«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА», 1983, ТОМ 14, ВЫП. 6

УДК 530.1:512.815.8

ВЗАИМОСВЯЗЬ ПРОСТРАНСТВ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ И ИСЧИСЛЕНИЕ ВИГНЕРА—РАКА КОМПАКТНЫХ ГРУПП ЛИ

С. И. Алишаускас

Институт физики АН ЛитССР, Вильнюс

Обсуждаются новые аналитические методы в исчислении Вигнера — Рака для компактных групп второго и выше рангов. Рассматриваются соотношения эквивалентности, пропорциональности и аналитического продолжения, основанные на применении дополнительных групп. Приведены оптимальные выражения в виде многократных конечных рядов для изофакторов и других трансформационных коэффициентов. Упрощены операции алгебр Вигнера — Рака с кратными неприводимыми представлениями на основе биортогональных систем неканонических базисов и коэффициентов Клебша — Гордана групп Ли.

The new analytic methods in the Wigner—Racah calculus for the compact groups of the second and more high ranks are discused. The relations of equivalency, proportionality and analytic continuation grounded on the application of the complementary groups are considered. The optimal expressions for isofactors and other transformation coefficients in terms of finished multiple sums are presented. The operations of Wigner—Racah algebra with multiple irreducible representations are simplified on the ground of the biorthogonal systems of the non-canonical bases and the Clebsch—Gordan coefficients of Lie groups.

ВВЕДЕНИЕ

Теория представлений групп давно стала мощным инструментом современной теоретической физики. Начиная с классических работ Вейля, Вигнера и Рака расширяется круг физических проблем, для решения которых привлекаются компактные группы и алгебры Ли выше первого ранга. Общеизвестны применения неприводимых представлений (НП) групп Ли разного ранга для классификации многочастичных состояний в оболочечных моделях атома и ядра, а также SU_3-симметрия элементарных частиц.

Предположения о приближенной симметрии гамильтониана позволяют выделить базис с определенными трансформационными свойствами в многочастичном гильбертовом пространстве состояний. Неприводимые представления унитарных, ортогональных и симплектических групп разных рангов и их подгрупп характеризуют состояния атомных ядер как в микроскопических моделях (таких, как трансляционно-инвариантная модель оболочек, модель K-гармоник и метод обобщенных гиперсферических функций), так и в разных моделях, описывающих коллективные возбуждения (см., например, [1—11]). Унитарные и другие классические группы Ли широко применяются также при описании когерентных свойств многоуровневых квантовых систем (см. [12, 13]), а также новых семейств элементарных частиц (см. [14, 15]).

Для эффективного исследования квантовых систем со сложной симметрией необходим специальный математический аппарат, позволяющий выразить матричные элементы тензорных операторов физических величин в соответствующих базисах НП (т. е. в многомерных пространствах состояний физических систем). Такой аппарат (теория углового момента) достиг определенной завершенности для группы вращений SO_3 (SU_2) трехмерного пространства (см. [16—18]).

Вычисление матричных элементов тензорных операторов, действующих в неприводимых пространствах представлений разных групп, опирается на теорему Вигнера — Эккарта, которая позволяет разложить их по коэффициентам Клебша — Гордана (КГ) соответствующих групп (см., например, [19, 20]). Коэффициенты разложения называются субматричными или приведенными (редуцированными) матричными элементами. (В случае просто приводимых групп, одной из которых является SU_2, а также в ряде других случаев матричные элементы выражаются в виде произведений упомянутых выше величин.)

При исследовании матричных элементов операторов, зависящих от переменных нескольких подсистем, а также выраженных в виде произведений других операторов, естественно, появляются элементы матриц преобразования схем связи (матриц пересвязывания) базисов НП соответствующих групп, представляющие собой обобщения $3nj$-коэффициентов теории углового момента и выражаемые в виде сумм произведений коэффициентов КГ.

Наконец, многие математические выкладки проще осуществляются при использовании так называемых канонических базисов НП с последующим преобразованием результатов к базисам, соответствующим физическим схемам сужения группы на подгруппах. Преобразования между разными базисами НП сложных цепочек подгрупп осуществляются также генеалогическими коэффициентами, а по сути дела и коэффициентами КГ и матрицами пересвязывания. Поэтому величины всех трех типов: коэффициенты КГ, элементы матриц пересвязывания и элементы собственно матриц преобразования между базисами НП-целесообразно называть трансформационными коэффициентами или функциями Вигнера — Рака.

Основанные на свойствах унитарности трансформационных коэффициентов формальные правила векторного сложения (связывания) базисов НП коэффициентами КГ, пересвязывания базисов НП и преобразования между базисами НП, соответствующими разным схемам редукции, естественно обобщаются для пространств представлений любой компактной группы и объединяются в алгебру Вигнера — Рака этой группы. Для алгебр Вигнера — Рака не просто приводимых групп характерно появление в трансформационных коэффициентах дополнительных матричных индексов, разделяющих кратные НП.

Математическое оснащение алгебр Вигнера — Рака конкретных групп Ли — построение в явном виде базисов НП, соответствующих физическим схемам редукции, и нахождение явного вида коэффициентов КГ и других трансформационных коэффициентов — представляет собой значительно более сложные и специфичные проблемы, решаемые в рамках исчислений Вигнера — Рака (ВР) соответствующих групп.

Исследования более простых в математическом отношении канонических базисов НП унитарных и ортогональных групп опираются на результаты И. М. Гельфанда, М. Л. Цетлина, М. И. Граева и получили дальнейшее развитие в работах Биденхарна, Мошинского, Н. Я. Виленкина, А. У. Климыка и других авторов (см., например, [19, 20]). Различные методы построения важных по физическим приложениям неканонических базисов предложены Бергманом, Мошинским, Эллиотом, Шарпом и их сотрудниками сначала для SU_3 (см., например, [1, 2, 21]), а позже для других групп Ли. Эллиотовский способ построения неканонических базисов значительно усовершенствован Ю. Ф. Смирновым, Р. М. Ашеровой и В. Н. Толстым, построившими и применившими проекционные операторы НП алгебр Ли (см., например, [10]).

Для построения коэффициентов КГ канонических базисов НП компактных групп Ли, более сложных, чем SU_2, применялись разные методы: метод производящих инвариантов [22—25] (существенно продвинутый Л. А. Шелепиным и В. П. Карасевым), с ним тесно связанные рекуррентные способы выражения [24—29], метод интегрирования по группе произведений матриц НП (впервые достаточно эффективно реализованный А. У. Климыком и А. М. Гавриликом, см. [20]) и метод Ашеровой, Смирнова и Толстого, основанный на использовании проекционных операторов алгебр Ли [30—32].

Теория других трансформационных коэффициентов пространств представлений высших групп Ли пока значительно менее разработана.

Принципиальное осложнение по сравнению с теорией углового момента исчислений ВР простых групп Ли второго и выше рангов и, в частности, неэквивалентность различных построений неканонических базисов НП и коэффициентов КГ этих групп связаны с появлением кратных НП группы или подгрупп соответственно в разложении прямого произведения двух НП или при сужении на неканонических цепочках подгрупп. Построенные непосредственно аналитическими методами базисные функции неканонических базисов, как и различные трансформационные коэффициенты, как правило, взаимно неортогональны для разных значений индекса ρ, разделяющего состояния кратных НП. Фактически вначале могут быть найдены только линейные или билинейные комбинации трансформационных коэффициентов (или неканонических базисных функций) с разными значениями ρ при последующем выделении ортонормированных коэффициентов (или базисных функций) путем численной ортогонализации, что не гарантирует единой нумерации состояний кратных НП, или путем решения задачи на собственные значения некоторых операторов, что возможно только в случае отказа от аналитичности.

Причина малой эффективности многих известных выражений для коэффициентов КГ и изофакторов высших групп заключается в избыточности этих выражений. В качестве коэффициентов разложения упомянутых линейных комбинаций обычно появляются трансформационные коэффициенты с довольно сложной структурой, а все разнообразие состояний кратных НП реализуется вариациями параметров этих коэффициентов в определенной области мощности r_0 (r_0 — кратность соответствующего НП). Как будет показано ниже, наиболее удобные алгоритмы построения функций Вигнера — Рака (ВР) и базисных функций НП основаны на иерархическом подходе. Для различных уровней общности базисных функций или трансформационных коэффициентов, например, в зависимости от классов НП и появления кратных НП в соответствующих разложениях тот или другой метод или их комбинация дает лучший результат.

С другой стороны, при исследовании исчислений ВР высших групп Ли и их отдельных звеньев очень важен глобальный подход. Так, для исследования рекуррентных выражений коэффициентов КГ унитарных групп необходимо использовать определенные матрицы пересвязывания, что позволяет не только упростить ортонормирование этих коэффициентов КГ, но и понять взаимосвязь рекуррентных выражений (и соответственно классификации кратных НП в них) с выражениями (и классификацией), полученными путем интегрирования по группе или другими способами. Без привлечения специальных коэффициентов КГ неканонического базиса нельзя раскрыть фундаментальное соотношение дуальности между различными представленными в обзоре [21] реализациями неканонического базиса, соответствующего сужению $SU_3 \supset SO_3$. (Это соотношение осталось незамеченным в [21]). Наконец, исследование исчисления ВР группы Ли определенного ранга часто позволяет получить новую информацию об исчислении ВР группы более низкого или высокого ранга (в том числе даже о теории углового момента), иногда недоступную в рамках исчисления ВР второй группы.

Вообще оказывается, что между исчислениями ВР конкретных групп Ли разных рангов и названий существуют значительно более глубокие и разнообразные взаимосвязи, чем естественное включение в них исчислений ВР подгрупп * или выражение определенных трансформационных коэффициентов (например, матриц пересвязывания) по правилам алгебр Вигнера — Рака в виде соединений других функций ВР.

* Напомним, что коэффициенты КГ данной группы G всегда можно разложить по коэффициентам КГ подгруппы G'; коэффициенты разложения называем изофакторами цепочки $G \supset G'$. Когда коэффициенты КГ подгруппы неортонормированы по индексам кратных НП, то появляющиеся в них и изофакторах группы индексы кратных НП подгруппы дуальны.

В понятие «взаимосвязь» в названии этой статьи вкладывается несколько аспектов взаимных связей пространств представлений. Во-первых, само собой разумеется, что алгебра Вигнера — Рака реализует некую взаимную связь между пространствами НП некоторой группы — преобразует одно пространство в другое той же размерности. Во-вторых, как будет показано, существуют соотношения эквивалентности, пропорциональности и аналитического продолжения между различными трансформационными коэффициентами групп разных рангов и названий. Большинство этих соотношений является следствием взаимных связей пространств представлений так называемых дополнительных групп (эти пространства строятся одновременно некоторой общей процедурой). В-третьих, разнообразие реализаций пространств кратных НП, более или менее эффективных в том или другом отношении, требует выяснения их взаимосвязи. Решение этой проблемы существенно упрощается привлечением концепции биортогональных или дуальных (относительно индексов кратных НП) систем базисов НП, а также и коэффициентов КГ. Использование аналитических биортогональных систем ведет к дальнейшему обобщению методов алгебр Вигнера — Рака не просто приводимых групп при определенной разгрузке проблем исчислений ВР, связанных с ортогонализацией.

Настоящей работой представлена попытка обобщить вышеперечисленные аспекты взаимных связей пространств представления для развития аналитических методов в исчислении ВР компактных групп Ли, прежде всего для нахождения оптимальных выражений коэффициентов КГ и других трансформационных коэффициентов этих групп, а также для исследования свойств неканонических базисов НП.

1. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГРУППЫ И СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ТРАНСФОРМАЦИОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ РАЗНЫХ ГРУПП

В работах Вейля [33] и Литтлвуда [34] показано, что теория конечномерных НП общей линейной группы $GL(n, C)$ и ее унитарной подгруппы U_n тесно связана с теорией представлений группы перестановок (симметрической группы) S_N. Хотя элементарные операции с тензорами давно известны (см., например, [35—37]), разные авторы лишь постепенно [38—42] убедились в эквивалентности таких на первый взгляд независимых величин, как матрицы пересвязывания НП группы U_k и матрицы перехода между разными базисами НП как симметрических (см. [36]), так и унитарных групп, суженных по схемам типа $S_N \supset S_{N'} \dot{+} S_{N''}$ или $U_n \supset U_{n'} \dot{+} U_{n''}$ ($N' + N'' = N$, $n' + n'' = n$) * соответственно. В монографии [5] показана

* Знак $\dot{+}$ нами применяется, если иметь в виду прямую сумму алгебр Ли или групповых матриц. Базисы, соответствующие максимальным вложениям прямых сумм групповых матриц, называем полуканоническими.

эквивалентность изофакторов цепочек $U_{n'n''} \supset U_{n'} \times U_{n''}$ и $S_N \supset \supset S_{N'} \dot{+} S_{N''}$. На основе связи между базисами НП унитарных и симметрических групп выяснено, что как вышеупомянутые трансформационные коэффициенты, так и изофакторы полуканонических цепочек не зависят от n, конечно, пока их сигнатуры (набор схем Юнга НП) имеют смысл для данной группы U_n и ее подгрупп. Ряд интересных результатов, основанных на использовании взаимосвязи базисов линейных и симметрических групп, получен Альгисом Юцисом [41, 43, 44] и Салливаном [45—47] (см. также [48—51]).

Довольно необычным оказалось появление $6j$-коэффициентов и коэффициентов КГ группы SU_2 с кратными 1/4 параметрами типа углового момента и его проекции соответственно в качестве матриц «пересадки деревьев» (перехода между разными полуканоническими базисами) НП класса 1 ортогональных групп [52] (см. также [53]) и матриц перехода между базисами НП класса 1 унитарных групп, приведенных на разных цепочках унитарных и ортогональных подгрупп [54]. Эти соотношения, как и соотношения между изофакторами, а также между другими трансформационными коэффициентами ортогональных и симплектических групп [55—57, 49], удалось понять и обобщить (см. [58, 59]) на основе концепции дополнительных (complementary) групп, предложенной Мошинским и Кэн [60, 61].

Дополнительные группы. Две группы $\bar{G}$ и $\bar{\bar{G}}$ называются дополнительными относительно нетривиального представления группы G, если в его разложении каждое НП $\bar{\lambda} \times \bar{\bar{\lambda}}$ подгруппы $\bar{G} \times \bar{\bar{G}}$ появляется не больше 1 раза при взаимно однозначном соответствии между НП $\bar{\lambda}$ и $\bar{\bar{\lambda}}$ обеих подгрупп $\bar{G}$ и $\bar{\bar{G}}$ (ср. [60, 58]).

Этому определению удовлетворяют группы U_m и U_n относительно симметричных или антисимметричных НП группы U_{mn}. (В первом случае схемы Юнга НП групп U_m и U_n совпадают, а общий базис реализуется в виде многочлена бозонных операторов (ср. [62—64]) *. Во втором случае схемы Юнга сопряжены (их можно получить одну из другой путем замены местами строк и столбцов), а базис можно реализовать, применяя фермионные операторы. Примером групп, дополнительных относительно НП [1/2 . . . 1/2, 1/2] и [1/2 . . . . . . 1/2, —1/2] группы SO_{8l+4}, являются группа квазиспина SU_2 и группа Sp_{4l+2}, применяемая в теории многоэлектронных оболочек атомов (ср. [37, 60, 67, 68]).

* Следует отметить результат Холмана [63] (ср. [64—66]), которому удалось в явном виде построить полиномиальный канонический базис (тем самым и любое конечномерное НП) групп $GL(n)$ и U_n в виде многочлена бозонных операторов (элементов групповых матриц) с специальными коэффициентами КГ в качестве коэффициентов разложения.

Группы U_n и S_N дополнительны относительно пространства тензоров ранга N n-мерного пространства. Неприводимые тензоры одновременно реализуют базисы НП обеих дополнительных групп.

Мошинский и Кэн [60, 61] показали, что ортогональная и симплектическая группы ($O(n)$ и $Sp(2k)$), одна из которых некомпактна, дополнительны относительно бесконечномерных НП $\langle 1/2 \ldots \ldots 1/2 \rangle$ и $\langle 1/2 \ldots 1/2,\ 3/2 \rangle$ некомпактной группы $Sp(2kn)$. O_n (или Sp_{2m}) инвариантные билинейные формы бозонных операторов рождения или уничтожения являются генераторами дополнительных групп $Sp(2k, R)$ [или $SO^*(2k)$]. Зависящему от k параметров НП (НП класса k) группы O_n соответствуют НП из дискретной положительной серии группы $Sp(2k, R)$, а НП класса k группы Sp_{2m} соответствует НП дополнительной группы $SO^*(2k)$ (ср. [61, 59]). Группа U_{2m}, включающая обе подгруппы — O_{2m} и Sp_{2m}, имеет в качестве дополнительной в случае НП класса k группы U_k. В работе [69] показано, что общая подгруппа U_m — пересечение групп SO_{2m} и Sp_{2m}, имеет в качестве дополнительной относительно бесконечномерных НП класса 1 группы $U(mk, mk)$ псевдоунитарную группу $U(k, k)$, которая включает подгруппы $Sp(2k, R)$ и $SO^*(2k)$. Базисные состояния смешанных тензорных НП класса k, $\bar{k}$ этой группы U_m реализуются как тензоры нулевого следа из ковариантных и контравариантных бозонных операторов рождения, а их инвариантные формы являются генераторами некомпактной группы $U(k, k)$.

