредственно из основных посылок, скажем, квантовой хромодинамики.

В данных условиях большое значение приобретают методы, основанные на общих принципах квантовой теории поля. Как уже отмечалось выше, первые успешные результаты на этом пути были получены в работах [1, 2].

В дальнейшем удалось получить ряд новых следствий в виде различных ограничений на поведение инклюзивных распределений при высоких энергиях, вытекающих из микропричинности, спектральности и унитарности [7]. Особо следует отметить вывод об универсальном характере структурных функций [8], описывающих процессы различной природы. Совершенно очевидно, что, ограничиваясь инклюзивными процессами, мы в качестве платы за простоту описания теряем значительную часть информации, содержащейся в эксклюзивных процессах.

Однако посмотрим, какая информация о конечных состояниях нам нужна. Как принято в квантовой теории, нас интересуют средние значения динамических переменных, например среднее значение энергии вторичной частицы. Но оно определяется инклюзивным сечением. То же относится к любым другим аддитивным величинам. Для бинарных величин, например угла разлета двух вторичных частиц, приходится пользоваться инклюзивными сечениями, описывающими рождение двух частиц, и т. д.

Положение здесь совершенно аналогично статистической физике. В свое время Н. Н. Боголюбов ввел так называемые *статистические операторы комплексов частиц*, описывающие определенную систему частиц, гораздо меньшую, чем полная система. Оказалось, что этих величин вполне достаточно для вычисления средних значений одночастичных и бинарных аддитивных динамических переменных, определяющих глобальные термодинамические характеристики системы. Можно думать, что точно так же и в физике частиц высоких энергий использование инклюзивного описания многочастичных процессов дает нам достаточно богатую информацию о том, как происходит множественное образование частиц в целом, независимо от специфических деталей каждого отдельно взятого процесса.

Основные открытия, сделанные при исследовании инклюзивных процессов. Экспериментальные исследования инклюзивных процессов довольно быстро обнаружили новые явления, специфические именно для них. Как уже было сказано выше, в 1968 г. в ИФВЭ было открыто явление *масштабной инвариантности*. Впоследствии это явление было подтверждено и в других научных центрах. Примерно в то же время в Станфорде на SLAC были продолжены эксперименты по глубоконеупругому рассеянию электронов на протонах. Соответ-

ствующие сечения глубоконеупругих процессов также обнаружили масштабно-инвариантное поведение: структурные функции, зависящие от передачи энергии и квадрата передачи импульса от электронов к протону, оказались функциями лишь отношения этих величин [9].

В дальнейшем были исследованы и другие процессы: глубоконеупругое рассеяние нейтрино, антинейтрино и мюона на протоне, рождение массивных лептонных пар в адрон-адронных соударениях. Во всех этих процессах были также обнаружены масштабные закономерности.

Наконец, в 1972 г. в ЦЕРН при изучении процессов инклюзивного рождения адронов с большими поперечными импульсами было обнаружено сильное отличие экспериментальных данных от экстраполяций из области малых поперечных импульсов [10].

Как оказалось, и в этой области, т. е. в области больших поперечных импульсов, имеет место масштабно-инвариантная зависимость от поперечного импульса.

Таким образом, введение и изучение инклюзивных процессов оказалось чрезвычайно плодотворным и привело к установлению ряда масштабных закономерностей, не имеющих места в отдельных эксклюзивных каналах. В свою очередь, это позволило сделать дальнейший шаг в понимании динамики сильных взаимодействий и составной структуры элементарных частиц.

На основе инклюзивного подхода впервые удалось плодотворно использовать методы аксиоматической квантовой теории поля для строгого анализа процессов множественного образования частиц и получить в качестве следствий общие ограничения на возможный вид асимптотического поведения физических характеристик инклюзивных процессов в области высоких энергий.

В рамках инклюзивного подхода был создан целый ряд новых направлений в физике высоких энергий, разработаны различные модели процессов множественного рождения, особенно те, которые связаны с внутренним строением частиц. Отметим в этой связи, что именно инклюзивные процессы чрезвычайно удобны для применения партонной модели, поскольку суммирование по недектируемым адронным системам позволяет во многих случаях получать результаты, слабо зависящие от неизвестного механизма удержания кварков и глюонов. Экспериментальное измерение инклюзивных сечений обнаружило большое число не известных ранее явлений, среди которых надо особо отметить различного рода масштабные закономерности.

Вместе с тем следует иметь в виду, что исследования в рамках инклюзивного подхода еще только разворачиваются, имеется большой круг интереснейших и важнейших проблем, решение которых является насущной задачей современной физики высоких энергий.

Например, необходимо более детальное изучение связей между различными инклюзивными процессами, установление более четкого

соотношения между наблюдаемыми физическими характеристиками инклюзивных процессов и внутренними характеристиками частиц, описывающими их структуру.

В настоящем обзоре представлены основные достижения в изучении инклюзивных процессов как на базе общих принципов, так и в рамках различных моделей.

1. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИНКЛЮЗИВНЫХ ПРОЦЕССОВ

При столкновении частиц a и b могут происходить различные реакции, разрешенные законами сохранения и правилами отбора. При заданном начальном состоянии всякую совокупность двух или более частиц в конечном состоянии назовем *каналом столкновения*. Например, процесс рассеяния $a + b \rightarrow a + b$, идущий при любых энергиях системы (a, b) , отвечает упругому каналу. Все остальные реакции приводят к неупругим каналам.

Канал называется *открытым*, если при заданной энергии системы (a, b) реакция, соответствующая данному каналу, разрешена всеми законами сохранения и правилами отбора.

Каждый открытый канал можно однозначно задать целочисленным «вектором-идентификатором» канала:

$$n = (n_1, n_2, \dots, n_j).$$

Такой вектор соответствует реакции

$$a + b \rightarrow n_1 c_1 + n_2 c_2 + \dots + n_j c_j, \quad (1)$$

где c_i — вид частиц (с произвольным, но фиксированным упорядочением); n_i — число частиц вида c_i .

Символически реакцию (1) можно записать в следующем виде:

$$a + b \rightarrow nC,$$

где C — «вектор» с компонентами, соответствующими всем возможным видам частиц:

$$C = (c_1, c_2, \dots).$$

Ясно, что при заданной энергии вектор-идентификатор канала «вырезает» из C лишь конечное число элементов. Компоненты идентификатора канала не независимы — они связаны линейными соотношениями, выражающими законы сохранения квантовых чисел. По определению, $n_i \geq 0$, причем равенство компоненты нулю означает, что данный канал не содержит частиц вида c_i . Кроме того, n_i ограничено условием

$$\sum_i \mu_i n_i \leq V \bar{s} \equiv (E_a + E_b)_{\text{с.ц.м}},$$

где μ_i — масса частицы вида c_j , следующим из закона сохранения энергии-импульса: $k_a + k_b = k_{1c_1} + \dots + k_{n_j c_j}$, и неравенства $E =$

$= \sqrt{k^2 + \mu^2} \geq \mu$. Канал открывается, если

$$s = s_n = \left(\sum_i \mu_i n_i \right)^2,$$

т. е. s_n — порог канала n .

В дальнейшем для сокращения записи введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} |n| &= n_1 + \dots + n_j; & n! &= n_1! \dots n_j!; & K_n &= \\ &= (k_{1c_1}, \dots, k_{n_1c_1}; \dots; k_{1c_j}, \dots, k_{n_jc_j}); \end{aligned}$$

$$d\tau^n = \sum_{i=1}^j \sum_{l=1}^{n_i} d^3 k_{lc_i}; \quad d^3 k_{lc_i} = dk_{lc_i} / (2\pi)^3 2E_{lc_i}.$$

Здесь k_{lc_i} — 4-импульс l -й частицы вида c_i . Если некоторые компоненты вектора n равны нулю, то соответствующие дифференциалы в $d\tau^n$ отсутствуют.

В квантовой теории физические процессы описываются амплитудами переходов, которые по определению являются матричными элементами S -матрицы. В общем случае амплитуда перехода из начального состояния α в конечное состояние ω представляется в виде

$$\langle \omega | S | \alpha \rangle = \langle \omega | \alpha \rangle + [\text{члены, содержащие свободные пролеты систем из } \alpha \text{ и } \omega] + i(2\pi)^4 \delta(P_\omega - P_\alpha) T_{\omega\alpha}, \quad (2)$$

где $P_{\alpha(\omega)}$ — полный 4-импульс начального (конечного) состояния. Последний член в (2) отвечает наиболее интересному случаю, когда все частицы обязательно принимают участие во взаимодействии.

Ниже будем изучать в основном те процессы, когда в начальном состоянии имеется две частицы, при этом член в квадратных скобках в (2) отсутствует.

Процесс (1), в котором известны все характеристики участвующих в нем частиц, называется *эксклюзивным*.

Квадрат модуля амплитуды канала n *:

$$T_{ab}^n = \langle K_n | T | k_a, k_b \rangle \quad (3)$$

в соответствии с правилами квантовой механики задает плотность вероятности рождения канала n :

$$\begin{aligned} P_{ab}^n(K_n; k_a, k_b) &= (2\pi)^4 \delta(k_a + k_b - \sum_{i=1}^j \sum_{l=1}^{n_i} k_{lc_i}) |T_{ab}^n|^2 \times \\ &\times \left[\int d\tau^n (2\pi)^4 \delta(k_a + k_b - \sum_{i=1}^j \sum_{l=1}^{n_i} k_{lc_i}) |T_{ab}^n|^2 \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\int d\tau^n P_{ab}^n(K_n; k_a, k_b) = 1.$$

* Соотношение (3) — определение оператора T .

Вероятность осуществления канала n по отношению ко всем открытым каналам определяется следующим выражением:

$$w_n = \int d\tau^n (2\pi)^4 \delta \left(k_a + k_b - \sum_{il} k_{lc_i} \right) |T_{ab}^n|^2 \times \\ \times \left[\sum_m \int d\tau^m (2\pi)^4 \delta \left(k_a + k_b - \sum_{il} k_{lc_i} \right) |T_{ab}^m|^2 \right]^{-1},$$

а соответствующая плотность вероятности

$$\frac{dw_n}{d\tau^n} = (2\pi)^4 \delta \left(k_a + k_b - \sum_{il} k_{lc_i} \right) |T_{ab}^n|^2 \times \\ \times \left[\sum_m \int d\tau^m (2\pi)^4 \delta \left(k_a + k_b - \sum_{il} k_{lc_i} \right) |T_{ab}^m|^2 \right]^{-1}.$$

Очевидно, что $\sum_n w_n = 1$, а $(1/w_n) dw_n/d\tau^n = P_{ab}^n(K_n; k_a, k_b)$. Величины P_{ab}^n , w_n , $dw_n/d\tau^n$ позволяют определить средние значения импульсов, чисел частиц и т. д.

Например, среднее значение ν -й компоненты импульса частицы вида c_i в канале n :

$$\langle k_{c_i}^\nu \rangle_n = \int d\tau^n k_{c_i}^\nu P_{ab}^n.$$

Среднее число частиц вида c_i

$$\langle n_i \rangle = \sum_n n_i w_n.$$

Экспериментальные данные обычно приводятся в терминах *эффективных сечений*. Ниже приведем выражения для различных сечений и их связь с введенными выше вероятностями.

1. Дифференциальное сечение эксклюзивного процесса (1):

$$\frac{d\sigma_{ab}^n}{d\tau^n} = \frac{1}{\lambda^{1/2}(s, \mu_a^2, \mu_b^2)} (2\pi)^4 \delta \left(k_a + k_b - \sum_{il} k_{lc_i} \right) |T_{ab}^n|^2; \\ \lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz.$$

2. Частично проинтегрированное эксклюзивное сечение

$$\frac{d\sigma_{ab}^n}{d\xi_1 \dots d\xi_l} = \int d\tau^n \prod_{i=1}^l \delta(\xi_i - g_i(k)) \frac{d\sigma_{ab}^n}{d\tau^n},$$

где $g_i(k) = g_i(k_a, k_b, K_n)$ — некоторые функции импульсов частиц, участвующих в процессе (1). Например:

$$\frac{d\sigma_{ab}^n}{dt_{ac}} = \int d\tau^n \delta(t_{ac} - (k_a - k_c)^2) \frac{d\sigma_{ab}^n}{d\tau^n}; \quad c \in C.$$

3. Полное сечение эксклюзивного процесса (1):

$$\sigma_{ab}^n = \int d\tau^n \frac{d\sigma_{ab}^n}{d\tau^n} = \int d\sigma_{ab}^n.$$

Исходя из $d\sigma_{ab}^n/d\tau^n$, можно определить дифференциальные сечения по меньшему числу переменных, например:

$$d\sigma_{ab}^n/d\tau^m = \int d\tau^{n-m} d\sigma_{ab}^n/d\tau^n, \quad (4)$$

где $m = (m_1, \dots, m_j)$ — целочисленный вектор, такой, что $0 \leq m_i \leq n_i$. Для таких векторов будем писать $m \leq n$. Если измерены эксклюзивные сечения для всех открытых каналов при заданной энергии, то имеем полную доступную нам информацию о процессах, порождаемых столкновениями частиц a и b .

Существуют, однако, глобальные характеристики процессов, порождаемых столкновением частиц a и b , которые не требуют детального анализа каждого канала. Будем следить за некоторым фиксированным набором частиц $mC = m_1c_1 + \dots + m_jc_j$ в конечных состояниях процессов, идущих при столкновении частиц a и b . Совокупность таких процессов называется *инклюзивным процессом* и символически записывается в виде

$$a + b \rightarrow mC + X, \quad (5)$$

где X обозначает все остальные (не принадлежащие mC) частицы во всех каналах, дающих вклад в рождение mC .

4. Соответствующее инклюзивному процессу (5) дифференциальное сечение определяется следующим образом:

$$\frac{d\sigma_{ab \rightarrow mCX}}{d\tau^m} = \sum_{n \geq m} \frac{d\sigma_{ab}^n}{d\tau^n}.$$

5. Интегрируя, получаем полное сечение процесса (5):

$$\sigma_{ab \rightarrow mCX} = \sum_{n \geq m} \sigma_{ab}^n.$$

6. В частном случае, когда $m = (0, 0, \dots, 0)$, имеем полное сечение процесса $a + b \rightarrow X$:

$$\sigma_{ab \rightarrow X} \equiv \sigma_{ab}^{\text{tot}} = \sum_n \sigma_{ab}^n.$$

7. Частично проинтегрированное сечение определяется аналогично тому, как это было сделано для эксклюзивных каналов:

$$\frac{d\sigma_{ab \rightarrow mCX}}{d\xi_1 \dots d\xi_l} = \int d\tau^m \prod_{i=1}^l \delta(\xi_i - g_i(k)) \frac{d\sigma_{ab \rightarrow mCX}}{d\tau^m};$$

$$g_i = g_i(k_a, k_b, K_m).$$

Из определений легко установить связь этих сечений с введенными выше вероятными распределениями:

$$P_{ab}^n = \frac{1}{\sigma_{ab}^n} \frac{d\sigma_{ab}^n}{d\tau^n}.$$

Величина

$$\rho_{ab \rightarrow mCX} = \frac{1}{\sigma_{ab \rightarrow mCX}} \frac{d\sigma_{ab \rightarrow mCX}}{d\tau^m} = \sum_{n \geq m} \frac{dw_n}{d\tau^m}$$

является плотностью вероятности распределения импульсов частиц системы mC , детектируемой в инклюзивном процессе (5), причем

$$\int d\tau^m \rho_{ab \rightarrow mCX} = 1.$$

Например, $\rho_{ab \rightarrow cX}$, $c \in C$ определяет среднее значение компоненты детектируемой частицы вида c :

$$\langle k_c^y \rangle = \int d^3k_c k_c^y \rho_{ab \rightarrow cX}.$$

В фиксированном канале можно определить среднюю плотность частиц вида c в импульсном фазовом пространстве, усредняя истинную плотность частиц этого вида $\sum_{l=1}^{n_c} (2\pi)^3 2E_c \delta(k_c - k_{lc})$ с весом P_{ab}^n :

$$\begin{aligned} \frac{dn_c}{d^3k_c} &= \left\langle \sum_{l=1}^{n_c} (2\pi)^3 2E_c \delta(k_c - k_{lc}) \right\rangle_n = \\ &= \int d\tau^n \sum_{l=1}^{n_c} (2\pi)^3 2E_c \delta(k_c - k_{lc}) P_{ab}^n(K_n; k_a, k_b) = \\ &= n_c \int d\tau^n (2\pi)^3 2E_c \delta(k_c - k_{lc}) P_{ab}^n(K_n; k_a, k_b). \end{aligned}$$

Последнее равенство вытекает из симметрии P_{ab}^n относительно перестановок импульсов частиц одного вида.

Легко видеть, что

$$\int d^3k_c \frac{dn_c}{d^3k_c} = n_c.$$

Аналогично определяются высшие распределения:

$$\begin{aligned} \frac{d[n!/(n-m)!]}{d\tau^m} &= \frac{n!}{(n-m)!} \int d\tau^{n-m} P_{ab}^n; \\ \int d\tau^m \frac{d[n!/(n-m)!]}{d\tau^m} &= \frac{n!}{(n-m)!}. \end{aligned}$$

Если необходимо знать среднюю плотность числа частиц вида c независимо от того, в каком канале они рождаются, то следует усред-

нить dn_c/d^3k_c с весом канала w_n . Тогда для средней плотности числа частиц сорта c имеем:

$$\frac{d\langle n_c \rangle}{d^3k_c} = \sum_n \frac{dn_c}{d^3k_c} w_n = \frac{1}{\sigma_{ab \rightarrow cX}} \sum_n n_c \frac{d\sigma_{ab}^n}{d^3k_c}.$$

Очевидно, что

$$\int d^3k_c \frac{d\langle n_c \rangle}{d^3k_c} = \sum_n n_c w_n = \langle n_c \rangle.$$

Аналогично

$$\frac{d\langle \{n!/(n-m)!\} \rangle}{d\tau^m} = \sum_n \frac{d\{n!/(n-m)!\}}{d\tau^m} w_n;$$

$$\int d\tau^m \frac{d\langle \{n!/(n-m)!\} \rangle}{d\tau^m} = \left\langle \frac{n!}{(n-m)!} \right\rangle.$$

Из определения величины $d\langle \{n!/(n-m)!\} \rangle/d\tau^m$ вытекает ее связь с дифференциальными сечениями:

$$\frac{d\langle \{n!/(n-m)!\} \rangle}{d\tau^m} = \frac{1}{\sigma_{ab \rightarrow mCX}} \sum_n \frac{n!}{(n-m)!} \frac{d\sigma_{ab}^n}{d\tau^m}.$$

10. Таким образом, мы приходим к определению *инклюзивного спектра* процесса $a + b \rightarrow mC + X$:

$$f_{ab \rightarrow mCX} = \sum_n \frac{n!}{(n-m)!} \frac{d\sigma_{ab}^n}{d\tau^m}$$

с нормировкой

$$\int d\tau^m f_{ab \rightarrow mCX} = \left\langle \frac{n!}{(n-m)!} \right\rangle \sigma_{ab \rightarrow mCX}$$

11. Частично проинтегрированный инклюзивный спектр определяется так же, как и частично проинтегрированное дифференциальное сечение:

$$\bar{f}_{ab \rightarrow mCX}(\xi_1, \dots, \xi_l) = \int d\tau^m \prod_{i=1}^l \delta(\xi_i - g_i(k)) f_{ab \rightarrow mCX}.$$

По поводу экспериментального изучения дифференциальных сечений и спектров инклюзивных процессов уместно сделать некоторые пояснения.

При измерении эксклюзивного сечения $d\sigma_{ab}^n/d\tau^n$ на самом деле в силу неразличимости частиц одного вида находится величина $n! d\sigma_{ab}^n/d\tau^n$. Поскольку T_{ab}^n имеет вид

$$T_{ab}^n = \langle K_n | T | k_a, k_b \rangle = \langle 0 | \prod_{i=1}^n a_i(k_{ic_i}) T | k_a, k_b \rangle / \sqrt{n!},$$

то можно сказать, что $n! d\sigma_{ab}^n/d\tau^n$ «измеряет» ненормированные

конечные состояния $\langle 0 | \prod_{i,l} a_i(k_{lc_i})$. [Здесь $a_i(k_{lc_i})$ — оператор уничтожения частицы вида c_i с импульсом k_{lc_i} .]

Если по части импульсов провести интегрирование, то все сказанное выше будет относиться к тем частицам, чьи импульсы остались непроинтегрированными. В частности, при измерении распределения одной частицы вида c в канале n реально находится величина $n_c = d\sigma_{ab}^n/d^3k_c$, отвечающая состоянию $\langle k_{1c_1} \dots \tilde{k}_c \dots k_{n_j c_j} | a_c(k_c) \rangle^*$.

Отсюда очевидно, что при измерении инклюзивного спектра $f_{ab \rightarrow cX} = \sum_n n_c d\sigma_{ab}^n/d^3k_c$ не требуется знать, в каком именно канале образовалась детектируемая частица — спектр измеряется непосредственно. В то же время, чтобы определить сечение $d\sigma_{ab \rightarrow cX}/d^3k_c = \sum_n d\sigma_{ab}^n/d^3k_c$, необходимо измерить сечение образования одной частицы сначала в каждом канале, а затем, поделив результат измерения на n_c , восстановить $d\sigma_{ab \rightarrow cX}/d^3k_c$.

В данном случае инклюзивные спектры проще для измерения, чем соответствующие дифференциальные сечения. Этим, по-видимому, и объясняется подавляющее преобладание экспериментальных данных лишь по инклюзивным спектрам.

Следует, однако, подчеркнуть, что измерение дифференциальных инклюзивных сечений совершенно необходимо, если мы, например, хотим узнать средний импульс частицы, детектируемой в инклюзивном процессе $a + b \rightarrow c + X$. Действительно, по определению:

$$\langle k_c^y \rangle = \frac{1}{\sigma_{ab \rightarrow cX}} \int d^3k_c k_c^y \frac{d\sigma_{ab \rightarrow cX}}{d^3k_c}. \quad (6)$$

С помощью инклюзивного спектра можно определить величину

$$\frac{1}{\sigma_{ab \rightarrow cX}} \int d^3k_c k_c^y f_{ab \rightarrow cX}, \quad (7)$$

которая имеет смысл полного среднего импульса, уносимого всеми частицами вида c . Иногда можно встретить (неверное) утверждение, что средний импульс частицы есть величина (7), деленная на $\langle n_c \rangle$. В действительности имеем:

$$\frac{1}{\langle n_c \rangle} \frac{1}{\sigma_{ab \rightarrow cX}} \int d^3k_c k_c^y f_{ab \rightarrow cX} = \sum_n \langle k_c^y \rangle_n \frac{n_c}{\langle n_c \rangle} w_n.$$

С другой стороны, из определения (6) следует, что

$$\langle k_c^y \rangle = \sum_n \langle k_c^y \rangle_n w_n.$$

Очевидно, что это совершенно разные вещи, если, конечно, не требовать, чтобы $w_n \sim \delta_{n_c}$, $\langle n_c \rangle$. Кроме того, дифференциальное сечение

* $\langle k_{1c_1} \dots \tilde{k}_c \dots k_{n_j c_j} |$ означает состояние, в котором нет частицы вида c с импульсом k_c .

