

КВАНТОВАЯ СТАТИСТИКА СИСТЕМ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ ПОЛЯМИ

*Н. Н. Боголюбов (мл.), В. Н. Плечко,
А. С. Шумовский*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Исследованы равновесные и динамические свойства макроскопических систем, взаимодействующих с полем электромагнитного излучения. Дан обзор регулярных методов асимптотически точного решения, связанных с использованием аппроксимирующих гамильтонианов и исключением бозонных переменных из кинетических уравнений. Рассмотрены различные обобщения модельной задачи Дикке.

The equilibrium and dynamical properties of macroscopic systems interacting with electromagnetic radiation are examined. The review of regular methods connected with the use of trial hamiltonians and the exclusion of boson variables from the kinetic equations is given. Some generalisations of Dicke model are considered.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее десятилетие заметно возрос интерес к теоретическому исследованию свойств макроскопических двухуровневых и многоуровневых систем, взаимодействующих с электромагнитными полями. Это обусловлено целым рядом причин, главные из которых сводятся к следующему. Во-первых, в настоящее время благодаря использованию мощных источников когерентного излучения происходит стремительное развитие эксперимента в области квантовой радиофизики и нелинейной оптики. Большое внимание, в частности, уделяется изучению явления кооперативного спонтанного излучения в двухуровневых системах и связанных с ним нелинейных эффектов. Нужно подчеркнуть, что двухуровневые системы могут сильно отличаться друг от друга с физической точки зрения — быть, например, молекулярными, атомными или ядерными. Однако характерные особенности поведения таких макроскопических систем не зависят от их конкретной физической природы; она проявляется главным образом в условиях, при которых воздействие поля вызывает в каждом излучателе лишь один двухуровневый переход и между излучателями возникает корреляция. Это обстоятельство открывает возможность теоретического описания процессов, происходящих в таких системах, на основе общего подхода, т. е. позволяет использовать сходные по математической структуре модели для систем различной физической природы.

Во-вторых, простейшую модельную задачу, описывающую двухуровневую систему, резонансно-взаимодействующую с полем излучения, — так называемую модель Дикке [1], удалось точно решить в термодинамическом пределе (т. е. в пределе бесконечной системы). Как известно, число точно решаемых модельных задач статистической механики весьма невелико, тогда как именно такие задачи, как правило, оказывают определяющее воздействие на развитие теории. Изучение даже упрощенных моделей макроскопических двухуровневых систем позволяет построить адекватное описание целого ряда физических процессов и предсказать ряд принципиально новых явлений.

Исследование кооперативных явлений в макроскопических двухуровневых системах началось с 1954 г., когда была опубликована основополагающая работа Дикке [1]. Предложенная им модельная задача формулируется следующим образом. Пусть система из N двухуровневых излучателей, имеющая объем V , помещена в резонатор. Гамильтониан такой системы имеет вид:

$$H = \sum_{f=1}^N \frac{1}{2m} \left(\mathbf{P}_f + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + \sum_q \hbar \omega_q a_q^+ a_q, \quad (1)$$

где a_q^+ , a_q — операторы рождения и уничтожения фотонов с частотой ω_q ; \mathbf{P}_f — импульс электрона, связанного с f -м двухуровневым атомом; e — заряд электрона; c — скорость света; \mathbf{A} — чисто поперечный векторный потенциал электромагнитного поля:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_q \boldsymbol{\tau}_q c \left(\frac{2\pi\hbar}{\omega_q} \right)^{1/2} (a_q \exp[\mathbf{i}\mathbf{q}\mathbf{f}] + a_q^+ \exp[-\mathbf{i}\mathbf{q}\mathbf{f}]).$$

Здесь сумма по q берется с учетом ультрафиолетового обрезания и $\boldsymbol{\tau}_q$ — единичный вектор поляризации. Далее, в дипольном приближении пренебрегают обычно членом $\frac{e^2}{2mc} \mathbf{A}^2$ в силу его малости [2, 3] и ограничиваются лишь двумерным пространством состояний для каждого атома, что соответствует учету лишь одного двухуровневого перехода. Это обстоятельство позволяет использовать квазиспиновые операторы для представления двухуровневых излучателей [1, 2]. В результате после некоторых упрощений получается эффективный гамильтониан следующего вида (модель Дикке):

$$H = \sum_q \hbar \omega_q a_q^+ a_q + \sum_{f=1}^N \left\{ \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \sigma_f^z + \frac{\lambda}{\sqrt{N}} (a_0 \sigma_f^+ + a_0^+ \sigma_f^-) \right\}, \quad (2)$$

соответствующий так называемому приближению вращающейся волны [2]. Здесь σ_f^z , $\sigma_f^\pm = \frac{1}{2} (\sigma_f^x \pm i\sigma_f^y)$ — операторы Паули, описы-

вающие двухуровневые излучатели

$$\sigma_f^\pm |\pm\rangle_f = 0, \sigma_f^\pm |\mp\rangle_f = |\pm\rangle_f, \sigma_f^z |\pm\rangle_f = \pm |\pm\rangle_f,$$

и λ — константа квазиспин-фотонной связи, определяемая соотношением

$$\lambda = \omega_0 d \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega_0 v^2}}, \tag{3}$$

где d — дипольный электрический момент перехода $d = \langle + | \mathbf{x}_f | - \rangle$ и $v \equiv V/N$ — удельный объем.