Далее будем пользоваться двумя формами параметризации базисных функций и трансформационных коэффициентов (функций ВР) НП групп U_n, Sp_{2m} и O_n — регулярной и однородной [59]. В регулярной форме класс каждого НП группы (и ее подгруппы) совпадает с ее рангом. В случае однородной параметризации полной матрицы трансформационных коэффициентов классы НП при векторном сложении складываются; при сужении на цепочках $U_n \supset U_{n'} \dot{+} U_{n''}$, $O_n \supset O_{n'} \dot{+} O_{n''}$, $Sp_{2m} \supset Sp_{2m'} \dot{+} Sp_{2m''}$, $U_n \supset O_n$, $U_{2m} \supset Sp_{2m}$ класс НП каждой отдельной подгруппы совпадает с классом НП группы; при сужении на цепочках $O_{2m} \supset U_m$, $Sp_{2m} \supset U_m$ НП класса k группы O_{2m} и Sp_{2m} разлагаются по НП класса k, $\bar{k}$ группы U_m (ср. [71]). Однородная невырожденная параметризация естественно появляется, когда классы всех НП не превышают рангов групп, т. е. пока при разложении характеров по правилам Литтлвуда [34] (см. [37, 71]) не могут появляться нестандартные схемы Юнга. В вырожденном случае класс некоторых НП формально может превышать ранг группы. Эти НП записываются в виде нестандартных символов (см. [37, 71]) с присоединенным достаточным количеством нулей.

Реализованные в виде бозонных многочленов и параметризованные в однородной форме базисные функции НП класса k (соответственно $k\bar{k}$ или k' и k'') сложных цепочек подгрупп, включающих стандартные сужения

$$\left.\begin{array}{l} U_n \supset O_n,\ U_{2m} \supset Sp_{2m},\ O_{2m} \supset U_m,\ Sp_{2m} \supset U_m,\ U_n \times U_n \supset U_n, \\ O_n \times O_n \supset O_n, Sp_{2m} \times Sp_{2m} \supset Sp_{2m},\ U_n \supset U_{n'} \dot{+} U_{n''}, \\ O_n \supset O_{n'} \dot{+} O_{n''},\ Sp_{2m} \supset Sp_{2m'} \dot{+} Sp_{2m''}, \end{array}\right\} \tag{1а}$$

одновременно являются базисными функциями НП цепочек, включающих суженя

$$\left.\begin{array}{l} U_k \subset Sp(2k,\ R),\ U_k \subset SO^*(2k),\ Sp(2k,\ R) \subset U(k,\ k), \\ SO^*(2k) \subset U(k,\ k),\ U_{k'} \dot{+} U_{k''} \subset U_k, \\ Sp(2k',\ R) \dot{+} Sp(2k'',\ R) \subset Sp(2k,\ R), \\ SO^*(2k') \dot{+} SO^*(2k'') \subset SO^*(2k), \\ U_k \subset U_k \times U_k,\ Sp(2k,\ R) \subset Sp(2k,\ R) \times Sp(2k,\ R), \\ SO^*(2k) \subset SO^*(2k) \times SO^*(2k), \end{array}\right\} \tag{1б}$$

параметризованными в регулярной форме. Отсюда следует, что трансформационные коэффициенты, осуществляющие преобразования базисов НП пронумерованных НП цепочек (1а), (в том числе изофакторы и матрицы пересвязывания) одновременно осуществляют преобразования базисов НП пронумерованных НП цепочек (1б) дополнительных групп.

Вместо соответствия между НП компактной группы и НП дискретной положительной серии дополнительной некомпактной группы целесообразно пользоваться соответствием между НП со старшим весом этих групп:

$$O_n\colon [\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_k\dot{0}] \text{ и } Sp(2k,\ R)\colon$$

$$\left\langle -\lambda_k - \frac{n}{2},\ \ldots,\ -\lambda_2 - \frac{n}{2},\ -\lambda_1 - \frac{n}{2} \right\rangle; \tag{2а}$$

$$Sp_{2m}\colon \langle \lambda_1 \ldots \lambda_k\dot{0}\rangle \text{ и } SO^*(2k)\colon [-\lambda_k - m,\ \ldots,\ -\lambda_1 - m]; \tag{2б}$$

$$U_m\colon \{\lambda_1 \ldots \lambda_k\dot{0}\} \text{ и } U_k\colon \left\{ -\lambda_k - \frac{m}{2},\ \ldots,\ -\lambda_1 - \frac{m}{2} \right\} \tag{2в}$$

(в случае ковариантных тензорных НП);

$$U_n\colon \{\lambda_1 \ldots \lambda_k\dot{0},\ -\mu_k,\ \ldots,\ -\mu_1\} \text{ и}$$

$$U(k,\ k)\colon \left\{ -\lambda_k - \frac{n}{2},\ \ldots,\ -\lambda_1 - \frac{n}{2},\ \mu_1 + \frac{n}{2},\ \ldots,\ \mu_k + \frac{n}{2} \right\} \tag{2г}$$

(в случае смешанных тензорных НП группы U_n).

Теперь может быть сформулирована следующая теорема (ср. [59]).

Теорема 1. Параметризованные в однородной форме трансформационные коэффициенты пространств представлений, пронумерованные НП цепочек подгрупп типа (1а), при соблюдении общих условий аналитического продолжения выражаются как аналитическое продолжение регулярно параметризованных сопряженных функций ВР, пронумерованных НП цепочек типа (1б) компактных форм дополнительных групп, с эквивалентными индексами кратных НП и соответствующими согласно (2) параметрами НП. Аналитическое продолжение в обратном направлении возможно только, когда однородные функции ВР не вырождены.

Ввиду того, что одноименные функции ВР групп Ли разного порядка, параметризованные в однородной форме, могут быть получены аналитическим продолжением той же самой регулярной функции ВР дополнительной группы, имеет место теорема 2.

Теорема 2. Функция ВР в однородной форме при соблюдении тех же общих условий равна аналитическому продолжению другой функции ВР того же типа, параметры НП класса k и порядки соответствующих групп и подгрупп которой заменены таким способом, что сумма любого из параметров НП и половины порядка группы остается той же самой, а индексы кратных НП эквивалентны.

Общие условия аналитического продолжения трансформационных коэффициентов учитываются также при продолжении сигнатур НП (при использовании элементов групп подстановок параметров НМ — см. [72—74]). Прежде всего напомним, что функции ВР компактных групп зависят от дискретных значений параметров, в случае конечных кратностей НП в соответствующих разложениях выражаются в виде элементарных функций полиномов от сигнатур НП и однозначно определяются граничными значениями в подобласти, эквивалентной по мощности области индексов кратных НП (см. [20] и примеры в разд. 3 и 4 настоящей работы).

Функции ВР, представленные в виде факториальных сумм (обобщенных многомерных гипергеометрических рядов), могут быть продолжены аналитически, если число членов в отдельных суммах ограничено линейными комбинациями разностей длин соседних строк схем Юнга и числом свертываний соответствующих тензоров при сужении или разложении (т. е. сокращениями общего количества клеток в схемах Юнга). Линейные комбинации упомянутых величин определяют также асимптотическую кратность НП, совпадающую с фактической кратностью при достаточно больших значениях последнего параметра каждого из НП цепочек групп, перечисленных в (1а) и (1б). Асимптотические кратности НП для сопряженных сужений одинаково зависят от параметров, связанных подстановками (2), и определяют число функций, дающих в разных областях параметров значения сопряженных однородной и регулярной функций ВР с тем же индексом кратных НП. Если фактическая кратность НП меньше асимптотической, необходимо учесть появляющиеся линейные зависимости между прежними граничными значениями функций ВР (см. разд. 3 и 4). Эти зависимости учитываются автоматически, когда рассматриваются билинейные формы (попарные произведения, просуммированные по индексам кратных НП) одноименных функций ВР.

Определенной осторожности требует аналитическое продолжение в область вырожденных однородных функций ВР. Во-первых, фактическая и асимптотическая кратности НП в этом случае могут значительно различаться. Во-вторых, возможны компликации, связанные с появлением нескольких нестандартных символов, обозначающих одни и те же НП, а также со скачками аналитических формул для размерностей НП класса m групп O_{2m} и появлением сигнатур НП, характерных для SO_{2m}. Поэтому в этих случаях могут появляться множители типа $\sqrt{2}$, а процедура аналитического продолжения позволяет найти также функции ВР, зависящие от НП групп SO_n, которые в основной области однородности совпадают с функциями ВР групп O_n. Вообще, вырожденные случаи целесообразно проследить отдельно для каждой конкретной пары сопряженных функций ВР. Все-таки соотношения аналитического продолжения полезны и в вырожденных случаях, например, при исследовании функций ВР канонического и близких к нему вариантов полуканонических базисов НП групп SO_n, O_n и Sp_{2m}. Так, при переходе к каноническому базису появляется параметр δ НП подгруппы O_1, принимающий значения 0 или 1 в зависимости от четности разности сумм параметров НП групп O_n и O_{n-1}. Этот параметр целесообразно оставить и в случае сужения $SO_n \supset SO_{n-1}$, формально записав его в виде $SO_n \supset SO_{n-1} \dot{+} \dot{+} SO_1$. Тогда вместо (2а) устанавливается соответствие

$$SO_{1(i)}\colon [\delta_i] \text{ и } Sp\,(2k,\ R)\colon \left\langle -\frac{1}{2},\ \ldots,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}-\delta_i \right\rangle. \qquad (3)$$

Преимущество соотношений аналитического продолжения, основанных на теореме 2, состоит в том, что сигнатуры НП тех подгрупп, порядок которых не меняется, могут быть вырожденными. Поэтому эти соотношения довольно удобно применять и в случае канонического базиса. Кроме того, в случае, если порядки соответствующих групп и подгрупп различаются на четные числа, теорема 2 устанавливает тождество между однородно параметризованными функциями ВР групп разного ранга, т. е. позволяет сравнивать численные значения этих функций.

Отметим, что упомянутые соотношения весьма полезны в случаях применения функций ВР групп высокого ранга, например, при описании состояний многонуклонных систем.

Обсудим поведение факториальных сумм. Некоторые аргументы факториалов (кроме тех, которые ограничивают интервалы суммирования) могут превращаться в полуцелые. В таком случае удобно пользоваться двойными факториалами. Так, выражения для появляющихся коэффициентов КГ и $6j$-коэффициентов группы SU_2 с кратными 1/4 параметрами (что соответствует схемам Юнга из полуцелых чисел) записываются в двойных факториалах просто: все аргументы факториалов (как и простые множители типа размерности НП группы SU_2) умножаются на 2, а знак ! заменяется !!, но показатели степеней (—1) не меняются. В случае $6j$-коэффициента необходимо присоединить множитель 2.

Некоторые примеры соотношений аналитического продолжения трансформационных коэффициентов разных групп. Информацию о функциях ВР компактных групп Ли большого ранга в случае ограниченных классов НП удается получить, когда известны выражения для сопряженных функций ВР группы небольшого ранга, в частности, привлекая теорию представлений групп SU_2, SO_4, Sp_4 (SO_5) и SU_4.

Ввиду изоморфности групп SU_2 и Sp_2 элементы матрицы перехода между базисами симметричного НП группы U_n, пронумерованными НП цепочек $U_n \supset SO_n \supset SO_{n'} \dotplus SO_{n''}$ и $U_n \supset U_{n'} \dotplus U_{n''} \supset SO_{n'} \dotplus SO_{n''}$, можно выразить как аналитическое продолжение коэффициента КГ группы SU_2 (изофактора цепочки $Sp_2 \supset U_1$)

$$\left\langle \begin{matrix} \{p+q\}_n \\ \{p\}_{n'}\,\{q\}_{n''} \\ [l]_{n'}\,[k]_{n''} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \{p+q\}_n \\ [L]_n \\ [l]_{n'}\,[k]_{n''} \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l-\frac{1}{4}n' & -\frac{1}{2}k-\frac{1}{4}n'' & -\frac{1}{2}L-\frac{1}{4}n \\ -\frac{1}{2}p-\frac{1}{4}n' & -\frac{1}{2}q-\frac{1}{4}n'' & -\frac{1}{2}(p+q)-\frac{1}{4}n \end{bmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}(L-l-q)} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(p+q+l+k+n)-1 & \frac{1}{4}(p+q-l-k) & \frac{1}{2}L+\frac{1}{4}n-1 \\ \frac{1}{4}(p-q+l-k+n'-n'') & \frac{1}{4}(q-p+l-k) & \frac{1}{2}(l-k)+\frac{1}{4}(n'-n'') \end{bmatrix} \tag{3a}$$

(ср. [54]). Аналогичная формула записывается для матрицы перехода между базисами НП класса 2 группы U_{2m}, приведенной на цепочках $U_{2m} \supset Sp_{2m} \supset Sp_{2m'} \dotplus Sp_{2m''}$ и $U_{2m} \supset U_{2m'} \dotplus U_{2m''} \supset Sp_{2m'} \dotplus Sp_{2m''}$ (см. [69]). Для этой цели аналитически продолжены изофакторы $SO_4 \supset U_2$, совпадающие с обычными коэффициентами КГ группы SU_2.

Матрицы преобразования между разными вариантами полуканонического базиса симметричных НП ортогональных групп рассмотрены в [49, 52, 53, 57, 58] и выражены в виде аналитического продолжения $3nj$-коэффициентов с кратными 1/4 параметрами. Отметим, что матрицы преобразования типов полуканонических базисов НП класса 2 симплектических групп можно выразить аналитическим продолжением матриц пересвязывания НП группы SO_4, т. е. через произведения пар обычных $3nj$-коэффициентов теории углового момента.

Из теоремы 1 следует, что изофакторы полуканонического и канонического базисов, приводящие прямое произведение двух симметричных (однопараметрических) НП ортогональных групп, выражаются аналитическим продолжением изофакторов канонического базиса НП группы Sp_4 (SO_5) (см. [55, 56])

$$\left[\begin{array}{c|c} SO_n & l_1 \quad l_2 \qquad [L_1L_2] \\ SO_{n'} \dotplus SO_{n''} & l_1'l_1'' \ l_2'l_2''u; \ [L_1'L_2'] \ [L_1''L_2''] \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cc} \left\langle -\frac{2L_2'+n'}{4}, -\frac{2L_1'+n'}{4}\right\rangle & \left\langle -\frac{2L_2''+n''}{4}, -\frac{2L_1''+n''}{4}\right\rangle \\ & \left\langle -\frac{2L_2+n}{4}, -\frac{2L_1+n}{4}\right\rangle^u \\ -\frac{2l_1'+n'}{4}, -\frac{2l_2'+n'}{4} & -\frac{2l_1''+n''}{4}, -\frac{2l_2''+n''}{4} \\ & -\frac{2l_1+n}{4}, -\frac{2l_2+n}{4} \end{array}\right]. \qquad (4)$$

В изофакторе $Sp_4 \supset SU_2 \times SU_2$ (т. е. $Sp_4 \supset Sp_2 \dotplus Sp_2$), аналитическое продолжение которого появилось в правой части (4), НП группы обозначены $\langle K\Lambda\rangle$ — максимальными значениями угловых моментов I, J, характеризующих НП подгрупп SU_2 и SU_2 (см. [74]). Индекс u разделяет кратные НП как подгрупп $SO_{n'} \dotplus SO_{n''}$ в разложении НП группы SO_n, так и группы Sp_4 в разложении прямого произведения. Некоторые случаи применения соотношения (4) обсудим в разд. 2.

Теорема 2 позволяет записать соотношение аналитического продолжения изофакторов другого типа

$$\left[\begin{array}{c|c} SO_n & l_1l_2\,[L_1L_2] \\ SO_{n-1} & l_1'l_2'\,[L_1'L_2'] \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} SO_5 & l_1+\frac{n-5}{2}\ l_2+\frac{n-5}{2}\left[L_1+\frac{n-5}{2},\ L_2+\frac{n-5}{2}\right] \\ SO_4 & l_1'+\frac{n-5}{2}\ l_2'+\frac{n-5}{2}\left[L_1'+\frac{n-5}{2},\ L_2'+\frac{n-5}{2}\right] \end{array}\right]. \qquad (5)$$

Аналогичное (4) соотношение между изофакторами полуканонических базисов симплектических групп и изофакторами $SO_4 \supset SO_2 \dotplus SO_2$ позволяет выразить специальные изофакторы групп Sp_{2m}, осуществляющие векторное сложение базисов симметричных НП, в виде произведения двух коэффициентов КГ группы SU_2 (см. [59]) и понять их необычную факторизацию (ср. [74, формулу (26)]).

Из теоремы 2 следуют соотношения между изофакторами цепочки $SU_n \supset SO_n$ (ср. [75])

$$\begin{bmatrix} SU_n & p_1 & p_2 & \{h_1 h_2\} \\ SO_n & l_1 & l_2 & \omega\,[L_1 L_2] \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} SU_4 & p_1+\frac{n}{2}-2 \;\; p_2+\frac{n}{2}-2 \left\{h_1+\frac{n}{2}-2,\; h_2+\frac{n}{2}-2\right\} \\ SO_4 & l_1+\frac{n}{2}-2 \;\; l_2+\frac{n}{2}-2 \;\omega\left[L_1+\frac{n}{2}-2,\; L_2\frac{n}{2}-2\right] \end{array}\right]; \qquad (6а)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} SU_n & p \;\; \{\dot{0},\; -q\} \;\; \{\lambda,\; \dot{0},\; -\mu\} \\ SO_n & l_1 \;\; l_2 \qquad \omega\,[L_1 L_2] \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} SU_4 & p+\frac{n}{2}-2 \left\{\dot{0},\; -q-\frac{n}{2}+2\right\} \left\{\lambda+\frac{n}{2}-2,\; 0,\; 0,\; -\mu-\frac{n}{2}+2\right\} \\ SO_4 & l_1+\frac{n}{2}-2 \quad l_2+\frac{n}{2}-2 \quad \omega\left[L_1+\frac{n}{2}-2,\; L_2+\frac{n}{2}-2\right] \end{array}\right], \qquad (6б)$$

полезность которых обусловливается изоморфностью групп SO_4 и $SU_2 \times SU_2$ и наличием выражений для соответствующих изофакторов супермультиплетного базиса [75—77].