инклюзивного процесса, как это будет видно в дальнейшем, более непосредственно связано с условием унитарности, что очень важно для установления его аналитических свойств по угловым переменным.

«Глобальные» характеристики — дифференциальные сечения и спектры инклюзивных процессов — будучи чрезвычайно удобными и простыми в теоретическом и в экспериментальном отношениях, приводят все же к известной потере информации, давая представление лишь о том, как в «среднем» протекают процессы множественного рождения.

Экспериментальные данные показывают, что рождение частицы в различных областях фазового объема управляется различными механизмами: или коллективными эффектами типа пионизации и дифракционной диссоциации или, например, элементарными актами жесткого соударения в инклюзивных процессах с большими поперечными импульсами. Соответственно и поведение инклюзивных спектров и дифференциальных инклюзивных сечений в зависимости от импульсов детектируемых частиц и полной энергии имеет совершенно различный вид в различных областях.

Например, принято считать, что в процессах с рождением адрона, имеющего большой поперечный импульс, мы в основном имеем дело с событиями, происходящими при столкновении начальных частиц на малых расстояниях. Естественно ожидать, что распределение по импульсам и среднее число частиц, рожденных в таких соударениях, будет заметно отличаться от случая, когда столкновение происходит на больших расстояниях. Ясно, что «глобальные» характеристики сами по себе не могут дать достаточно полной информации о том, что происходит лишь в части возможных событий, поскольку интегрирование по импульсам недетектируемых частиц может полностью «сгладить» характерные особенности выделенного класса событий.

Таким образом, возникает необходимость ввести новые характеристики, свободные от указанных выше недостатков обычных инклюзивных распределений.

12. Такими характеристиками являются ассоциированные (условные) инклюзивные распределения.

Рассмотрим величину

$$(2\pi)^3 2E_c \int_{k_d \in V} d\tau^n \delta(k_c - k_{1c}) P_{ab}^n(K_n; k_a, k_b); c, d \in C,$$

где интегрирование по импульсу k_d идет лишь по некоторой части V допустимого фазового объема.

Тогда

$$P_{ab}^n(k_c | V, d) = \int_{k_d \in V} d\tau^n \delta(k_c - k_{1c}) (2\pi)^3 2E_c P_{ab}^n(K_n; k_a, k_b) / \int_{k_d \in V} d\tau^n P_{ab}^n$$

дает условное распределение по импульсам одной из конечных частиц c в канале n . Условие состоит в том, что обязательно одна из частиц d , помимо детектируемой, не выходит за пределы подобласти фазового объема. В терминах сечений имеем

$$P_{ab}^n(k_c|V, d) = \int_V d^3k_d d\sigma_{ab}^n/d^3k_c d^3k_d/\sigma_{ab}^n(s|V, d, c),$$

где

$$\sigma_{ab}^n(s|V, d, c) = \int_{k_d \in V} d\tau^n d\sigma_{ab}^n/d\tau^n; \quad n_c > 0 -$$

полное сечение рождения $|n|$ частиц, когда одна из частиц вида d не покидает области V .

Усредняя $P_{ab}^n(k_c|V, d)$ по всем каналам с вероятностью $w_n(s|V, d, c) = \sigma_{ab}^n(s|V, d, c)/\sum_m \sigma_{ab}^m(s|V, d, c)$, приходим к условному распределению вероятностей

$$\begin{aligned} \frac{dw_c}{d^3k_c}(k_c|V, d) &= \sum_n w_n(s|V, d, c) P_{ab}^n(k_c|V, d) = \\ &= \frac{1}{\sigma_{ab \rightarrow c} dX(s|V, d)} \frac{d\sigma_{ab \rightarrow c} dX(k_c|V, d)}{d^3k_c}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{ab \rightarrow c} dX}{d^3k_c}(k_c|V, d) &= \sum_n \frac{d\sigma_{ab}^n}{d^3k_c}(k_c|V, d) = \int_V d^3k_d \frac{d\sigma_{ab \rightarrow c} dX}{d^3k_c d^3k_d}; \\ \sigma_{ab \rightarrow c} dX(s|V, d) &= \sum_n \sigma_{ab}^n(s|V, d, c). \end{aligned}$$

Соответствующий инклюзивный спектр есть, очевидно,

$$f_{ab \rightarrow c} dX(s, k_c|V, d) = \sum_n \int_V d^3k_d \frac{d\sigma_{ab}^n}{d^3k_c d^3k_d} n_c.$$

Интегрируя его по k_c , приходим к ассоциированной средней множественности

$$\langle n_c \rangle(s|V, d) = \sum_n n_c w_n(s|V, d),$$

которая описывает среднее число частиц вида c , рождающихся лишь в тех процессах, когда одна из частиц вида d пробегает ограниченную область V фазового объема. Очевидно, что $\langle n_c \rangle(s|V, d) - \delta_{cd}$ описывает среднее число частиц вида c , «сопровождающих» частицу d , область измерения импульса которой ограничена областью V . Нетрудно видеть, что когда V переходит в полный фазовый объем, мы возвращаемся к обычной средней множественности.

Если V сжимается в точку k_d , то имеем локальную ассоциированную множественность

$$\langle n_c \rangle (s | k_d) = \frac{\sum_n n_c d\sigma_{ab}^n / d^3k_d}{\sum_n d\sigma_{ab}^n / d^3k_d} \equiv \sum_n n_c w_n (s | k_d).$$

Из связи

$$\int d^3k_d \langle n_c \rangle (s | k_d) \frac{d\sigma_{ab \rightarrow c} dX}{d^3k_d} \leq \langle n_c \rangle \sigma_{ab \rightarrow cX}$$

видно, что энергетическое поведение $\langle n_c \rangle (s | k_d)$ может очень сильно отличаться от поведения обычной средней множественности, но это отличие маскируется сечением $d\sigma_{ab \rightarrow c} dX / d^3k_d$.

Иной раз в литературе можно встретить другое определение ассоциированной средней множественности, а именно: в качестве таковой принимается выражение (для $c \neq d$):

$$\int d^3k_c f_{ab \rightarrow c} dX / f_{ab \rightarrow dX} = \sum_n n_c \frac{n_d}{\langle n_d \rangle (s | k_d) + 1} w_n (s | k_d). \quad (8)$$

Сравнивая это выражение с определением, данным выше:

$$\langle n_c \rangle (s | k_d) = \sum_n n_c w_n (s | k_d),$$

мы видим, что (8) дает правильное выражение лишь при $w_n (s | k_d) \sim \delta_{n_d, \langle n_d \rangle}$. Приближенное равенство возможно, когда распределение по множественности $w_n (s | k_d)$ достаточно узко сосредоточено вокруг $\langle n_d \rangle (s | k_d)$, т. е. дисперсия достаточно мала.

Оба рассмотренных выше набора инклюзивных распределений: $d\sigma_{ab \rightarrow mCX} / d\tau^m$ и $f_{ab \rightarrow mCX}$ выражаются с помощью одних и тех же основных величин — эксклюзивных сечений $d\sigma_{ab}^n / d\tau^n$. Отсюда следует, что они должны выражаться друг через друга.

Для этого найдем сначала эксклюзивные сечения $d\sigma_{ab}^n / d\tau^n$ через дифференциальные сечения $d\sigma_{ab \rightarrow mCX} / d\tau^m$. Легко видеть из определения $d\sigma_{ab \rightarrow mCX} / d\tau^m$, что

$$\frac{d\sigma_{ab}^n}{d\tau^n} = \sum_{m=(0, \dots, 0)}^{(1, \dots, 1)} (-1)^{|m|} \frac{d\sigma_{ab \rightarrow (n+m)CX}}{d\tau^n}.$$

Далее из определения инклюзивного спектра

$$f_{ab \rightarrow mCX} = \sum_n \frac{n!}{(n-m)!} \frac{d\sigma_{ab}^n}{d\tau^m}$$

и полученной связи $d\sigma_{ab}^n / d\tau^n$ с $d\sigma_{ab \rightarrow mCX} / d\tau^m$ вытекает, что

$$f_{ab \rightarrow mCX} = \sum_l \frac{d\sigma_{ab \rightarrow lCX}}{d\tau^m} \frac{l!}{(l-m)!} \prod_{i=1}^j \frac{m_i}{l_i}.$$

Для того чтобы выразить $d\sigma_{ab}^n/d\tau^n$ и $d\sigma_{ab \rightarrow mCX}/d\tau^m$ через инклюзивные спектры, удобно ввести следующий производящий функционал:

$$G[h] = \sum_n \prod_{i=1}^j \prod_{r=1}^{n_i} h_i(k_{rci}) d\sigma_{ab}^n/d\tau^n,$$

где $h_i(k_{rci})$ — непрерывные функции.

Отсюда имеем

$$\frac{d\sigma_{ab}^n}{d\tau^n} = \frac{1}{n!} \left. \frac{\delta^n G[h]}{(\delta h)^n} \right|_{h=0} = \frac{1}{n!} \delta^{|n|} G[h] / \prod_{i=1}^j \prod_{r=1}^{n_i} \delta h_i(k_{rci}).$$

С другой стороны, нетрудно видеть, что

$$\left. \frac{\delta^n G[h]}{(\delta h)^n} \right|_{h=1} = \sum_m \frac{m!}{(m-n)!} \frac{d\sigma_{ab}^m}{d\tau^n} = f_{ab \rightarrow nCX}.$$

Отсюда следует, что

$$G[h] = \sum_n \frac{1}{n!} \int d\tau^n \prod_{i,r} [h_i(k_{rci}) - 1] f_{ab \rightarrow nCX}.$$

Дифференцируя соответствующее число раз по h и полагая $h=0$, имеем

$$\frac{d\sigma_{ab}^n}{d\tau^n} = \sum_m \frac{(-1)^{|m-n|}}{(m-n)!} \int d\tau^{m-n} f_{ab \rightarrow mCX}.$$

Подставляя выражение в определении $d\sigma_{ab \rightarrow lCX}/d\tau^l$, получаем выражение для этой величины в терминах инклюзивных спектров:

$$\frac{d\sigma_{ab \rightarrow lCX}}{d\tau^l} = \sum_n \left[\sum_{m=l}^n \frac{(-1)^{|m-n|}}{(n-m)!} \right] \int d\tau^{n-l} f_{ab \rightarrow nCX}.$$

Итак, любую из трех величин $d\sigma_{ab}^n/d\tau^n$, $d\sigma_{ab \rightarrow mCX}/d\tau^m$, $f_{ab \rightarrow mCX}$ можно выразить через любую из двух остальных.

Это означает, что наличие полной информации относительно любого из трех типов характеристик эквивалентно полной информации относительно любого из двух оставшихся типов характеристик.

2. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ИНКЛЮЗИВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Правила сумм. Правила сумм — это соотношения между различными инклюзивными спектрами, вытекающие из законов сохранения аддитивных величин 4-импульса, электрического, барионного и других зарядов и т. п. Метод их вывода чрезвычайно прост. Тем не менее в силу их общего характера они обязательно должны выполняться в любой конкретной модели.

Начнем с правил сумм, которые связаны с законом сохранения 4-импульса, записанного для определенного канала n :

$$k_a^\nu + k_b^\nu = \sum_{i=1}^j \sum_{r=1}^{n_i} k_{rc_i}^\nu, \quad \nu = 0, 1, 2, 3.$$

Умножая σ_{ab}^{tot} на $k_a^\nu + k_b^\nu$, получаем:

$$\begin{aligned} (k_a^\nu + k_b^\nu) \sigma_{ab}^{\text{tot}} &= \frac{1}{\lambda^{1/2}} \sum_n \int d\tau^n (k_a^\nu + k_b^\nu) (2\pi)^4 \delta \left(k_a + k_b - \sum_{ir} k_{rc_i} \right) |T_{ab}^n|^2 = \\ &= \frac{1}{\lambda^{1/2}} \sum_{i, n} n_i \int d\tau^n k_{1c_i}^\nu \delta \left(k_a + k_b - \sum_{ir} k_{rc_i} \right) (2\pi)^4 |T_{ab}^n|^2 = \\ &= \sum_i \int d^3 k_{c_i} k_{c_i}^\nu f_{ab \rightarrow c_i} X. \end{aligned}$$

Смысл этого равенства очевиден: сумма средних импульсов $(\sigma_{ab}^{\text{tot}})^{-1} \int d^3 k_{c_i} k_{c_i}^\nu f_{ab \rightarrow c_i} X$ равна начальному импульсу. Увеличивая степень начального импульса, можно получить правила сумм, связывающие инклюзивные спектры произвольно высокого порядка. Например:

$$\begin{aligned} (k_a^\mu + k_b^\mu) (k_a^\nu + k_b^\nu) \sigma_{ab}^{\text{tot}} &= \sum_i \left[\int d^3 k_{c_i} k_{c_i}^\mu k_{c_i}^\nu f_{ab \rightarrow c_i} X + \right. \\ &+ 2 \int d^3 k_{c_i} d^3 k_{c_i}' k_{c_i}^\mu k_{c_i}'^\nu f_{ab \rightarrow c_i c_i} X + \sum_{i \neq j} \int d^3 k_{c_i} d^3 k_{c_j} k_{c_i}^\mu k_{c_j}^\nu f_{ab \rightarrow c_i c_j} X \left. \right]. \quad (9) \end{aligned}$$

Можно использовать вместо σ_{ab}^{tot} сами инклюзивные спектры. Например:

$$(k_a^\mu + k_b^\mu - k_c^\mu) f_{ab \rightarrow c} X = \sum_d \int d^3 k_d k_d^\mu f_{ab \rightarrow c} dX.$$

Из правил сумм можно увидеть, что уже на уровне кинематики возникают определенные корреляции между частицами в бинарном инклюзивном процессе.

В системе центра масс $\mathbf{k}_a + \mathbf{k}_b = 0$ из (9) получаем

$$\begin{aligned} \sum_i \left[\int d^3 k_{c_i} \mathbf{k}_{c_i}^2 f_{ab \rightarrow c_i} X + 2 \int d^3 k_{c_i} d^3 k_{c_i}' (\mathbf{k}_{c_i} \mathbf{k}_{c_i}') f_{ab \rightarrow c_i c_i} X + \right. \\ \left. + \sum_{i \neq j} \int d^3 k_{c_i} d^3 k_{c_j} (\mathbf{k}_{c_i} \mathbf{k}_{c_j}) f_{ab \rightarrow c_i c_j} X \right] = 0. \end{aligned}$$

Это означает, что в большей части области изменения импульсов \mathbf{k}_{c_i} и \mathbf{k}_{c_i}' , \mathbf{k}_{c_j} , направлены в разные полусферы. Иногда изучают так

называемую *корреляционную функцию*

$$C_{ij}(s, k_{c_i}k_{c_j}) = \frac{f_{ab \rightarrow c_i c_j X}}{\sigma_{ab \rightarrow c_i c_j X}} - \frac{f_{ab \rightarrow c_i X}}{\sigma_{ab \rightarrow c_i X}} \frac{f_{ab \rightarrow c_j X}}{\sigma_{ab \rightarrow c_j X}}$$

как меру корреляции между частицами c_i и c_j , детектируемыми в бинарном инклюзивном процессе $a + b \rightarrow c_i + c_j + X$.

Однако использование такого рода величины кажется неоправданным, по крайней мере, по двум соображениям:

1) в реальном случае нескольких видов частиц в $f_{ab \rightarrow c_i X}$ и $f_{ab \rightarrow c_j X}$ присутствуют каналы, которых нет в $f_{ab \rightarrow c_i c_j X}$;

2) даже если мы будем отбирать одинаковые каналы, то все равно малопривлекателен и непонятен факт отличия от нуля характеристики процесса вне его физической области.

Пусть Q — электрический заряд, тогда имеем

$$Q_a + Q_b = \sum_c \langle n_c \rangle Q_c.$$

Смысл этого правила сумм ясен: сумма средних зарядов, уносимых частицами, равна начальному заряду. Аналогичные утверждения имеют место и для других аддитивных зарядов, например барионного, лептонного и т. п.

Аналитические свойства сечений процессов множественного рождения по косинусу угла вылета детектируемой частицы. Выше были рассмотрены общие свойства (правила сумм) инклюзивных сечений, являющиеся следствиями лишь аддитивных законов сохранения. Установим дополнительные свойства сечений, следующие из таких принципов, как микропричинность, спектральность и унитарность.

Когда мы говорим об аналитических свойствах физических величин по каким-либо переменным, то это, как правило, означает экстраполяцию из физической области, т. е. из области, где величина измерима, в область значений, не имеющих прямого физического смысла, — например комплексные углы. Зачем это нужно?

Помимо того что всякая информация об амплитудах может быть интересной с различных точек зрения, есть и вполне практический аспект. Известно, что аналитические функции являются весьма «жесткими» объектами: поведение их в различных областях сильно скоррелировано. Для упругого рассеяния это выражается в том, что поведение амплитуды рассеяния вперед во многом определяется положением ближайшей сингулярности в плоскости комплексных углов рассеяния. Естественно ожидать чего-то подобного и для процессов множественного рождения.

В квантовой теории поля аналитические свойства амплитуд тесно связаны с принципом причинности.

Для того чтобы сформулировать принцип причинности, мы должны оперировать с локальными величинами типа операторов поля.

В формулировке Боголюбова [11], которой будем пользоваться, роль таких локальных величин играют «радиационные операторы»: $[\delta^n S / \delta \varphi_1(x_1) \dots \delta \varphi_n(x_n)] S^+$ и их функциональные производные.

Рассмотрим амплитуду процесса $a + b \rightarrow nC$: †

$$\langle nC | S | ab \rangle = i (2\pi)^4 \delta(k_a + k_b - \sum_i k_{lc_i}) T_{ab}^n,$$

где мы ограничились случаем, когда число конечных частиц больше двух. Согласно редукционной технике Боголюбова, имеем

$$\begin{aligned} \langle nC | S | a, b \rangle &= -i \int dx \exp[i(k_a - k_b)x/2] \times \\ &\times \langle nC | \frac{\delta J_a(-x/2)}{\delta \varphi_b(x/2)} | 0 \rangle (2\pi)^4 \delta(k_a + k_b - \sum_i k_{lc_i}), \end{aligned}$$

т. е.

$$T_{ab}^n = - \int dx \exp[i(k_a - k_b)x/2] \langle nC | \frac{\delta J_a(-x/2)}{\delta \varphi_b(x/2)} | 0 \rangle,$$

где $J_a(x) = i[\delta S / \delta \varphi_a(x)] S^+$ — оператор источника частиц вида a .

Условие микропричинности

$$\delta J_a(-x/2) / \delta \varphi_b(x/2) = 0, \quad x^0 < |\mathbf{x}|$$

и спектральности

$$\int dx \exp[i(k_a - k_b)x/2] \langle nC | \left[J_a\left(-\frac{x}{2}\right), J_b\left(\frac{x}{2}\right) \right] | 0 \rangle = 0$$

вне областей:

$$\begin{aligned} \left[\left(\sum_i k_{lc_i} \right) \pm \frac{1}{2} (k_a - k_b) \right]^2 &> 0; \\ \left(\sum_i k_{lc_i}^0 \right) \pm \frac{1}{2} (k_a^0 - k_b^0) &> 0 \end{aligned}$$

позволяет использовать представление Йоста — Лемана — Дайсона, которое получено для любой амплитуды, обладающей такими свойствами исчезновения:

$$\langle nC | T | ab \rangle = \int d^4u d\lambda^2 \frac{\Psi(u, \lambda^2; K_n)}{[(k_a - k_b)/2 - u]^2 - \lambda^2}.$$

Носитель спектральной функции Ψ по u и λ^2 содержится в области

$$(k_a^0 + k_b^0)/2 \pm u^0 > |(k_a + k_b)/2 \pm \mathbf{u}|;$$

$$\lambda \geq \max \{0, m_1 - \sqrt{[(k_a + k_b)/2 - u]^2}, m_2 - \sqrt{[(k_a + k_b)/2 + u]^2}\}, \quad (10)$$

где $m_{1,2}$ — массы наимизших состояний $|\bar{n}_{1,2}\rangle$, для которых $\langle nC | J_a | \bar{n}_1 \rangle \langle \bar{n}_1 | J_b | 0 \rangle \neq 0$; $\langle nC | J_b | \bar{n}_2 \rangle \langle \bar{n}_2 | J_a | 0 \rangle \neq 0$.

Из представления для $\langle nC | T | ab \rangle$ видно, что если направление начальных частиц задано в системе центра масс (с. ц. м.) $\mathbf{k}_a + \mathbf{k}_b = 0$ единичным вектором $\mathbf{n} = \mathbf{k}_a / |\mathbf{k}_a|$, то в системе отсчета относительно конфигурации конечных импульсов K_n вектор \mathbf{n} входит лишь в знаменатель. Это обстоятельство позволяет исследовать аналитические свойства амплитуды $\langle nC | T | ab \rangle$ по вектору \mathbf{n} , причем область аналитичности, очевидно, должна определяться из условия спектральности, выраженного в виде носителя спектральной функции Ψ по u и λ^2 . Существенным является то, что границы носителя [см. (10)] зависят в с. ц. м. лишь от полной энергии $E_a + E_b = \sqrt{s}$. Отсюда следует, что и область аналитичности по n будет зависеть лишь от s , но не от остальных переменных, характеризующих конечное состояние $\langle nC |$. Общий вывод аналитических свойств амплитуды $\langle nC | T | ab \rangle$ по вектору \mathbf{n} [12] приводится в приложении.

Аналитические свойства лишь по одной из двух независимых переменных, определяющих вектор \mathbf{n} в сферической параметризации $\mathbf{n} = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta)$, а именно по переменной $z = \cos \theta$ были исследованы в [1] (см. также [13]).

Оказывается, что амплитуда T_{ab}^n представима в виде:

$$T_{ab}^n(s, \cos \theta, \dots) = T_{ab,1}^n(s, \cos \theta, \dots) + \sin \theta T_{ab,2}^n(s, \cos \theta, \dots),$$

где амплитуды $T_{ab,1}^n, T_{ab,2}^n$ аналитичны по $\cos \theta$ в области, ограниченной эллипсом Лемана с фокусами в ± 1 и большой полуосью $x_L(s)$.

$$x_L(s) = \sqrt{1 + (m_1^2 - m_b^2)(m_2^2 - m_a^2) / \{k_a^2 [s - (m_1 - m_2)^2]\}}.$$

Полная же амплитуда $T_{ab}^n(s, \cos \theta, \dots)$ будет иметь еще и дополнительные точки ветвления в $\cos \theta = \pm 1$. Для фиксирования знака $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ следует провести разрезы $(-\infty, -1)$ и $[1, +\infty)$.