Важным свойством такой модельной задачи, впервые указанным Дикке [1], является то, что она описывает переход в возбужденное «сверхизлучательное» состояние, характеризуемое спонтанным когерентным излучением с интенсивностью, пропорциональной N^2 . Такая интенсивность обусловлена корреляцией между отдельными излучателями. Явление спонтанного сверхизлучения, предсказанное Дикке в 1954 г. [1], было обнаружено экспериментально лишь в 1972 г. в газообразном HF [4]. Кроме того, удалось наблюдать ряд близких по характеру явлений — фотонное эхо [2, 5], самоиндуцированную прозрачность [2] и т. п., в которых, однако, зависимость интенсивности типа N^2 вызвана внешними причинами (когерентная накачка).

Строгое математическое исследование равновесных свойств модельной задачи с гамильтонианом (1) началось с 1973 г. [6, 7, 131]. В частности, удалось показать, что при учете лишь одной резонансной моды фотонного поля и выполнении условия сильной связи

$$\lambda > \hbar\omega_0 \tag{4}$$

в системе происходит равновесный фазовый переход в состояние, характеризуемое спонтанной поляризацией в подсистеме излучателей (M -система) и макроскопическим заполнением резонансной моды поля (F -система). В дальнейшем в целом ряде работ проводилось изучение равновесных свойств модели Дикке (1) и ее обобщений (см., например, [8—47]). При этом весьма плодотворным оказался метод, обоснованный и развитый в [11, 20], позволяющий получить точное выражение для термодинамических потенциалов и равновесных средних для M - и F -систем. В идейном отношении этот метод восходит к работам Н. Н. Боголюбова по теории слабонеидеального бозе-газа [48, 49] и к подходу, связанному с введением так называемого аппроксимирующего гамильтониана [50].

В работах [3, 19, 26, 34] обсуждался вопрос о влиянии Λ^2 -члена на фазовый переход в сверхизлучательное состояние. В [18, 51] обсуждались аналогии, существующие между фазовым переходом в модели Дикке и явлением сегнетоэлектрического упорядочения с конденсацией мягкой фононной моды. Обобщение модели Дикке на случай многоуровневой системы было предложено Джилмо-

ром [52]. Проблема описания многофотонных процессов исследовалась в [53—56]. В [57] рассматривался вопрос о нарушении $SU(3)$ -симметрии при сверхизлучательном фазовом переходе.

Как уже указывалось, явление сверхизлучения привлекает значительное внимание исследователей в связи с возможностью его практического применения. В настоящее время его предполагается использовать для обращения фронта электромагнитной волны [58], для генерации когерентного излучения в однопроходных безрезонаторных лазерах [59] и т. д. В этой связи следует особо отметить работы Р. В. Хохлова [60, 61], впервые предложившего идею создания лазеров рентгеновского и гамма-диапазонов на основе эффекта сверхизлучения в мессбауэровских кристаллах.

Помимо точного решения равновесной задачи, описывающей сверхизлучательный фазовый переход, несомненный интерес представляет также исследование неравновесных свойств макроскопических двухуровневых систем. Адекватное описание динамики таких систем представляет особую важность, в частности, в связи с определением рабочего режима, выбором активной среды и оценкой мощности сверхизлучательных лазеров, в первую очередь для рентгеновского и гамма-диапазонов [62, 63]. Получение точного кинетического уравнения для сверхизлучательной системы представляет собой весьма сложную математическую задачу. Поэтому при описании динамики таких систем обычно пользуются целым рядом упрощающих физических предположений. Так, подход, основанный на использовании в качестве исходного уравнения марковского Master Equation, развивался в работах Бонифацио с соавторами [64—67]. Динамика фотонной системы при учете некогерентной накачки изучалась на основе подхода Цванцига [68] в [69, 70]. Метод Боголюбова — Крылова решения нелинейных уравнений применял Виллис [71].

Недавно в связи с исследованием проблемы полярона был развит подход к построению точного кинетического уравнения для систем, взаимодействующих с бозонным термостатом [72, 73]. Использование глубоких аналогий в математической формулировке модельных задач в теории полярона и в теории сверхизлучения позволило распространить указанный метод на макроскопические двухуровневые $M - F$ -системы типа модели Дикке [75—77]. При этом удалось получить ряд важных результатов для определения постоянного и коллективного сдвигов частот и характерных времен релаксации (конверсии) в таких системах.

Необходимо отметить, что теоретическое исследование коллективных процессов в макроскопических сверхизлучательных $M - F$ -системах развилось в последнее время в самостоятельное научное направление, занимающее промежуточное положение между статистической механикой и квантовой радиофизикой. Этой теме посвящены огромное количество оригинальных работ, ряд обзоров и тематических сборников. Однако в мировой литературе не существует достаточно полной работы, посвященной обзору регулярных методов,

позволяющих получить точные результаты для модельных задач в теории сверхизлучательных $M - F$ -систем. Настоящую статью следует рассматривать как попытку восполнить указанный пробел.

Работа имеет следующую структуру. В разд. 1 дан обзор математически строгих методов решения модельной задачи Дикке в равновесном случае и рассмотрены некоторые свойства указанной модели и ее обобщений. Раздел 2 посвящен проблеме применения модели Дикке и ее обобщений для описания конкретных физических систем. В частности, здесь исследован вопрос о реализации условия сильной связи типа (4) в физических системах. Наконец, в разд. 3 изложен метод построения точного кинетического уравнения для сверхизлучательных систем и дан обзор основных результатов, касающихся динамических свойств таких систем.