Наконец, приведем пример соотношения, позволяющего найти функцию ВР в регулярной форме — наиболее общую матрицу перехода между каноническим базисом НП Sp_4 и базисом пятимерного квазиспина, пронумерованными НП подгрупп $Sp_4 \supset SU_2 \times SU_2 \supset SO_2 \times SO_2$ и $Sp_4 \supset U_2 \supset U_1$

$$\left\langle \begin{array}{c|c} \langle K\Lambda\rangle & \langle K\Lambda\rangle \\ IM\,JN & \omega;\; VTM_T \end{array} \right\rangle =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} SU_4 & -2M-2\{\dot{0},\; 2N+2\}\{-V-T-2,\; 0,\; 0,\, -V+T+2\} \\ SO_4 & -2I-2 \quad -2J-2 \qquad \omega\,[-2\Lambda-2,\; -2K-2] \end{array}\right]. \qquad (7)$$

Здесь $M_T = M + N$, $V = M - N$. Формула (7) использована в [78], а ей обратная — в [75]. Для доказательства формул (7) и (6б), кроме пар цепочек дополнительных групп типа (1а) и (1б), необходимо рассмотреть пары типа

$$\left.\begin{array}{l} U_n \times U_n \supset U_n \;\; \text{и} \;\; U_{k'} \dot{+} U_{k''} \subset U\,(k',\, k''); \\ U_n \supset O_n \;\; \text{и} \;\; Sp\,(2k,\; R) \subset U\,(k,\; k). \end{array}\right\} \qquad (8)$$

Следует отметить, что представленные формулами (3) — (6) наиболее простые фазовые соотношения имеют место только для сравнительно больших значений n ($n \geqslant 4$ или 5). Фазовые соотношения для $n = 2, 3, 4$ рассмотрены в цитируемых работах (в частности, в [75]).

Группы подстановок параметров НП и упрощение граничных случаев трансформационных коэффициентов. Как известно, функции Шура, а тем самым и характеры общих линейных и унитарных групп инвариантны до знака при постановках параметров НП

$$m_{kn} \to m_{l_k n} - l_k + k, \tag{9}$$

где $k \to l_k$ — перестановка номеров строк в схеме Юнга $\{m_{1n}, \ldots, \ldots, m_{kn}, \ldots, m_{nn}\}$. Как показано в [79], эти подстановки оставляют инвариантными собственные значения операторов Казимира и осуществляют преобразования эквивалентности для базисов НП. Эти преобразования составляют группу, изоморфную группе Вейля алгебры Ли, и представляют собой фазовые соотношения, установить которые нетрудно при использовании матричных элементов инфинитезимальных операторов (см. [72, 73]).

Группы подстановок параметров НП групп O_n, кроме подстановок типа (9), включают также отражения

$$m_{in} \to -m_{in} - n + 2i \tag{10}$$

[для НП групп SO_n при n четном — четное число отражений (10)], а группы подстановок параметров НП групп Sp_{2m}, кроме подстановок (9), включают также отражения

$$m_{im} \to -m_{im} - 2m + 2i - 2. \tag{11}$$

Определенные подстановки параметров, примененные к части сигнатур изофакторов или других трансформационных коэффициентов, позволяют найти соотношения аналитического продолжения, являющиеся эффективным средством расширения границ применимости и упрощения выражений для специальных случаев функций ВР. В частности, подстановки параметров $j \to -j - 1$ давно применяются в теории углового момента (см. [17]). Элементарные примеры применения подстановок параметров НП групп Ли небольшого ранга приведены в [80, 74]. Весьма важные случаи соотношений этого типа, использованные в [75, 81, 82], обсудим в разд. 3 и 4.

Рассмотрим еще один класс соотношений эквивалентности между функциями ВР разных групп Ли (ср. [49, 57]). Дальше в пределах этого подразделения будем иметь в виду только следующие функции ВР: матрицы пересвязывания НП классических групп Ли (в том числе особых); изофакторы полуканонических базисов НП групп U_n, O_n и Sp_{2m}; матрицы перехода между разными полуканоническими базисами НП групп U_n, O_n, Sp_{2m}. Тогда для них имеет силу следующее утверждение.

Теорема 3. Если все сигнатуры одной из указанных выше функций ВР (возможно, после применения к части из них определенных элементов групп подстановок) равны соответствующим сигнатурам одноименной функции ВР группы U_n, то и сами эти функции равны между собой. Если после вычеркивания в сигнатурах функции ВР группы U_n нижних строк схемы Юнга, не дозволенных для одноименной функции ВР группы U_k $(k < n)$, остается набор сигнатур, имеющий смысл для функции ВР группы U_k, то исходная функция ВР равна произведению полученной после вычеркивания функций ВР группы U_k и функции ВР группы U_{n-k} с сигнатурами, составленными из вычеркнутых частей схем Юнга.

Критерий совпадения сигнатур функции ВР любой компактной группы и унитарной группы эквивалентны требованию, чтобы не появлялись свертывания при векторном сложении и сужении на полуканонических подгруппах.

Примеры соотношений, представляющих собой следствия теоремы 3, можно найти в статьях [74, 80, 83].

Пропорциональность изофакторов и элементов матриц пересвязывания НП унитарных групп. Своеобразным следствием дополнительности унитарных и симметрических групп является соотношение

$$\begin{bmatrix} \lambda_{(1)} & \lambda_{(2)} & \lambda^u \\ \alpha_1;\ \mu_{(1)}\nu_{(1)} & \alpha_2;\ \mu_{(2)}\nu_{(2)} & \alpha;\ \mu^v\nu^w \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\frac{\mathfrak{M}(\lambda_{(1)})\,\mathfrak{M}(\lambda_{(2)})\,\mathfrak{M}(\mu)\,\mathfrak{M}(\nu)}{\mathfrak{M}(\mu_{(1)})\,\mathfrak{M}(\mu_{(2)})\,\mathfrak{M}(\nu_{(1)})\,\mathfrak{M}(\nu_{(2)})\,\mathfrak{M}(\lambda)}\right]^{1/2} \times$$

$$\times \langle \mu_{(1)}\nu_{(1)}\,(\lambda_{(1)}^{\alpha_1}),\ \mu_{(2)}\nu_{(2)}\,(\lambda_{(2)}^{\alpha_2});\ \lambda^u \mid \mu_{(1)}\mu_{(2)}\,(\mu^v),\ \nu_{(1)}\nu_{(2)}\,(\nu^w);\ \lambda^\alpha\rangle, \qquad (12)$$

в наиболее общем виде впервые доказанное в [48] (см. также [49]). В левой части изофактор полуканонического базиса НП группы U_n, в правой — элемент матрицы пересвязывания базисов четырех НП группы U_n (обобщение $9j$-коэффициента). Неприводимые представления группы и подгрупп обозначены схемами Юнга $\lambda_{(i)}$, $\mu_{(i)}$, $\nu_{(i)}$. Кратные НП в разложениях прямых произведений разделяются поднятыми индексами α_i, u, v, w, а кратные НП подгруппы $U_{n'} \dotplus U_{n''}$ — индексами α_i перед этими НП. Множитель пропорциональности

$$\mathfrak{M}(\lambda) = \frac{N!}{d_\lambda} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(h_i+n-i)!}{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(h_i-h_j-i+j)}, \qquad (13)$$

где d_λ — размерность НП $\lambda \equiv \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ группы S_N.

Для доказательства соотношений (12) в [48, 49] использовался обобщенный метод Альгиса Юциса [43] построения базисов НП унитарных групп при помощи проекционных операторов

$$O^\lambda_{\rho\eta} = \mathfrak{M}^{-1}(\lambda)\sum_s D^{\lambda}_{\rho\eta}(s)\,s \qquad (14)$$

симметрических групп. Здесь $D^\lambda_{\rho\eta}(s)$ — матричный элемент НП λ группы S_N, соответствующий элементу группы s. Как показано в [43], функции $O^{\lambda}_{\rho\eta}F(\mathbf{m})$ составляют ортогональный базис НП λ группы U_n, пронумерованный весом $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ и некоторыми классами индексов η при постоянном ρ. Здесь $F(\mathbf{m})$ является компонентой тензора ранга N с упорядоченными индексами, а m_k — число индексов, равных k. Функции (см. [49])

$$[\prod_{k=1}^{n} m_k!]^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{M}^{\frac{1}{2}}(\lambda)\, \mathcal{O}^{\lambda}_{\rho\eta}F(\mathbf{m}) \tag{15}$$

образуют ортонормированный полуканонический базис НП λ группы U_n, если индекс η представляет собой базисные характеристики дополнительной цепочки симметрических групп, заканчивающейся подгруппой инвариантности тензора $F(\mathbf{m})$ $S_{m_1} \dot{+} S_{m_2} \dot{+} \ldots$ $\ldots \dot{+} S_{m_n}$, причем НП всех S_{m_k} — единичные представления.

При использовании формулы (15) вначале найдены некоторые вспомогательные изофакторы, а потом доказана и формула (12). Эквивалентное (12) соотношение доказано также Салливаном [45], который фактически пользовался обобщением теоремы Фробениуса, впервые доказанным Бурнейкой [84].

Частным случаем формулы (12) является соотношение между двукратно растяженными $9j$-коэффициентами и коэффициентами КГ группы SU_2 (формула (31.15а) [17]). Другие частные случаи получены в [41, 80].

Соотношение (12) использовано в работе [85] при генеалогическом разложении волновых функций нескольких оболочек в атоме или ядре. Некоторые другие применения формулы (12), как и другие случаи пропорциональности изофакторов и других трансформационных коэффициентов пространств представлений разных групп, обсудим в следующих разделах.

2. МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ СТЕПЕНЕЙ ГЕНЕРАТОРОВ ГРУПП И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ТРАНСФОРМАЦИОННЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

Сложность общих выражений для коэффициентов КГ, изофакторов и других трансформационных коэффициентов НП высших групп обусловила потребность разнообразных рекуррентных соотношений и выражений. Рекуррентные соотношения устанавливают линейные *зависимости между функциями ВР, параметры которых меняются* небольшими шагами. В случае рекуррентного выражения трансформационный коэффициент представляется как функция от более простых случаев (граничных значений) того же коэффициента и некоторых вспомогательных функций ВР. В частности, для изофакторов существуют два класса как рекуррентных соотношений, так и рекуррентных выражений. В первом случае меняются только базисные характеристики НП группы, но не меняются сигнатуры самих НП. Для построения рекуррентных соотношений такого типа используются инфинитезимальные операторы (см. [20, 86, 87]), а для построения рекуррентных выражений этого же класса применяются операторы понижения веса в виде многочленов упорядоченных инфинитезимальных операторов [30, 88—90]. При построении выражений этого типа, а также при использовании проекционных операторов НП алгебр Ли в форме Левдина, Шапиро [91, 92] (в случае подгруппы SU_2) и Ашеровой, Смирнова, Толстого [90, 93, 94], целесообразно пользоваться субматричными (приведенными матричными) элементами степеней и упорядоченных произведений инфинитезимальных операторов. Соответствующие матричные элементы для НП унитарных групп эквивалентны унитаризованным общим бета-функциям Гельфанда и Граева [95]; использование факторизации позволяет оптимизировать их выражения.

Рекуррентные соотношения (см., например, [29]) и выражения (см. [24—28]) второго класса позволяют менять как базисные характеристики, так и самые сигнатуры НП. Рекуррентные выражения (как и соотношения) этого типа строятся методами алгебры Вигнера — Рака в виде соединений (т. е. произведений, просуммированных по базисным характеристикам определенных НП) более простых изофакторов и элементов матриц пересвязывания НП подгрупп. Необходимыми конструктивными элементами оптимальных рекуррентных выражений для изофакторов являются фундаментальные (приводящие просто, т. е. без кратных НП в разложении прямого произведения, ср. [24]) и близкие к ним функции ВР, которые удается выразить в виде многократных конечных рядов.

Представленные в этом разделе фундаментальные изофакторы и другие функции ВР характеризуются большой универсальностью и свойствами симметрии, выходящими за пределы обычных перестановок НП и соотношений контрагредиентности.

Матричные элементы степеней инфинитезимальных операторов унитарных групп. Генераторы группы U_n удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[E_{ik},\ E_{lm}] = \delta_{kl}E_{im} - \delta_{im}E_{lk}.$$

Матричные элементы степеней этих операторов в неунитарном базисе впервые найдены в [95], а субматричные элементы унитарного базиса выделены в [89, 96]. Приведенные матричные элементы операторов

$$\left[\frac{p!}{\prod\limits_{i=1}^{n-1} \alpha_i!}\right]^{1/2} \prod_{i=1}^{n-1} E_{in}^{\alpha_i} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i = p\right) \tag{16}$$

равны между собой (см. [89]):

$$\left\langle \begin{matrix} \lambda \\ \mu' \end{matrix} \right\| E_{n-1,\,n}^{p} \left\| \begin{matrix} \lambda \\ \mu \end{matrix} \right\rangle = \frac{[p!d_{n-1}(\mu)]^{1/2}\, S_{n,\,n-1}(\lambda;\ \mu)}{S_{n-1,\,n-1}(\mu';\ \mu)\, S_{n,\,n-1}(\lambda;\ \mu')}. \tag{17}$$

Здесь использованы обозначения

$$ {}_l d_n(\lambda) = \prod_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant n\\ i\neq l,\ j\neq l}} (\lambda_i-\lambda_j-i+j) = {}_lS^2_{n,\,n}(\lambda;\ \lambda); \tag{18} $$

$$ {}_lS_{n,\,m(k)}(\lambda;\ \mu) = {}_{-l}S^{-1}_{m,\,n(-k-1)}(\mu;\ \lambda) = $$
$$ = \left[\frac{\prod\limits_{j=1(j\neq -l)}^{m}\ \prod\limits_{i=1(i\neq l)}^{\min(j+k,\,n)} (\lambda_i-\mu_j-i+j+k)!}{\prod\limits_{i=1(i\neq l)}^{n}\ \prod\limits_{j=1(j\neq -l)}^{\min(i-k-1,\,m)} (\mu_j-\lambda_i+i-j-k-1)!}\right]^{1/2} \tag{19} $$

(n, m — натуральные числа, $-m\leqslant l\leqslant n$). Равные 0 параметры l и k опускаются, тогда обозначение (19) совпадает с формулой (19) работы [96]. Кроме того,
${}_nS_{n,m(k)}(\lambda;\ \mu) = S_{n-1,m(k)}(\lambda;\ \mu)$; ${}_{-m}S_{n,m(k)}(\lambda;\ \mu) = S_{n,m-1(k)}(\lambda;\ \mu)$. Для вычисления матричного элемента оператора $E^p_{n-1,n}$ необходим **также специальный изофактор** $U_{n-1}\supset U_{n-2}$

$$ \begin{bmatrix} \mu & p & \mu' \\ \nu & 0 & \nu \end{bmatrix} = \frac{[p!d_{n-1}(\mu')]^{1/2}\, S_{n-1,\,n-2}(\mu';\ \nu)}{S_{n-1,\,n-1}(\mu';\ \mu)\, S_{n-1,\,n-2}(\mu;\ \nu)}. \tag{20} $$

Матричные элементы остальных операторов (16) выражаются при использовании нижеприведенных специальных изофакторов.

Изофакторы для векторного сложения базисов общего и симметричного НП группы U_n. При приведении прямого произведения двух НП унитарной группы, одно из которых симметрично или антисимметрично, результирующие НП не появляются больше 1 раза. Изофакторы второго типа рассмотрены в [97]. Использование перестановочных свойств степеней генераторов группы позволило в [89] получить два класса выражений для изофакторов первого типа. Для объединения этих выражений в единый алгоритм введем обозначение

$$ W_{n(l)}\left(\begin{matrix} \lambda_{(1)r_1k_1}; & \lambda_{(2)r_2k_2} \\ \lambda_{(3)r_3k_3}; & \lambda_{(4)r_4k_4}\end{matrix}\ \middle|\ f\right) = $$
$$ = \prod_{a=1}^{2}\prod_{b=3}^{4} S_{n-r_a,\,n-r_b(k_a+k_b)}(\lambda_{(a)};\ \lambda_{(b)}) \times $$
$$ \times \sum_{\sigma} (-1)^{\sum\limits_{i=1(i\neq l)}^{n}\sigma_i}\ {}_ld_n(\sigma)\, f(\lambda_{(1)};\ \lambda_{(2)};\ \lambda_{(3)};\ \lambda_{(4)};\ \sigma) \times $$
$$ \times \prod_{a=1}^{2} {}_{-l}S^{-2}_{n-r_a,\,n(k_a)}(\lambda_{(a)};\ \sigma) \prod_{b=3}^{4} {}_lS^{-2}_{n,\,n-r_b(k_b)}(\sigma;\ \lambda_{(b)}). \tag{21} $$

Здесь $\lambda_{(a)}$, $\lambda_{(b)}$, σ — старшие веса (схемы Юнга). Не зависящий от σ множитель функции f целесообразно вынести перед знаком суммы.