Перейдем теперь к сечению образования частицы c под углом θ по отношению к направлению движения начальных частиц. Это сечение является частично проинтегрированным сечением, которое имеет вид (см. разд. 1):

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{ab}^n}{d \cos \theta} &= \int \frac{k_c^2 d|\mathbf{k}_c|}{8\pi^2 E_c} \frac{d\sigma_{ab}^n}{d^3 k_c} = \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{\lambda^{1/2}} \int d|\mathbf{k}_c| \frac{k_c^2 d\tau^{n'}}{E_c} (2\pi)^4 \delta(k_a + k_b - k_c - \sum_{j=1}^j \sum_{l=1}^{n'_j} k_{lc_j}) |T_{ab}^n|^2 \equiv \\ &\equiv \int d\Gamma_{nc} |T_{ab}^n|^2; \quad n' = n - (0, 0, \dots, 1_c, \dots, 0). \end{aligned}$$

Заметим теперь, что благодаря инвариантности относительно 2-вращений

$$\frac{d\sigma_{ab}^n}{d \cos \theta}(\theta, s) = \frac{d\gamma_{ab}^n}{d \cos \theta}(2\pi - \theta, s).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{ab}^n}{d \cos \theta}(\theta, s) &= \frac{1}{2} \left[\frac{d\sigma_{ab}^n}{d \cos \theta}(\theta, s) + \frac{d\sigma_{ab}^n}{d \cos \theta}(2\pi - \theta, s) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \int d\Gamma_{nc} [|T_{ab}^n(s, \theta, \dots)|^2 + |T_{ab}^n(s, 2\pi - \theta, \dots)|^2] = \\ &= \int d\Gamma_{nc} [|T_{ab,1}^n(s, \cos \theta, \dots)|^2 + \sin^2 \theta |T_{ab,2}^n(s, \cos \theta, \dots)|^2]. \end{aligned}$$

Члены вида $\sin \theta (T_{ab,1}^{*n} T_{ab,2}^n + T_{ab,1}^n T_{ab,2}^{*n})$ сократились из-за разницы в знаках у $\sin \theta$ и $\sin(2\pi - \theta)$, поскольку $T_{ab,1,2}^n$ зависят лишь от четных степеней $\sin \theta$ и не меняются при замене $\theta \rightarrow 2\pi - \theta$.

Таким образом, видим, что сечение аналитически продолжается в эллипс Лемана и не содержит нефизических сингулярностей в $\theta = 0, \pi$.

Поскольку сумма конечного числа аналитических в одной и той же области членов также является аналитической в этой области, то отсюда следует, что при любом фиксированном s , когда число каналов ограничено, инклюзивные дифференциальные сечения

$$\frac{d\sigma_{ab \rightarrow cX}}{d \cos \theta} = \int \frac{k_c^2 d|\mathbf{k}_c|}{8\pi^2 E_c} \frac{d\sigma_{ab \rightarrow cX}}{d^3 k_c} = \sum_n \frac{d\sigma_{ab}^n}{d \cos \theta}$$

и инклюзивные спектры

$$\bar{f}_{ab \rightarrow cX}(s, \cos \theta) = \int \frac{k_c^2 d|\mathbf{k}_c|}{8\pi^2 E_c} f_{ab \rightarrow cX} = \sum_n n_c \frac{d\sigma_{ab}^n}{d \cos \theta}$$

являются аналитическими по $\cos \theta$ функциями, которые регулярны внутри области, ограниченной эллипсом с фокусами в $\cos \theta = \pm 1$ и большой полуосью $x_L(s)$.

Аналитические свойства по двум угловым переменным [14]. Выше были рассмотрены аналитические свойства амплитуд и сечений множественных процессов по косинусу угла между начальной и детектируемой частицами.

Направим ось Z вдоль импульса \mathbf{k}_c , а плоскость XOZ , определяющую начало отсчета азимутальных углов, построим на векторах \mathbf{k}_c и \mathbf{k}_d , где d — любая, но фиксированная частица из конечного состояния. Углы θ, φ задают направление вектора $\mathbf{n} = \mathbf{k}_a / |\mathbf{k}_a|$. Явный вид остальных независимых переменных для дальнейшего несуществен и будет обозначаться в совокупности ξ_n .

Представление Йоста — Лемана — Дайсона для амплитуды процесса $a + b \rightarrow nC$ перепишем в виде

$$T_{ab}^n(s, \mathbf{n}, \dots) = \int_{x_L(s)}^{\infty} dx \int d\mathbf{e} \frac{\Phi(x, \mathbf{e}; s, \dots)}{x - \mathbf{e} \cdot \mathbf{n}},$$

где $x_L(s)$ — то же самое, что и выше; $\mathbf{e} = u/|u|$, а

$$\Phi(x, \mathbf{e}; s, \dots) = \frac{l}{2|\mathbf{k}_a|} \int du_0 d|\mathbf{u}| |\mathbf{u}| \Psi(u, \lambda^2; s, k_c, k_d, \dots) \times \\ \times \delta\left(x - \frac{\mathbf{k}_a^2 + \mathbf{u}^2 + \lambda^2 - [(m_a^2 - m_b^2)/\sqrt{s} - u_0]^2}{\varepsilon^2 |\mathbf{k}_a| |\mathbf{u}|}\right).$$

Как показано в приложении, $T_{ab}^n(s, \mathbf{n}, \dots)$ — аналитическая функция комплексного вектора \mathbf{n} в некоторой области на комплексной 3-сфере, размеры которой определяются величиной $x_L(s)$. В сферической параметризации $\mathbf{n} = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta)$ эта область имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} (|1+z||w|^{-1} + |1-z||w|)(|1+z||w| + |1-z||w|^{-1}) < 4x_L^2(s); \\ z \in (-x_L(s), -1] \cup [1, x_L(s)), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где $z = \cos \theta$, $w = \exp(i\varphi)$. Появление разрывов от $z = \pm 1$, как указывалось выше, связано с тем, что на сфере нельзя выбрать единую, везде регулярную параметризацию. В данном случае параметризации через сферические углы θ, φ есть сингулярность при $\theta = 0, \pi$.

Если угол φ — вещественный, то $|w| = 1$, и мы получаем результат предыдущего подраздела — аналитичность внутри эллипса Лемана:

$$|1-z| + |1+z| < 2x_L(s)$$

с разрезами $(-x_L(s), -1] \cup [1, x_L(s))$.

Разрешая неравенство (11) относительно $|w|$, получаем кольцевую область в w -плоскости, радиусы которой зависят от z :

$$R_-(z) < |w| < R_+(z);$$

$$R_{\pm}(z) = [4x_L^2 - (|1+z| - |1-z|)^2]^{1/2} \pm \\ \pm [4x_L^2 - (|1+z| + |1-z|)^2]^{1/2} / [2|1-z^2|^{1/2}].$$

Условием разрешимости неравенства является принадлежность z к эллипсу Лемана.

Очевидно, что $R_+ R_- = 1$ и $R_- \leq 1 \leq R_+$. Минимальный размер кольцо имеет при $z = \cos \theta = 0$, т. е. $\theta = \pi/2$. В этом случае $R_{\pm}(s, 0) = x_L(s) \pm \sqrt{x_L^2(s) - 1}$. Сопряженная амплитуда $T_{ab}^n(s, \mathbf{n}, \dots)$, очевидно, продолжается по \mathbf{n} в ту же область, что и $T_{ab}^n(s, \mathbf{n}, \dots)$.

Отсюда получаем, что дифференциальное сечение

$$\frac{d\sigma_{ab}^n}{d\cos\theta d\varphi} = \int d^3k_c d^3k_d \frac{d\sigma_{ab}^n}{d^3k_c d^3k_d} \delta\left(\cos\theta - \frac{\mathbf{k}_a \mathbf{k}_c}{|\mathbf{k}_a| |\mathbf{k}_c|}\right) \times \\ \times \delta\left(\varphi - \arccos \frac{\mathbf{k}_a^2 (\mathbf{k}_a \mathbf{k}_d) - (\mathbf{k}_c \mathbf{k}_d) (\mathbf{k}_c \mathbf{k}_a)}{\sqrt{[\mathbf{k}_c^2 \mathbf{k}_d^2 - (\mathbf{k}_c \mathbf{k}_d)^2][\mathbf{k}_a^2 \mathbf{k}_c^2 - (\mathbf{k}_a \mathbf{k}_c)^2]}\right)$$

аналитически продолжается в область (11) как функция двух комплексных переменных $z = \cos \theta$ и $w = \exp(i\varphi)$.

Это, в свою очередь, приводит к аналитичности в области (11) инклюзивного дифференциального сечения

$$d\sigma_{ab \rightarrow cdX}/d \cos \theta d\varphi = \sum_n d\sigma_{ab}^n/d \cos \theta d\varphi$$

и инклюзивного бинарного спектра

$$\bar{f}_{ab \rightarrow cdX}(s, \theta, \varphi) = \sum_n n_c n_d \frac{d\sigma_{ab}^n}{d \cos \theta d\varphi},$$

описывающих инклюзивный процесс $a + b \rightarrow c + d + X$. Выше мы характеризовали углами θ и φ начальный импульс k_a . С другой стороны, θ и φ можно рассматривать как угол образования частицы c и угол между плоскостями $[k_a, k_c]$ и $[k_c, k_d]$.

Условие унитарности и аналитические свойства характеристик процессов множественного рождения по угловым переменным θ и φ [14, 15]. До сих пор при изучении аналитических свойств амплитуд и сечений множественных процессов по угловым переменным были использованы лишь «линейные» общие принципы — микропричинность и спектральность, которые выражаются в виде некоторых линейных условий на амплитуды физических процессов, т. е. не содержащих нетривиальным образом высших степеней амплитуд. Условие унитарности

$$SS^+ = 1 \quad (12)$$

отвечает квадратам модулей амплитуд физических процессов, т. е. является нелинейным условием и должно приводить к новым свойствам амплитуд. Рассмотрим операторное равенство (12) для матричных элементов между двухчастичными состояниями $\langle a', b' |$ и $| a, b \rangle$. Выделяя связанные части, получаем, вставляя полную систему промежуточных состояний:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{i} \langle a' b' | T - T^+ | ab \rangle = \\ & = \sum_n \int d\tau^n (2\pi)^4 \delta(k_a + k_b - \sum_{ii} k_{ic_i}) \langle a' b' | T^+ | n \rangle \langle n | T | ab \rangle. \end{aligned} \quad (13)$$

Из инвариантности относительно PT -преобразования следует, что левая часть равна $2\text{Im} \langle a' b' | T | ab \rangle$, т. е. мнимой части амплитуды упругого рассеяния.

Таким образом, условие унитарности приводит к корреляции между свойствами упругих и неупругих амплитуд. Если взять другие матричные элементы условия унитарности, то, очевидно, каждое из получающихся при этом соотношений будет доставлять все новые связи между амплитудами различных процессов. Задача, состоящая в том, чтобы конкретно разрешить эти связи, исключительно сложна. К настоящему времени достаточно хорошо изучены следствия лишь из двухчастичного условия унитарности (13) и некоторые первые шаги

сделаны в изучении условия унитарности для процесса $3 \rightarrow 3$ (см. разд. 4).

Посмотрим, к чему приводит условие унитарности в смысле аналитических свойств амплитуд и сечений неупругих процессов.

Как было показано Мартеном [16], мнимая часть амплитуды упругого рассеяния $\text{Im} \langle a'b' | T | ab \rangle \equiv \text{Im} T_2(s, \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')$, $\mathbf{n} = \mathbf{k}_a / |\mathbf{k}_a|$, $\mathbf{n}' = \mathbf{k}_a' / |\mathbf{k}_a'|$, аналитически продолжается по $\cos \theta = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'$ в эллипс с фокусами в $\cos \theta = \pm 1$ и большой полуосью $x_M(s) = 1 + 2m_\pi^2/k_a^2 \approx 1 + 8m_\pi^2/s$, $s \rightarrow \infty$, что отвечает ближайшей сингулярности в t -плоскости в точке $4m_\pi^2$, т. е. обмену двумя π -мезонами.

Разложим амплитуду упругого рассеяния в ряд по полиномам Лежандра (нормировочные коэффициенты здесь и ниже выбираются по соображениям удобства):

$$T_2(s, \cos \theta) = \frac{8\pi \sqrt{s}}{|\mathbf{k}_a|} \sum_l (2l+1) f_l(s) P_l(\cos \theta),$$

а амплитуда процесса $ab \rightarrow nC$ — в ряд по сферическим функциям $D_{m_0}^l(\mathbf{n})$:

$$T_{ab}^n(s, \mathbf{n}, \dots) = \left(\frac{2\sqrt{s}}{|\mathbf{k}_a|} \right)^{1/2} \sum_{lm} (2l+1) T_{ab}^{n, lm}(s, \dots) D_{m_0}^l(\mathbf{n}). \quad (14)$$

В терминах парциальных амплитуд условие унитарности принимает вид:

$$\text{Im} f_l(s) = |f_l(s)|^2 + \sum_n \sum_{m=-l}^l \int d\xi_n |T_{ab}^{n, lm}(s, \xi_n)|^2. \quad (15)$$

Из аналитичности $\text{Im} T_2(s, z)$ в эллипсе Мартена следует неравенство

$$\text{Im} f_l(s) \leq s^N \exp[-l \ln(x_M + \sqrt{x_M^2 - 1})] / \sqrt{2l+1}, \quad (16)$$

где s^N вошло как верхняя граница для поведения $\text{Im} T_2(s, z)$ по s в области аналитичности.

Из (15) следует ограничение на парциальные амплитуды неупругих процессов:

$$\sum_n \sum_{m=-l}^l \int d\xi_n |T_{ab}^{n, lm}(s, \xi_n)|^2 < \text{Im} f_l(s). \quad (17)$$

Отсюда нельзя сделать никаких определенных заключений относительно поведения $T_{ab}^{n, lm}(s, \xi_n)$, так как они входят в неравенство (17), будучи проинтегрированными по ξ_n . Поэтому будем изучать ниже аналитические свойства не амплитуд, а сечений.

Сечение $d\sigma_{ab}^n/d \cos \theta d\varphi$ можно представить в виде

$$\frac{d\sigma_{ab}^n}{d \cos \theta d\varphi} = \frac{1}{k_a^2} \sum_{lm} \sum_{l'm'} (2l+1)(2l'+1) D_{m0}^{*l}(n) D_{m'0}^{l'}(n) C_{mm'}^{ll'}(n, s), \quad (18)$$

где $C_{mm'}^{ll'}(n, s) = \int d\xi_n T_{ab}^{*n, lm} T_{ab}^{n, l'm'}$.

Где сходится этот ряд? Из сказанного выше известно, что амплитуды процесса $ab \rightarrow nC$ по $z = \cos \theta$ и $w = \exp(i\varphi)$ аналитичны в области

$$\begin{aligned} (|1+z||w| + |1-z||w|^{-1})(|1+z||w|^{-1} + |1-z||w|) < < 4x_L^2(s); \\ z \in (-x_L(s), -1] \cup [1, x_L(s)). \end{aligned}$$

Можно показать, что в этой области содержится соответствующая область сходимости разложения (14), а именно область

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} (|w| + |w|^{-1})(|1+z| + |1-z|) < 2x_L(s); \\ z \in (-x_L(s), -1] \cup [1, x_L(s)). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Таким образом, $d\sigma_{ab}^n/d \cos \theta d\varphi$ можно представить в виде (18) в области (19), где ряд сходится равномерно и абсолютно. Однако теперь у нас есть дополнительная информация о коэффициентах $C_{mm'}^{ll'}(n, s)$, которую мы получаем, если примем во внимание условие унитарности (17).

Действительно, из неравенства Буняковского — Шварца имеем

$$|C_{mm'}^{ll'}(n, s)| \leq \sqrt{C_{mm}^{ll}(n, s) C_{m'm'}^{l'l'}(n, s)} \leq \sqrt{\text{Im } f_l(s) \text{Im } f_{l'}(s)}.$$

Это неравенство вместе с неравенством (16) для $\text{Im } f_l(s)$ и неравенством для $D_{m0}^{l'}(\theta, \varphi)$ при физических φ и $\theta = \alpha + i\beta$:

$$|D_{m0}^{l'}(\theta, \varphi)| \leq [\text{ch } \beta + \sqrt{\text{ch}^2 \beta - 1}]^l$$

можно использовать для оценки области сходимости разложения (18):

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\sigma_{ab}^n}{d \cos \theta d\varphi} \right| &\leq \frac{1}{k_a^2} \sum_{l, l'} (2l+1)(2l'+1) [\text{ch } \beta + \sqrt{\text{ch}^2 \beta - 1}]^{l+l'} \times \\ &\times \sum_{m, m'} \sqrt{C_{mm}^{ll}(n, s) C_{m'm'}^{l'l'}(n, s)} \leq \\ &\leq \frac{1}{k_a^2} \left[\sum_l (2l+1)^{3/2} (\text{ch } \beta + \sqrt{\text{ch}^2 \beta - 1})^l \sqrt{\text{Im } f_l(s)} \right]^2 \leq \\ &\leq \frac{s^N}{k_a^2} \left\{ \sum_l (2l+1)^{5/4} \left[(\text{ch } \beta + \sqrt{\text{ch}^2 \beta - 1}) / \sqrt{x_M(s) + \sqrt{x_M^2(s) - 1}} \right]^l \right\}^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует непосредственно, что ряд (18) сходится при физических φ в эллипсе:

$$|1+z| + |1-z| < 2x_0(s) = 2\sqrt{1+x_M(s)}/2, \quad (20)$$

за исключением разрывов $(-x_0(s), -1]$ и $[1, x_0(s))$. На языке сферических функций $D_{m_0}^l(\theta, \varphi) = \exp(im\varphi) d_{m_0}^l(\theta)$, где $d_{m_0}^l(\theta)$ — функции Вигнера, происхождение ветвлений в $z = \cos\theta = \pm 1$ связано с наличием ветвлений в $d_{m_0}^l(\theta)$, которые можно представить в виде

$$d_{m_0}^l(\theta) = (1 - \cos^2\theta)^{|m|/2} R_m^l(\theta)$$

с $R_m^l(\theta)$, регулярными в $\cos\theta = \pm 1$. Если проинтегрировать по φ , то множители $\exp[i(m-m')\varphi]$ дадут $\delta_{mm'}$ и ветвления исчезнут. Отсюда следует, что сечение $d\sigma_{ab}^n/d\cos\theta$ аналитически продолжается в область (20) уже без разрывов от ± 1 .

Итак, условие унитарности существенно расширяет область аналитичности $x_0(s) \approx 1 + 2m_n^2/s$, в то время как $x_L(s) \approx 1 + m^4/s^2$. Очевидно, что инклюзивные сечения

$$\frac{d\sigma_{ab \rightarrow cX}}{d\cos\theta} = \sum_n \frac{d\sigma_{ab}^n}{d\cos\theta}; \quad \frac{d\sigma_{ab \rightarrow c dX}}{d\cos\theta d\varphi} = \sum_n \frac{d\sigma_{ab}^n}{d\cos\theta d\varphi}$$

и инклюзивные спектры

$$\bar{f}_{ab \rightarrow cX}(s, \cos\theta) = \sum_n n_c \frac{d\sigma_{ab}^n}{d\cos\theta}; \quad \bar{f}_{ab \rightarrow c dX}(s, \cos\theta, \varphi) = \sum_n n_c n_d \frac{d\sigma_{ab}^n}{d\cos\theta d\varphi}$$

обладают теми же аналитическими свойствами, что и соответствующие эксклюзивные $d\sigma_{ab}^n/d\cos\theta$ и $d\sigma_{ab}^n/d\cos\theta d\varphi$.

3. ОГРАНИЧЕНИЯ НА ПОВЕДЕНИЕ ИНКЛЮЗИВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

Выше были рассмотрены общие свойства инклюзивных распределений, полученные на основе общих принципов теории. Однако взятые сами по себе, эти свойства, например аналитические свойства по угловым переменным, не могут быть сопоставлены с экспериментальными данными.

Поэтому здесь мы займемся выводом из общих свойств тех следствий для инклюзивных распределений, которые непосредственно связаны с их поведением в различных подобластях физической области. При этом необходимо иметь в виду, что, исходя из столь небольшого количества исходных предположений, нельзя надеяться на получение очень детальной информации относительно поведения физических характеристик. Действительно, оставаясь в рамках общих принципов, мы имеем еще весьма большой выбор тех или иных конкретных свойств амплитуд, отвечающих широкому спектру самых различных механизмов взаимодействия.

Результаты, которые будут получены здесь, имеют вид неравенств, ограничивающих возможное (в рамках принятых нами общих принципов) поведение инклюзивных распределений с ростом энергии. Разумеется, не задавая динамики взаимодействия, нельзя сказать что-либо по поводу того, почему, например, нарушается скейлинг в центральной области. Однако мы в состоянии ответить на вопрос: насколько сильным может быть такое нарушение?

С другой стороны, ценность подобного рода ограничений именно и состоит в том, что они не зависят от конкретного выбора механизмов взаимодействия и должны выполняться в любой модели. С этой точки зрения сравнение с такими общими результатами является надежным способом проверки качества того или иного модельного подхода. Кроме того, мыслима и такая ситуация, когда ограничения, полученные из основных принципов теории, вступают в постоянное противоречие с экспериментальными результатами. В данном случае будем вынуждены пересмотреть эти принципы: заменить их новыми или ограничить область их применимости. Как показывает история физики, такой пересмотр всегда приводит к новому продвижению в нашем понимании природы.

Строгие ограничения на инклюзивные распределения [1, 9, 14, 17].

Прежде чем приступить к выводу ограничений на инклюзивные спектры, следующих из их аналитических свойств, посмотрим, что могут дать правила сумм.

В разд. 2 было показано, что σ_{ab}^{tot} и одночастичные инклюзивные спектры связаны следующим правилом сумм:

$$\sqrt{s} \sigma_{ab}^{\text{tot}}(s) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \sum_c \int dk_c f_{ab \rightarrow cX}(s, \mathbf{k}_c),$$

где $f_{ab \rightarrow cX}$ — инклюзивный спектр процесса

$$a + b \rightarrow c + X.$$

В переменных $x = 2k_{||}/\sqrt{s}$ и \mathbf{k}_{\perp} , где компоненты $k_{||}$, \mathbf{k}_{\perp} определяются по отношению к направлению движения начальных частиц в их системе центра инерции, имеем:

$$\sum_c \int dx d\mathbf{k}_{\perp} f_{ab \rightarrow cX}(s, x, \mathbf{k}_{\perp}) = 32\pi^3 \sigma_{ab}^{\text{tot}}(s).$$

Из ограничения Фруассара

$$\sigma_{ab}^{\text{tot}}(s) \leq (\pi/m_{\pi}^2) \ln^2(s/s_0), \quad s \gg s_0,$$

следует, что

$$\int dx d\mathbf{k}_{\perp} f_{ab \rightarrow cX}(s, x, \mathbf{k}_{\perp}) \leq (32\pi^4/m_{\pi}^2) \ln^2(s/s_0).$$

Аналогичным образом можно получить ограничение для бинарного инклюзивного спектра, отвечающего процессу $a + b \rightarrow c + d + X$:

$$\int dx_c dk_{\perp c} dx_d dk_{\perp d} f_{ab \rightarrow cd X} \leq \frac{4(2\pi)^7}{m_\pi^2} \ln^2(s/s_0)$$

и т. д.