1. МЕТОД ТОЧНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ РАВНОВЕСНЫХ СВОЙСТВ СВЕРХИЗЛУЧАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

1.1. Равновесные свойства модели Дикке. Здесь мы обсудим равновесные (термодинамические) свойства модели Дикке с гамильтонианом (2). В 1973 г. Хепп и Либ показали [7, 131], что модель Дикке допускает точное в термодинамическом пределе ($N \rightarrow \infty$) решение, и описали «сверхизлучательный» фазовый переход. При выполнении условия сильной связи (4) ниже критической температуры имеет место одновременное упорядочение в подсистеме двухуровневых атомов и фотонов. Состояние фотонной подсистемы может быть интерпретировано как классическое когерентное состояние с наложенным «шумом», зависящим от температуры, при этом фотонная мода макроскопически заполнена $\langle a^+ a \rangle \propto N$ [6, 7, 11, 16]. Одновременно квазиспиновая подсистема атомов также макроскопически упорядочена. При температуре выше критической упорядоченность исчезает (фазовый переход второго рода).

Работа Хеппа и Либ стимулировала интерес к изучению различных модификаций и обобщений модели Дикке и подобных моделей в других разделах статистической физики и теории твердого тела и положила начало существенному развитию строгих методов исследования равновесных свойств таких систем.

При описании равновесных свойств системы центральную роль играют функционал свободной энергии $f[H]^*$, а также те или другие физические важные средние, характеризующие упорядоченность в системе.

Поскольку в модели Дикке двухуровневые атомы взаимодействуют только с одной резонансной модой фотонного поля, в дальнейшем бу-

* По определению для системы с гамильтонианом H и температурой $\theta = kT$, где k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, $f[H] = -\frac{\theta}{N} \ln \text{Sp} e^{-H/\theta}$, здесь N — число частиц ($N \rightarrow \infty$); $\text{Sp} e^{-H/\theta}$ — статистическая сумма.

дем рассматривать только основную часть гамильтониана (2), которую можно записать в виде

$$H = \omega a^+ a + \sqrt{N} \lambda (a S^+ + a^+ S^-) + \varepsilon N S^z, \quad (5)$$

где $\omega = \hbar\omega_0$, $\varepsilon = \hbar\omega_0$ и

$$S^\pm = S^x \pm i S^y, \quad S^{x,y,z} = \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N \sigma_j^{x,y,z}. \quad (5a)$$

Результат Хенша и Либа [7, 131] для свободной энергии модели Дикке (5) состоит в следующем *. Построим для гамильтониана (5) «аппроксимирующий» гамильтониан, заменяя фотонные операторы на C -числа (вариационные параметры) по правилу

$$\frac{a}{\sqrt{N}} \rightarrow -\frac{\lambda}{\omega} C, \quad \frac{a^+}{\sqrt{N}} \rightarrow -\frac{\lambda}{\omega} C^*.$$

В результате получаем гамильтониан

$$H_A(C) = \varepsilon N S^z - N \frac{\lambda^2}{\omega} (C S^+ + C^* S^-) + N \frac{\lambda^2}{\omega} |C|^2. \quad (6)$$

Как оказывается, свободные энергии для исходной (5) $f[H]$ и для аппроксимирующей систем $f[H_A(C)]$ совпадают в пределе $N \rightarrow \infty$, если выбрать параметры C, C^* из условия абсолютного минимума выражения $f_{N=\infty}[H_A(C)]^{**}$. Обозначим точку минимума \bar{C} ,

$$f_\infty[H_A(\bar{C})] = \text{abs min}_C \{f_{N=\infty}[H_A(\bar{C})]\}. \quad (7)$$

Таким образом,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f_N[H] = f_\infty[H_A(\bar{C})]. \quad (8)$$

Поскольку аппроксимирующий гамильтониан (6) является линейной формой по матрицам Паули, свободная энергия $f[H_A(C)]$ легко вычисляется***:

$$f[H_A(C)] = -\theta \ln \left(2 \text{ch} \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + 4 \frac{\lambda^4}{\omega^2} |C|^2}}{2\theta} \right) + \frac{\lambda^2}{\omega} |C|^2. \quad (9)$$

Необходимое условие минимума ($\partial f / \partial C$) дает уравнение для \bar{C}, \bar{C}^* :

$$C = \langle S^- \rangle_{H_A(C)}, \quad C^* = \langle S^+ \rangle_{H_A(C)}, \quad (10)$$

* Мы здесь излагаем эти результаты в форме, несколько отличающейся от оригинальной и соответствующей обсуждению в п. 1.2 настоящего раздела.

** Для описания термодинамики и фазового перехода как раз важны только асимптотические свойства в пределе бесконечно большой системы $N \rightarrow \infty$.

*** Следует учесть формулы:

$$\exp(a\sigma) = \text{ch} |a| + \frac{a\sigma}{|a|} \text{sh} |a|, \quad |a| = \sqrt{(a \cdot a)}, \quad \text{Sp} \exp(a\sigma) = \text{ch} |a|.$$

или в явном виде

$$|\bar{C}| = \frac{\lambda^2}{\omega} \frac{|\bar{C}|}{\sqrt{\varepsilon^2 + 4 \frac{\lambda^4}{\omega^2} |\bar{C}|^2}} \operatorname{th} \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + 4 \frac{\lambda^4}{\omega^2} |\bar{C}|^2}}{2\theta}. \quad (11)$$

Фаза φ параметра $\bar{C} = |\bar{C}| e^{i\varphi}$ при этом остается произвольной. При $\theta < \theta_c$, где

$$\theta_c = \frac{\varepsilon}{2} \left(\operatorname{arcth} \frac{\omega\varepsilon}{\lambda} \right)^{-1}, \quad (12)$$

уравнение (11) имеет нетривиальное решение $|\bar{C}| \neq 0$, которое и реализует абсолютный минимум свободной энергии (9). При $\theta \geq \theta_c$ единственное решение уравнения (11) нулевое: $|\bar{C}| \equiv 0$, $\theta \geq \theta_c$. Подставляя $C = \bar{C}$ в (9), получаем явное выражение для свободной энергии модели Дикке при $N \rightarrow \infty$. На уровне свободных энергий гамильтонианы H (5) и $H_A(\bar{C})$ эквивалентны при $N \rightarrow \infty$.