Тогда изофакторы цепочки $U_n \supset U_{n-1}$ выражаются следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \alpha & p & \lambda \\ \beta & q & \mu \end{bmatrix} = W_{n(n)} \begin{pmatrix} \alpha_{0,0} & \mu_{1,0} \\ \beta_{1,0} & \lambda_{0,-1} \end{pmatrix} \Bigg| f_0 \Bigg) = \tag{22а}$$

$$= W_{n(l)} \begin{pmatrix} \lambda_{0,0} & \beta_{1,-1} \\ \mu_{1,0} & \alpha_{0,0} \end{pmatrix} \Bigg| f_{(l)} \Bigg) \tag{22б}$$

$$(l = 1, 2, \ldots, n);$$

$$f_0 = (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n-1} \beta_i} [(p-q)!\, d_n(\lambda)\, d_{n-1}(\beta)]^{1/2}$$

$$f_{(l)} = (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{l-1} (\alpha_i - \beta_i + \mu_i) + \sum\limits_{i=l+1}^{n} \lambda_i} \left[\frac{d_n(\lambda)\, d_{n-1}(\beta)}{(p-q)!} \right]^{1/2}.$$

В выражении (22а) (ср. [89, 96]) длины интервалов, пробегаемых параметрами суммирования σ_i, определяются разностями

$$\min(\alpha_i, \mu_i) - \max(\lambda_{i+1}, \beta_i), \tag{23а}$$

а в l-м выражении типа (22б) (ср. [89])— разностями ($i \neq l$)

$$\min(\lambda_i, \beta_{i-1}) - \max(\alpha_i, \mu_i). \tag{23б}$$

Выражения обоих типов с точностью до элементарных множителей обладают симметрией типа Редже относительно перестановок спаренных параметров в скобках. В зависимости от длин интервалов целесообразно пользоваться одним из $n + 1$ выражений для рассматриваемых изофакторов. Так, только формула (22б) при $l = n$ дает выражение без суммы, если схема Юнга μ принимает максимальное значение.

Выбрав формулу (22б) при $l = 1$ и воспользовавшись соотношением (12), получим содержащее $n - 1$ сумму выражение для специальных элементов матрицы пересвязывания четырех НП группы U_n, три из которых симметричны (ср. [65])

$$\langle \alpha q(\beta),\ r\ \ p-q\,(p-q+r);\ \lambda | \alpha r(\mu),\ q\ \ p-q\,(p);\ \lambda \rangle =$$

$$= W_{n(n)} \begin{pmatrix} \alpha_{0,0} & \lambda_{0,1} \\ \beta_{0,-1} & \mu_{0,-1} \end{pmatrix} \Bigg| f' \Bigg), \tag{24}$$

где

$$f' = (-1)^{\sum\limits_{i=2}^{n} \lambda_i} \left[\frac{r!\,q!\,d_n(\mu)\, d_n(\beta)}{p!\,(p-q+r)!} \right]^{1/2}.$$

Коэффициенты Вейля канонического базиса НП группы U_{n+1} [с помощью их осуществляется перестановка n-й и $(n + 1)$-й составляющих векторного пространства группы U_{n+1}] выражаются в наиболее простом виде как частный случай этой величины при выборе $p = q$ (ср. [98]).

Отметим, что формулы (13.1б), (13.1в), (29.1б) и (32.18) работы [17] представляют собой частные случаи формул (22а), (22б) и (25).

Некоторые другие матрицы пересвязывания НП групп U_n. Для построения полуканонического базиса, соответствующего сужению $U_n \supset U_{n-2} \dot{+} U_2$ (ср. случай $U_4 \supset U_2 \dot{+} U_2$ [99]), целесообразно применять проекционные операторы [91, 92] подалгебры Ли группы U_2, преобразующей $(n-1)$-ю и n-ю координаты. Соответствующие матричные элементы проекционных операторов, которые осуществляют преобразование между каноническим и полуканоническим базисами, одновременно являются билинейной формой матриц пересвязывания трех НП группы U_n, из которых второе и третье НП симметричны (ср. [100])

$$\sum_{\rho} \langle \alpha p_1 (\beta)\, p_2,\ \lambda | \alpha,\ p_1 p_2 (\varepsilon);\ {}^{\rho}\lambda\rangle \langle \alpha p_1' (\mu)\, p_2',\ \lambda | \alpha,\ p_1' p_2' (\varepsilon);\ {}_{\rho}\lambda\rangle =$$
$$= W_{n(0)} \left(\begin{matrix} \alpha_{0,-1} & \lambda_{0,0} \\ \beta_{0,0} & \mu_{0,0} \end{matrix} \middle| f_{s1} \right), \tag{25}$$

где

$$f_{s1}(\sigma) = (-1)^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \varepsilon_1} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 1) \left[\frac{(p_1-\varepsilon_2)!\,(p_1'-\varepsilon_2)!\, d_n(\beta)\, d_n(\mu)}{(\varepsilon_1 - p_1)!\,(\varepsilon_1 - p_1')!} \right]^{1/2} \times$$
$$\times \frac{(\varepsilon_1 - p_1 + z)!\,(\varepsilon_1 - p_1' + z)!}{z!\,(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + z + 1)!}; \qquad z = \sum_{i=1}^{n} (\sigma_i - \alpha_i) - \varepsilon_1.$$

Это выражение, а также полученное в [82] подстановкой параметров НП выражение для билинейных форм матриц пересвязывания

$$\sum_{\rho} \langle \alpha\, [\dot{0},\ -q]\, (\beta)\, p,\ \lambda | \alpha,\ [\dot{0},\ q]\, p\, ([p_0,\ \dot{0},\ -q_0]);\ {}^{\rho}\lambda\rangle \times$$
$$\times \langle \alpha\, [\dot{0},\ -q']\, (\mu)\, p',\ \lambda | \alpha,\ [\dot{0},\ -q']\, p'\, [p_0,\ \dot{0},\ -q_0];\ {}_{\rho}\lambda\rangle =$$
$$= W_{n(0)} \left(\begin{matrix} \alpha_{0,0} & \lambda_{0,0} \\ \beta_{0,0} & \mu_{0,0} \end{matrix} \middle| f_{m1} \right), \tag{26}$$

где

$$f_{m1}(\sigma) = (-1)^{q_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \left[\frac{d_n(\beta)\, d_n(\mu)}{(q-q_0)!\,(q'-q_0)!\,(p+q_0+n-1)!\,(p'+q_0+n-1)!} \right]^{1/2} \times$$
$$\times (p_0 + q_0 + n - 1)\, \frac{1}{z!}\, (q - q_0 + z)!\,(q' - q_0 + z)!\,(p_0 + q_0 + n - 2 - z)!,$$
$$z = q_0 + \sum_{i=1}^{n} (\sigma_i - \alpha_i),$$

могут применяться при ортонормировании рекуррентных выражений для изофакторов. $[\dot{0}, -q]$ и p здесь обозначены соответственно контравариантные и ковариантные симметричные НП группы U_n; $[p_0, \dot{0}, -q_0]$ смешанные тензорные НП класса $1,\bar{1}$.

Матричные элементы степеней генераторов группы $Sp_4(SO_5)$. Среди 10 инфинитезимальных операторов группы SO_5 (Sp_4)6 являются генераторами подгруппы $SU_2 \times SU_2$, а остальные представляют собой биспинор ранга (1/2, 1/2) группы $SU_2 \times SU_2$ и выражаются через генераторы группы SU_4 (ср. [87, 88])

$$\left.\begin{aligned} T_{++} &= -E_{14} - E_{32}, & T_{--} &= E_{41} + E_{23}, \\ T_{+-} &= E_{13} - E_{42}, & T_{-+} &= E_{31} - E_{24}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Степени этих операторов являются экстремальными составляющими неприводимых тензорных операторов группы $SU_2 \times SU_2$, поэтому их матричные элементы факторизуются на два коэффициента КГ группы SU_2 и субматричный элемент (см. [88])

$$\left\langle \begin{matrix} \langle K\Lambda\rangle \\ I'J' \end{matrix} \middle\| T^{2\alpha} \middle\| \begin{matrix} \langle K\Lambda\rangle \\ IJ \end{matrix} \right\rangle = [(2I+1)(2J+1)]^{1/2} \times$$
$$\times \frac{(J+J'-\alpha)!\,\nabla(\alpha II')\,\nabla(\alpha JJ')\,\nabla(K-J,\ I,\ \Lambda)\,\nabla(K-J',\ I',\ \Lambda)}{E(K+J,\ I,\ \Lambda)\,E(K+J',\ I',\ \Lambda)} \times$$
$$\times \sum_{i,j} \frac{(-1)^{J-I'+\alpha+i-j}(2i+1)\,E^2(K+j,\ i,\ \Lambda)}{(2j+1)!\,(\alpha+J+J'-2j)!\,\nabla^2(K-j, i, \Lambda)\,\nabla^2(j-J, i, I)\,\nabla^2(j-J', i, I')}. \tag{28}$$

Здесь обозначено

$$\nabla(abc) = \left[\frac{(a+b-c)!\,(a-b+c)!\,(a+b+c+1)!}{(b+c-a)!}\right]^{1/2}; \tag{29}$$

$$E(a,\ b,\ c) = [(a-b-c)!\ (a-b+c+1)!\ \ (a+b-c+1)! \times$$
$$\times (a+b+c+2)!]^{1/2}. \tag{30}$$

Применяя матричные элементы степеней генераторов T_{ij}, можно найти представления конечных преобразований однопараметровых нилпотентных и других подгрупп групп $Sp\,(4,\ C)$, $SO\,(5,\ C)$ и их вещественных форм (ср. случай группы $GL\,(n,\ C)$ [95, 20]).

К сожалению, для Sp_4 не удается в столь же простой форме, как (16) для U_n, записать неэкстремальные составляющие тензорных операторов подгруппы $SU_2 \times SU_2$. Не увенчались успехом также попытки найти матричные элементы общего вида для степеней генераторов ортогональных групп SO_n при $n > 5$ (ср. [101]). Следует обратить внимание на то, что в выражениях для матричных элементов конечных преобразований однопараметрических подгрупп групп SO_n в виде интегралов [102, 103], а также в формулах, приведенных в [20, 104], не отражены свойства симметрии этих элементов типа Редже, обсуждаемые в [101] и позволяющие переставлять параметры НП групп SO_n и SO_{n-2} $m_{ni} \leftrightarrow m_{n-2,i-1}$ в схемах Гельфанда — Цетлина [105]. Известные аналитические выражения матричных элементов НП конечных преобразований групп SO_3, SO_4 и SO_5 обсуждаются в [106].

Операторы понижения веса группы Sp_4 (SO_5) в виде многочленов упорядоченных генераторов приведены в [88], где они применяются для построения специальных изофакторов этой группы.

Полурастяженные изофакторы группы $Sp_4(SO_5)$ являются необходимыми конструктивными элементами наиболее общих изофакторов этой группы, но также играют важную роль в исчислениях ВР различных компактных групп.

Полурастяженные изофакторы первого рода, параметры которых удовлетворяют условию $K_3 + \Lambda_3 = K_1 + \Lambda_1 + K_2 + \Lambda_2$, пропорциональны $9j$-коэффициентам группы SU_2 [74]

$$\begin{bmatrix} \langle K_1\Lambda_1\rangle & \langle K_2\Lambda_2\rangle & \langle K_3\Lambda_3\rangle \\ I_1J_1 & I_2J_2 & I_3J_3 \end{bmatrix} = (-1)^{I_1+I_2-I_3} \times$$

$$\times [(2K_3 - 2\Lambda_3 + 1)(2I_1+1)(2I_2+1)(2J_1+1)(2J_2+1)]^{1/2} \times$$

$$\times {}_3\prod_a{}_{1,2} \frac{[(2K_a+1)!\,(2\Lambda_a)!\,(2K_a+2\Lambda_a+2)!]^{1/2}}{E\,(K_a+\Lambda_a,\ I_a,\ J_a)} \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} K_1-\Lambda_1 & K_2-\Lambda_2 & K_3-\Lambda_3 \\ I_1 & I_2 & I_3 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{Bmatrix}. \qquad (31)$$

Здесь и далее используется обозначение

$${}_3\prod_a{}_{1,2} X_a = \frac{X_1X_2}{X_3}, \qquad (32)$$

где X_a — любая функция от параметров с индексами a.

При использовании соотношения (31) и вышеупомянутых операторов понижения веса НП группы Sp_4 (SO_5) в [88] получено оптимальное выражение для $9j$-коэффициентов в виде трехкратной суммы, позднее доказанное в рамках теории углового момента в [17], формула (32.10). Путем аналитического продолжения этой формулы впервые в виде трехкратных конечных рядов выражены все случаи изофакторов группы Лоренца SL (2, C) (SO (3,1)), приводящих прямые произведения неприводимых унитарных представлений как основной, так и дополнительной серии в SU_2 (SO_3) базисе [107] *.

* Этот результат остается оптимальным и после появления статьи [108], в которой более строго обоснована нормировка изофакторов, но сумма — четырехкратна.

Полурастяженные изофакторы второго рода, параметры которых удовлетворяют условию $K_3 = K_1 + K_2$, выражаются в следующем виде [88]:

$$\begin{bmatrix} \langle K_1\Lambda_1\rangle & \langle K_2\Lambda_2\rangle & \langle K_3\Lambda_3\rangle \\ I_1J_1 & I_2J_2 & I_3J_3 \end{bmatrix} = (-1)^{\Lambda_1+\Lambda_2-\Lambda_3} \times$$

$$\times [(2\Lambda_3+1)(2I_1+1)(2I_2+1)(2J_1+1)(2J_2+1)]^{1/2} \times$$

$$\times {}_3\prod_a{}_{1,2} [(2K_a-2\Lambda_a)!\,(2K_a+1)!\,(2K_a+2\Lambda_a+2)!]^{1/2} \times$$

$$\times \left[\begin{array}{c|ccc} K_1 & \Lambda_1 & I_1 & J_1 \\ K_2 & \Lambda_2 & I_2 & J_2 \\ K_3 & \Lambda_3 & I_3 & J_3 \end{array}\right], \tag{33}$$

где

$$\left[\begin{array}{c|ccc} k_1 & j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ k_2 & j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ k_3 = k_1+k_2 & j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{array}\right] = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{3} j_{3i} - k_3\right)!}{\prod\limits_{i=1}^{3} \nabla(j_{3i}, j_{1i}, j_{2i})} \times$$

$$\times {}_3\prod_a{}_{1,2} [E(k_a+j_{a1}, j_{a2}, j_{a3})\,\nabla(k_a-j_{a1}, j_{a2}, j_{a3})]^{-1} \times$$

$$\times \sum_{z_1, z_2, z_3} \prod_{i=1}^{3} (-1)^{z_i} \frac{(2j_{1i}-z_i)!\,(j_{3i}-j_{1i}+j_{2i}+z_i)!}{z_i!\,(j_{1i}+j_{2i}-j_{3i}-z_i)!} \times$$

$$\times \left\{\left[\sum_{b=1}^{3} (j_{1b}-z_b)-k_1\right]!\left[\sum_{b=1}^{3} (j_{3b}-j_{1b}+z_b)-k_2\right]!\right\}^{-1} = \tag{34а}$$

$$= \frac{(-1)^{k_1-j_{11}-j_{12}-j_{23}+j_{33}}(k_2-j_{21}-j_{22}+j_{23})!\; {}_3\prod_a{}_{1,2} \nabla(j_{2a}, j_{1a}, j_{3a})}{{}_3\prod_a{}_{1,2} E(k_a+j_{a1}, j_{a2}, j_{a3})\,\nabla(k_a-j_{a1}, j_{a2}, j_{a3})} \times$$

$$\times \sum_{z_1, z_2, z_3} \frac{(-1)^{z_3}(j_{13}+j_{23}-j_{33}+z_3)!\,(2j_{33}-z_3)!}{z_3!\,(j_{13}-j_{23}+j_{33}-z_3)!\left[\sum\limits_{b=1}^{2}(j_{3b}-j_{2b})+j_{23}-j_{33}-k_1+\sum\limits_{i=1}^{3} z_i\right]!} \times$$

$$\times \frac{1}{\left(k_3-j_{31}-j_{32}+j_{33}-\sum\limits_{i=1}^{3} z_i\right)!} \prod_{i=1}^{2} \frac{(j_{1i}-j_{2i}+j_{3i}+z_i)!}{z_i!\,(j_{1i}+j_{2i}-j_{3i}-z_i)!\,(2j_{3i}+1+z_i)!}. \tag{34б}$$

Величина, представленная формулой (34), обладает более высокой симметрией, чем изофакторы группы SO_5. Перестановки последних трех столбцов не меняют ее значения, а перестановки двух первых строк дают только фазовый множитель

$$(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{3}(j_{1i}+j_{2i}-j_{3i})}.$$

Выражение (34б), полученное в [55, 56] из (34а) подстановкой параметров НП, менее симметрично, но более упрощается в определенных граничных случаях.

Растяженные изофакторы группы SO_5 (Sp_4) с параметрами, удовлетворяющими условию $K_3 = K_1 + K_2$, $\Lambda_3 = \Lambda_1 + \Lambda_2$, вычисляются как по формуле (31), так и по формуле (33). Применение элементов группы подстановок параметров НП [74] позволяет найти также нестандартные полурастяженные изофакторы с параметрами, удовлетворяющими определенным линейным зависимостям (например, $K_3 - \Lambda_3 = K_1 - \Lambda_1 + K_2 + \Lambda_2$ или $\Lambda_3 = K_2 + \Lambda_1$, см. [56]).