Полученные неравенства означают, что инклюзивные спектры не могут возрастать быстрее, чем $\ln^2 s$, равномерно во всей области изменения переменных, описывающих движение детектируемых частиц. Однако в некоторых областях изменения импульсов детектируемых частиц сколь угодно быстрый рост спектров не противоречит приведенным выше неравенствам при условии, что размеры упомянутых областей достаточно быстро уменьшаются с ростом энергии. Для того чтобы исследовать возможность таких ситуаций, необходимо избавиться от интегрирования хотя бы по некоторым переменным, связанным с детектируемыми частицами. И здесь на помощь приходят аналитические свойства инклюзивных распределений, полученные в разд. 2. Поскольку аналитические свойства были получены по отношению к угловым переменным, то все последующее будет относиться к угловым распределениям.

Мы начнем с одночастичного углового распределения в эксклюзивном процессе $ab \rightarrow Cn$, которое обозначим $\Phi_n(s, \cos \theta)$:

$$\Phi_n(s, \cos \theta) = (1/\sigma_{ab}^n(s)) d\sigma_{ab}^n/d \cos \theta.$$

Из ограничений для Φ_n можно уже получить ограничения для инклюзивных распределений, суммируя их (с соответствующими весами) по всем каналам. Как было показано выше, Φ_n аналитически продолжается в эллипс с фокусами в $\cos \theta = \pm 1$ и большой полуосью

$$x_0(s) \approx 1 + 2m_\pi^2/s.$$

В этой области сходится ряд по полиномам Лежандра:

$$\Phi_n(s, \cos \theta) = \sum_l (2l+1) a_l(s) P_l(\cos \theta),$$

причем из $a_l(s) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dz P_l(z) \Phi_n(s, z)$ следует, что $|a_l(s)| \leq a_0 = 1/2$.

Предполагая $\Phi_n(s, z)$ полиномиально ограниченной по z в области аналитичности, можно показать, что (при $l \gg 1$):

$$|a_l(s)| \leq s^N \exp[-l \ln(x_0 + \sqrt{x_0^2 - 1})]/\sqrt{l}.$$

Теперь уже нетрудно найти ограничения на Φ_n . Пусть $z = 1$ ($\theta = 0$), тогда

$$\Phi_n(s, 1) \leq \sum_l (2l+1) |a_l(s)|.$$

Основной вклад в сумму дают l_0 первых парциальных волн, где l_0 определяется из условия

$$s^N \exp[-l_0 \ln(x_0 + \sqrt{x_0^2 - 1})] \approx 1,$$

откуда

$$l_0(s) \approx \frac{N\sqrt{s}}{2m_\pi} \ln s.$$

Таким образом, получаем

$$\frac{1}{\sigma_{ab}^n} \frac{d\sigma_{ab}^n}{d \cos \theta} \Big|_{\theta=0} \leq \frac{s}{4m_\pi^2} N^2 \ln^2 s.$$

Для углов $\theta \neq 0, \pi$ оценку можно немного улучшить, если использовать неравенство

$$|P_l(\cos \theta)| < 2/\sqrt{\pi(2l+1) \sin \theta}.$$

В этом случае имеем следующее ограничение:

$$\frac{1}{\sigma_{ab}^n} \frac{d\sigma_{ab}^n}{d \cos \theta} \leq \frac{N^{3/2}}{3\sqrt{\pi \sin \theta}} \left(\frac{s}{m_\pi^2}\right)^{3/4} \ln^{3/2} s.$$

Отсюда легко получить ограничения для инклюзивных спектров:

$$\bar{f}_{ab \rightarrow cX}(s, \cos \theta) \Big|_{\theta=0, \pi} \leq \frac{s}{4m_\pi^2} N^2 \langle n_c \rangle \sigma_{ab \rightarrow cX} \ln^2 s;$$

$$\bar{f}_{ab \rightarrow cX}(s, \cos \theta) \leq \frac{N^{3/2}}{3\sqrt{\pi \sin \theta}} \left(\frac{s}{m_\pi^2}\right)^{3/4} \langle n_c \rangle \sigma_{ab \rightarrow cX} \ln^2 s.$$

Известно, что при малых $x = 2k_\perp/\sqrt{s}$ масштабнo-инвариантное поведение спектров

$$f_{ab \rightarrow cX}(s, x, \mathbf{k}_\perp) \approx f_{ab \rightarrow cX}^{as}(x, \mathbf{k}_\perp)$$

заметно нарушается: инклюзивные спектры возрастают с увеличением s .

Пользуясь тем, что при $\theta = 0$ величина $\mathbf{k}_\perp = 0$, а $|\mathbf{k}| = k_\parallel$, можно переписать ограничения для $f_{ab \rightarrow cX}$ в следующем виде:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx x^2}{\sqrt{x^2 + 4m_\pi^2/s}} f_{ab \rightarrow cX}(s, x, 0) \leq \text{const} \langle n_c \rangle \sigma_{ab \rightarrow cX} \ln^2 s.$$

Это неравенство показывает, до какой степени может нарушаться скейлинг без противоречия с общими принципами теории.

С помощью условия унитарности можно доказать, что функции

$$\bar{f}_{ab \rightarrow cX}^{(j)}(s, \cos \theta) = \int d|\mathbf{k}_c| \mathbf{k}_c^2 E_c^{j-1} f_{ab \rightarrow cX}(s, |\mathbf{k}_c|, \cos \theta)$$

аналитически продолжаются в ту же область, где аналитична функция

$$\bar{f}_{ab \rightarrow cX}(s, \cos \theta) = \bar{f}_{ab \rightarrow cX}^{(0)}(s, \cos \theta),$$

что и приводит к сходимости разложения $\bar{f}_{ab \rightarrow cX}^{(j)}$ в эллипсе с фокусами в $\cos \theta = \pm 1$ и большой полуосью $x_0(s)$.

Отсюда, действуя аналогично тому, как это было сделано при выводе на $\bar{f}_{ab \rightarrow cX}$, получаем ограничения для моментов инклюзивных сечений по энергии детектируемых частиц при фиксированном угле вылета:

$$\bar{f}_{ab \rightarrow cX}^{(j)}(s, \cos \theta) |_{\theta=0, \pi} \leq \frac{s}{4m_\pi^2} N^2 (\sqrt{s})^j \sigma_{ab \rightarrow cX} \ln^2 s;$$

$$\bar{f}_{ab \rightarrow cX}^{(j)}(s, \cos \theta) \leq \frac{N^{3/2}}{3 \sqrt{\pi \sin \theta}} \left(\frac{s}{4m_\pi^2} \right)^{3/4} (\sqrt{s})^j \sigma_{ab \rightarrow cX} \ln^2 s,$$

где

$$\sigma_{ab \rightarrow cX}(s) \leq \sigma_{ab}^{\text{tot}}(s) \leq \frac{\pi}{m_\pi^2} \ln^2 s.$$

Отсюда следует, в частности, что

$$\int_{-1}^1 dx |x|^{j+1} f_{ab \rightarrow cX}(s, x, 0) \leq \text{const} \ln^4 s.$$

Ограничения такого типа при $j = 1$ рассматривались в [17]. Однако полученные в [17] ограничения для $\theta = 0, \pi$ сингулярны также и при $\theta = \pi/2$.

Верхние ограничения, следующие из дополнительных гипотез об аналитичности [18]. Мы рассмотрели следствия, вытекающие из аналитических свойств инклюзивных сечений по углу вылета детектируемой частицы, в свою очередь, строго следующих из условия унитарности и аналитических свойств соответствующих упругих амплитуд. Заметим, что положение ближайшей сингулярности в $\cos \theta$ -плоскости ($x_0 \approx 1 + 2m_\pi^2/s$) отвечает ближайшей сингулярности по передаче импульса $t_{ac} = (k_a - k_c)^2$ в точке $t_{ac} = m_\pi^2$. Это — наглядное проявление короткодействия ядерных сил между адронами за счет обмена легчайшим адроном с квантовыми числами \bar{ac} (для простоты будем считать, что это π -мезон).

Поскольку выше мы имели дело с инклюзивными спектрами, проинтегрированными по модулю импульса детектируемой частицы, то $x_0(s)$ отвечает почти упругим процессам, что нетрудно видеть из выражения

$$t_{ac} = m_a^2 + m_c^2 - 2E_a E_c + 2|\mathbf{k}_a| |\mathbf{k}_c| \cos \theta.$$

Ближайшая вещественная сингулярность по z происходит от наибольших $|\mathbf{k}_c|$:

$$|\mathbf{k}_c| \leq |\mathbf{k}_a| \approx \sqrt{s}/2.$$

Что известно об аналитических свойствах инклюзивного спектра $f_{ab \rightarrow cX}(s, |\mathbf{k}_c|, \cos \theta)$ по $\cos \theta$ при фиксированных $s, |\mathbf{k}_c|$?

Единственный строго доказанный результат — это аналитичность в эллипсе Лемана, большая полуось которого $x_L(s)$ не зависит от $|k_c|$, как было установлено в разд. 2.

Естественно предположить, что аналогично случаю проинтегрированного спектра, когда условие унитарности для упругого процесса $a + b \rightarrow a + b$ приводит к расширению области аналитичности до эллипса с большой полуосью $x_0 > x_L$, условие унитарности для процесса $a + b + c \rightarrow a + b + c$ сыграет подобную роль для инклюзивного спектра при фиксированном $|k_c|$.

Однако, несмотря на то что в феноменологических подходах (редже-мюллеровский анализ [6]) наивное использование трехчастичной унитарности помогает, по крайней мере, единому описанию различных кинематических областей, строгий анализ этой проблемы находится еще в начальной стадии изучения. Основываясь на аналогии с упругими процессами, можно думать, что и в этом случае определяющим моментом будет короткодействие ядерных сил, связанное с обменом легчайшими адронами в t -канале.

Не вдаваясь в дальнейшие детали, предположим в соответствии с [19], что ближайшая сингулярность в z -плоскости для $f_{ab \rightarrow cx}(s, |k_c|, z)$ определяется, как и для проинтегрированного спектра, из условия $t_{ac} = m_\pi^2$. Отсюда следует, что соответствующая область аналитичности при $s \rightarrow \infty$ и фиксированных $|k_c|$ — это эллипс с фокусами в $z = \pm 1$ и большой полуосью x_c , равной приближенно обратной скорости детектируемой частицы в с. ц. м.:

$$x_c \underset{s \rightarrow \infty}{\approx} 1/v_c = \sqrt{1 + m_c^2/k_c^2}.$$

Что можно сказать о сингулярностях в комплексных направлениях? Очень мало или почти ничего, если иметь в виду строгие результаты. В дополнение к предыдущему сделаем предположение, что существует окрестность физической области по $\cos \theta$, где $f_{ab \rightarrow cx}(s, |k_c|, \cos \theta)$ аналитична при всех s и $|k_c|$, лежащих в физической области: $s \geq (m_a + m_b)^2$, $0 \leq |k_c| \leq \sqrt{s}/2$. Насколько такое предположение соответствует действительности? Исследование аналитических свойств спектров, моделируемых отдельными диаграммами [20], просуммированными лестничными амплитудами [21], показали, что высказанная выше гипотеза действительно в этих случаях реализуется. Более того, в дополнение к этому существуют комплексные окрестности физических точек $\cos \theta$, свободные от сингулярностей при $s \rightarrow \infty$ и любых $|k_c|$.

Итак, окончательно, предположим, что инклюзивный спектр $f_{ab \rightarrow cx}(s, |k_c|, z)$ аналитически продолжается по $z = \cos \theta$ в область \mathcal{D} , содержащую эллипс с фокусами в $z = \pm 1$ и большой полуосью x_c , причем множества $\mathcal{D} \cap \{z \mid \pm \operatorname{Im} z > 0\}$ выпуклы.

Условие выпуклости, означающее, что отрезок прямой, соединяющей любые две точки области, целиком лежит внутри нее, принято здесь лишь для упрощения доказательства. В действительности же

условие на форму области может быть значительно менее ограничительным (см., например, [22]).

Чтобы получить верхние ограничения, удобнее работать с частично проинтегрированным спектром

$$\bar{f}(s, p, z) = \int_0^p \frac{d|\mathbf{k}_c| k_c^2}{8\pi^2 E_c} f_{ab \rightarrow cX}(s, |\mathbf{k}_c|, z).$$

Это связано с тем, что для \bar{f} ограничения сверху содержат меньше неизвестной информации, чем для $f_{ab \rightarrow cX}(s, |\mathbf{k}_c|, z)$. В то же время еще сохраним определенные сведения о том, как $f_{ab \rightarrow cX}$ зависит от $|\mathbf{k}_c|$.

В соответствии с основными предположениями функция $\bar{f}(s, p, z)$ аналитична в области \mathcal{D} , причем большая полуось соответствующего эллипса

$$\bar{x}_c = \sqrt{1 + m_c^2/p^2}. \quad (21)$$

Исходя из этих аналитических свойств и пользуясь техникой «ассоциированных функций», развитой в [14, 22], можно получить следующее верхнее ограничение для инклюзивного спектра:

$$\int_0^p \frac{d|\mathbf{k}_c| |\mathbf{k}_c|^2}{E_c} f_{ab \rightarrow cX}(s, |\mathbf{k}_c|, \cos \theta) \leq \text{const } a_0 \left[\frac{\rho_c + 1}{\rho_c - 1} \right]^2 \ln^2 s, \quad (22)$$

где $\rho_c = \bar{x}_c + \sqrt{\bar{x}_c^2 - 1} + \eta \sin \theta$; η характеризует размеры области аналитичности, а $a_0 = \int d^3k_c f_{ab \rightarrow cX} \theta(p - |\mathbf{k}_c|)$.

Совершенно аналогично можно показать, что

$$\int_0^p \frac{d|\mathbf{k}_c| k_c^2}{E_c} E_c^j f_{ab \rightarrow cX} \leq \text{const } a_j \left[\frac{\rho_c + 1}{\rho_c - 1} \right]^2 \ln^2 s,$$

где

$$a_j = \int_{|\mathbf{k}_c| \leq p} d^3k_c E_c^j f_{ab \rightarrow cX}.$$

Эти ограничения справедливы и нетривиальны при всех θ . Для $\theta \neq 0$, их можно слегка улучшить, если при выводе оценки для M_0 воспользоваться неравенством $|P_l(\cos \theta)| < 2/\sqrt{\pi(2l+1)} \sin \theta$. В этом случае

$$\int_0^p \frac{d|\mathbf{k}_c| k_c^2}{E_c} E_c^j f_{ab \rightarrow cX} \leq \frac{\text{const } a_j \ln^{3/2} s}{\sqrt{\sin \theta}} \left[\frac{\rho_c + 1}{\rho_c - 1} \right]^{3/2}. \quad (23)$$

При фиксированных p (область пионизации) имеем, в частности:

$$\int_0^p d|\mathbf{k}_c| k_c^2 f_{ab \rightarrow cX} \leq \text{const } \sqrt{s} \ln^4 s,$$

а при $\theta \neq 0, \pi$

$$\int_0^p d |k_c| k_c^2 f_{ab \rightarrow cX} \leq \text{const } \sqrt{s} \frac{\ln^{7/2} s}{\sqrt{\sin \theta}}.$$

Пусть теперь $p = \xi \sqrt{s}/2$. Тогда интегрирование можно вести только по области фрагментации, т. е. конечных x , и

$$\int_{s_0}^s dx x^j f_{ab \rightarrow cX}(s, x, k_{\perp} = 0) \leq \text{const } \xi^j \ln^4 s.$$

Интересно, что полученные ограничения допускают большое (степенное) нарушение скейлинга в области пионизации, в то время как допустимое нарушение скейлинга в области фрагментации значительно слабее (логарифмическое). Это можно рассматривать как качественное согласие с экспериментальными данными.

Запишем теперь наши ограничения в переменных k_{\perp} и быстроты $y = (1/2) \ln [(E + k_{\parallel})/(E - k_{\parallel})]$, часто используемых для представления экспериментальных данных по инклюзивным сечениям. При $j = 1$, $\theta = \pi/2$, $p \approx \sqrt{s}/2$ получим

$$\int dk_{\perp} k_{\perp} \left. \frac{d \langle n_c \rangle}{dy dk_{\perp}} \right|_{y=0} \leq \text{const } \sqrt{s} \ln^{3/2} s$$

или

$$\langle k_{\perp} \rangle (s | y = 0) \left. \frac{d \langle n_c \rangle}{dy} \right|_{y=0} \leq \text{const } \sqrt{s} \ln^{3/2} s,$$

где $\langle k_{\perp} \rangle (s | y)$ — среднее значение поперечного импульса детектируемой частицы при фиксированном y , а

$$\frac{d \langle n_c \rangle}{dy} = \int dk_{\perp} \frac{d \langle n_c \rangle}{dk_{\perp} dy} = \sum_n n_c \frac{1}{\sigma_{ab \rightarrow cX}} \frac{d\sigma_{ab}^n}{dy}$$

— средняя плотность числа детектируемых частиц в пространстве быстрот. Эксперименты показывают заметное возрастание $d \langle n_c \rangle / dy$ в области малых y [23]. Средние поперечные импульсы также обнаруживают медленное (в доступной ныне области энергий) возрастание с увеличением энергии.

Полученное выше ограничение лимитирует возможный рост обеих величин — $\langle k_{\perp} \rangle (s | 0)$ и $d \langle n_c \rangle / dy (s, 0)$ при высоких энергиях величиной, пропорциональной $\sqrt{s} \ln^{3/2} s$.

Отметим, что «априорные» ограничения имеют вид:

$$\langle k_{\perp} \rangle (s | y) \leq \sqrt{s}/2; \quad \int dy \frac{d \langle n_c \rangle}{dy} = \langle n_c \rangle \leq \sqrt{s}/m_c.$$

Перейдем теперь к области больших $p = \xi \sqrt{s}/2$ и больших θ . В этой области, являющейся, очевидно, областью больших попереч-

ных импульсов, имеем в переменных $\theta, s, x_{\perp} = 2k_{\perp}/\sqrt{s}$:

$$\int_0^{\bar{x}_{\perp}} dx_{\perp} x_{\perp}^j f_{ab \rightarrow cX}(s, x_{\perp}, \theta) \leq \text{const} \frac{\sin \theta x_{\perp}^{j-2} \sigma_{ab \rightarrow cX}}{s} \ln^{3/2} s.$$

Если использовать широко применяемую параметризацию инклюзивных сечений в области больших поперечных импульсов $f_{ab \rightarrow cX} \approx k_{\perp}^{-N} \varphi(x_{\perp}, \theta)$, то наше неравенство дает $N \geq 2$.

Ограничение могло бы насыщаться, но лишь в интервалах углов $\Delta\theta$, сжимающихся к нулю с ростом энергии, т. е. в интервалах $[\theta_0 - \Delta\theta, \theta_0 + \Delta\theta]$, $\theta_0 \neq 0, \pi$, $\Delta\theta \sim (\ln s)^{-3/2}$. Отметим, однако, что $\Delta\theta$ в нашем случае сжимается значительно медленнее, чем соответствующий интервал, отвечающий ограничениям без дополнительных гипотез об аналитичности (см. выше), где $\Delta\theta \rightarrow 0$ степенным образом. Можно ли улучшить полученные ограничения? Рассмотрим простой пример функции $\bar{f}(s, p, z)$, которая удовлетворяет всем требованиям, использованным выше:

$$\bar{f}(s, p, z) = a_0(s, p) \frac{1}{4} \left(\frac{z_0 + \sqrt{z_0^2 - 1}}{2} \right)^{1/2} [(z_0 - z)^{-1/2} + (z_0 + z)^{-1/2}],$$

где

$$z_0 = (2E_a E_c + \mu^2 - m_a^2 - m_c^2) / 2 |k_a| p \rightarrow \bar{x}_c = \sqrt{1 + m_c^2 / p^2}.$$

Функция \bar{f} обладает следующими свойствами:

1.
$$\int_{-1}^1 dz \bar{f} = a_0(s, p).$$

2. Функция аналитична по z во всей комплексной плоскости с разрезами $(-\infty, -z_0]$, $[z_0, +\infty)$.

3. Полиномиально ограничена по s при всех p и z в области аналитичности.

При этом в области больших углов имеем:

$$\begin{aligned} \bar{f}(s, p, \cos \theta) &\underset{s \rightarrow \infty}{\approx} a_0(s, p) \frac{1}{4} \left(\frac{\bar{x}_c}{2} + \frac{m_c}{2p} \right)^{1/2} \times \\ &\times [(\bar{x}_c - \cos \theta)^{-1/2} + (\bar{x}_c + \cos \theta)^{-1/2}]. \end{aligned}$$

Таким образом, убеждаемся, что оставаясь в рамках сделанных выше предположений, можно улучшить ограничения лишь за счет уменьшения степени $\ln s$.

Нижняя граница убывания инклюзивного спектра с ростом поперечного импульса [18]. Выше была установлена верхняя граница убывания инклюзивных спектров в области больших поперечных импульсов. Однако истинное поведение инклюзивного спектра может сильно отличаться от верхней оценки.

Установим здесь нижнюю границу инклюзивного спектра в рамках принятых ранее допущений об аналитичности по углу вылета детектируемой частицы. Посредством конформного отображения $w(z) = x_c z^{-1} (x_c - \sqrt{x_c^2 - z^2})$ переведем плоскость z с разрезами $(-\infty, -x_c], [x_c, +\infty)$ во внутренность круга радиуса x_c . Область \mathcal{D} выберем таким образом, чтобы при отображении $w(z)$ она переходила в плоскости w во внутренность эллипса \mathcal{E} (рис. 1) с фокусами $\pm w(a)$ и большой полуосью x_c . Параметр a может принимать значения из интервала $(0, 1)$. Отметим, что при этом точки $z = \pm 1$ переходят в точки $\pm x_c (x_c - \sqrt{x_c^2 - 1})$.