Как ясно из (10), $\bar{C}^\pm \equiv \langle S^\pm \rangle_{H_A(\bar{C})}$. Можно показать, что и здесь усреднение по $H_A(\bar{C})$ может быть заменено усреднением по H при $N \rightarrow \infty$. Таким образом,

$$\bar{C}^\pm \equiv \langle S^\pm \rangle_{N \rightarrow \infty}. \quad (13)$$

Справедливо также следующее соотношение:

$$\left\langle \frac{a^+ a^-}{N} \right\rangle_H = \frac{\lambda^2}{\omega^2} \langle S^+ S^- \rangle_{N \rightarrow \infty} = \frac{\lambda^2}{\omega^2} |\bar{C}|^2. \quad (14)$$

Равенства (13) и (14) вытекают из общих результатов п. 1.3 [отметим, что равенство (13) следует понимать не в смысле обычных средних, а в смысле «квазисредних», т. е. с учетом спонтанного нарушения симметрии, см. подробнее п. 1.3].

Таким образом, при $\theta < \theta_c$ в квазиспиновой подсистеме атомов возникает упорядочение, характеризуемое параметром порядка

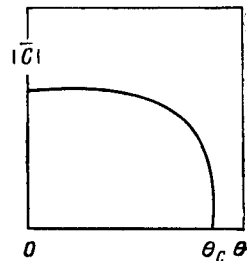


Рис. 1. Характер зависимости параметра порядка от температуры в модели Дикке.

$|\bar{C}| \equiv |\langle S^+ \rangle_H|$. На рис. 1 изображена зависимость $|\bar{C}|$ от температуры. Как следует из (14), такое упорядочение сопровождается появлением макроскопического числа когерентных фотонов $\langle a^+ a \rangle_H \propto N |\bar{C}|^2$. При низких температурах система находится в сверхизлучательном состоянии, которое исчезает при $\theta \geq \theta_c$.

Как было указано, модельный гамильтониан Дикке описывает фазовый переход в сверхизлучательное состояние лишь при выполнении условия сильной связи (4). Последнее предполагает наличие высокой плотности $\rho \equiv v^{-1}$ или низкой резонансной частоты ω_0 . Указанные обстоятельства могут служить существенным препятствием при экспериментальном получении такого фазового перехода в физических системах. Поэтому значительный интерес представляет рассмотрение физических ситуаций, приводящих к изменению условий сильной связи. Так, в [78] указывалось, что отказ от приближения вращающейся волны, т. е. учет «противовращательных» [19] членов взаимодействия вида $a^+ \sigma^+$, $a \sigma^-$, приводит к простой замене

$$\lambda \rightarrow \tilde{\lambda} = 2\lambda$$

в условии сильной связи (4). В более общем случае можно рассмотреть гамильтониан с противовращательными членами следующего вида [13]:

$$H = \hbar\omega_0 a^+ a + \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N [a\sigma_j^+ + a^+\sigma_j^- + \mu(a\sigma_j^- + a^+\sigma_j^+)] + \frac{1}{2} \hbar\omega_0 \sum_{j=1}^N \sigma_j^z.$$

При этом условии существования фазового перехода будет:

$$\lambda(1 + \mu) > \hbar\omega_0.$$

Напомним, что модель Дикке является упрощенной версией исходного гамильтониана (1). При менее радикальных упрощениях в гамильтониане следовало бы учесть дополнительный A^2 -член, имеющийся в (1). Вопрос о влиянии этого члена на фазовый переход обсуждался в ряде работ [3, 9, 26, 28, 34]. В связи с проблемой учета A^2 -члена в [19] было предложено каноническое преобразование, позволяющее исключить такой член в результате перенормировки параметров гамильтониана. Действительно, при учете A^2 -члена гамильтониан Дикке (1) следует дополнить выражением [26]

$$k(a^+ + a)^2. \quad (15)$$

В этом случае преобразование бозонных переменных вида [19]

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch } \gamma & e^{i\varphi} \text{sh } \gamma \\ e^{-i\varphi} \text{sh } \gamma & \text{ch } \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a^+ \end{pmatrix}$$

при выборе параметра γ из условия

$$\text{th } \gamma = -(\sqrt{F} - 1)/(\sqrt{F} + 1), \quad F \equiv 1 + 4k/\hbar\omega$$

позволяет исключить член (15) из гамильтониана. При этом перенормировка параметров гамильтониана Дикке (при $\mu = 0$) имеет вид:

$$\hbar\omega \rightarrow \hbar\omega' = \hbar\omega \sqrt{F};$$

$$\lambda \rightarrow \lambda' = \frac{\lambda}{2} (F^{1/4} + F^{-1/4}).$$

Таким образом, и при учете A^2 -члена мы опять приходим к стандартной структуре типа (5).