Изофакторы симметричных НП ортогональных групп. Коэффициенты КГ групп SO_n в каноническом базисе (при $n \geqslant 5$), когда связываемые и результирующие НП симметричны, впервые рассмотрены в [55, 109, 110]. В работах [109, 110] они появляются как коэффициенты разложения произведений двух гиперсферических функций (см. [111, гл. IX]) по таким же функциям. Соотношение (4), частный случай которого использован в [55], и формулы (33), (34) позволяют получить наиболее простые выражения для нормированных специальных изофакторов как полуканонического, так и канонического базиса НП SO_n:

$$\left[\begin{array}{c|ccc} SO_n & l_1 & l_2 & l_3 \\ SO_{n'}+SO_{n''} & l_1',\ l_1'' & l_2',\ l_2'' & l_3',\ l_3'' \end{array}\right] =$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{3}(l_i-l_i'-l_i'')} N\left[\left(\sum_{i=1}^{3} l_i + n - 2\right)!!\right]^{-1} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{3} [(l_i-l_i'-l_i'')!!\,(l_i-l_i'+l_i''+n''-2)!!\,(l_i+l_i'-l_i''+$$

$$+n'-2)!!\,(l_i+l_i'+l_i''+n-4)!!]^{1/2} \times$$

$$\times \sum_{z_1,\,z_2,\,z_3} \prod_{i=1}^{3} \frac{(-2)^{-z_i}\,[(2l_i''+n''-2+2z_i)!!]^{-1}}{z_i!\,(l_i-l_i'-l_i''-2z_i)!!\,(l_i+l_i'-l_i''+n'-2-2z_i)!!} \times$$

$$\times \left[\sum_{i=1}^{3}(l_i''+z_i)+n''-2\right]!!\left[\sum_{i=1}^{3}(l_i-l_i''-z_i)+n'-2\right]!! = \qquad (35а)$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{\frac{1}{2}(l_1'+l_2'-l_3')} N\,(l_1''+l_2''-l_3'')!!\times\\
&\times {}_3\prod_a{}_{1,2}\left[\frac{(l_a-l_a'-l_a'')!!\,(l_a+l_a'-l_a''+n'-2)!!}{(l_a-l_a'+l_a''+n''-2)!!\,(l_a+l_a'+l_a''+n-4)!!}\right]^{1/2}\times\\
&\times\sum_{z_1,z_2,z_3}\frac{(-2)^{-z_3}(l_3-l_3'-l_3''+2z_3)!!\,(l_3+l_3'-l_3''+n'-2+2z_3)!!}{z_3!\,(2l_3+n-2+2z_3)!!\left[l_3-l_3''+\sum\limits_{i=1}^{2}(l_i''-l_i)+2\sum\limits_{i=1}^{3}z_i\right]!!}\times\\
&\times\frac{1}{\left(l_1+l_2-l_3-2\sum\limits_{i=1}^{3}z_i\right)!!}\prod_{i=1}^{2}\frac{2^{-z_i}(2l_i+n-4-2z_i)!!}{z_i!\,(l_i-l_i'-l_i''-2z_i)!!\,(l_i+l_i'-l_i''+n'-2-2z_i)!!},
\end{aligned}
\tag{35б}
$$

где

$$
\begin{aligned}
N = &\left[\frac{2^3(2l_1'+n'-2)(2l_2'+n'-2)(2l_1''+n''-2)(2l_2''+n''-2)(2l_3+n-2)}{(l_3'+n'-3)!\,(l_3''+n''-3)!\,l_3!}\times\right.\\
&\left.\times\frac{(n-4)!!\,l_3'!\,l_3''!\,(l_3+n-3)!}{(n'-4)!!\,(n''-4)!!}\right]^{1/2}\frac{D_n(l_1l_2l_3)}{D_{n'}(l_1'l_2'l_3')\,D_{n''}(l_1''l_2''l_3'')};
\end{aligned}
\tag{36}
$$

$$
\begin{aligned}
D_n(l_1l_2l_3) = &\left[\frac{(l_1+l_2-l_3)!!\,(l_3-l_1+l_2)!!}{(l_1+l_2-l_3+n-4)!!\,(l_3-l_1+l_2+n-4)!!}\times\right.\\
&\left.\times\frac{(l_1-l_2+l_3)!!\,(l_1+l_2+l_3+n-2)!!}{(l_1-l_2+l_3+n-4)!!\,(l_1+l_2+l_3+2n-6)!!}\right]^{1/2};
\end{aligned}
\tag{37}
$$

$l_i-l_i'-l_i''$, $l_1+l_2+l_3$ — четные числа.

Выражение (35б), полученное аналитическим продолжением формулы (34б), менее симметрично, чем (35а), но обладает более сильными и разнообразными условиями ограничения сумм. Одна сумма исчезает при условии $l_1''+l_3''=l_3''$, а в растяженном случае ($l_1 \dot{+} l_2 = l_3$) исчезают все три суммы. В случае сужения $SO_n \supset SO_{n-2} \dot{+} SO_2$ условие $l_1''+l_2''=l_3''$ удовлетворяется всегда, и формула (35б) после устранения расходимостей предельным переходом [замены множителей, зависящих от параметров n'' и l_i'' в формуле (36) на $1/\sqrt{2}$] позволяет выразить рассматриваемый изофактор в виде двукратной суммы.

Изофакторы канонического базиса группы SO_n получаем после подстановки параметров δ_1, δ_2, δ_3, равных 0 или 1, вместо l_1'', l_2'', l_3'' соответственно. Из условий $l_i-l_i'-\delta_i=0 \bmod 2$, $\delta_1+\delta_2+\delta_3=0 \bmod 2$ видно, что возможны следующие наборы параметров: $\delta_1=\delta_2=\delta_3=0$; $\delta_1=\delta_3=1$, $\delta_2=0$; $\delta_1=0$, $\delta_2=\delta_3=1$; $\delta_1=\delta_2=1$, $\delta_3=0$.

В трех первых случаях непосредственно, в четвертом — после применения свойства симметрии [видного из (35а)] формула (35б) позволяет выразить все изофакторы канонического базиса симметричных НП ортогональных групп в виде двойных сумм *.

Ни из формулы (35б), ни из (35а) не следует доказанное в [110] и [55] выражение важного для теории гиперсферических функций специального изофактора

$$\begin{bmatrix} SO_n & l_1 & l_2 & l_2 \\ SO_{n-1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{D_n(l_1 l_2 l_3)} \left[\frac{(n-3)!!\, l_1!\, l_2!\, 2^{-n+3}}{(n-4)!!\,(l_1+n-3)!\,(l_2+n-3)!} \right]^{1/2} \tag{38}$$

($n \geqslant 4$; в случае $n = 3$ появляется фазовый множитель, ср. формулу (15.10) в [17]).

Соотношение (5) и методы, разработанные для Sp_4 (SO_5), с учетом соответствия между параметрами НП цепочек $SO_5 \supset SO_4$ и $Sp_4 \supset \supset SU_2 \times SU_2$

$$L_1 = K + \Lambda,\ L_2 = K - \Lambda,\ L_1' = I + J,\ L_2' = I - J \tag{39}$$

в статье [56] позволили найти наиболее общие изофакторы коэффициентов КГ, осуществляющих векторное сложение канонических базисов симметричных НП ортогональных групп SO_n.

Пропорциональность некоторых изофакторов унитарных и симплектических групп специальным изофакторам ортогональных групп. В работах [110, 112] рассмотрены специальные изофакторы коэффициентов КГ групп U_n, которые применяются в качестве коэффициентов разложения произведений гиперсферических функций группы SU_n, реализованных на факторпространстве SU_n/SU_{n-1}. В статье [113] показано, что такие изофакторы смешанных тензорных НП класса 1, $\bar{1}$ группы U_n пропорциональны представленным формулой (35б) изофакторам цепочки $SO_{2n} \supset SO_{2n-2} \dotplus SO_2$. Далее в работе [69] показана пропорциональность специальных изофакторов, соответствующих сужениям $U_n \supset U_{n'} \dotplus U_{n''}$ и $SO_{2n} \supset SO_{2n'} \dotplus \dotplus SO_{2n''}$.

В работе [69] также показано, что специальные изофакторы НП класса 2 симплектических групп, соответствующие сужению $Sp_{2m} \supset \supset Sp_{2m'} \dotplus Sp_{2m''}$, пропорциональны произведениям представленных формулой (35) изофакторов цепочки $SO_{4m} \supset SO_{4m'} \dotplus SO_{4m''}$ и $9j$-коэффициентов группы SU_2. В частности, в определенном смысле обобщается формула (31).

3. БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ КЛЕБША — ГОРДАНА

Как отмечалось во введении, с появлением кратных НП в разложении прямого произведения НП не просто приводимых групп имеет место неортогональность аналитически построенных коэффициентов

* В частности, из (35б) следует наиболее простое выражение [см. (32.14) в работе [17]] для $9j$-коэффициента с двумя равными строками. [В нем следует исправить множитель $(2j_3 + 1 + z)!!$ на $(2j_3 + 1 + z)!$].

КГ относительно индексов ρ. Основные операции алгебры Вигнера — Рака (в том числе разложение матричных элементов неприводимых тензорных операторов соответственно теореме Вигнера — Эккарта) можно осуществлять аналитически, если известны биортогональные системы изофакторов коэффициентов КГ, т. е. наборы дуальных изофакторов, удовлетворяющих условию биортогональности

$$\sum_{\bar{\rho},\, \mu_{(1)},\, \mu_{(2)}} \begin{bmatrix} \lambda_{(1)} & \lambda_{(2)} & {}_{\rho}\lambda \\ \mu_{(1)} & \mu_{(2)} & {}^{\bar{\rho}}\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{(1)} & \lambda_{(2)} & {}^{\rho'}\lambda' \\ \mu_{(1)} & \mu_{(2)} & {}_{\bar{\rho}}\mu \end{bmatrix} = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{\rho\rho'} \tag{40а}$$

и полноты

$$\sum_{\lambda,\, \rho} \begin{bmatrix} \lambda_{(1)} & \lambda_{(2)} & {}_{\rho}\lambda \\ \mu_{(1)} & \mu_{(2)} & {}^{\bar{\rho}}\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{(1)} & \lambda_{(2)} & {}^{\rho}\lambda \\ \mu'_{(1)} & \mu'_{(2)} & {}_{\bar{\rho}'}\mu \end{bmatrix} = \delta_{\mu_{(1)}\mu'_{(1)}}\delta_{\mu_{(2)}\mu'_{(2)}}\delta_{\bar{\rho}\bar{\rho}'}. \tag{40б}$$

Дуальность в смысле биортогональности естественно отражается в двух подходах к коэффициентам КГ. С одной стороны, основное определение коэффициентов КГ как элементов матрицы, приводящей прямое произведение двух НП, позволяет выразить суммы по индексам ρ произведений пар этих величин (билинейные формы) в виде интегралов по группе произведений элементов D-матриц трех НП (см. [20]) или с помощью проекционных операторов алгебр Ли [30—32]. Отдельные коэффициенты КГ в таком случае могут быть найдены при наложении дополнительных условий.

С другой стороны, альтернативное определение коэффициентов КГ как коэффициентов векторного сложения любых базисных функций двух НП и использование явного вида представлений инфинитезимальных операторов группы позволяют записать рекуррентные соотношения, которые связывают коэффициенты КГ с тем же набором параметров НП самой группы и индекса ρ. Построенная система разностных уравнений позволяет выразить любой коэффициент КГ (с фиксированным ρ) через его значения в определенной области мощности r_0, а при изменении ρ соответственно меняются краевые условия этой области.

Если в качестве полного набора неортонормированных изофакторов выбрать, например, линейно независимые среди линейных комбинаций изофакторов

$$\begin{bmatrix} \lambda_{(1)} & \lambda_{(2)} & {}^{+,-,}{}_{\rho}\lambda \\ \mu_{(1)} & \mu_{(2)} & {}^{\bar{\rho}}\mu \end{bmatrix} = \sum_{\rho'} \begin{bmatrix} \lambda_{(1)} & \lambda_{(2)} & {}^{\rho''}\lambda \\ \mu_{(1)\,\max} & \mu_{(2)\,\min} & {}_{\rho'}\mu' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{(1)} & \lambda_{(2)} & {}_{\rho'}\lambda \\ \mu_{(1)} & \mu_{(2)} & {}^{\bar{\rho}}\mu \end{bmatrix} \tag{41}$$

с однозначным соответствием между значениями индекса ρ и набора параметров $\bar{\rho}'$, μ' вспомогательного изофактора — коэффициента разложения, то дуальные изофакторы будут удовлетворять краевым условиям

$$\begin{bmatrix} \lambda_{(1)} & \lambda_{(2)} & {}^{+,-,\rho}\lambda \\ \mu_{(1)} & \mu_{(2)} & {}_{\bar\rho}\mu \end{bmatrix} = \delta_{\bar\rho\mu,\rho}, \tag{42}$$

если $\mu_{(1)} = \mu_{(1)\max}$, $\mu_{(2)} = \mu_{(2)\min}$, $\bar\rho$, μ принимают те же значения, для которых линейные комбинации (41) линейно независимы (ср. SU_3 случай [82]). Значки $+$, $-$ здесь указывают на фиксированные экстремальные базисные характеристики вспомогательного изофактора *. Легко видеть, что при разложении линейно зависимых изофакторов — билинейных форм типа (41) по полной системе в качестве коэффициентов разложения появляются дуальные изофакторы, базисные характеристики которых принимают те значения, которые появились в (41) вместо набора $\mu_{(1)\max}$, $\mu_{(2)\min}$, $\bar\rho'$ μ', соответствующего полной системе.

Изофакторы, удовлетворяющие краевым условиям типа (42), т. е. с верхними индексами кратных НП, очень удобны (даже более, чем ортонормированные) при использовании теоремы Вигнера — Эккарта: для того, чтобы выделить субматричные элементы или найти элементы матрицы пересвязывания с нижними индексами кратных НП, достаточно выбрать соответствующие экстремальные базисные характеристики в матричном элементе или в соединении нечетного числа коэффициентов КГ группы, т. е. почти так же просто, как это делается в случае просто приводимых групп, например SU_2 (ср. формулы (28.10), (31.36) [17]). Таким путем любые матричные элементы можно разложить по произведениям их значений в экстремальной области мощности r_0 (r_0 — кратность НП), изофакторов, удовлетворяющих стандартным краевым значениям, и коэффициентов КГ подгруппы.

Изофакторы обоих дуальных классов для унитарных групп и второго класса для группы SO_5 (Sp_4) удалось выразить рекуррентным способом в виде соединений более простых (для групп второго ранга SU_3 и SO_5 — фундаментальных) изофакторов или линейных комбинаций. По сути дела структура этих рекуррентных выражений отражает как структуру производящих инвариантов, применяемых Шелепиным и Карасевым [24, 25], так и операции с тензорами, осуществляемые при разложении прямого произведения [34, 37].

Рекуррентные выражения для билинейных форм изофакторов унитарных групп рассматривались в [100, 114, 82]. В качестве примера рассмотрим изофакторы, приводящие прямое произведение общего α и двухстрочного $\varepsilon = [\varepsilon_1\varepsilon_2]$ НП и включающие в качестве частного случая наиболее общие изофакторы группы SU_3:

---

* Соответствующие знаки в [82] имеют обратный смысл, например, значок $+$ указывает на состояние минимального веса.

$$\sum_{\rho'} \begin{bmatrix} \alpha & \varepsilon & {}^{\rho'}\lambda \\ \alpha & \varepsilon_2 & \mu' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \varepsilon & {}_{\rho'}\lambda \\ \beta & \gamma & {}^{\bar{\rho}}\mu \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\frac{(\varepsilon_1+1)!\, \mathfrak{M}(\mu')}{(\varepsilon_1-\varepsilon_2+1)\, \mathfrak{M}(\lambda)} \right]^{1/2} \sum_{s,\, s',\, \nu} \begin{bmatrix} \varepsilon_2 & \varepsilon_1 & \varepsilon \\ s' & s & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \varepsilon_2 & \mu' \\ \beta & s' & \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu' & \varepsilon_1 & \lambda \\ \nu & s & \mu \end{bmatrix} \times$$

$$\times \langle \beta\; s'(\nu)\, s;\; \mu | \beta,\; s's(\gamma);\; {}^{\bar{\rho}}\mu \rangle. \qquad (43)$$

Не уменьшая общности, в формуле (43) мы выбрали НП α группы U_n с схемой Юнга, содержащей не более $n-1$ строк. Появившийся в левой части элемент матрицы пересвязывания НП U_n заменен по формуле (12) на специальный изофактор. В правой части появился элемент матрицы пересвязывания НП подгруппы U_{n-1}, а отдельные изофакторы вычисляются по формулам (22).

Полный набор изофакторов реализуется, когда промежуточное НП μ' меняется в области, ограниченной неравенствами

$$\sum_{i=k}^{n} \lambda_i - \sum_{i=k}^{n-1} \mu_i' \geqslant \sum_{i=k-1}^{n-1} (\mu_i' - \alpha_i) \; (k = 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1) \qquad (44)$$

в дополнение естественным условиям $\lambda_i \geqslant \mu_i' \geqslant \lambda_{i+1}$, $\alpha_{i-1} \geqslant \mu_i' \geqslant \geqslant \alpha_i$. Именно эти значения μ' появляются при разложении по литлвудовским правилам [34—37] прямого произведения НП $\lambda^* \times \varepsilon \to \to \alpha^*$, т. е. каждому значению соответствует отдельный линейно независимый производящий инвариант [24]. [«Обращение» правил Литлвуда обусловливается эффективностью для данной проблемы соотношения (12).]

С другой стороны, та же схема Юнга μ' характеризует НП подгруппы U_{n-1}, что является иллюстрацией установленного Биденхарном с сотрудниками [79, 114] (см. [115]) соответствия между индексами кратных НП в разложении прямого произведения и базисными характеристиками одного из НП.