Если теперь воспользоваться преобразованием $\tau = [w + \sqrt{w^2 - w^2(a)}]/w(a)$, то область \mathcal{E} перейдет в кольцо с внутренним радиусом 1 и внешним радиусом R в плоскости τ :

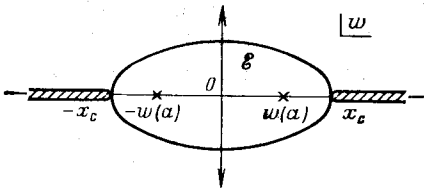


Рис. 1.

$$R = [x_c + \sqrt{x_c^2 - w^2(a)}]/w(a).$$
 Заметим, что окружность радиуса 1 в плоскости τ соответствует отрезку $[-w(a), w(a)]$ в плоскости w . Эллипс в плоскости w с большой полуосью $w(1)$ и фокусами $\pm w(a)$ переходит в плоскости τ в окружность радиуса E :

$$E = [w(1) + \sqrt{w^2(1) - w^2(a)}]/w(a).$$

Из теоремы Адмара для максимумов модулей M_1, M_E и M_R на окружностях радиусами 1, E и R можно получить:

$$\begin{aligned} & \max_{|\cos\theta| \leq a} f_{ab \rightarrow cX}(s, |\mathbf{k}_c|, \cos\theta) \geq \\ & \geq f_{ab \rightarrow cX}(s, |\mathbf{k}_c|, 1) \exp \left[-\frac{k_{\perp}^a}{m_c} \varphi(\theta_a) \ln \frac{M_R}{M_E} \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} k_{\perp}^a &= |\mathbf{k}_c| \sin \theta_a \equiv |\mathbf{k}_c| \sqrt{1 - a^2}; \quad \varphi(\theta_a) = \\ &= \frac{\Lambda}{2 \sin \theta_a} \ln \frac{1 + \Lambda}{1 - \Lambda}; \quad \Lambda = \left(\frac{2 \sin \theta_a}{1 + \sin \theta_a} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Если инклюзивный спектр монотонно убывает с ростом θ , то максимум достигается в граничных точках $\cos \theta = \pm a$. Таким образом, для одинаковых начальных частиц (например, в процессе $p + p \rightarrow \pi + X$) имеем:

$$\begin{aligned} & f_{ab \rightarrow cX}(s, |\mathbf{k}_c|, \cos \theta) \geq \\ & \geq f_{ab \rightarrow cX}(s, |\mathbf{k}_c|, 1) \exp \left[-\frac{k_{\perp}}{m_c} \varphi(\theta) \ln \frac{M_R}{M_E} \right]. \end{aligned}$$

Рассмотрим такую область углов θ , чтобы

$$m_c \ll k_{\perp} \ll |\mathbf{k}_c| = x \sqrt{s/2},$$

тогда

$$f_{ab \rightarrow cX}(s, x, k_{\perp}) \geq f_{ab \rightarrow cX}(s, x, 0) \exp[-B(s, x)k_{\perp}],$$

где $B(s, x) = (1/m_c) \ln(M_R/M_E)$. Если $M_R \leq \text{const } s^N$, а $M_E \geq \geq f_{ab \rightarrow cX}(s, x, 0) \geq \text{const } s^{-\nu}$, $\nu \geq 0$, то $B(s, x) \leq \text{const } \ln s$.

Полученная нижняя граница сильно отклоняется от экспериментальных данных в области очень больших ($\ll \sqrt{s}/2$) поперечных импульсов, где происходит выполаживание инклюзивных спектров.

В то же время в области умеренно больших k_{\perp} нижняя граница функционально совпадает с общепринятой параметризацией $\exp(-Bk_{\perp})$. Этот факт представляется особенно важным, так как экспоненциальное убывание по k_{\perp} в области умеренно больших k_{\perp} теоретически почти совершенно не обосновано, если не считать термодинамических моделей.

4. АМПЛИТУДА РАССЕЯНИЯ $3 \rightarrow 3$ И ОБОБЩЕННАЯ ОПТИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА

Полное сечение, отвечающее процессу $a + b \rightarrow X$, просто связано со скачком амплитуды рассеяния вперед:

$$(1/2i) [T_2(s + i0, 1) - T_2(s - i0, 1)] = 2\sqrt{s} |\mathbf{k}_a| \sigma_{ab}^{\text{tot}}(s).$$

Это следует из условия унитарности и полноты системы физических состояний.

Интуитивно ясно, что инклюзивное сечение процесса

$$a + b \rightarrow c + X \quad (24)$$

должно быть аналогичным образом связано с некоторым скачком амплитуды рассеяния

$$a + b + c \rightarrow a + b + c \quad (I)$$

вперед.

В работе [6] была высказана гипотеза, что один из скачков амплитуды процесса $3 \rightarrow 3$ вперед по переменной $M^2 = (k_a + k_b - k_c)^2$ с точностью до известных множителей совпадает с инклюзивным спектром, отвечающим процессу (I). Эта гипотеза получила название *обобщенной оптической теоремы*. Как будет видно из дальнейшего, скачок амплитуды процесса $3 \rightarrow 3$ вперед по переменной, линейно связанной с M^2 , содержит довольно много членов, лишь некоторые из которых могут быть отождествлены с инклюзивными спектрами [24]. Таким образом, в отличие от процесса $2 \rightarrow 2$ скачок амплитуды $3 \rightarrow 3$ не выражается лишь через наблюдаемые в той или иной области сечения, а имеет более сложный вид.

Модифицированная редукционная техника. Стандартная техника редукции [11] для процесса (I) дает запаздывающие амплитуды типа

$$\int dx_c dx_b dy_c dy_b \exp[ip_c(y_c - x_c) + ip_b(y_b - x_b)] \times \\ \times \left\langle a \left| \frac{\delta^2 S^{(2)}(x_c, x_b)}{\delta \varphi_c^{\text{out}}(y_c) \delta \varphi_b^{\text{out}}(y_b)} \right| a \right\rangle,$$

где

$$S^{(2)}(x_c, x_b) = \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_c^{\text{out}}(x_c) \delta\varphi_b^{\text{out}}(x_b)} S^+.$$

Такое выражение неудовлетворительно в двух отношениях:

1) вариационная производная отлична от нуля в слишком большой области, чтобы обеспечить аналитическое продолжение по интересующим нас переменным;

2) даже если бы аналитическое продолжение было возможно, абсорбтивная часть амплитуды выражалась бы через двойные коммутаторы токов и не допускала бы сколько-нибудь простой физической интерпретации. Для преодоления этих трудностей воспользуемся методом, основанным на применении как вариаций по out-полям $\delta/\delta\varphi^{\text{out}}$, так и вариаций по in-полям $\delta/\delta\varphi^{\text{in}}$. Величины, относящиеся к in-базису, будем снабжать тильдой. Для операторов рождения и уничтожения положим:

$$\begin{aligned} a_k^\pm &\equiv a^\pm(p_k); \quad \tilde{a}_k^\pm \equiv \tilde{a}^\pm(p_k); \quad J_k \equiv J_k(x_k) = \\ &= i \frac{\delta S}{\delta\varphi_k^{\text{out}}(x_k)} S^+; \quad \delta_k^\pm \equiv \delta/\delta\varphi_k^{\text{out}}(x_k); \\ \Gamma_k^\pm F(x_k) &= \int dx_k \exp(\pm i p_k x_k) F(x_k) \Big|_{p_k^0 = \sqrt{p_k^2 + m_k^2}}. \end{aligned}$$

В этих обозначениях матричный элемент перехода $m \rightarrow n$ записывается в виде

$$\langle n | S | m \rangle = \langle n | \tilde{m} \rangle = \langle n | \tilde{a}_1^+ | \tilde{m} - 1 \rangle.$$

Операторы \tilde{a}_1^+ и a_1^+ связаны стандартным соотношением

$$\tilde{a}_1^+ = S a_1^+ S^+ = a_1^+ - i \Gamma_1^- J_1.$$

Отсюда имеем

$$\langle n | S | m \rangle = \langle n | a_1^+ | \tilde{m} - 1 \rangle - i \Gamma_1^- \langle n | J_1 | \tilde{m} - 1 \rangle.$$

Таким образом, физический матричный элемент $\langle n | S | m \rangle$ выражается через матричный элемент тока J_1 между состояниями в разных базисах. Член $\langle n | a_1^+ | \tilde{m} - 1 \rangle$ представляет собой сумму несвязанных вкладов в амплитуду.

Дальнейшие шаги редукции состоят в последовательном коммутировании тока J_1 (или его вариации) с in-операторами рождения и out-операторами уничтожения по правилам:

$$[a_{\bar{k}}, F] = \Gamma_{\bar{k}}^+ \delta_{\bar{k}}^+ F; \quad [F, \tilde{a}_{\bar{k}}^+] = \Gamma_{\bar{k}}^- \delta_{\bar{k}}^- F,$$

где

$$\delta_{\bar{k}}^\pm F[\varphi^{\text{out}}] = S [\delta_{\bar{k}}^\pm (S^+ E S)] S^+ = \delta_{\bar{k}}^\pm F - i [F, J_{\bar{k}}]. \quad (25)$$

Из условия совместимости $\delta_k^+ J_l - \delta_l^+ J_k = i [J_l, J_k]$ следует, что операции δ_k^+ , δ_l^+ (δ_k^- , δ_l^-) перестановочны, а из (25) имеем связь

$$\delta_k^- J_l = \delta_l^- J_k. \quad (26)$$

Поэтому условие причинности в терминах δ^- записывается как

$$\delta_k^- J_l = 0, \quad x_k \succ x_l,$$

т. е. «противоположно» условию причинности в терминах δ^+ :

$$\delta_k^+ J_l = 0; \quad x_l \succ x_k.$$

Таким образом, главным результатом редукции (помимо тривиальных «одночастичных» членов) оказываются матричные элементы «обобщенных запаздывающих операторов» $\delta_n^\pm \delta_{n-1}^\pm \dots \delta_2^\pm J_1$. При этом область, где вследствие условия причинности обобщенные запаздывающие операторы обращаются в нуль, существенно больше, чем соответствующие области для вариаций старших радиационных операторов, а это значительно улучшает возможности аналитического продолжения; абсорбтивная часть амплитуды $m \rightarrow n$ выражается через простые коммутаторы токов и их вариаций и допускает более наглядную интерпретацию, чем при обычном способе редукции.

Построение запаздывающей амплитуды. Для дальнейшего необходимо выбрать независимые переменные (в данном случае их три), по одной из которых будем исследовать аналитические свойства, оставляя две переменных вещественными и фиксированными, в пределах определенных интервалов их допустимых значений. В качестве системы отсчета выберем лабораторную систему $p_a = 0$. Введем 4-векторы Δ и Q :

$$\Delta = (p_c - \alpha p_b)/2; \quad Q = (1 - \eta) p_c/2 + (1 + \eta) p_b/2,$$

где $\alpha = p_c^2/p_b^2$; $\eta = (m_c^2 - \alpha m_b^2)/(-4m^2)$; $m^2 = -\Delta^2$.

Очевидно, что $\Delta_0 = 0$, $(Q\Delta) = -(Q\Delta) = 0$. В качестве независимых переменных выберем $Q_0 = \omega$, α , m^2 . Легко видеть, что Q^2 не зависит от ω :

$$Q^2 = m_c^2 + m^2(1 + \eta) = \alpha^2 m_b^2 + m^2(1 - \eta)^2.$$

Импульсы p_c и p_b имеют в терминах этих переменных следующий вид:

$$p_c = (\omega, |Q| e_1 + (1 + \eta) m e_2);$$

$$p_b = (1/\alpha) (\omega, |Q| e_2 - (1 - \eta) m e_2),$$

где

$$|Q| = \sqrt{\omega^2 - Q^2}; \quad e_1 = Q/|Q|; \quad e_2 = \Delta/|\Delta|; \quad e_1 \cdot e_2 = 0.$$

Физическая область изменения переменных ω , α , m задается неравенствами:

$$\omega \geq \sqrt{Q^2} = \sqrt{m_c^2 + m^2(1 + \eta)^2} \equiv \omega_{thr}; \quad 0 < \alpha < \infty, \quad 0 < m^2 < \infty.$$

Аналитическое продолжение амплитуды процесса (I) будет проводиться по переменной ω при фиксированных α и m .

Для исключения несвязных вкладов типа $\langle n | a_1^+ | \tilde{m} - 1 \rangle$ будем считать, что редукция происходит, когда $p_j \neq p'_j$ для любых соответственных пар начальных и конечных импульсов, и лишь в окончательных выражениях положим $p_j = p'_j$. Тогда все несвязные вклады, пропорциональные $\delta(p_j - p'_j)$, исчезнут.

Следуя описанной выше технике, представим исходный матричный элемент процесса (I) в виде

$$i \langle a' b' c' | S | abc \rangle = \Gamma_{\tilde{b}} \langle a' c' | J_b a_{\tilde{b}} | a \tilde{c} \rangle + \Gamma_{\tilde{b}} \Gamma_{\tilde{b}}^+ \langle a' c' | \tilde{a}_{\tilde{c}}^+ \delta_{\tilde{b}}^+ J_b | a \rangle + \\ + \Gamma_{\tilde{b}} \Gamma_{\tilde{b}}^+ \Gamma_c^- \Gamma_c^+ \langle a' | \delta_c^+ \delta_c^- \delta_{\tilde{b}}^+ J_b | a \rangle. \quad (27)$$

Первый член в (27) с учетом выпадения несвязной части можно представить в виде

$$\Gamma_{\tilde{b}} \langle a' c' | J_b a_{\tilde{b}} | a \tilde{c} \rangle = -i \Gamma_{\tilde{b}} \Gamma_{\tilde{b}}^+ \langle a' c' | J_b J_b | a \tilde{c} \rangle.$$

Подставляя сюда полную систему промежуточных состояний, получаем с учетом трансляционной инвариантности, что это выражение отлично от нуля лишь при условии:

$$(p_a + p_c - p_b)^2 \geq \bar{M}^2; \quad p_a^0 + p_c^0 - p_b^0 > 0,$$

где \bar{M}^2 — наименьшая масса промежуточных состояний.

Подставляя в это условие параметризацию p_b и p_c в терминах ω , α и m , нетрудно убедиться в том, что $\sum_N \dots = 0$ при

$$\omega < \omega_{\max} = \alpha(m_c^2 - \bar{M}^2) / [2m_a(1 - \alpha)] - \\ - (m_c^2 - \alpha m_b^2) / 2m_a - 2m^2 / [m_a(1 - \alpha)].$$

Отсюда следует, что первый член в (27) задуляется в физической области $\omega \geq \omega_{\text{thr}}$, если $\omega_{\max} < \omega_{\text{thr}}$. Это будет заведомо так, если $\omega_{\max} < 0$, что отвечает, в свою очередь, условию:

$$m^2 > \alpha(m_a^2 - \bar{M}^2) / 4 - (1 - \alpha)(m_c^2 - \alpha m_b^2) / 4. \quad (28)$$

В том случае, когда $m_b = m_c = 0$ (например, b, c — фотоны), получим:

$$\left. \begin{aligned} m_a^2 = \bar{M}^2; \quad \omega_{\text{thr}} = m; \\ \omega_{\max} = -2m^2 / [m_a(1 - \alpha)]; \quad \omega_{\max} < \omega_{\text{thr}} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

всегда при $m > 0$, $\alpha < 1$.

Рассмотрим теперь второй член в (27). Отбрасывая, как всегда, несвязные вклады и используя стабильность одночастичных состоя-

ний, имеем:

$$\begin{aligned}
 & \Gamma_b \Gamma_b^\dagger \langle a' c' | \tilde{a}_c^\dagger \delta_b^\dagger J_b | a \rangle = \\
 & = -i \Gamma_b \Gamma_b^\dagger \Gamma_c^- \langle a' c' | J_c \delta_b^\dagger J_b | a \rangle = \\
 & = -i \Gamma_b \Gamma_b^\dagger \Gamma_c^- \Gamma_c^\dagger \langle a' | \delta_c^\dagger \delta_c^\dagger J_b | a \rangle - \\
 & - i \Gamma_c^- \Gamma_c^\dagger \Gamma_b \Gamma_b^\dagger \langle a' | J_c \delta_c^\dagger \delta_b^\dagger J_b | a \rangle.
 \end{aligned} \quad (30)$$

Член, содержащий $\langle a' | J_c \delta_c^\dagger \delta_b^\dagger J_b^\dagger | a \rangle$, при разложении по полной системе промежуточных состояний дает для каждого промежуточного состояния $\delta(p_{a'} - p_c - k_N)$ и, следовательно, равен нулю, поскольку ни для какого N условие $p_{a'} - p_c - k_N$ не может быть выполнено в силу стабильности частиц.

Аналогичная выкладка приводит к тому, что

$$\begin{aligned}
 & \Gamma_c^- \Gamma_c^\dagger \Gamma_b \Gamma_b^\dagger \langle a' | \delta_c^\dagger J_c \delta_b^\dagger J_b | a \rangle = \\
 & = \int d^3k \langle a' c' | S | ck \rangle \langle b' k | S | ab \rangle + \sum_{N \geq 2} \dots,
 \end{aligned}$$

где члены с многочастичными промежуточными состояниями содержат $\delta(p_{a'} + p_c - p_c - k_N)$. Для рассеяния вперед, когда $p_c = p_{c'}$, возможно лишь одночастичное промежуточное состояние с $k = p_{a'} = p_a$, а остальные члены обращаются в нуль.

Вклад же одночастичного промежуточного состояния описывает процесс двукратного двухчастичного перерассеяния $(a + b \rightarrow k + b) \otimes (k + c \rightarrow a + c)$ и содержит особенность вида $\delta(k^2 - m_a^2)$. Для изучения аналитических свойств амплитуды истинно трехчастичного рассеяния такие вклады следует особо выделить.

В итоге с точностью до членов, которые исчезают при рассеянии вперед в части физической области, ограниченной условиями (29), связанная часть исходного матричного элемента приводится к виду

$$\langle a' c' b' | S | acb \rangle = -i \Gamma_c^- \Gamma_c^\dagger \Gamma_b \Gamma_b^\dagger \langle a' | \Delta^{\text{ret}}(x_c, x_b, x_{c'}, x_{b'}) | a \rangle,$$

где $\Delta^{\text{ret}}(x_c, x_b, x_{c'}, x_{b'}) = r_1^{\text{ret}}(x_c x_b x_{c'} x_{b'}) - i \delta_c^\dagger J_c \delta_b^\dagger J_b$; $r_1^{\text{ret}} = \delta_c^\dagger \delta_c^\dagger \delta_b^\dagger J_b$.

Введем связанную запаздывающую амплитуду процесса (I):

$$\begin{aligned}
 \langle a' b' c' | S | abc \rangle & = i (2\pi)^4 \delta(p_a' + p_b' + p_c' - p_a - p_b - p_c) T_I^{\text{ret}}; \\
 T_I^{\text{ret}}(p_a' p_b' p_c'; p_a p_b p_c) & = \\
 & = \int dy_c dy_{c'} dy_{b'} \exp[-i(p_c y_c - p_{c'} y_{c'} - p_{b'} y_{b'})] \times \\
 & \times \langle a' | \Delta^{\text{ret}}(y_c 0 y_{c'} y_{b'}) | a \rangle,
 \end{aligned}$$

где

$$y_c = x_c - x_b; \quad y_{c'} = x_{c'} - x_b; \quad y_{b'} = x_{b'} - x_b.$$

Для рассеяния вперед

$$T_I^{\text{ret}} = \int dy_c dy_{c'} dy_{b'} \exp[i p_c (y_c' - y_c) + i p_b y_b'] \langle a | \Delta^{\text{ret}}(y_c 0 y_{c'} y_{b'}) | a \rangle. \quad (34)$$

Чтобы изучить аналитические свойства по переменной ω , как уже отмечалось выше, необходимо выделить из T_I^{ret} член, связанный с $\langle a' | \delta_c^- J_c', \delta_b^- J_b' | a \rangle$ и описывающий перерасеяние. Оставшуюся часть обозначим R_I^{ret} и назовем приведенной запаздывающей амплитудой. Для нее имеет место представление

$$R_I^{\text{ret}} = \int dy_c dy_c' dy_b' \exp[ip_c(y_c' - y_c) + ip_b y_b'] \langle a | r_I^{\text{ret}}(y_c, 0, y_c', y_b') | a \rangle. \quad (32)$$

Условие причинности. В лабораторной системе $\mathbf{p}_a = 0$ показатель экспоненты в (32) приобретает вид

$$i(\omega z^0 - |Q|(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{z}) - im\{(1 + \eta)[e_2(y_c - y_c') - [(1 - \eta)/\alpha](\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{y}_b')\}],$$

где

$$z = y_c' - y_c + y_b' / \alpha.$$

Найдем теперь область, где отличен от нуля оператор r_I^{ret} . Прежде всего благодаря соотношению (26) r_I^{ret} можно переписать как

$$r_I^{\text{ret}} = \delta_c^+ \delta_c^- \delta_b^- J_b'.$$

Из перестановочности δ_c^- и δ_b^- и условия причинности следует, что $r_I^{\text{ret}} \neq 0$ лишь при условиях

$$y_b' - y_c > 0, \quad y_b' > 0, \quad (33)$$

где $x > y$ означает $(x - y)^2 > 0$ и $x^0 > y^0$.

Чтобы найти ограничения, связанные с переменной y_c , преобразуем r_I^{ret} с помощью (25) к виду

$$\begin{aligned} \delta_c^+ \delta_c^- \delta_b^+ J_b - \delta_c^- \delta_c^+ \delta_b^+ J_b &= -i[\delta_b^+ J_b, \delta_c^+ J_c] = -[\delta_b^+, \delta_b^-] \delta_c^+ J_c = \\ &= -\delta_b^+ \delta_b^- \delta_c^+ J_c + \delta_b^- \delta_b^+ \delta_c^+ J_c. \end{aligned}$$

Условие причинности приводит к тому, что $r_I^{\text{ret}} \neq 0$ при

$$y_c' > 0 \quad \text{или} \quad y_c' > y_c. \quad (34)$$

Отсюда следует, что $r_I^{\text{ret}} \neq 0$ в объединении областей Σ_1 и Σ_2 :

$$\Sigma_1: y_b' - y_c > 0; y_b' > 0; y_c' - y_c > 0;$$

$$\Sigma_2: y_b' - y_c > 0; y_b' > 0; y_c' > 0.$$

В каждой из областей Σ_1 и Σ_2 можно представить 4-вектор z в виде суммы компонент, каждая из которых принадлежит замкнутому конусу будущего $\bar{V}_+ = \{x | x_0 > |x|\}$:

в области Σ_1

$$z = y_c' - y_c + y_b' | \alpha \in \bar{V}_+ \quad \text{при} \quad \alpha > 0;$$

в области Σ_2

$$z = y_c' + (y_b' - y_c) + \frac{1 - \alpha}{\alpha} y_b' \in \bar{V}_+ \quad \text{при} \quad 0 < \alpha < 1.$$

Таким образом, всюду внутри носителя r_I^{ret} вектор z лежит внутри конуса будущего \bar{V}_+ , если только $0 < \alpha < 1$. Совершенно аналогично анализируется опережающая амплитуда

$$R_I^{\text{adv}} = \int dy_c dy'_c dy'_b \exp [i p_c (y'_c - y_c) + i p_b y'_b] \langle a | r_I^{\text{adv}} (y_c 0 y'_c y'_b) | a \rangle,$$

$$r_I^{\text{adv}} = \delta_c^+ \delta_c^- \delta_b^- J_b.$$

Так как замена $\delta^+ \leftrightarrow \delta^-$ приводит к замене конусов будущего \bar{V}_+ на конусы прошлого $V_- = \{x | x_0 < - |x|\}$, то аналогично предыдущему можно убедиться в том, что всюду в области, где $r_I^{\text{adv}} \neq 0$, вектор $z = y'_c - y_c - y'_b/\alpha$ лежит внутри \bar{V}_- при условии, что $0 < \alpha < 1$.