Сделаем несколько замечаний о методах изучения равновесных свойств моделей типа Дикке. В оригинальной работе Хеппа и Либа [7] применялся довольно сложный «прямой» метод, основанный фактически на построении всего спектра гамильтониана с использованием частных свойств модели. Поэтому в дальнейшем в целом ряде работ исследовались новые подходы, позволяющие получить те же физические результаты. Почти сразу же термодинамические результаты Хеппа и Либа были воспроизведены более простым способом, основанным на использовании глауберовских когерентных состояний в работе Ванга и Хэйя [6] (см. также [130, 131]). Вертоген и Де Врис [8] исходили из анализа уравнений движения в подходе C^* -алгебр. В работе Бранкова, В. А. Загребнова и Тончева [13] применялась техника аппроксимирующих гамильтонианов Боголюбова (мл.) [50], в работах Б. В. Мощинского и В. К. Федянина [23] и В. Н. Попова и С. А. Федотова [47, 132] применялся метод перевала в функциональном интеграле, развивались и другие методы.

Новые методы были предложены в работах Н. Н. Боголюбова (мл.) и В. Н. Плечко [11, 20], где с единой точки зрения изучался целый класс систем, включающий модель Дикке и ее обобщения, а также другие родственные модели как частные случаи. Как оказывается, многие характерные свойства модели Дикке имеют место вообще для всех систем, в которых одна или несколько мод бозонного поля взаимодействуют с какой-либо подсистемой («веществом»). Эти общие методы обсуждаются ниже в пп. 1.2 и 1.3. В п. 1.4 кратко обсуждаются некоторые модели, родственные стандартной модели Дикке.

1.2. Класс точно решаемых модельных гамильтонианов с взаимодействием вещества и бозонного поля. Вычисление свободной энергии. Рассмотрим задачу о вычислении свободной энергии для обобщенного класса модельных систем, описывающих некоторую детально не конкретизируемую подсистему (вещество) с конечным числом мод бозонного поля [11]. Этот класс систем включает модель Дикке и родственные модели.

Будем рассматривать класс модельных гамильтонианов следующего вида:

$$H = \sum_{\alpha=1}^S \omega_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha} + \sqrt{N} \sum_{\alpha=1}^S (\lambda_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} L_{\alpha} + \lambda_{\alpha}^* a_{\alpha} L_{\alpha}^{\dagger}) + T - N \sum_{\alpha=1}^S \kappa_{\alpha} L_{\alpha}^{\dagger} L_{\alpha}, \tag{16}$$

где

a_{α}^{\dagger} и a_{α} — операторы рождения и уничтожения α -й моды бозонного поля, удовлетворяющие перестановочным соотношениям:

$$a_{\alpha} a_{\beta}^{\dagger} - a_{\beta}^{\dagger} a_{\alpha} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta; \\ 0, & \alpha \neq \beta; \end{cases} \tag{17}$$

$T \equiv T^+$, L_{α} , L_{α}^{\dagger} — операторные конструкции, представляющие детально не конкретизируемую N -частичную « M -подсистему» (вещество), на которые налагаются только следующие общие дополнительные условия:

$$\left. \begin{aligned} \|L_{\alpha}\| &\leq K_1, \quad \|L_{\alpha}T - TL_{\alpha}\| \leq K_2, \\ \|L_{\alpha}L_{\beta}^{\dagger} - L_{\beta}^{\dagger}L_{\alpha}\| &\leq K_3/N, \end{aligned} \right\} \tag{18}$$

где $\|\cdot\|$ — норма оператора; K_1, K_2, K_3 — некоторые постоянные, не зависящие от N . Эти условия фактически не являются ограничительными и справедливы в конкретных случаях*;

N — число частиц в M -подсистеме. Рассмотрение будет вестись при конечном фиксированном N , в самом конце вычислений будем переходить к термодинамическому пределу, $N \rightarrow \infty$;

$\omega_{\alpha} > 0$ — частоты бозонного поля; $\kappa_{\alpha} \geq 0$ — «константы связи» в дополнительном L^2 -взаимодействии в подсистеме вещества (аналога этого члена в модели Дикке (1) нет, такой член появляется, например, в некоторых сверхпроводящих моделях [83]).

Гамильтониан H (16) определен в пространстве

$$\mathcal{H}_{M \otimes B} = \mathcal{H}_M \otimes \mathcal{H}_B, \tag{19}$$

где \mathcal{H}_M — пространство состояний M -подсистемы (вещества); \mathcal{H}_B — фоксовское пространство бозонного поля. Ясно, что операторы M -подсистемы всегда перестановочны с $\{a_{\alpha}, a_{\alpha}^{\dagger}\}$.

Гамильтониан (16) описывает S мод бозонного поля, взаимодействующих с M -подсистемой. Различные конкретные модели получаются при соответствующем выборе операторов M -подсистемы $\{T, L_{\alpha}, L_{\alpha}^{\dagger}\}$. В модели Дикке имеем одну моду поля $S = 1$ и $T = \epsilon NS^{\dagger} S$; $L = S^{-}$, $L^{\dagger} = S^{+}$; $\kappa = 0$.

* Например, в модели Дикке имеем $\|S^{\pm}\| \leq 1$ и ввиду аддитивности $\|S^{-}, S^{+}\|_{-\infty} = 1/N$.

Покажем, что свободная энергия для гамильтониана (16) может быть вычислена на основе следующего аппроксимирующего гамильтониана:

$$H_A(C) = T - N \sum_{\alpha=1}^S g_{\alpha} (C_{\alpha} L_{\alpha}^+ + C_{\alpha}^* L_{\alpha}) + N \sum_{\alpha=1}^S g_{\alpha} |C_{\alpha}|^2, \quad (20)$$

$$g_{\alpha} \equiv \kappa_{\alpha} + |\lambda_{\alpha}|^2 / \omega_{\alpha},$$

где C_{α}, C_{α}^* — вариационные параметры, выбираемые из условия абсолютного минимума свободной энергии $f [H_A(C)]$. Обозначим значения параметров, реализующие минимум, через $\{\bar{C}_{\alpha}\}$:

$$f_N [H_A(\bar{C})] = \text{abs min}_C f_N [H_A(C)] \quad (21)$$

(отметим, что операции перехода к пределу $N \rightarrow \infty$ и минимизация по $\{C_{\alpha}\}$ перестановочны [11]). Нашей целью является доказательство соотношения *

$$|f_{N=\infty} [H_A(\bar{C})] - f_N [H]| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \quad (22)$$

Для доказательства нам потребуются две фундаментальные теоремы.