Частный случай (43) (см. [100, 82]), так же как и соответствующие формулы, полученные интегрированием по группе [20] или с помощью проекционных операторов [31, 32], дает выражения для неортонормированных изофакторов группы SU_3, содержащие по шести сумм. Но для выделения из (43) ортонормированных изофакторов наиболее удобная формула следует из (25) и (12):

$$\sum_{\rho} \begin{bmatrix} \alpha & \varepsilon & {}_{\rho}\lambda \\ \alpha & \varepsilon_2 & \mu' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \varepsilon & {}^{\rho}\lambda \\ \alpha & \varepsilon_2 & \mu \end{bmatrix} = W_{n(n)} \left(\begin{matrix} \mu_{1,\,0} & \mu'_{1,\,0} \\ \alpha_{1,\,0} & \lambda_{0,\,-1} \end{matrix} \middle| f_{s2} \right), \qquad (45)$$

где

$$f_{s2}(\sigma) = (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n-1} \mu_i} \frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)!\,(\varepsilon_1+1)!}{\mathfrak{M}(\lambda)} \; \frac{\left[\sum\limits_{i=1}^{n-1} (\mu_i - \sigma_i)\right]! \prod\limits_{i=1}^{n-1} (\sigma_i - i + n - 1)!}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n-1} (\mu_i - \sigma_i) + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 1\right]!}.$$

Общие рекуррентные выражения для билинейных форм изофакторов унитарных групп приведены в [114], где тем самым установлено соответствие индексов кратных НП, сопоставляемых с производящими инвариантами [24, 25], индексам, появляющимся при построении коэффициентов КГ при интегрировании по группе [20].

Изофакторы унитарных групп, удовлетворяющие краевым условиям, наиболее элементарно выражаются в следующем виде ($\alpha_n = 0$):

$$\begin{bmatrix} \alpha & [\gamma, 0, -q] & {}^{\rho,+,+}[\lambda, -h] \\ \beta & [\delta, -r] & {}_{\bar\rho,+,+}\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\,[\dot 0, -q] & [\beta', -h] \\ \beta' \ 0 & \beta' \end{bmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \sum_{\bar\rho', \delta', r', \bar\gamma} \begin{bmatrix} \alpha\,[\dot 0, -q] & [\beta', -h] \\ \beta\,[\dot 0, -r'] & \delta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\beta', -h] & \gamma & {}^{\rho',+,+}[\lambda, -h] \\ \delta' & \bar\gamma & {}_{\bar\rho',+,+}\mu \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \gamma\,[\dot 0, -q] & [\gamma, 0, -q] \\ \bar\gamma\,[\dot 0, -r'] & [\delta, -r] \end{bmatrix} \langle \beta\,[\dot 0, -r']\,(\delta')\,\bar\gamma;\ {}^{\bar\rho',+,+}\mu \,|$$

$$\beta,\ \bar\gamma\,[\dot 0, -r']\,([\delta, -r]);\ {}_{\bar\rho,+,+}\mu\rangle. \tag{46}$$

(Частный случай этой формулы для SU_3 получен в [82].) Некоторые НП в данном случае более удобно обозначать как смешанные тензоры. Формула (46) применима, пока $h \geqslant 0$. Почти все изофакторы в правой части с учетом свойств симметрии выражаются по формулам (22), кроме одного, который после трансляции параметров в область ковариантных НП заменяется по формуле (12) элементом матрицы пересвязывания НП подгруппы U_{n-1}. Индекс ρ однозначно коррелирован с значениями, принимаемыми параметрами НП β' и индексом вспомогательного изофактора ρ'.

Выбрав в формуле (46) $\mu = \lambda$, удается показать, что специальный случай изофактора U_n пропорционален элементу матрицы пересвязывания НП U_{n-1} (в частности, специальный изофактор SU_3 — $6j$-коэффициенту SU_2 — см. [82]):

$$\begin{bmatrix} \alpha\,[\gamma, 0, -q] & {}^{\rho,+,+}[\lambda, -h] \\ \beta\,[\delta, -r] & {}_{\bar\rho,+,+}\lambda \end{bmatrix} = (-1)^{r'} \left[\frac{(q-r)!\, d_{n-1}(\beta)}{q!} \times \right.$$

$$\left. \times \prod_{j=1}^{n-1} \frac{(\delta_j+q+n-1-j)!}{(\gamma_j+q+n-1-j)!} \right]^{1/2} \frac{S_{n,\,n-1}(\alpha;\ \beta')}{S_{n,\,n-1}(\alpha;\ \beta)\, S_{n-1,\,n-1}(\beta;\ \beta')} \times$$

$$\times \langle \beta\,[\dot 0, -r']\,(\beta')\,\gamma;\ {}^{\rho',+,+}\lambda \,|\, \beta,\ \gamma\,[\dot 0, -r']\,([\delta, -r]);\ {}_{\bar\rho,+,+}\lambda\rangle, \tag{47}$$

где $r' = \sum_{i=1}^{n-1} (\beta_i - \beta_i') = q - h + \sum_{i=1}^{n-1} (\beta_i - \alpha_i)$. В частности, формула (47) превращается в

$$\delta_{\bar{\rho}\rho'}\delta_{\beta\beta'},$$

когда НП $[\delta, -r]$ максимально, т. е. $\delta = \gamma$, $r = 0$. Тем самым убеждаемся, что формулы (46) и (47) удовлетворяют краевым условиям, связанным с (42) определенной перестановкой параметров. Формула (47) применима не только в области $h \geqslant 0$, но и в области $\lambda_{n-1} + q \geqslant \alpha_1$. Величина (47) имеет определенный смысл и в области $h < 0$, $\lambda_{n-1} + q < \alpha_1$, в которой ее можно назвать псевдоизофактором. Псевдоизофактор является коэффициентом разложения изофакторов по их краевым значениям в области более мощной, чем кратность НП в области r_0. Псевдоизофакторы не играют самостоятельной роли в исчислении ВР (например, их нельзя ортонормировать), но ими можно пользоваться в обобщенной теореме Вигнера — Эккарта, если известны граничные значения матричных элементов во всей гиперплоскости краевых базисных характеристик, а не только в ее минимальной области мощности r_0, выделенной обсужденными выше условиями типа (44). Для того чтобы разложить изофакторы по псевдоизофакторам, необходимо найти граничные значения изофакторов в упомянутой гиперплоскости из других соображений. Например, более общие, чем (41), билинейные формы изофакторов можно строить и следующим способом. Первый набор изофакторов типа (41) берется переполненным. Тогда вместо дуальных изофакторов берутся псевдоизофакторы, и попарные произведения обеих величин суммируются по всей гиперплоскости граничных значений, накрывающей подобласть, изоморфную области индексов ρ. Отметим, что проблема уточнения краевых условий довольно обычна для задач аналитического продолжения функций ВР, удовлетворяющих краевым условиям.

В случае SU_3 соответствующие граничные изофакторы найдены (см. [82, 117]) с использованием их свойств симметрии. Преобразование в пространстве индексов ρ треугольными матрицами позволяет свести соответствующие краевые изофакторы в стандартный [типа (42)] вид и найти остальные (т. е. зависимые) краевые значения [117]. Вообще целесообразно выбрать такой тип (из шести возможных вариантов) краевых условий, чтобы мощность соответствующей граничной гиперплоскости совпала с r_0 или минимально ее превышала. К сожалению, уже для SU_4 не всегда возможен такой выбор краевых условий, позволяющий пользоваться преобразованной с использованием свойств симметрии изофакторов формулой (46). В таком случае приходится пользоваться соединениями изофакторов других типов. Полученные выражения довольно громоздкие, поэтому отметим, что проблема не появляется, пока одно из НП группы U_n принадлежит классу 1, $\bar{1}$, например, в формуле (46) $\gamma = p$ (этот случай с учетом симметрий также покрывает все изофакторы группы SU_3). Формула (26) позволяет записать выражение для матриц перекрытия изофакторов такого типа (ср. SU_3 случай [117]):

$$\sum_{\beta,\,\bar{p},\,\bar{q},\,\bar{\rho}} \begin{bmatrix} \alpha\,[p,\,\dot{0},\,-q] & {}^{\beta',+,+}\lambda \\ \beta\,[\bar{p},\,\dot{0},\,-q] & {}_{\bar{\rho}}\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha\,[p,\,\dot{0},\,-q] & {}^{\mu',+,+}\lambda \\ \beta\,[\bar{p},\,0,\,-\bar{q}] & {}^{\bar{\rho}}\mu \end{bmatrix} = W_{n(n)}\left(\begin{matrix}\alpha_{0,0} & \lambda_{1,0} \\ \beta'_{1,0} & \mu'_{1,0}\end{matrix}\,\middle|\, f_{m2}\right), \tag{48}$$

где

$$f_{m2}(\sigma) = (-1)^{q+\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i-\lambda_n} \frac{[d_{n-1}(\beta')\,d_{n-1}(\mu')]^{1/2}}{q!\,(p+q+n-2)!} \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i-\lambda_n+n-i)! \times$$

$$\times \frac{z!\,(p+q+n-2-z)!}{\prod\limits_{i=1}^{n-1}(\sigma_i-\lambda_n+n-i)!}, \quad z=\sum_{i=1}^{n-1}(\sigma_i-\mu'_i).$$

Формула (48) применима, пока $\alpha_n \geqslant \lambda_n$.

Наконец, применяя операторы типа (16) (ср. SU_3 случай [117]), получаем рекуррентное выражение другого класса для наиболее общих изофакторов группы U_n

$$\begin{bmatrix} \alpha & \gamma & {}^{\rho}\lambda \\ \beta & \delta & {}_{\bar{\rho}}\mu \end{bmatrix} = \left\langle \begin{matrix}\lambda \\ \mu_{\text{макс}}\end{matrix} \right\| E_{n-1,\,n}^{\;p+q} \left\| \begin{matrix}\lambda \\ \mu\end{matrix} \right\rangle^{-1} \times$$

$$\times \sum_{\beta',\,\delta',\,\bar{\rho}'} \frac{(p+q)!}{p!\,q!} \left\langle \begin{matrix}\alpha \\ \beta'\end{matrix} \right\| E_{n-1,\,n}^{\;p} \left\| \begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix}\gamma \\ \delta'\end{matrix} \right\| E_{n-1,\,n}^{\;q} \left\| \begin{matrix}\gamma \\ \delta\end{matrix} \right\rangle \times$$

$$\times \langle \beta\delta\,({}_{\bar{\rho}}\mu);\; pq\,(p+q);\; \mu_{\text{макс}} | \beta p\,(\beta');\; \delta q\,(\delta');\; {}^{\bar{\rho}'}\mu_{\text{макс}}\rangle \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & {}^{\rho}\lambda \\ \beta' & \delta' & {}_{\bar{\rho}'}\mu_{\text{макс}} \end{bmatrix}, \tag{49}$$

где $p=\sum\limits_{i=1}^{n-1}(\beta'_i-\beta_i)$; $q=\sum\limits_{i=1}^{n-1}(\delta'_i-\delta_i)$; $p+q=\sum\limits_{i=1}^{n-1}(\lambda_i-\mu_i)$.

В правой части (49) появился элемент матрицы пересвязывания НП подгруппы U_{n-1}. Специальный изофактор в правой части можно вычислять по формуле (47) или любым другим способом.

Таким путем в рамках алгебры Вигнера — Рака подгруппы U_{n-1} любой изофактор группы U_n можно разложить по их значениям в определенной граничной гиперплоскости. Отметим, что в [32] начата реализация аналогичной программы для билинейных форм изофакторов.

Хотя для изофакторов SU_3 как формула (46), так и объединение формул (49) и (47) также имеют по шесть сумм, эти выражения имеют преимущества перед (43) и другими упомянутыми выражениями для билинейных форм изофакторов. Например, их частные случаи, необходимые при построении изофакторов неканонического проекционного базиса, имеют значительно более простой вид (см. [82]).

Полные системы изофакторов группы $SO_5(Sp_4)$ представлены [118] в виде соединений трех просто приводящих изофакторов, осуществляющих попарные векторные сложения вспомогательных НП $\langle k_1\lambda_1\rangle$, $\langle k_2\lambda_2\rangle$ и $\langle k_3\lambda_3\rangle$ и $6j$-коэффициентов подгрупп SU_2. Выражение, эквивалентное найденному в [119], получено при выборе вспомогательных полурастяженных изофакторов первого рода; второе выражение получено, когда вспомогательные изофакторы — полурастяженные изофакторы второго рода. Доказывается, что полные системы изофакторов выделяются при выборе хоть одного вспомогательного изофактора растяженного или (в случае выражений второго типа, если $\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3$ не целое число) ближайшего к нему полурастяженного изофактора первого рода.

Изофакторы, удовлетворяющие краевым условиям, разлагаются с помощью треугольных матриц (см. [120]) по каждой из упомянутых полных систем изофакторов. Граничная область базисных характеристик имеет вид, не полностью аналогичный с случаем унитарных групп, а выделяется в гиперплоскости

$$I_1 + J_1 = K_1 + \Lambda_1,\ I_2 + J_2 = K_2 + \Lambda_2,\ I_3 + J_3 = K_3 + \Lambda_3$$

и коррелируется с областью изменения параметров s_1, s_2, s_3, которые используются при нахождении кратности НП $\langle K_3\Lambda_3\rangle$ в разложении $\langle K_1\Lambda_1\rangle \times \langle K_2\Lambda_2\rangle$. Эта кратность равна числу целочисленных решений системы шести неравенств

$$\left\{\begin{array}{l} s_j - s_i \leqslant K_l - \Lambda_l + K_i - \Lambda_i - K_j + \Lambda_j; \\ s_j + s_l - s_i \leqslant 2\Lambda_j + 2\Lambda_l - 2\Lambda_i \end{array}\right. \tag{50}$$

($s_1 \geqslant 0$, $s_2 \geqslant 0$, $s_3 \geqslant 0$; i, j, l — перестановки чисел 1, 2, 3) при дополнительных условиях целочисленности $\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 - \frac{1}{2}(s_1 + s_2 + s_3)$ и равенстве 0 хотя бы одного среди чисел s_1, s_2, s_3.

4. ДУАЛЬНЫЕ НЕКАНОНИЧЕСКИЕ БАЗИСЫ

В физических приложениях теории представлений групп Ли, особенно в теории атомного ядра, важное место занимает проблема построения неканонических базисов представлений, соответствующих сужениям типа $SU_3 \supset SO_3$, $SU_n \supset SO_n$, $U_n \supset O_n$ (модель унитарной схемы), $SU_4 \supset SU_2 \times SU_2$ (супермультиплетная модель), $Sp_4 \supset U_2$ (модель пятимерного квазиспина), $SO_5 \supset SO_3$ (описание квадрупольных возбуждений), $SO_7 \supset G_2 \supset SO_3$ (классификация состояний f-оболочки), и нахождения матричных элементов разных операторов в этих базисах. Как уже отмечалось, соответствующие методы разрабатывались сначала для $SU_3 \supset SO_3$ (см. обзоры [21, 81]). Разные типы базисов, каждому из которых соответствуют разные способы выделения кратных НП подгруппы, т. е. различные дополнительные характеристики базисных состояний, позволяют более или менее просто описать различные модельные взаимодействия (ср. [121, 122] и [123—126]).

Выявить определенную систему во всем разнообразии неканонических базисов, найти коэффициенты разложения по неортогональным системам функций, а также упростить построение инвариантов групп и другие операции алгебр Вигнера — Рака позволяет концепция биортогональных систем.

Биортогональную систему образуют два полных набора дуальных функций неканонического базиса a^{ω}, $b_{\omega'}$, характеризуемых одним и тем же чисто групповым набором индексов (т. е. НП группы и ее подгруппы) и удовлетворяющих условию

$$\langle a^{\omega} | b_{\omega'} \rangle = \delta_{\omega\omega'}, \tag{51}$$

где число значений, пробегаемых индексами ω и ω', равно кратности НП подгруппы. Тогда любую функцию из этого же подпространства можно разложить в следующем виде:

$$f = \sum_{\omega'} \langle b_{\omega'} | f \rangle a^{\omega} = \sum_{\omega} \langle a^{\omega} | f \rangle \, b_{\omega}. \tag{52}$$

Легко видеть, что матричные элементы в дуальных базисах связаны соотношениями эрмитового сопряжения.

Отсюда видно, что метрический тензор первого базиса совпадает с матрицей перекрытия второго (дуального) базиса. При наличии функций обоих дуальных базисов инварианты (скаляры) группы строятся элементарно, привлекая операцию комплексного сопряжения (контрагредиентности)

$$\sum_{\omega\mu} |a^{\omega}_{\mu}\rangle^{*} \, |b_{\omega\mu}\rangle, \tag{53}$$

где μ — набор чисто групповых базисных характеристик состояний данного НП группы.

Применение дуальных базисов целесообразно при решении задач на собственные значения тензорных операторов, действующих на неортонормированные базисные функции. Если применяются матричные элементы оператора между функциями одного и того же базиса, то приходится решать обобщенное вековое уравнение с учетом интегралов перекрытий [см., например, [122], формулы (5.2) — (5.5)]. Обычное вековое уравнение появляется, когда оператор представлен разложением по функциям того же базиса, на который он действует. В этой ситуации может быть использована формула (52).

В [81] показано, что дуальные базисы имеются среди известных реализаций неканонического базиса для цепочки $SU_3 \supset SO_3$. Напомним основные свойства этих реализаций.

Проекционный базис, для $SU_3 \supset SO_3$ впервые построенный Эллиотом [1], характеризуется «скрытой» проекцией момента K, связанной своим происхождением с частного вида функциями канонического базиса. Для $SU_4 \supset SU_2 \times SU_2$ проекционный базис впервые построен Драйером [127]. Простейший способ построения проекционного базиса для $SU_3 \supset SO_3$ разработан Ашеровой и Смирновым [121, 122], использовавшими проекционные операторы подалгебры SO_3 в форме [91, 92]. Далее этот метод был развит для $Sp_4 \supset U_2$ [78, 128], для $SU_4 \supset SU_2 \times SU_2$ [129—131] и для $SO_5 \supset SO_3$ [132]. Выражения для коэффициентов разложения проекционных базисов по функциям канонических базисов и интегралов перекрытия упрощены при использовании матричных элементов степеней генераторов групп и методов преобразования стандартных сумм [77, 78, 81, 129, 131].