Абсорбтивная часть приведенных амплитуд. Для абсорбтивной части процесса (I)

$$A_I = (R_I^{\text{ret}} - R_I^{\text{adv}})/2i$$

можно получить выражение в виде суммы матричных элементов коммутаторов токов и их вариационных производных.

Переходя в операторах $r_I^{\text{ret}, \text{adv}}$ от вариаций δ^+ к вариациям δ^- , легко получить следующее выражение:

$$A_I = - \sum_{i=1}^6 A_{Ii}. \quad (35)$$

Таким образом, вместо двух каналов для процесса $2 \rightarrow 2$ абсорбтивная часть приведенной амплитуды для процесса $3 \rightarrow 3$ содержит вклады 12 каналов.

Тем не менее и в этом, более сложном, случае имеется «щель» — интервал значений ω , в котором абсорбтивная часть обращается в нуль.

Если a — нуклон, а b, c — мезоны, то $A_{Ii} \neq 0$ при $-\infty < \omega < -\omega_i$; $\omega_i < \omega < \infty$; $\omega = \pm \omega_{iP}$, где $\omega_1 = (2m_a(1-\alpha))^{-1} \times [\alpha((m_a + \mu)^2 - m_a^2 - m_b^2 - m_c^2) + (4m^2 + m_c^2 + \alpha^2 m_b^2)]$; $\omega_2 = (2m_a(1-\alpha))^{-1} [\alpha((m_a + \mu)^2 - m_a^2 - m_b^2 - m_c^2) - (4m^2 + m_c^2 + \alpha^2 m_b^2)]$; $\omega_{3,4} = \alpha(2m_a)^{-1} [(m_a + \mu)^2 - m_a^2 - m_b^2]$; $\omega_{5,6} = (2m_a)^{-1} [(m_a + \mu)^2 - m_a^2 - m_c^2]$; μ — масса π -мезона; ω_{iP} отвечают полюсам и отличаются от ω_i заменой $m_a + \mu \rightarrow m_a$.

Нетрудно видеть, что при $0 < \alpha < 1$ и $m^2 > 0$ самым левым из правых порогов является ω_2 : $\omega_i \geq \omega_2$. Поэтому условие наличия щели сводится к условию $\omega_2 > 0$, т. е. $0 < 4m^2 < \alpha(2m_a\mu + \mu^2) - (1 + \alpha)(m_c^2 + \alpha m_b^2)$.

Однако наличие щели еще не гарантирует вывода дисперсионных соотношений. Необходимо еще, чтобы R_I^{ret} и R_I^{adv} аналитически продолжались в соответствующие полуплоскости комплексной ω . Кроме того, в общем случае положения порогов ω_i могут выходить

за пределы физической области, т. е. $\omega_i < \omega_{\text{thr}}$. Тогда скачки амплитуды в области $\omega_i < \omega < \omega_{\text{thr}}$ не имеют физического смысла.

Имеется, однако, ситуация, когда нефизическая область отсутствует. Пусть частицы c и b имеют нулевую массу, например c и b — фотоны, а процесс

$$\gamma + \gamma + a \rightarrow \gamma + \gamma + a \quad (\text{II})$$

рассматривается в низшем ($\sim e^4$) порядке. В этом специальном случае $\omega_{\text{thr}} = m$ и нефизическая область отсутствует при

$$0 < 4m < \sqrt{(1 + \alpha)^2 m_a^2 + 4\alpha(2m_a\mu + \mu^2)} - (1 + \alpha)m_a,$$

причем это условие заодно гарантирует и наличие цели.

Как доказано в [24], в этом случае имеет место дисперсионное соотношение (для простоты будем опускать полюсные члены и не будем указывать явно возможных вычитаний):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [R_{\text{II}}^{\text{ret}}(\omega, \alpha, m) + R_{\text{II}}^{\text{adv}}(\omega, \alpha, m)] = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_2(\alpha, m)}^{\infty} d\omega' \frac{2\omega' A_{\text{II}}(\omega', \alpha, m)}{\omega'^2 - \omega^2}. \end{aligned}$$

Обобщенная оптическая теорема. Рассмотрим скачок A_{III} , отвечающий второму члену в (35). Заменяя в нем $\delta_c^- J_b$ и $\delta_c^- J_b$ на $\delta_b^+ J_c$ и $\delta_b^+ J_c$, придем к инклюзивному спектру процесса $\gamma + a \rightarrow \gamma' + X$:

$$\begin{aligned} f_{\gamma a \rightarrow \gamma' X}(\omega, \alpha, m) &= \frac{1}{I} A_{\text{III}}(\omega, \alpha, m) = \\ &= \frac{1}{I} \sum_N (2\pi)^4 \delta(k_N - p_a - p_\gamma + p_{\gamma'}) \times \\ &\times \left| \int dy'_\gamma \exp(ip'_\gamma y'_\gamma) \langle N \left| \frac{\delta J_\gamma(y'_\gamma)}{\delta \varphi_\gamma(0)} \right| a \rangle \right|^2, \end{aligned}$$

где $I = m_a \omega / \alpha$ — поток начальных частиц. Итак, из всех членов, стоящих в правой части (35), лишь один A_{III} отвечает физическим характеристикам (сечению инклюзивного процесса). Остальные члены не имеют непосредственной интерпретации в терминах наблюдаемых величин.

Для того чтобы практически использовать этот результат, необходимо, очевидно, «уединить» те члены в условиях унитарности для процесса $3 \rightarrow 3$, которые связаны с инклюзивными процессами, т. е. добиться исчезновения лишних членов. Процедура такого уединения еще не разработана и, по-видимому, сопряжена с аналитическими свойствами остальных переменных α, m .

На практике, например, при изучении асимптотического поведения инклюзивных спектров фактически имеют дело с тем членом в полном скачке, который отвечает инклюзивному процессу, и применяют к нему реджевские формулы для асимптотик в той или иной кинематической области.

5. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ИНКЛЮЗИВНЫХ СЕЧЕНИЙ И УНИВЕРСАЛЬНЫЙ ХАРАКТЕР СТРУКТУРНЫХ ФУНКЦИЙ

Как было показано выше (см. разд. 2 и 3), требования микропричинности и спектральности имеют существенное значение в установлении аналитических свойств амплитуд множественного рождения по угловым переменным и вытекающих из них ограничений на поведение инклюзивных сечений при высоких энергиях. При исследовании асимптотических свойств инклюзивных сечений были обнаружены некоторые закономерности в поведении инклюзивных спектров в определенных асимптотических режимах.

В какой мере эти закономерности согласуются с основными принципами локальной квантовой теории поля, в частности — с принципами микропричинности и спектральности? Частично этот вопрос уже был затронут выше, где были получены ограничения на возможное нарушение скейлинга в адронных инклюзивных процессах.

Здесь будем действовать более непосредственно, т. е., обращаясь к аналитическим свойствам амплитуд, будем исходить из соответствующих представлений Йоста — Лемана — Дайсона для матричных элементов (запаздывающих) коммутаторов локальных операторов тока. Записанные через представление Йоста — Лемана — Дайсона амплитуды, сечения или структурные функции автоматически удовлетворяют принципам микропричинности и спектральности, если те или иные предположения формулировать не для амплитуд, сечений или структурных функций, а для соответствующих спектральных функций, не нарушая при этом, конечно, их общих свойств. Действуя таким образом, мы, с одной стороны, в состоянии описать возможные асимптотики физических характеристик, которые не противоречат основным принципам теории, а с другой, проверить согласованность с этими принципами различных гипотез относительно асимптотических свойств инклюзивных сечений.

Глубоконеупругое лептон-адронное рассеяние. Для определенности (но без потери общности) рассмотрим глубоконеупругий процесс рассеяния электрона на нуклоне:

$$e + N \rightarrow e + X.$$

В приближении однофотонного обмена сечение этого процесса определяется с помощью фурье-образа матричного элемента коммутатора электромагнитных токов $j_\mu(x)$:

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} \int d^4x \exp(iqx) \sum_{\sigma} \langle p, \sigma | [j_\mu(x), j_\nu(0)] | p, \sigma \rangle,$$

где q — 4-импульс виртуального фотона ($q^2 < 0$); (p, σ) — импульс и спин нуклона. Сечение глубоконеупругого рассеяния можно выразить через структурные функции $W_{1,2}$, связанные с $W_{\mu\nu}$ следующим образом:

$$W_{\mu\nu} = \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) W_1 + \left(p_\mu - \frac{qp}{q^2} q_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{qp}{q^2} q_\nu \right) W_2.$$

Из принципа микропричинности следует, что

$$\tilde{W}_{\mu\nu}(x, p) = \sum_{\sigma} \langle p, \sigma | [j_{\mu}(x), j_{\nu}(0)] | p, \sigma \rangle = 0$$

при $x^2 < 0$.

Вставляя в выражение для $W_{\mu\nu}$ полную систему промежуточных состояний, получаем, что

$$W_{\mu\nu}(q, p) = 0 \text{ при } p^0 \pm q^0 < \sqrt{m^2 + (\mathbf{p} \pm \mathbf{q})^2},$$

где m — масса нуклона. Это соответствует тому, что спектр промежуточных состояний, дающих ненулевой вклад в $W_{\mu\nu}$, начинается с одонуклонного состояния.

Согласно работам [25] функции с такими свойствами исчезновения в координатном и импульсном пространствах параметризуются следующим образом (в системе $\mathbf{p} = 0$):

$$W_i(q, p) = \int du d\lambda^2 \varepsilon(q^0) \delta(q_0^2 - (\mathbf{q} - \mathbf{u})^2 - \lambda^2) \psi_i(|\mathbf{u}|, \lambda^2),$$

где ψ_i зануляются вне области

$$\{\mathbf{u}, \lambda^2 \mid |\mathbf{u}| \leq m, \lambda^2 \geq (m - \sqrt{m^2 - \mathbf{u}^2})^2\}.$$

Представление Йоста — Лемана — Дайсона было использовано в [26] с целью строгого анализа совместимости автотомельного поведения структурных функций глубоководного рассеяния с общими принципами квантовой теории поля — микропричинностью и спектральностью.

Не вдаваясь в детали анализа этого вопроса, проведенного в [26], кратко поясним здесь лишь его идею в конкретном частном случае. Например, легко видеть, что если ψ_2 интегрируема по λ^2 , то при $q^2 \rightarrow -\infty$ $x = -q^2/v$ ($v = 2qp$) — фиксировано, $\mathbf{e} = \mathbf{q}/|\mathbf{q}|$:

$$vW_2(x, q^2) \Rightarrow \int du \delta(x - \mathbf{e}\mathbf{u}) \int d\lambda^2 \psi_2(|\mathbf{u}|, \lambda^2) = F_2(x),$$

т. е. в бьеркеновском пределе $vW_2(x, q^2)$ стремится к масштабнотинвариантному пределу $F_2(x)$. Аналогично если при $\lambda^2 \rightarrow \infty$ $\psi_1(|\mathbf{u}|, \lambda^2) \rightarrow \psi_1^{(0)}(|\mathbf{u}|)$, то $W_1(x, q^2) \rightarrow F_1(x)$. В общем случае спектральные функции $\psi(\mathbf{u}, \lambda^2)$ являются обобщенными функциями умеренного роста, т. е. не слишком быстро возрастают при $\lambda^2 \rightarrow \infty$ и/или $|\mathbf{u}| \rightarrow 0$. Например, должно выполняться неравенство

$$\int du \varphi(\mathbf{u}) \psi(\mathbf{u}, \lambda^2) \leq \text{const } \lambda^{2k}, \quad k > 0$$

при $\lambda^2 \rightarrow \infty$ (интеграл $\int du \varphi \psi$ с основной функцией φ понимается в смысле теории обобщенных функций).

Таким образом, принципы причинности и спектральности, выраженные с помощью представления Йоста — Лемана — Дайсона, не противоречат возможности точного бьеркеновского скейлинга.

Как известно, бьеркеновский скейлинг выполняется лишь приближенно: в различных интервалах значений переменной x структурные функции различным образом (хотя и относительно слабо) зависят от q^2 . Совместимость таких более общих асимптотик с основными принципами теории была строго проанализирована на базе теории обобщенных функций в работах [27].

Адрон-адронные инклюзивные процессы. Рассмотрим амплитуду множественного процесса $a + b \rightarrow nC$, дающую вклад в n -й канал инклюзивного процесса

$$a + b \rightarrow c + X.$$

С помощью редукционной формулы Боголюбова эту амплитуду можно представить в виде

$$\langle n | T | ab \rangle = \frac{-1}{\sqrt{n_c}} \int dx \exp \left[i \frac{k_a + k_c}{2} x \right] \langle n' \left| \frac{\delta J_a(-x/2)}{\delta \varphi_c^+(x/2)} \right| b \rangle.$$

Согласно условию микропричинности $\delta J_a(-x/2)/\delta \varphi_c^+(x/2) = 0$ при $x^0 < |x|$. Кроме того

$$\int dx \exp(iQx) \langle n' \left| \left[J_a\left(-\frac{x}{2}\right), J_c\left(\frac{x}{2}\right) \right] \right| b \rangle = 0$$

в области

$$\Delta_a^0 - \sqrt{Q^2 + M_1^2} \leq Q_0 \leq \sqrt{Q^2 + M_2^2} - \Delta_{a0} \quad (36)$$

в системе отсчета $\Delta_a = k_a + (k_a - k_c)/2 = 0$; $M_{1,2}$ — фиксированные массы. Это позволяет для амплитуды $\langle n | T | ab \rangle$ записать следующее представление:

$$\langle n | T | ab \rangle = \int d\nu d\kappa^2 \frac{\Phi_{n1}(\nu, \kappa^2) + Q^0 \Phi_{n2}(\nu, \kappa^2)}{(Q_0 + i\epsilon)^2 - (Q - \nu)^2 - \kappa^2}, \quad (37)$$

где $Q = (k_a + k_c)/2$, а Φ_{ni} исчезают вне области Ω : $|\nu| \leq \Delta_a^0$, $\kappa \geq \max\{0, m - \sqrt{\Delta_a^{02} - \nu^2}\}$. Отсюда следует представление Йоста — Лемана — Дайсона для инклюзивного спектра процесса $a + b \rightarrow c + X$:

$$f_{ab \rightarrow cX} = \frac{1}{\lambda^{1/2}(s)} \int d\nu_1 d\kappa_1^2 d\nu_2 d\kappa_2^2 \times \\ \times [(Q_0 + i\epsilon)^2 - (Q - \nu_1)^2 - \kappa_1^2]^{-1} [(Q_0 - i\epsilon)^2 - (Q - \nu_2)^2 - \kappa_2^2]^{-1} \times \\ \times [\Phi_1(\nu_1 \kappa_1^2, \nu_2 \kappa_2^2, k_b, k_a - k_c) + Q^0 \Phi_2 + Q^0 \Phi_3],$$

где

$$\Phi_1 + Q^0 \Phi_2 + Q^0 \Phi_3 = \sum_n (2\pi)^4 \delta(k_a + k_b - k_c - P_{n'}) \times \\ \times [\Phi_{n1}(\nu_1 \kappa_1^2) + Q^0 \Phi_{n2}(\nu_1 \kappa_1^2)]^* [\Phi_{n1}(\nu_2 \kappa_2^2) + Q^0 \Phi_{n2}(\nu_2 \kappa_2^2)].$$

Очевидно, что Φ_i исчезают вне области $\Omega(\nu_1 \kappa_1^2) \otimes \Omega(\nu_2 \kappa_2^2)$.

В качестве независимых переменных, характеризующих инклюзивный процесс, выберем

$$s = (k_a + k_b)^2; \quad M^2 = (k_a + k_b - k_c)^2; \quad t = (k_a - k_c)^2.$$

Если выразить в выбранной системе отсчета ($2\mathbf{k}_b + \mathbf{k}_a - \mathbf{k}_c = 0$) импульсы k_a , k_b и $k_a - k_c$ через эти инварианты, то окажется, что спектральные функции не зависят от s , а вся зависимость от s (через Q) содержится лишь в знаменателях представления и явно выделенных множителях Q^0 ; Q^{02} .

Рассмотрим асимптотическую область $s \gg M^2$, t . В лабораторной системе $\mathbf{k}_b = 0$ это отвечает быстрым частицам

$$E_c = E_a - (M^2 - t - m_b^2)/2m_b; E_a \approx s/2m_b,$$

летающим по направлению падающего пучка в интервале углов $\theta \lesssim \sqrt{-t}/E_a$. В с. ц. м. имеем соответственно:

$$E_c^* = \sqrt{s}/2 - (M^2 - m_c^2)/2\sqrt{s}; \theta^* \approx 2\sqrt{-t/s} \ll 1,$$

т. е. качественно ту же ситуацию: быстрые частицы, летящие почти вдоль направления движения падающей частицы a . Таким образом, выбранная нами область содержится в области фрагментации частицы a .

Предположим теперь, что интегралы ($i = 1, 2, 3$)

$$V_i = \int \frac{d\mathbf{v}_1 d\kappa_1^2 d\mathbf{v}_2 d\kappa_2^2}{[(\mathbf{v}_1\mathbf{e}) - i0][(\mathbf{v}_2\mathbf{e}) + i0]} \Phi_i(\mathbf{v}_1\kappa_1^2, \mathbf{v}_2\kappa_2^2; M^2, t)$$

сходятся ($\mathbf{e} = \lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{Q}/Q$). Тогда асимптотика инклюзивного спектра имеет вид:

$$f_{ab \rightarrow cX}(s, t, M^2) \approx V_3(t, M^2)/4s.$$

Предположения о сходимости, сделанные выше, являются слишком ограничительными и по большей части (например, в теории возмущений) не имеют места. Спектральные функции могут возрастать с увеличением κ_i^2 (не сильнее, конечно, чем некоторая степень κ_i^2 , — это следует из того, что Φ_i — обобщенные функции умеренного роста); кроме того, на поверхности $\mathbf{v}_i\mathbf{e} = 0$ могут быть сингулярности например, типа $|\mathbf{v}_i\mathbf{e}|^{-\alpha}$, причем случай $\alpha = 0$ также сингулярен. При этом необходимо иметь в виду, что все интегралы понимаются в смысле теории обобщенных функций, т. е. делаются вычитания, которые приводят к сходимости всех интегралов.

Пусть для примера в окрестности поверхности $(\mathbf{v}_i\mathbf{e}) = 0$ спектральная функция Φ_3 представима в виде

$$\Phi_3 \approx \prod_{i=1}^2 (\mathbf{v}_i\mathbf{e})^{-\alpha} \bar{\Phi}_3(\kappa_1^2, \dots), \quad \alpha > 0.$$

Функции $\Phi_{1,2}$ везде регуляры и

$$\int \frac{d\kappa_1^2}{\kappa_1^2} \frac{d\kappa_2^2}{\kappa_2^2} \bar{\Phi}_3(\kappa_1^2, \kappa_2^2, \dots) < \infty,$$

тогда асимптотику инклюзивного спектра дадим следующим выражением:

$$f_{ab \rightarrow cX}(s, t, M^2) \approx \left(\frac{s}{s_0}\right)^{2\alpha(t, M^2)-2} R_c(t, M^2),$$

где мы явно учли тот факт, что показатель α может зависеть от t и M^2 ; s_0 можно выбрать произвольно и оно также может зависеть от t, M^2 . Явный вид $R_c(M^2, t)$ определяется функцией $\bar{\Phi}_3$. На асимптотический вид $f_{ab \rightarrow cX}(s, t, M^2)$ может влиять также возможный рост по x_i^2 , например $\sim (x_i^2)^\beta (\ln x_i^2)^\sigma$, где β и σ также зависят от t и M^2 .

Если не привлекать никаких динамических соображений относительно поведения спектральных функций, то одни лишь общие принципы теории ничего не говорят о том, какими сингулярностями должны обладать спектральные функции. Единственным руководством при изучении этого вопроса является тот факт, что спектральные функции — обобщенные функции умеренного роста, т. е. не могут увеличиваться по x_i^2 быстрее полинома от x_i^2 , а по v_i сингулярности не могут быть слишком сильными. Например, допустимо поведение типа $(v_i e)^{-\alpha} \ln^\beta(v_i e)_+$, но недопустима сингулярность типа $\exp(v_i e)^{-1}$. Степени же сингулярностей должны быть таковы, чтобы не нарушать тех ограничений на инклюзивные спектры, которые следуют из правила сумм, аналитичности и унитарности и были рассмотрены ранее.

Детальный анализ широкого класса допустимых в указанном выше смысле сингулярностей спектральных функций был приведен в [28]. В результате был получен общий вид асимптотики инклюзивных спектров в области фрагментации частицы a , согласованный с принципами причинности и спектральности:

$$f_{ab \rightarrow cX}(s, t, M^2) \approx \sum_j (s/s_0)^{\eta_j(t, M^2)} [\ln(s/s_0)]^{\sigma_j(t, M^2)} F_j(t, M^2) +$$

+ (возможные интерференциальные члены).

Из правила сумм

$$\sum_c \int d^3k_c E_c f_{ab \rightarrow cX} = 2(2\pi)^3 (E_a + E_b) \sigma_{ab}^{\text{tot}}$$

и ограничения Фруассара

$$\sigma_{ab}^{\text{tot}} \leq \text{const} \ln^2 [(E_a + E_b)/E_0]$$

следует, что

$$\max_j \eta_j(t, M^2) \leq 1; \quad \sigma_j(t, M^2) \leq 2 + N_j,$$

где N_j определяется характером поведения $F_j(t, M^2)$ в окрестности точек t_0, M_0^2 ; $\max_{t, M^2} \eta_j(t, M^2) = \eta_j(t_0, M_0^2)$.

В области фрагментации частицы b ($s \gg M^2, u = (k_b - k_c)^2$), т. е. там, где детектируемая частица имеет большую (в системе $p_a = 0$)

энергию: $E_c \approx E_0 - (M^2 - u - m_a)/2m_a$ и летит почти по направлению частицы b , имеют место аналогичные выводы:

$$f_{ab \rightarrow cX}(s, u, M^2) \approx \sum_j \left(\frac{s}{s_0} \right)^{\bar{\eta}_j(u, M^2)} \left[\ln \left(\frac{s}{s_0} \right) \right]^{\bar{\sigma}_j(u, M^2)} \bar{F}_j(u, M^2) +$$

+ (возможные интерференционные члены)

с такими же ограничениями на $\bar{\eta}_j, \bar{\sigma}_j$, как и в случае области фрагментации частицы a . Показатели $\eta_j, \sigma_j, \bar{\eta}_j, \bar{\sigma}_j$ определяются показателями сингулярностей спектральных функций по переменным v_i, κ_i^2 .

В частном случае бинарных процессов

$$a + b \rightarrow c + d$$

$f_{ab \rightarrow cX} \sim \delta(M^2 - m_a^2)$ и, интегрируя по M^2 , получаем аналогичные асимптотические выражения для дифференциальных сечений в переднем ($d\sigma/dt$) и заднем ($d\sigma/du$) конусах.