1. Для любых эрмитовых операторов (гамильтонианов) \mathfrak{A}_1 и \mathfrak{A}_2 справедливы следующие неравенства между равновесными средними и свободными энергиями (Н. Н. Боголюбов, 1956 г.):

$$\frac{1}{N} \langle \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2 \rangle_{\mathfrak{A}_1} \leq f[\mathfrak{A}_1] - f[\mathfrak{A}_2] \leq \frac{1}{N} \langle \mathfrak{A} - \mathfrak{A}_2 \rangle_{\mathfrak{A}_2}. \quad (23)$$

2. Теорема о свободных энергиях (Н. Н. Боголюбов (мл.) [50]). Введем вспомогательный гамильтониан вида

$$\tilde{H} = T - N \sum_{\alpha=1}^S g_{\alpha} L_{\alpha}^+ L_{\alpha}, \quad g_{\alpha} \geq 0, \quad (24)$$

где $T, L_{\alpha}, L_{\alpha}^+$ — удовлетворяют соотношениям (18), тогда свободные энергии $f_N [H]$ и $f_N [H_A(\bar{C})]$ (21) совпадают при $N \rightarrow \infty$:

$$0 \leq f_N [H_A(\bar{C})] - f_N [\tilde{H}] \leq \varepsilon_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \quad (25)$$

где $\varepsilon_N \propto N^{-2/5}$ (оценку ε_N можно при желании улучшить, налагая более сильные условия вместо (18), см. [25]).

Соотношения (22) и (25) означают, что свободная энергия для класса систем H (16) при $N \rightarrow \infty$ совпадает не только с (21), но и с $f[\tilde{H}]$, однако в конкретных системах $f[\tilde{H}]$ непосредственно не вычислима из-за L^2 -члена в (24), и наша конечная цель — свести

* Соотношение (9) является частным случаем (22). В пп. 1.2, 1.3 мы не останавливаемся на мотивах предпринимаемых шагов, поскольку они видны из аналогии с моделью Дикке, обсуждавшейся в п. 1.1.

задачу к вычислению $f [H_A(\bar{C})]$ (21). Гамильтониан \tilde{H} играет важную вспомогательную роль.

Равенство (22) доказывается через следующую цепочку неравенств [11]:

$$-\xi_N \leq f [H]_{M \otimes B} - f [\tilde{H}]_M \leq f [H_A(\bar{C})]_M - f [\tilde{H}]_M \leq \varepsilon_N, \quad (26)$$

где $\xi_N \rightarrow 0$, $\varepsilon_N \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$. Здесь индексы M , $M \times B$ (и ниже B) указывают на пространство состояний, в котором действует соответствующий гамильтониан и берется след при вычислении $f [\dots]$.

Крайнее правое неравенство следует из теоремы (25). Для доказательства среднего неравенства надо показать, что

$$f [H]_{M \otimes B} \leq f [H_A(\bar{C})]_M. \quad (27)$$

Введем вспомогательный гамильтониан

$$H_B(\bar{C}) = N \sum_{\alpha=1}^S \omega_\alpha \left(\frac{a_\alpha^+}{\sqrt{N}} + \frac{\lambda_\alpha^*}{\omega_\alpha} \bar{C}_\alpha^* \right) \left(\frac{a_\alpha}{\sqrt{N}} + \frac{\lambda_\alpha}{\omega_\alpha} \bar{C}_\alpha \right). \quad (28)$$

Выберем в неравенствах (23) $\mathfrak{A}_1 = H$ и $\mathfrak{A}_2 = H_A(\bar{C}) + H_B(\bar{C})$; вычисляя $\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2$, получаем из (23):

$$\begin{aligned} & f [H]_{M \otimes B} - f [H_A(\bar{C}) + H_B(\bar{C})]_{M \otimes B} \leq \\ & \leq - \sum_{\alpha=1}^S \kappa_\alpha \langle (L_\alpha^+ - \bar{C}_\alpha^*) (L_\alpha - \bar{C}_\alpha) \rangle_{H_A(\bar{C}) + H_B(\bar{C})} + \\ & + \sum_{\alpha=1}^S \left\langle \lambda_\alpha \left(\frac{a_\alpha^+}{\sqrt{N}} + \frac{\lambda_\alpha^*}{\omega_\alpha} \bar{C}_\alpha^* \right) (L_\alpha - \bar{C}_\alpha) + \text{э.с.} \right\rangle_{H_A(\bar{C}) + H_B(\bar{C})}. \end{aligned} \quad (29)$$

Первый член в правой части здесь неположителен, а второй член равен нулю, поскольку среднее по $H_A(\bar{C}) + H_B(\bar{C})$ факторизуется на произведение средних $\langle \dots \rangle_{H_A(\bar{C})} \langle \dots \rangle_{H_B(\bar{C})}$ от соответствующих операторов, и, очевидно, $\left\langle \frac{a_\alpha^+}{\sqrt{N}} + \frac{\lambda_\alpha^*}{\omega_\alpha} \bar{C}_\alpha^* \right\rangle_{H_B(\bar{C})} \equiv 0$. Таким образом,

$$f [H]_{M \otimes B} \leq f [H_A(\bar{C}) + H_B(\bar{C})]_{M \otimes B}. \quad (30)$$

Далее

$$f [H_A(\bar{C}) + H_B(\bar{C})]_{M \otimes B} = f [H_A(\bar{C})]_M + f [H_B(\bar{C})]_B,$$

где

$$f [H_B(\bar{C})]_B = \frac{\theta}{N} \sum_{\alpha=1}^S \ln (1 - e^{-\frac{\omega_\alpha}{\theta}}) \leq 0. \quad (31)$$

Отсюда и следует неравенство (26).