Одно из преимуществ проекционных базисов состоит в том, что на основе перестановочных соотношений между проекционными и тензорными операторами (в наиболее общем виде сформулированных в [32]) довольно элегантно записывается действие генераторов групп (см. [1, 122, 128, 130]). Например, в случае $SU_3 \supset SO_3$ получаем несколько более простое, чем в [10, 122], разложение

$$Q_m \left| \begin{matrix} (\lambda\mu)_{E^+} \\ KLM \end{matrix} \right\rangle = \sum_{L',\, K',\, n} \frac{2L+1}{2L'+1} \begin{bmatrix} L & 2 & L' \\ M & m & M' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & 2 & L' \\ K & n & K' \end{bmatrix} \times$$

$$\times\, b^{(\lambda\mu)}_{LK;\, L'K'} \left| \begin{matrix} (\lambda\mu)_{E^+} \\ K'L'M' \end{matrix} \right\rangle, \tag{54}$$

где

$$b^{(\lambda\mu)}_{LK;\, L'K'} = \delta_{KK'} \frac{1}{\sqrt{6}} \left[2\lambda + \mu + 3 + \frac{1}{2} (L' - L)(L' + L + 1) \right] -$$

$$- \delta_{K',\, K+2} \frac{1}{4} [(\mu - K)(\mu + K + 2)]^{1/2} -$$

$$- \delta_{K',\, K-2} \frac{1}{4} [(\mu + K)(\mu - K + 2)]^{1/2}.$$

(В этом разделе НП групп SU_n обозначаем разностями длин схем Юнга.)

Далее, для построения изофакторов, осуществляющих векторное сложение функций неканонического (необязательно проекционного) базиса в функции проекционного базиса (см. [81, 121, 127, 133]), достаточно использовать довольно простые частные случаи изофакторов канонического базиса (в том числе представленные в разд. 3 настоящей работы). Например, в [75] найдены изофакторы для цепочки $SU_4 \supset SU_2 \times SU_2$, приводящие прямое произведение двух симметричных НП: выражение для них в [66] упрощено до трехкратной суммы. Соотношение (6а) позволяет эту формулу использовать также для вычисления аналогичных изофакторов цепочки $SU_n \supset SO_n$; в частности, при $n = 3$ получено (с точностью до нормировки) выражение для изофактора базиса Эллиота E^- * и тем самым показана взаимосвязь классификации кратных НП подгрупп SO_n в НП класса 2 групп SU_n.

Характерные осложнения следуют из переполненности проекционных базисов. Так, при действии на базис генераторами группы появляются и линейно зависимые функции. Один из методов разложения избыточных функций основан на использовании перестановочных соотношений степеней генераторов [10, 128, 130, 132], но на наш взгляд более универсален метод, основанный на использовании вспомогательного (так называемого растяженного) базиса.

Растяженный базис для $SU_3 \supset SO_3$ и $SU_4 \supset SU_2 \times SU_2$ предложен Шарпом и сотрудниками [134, 135]. Растяженный базис НП $SU_3 \supset SO_3$ (ср. [81]) строится путем векторного сложения нормированных симметричных ковариантного и контравариантного тензоров с помощью коэффициентов КГ подгруппы SO_3 и изофакторов, удовлетворяющих краевым условиям

$$\begin{bmatrix} (\lambda 0) & (0\mu) & (\lambda\mu)_S \\ l_1 & l_2 & (l_{10}l_{20})L \end{bmatrix} = \delta_{l_1 l_{10}} (l_{10} + l_{20} = L + \delta) \qquad (55)$$

в области $l_1 + l_2 = L + \delta$ ($\delta = 0$ или $1, \lambda + \mu - L - \delta = 0 \bmod 2$). Эти изофакторы оказались пропорциональными коэффициентам КГ группы SU_2 с кратными 1/4 параметрами (формула (3.7) [81]), что получило естественное объяснение (см. [125]) на основе соотношения (66) и построений растяженного базиса для $SU_4 \supset SU_2 \times SU_2$. Специальные изофакторы, приводящие прямое произведение НП $(\lambda 00) \times (00\mu) \to (\lambda 0\mu)$, в случае последней цепочки пропорциональны коэффициентам КГ группы SU_2 [75] и принимают краевые значения в области параметров $j_1 + j_2 = S \geqslant T$, пропорциональные $\delta_{j_1 j_{10}}$ $(j_{10} + j_{20} = S = K_S,\ j_{10} - j_{20} = K_T)$. Поэтому функции супермультиплетных проекционного (пронумерованного параметрами $K_S = S,\ K_T$) и растяженного (пронумерованного параметрами j_{10}, j_{20}) базисов НП класса 1, $\bar{1}$ группы SU_4 отличаются только нормировкой. Исходя из этого в [75] найдены изофакторы супермультиплетного базиса SU_4, приводящие прямое произведение НП $(\lambda + q_1, 0, 0) \times (0, 0, \mu + q) \to (\lambda, 0, \mu)$, и наиболее общее выражение для них в [77] упрощено до трехкратных сумм. Тем самым получены наиболее простые выражения для изофакторов такого же типа, соответствующих сужению $SU_n \supset SO_n$.

Граничные значения определенных изофакторов проекционного базиса являются коэффициентами разложения функций проекционного базиса наиболее общих НП по функциям растяженного базиса

* Напоминаем, что существуют два варианта проекционного базиса как для $SU_3 \supset SO_3$, так и для $SU_4 \supset SU_2 \times SU_2$, соответствующие ковариантным и контравариантным тензорам (см. [1, 81, 127]).

и образуют треугольные матрицы. В [134] (см. [21, 81]) для $SU_3 \supset SO_3$ и в [130] для $SU_4 \supset SU_2 \times SU_2$ удалось найти также обратные матрицы, т. е. разложить растяженный базис по полному набору функций проекционного базиса. Тем самым решена проблема разложения избыточных проекционных функций.

Для того чтобы понять место растяженного базиса среди других неканонических базисов, приведем альтернативное определение полиномиального базиса.

Полиномиальный базис для $SU_3 \supset SO_3$ предложен Бергманом и Мошинским [2] (см. также [21, 62, 123, 136]). Наиболее известен способ построения базисов этого типа в виде произведений элементарных блоков. Этим способом непосредственно удается получить базисные состояния некоторого НП группы U_n, которые являются состояниями старшего веса определенного НП подгруппы G' (например, SO_n или SO_3). Так, в [137] этим способом строятся базисы НП класса 1 для цепочки $SO_5 \supset SO_3$, а в [138] — для симметричных НП группы SU_6, суженной до максимальной подгруппы SU_3, которая оставляет неприводимым шестимерное НП группы SU_6.

При желании найти полиномиальные функции НП более длинной цепочки $U_n \supset G' \supset G''$ можно пользоваться операторами понижения веса и проекционными операторами подгруппы G'', но в ряде случаев целесообразно применять альтернативное построение полиномиального базиса, предложенное для $SU_3 \supset SO_3$ в [81].

Возьмем специальные матричные элементы конечных преобразований некоторой подгруппы общей линейной группы. Первые индексы пусть соответствуют состояниям старшего веса канонического базиса, а вторые нумеруются НП некоторой неканонической цепочки подгрупп. Произведения таких матричных элементов образуют базис НП группы, старший вес которого равен сумме старших весов множителей. Если осуществить векторное сложение коэффициентами КГ подгруппы (для состояний веса, старшего относительно подгруппы, эта операция тривиальна), то полученные состояния будут иметь соответствующие базисные характеристики. Таким путем в случае $SU_3 \supset SO_3$ получаем

$$D^{(\lambda\mu)}_{\text{макс},\,(l_{10}l_{20})LM}(g) = \sum_{\omega} \begin{bmatrix} (\lambda 0) & (0\mu) & (\lambda\mu) \\ l_{10} & l_{20} & \omega L \end{bmatrix} D^{(\lambda\mu)}_{\text{макс},\,\omega LM}(g) =$$

$$= \sum_{m_1, m_2} \begin{bmatrix} l_{10} & l_{20} & L \\ m_1 & m_2 & M \end{bmatrix} D^{(\lambda 0)}_{\text{макс},\,l_{10}m_1}(g)\, D^{(0\mu)}_{\text{макс},\,l_{20}m_2}(g). \qquad (56)$$

Линейно независимыми среди (56) являются функции, для которых параметры l_{10}, l_{20} удовлетворяют условию $l_{10}+l_{20}=L+\delta$. Легко видеть, что изофакторы, удовлетворяющие условию (55), и являются коэффициентами разложения избыточных функций типа (56). Формула (56) позволяет также записать коэффициенты разложения нашего варианта полиномиального базиса (отличающегося от предложенного в [2] простым множителем) по функциям канонического базиса

$$\left\langle \begin{matrix}(\lambda\mu)_B \\ (l_{10}l_{20})\,LM\end{matrix} \middle| \begin{matrix}(\lambda\mu) \\ YI\frac{1}{2}M\end{matrix} \right\rangle = \sum_{\substack{m_1+m_2=M \\ i_2-i_1=\mathrm{const}}} \begin{bmatrix} l_{10} & l_{20} & L \\ m_1 & m_2 & M \end{bmatrix} \times$$

$$\times \left\langle \begin{matrix}(\lambda 0) \\ l_{10}m_1\end{matrix} \middle| \begin{matrix}(\lambda 0) \\ i_1,\ \frac{1}{2}m_1\end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix}(0\mu) \\ l_{20}m_2\end{matrix} \middle| \begin{matrix}(0\mu) \\ i_2,\ \frac{1}{2}m_2\end{matrix} \right\rangle \times$$

$$\times \begin{bmatrix} (\lambda 0) & (0\mu) & (\lambda\mu) \\ y_1 i_1 & y_2 i_2 & YI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & I \\ \frac{1}{2}m_1 & \frac{1}{2}m_2 & \frac{1}{2}M \end{bmatrix}. \qquad (57)$$

Полученная величина совпадает с коэффициентом разложения функций канонического базиса по функциям растяженного базиса (см. [21]). Таким образом убеждаемся, что растяженный и полиномиальный базисы можно получить взаимно обратными преобразованиями ортонормированного базиса, т. е. эти базисы дуальны. Коэффициенты разложения функций полиномиального базиса по функциям растяженного базиса являются интегралами перекрытия полиномиального базиса и выражаются в виде билинейных форм специальных изофакторов.

Базис, эквивалентный полиномиальному, также может быть представлен в виде линейных комбинаций ортонормированных функций с специальными изофакторами в качестве коэффициентов. Например, для построения могут быть использованы специальные изофакторы (см. [81])

$$\sum_{\omega} \begin{bmatrix} (\lambda+\mu,\ 0) & (\mu 0) & \lambda\mu \\ l_1 & l_2 & \omega L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\lambda 0) & (0\mu) & (\lambda\mu) \\ l_{10} & l_{20} & \omega L \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\frac{(\lambda+1)(\mu+1)(2l_{20}+1)(2l_1+1)}{\lambda+\mu+1}\right]^{\frac{1}{2}} \sum_{l'} (-1)^{l'+l_2+l_{10}+L} \begin{Bmatrix} L & l_2 & l_1 \\ l' & l_{10} & l_{20} \end{Bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} (\mu 0) & (\mu 0) & (0\mu) \\ l' & l_2 & l_{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\lambda 0) & (\mu 0) & (\lambda+\mu,\ 0) \\ l_{10} & l' & l_1 \end{bmatrix}. \qquad (58)$$

Формула (58) (как и ее обобщение для $SU_4 \supset SU_2 \times SU_2$ (3.6) работы [75]) следует из единичности определенной матрицы пересвязывания НП SU_3 (соответственно, SU_4). Частные случаи (58) при $l_1 + \Delta = L + l_2$ ($\Delta = 0$ или 1, $\lambda - L - \Delta = 0 \bmod 2$), которые после довольно утомительных преобразований удалось выразить без суммы (см. [81]), образуют треугольную матрицу и являются коэффициентами разложения проекционного базиса, введенного в [21].

Антирастяженный базис (см. [21, 81]) строится с помощью изофакторов, осуществляющих векторное сложение базисов симметричных

НП $(\lambda+\mu,\ 0)$ и $(\mu 0)$ и удовлетворяющих специальным граничным условиям. Использование этого базиса и его контрварианта позволило найти значительно более простые выражения для интегралов перекрытия основных базисов [81, 76].

Изофакторы (для определенных значений параметров псевдоизофакторы — см. разд. 3) антирастяженного базиса получены в [81] путем аналитического продолжения изофакторов растяженного базиса. Использование их и вышеупомянутой граничной билинейной формы (58) позволило представить ту же билинейную форму (58) в более удобном для аналитических преобразований виде. Дальнейшее применение к ней подстановок параметров НП групп SU_3 и SO_3 при использовании формул преобразования и суммирования обобщенных гипергеометрических функций единичного аргумента позволило найти оптимальные выражения для некоторых других коэффициентов взаимного разложения, имеющих смысл билинейных форм изофакторов, и в конечном счете вывести существенно более простые выражения в виде двукратных сумм для матриц перекрытия и метрических тензоров растяженного и полиномиального базисов (см. [77, 81, 125]).

В [76] эффективным оказалось формальное представление интеграла перекрытия проекционного базиса в виде

$$\left\langle \begin{matrix} E^- \\ K \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E^- \\ K' \end{matrix} \right\rangle = \sum_{\bar{l}_1,\, l_{10}} \left\langle \begin{matrix} E^- \\ K \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \bar{A}^+ \\ \bar{l}_1 \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} A^+ \\ \bar{l}_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} S \\ l_{10} \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} B \\ l_{10} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E^- \\ K' \end{matrix} \right\rangle, \tag{59}$$

где $\bar{A}^+$, A^+ и S, B — пары дуальных базисов. Каждая из трех сумм в (59) (одна из них содержится в интеграле перекрытий $\langle E^- \mid \bar{A}^+ \rangle$ — см. [76]) содержит не больше членов, чем кратность НП группы. Интересно, что входящие в (59) блоки проще найти для НП класса 2 группы SU_4 и продолжить полученное выражение для $SU_n \supset SO_n$.

Следует отметить, что проекционные и полиномиальные базисы для дополнительных групп меняются местами. Так, путем аналитического продолжения матричных элементов проекционных операторов пятимерного квазиспина (т. е. подгруппы U_2, вложенной в группу Sp_4 — см. [78, 128]) в [75] найдены выражения для билинейных форм специальных изофакторов $SU_4 \supset SU_2 \times SU_2$ и $SU_n \supset SO_n$. В [75] также показано, что полиномиальные базисы для $SU_n \supset SO_n$ можно строить с помощью проекционных операторов дополнительной группы *. С другой стороны, в [78] показано, что коэффициенты разложения дуального к проекционному базиса пятимерного квазиспина

---

* Следует отметить, что проекционные операторы алгебры дополнительной группы подгруппы SO_n целесообразно применять вместо утомительной замены простых операторов рождения бозонов операторами нулевого следа при построении полиномиального базиса в случае цепочки типа $SU_n \supset SO_n \supset G''$ (ср. $SU_5 \supset SO_5 \supset SO_3$ случай [137]), так как эти проекционные операторы не зависят от базисных характеристик данного НП подгруппы SO_n и их не меняют.

можно найти аналитическим продолжением по формуле (7) растяженных изофакторов группы $SU_4 \supset SU_2 \times SU_2$, полученных в [77]. Само выражение в этом случае оказалось значительно проще, чем в случае проекционного базиса.

Общие принципы построения дуальных базисов можно сформулировать следующим образом. Рассматриваются интегралы перекрытия между различными реализациями неканонических базисов, обычно имеющие смысл граничных значений билинейных форм трансформационных коэффициентов. Если эти интегралы образуют треугольную матрицу, обычно удается найти явный вид и обратной матрицы, которая позволяет разложить функции базиса, дуального к одному из базисов, по базисным функциям второго из рассмотренных базисов.

Так, интегралы перекрытия между проекционными и полиномиальными базисами эквивалентны как вышеупомянутым граничным значениям изофакторов проекционного базиса, так и частным значениям коэффициентов разложения полиномиального базиса по функциям канонического базиса (для $SU_3 \supset SO_3$, представленных формулой (57), — см. [81]).

Аналитический вид матриц, обратных треугольным, обычно легко найти, если индекс ρ одномерен (см. [81, 82]) *. Автором рассмотрено также несколько примеров биортогональных систем с двумерными индексами кратных НП [120, 130]. Так, при исследовании базисов НП $SU_4 \supset SU_2 \times SU_2$ [130] использована биортогональная система, образованная коэффициентами КГ группы SU_2 и их определенными перенормированными аналитическими продолжениями, характерными для $SU(1,1)$. Вообще, методы аналитического продолжения, полезные при исследовании дуальных базисов, не исчерпываются изложенными в настоящем обзоре.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем обзоре мы ознакомились с некоторыми до определенной степени завершенными результатами исчисления Вигнера — Рака не просто приводимых компактных групп Ли. В последние годы удалось значительно продвинуться в исследовании взаимных связей пространств представлений любых представлений групп второго и третьего рангов, а также пространств однопараметрических и двухпараметрических НП компактных групп Ли. Решенным в аналитическом (и довольно часто в оптимальном) виде задачам характерны одномерные или двумерные пространства индексов кратных НП. В связи с приложениями к теории ядра очень актуальны исследования пространств представлений трехпараметрических НП. Для дальнейшего продвижения в этой области, возможно, будут полезны следующие эмпирические положения:

1. Принцип асимметрии. Оптимальные (содержащие наименьшее число сумм, наименьшее число членов в этих суммах) выражения

* В частности, взаимно обратные соотношения рассматриваются в [139].