Отметим, что полученные асимптотические формулы содержат в качестве частного случая реджевские асимптотические формулы, если η_j не зависит от M^2 и отвечает траектории Редже $\alpha(t)$ ($\alpha(u)$). Функции F_j, \bar{F}_j в этом случае связаны с вычетом соответствующих редже-траекторий и для инклюзивных процессов, также с трех-реджеонной вершиной при $M^2 \gg m_a^2, m_b^2, m_c^2$.

Универсальный характер структурных функций в инклюзивных адрон-адронных и глубоконеупругих лептон-адронных процессах. Выше были рассмотрены сечения лептон-адронных глубоконеупругих и адрон-адронных инклюзивных процессов с помощью единого метода, основанного на использовании представления Йоста — Лемана — Дайсона. При этом сечения (помимо зависимости от s) описываются структурными функциями: W_i для глубоконеупругих и F_j для адрон-адронных инклюзивных процессов. В [8] была выдвинута гипотеза о том, что структурные функции, относящиеся к одной и той же мишени, в обоих случаях могут иметь аналогичные свойства, и в этом смысле имеет место универсальность описания процессов разной природы в терминах соответствующих структурных функций. Поясним это более подробно.

Глубоконеупругие процессы, например $e + p \rightarrow e + X$, описываются структурными функциями $W_i(v, q^2)$, зависящими от переданной энергии и переданного импульса лептонов. Структурные функции W_i не зависят от суммарного импульса лептонов, поскольку лагранжиан взаимодействия лептонов с фотонами (W -бозоном) локален, а взаимодействие по электромагнитной (слабой) константе связи учитывается только в низшем порядке теории возмущений.

При взаимодействии адронов в инклюзивном процессе $a + b \rightarrow c + X$ даже если исходный лагранжиан сильных взаимодействий локален, то из-за высших приближений по константе связи мы уже не можем пренебречь нетривиальной зависимостью от $k_a + k_c$, локальность исчезает, и инклюзивный спектр уже существенно зависит

(помимо кинематических множителей) от $k_a + k_c$, а не только от $k_a - k_c$.

Таким образом, из-за структуры адронов эффективное взаимодействие адронов a и c нелокально, и инклюзивный спектр существенно зависит от трех переменных, например от $v = 2k_b (k_a - k_c)$, $q^2 = (k_a - k_c)^2$ и $k_b (k_a + k_c)$. Поэтому описание инклюзивных лептон-адронных процессов представляется существенно различным.

Кинематика глубоконеупругих процессов вполне отвечает рассматриваемой нами области $s \gg M^2 = q^2 + v$, $t = -q^2$, если v , $|q^2| \gg m^2$. Для лептон-адронного глубоконеупругого рассеяния ($a = c = e$, $b = p$) операторы

$$\delta J_e(-x/2)/\delta \bar{\psi}(x/2) = \delta \{T[\bar{\psi}(-x/2) A_\mu^{(0)}(-x/2) \gamma^\mu S] S^+\}/\delta \bar{\psi}(x/2)$$

с хорошей точностью приближаются первым членом разложения в ряд теории возмущений (для лептонных полей)

$$\delta J_e(-x/2)/\delta \bar{\psi}(x/2) \approx A_\mu(0) \gamma^\mu \delta(x),$$

где $A_\mu(x) = T[A_\mu^{(0)}(x) S] S^+$ — гейзенбергов оператор электромагнитного поля.

Инклюзивный спектр для любого процесса можно представить в виде

$$f_{ab \rightarrow cX} = \frac{1}{s} \int dx \exp(iqx) \langle p | I(x; Q) I^+(0; |Q) | p \rangle,$$

где $I(x; Q) = \int dz \exp(iQz) \delta J_a(x - z/2)/\delta \varphi_c^+(x + z/2)$; $p = k_b$; $Q = (k_a + k_c)/2$.

Операторы $I(x; Q)$ в общем случае нелокальны по x . Для процесса $e + p \rightarrow e + X$ операторы $I(x; Q)$ «локализуются», и мы приходим к инклюзивному спектру:

$$f_{ep \rightarrow eX} \approx \sum_1^2 (s/s_0)^{\eta_j} W_j(v, q^2),$$

где W_i — обычные структурные функции; показатели η_j не зависят ни от v , ни от q^2 . Мы видим, что это — частный случай общей формулы, полученной выше, где η_j зависят от q^2 , v . Конкретный вид фактора, определяющего зависимость от s , зависит, очевидно, от деталей взаимодействия в вершине, связывающей a и c . Если взаимодействие локально, то степень s не зависит от v , q^2 , если нет, то такая зависимость появляется. Естественно думать, что сечения глубоконеупругих процессов и чисто адронных процессов отличаются по существу лишь этим s -фактором.

Можно даже выдвинуть важное физическое предположение о том, что взаимодействие адронов в инклюзивном процессе описывается структурными функциями того же типа, что и в глубоконеупругих процессах [8]. Структурные функции, таким образом, являются универсальными характеристиками, описывающими процессы различной

природы. В настоящее время такая точка зрения стала общепринятой и согласуется с экспериментальными данными.

Эффективная локальность взаимодействия согласно выдвинутой выше гипотезе формально должна соответствовать обобщенным структурным функциям:

$$W_{\alpha\beta}(\nu, q^2) = \int dx \exp(iqx) \langle p | J_{\alpha}(x) J_{\beta}^{\dagger}(0) | p \rangle,$$

где $J_{\alpha}(x)$ — локальные «токи», несущие квантовые числа $\bar{a}\bar{c}$ (изоспин, гиперзаряд и т. д.). В частном случае токи $J_{\alpha}(x)$ могут совпадать с электромагнитными или слабыми токами.

Таким образом, мы можем «прощупывать» не только электромагнитную или слабую структуру адронов, но и распределение изоспина, гиперзаряда и т. д. Распределения различных «зарядов» не обязаны совпадать. В отличие от лептонов, структурой которых мы можем пренебречь при изучении глубоконеупругих процессов, для чисто адронных процессов структура «прощупывающих» адронов должна проявиться в наличии (переходных) «форм-факторов» типа $\langle c | J_{\alpha} | a \rangle$.

Поэтому необходимо иметь в виду, что функция $F_j(t, M^2)$ в асимптотической формуле для $f_{ab \rightarrow cX}$ включает в себя в качестве множителей как упругие (переходные) форм-факторы «прощупывающих» частиц a и c , так и неупругие форм-факторы (структурные функции) мишени $W_{bj}(\nu, q^2)$. Следует ожидать, что при $\nu, |q^2| \gg m^2$ эти структурные функции будут вести себя аналогично структурным функциям в глубоконеупругих процессах, например обнаруживать приближенную масштабную инвариантность.

6. МАСШТАБНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ В ИНКЛЮЗИВНЫХ ПРОЦЕССАХ

Ранее уже отмечалось, что одним из наиболее характерных свойств инклюзивных сечений при высоких энергиях являются различные масштабные закономерности. В [4, 5] были приведены некоторые теоретические аргументы в пользу справедливости масштабной инвариантности для адронных процессов, однако основным выводом, явилась, по существу, лишь гипотеза о всеобщем характере масштабной инвариантности при высоких энергиях.

Еще в 1964 г. М. А. Марков указал на то, что лептоны могут взаимодействовать с адронами в определенном смысле точечноподобно. В дальнейшем эта идея нашла свое более конкретное выражение в партонной модели. Если предположить, что адрон в определенной кинематике можно мыслить себе как состоящим из точечноподобных частиц — партонов, то отсюда следует бьеркеновский скейлинг. Однако и в этом случае нет никаких общих аргументов в пользу такого поведения, которые бы вытекали из основных принципов теории. Можно утверждать, что бьеркеновский скейлинг не противоречит этим основным принципам [27].

В 1972 г. масштабные закономерности были обнаружены для инклюзивных процессов в области больших поперечных импульсов:

инклюзивные спектры в области больших k_{\perp} намного превышали экстраполяции из области малых k_{\perp} , где с ростом k_{\perp} спектры быстро ($\sim \exp(-Bk_{\perp})$) падают.

В то же время в области больших $k_{\perp} = x_{\perp} \sqrt{s}/2$ и фиксированных углов (в с. ц. м.) экспериментальные данные хорошо описываются формулой:

$$f_{ab \rightarrow cX}(s, k_{\perp}, \theta) \approx (1/k_{\perp}^N) \varphi(x_{\perp}, \theta),$$

т. е. для $k_{\perp}^N f_{ab \rightarrow cX}$ выполняется «поперечная» масштабная инвариантность.

Ниже рассмотрим те идеи, на основе которых можно понять описанные выше масштабные закономерности более подробно.

Адрон-адронные процессы в области малых поперечных импульсов.
Принцип автомодельности. Этот принцип был выдвинут в [30]. Каждая физическая характеристика, описывающая взаимодействия частиц, характеризуется двумя пространственными масштабами — продольным L_z и поперечным L_{\perp} (в системе центра инерции сталкивающихся частиц). Размерность физической величины F следующая: $[F] = L_z^m L_{\perp}^n$. В зависимости от того, какие импульсы (продольные или поперечные) могут неограниченно возрастать с увеличением начальной энергии, требуется выполнение масштабной инвариантности в том смысле, что вся зависимость от энергии определяется соответствующей размерностью. Рассмотрим инклюзивный процесс $a + b \rightarrow c + X$. Если поперечный импульс ограничен, то при $k_{cz} \rightarrow \infty$:

$$k_c^0 \approx |k_{zc}| + (m_c^2 + k_{\perp c}^2)/2 |k_{zc}| + \dots \approx |k_{zc}|,$$

таким образом, в этом режиме энергия является величиной продольного типа.

Рассмотрим масштабное преобразование

$$k_z \rightarrow \lambda k_z; \quad k_0' \rightarrow \lambda k_0; \quad \mathbf{k}_{\perp} \rightarrow \mathbf{k}_{\perp}. \quad (38)$$

Зависимость физической величины от λ согласно принципу автомодельности определяется продольной размерностью $F \rightarrow \lambda^{-n} F$. Одночастичный инклюзивный спектр

$$f_{ab \rightarrow cX} = \sum_n n_c 2E_c \frac{d\sigma_{ab}^n}{dk_{cz} d\mathbf{k}_{\perp c}} (2\pi)^3$$

имеет размерность

$$[f_{ab \rightarrow cX}] = L_T^4,$$

так как

$$[d\sigma_{ab}^n] = L_T^2 [dk_{zc} d\mathbf{k}_{\perp c}/E_c] = L_T^{-2}.$$

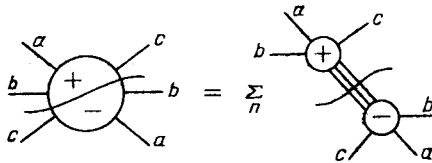
Следовательно, в данном случае $n=0$ и требуемая инвариантность относительно преобразования (38) приводит к тому, что

$$f_{ab \rightarrow cX}(\sqrt{s}, k_{zc}, \mathbf{k}_{\perp c}) \rightarrow \tilde{f}_{ab \rightarrow cX}(2k_{zc}/\sqrt{s}, \mathbf{k}_{\perp c}),$$

так как начальная энергия $\sqrt{s}/2$ — величина продольного типа. Режим $s \rightarrow \infty$, $k_{\perp c}$, $2k_{zc}/\sqrt{s}$ фиксированы, отвечает так называемой области фрагментации начальных частиц. Если импульс детектируемой частицы ограничен, то это отвечает области пьонизации или центральной области. Принцип автомодельности неприменим здесь непосредственно.

Полюса Редже. Выше в разд. 4, посвященном анализу аналитических свойств амплитуды $3 \rightarrow 3$, уже упоминалось о работе Мюллера [6], в которой предполагалась связь инклюзивного спектра с некоторым скачком амплитуды рассеяния $3 \rightarrow 3$. Собственно говоря, этот факт, по существу, никак не используется в [6], где редже-анализу подвергается практически лишь сам инклюзивный спектр. На самом деле, как это следует из работы [24], инклюзивный спектр можно было бы рассматривать как скачок некоторой функции, не являющейся собственно амплитудой перехода $3 \rightarrow 3$.

Таким образом, необходимо иметь в виду, что хотя на уровне картинок типа:

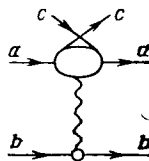


связь амплитуды $3 \rightarrow 3$ с инклюзивными спектрами кажется на первый взгляд весьма очевидной, в действительности мы по сути дела мало что знаем о том, как понимать такую связь и что она дает в смысле общих свойств инклюзивных спектров.

Тем не менее чисто феноменологически такое наивное представление инклюзивного спектра как скачка амплитуды $3 \rightarrow 3$ оказалось весьма полезным. Оно, в частности, позволило распространить реджевскую феноменологию на случай инклюзивных спектров.

Грубо говоря, все сводится к следующему. В определенной кинематической области вся зависимость от «большого» параметра s факторизуется в виде степени $(s/s_0)^\alpha$, где α — редже-траектория, определяющаяся квантовыми числами в соответствующих t -каналах.

Рассмотрим область фрагментации частицы a , т. е. $s \rightarrow \infty$, $t = (p_a - p_c)^2$ фиксировано, $x = 2p_{cz}/\sqrt{s} \approx 1 - M^2/s$ фиксировано, где $M^2 = (p_a + p_b - p_c)^2$. Тогда можно привести следующую диаграмму:



где волнистая линия означает обмен реджеоном, т. е. фактор $(M^2)^{\alpha_{b\bar{b}}(0)} \sim s^{\alpha_{b\bar{b}}(0)}$. Так как в t -канале текут вакуумные квантовые числа, то, предполагая существование вакуумного полюса (померон) с $\alpha(0) = 1$, имеем

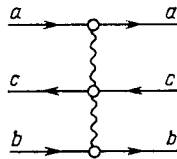
$$f_{ab \rightarrow cx} \approx (1/s) s^{\alpha(0)} \varphi(t, M^2/s) = \tilde{\varphi}(p_{\perp c}^2, x), \quad (39)$$

т. е. $t \approx -p_{\perp c}^2/x$, $M^2 \approx s(1-x)$. Таким образом, получаем масштабную инвариантность, связанную с продольным импульсом.

В центральной области, где инварианты s , $p_a p_c$ и $p_b p_c$ велики:

$$p_a p_c \sim p_b p_c \sim \sqrt{s} p_{\perp c},$$

работает двухреджеонная диаграмма:

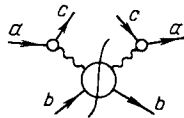


Следовательно, в центральной области инклюзивный спектр имеет конечное значение, не зависящее от энергии, что отвечает существованию предела

$$f_{ab \rightarrow cx} \approx \frac{1}{s} (p_a p_c)^{\alpha(0)} (p_b p_c)^{\alpha(0)} g(p_{\perp c}^2) \sim \tilde{g}(p_{\perp c}^2).$$

Поправочные члены, отвечающие обменом вторичными траекториями ($\alpha = 1/2, \dots$), имеют асимптотику, пропорциональную $s^{-1/4}$ (RP -члены). Знак поправки не может быть установлен в рамках реджевской схемы, однако экспериментальные данные указывают на то, что он отрицателен. Вымирание таких членов при $s \rightarrow \infty$ приводит к возрастанию инклюзивных спектров в центральной области [22].

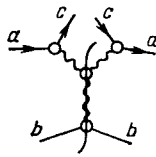
Наконец, если рассмотрим область $s \rightarrow \infty$; t, M^2 фиксированы, то инклюзивный спектр дается диаграммой



и имеет вид:

$$f_{ab \rightarrow cx} \sim \frac{1}{s} s^{2\alpha_{ac}(t)} R_{ac; b}^-(t, M^2).$$

Если M^2 достаточно велико ($m^2 \ll M^2 \ll s$), то в нижнем блоке можно «пропустить» померон:



и получаем

$$f_{ab \rightarrow cX} \sim \left(\frac{s}{M^2} \right)^{2\alpha_{ac} - (t) - 1} g(t).$$

Это — так называемый *трехреджеонный предел*.

Итак, в рамках реджевской схемы имеет место масштабная инвариантность. Отметим, что в более изощренных схемах, учитывающих точки ветвления в плоскости комплексных моментов («реджеонная теория поля», например) могут возникать дополнительные множители типа $(\ln s)^n$, «актуально» нарушающие скейлинг [31].

Партонная модель. Основная величина в партонной модели — функция распределения партонов в быстро движущемся* адроне по доле продольного импульса от импульса адрона, $f_h^i(x)$, $x = = k_{\parallel i}/p_{\parallel h}$. Эта величина не имеет пока достаточно ясного определения в терминах гейзенберговских полей, что не допускает выяснения ее общих свойств. Кроме того, f_h^i не измерима в чистом виде, а лишь может входить в физические сечения совместно с другими факторами.

В некоторых случаях она имеет основное значение. Исторически партонная модель была придумана прежде всего для объяснения скейлинга в глубоконеупругих процессах. Лишь относительно недавно были сделаны первые шаги в применении партонных моделей к адронным инклюзивным процессам с малыми k_{\perp} .

В этом случае роль функций распределения заметно уменьшается из-за необходимости учитывать обязательно взаимодействие между партонами, без которого процесс не идет, т. е. добавляется новая (неизвестная, в общем) величина, описывающая взаимодействие между партонами. Теория (например, *QCD*) пока не в состоянии сказать что-либо о таких величинах, не включающих больших виртуальностей (необходимое условие применения теории возмущений). Поэтому применение партонной модели к инклюзивным адрон-адронным процессам с малыми k_{\perp} находится пока что на уровне феноменологии.

Опишем кратко соответствующие формулы. Пусть π^+ -мезон рождается в области фрагментации в процессе $p + p \rightarrow \pi^+ + X$. Тогда можно считать, что π^+ -мезон с большим x получает его в основном от u -кварка, одного из начальных протонов, а \bar{d} -кварк несет малую долю

* Это необходимое условие для того, чтобы партонная картина имела место.

импульса (это согласуется с данными по глубоконеупругим процессам). Отсюда следует, что

$$d \langle n_{\pi^+} \rangle / dx \sim f_p^u(x). \quad (40)$$

Зависимость $f_p^u(x)$ можно взять из данных по глубоконеупругому рассеянию. (Существен выбор соответствующих q^2 . В данном случае они должны быть невелики.) Такого рода соотношения неплохо согласуются с экспериментом для тех процессов, где можно найти соответствующие функции распределения из независимых экспериментов по глубоконеупругому рассеянию. Это, в свою очередь, наводит на мысль, что инклюзивные процессы с малыми k_{\perp} можно использовать для определения структурных функций тех адронов, для которых при современной технике невозможно провести эксперименты по глубоконеупругому рассеянию. Например, измеряя инклюзивный спектр процесса $K^+ + p \rightarrow \pi^+ + X$ в области достаточно больших x , можно считать, что получаем сведения о функции распределения u -кварка в K^+ -мезоне [32]. Разумеется, такая возможность представляется крайне интересной и в своем роде уникальной.

Однако следует отметить, что в данном случае (в отличие от процессов с большими виртуальностями или большими поперечными импульсами) нет достаточно надежных и регулярных методов вычисления типа, например, теории возмущений.

Большие поперечные импульсы. Автомодельность. Рассмотрим инклюзивное сечение

$$\frac{d\bar{\sigma}_{ab \rightarrow cX}}{dk_{\perp}^2} = \int \frac{dk_{\parallel}}{16\pi^2 E} f_{ab \rightarrow cX}(V\bar{s}, k_{\parallel}, k_{\perp}^2).$$

Очевидно, что

$$[d\bar{\sigma}_{ab \rightarrow cX}/dk_{\perp}^2] = L_T^4.$$

Из принципа автомодельности следует, что при больших $k_{\perp} = x_{\perp} \sqrt{s}/2$, т. е. x_{\perp} фиксировано и $\neq 0$, имеет место степенное поведение:

$$d\bar{\sigma}_{ab \rightarrow cX}/dk_{\perp}^2 \approx (1/k_{\perp}^4) \varphi(x_{\perp}),$$

где $\varphi(x_{\perp})$ — неизвестная функция, которая может также содержать слабую (логарифмическую) зависимость от k_{\perp}^2 .

Редже-модель. Редже-мюллеровские выражения для инклюзивных спектров, например, в центральной области можно было бы формально рассматривать и при больших k_{\perp} . Однако в рамках реджевского подхода не содержится никаких сведений относительно зависимости вершин, связывающих реджеоны и частицы от своих аргументов. В других областях (фрагментация) имеем также неопределенность в траекториях Редже $\alpha(t)$ при $t \rightarrow -\infty$ (а также и вычетов). Ведущие траектории при малых t могут оказаться поправочными в области больших t . Все попытки включить в редже-схему область боль-

ших t основываются на тех или иных предположениях относительно поведения траекторий и вычетов при больших t . По-видимому, язык траекторий Редже перестает отвечать физическому существу задачи при больших t , так как характер взаимодействия на малых расстояниях принципиально отличается от той картины, которую имеем в области малых t , т. е. больших расстояний.

Партонная модель. Инклюзивный процесс в партонной модели происходит следующим образом: два партона — по одному из каждого из налетающих адронов — сталкиваются и рассеиваются на большой угол [33]. Последующая фрагментация рассеянных партонов дает адрон с большим поперечным импульсом. В целом рассеянные партоны превращаются в две адронные струи, летящие под большими углами по отношению к оси начального пучка. Таким образом, инклюзивный спектр составляется из трех компонент: функций распределения партонов в начальных пучках, амплитуды рассеяния партонов и функции фрагментации партонов в детектируемые адроны. Согласно знаменитой формуле «кваркового счета» [34] для рассеяния $A + B \rightarrow C + D$ на большие углы имеем

$$(d\sigma/dt)_{AB \rightarrow CD} \approx \varphi(\theta)/s^{n_A+n_B+n_C+n_D-2}, \quad (41)$$

где $n_{A,B,C,D}$ — числа конститюэнтов в частицах A, B, C, D .

Асимптотический закон (41) был независимо получен также в [35] на основе анализа диаграмм Фейнмана. Экспериментальные данные очень хорошо согласуются с правилом кваркового счета. В (41) мы учли лишь «валентные» кварки. Если учесть дополнительно конфигурации, содержащие помимо валентных еще и «морские» кварки, то они дадут, очевидно, поправки, более быстро убывающие с ростом s .