Остается доказать левое неравенство в (26):

$$-\zeta_N \leq f[H]_{M \otimes B} - f[\tilde{H}]_M. \quad (32)$$

Заметим, что H (16) можно представить в виде

$$H = \sum_{\alpha=1}^S x_\alpha \omega_\alpha a_\alpha^\dagger a_\alpha + \tilde{H}_x + N \sum_{\alpha=1}^S (1-x_\alpha) \omega_\alpha \left(\frac{a_\alpha^\dagger}{\sqrt{N}} + \frac{\lambda_\alpha^* L_\alpha^\dagger}{\omega_\alpha (1-x_\alpha)} \right) \left(\frac{a_\alpha}{\sqrt{N}} + \frac{\lambda_\alpha L_\alpha}{\omega_\alpha (1-x_\alpha)} \right), \quad (33)$$

где

$$\tilde{H}_x = T - N \sum_{\alpha=1}^S \left(x_\alpha + \frac{|\lambda_\alpha|^2}{(1-x_\alpha)\omega_\alpha} \right) L_\alpha^\dagger L_\alpha. \quad (34)$$

Здесь мы ввели параметры x_α , $0 < x_\alpha \leq 1$ и выделили вспомогательный бозонный член [первый в (33)], чтобы иметь возможность применить неравенства (23).

Выберем в (23)

$$\mathfrak{A}_1 = H, \quad \mathfrak{A}_2 = \tilde{H}_x + \sum_{\alpha=1}^S x_\alpha \omega_\alpha a_\alpha^\dagger a_\alpha. \quad (35)$$

Учитывая, что $\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2 \geq 0$ [см. (33)], имеем:

$$0 \leq f[H]_{M \otimes B} - f[\tilde{H}_x + \sum_{\alpha=1}^S x_\alpha \omega_\alpha a_\alpha^\dagger a_\alpha]_{M \otimes B}. \quad (36)$$

При этом, очевидно,

$$\begin{aligned} f[\tilde{H}_x + \sum_{\alpha=1}^S x_\alpha \omega_\alpha a_\alpha^\dagger a_\alpha]_{M \otimes B} &= f[\tilde{H}_x]_M + f[\sum_{\alpha=1}^S x_\alpha \omega_\alpha a_\alpha^\dagger a_\alpha]_B = \\ &= f[\tilde{H}_x]_M + \frac{\theta}{N} \sum_{\alpha=1}^S \ln \left[1 - \exp \left(-x_\alpha \frac{\omega_\alpha}{\theta} \right) \right] \geq \\ &\geq f[\tilde{H}_x]_M - \frac{\theta}{N} \sum_{\alpha=1}^S \left(\frac{x_\alpha \omega_\alpha}{\theta} + \ln \frac{\theta}{x_\alpha \omega_\alpha} \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Оценим теперь разность свободных энергий $f[\tilde{H}]_M$ и $f[\tilde{H}_x]_M$. Полагая в (23) $\mathfrak{A}_1 = \tilde{H}$, $\mathfrak{A}_2 = \tilde{H}_x$ и учитывая ограниченность операторов L_α , L_α^\dagger по норме (18) получаем:

$$0 \leq f[\tilde{H}]_M - f[\tilde{H}_x]_M \leq K_1^2 \sum_{\alpha=1}^S \frac{x_\alpha}{1-x_\alpha} \frac{|\lambda_\alpha|^2}{\omega_\alpha}. \quad (38)$$

На основании (36) — (38) имеем:

$$\begin{aligned}
 - \sum_{\alpha=1}^S \left(\frac{x_\alpha}{1-x_\alpha} \frac{|\lambda_\alpha|^2}{\omega_\alpha} K_1^2 + \frac{x_\alpha \omega_\alpha}{N} + \theta \ln \frac{\theta}{\omega_\alpha} + \frac{\theta}{N} \ln \frac{1}{x_\alpha} \right) &\leq \\
 &\leq f[H]_{M \otimes B} - f[\tilde{H}]_M. \tag{39}
 \end{aligned}$$

Правая часть (39) не содержит параметров x_α . Следовательно, можно выбрать x_α в левой части по своему усмотрению. Выберем $x_\alpha = 1/N$ для всех α . В результате и получим оценку снизу (30) при

$$\begin{aligned}
 \zeta_N = s\theta \frac{\ln N}{N} + \frac{K_1^2}{N-1} \sum_{\alpha=1}^S \frac{|\lambda_\alpha|^2}{\omega_\alpha} + \\
 + \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^S \left(\theta \ln \frac{\theta}{\omega_\alpha} + \frac{\omega_\alpha}{N} \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \tag{40}
 \end{aligned}$$

Неравенства (26) тем самым доказаны.