для трансформационных коэффициентов (за исключением фундаментальных изофакторов и некоторых других функций ВР унитарных групп), как правило, не отражают симметрии этих величин. Индексы кратных НП также обычно не обладают возможной максимальной симметрией изофакторов или других трансформационных коэффициентов.

2. Принцип сохранения трудностей. Упрощение алгоритмов для вычисления функций ВР, удовлетворяющих краевым условиям, обычно связано с невозможностью единых алгоритмов для всех значений параметров как самой функции ВР, так и интегралов перекрытия, тогда как билинейные формы функций ВР и их частные случаи, представляющие собой интегралы перекрытия, можно вычислять по единому, хотя и более сложному алгоритму. Например, выражения для интегралов перекрытия изофакторов первого (разностного) типа с появлением параметров, характерных для псевдоизофакторов, расходятся, что связано с вырождением матрицы перекрытия дуальных изофакторов.

Из этих принципов следует важность учета и обычных свойств симметрии трансформационных коэффициентов.

Мы не коснулись таких методов и проблем исчисления Вигнера — Рака высших групп, как графические методы представления сложных трансформационных коэффициентов (матриц пересвязывания и матриц преобразования схем сужения на подгруппах), построение разных полных наборов операторов, позволяющих разделить кратные НП. Большой интерес представляют также вопросы об асимптотике функций Вигнера — Рака для больших значений параметров НП и рангов групп, о месте полученных результатов в теории специальных функций и о возможностях аналитического продолжения и обобщения этих результатов для НП основных (непрерывных) серий некомпактных групп.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Elliot J. P.**— Proc. Roy. Soc. A, 1958, v. 245, p. 128, 562; **Elliot J. P., Harvey M.**— Ibid., 1962, v. 272, p. 557.

2. **Bargman V., Moshinsky M.**— Nucl. Phys., 1960, v. 18, p. 679; 1961, v. 23, p. 177.

3. **Kretschmar M.**— Z. Phys., 1960, Bd 157, S. 433; Bd 158, S. 284.

4. **Неудачин В. Г., Смирнов Ю. Ф.** Нуклонные ассоциации в легких ядрах. М.: Наука, 1969.

5. **Ванагас В. В.** Алгебраические методы в теории ядра. Вильнюс: Минтис, 1971.

6. **Сурков Е. Л.**— Ядерная физика, 1967, т. 5, с. 908.

7. **Петраускас А. К., Янкаускас К. И., Ванагас В. В.**— Там же, 1971, т. 14, с. 4.

8. **Дзюблик А. Я.** Препринт ИТФ-71-122Р, Киев, 1971; **Дзюблик А. Я., Овчаренко В. И., Стешенко А. И., Филиппов Г. Ф.**— Ядерная физика, 1972, т. 15, с. 869.

9. **Ванагас В. В., Калинаускас Р. К.**— Там же, 1973, т. 18, с. 4; **Ванагас В. В.** — Там же, 1976, т. 23, с. 950.

10. **Филиппов Г. Ф., Овчаренко В. И., Смирнов Ю. Ф.** Микроскопическая теория коллективных возбуждений атомных ядер. Киев: Наукова думка, 1981.
11. **Ванагас В. В.**— ЭЧАЯ, 1976, т. 7, 309; 1980, т. 11, с. 454.
12. **Переломов А. М.**— УФН, 1977, т. 123, с. 23; Commun. Math. Phys., 1972, v. 26, p. 222.
13. **Малькин И. А., Манько В. И.** Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М.: Наука, 1979.
14. **Gell-Mann M., Ramond P., Slansky K.**— Rev. Mod. Phys., 1978, 50, p. 721 [русский перевод УФН, 1980, т. 130, с. 459].
15. **Окунь Л. Б.**— УФН, 1981, т. 134, с. 3.
16. **Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К.** Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975.
17. **Юцис А. П., Бандзайтис А. А.** Теория момента количества движения в квантовой механике, 2-е изд. Вильнюс: Мокслас, 1977.
18. **Biedenharn L. C., Louck J. D.** Angular momentum in quantum physics. The Racah-Wigner algebra in quantum theory (Encyclopedia of mathematics and its applications, v. 8, 9), Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1981.
19. **Barut A. O., Rączka R.** Theory of group representations and application, Warszawa, PWN, 1977.
20. **Климык А. У.** Матричные элементы и коэффициенты Клебша — Гордана представлений групп. Киев: Наукова думка, 1979.
21. **Moshinsky M., Patera J., Sharp R. T., Winternitz P.**— Ann. Phys. (N. Y.), 1975, v. 95, p. 139.
22. **Hou Pei—yu.** Scientia Sinica, 1965, v. 14, p. 369.
23. **Chew C. K., Sharp R. T.**— Nucl. Phys. B, 1967, v. 2, p. 697.
24. **Шелепин Л. А.**— Труды ФИАН, 1973, т. 70, с. 3.
25. **Карасев В. П.**— Там же, с. 147.
26. **Brody T. A., Moshinsky M., Renero J.**— J. Math. Phys., 1965, v. 6, p. 1540.
27. **Ponzano G.**— Nuovo cimento A, 1966, v. 41, p. 142.
28. **Sharp R. T., von Baeyer H. C.**— J. Math. Phys., 1966, v. 7, p. 1105.
29. **Draayer J. P., Akiyama Y.**— Ibid., 1973, v. 14, p. 1904.
30. **Asherova R. E., Smirnov Yu. F.**— Nucl. Phys. B, 1968, v. 4, p. 399.
31. **Гусева И. С., Смирнов Ю. Ф., Толстой В. Н., Харитонов Ю. И.** Препринт ЛИЯФ № 678, Ленинград, 1981.
32. **Плухарж З., Смирнов Ю. Ф., Толстой В. Н.** Развитие аппарата *SU* (3) симметрии. Препринт Карлова университета, Прага, 1981.
33. **Weyl H.** The classical groups, Princeton, 1939, 1946 [русский перевод, М.: Изд-во иностр. лит., 1947].
34. **Littlewood Д. О.** The theory of group characters, Sec ed., Oxford, Clarendon Press, 1958.
35. **Hamermesh M.** Group Theory and its Applications to Physical Problems, London, Addison — Wesley, 1964; 1964 [русский перевод, М.: Мир, 1966].
36. **Каплан И. М.** Симметрия многоэлектронных систем. М.: Наука, 1969.
37. **Джадд Б., Вайборн Б.** Теория сложных атомных спектров: Пер. с англ. М.: Мир, 1973.
38. **Chacón E., Moshinsky M.**— Phys. Lett., 1966, v. 23, p. 567.
39. **Moshinsky M., Chacón E.**— In: Spectroscopic and group theoretical methods in physics (Racah memorial vol.) Amsterdam, North-Holland, 1968, p. 99.
40. **Kramer P.**— Z. Phys., 1967, Bd 205, S. 181; 1968, Bd 216, S. 68.
41. **Юцис А.— А.А.**— Лит. физ. сб., 1969, т. 9, с. 629.
42. **Ванагас В. В.**— Там же, 1970, т. 10, с. 311.
43. **Юцис А.— А.А.**— Лит. матем. сб., 1968, т. 8, с. 597.
44. **Юцис. А.— А.А.**— Лит. физ. сб., 1970, т. 10, с. 5.
45. **Sullivan J. J.**— J. Math. Phys., 1973, v. 14, p. 387.
46. **Sullivan J. J.**— Ibid., 1975, v, 16, p. 756; p. 1707.
47. **Sullivan J. J.**— Ibid., 1978, v. 19, p. 1681.

48. **Алишаускас С. И., Ванагас В. В., Юцис А. П.**— Докл. АН СССР, 1971, т. 197, с. 804.
49. **Ališauskas S. J.**— Preprint ITP-74-142E, Kiev, 1974.
50. **Карасев В. П., Шелепин Л. А.**— Краткие сообщ. по физ. ФИАН, 1978 № 2, с. 28.
51. **Jin-Quan Chen.**— J. Math. Phys., 1981, v. 22, p. 1.
52. **Кильдюшов М. С.**— Ядерная физика, 1972, т. 15, с. 197.
53. **Кузнецов Г. И., Смородинский Я. А.**— Там же, 1975, т. 21, с. 1135; 1977, т. 25, с. 447; 1979, т. 29, с. 286.
54. **Алишаускас С. И., Ванагас В. В.**— Лит. физ. сб., 1972, т. 12, с. 533.
55. **Норвайшас Э. З., Алишаускас С. И.**— Там же, 1974, т. 14, с. 443.
56. **Норвайшас Э. З., Алишаускас С. И.**— Там же, 1974, т. 14, с. 715.
57. **Алишаускас С. И.**— Там же, 1974, т. 14, с. 861.
58. **Кныр В. А., Пипирайте П. П., Смирнов Ю. Ф.**— Ядерная физика, 1975, т. 22, с. 1063.
59. **Алишаускас С. И.**— Лит. физ. сб., 1976, т. 16, с. 359.
60. **Moshinsky M., Quesne C.**— J. Math. Phys., 1970, v. 11, p. 1631; 1971, v. 12, p. 1772.
61. **Quesne C.**— Ibid., 1973, v. 14, p. 388.
62. **Moshinsky M.**— Rev. Mod. Phys., 1962, v. 34, p. 813.
63. **Holman III W. J.**— Nuovo cimento A, 1971, v. 4, p. 904.
64. **Antillon A., Seligman T. H.**— J. Math. Phys., 1982, v. 23, p. 473.
65. **Алишаускас С. И.**— Лит. физ. сб., 1972, т. 12, с. 211.
66. **Louck J. D., Biedenharn L. C.**— J. Math. Phys., 1973, v. 14, p. 1336.
67. **Джадд Б.** Вторичное квантование и атомная спектроскопия: Пер. с англ. М.: Мир, 1970.
68. **Kaniauskas J. M., Rudzikas Z. B.**— J. Phys. B, 1980, v. 13, p. 3521.
69. **Алишаускас С. И.**— Лит. физ. сб., 1977, т. 17, с. 5.
70. **King R. C.**— J. Phys. A, 1975, v. 8, p. 429.
71. **Алишаускас С. И.**— Лит. физ. сб., 1974, т. 14, с. 709.
72. **Алишаускас С. И., Юцис. А. П.**— Там же, 1967, т. 7, с. 541.
73. **Ališauskas S. J., Jucys A. P.**— J. Math. Phys., 1967, v. 8, p. 2250.
74. **Ališauskas S. J., Jucys A. P.**— J. Math. Phys., 1969, v. 10, p. 2227.
75. **Алишаускас С. И., Норвайшас Э. З.**— Лит. физ. сб., 1980, т. 20, № 2, с. 3.
76. **Алишаускас С. И.**— Там же, 1982, т. 22, № 3.
77. **Алишаускас С. И.**— Там же, 1983, т. 23, № 3.
78. **Алишаускас С. И.**— Там же, 1983, т. 23, № 4.
79. **Baird B., Biedenharn L. C.**— J. Math.Phys., 1964, v. 5, p. 1730.
80. **Алишаускас С. И.**— Лит. физ. сб., 1969, т. 9, с. 641.
81. **Алишаускас С. И.**— Там же, 1978, т. 18, с. 567.
82. **Алишаускас С. И.**— Там же, с. 701.
83. **Алишаускас С. И., Ванагас В. В.**— Лит. физ. сб., 1973, т .13, с. 5.
84. **Бурнейка И. П.**— Там же, 1965, т. 5, с. 299.
85. **Ванагас В. В., Калинаускас Р. К.**— Теор. матем. физ, 1972, т. 13, с. 102.
86. **Hecht K. T.**— Nucl. Phys., 1965, v. 62, p. 1.
87. **Hecht K. T.**— Ibid., v. 63, p. 177.
88. **Ališauskas S. J., Jucys A. P.**— J. Math. Phys., 1971, v. 12, p. 594; Errata.— Ibid., 1972, v. 13, p. 575.
89. **Ališauskas S. J., Jucys A.— A.A., Jucys A. P.**— J. Math. Phys., 1972, v. 13, p. 1329.
90. **Ашерова Р. М., Смирнов Ю. Ф., Толстой В. Н.**— Теор. матем. физ., 1973, т. 15, с. 107.
91. **Löwdin P.— O.**— Rev. Mod. Phys., 1964, v. 36, p. 966.
92. **Shapiro J.** — J. Math. Phys., 1965, v. 6, p.1680.
93. **Ашерова Р. М., Смирнов Ю. Ф.**— Успехи мат. наук, 1969, т. 24, в. 3, с. 227.
94. **Ашерова Р. М., Смирнов Ю. Ф., Толстой В. Н.**— Теор. матем. физ., 1971, т. 8, с. 255.

95. Гельфанд И. М., Граев М. И.— Изв. АН СССР, Сер. мат., 1965, т. 29, с. 1329.
96. Chacón E., Ciftan M., Biedenharn L. C.—J. Math. Phys., 1972, v. 13, p. 577.
97. Biedenharn L. C., Louck J. D. — Commun. Math. Phys., 1968, v. 8, p. 89.
98. Wong M. K.— J. Math. Phys., 1978, v. 19, p. 1635.
99. Кныр В. А., Смирнов Ю. Ф., Толстой В. Н.— В сб.: Теоретико-групповые методы в физике. Труды международного семинара. Т. 1 М.: Наука, 1980, с. 34.
100. Алишаускас С. И.— Лит. физ. сб., 1972, т. 12, с. 721.
101. Ališauskas S. J., Jucys A. P.— Rep. Math. Phys., 1974, v. 5, p. 7.
102. Виленкин Н. Я.— Докл. АН СССР, 1957, т. 113, с. 16.
103. Wolf K. B.— J. Math. Phys., 1971, v. 12, p. 197.
104. Maekawa T.— Ibid., 1975, v. 16, p. 334; p. 2372.
105. Гельфанд И. М., Цетлин М. Л.— Докл. АН СССР, 1950, т. 71, с. 1017.
106. Wong M. K.— J. Math. Phys., 1978, v. 19, p. 704.
107. Алишаускас С. И.— Лит. физ. сб., 1973, т. 13, с. 829.
108. Kerimov G. A., Verdiev Yi. A.— Rep. Math. Phys., 1978, v. 13, p. 315.
109. Гаврилик А. М. Препринт ИТФ-73-104Р, Киев, 1973.
110. Кильдюшов М. С., Кузнецов Г. И. Препринт ИАЭ, М., 1973.
111. Виленкин Н. Я.— Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965.
112. Кузнецов Г. И.— Теор. матем. физ., 1974, т. 18, с. 367.
113. Норвайшас Э. З., Алишаускас С. И.— Лит. физ. сб., 1975, т. 15, с. 501.
114. Алишаускас С. И., Норвайшас Э. З.— Там же, 1973, т. 13, с. 841.
115. Biedenharn L. C., Giovannini A., Louck L. D.— J. Math. Phys., 1967, v. 8, p. 691.
116. Louck J. D.— Amer. J. Phys., 1970, v. 38, p. 3.
117. Алишаускас С. И.— Лит. физ. сб., 1982, т. 22, № 2, с. 13.
118. Алишаускас С. И., Норвайшас Э. З.— Там же, 1975, т. 15, с. 317.
119. Holman III W. J.— J. Math. Phys., 1973, v. 14, p. 440.
120. Алишаускас С. И.— Лит. физ. сб., 1980, т. 20, № 3, с. 3.
121. Asherova R. M., Smirnov Yu. F.— Nucl Phys., A, 1970, v. 144, p. 116.
122. Asherova R. M., Smirnov Yu. F. — Rep. Math. Phys., 1973, v. 4, p. 83.
123. Афанасьев Г. Н., Аврамов С. А., Райчев П. П.— Ядерная физика, 1972, т. 16, с. 53.
124. Райчев П. П., Русев Р. П.— Там же, 1978, т. 27, с. 1501.
125. Ališauskas S. J., Raychev P., Roussev R.— J. Phys. G: Nucl. Phys., 1981, v. 7, p. 1213.
126. Raychev P., Roussev R.— Ibid., p. 1227.
127. Draayer J. P.— J. Math. Phys., 1970, v. 11, p. 3225.
128. Smirnov Yu. F., Tolstoy V. N. — Rep. Math. Phys., 1973, v. 4, p. 97.
129. Норвайшас Э. З., Алишаускас С. И.— Лит. физ. сб., 1977, т. 17, с. 457.
130. Алишаускас С. И., Норвайшас Э. З.— Там же, 1979, т. 19, с. 623
131. Норвайшас Э. З.— Там же, 1981, т. 21, № 6, с. 18.
132. Ашерова Р. М., Смирнов Ю. Ф., Толстой В. Н.— Препринт ФЭИ-424, Обнинск, 1973.
133. Vergados J. B.— Nucl. Phys. A, 1968, v. 111, p. 681.
134. Sharp R. T., von Baeyer H. C., Pieper S. C.— Nucl. Phgs. A, 1969, v. 127, p. 513; von Baeyer H. C., Sharp R. T. — Ibid., 1970, v. 140, p. 118.
135. Ahmed K., Sharp R. T. —Ann. Phys., 1972, v. 71, p. 421.
136. Moshinsky M., Devi V. S.— J. Math. Phys., 1969, v. 10, p. 455.
137. Chacón E., Moshinsky M., Sharp R. T.— J. Math. Phys., 1976, v. 17, p. 669; Chacón E., Moshinsky M.— Ibid., 1977, v. 18, p. 870.
138. Vanagas V., Ališauskas S., Kalinauskas R., Nadjakov E.— Bulg. J. Phys., 1980, v. 7, p. 168.
139. Риордан Дж. Комбинаторные тождества. М.: Наука, 1982.