Вернемся к инклюзивным спектрам. Согласно партонной модели инклюзивный спектр в области больших k_{\perp} имеет вид:

$$f_{AB \rightarrow CX} = \sum_{a,b,c,d} \int dx_a dx_b f_A^{a\gamma}(x_a) f_B^b(x_b) \times \\ \times \left(\frac{d\sigma}{d\hat{t}} \right)_{ab \rightarrow cd} \frac{1}{z_C} \bar{D}_c^C(z_C), \quad (42)$$

где $f_A^a(x_a)$ — функции распределения партона a в частице A по доле продольного импульса $x_a = \kappa_{\parallel a}/P_A$; \bar{D}_c^C — функция фрагментации $c \rightarrow C$; $z = p_{\parallel C}/k_{\parallel C}$; $(d\sigma/d\hat{t})_{ab \rightarrow cd}$ описывает элементарный подпроцесс $a + b \rightarrow c + d$;

$$\hat{t} = (p_a - p_c)^2 \approx \frac{x_a}{z_C} (p_A - p_C)^2 \approx \frac{2x_a}{z_C} \frac{(V^2 x^2 + x_{\perp}^2 - x)}{x_{\perp}^2} p_{\perp C}^2;$$

$$x_{\perp} = 2p_{\perp C}/\sqrt{s}; \quad x = 2p_{\parallel C}/\sqrt{s}.$$

Из (42) нетрудно увидеть, что зависимость от $p_{\perp C}$ определяется сечением элементарного подпроцесса $a + b \rightarrow c + d$.

Если a, \dots, d — кварки, то по (42) получаем, что

$$f_{AB \rightarrow CX} \approx \frac{1}{P_{\perp C}^4} \Phi(x, x_{\perp}).$$

Если же, например, $a = c = q$ (кварк), $b = d = M$ (мезон), то соответствующий вклад в инклюзивный спектр дается согласно (41) выражением $(1/P_{\perp C}^4) \bar{\Phi}(x, x_{\perp})$. Учитывая всевозможные вклады, имеем общую формулу

$$f_{AB \rightarrow CX} \approx \sum_i \frac{1}{p_{\perp C}^{N_i}} \Phi_i(x, x_{\perp}).$$

Если известны функции распределения и функции фрагментации, то можно получить определенную информацию относительно поведения Φ_i по x, x_{\perp} . При этом может оказаться, что в различных областях x, x_{\perp} могут доминировать различные члены суммы $\sum_i \dots$. Детальное

изучение этих более тонких вопросов проводилось в [36].

Глубоконеупругое рассеяние. *Принцип автомодельности.* Согласно принципу автомодельности структурные функции глубоконеупругого рассеяния при $-q^2, \nu \rightarrow \infty$ (с фиксированным отношением $x = -q^2/\nu$) преобразуются при масштабных преобразованиях $q \rightarrow \lambda q$ и $p \rightarrow \lambda p$ как однородные функции соответствующей размерности. Так как $[W_1] = \mu^0$ и $[W_2] = \mu^{-2}$, то $W_1(\lambda p, \lambda q) = W_1(q, p)$, а $W_2(\lambda p, \lambda q) = \lambda^{-2} W_2(q, p)$. Отсюда в бьеркеновской области $W_1(q^2, \nu) \rightarrow F_1(x)$ и $\nu W_2(q^2, \nu) \rightarrow F_2(x)$.

В этой связи Н. Н. Боголюбовым была высказана интересная гипотеза о возможной аналогии между глубоконеупругими процессами и динамикой точечного взрыва в газовой динамике. С физической точки зрения означает, что в бьеркеновской области после суммирования по всем каналам размеры адрона становятся несущественными, размерные множители (массы) исчезают из рассмотрения, и мы приходим к масштабной инвариантности.

Если, однако, пытаться обосновать это в рамках квантовой теории поля, то приходим к выводу, что за исключением физически неинтересной возможности gf_4^3 в любой перенормируемой теории поля массовый параметр эффективно возникает из-за высших приближений и перенормировок и появляющиеся логарифмы приводят к аномальным размерностям, нарушающим скейлинг.

Полюса Редже. В рамках реджевской феноменологии можно (при известных дополнительных предположениях) дать определенные выводы относительно структурных функций глубоконеупругого рассеяния.

Действительно, стандартный анализ мнимой части амплитуды рассеяния виртуального фотона на адроне дает следующее выражение для косинуса угла рассеяния (нефизического) в t -канале:

$$\cos \theta_t \sim \nu / (m \sqrt{q^2}).$$

Запишем общее выражение для структурной функции W_1 :

$$W_1(\nu, q^2) \approx \sum_i b_i(q^2) \left(\frac{\nu}{m \sqrt{q^2}} \right)^{\alpha_i^{(0)}},$$

где α_i — траектории Редже P (померон), ρ , ω , ...

Масштабную инвариантность в бьеркеновской области можно получить, если предположить, что

$$b_i(q^2) \underset{-q^2 \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{1}{\sqrt{q^2}} \right)^{\alpha_i^{(0)}} \bar{b}_i.$$

Имеем тогда

$$W_1(x, q^2) \approx \bar{b}_P \frac{1}{x} + \bar{b}_R \frac{1}{\sqrt{x}} + \dots,$$

где первый член отвечает обмену помероном ($\alpha = 1$), а второй — мезонным траекториям ($\alpha \approx 1/2$). Такое поведение грубо ухватывает основные экспериментальные данные при малых x .

Предположение об асимптотике вычетов по q^2 не может быть обосновано в рамках реджевской феноменологии. Кроме того, при больших x реджевские формулы становятся совершенно непригодными ($\cos \theta_i$ невелик).

Партонная модель. В партонной модели, где партоны имеют спин $1/2$ и нумеруются по видам индексом i :

$$W_{\mu\nu} = \sum_i e_i^2 \int \frac{dz}{2z} d\mathbf{k}_\perp f_i(z, \mathbf{k}_\perp) \text{Sp} [\hat{k} \gamma_\mu (\hat{k} + \hat{q}) \gamma_\nu] \delta(q^2 + 2kq).$$

Здесь $f_i(z, \mathbf{k}_\perp)$ — функции распределения по продольному (z) и поперечному (\mathbf{k}_\perp) импульсам.

Предполагая сходимость интеграла по \mathbf{k}_\perp , получаем:

$$2kq \approx z\nu; \quad W_1(x, q^2) = \sum_i e_i^2 \int d\mathbf{k}_\perp f_i(x, \mathbf{k}_\perp);$$

$$W_2(x, q^2) = \sum_i e_i^2 \frac{4x}{\nu} \int d\mathbf{k}_\perp f_i(x, \mathbf{k}_\perp).$$

Таким образом, имеет место бьеркеновская масштабная инвариантность:

$$W_1(x, q^2) \rightarrow F_1(x); \quad \nu W_2(x, q^2) \rightarrow F_2(x),$$

причем

$$F_2(x) = 4xF_1(x). \quad (43)$$

Отсюда следует, в частности, что в глубоконеупругих процессах имеем непосредственную информацию о структуре нуклона.

Если бы мы взяли скалярные партоны, то имели бы $W_1 = 0$. Соотношение (43), известное как соотношение Каллана — Гросса, с

хорошей точностью выполняется экспериментально. Это можно рассматривать как аргумент в пользу фермионных заряженных партонов.

В рамках партонной модели нет никаких способов вычислить функции распределения — зависимость от x приходится брать из экспериментальных данных, а затем уже использовать это в других процессах — например, в рождении адронов с большими k_{\perp} .

Нарушение масштабной инвариантности. Масштабные законы, которые были обсуждены выше, носят приближенный характер. В действительности функции от безразмерных отношений импульсов обнаруживают «остаточную» зависимость от энергии. Этот факт можно толковать по-разному:

1) инклюзивные сечения все же стремятся к масштабно-инвариантным пределам, а та зависимость от энергии, которую наблюдаем, связана лишь с поправочными членами, и при достаточно высоких энергиях их вклад будет исчезающе малым;

2) масштабная инвариантность нарушается актуально, т. е. зависимость от энергии пренебречь нельзя ни при каких энергиях.

Кроме того, измеряемые величины могут делиться на два класса, в одном из которых имеет место ситуация 1), а в другом — ситуация 2).

Рассмотрим несколько примеров.

Адрон-адронные процессы. В «наивной» реджевской схеме, как мы видели выше, имеет место истинный скейлинг для инклюзивных спектров процесса $a + b \rightarrow c + X$:

$$f_{ab \rightarrow cX}(s, x, k_{\perp}) \rightarrow \tilde{\varphi}_c(x, k_{\perp}),$$

причем $\tilde{\varphi}_c(x, k_{\perp})$ имеет конечный предел в центральной области $x \rightarrow 0$. Это приводит к логарифмически растущей средней множественности $\langle n_c \rangle \sim \ln s$.

Таким образом, наивная реджевская схема реализует ситуацию 1). Наблюдаемое отклонение от скейлинга объясняется вкладом вторичных траекторий, вымирающим при $s \rightarrow \infty$.

В модели Ченга — Ву [37] спектры в центральной области возрастают степенным образом, и соответственно:

$$\langle n_c \rangle \sim s^{1/2} (\ln s)^{\beta}; \quad \alpha = 1/2 - \epsilon; \quad \beta = 2\epsilon; \quad 0 < \epsilon < 1/2.$$

Здесь мы, очевидно, имеем ситуацию 2).

Глубоконеупругие процессы. В обычной партонной модели [38] структурные функции глубоконеупругого лептон-адронного рассеяния стремятся к функциям от $x = -q^2/\nu$, а поправки, связанные с массами адронов и партонов и поперечным движением партонов, убывают пропорционально $1/q^2$.

В рамках пертурбативной КХД имеет место партонная картина с нарушенным скейлингом [32]. Несмотря на то что эффективное взаимодействие на малых расстояниях ослабевает:

$$\alpha_s(q^2) \sim 1/b \ln(-q^2/\Lambda^2),$$

этого ослабления недостаточно, чтобы компенсировать большую вероятность излучения мягких и коллинеарных глюонов, приводящую к факторам $\ln^n(-q^2/\mu^2)$, $n = 1, 2$. Из-за этого структурные функции глубоконеупругого рассеяния нельзя вычислить, ограничиваясь конечным числом ряда теории возмущений по эффективной константе связи $\alpha_s(q^2)$, необходимо суммировать весь ряд. Это удастся сделать в главном логарифмическом приближении, детально разработанном в [40] для асимптотически несвободных теорий и распространенном затем на КХД. В результате структурные функции становятся зависящими от q^2 , хотя в большей части значений x (не слишком близких к $x = 0$ и $x = 1$) такая зависимость относительно слаба — характерный параметр $\sim \ln \ln(-q^2)$. Аналогичная ситуация имеет место и для других инклюзивных процессов:

$$e^+e^- \rightarrow hX; pp \rightarrow \mu^+\mu^-X; h_1h_2 \rightarrow h_3(k_\perp)X.$$

Существуют, однако, процессы, в которых вся зависимость сечения от энергии определяется целиком константой связи $\alpha_s(q^2)$. Это так называемые *инфракрасно-стабильные процессы*: $e^+e^- \rightarrow$ адроны; угловые распределения струй адронов в e^+e^- -аннигиляции в конусах с фиксированным раствором и т. п. Сечения таких процессов при $q^2 \rightarrow \infty$ стремятся к выражениям, определяемым наивной партонной моделью, а поправки определяются из теории возмущений по $\alpha_s(q^2)$ [41] и, конечно, убывают.

Еще один возможный источник нарушения скейлинга — это учет непертурбативных флуктуаций квантохромодинамического вакуума — инстантонов [42] и флуктуаций, связанных с ненулевыми средними кварковых $\langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle$ и глюонных $\langle 0 | \mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{F}^{\mu\nu} | 0 \rangle$ полей [43]. Однако их вклад с ростом q^2 вымирает степенным образом.

Таким образом, в квантовой хромодинимике инклюзивные сечения процессов, не являющихся инфракрасно-стабильными, должны актуально нарушать скейлинг при больших q^2 .

К сожалению, причина нарушения скейлинга в «мягких» адрон-адронных инклюзивных процессах еще недоступна анализу в КХД, так как требует, по-видимому, существенного выхода за рамки теории возмущений и поэтому более тесно связана с проблемой невылетания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Аналитические свойства амплитуды процесса

$$a + b \rightarrow n_c c + n_d d + \dots \quad (\text{II } 1)$$

по угловым переменным, задающим направление единичного вектора

$$\mathbf{n} = \mathbf{k}_a / |\mathbf{k}_a| \text{ в с. ц. м. } \mathbf{k}_a + \mathbf{k}_b = 0.$$

Выше было показано, что амплитуду процесса (II.1) $T_{ab}^n(s, \mathbf{n})$ можно представить в виде

$$T_{ab}^n(s, \mathbf{n}, \dots) = \int_{x_L(s)}^{\infty} dx \int de \frac{\Phi(x, \mathbf{e}, s, \dots)}{x - \mathbf{e} \cdot \mathbf{n}}, \quad (\text{II.2})$$

где $x_L(s)$ — большая полуось эллипса Лемана.

Рассмотрим аналитические свойства интеграла в правой части (II.2). Легко видеть, что при комплексных $\mathbf{n} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$ интеграл продолжается в область:

$$B(s) = \{\mathbf{n} \mid |\mathbf{x}| < x_L(s), \mathbf{y} \in R^3\}.$$

Так как амплитуда T_{ab}^n задана вначале не при всех \mathbf{n} , а лишь на единичной сфере $\mathbf{n}^2 = 1$, то такое продолжение не единственно, — различные функции комплексного вектора \mathbf{n} могут совпадать на подмножестве $|\mathbf{x}| = 1, \mathbf{y} = 0$. Единственным будет продолжение на комплексную сферу

$$\mathbf{n}^2 = (\mathbf{x} + i\mathbf{y})^2 = 1.$$

Таким образом, амплитуда $T_{ab}^n(s, \mathbf{n}, \dots)$ аналитически продолжается в область $D(s)$ на комплексной сфере:

$$D(s) = \{\mathbf{n} \mid \mathbf{n}^2 = 1, \mathbf{n} \in B(s)\}$$

и это продолжение единственно.

Аналогично можно доказать, что функция $T_{ab}^{*n}(s, \mathbf{n}, \dots)$ также аналитически продолжается в область $D(s)$.

Отсюда следует, что дифференциальное сечение

$$\frac{d\sigma_{ab}^n}{d\mathbf{n}} = \frac{1}{s} \int d\xi_n T_{ab}^{*n}(s, \mathbf{n}, \xi_n) T_{ab}^n(s, \mathbf{n}, \xi_n)$$

также аналитически продолжается в область $D(s)$, не зависящую от параметров ξ_n .

Для того чтобы перейти к угловым координатам, выберем следующую параметризацию вектора \mathbf{n} :

$$n_1 = \sqrt{1-z^2}(w+1/w)/2; \quad n_2 = \sqrt{1-z^2}(w-1/w)/2i; \quad n_3 = z. \quad (\text{II.3})$$

При $w = \exp(i\varphi)$, $z = \cos \theta$ и $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$ мы приходим к обычной параметризации в терминах сферических углов.

Параметризация \mathbf{n} , приведенная выше, неоднозначна в окрестности $n_3 = \pm 1$. Для однозначности следует провести разрезы $(-\infty, -1]$, $[+1, +\infty)$.

Таким образом, параметризацию (II.3) можно задать не на всей комплексной сфере, а лишь в области

$$U = \{\mathbf{n} \mid \mathbf{n}^2 = 1, n_3 \in (-\infty, -1] \cup [+1, +\infty)\}.$$

Это отражает то свойство комплексно аналитических многообразий, к которым принадлежит сфера $\mathbf{n}^2 = 1$, что на них нельзя ввести единые координаты, регулярные везде.

Регулярную ветвь $\sqrt{1-z^2}$ выделим в плоскости z с разрезами $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$ условием $\sqrt{1-z^2} > 0$ для $-1 < z < 1$. Из условия принадлежно-

сти к области $D(s)$:

$$x^2 - y^2 = 1; \quad x \cdot y = 0$$

и

$$x^2 < x_L^2(s)$$

получим область аналитичности по z и w :

$$\left(|1+z| |w| + |1-z| \frac{1}{|w|} \right) \left(|1+z| \frac{1}{|w|} + |1-z| |w| \right) < 4x_L^2(s);$$

$$z \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

Покажем теперь, что дифференциальное сечение ($dn = d \cos \theta d\varphi$)

$$\frac{d\sigma_{ab}^n}{d \cos \theta} = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{d\sigma_{ab}^n}{d \cos \theta d\varphi}$$

аналитически продолжается в эллипс Лемана без разрезов. Для этого рассмотрим функцию $d\sigma_{ab}^n/dn$ в окрестности точки $n = (0, 0, 1)$. В этой окрестности регулярными координатами будут следующие:

$$z^\pm = n_1 \pm i n_2.$$

Так как $d\sigma_{ab}^n/dn$ — аналитическая функция в $D(s)$, то в координатах z^\pm в окрестности точки $(z^+, z^-) = (0, 0)$ она представима рядом

$$\frac{d\sigma_{ab}^n}{dn} = \sum_{ml} a_{ml}(s) (z^+)^m (z^-)^l.$$

Выражая новые координаты через старые (z, w) , получаем

$$\frac{d\sigma_{ab}^n}{dn} = \sum_{ml} (1-z^2)^{\frac{m+l}{2}} w^{m-l} a_{ml}(s).$$

Полагая теперь $w = \exp(i\varphi)$ и интегрируя ряд по φ от 0 до 2π , имеем

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\sigma_{ab}^n}{dn} d\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} (1-z^2)^m a_{mm}(s).$$

Таким образом, точки ± 1 для функции $d\sigma_{ab}^n/d \cos \theta$ не являются особыми, что и доказывает ее аналитичность в области Лемана без разрезов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Логунов А. А., Мествиришвили М. А., Нгуен Ван Хьюе. Препринт ИФВЭ 67-49К, Серпухов, 1967; Proc. of 1967 Intern. Conf. on Particles and Fields. New York, 1967; Phys. Lett. B, 1967, v. 25, p. 611; Логунов А. А., Нгуен Ван Хьюе. Лекции на Международной школе по физике высоких энергий. Порадаске Плесо, 1967.
2. Логунов А. А., Нгуен Ван Хьюе. Topical Conf. on High Energy Collisions of Hadrons. CERN, Geneva. V. 2, 1968, p. 74; Tiktopoulos G., Treiman S. B. — Phys. Rev., 1968, v. 167, p. 1408; Логунов А. А., Нгуен Ван Хьюе, Хрусталева О. А. В кн.: Проблемы теоретической физики. М., Наука, 1969, с. 90.
3. Bushnin Yu. B. e.a. — Phys. Lett. B, 1969, v. 29, p. 48.
4. Veneske T. e.a. — Phys. Rev., 1969, v. 188, p. 2159.

5. Feynman R. P.— Phys. Rev. Lett., 1969, v. 23, p. 1072.
6. Mueller A. H. — Phys. Rev. D, 1970, v. 2, p. 2963.
7. Logunov A. A., Mestvirishvili M. A., Petrov V. A.— Ann. Phys., 1978, v. 114, p. 46.
8. Логунов А. А., Мествиришвили М. А., Петров В. А. Препринт ИФВЭ 74-66, Серпухов, 1974.
9. Bloom E. D. e.a.— Phys. Rev. Lett., 1969, v. 23, p. 930, 935.
10. Banner M. e.a.— Phys. Lett. B, 1972, v. 41, p. 547; Büsser F. W. e.a.— Phys. Lett. B, 1973, v. 46, p. 474.
11. Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К. Вопросы теории дисперсионных соотношений. М., Изд-во АН СССР, 1958.
12. Ежела В. В. Препринт ИФВЭ 71-36, Серпухов, 1971.
13. Ascoli P., Minguzzi A.— Phys. Rev., 1960, v. 118, p. 1435.
14. Ежела В. В., Логунов А. А., Мествиришвили М. А.— ТМФ, 1971, т. 6, с. 42.
15. Ежела В. В. и др.— ТМФ, 1973, т. 15, с. 153.
16. Martin A. Scattering Theory: Unitarity, Analyticity and Crossing. Springer Verlag, 1969.
17. Tiktopoulos G., Treiman S. B.— Phys. Rev. D, 1972, v. 6, p. 2045.
18. Логунов А. А., Мествиришвили М. А., Петров В. А.— ТМФ, 1974, т. 21, с. 305.
19. Логунов А. А., Мествиришвили М. А.— ТМФ, 1972, т. 11, с. 203.
20. Рчеулишвили Г. Л. Препринт ИФВЭ 72-96, Серпухов, 1972.
21. Дьяконов В. Ю., Рочев В. Е.— ТМФ, 1977, т. 32, с. 131.
22. Ежела В. В., Петров В. А. Препринт ИФВЭ 72-51, Серпухов, 1972.
23. Giacomelli G., Jacob D.— Phys. Rep., 1979, v. 55, No. 1.
24. Логунов А. А. и др.— ТМФ, 1977, т. 33, с. 149.
25. Jost R., Lehmann H.— Nuovo cimento, 1957, v. 5, p. 1598; Dyson F.— Phys. Rev., 1958, v. 110, p. 1460.
26. Боголюбов Н. Н., Владимиров В. С., Тавхелидзе А. Н.— ТМФ, 1972, т. 12, с. 3.
27. Завьялов Б. И.— ТМФ, 1973, т. 17; 1977, т. 33, с. 310; Вицорек Э. и др.— ТМФ, 1973, т. 16, с. 315.
28. Логунов А. А., Мествиришвили М. А., Петров В. А.— ТМФ, 1977, т. 37, с. 3.
29. Лиходед А. К., Шляпников П. В.— УФН, 1978, т. 124, с. 3.
30. Матвеев В. А., Мурадян Р. М., Тавхелидзе А. Н.— ЭЧАЯ, 1971, т. 2, вып. 1.
31. Дубовиков М. С., Тер-Мартirosян К. А.— ЖЭТФ, 1977, т. 73, с. 2008.
32. Chliarnikov P. V. e.a.— Nucl. Phys. B, 1978, v. 148, p. 400.
33. Berman M., Bjorken J. D., Kogut J.— Phys. Rev. D, 1971, v. 4, p. 3388.
34. Matveev V. A., Muradyan R. M., Tavkheldize A. N.— Nuovo cimento Lett., 1973, v. 7, p. 719.
35. Brodsky S., Farrar G.— Phys. Rev. Lett., 1973, v. 31, p. 1153.
36. Blankenbeckler R., Brodsky S.— Phys. Rev. D, 1974, v. 10, p. 2973.
37. Cheng H., Wu T. T.— Phys. Lett. B, 1973, v. 45, p. 367.
38. Фейнман Р. Взаимодействие фотонов с адронами. Пер. с англ. М., Мир, 1975; Bjorken J. D., Paschos E.— Phys. Rev., 1969, v. 185, p. 1965.
39. Ефремов А. В., Радюшкин А. В. Rivista dell. Nuovo cimento., 1980, т. 3, No. 2.
40. Грибов В. Н., Липатов Л. Н.— Ядерная физика, 1972, т. 15, с. 781, 1218.
41. Chetyrkin K. G., Kataev A. L., Tkachov F. V.— Phys. Lett. B, 1979, v. 85, p. 277.
42. Belavin A. A. e.a.— Phys. Lett. B, 1975, v. 59, p. 85.
43. Shifman A. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I.— Nucl. Phys. B, 1979, v. 147, p. 385, 448, 519.