Итак, мы показали, что вычисление свободной энергии $f[H]_{M \otimes B}$ для класса модельных систем (16) при $N \rightarrow \infty$ сводится к вычислению свободной энергии $f[H_A(\bar{C})]_M$. Гамильтониан $H_A(C)$ вовсе не содержит бозонных операторов и линеен по операторам $\{L_\alpha\}$. Ввиду достаточной простой структуры $H_A(C)$ в конкретных системах свободная энергия $f[H_A(C)]$ легко вычисляется. Необходимое условие минимума ($\partial f / \partial C_\alpha = 0$) дает систему уравнений для определения параметров $\{\bar{C}_\alpha\}$:

$$\left. \begin{aligned}
 C_\alpha &= \langle L_\alpha \rangle_{H_A(C)}, \\
 C_\alpha^* &= \langle L_\alpha^+ \rangle_{H_A(C)}.
 \end{aligned} \right\} \tag{41}$$

В заключение отметим некоторые соотношения для средних. Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned}
 B_\alpha &= \frac{a_\alpha}{\sqrt{N}} + \frac{\lambda_\alpha}{\omega_\alpha} L_\alpha, \\
 B_\alpha^+ &= \frac{a_\alpha^+}{\sqrt{N}} + \frac{\lambda_\alpha^*}{\omega_\alpha} L_\alpha^+.
 \end{aligned} \right\} \tag{42}$$

Заметим, что подобные конструкции фигурируют в представлении (33), отсюда видно, что при более детальном выписывании левой части в (36) можно оценить среднее $\langle B_\alpha^+ B_\alpha \rangle_H$. В конечном итоге можно получить оценку [11]:

$$\sum_{\alpha=1}^S \omega_\alpha \langle B_\alpha^+ B_\alpha \rangle_H \leq (\varepsilon_N + \zeta_N) \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \tag{43}$$

откуда, используя известное неравенство [80]

$$|\langle \mathfrak{A} \mathfrak{B} \rangle|^2 \leq \langle \mathfrak{A} \mathfrak{A}^+ \rangle \langle \mathfrak{B}^+ \mathfrak{B} \rangle, \quad (44)$$

легко получить следующие асимптотически точные равенства [11]:

$$\left\langle \frac{a_\alpha^+ a_\alpha}{N} \right\rangle_H = \frac{|\lambda_\alpha|^2}{\omega_\alpha^2} \langle L_\alpha^+ L_\alpha \rangle_H \Big|_{N \rightarrow \infty}. \quad (45)$$

Как видим, число квантов бозонного поля оказывается связанным со средними L -операторов, которые обычно характеризуют упорядоченность в «веществе» [см. [11] и обсуждение п. 1.4].

1.3. О вычислении квазисредних. Соотношение (22) доказывает эквивалентность H и $H_A(\bar{C})$ в пределе $N \rightarrow \infty$ на уровне свободных энергий. Можно поставить вопрос и об эквивалентности H и $H_A(\bar{C})$ при вычислении средних. В физических моделях, в частности, обычно представляют существенный интерес средние операторов $\{L_\alpha, L_\alpha^+\}$. Поскольку $\langle L_\alpha \rangle_{H_A(\bar{C})} \equiv \bar{C}_\alpha$ [см. (41)], можно предполагать, что $\langle L_\alpha \rangle_H = \bar{C}_\alpha$. Это равенство действительно имеет место, но не для обычных средних, а для квазисредних.

Концепция квазисредних была введена Н. Н. Боголюбовым [79, 80], где было показано, что в системах с вырождением некоторые физически важные средние оказываются при конечных N тождественно равными нулю в силу симметрии. В таких случаях физический смысл имеют не обычные гиббсовские средние $\langle \dots \rangle_H$, а «квазисредние» $\langle \dots \rangle_{H_\tau}$, определяемые следующим образом [79, 80]: в гамильтониан вводятся малые нарушающие симметрию члены, определяемые параметрами $\{\tau_\alpha\}$, затем вычисляются обычные средние $\langle \dots \rangle_{H_\tau}$, совершается предельный переход $N \rightarrow \infty$, после чего только полагается $\{\tau_\alpha\} \rightarrow 0$.

$$\langle \dots \rangle_H = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \dots \rangle_{H_\tau}. \quad (46)$$

Таким образом, квазисредние — это средние, вычисляемые с учетом спонтанного нарушения симметрии.

В конкретных случаях нарушающие симметрию члены («источники») обычно имеют прямой физический смысл*. Однако при рассмотрении детально не конкретизируемых систем вопрос о выборе «источников» не так прост [50]. Методы введения квазисредних для класса гамильтонианов (16) были предложены в [20]. Квазисредние

* Например, в изотропных ферромагнетиках спонтанную намагниченность следует вычислять при включенном малом магнитном поле, которое фиксирует ее направление и убирается только после перехода $N \rightarrow \infty$.

определяются по правилу (46) на основе следующего гамильтониана:

$$H_\tau = H + 2N \sum_{\alpha=1}^S \tau_\alpha \omega_\alpha \left(\frac{a_\alpha^+}{\sqrt{N}} + \frac{\lambda_\alpha^*}{\omega_\alpha} \bar{C}_\alpha^* \right) \left(\frac{a_\alpha}{\sqrt{N}} + \frac{\lambda_\alpha}{\omega_\alpha} \bar{C}_\alpha \right), \quad (47)$$

где $\{\tau_\alpha\}$ — вещественные малые параметры, $\tau_\alpha > 0$.

Используя методы, аналогичные применявшимся в п. 1.2, можно получить следующую оценку:

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^S \omega_\alpha \left[\left\langle \left(\frac{a_\alpha^+}{\sqrt{N}} + \frac{\lambda_\alpha^*}{\omega_\alpha} L_\alpha^+ \right) \left(\frac{a_\alpha}{\sqrt{N}} + \frac{\lambda_\alpha}{\omega_\alpha} L_\alpha \right) \right\rangle_{H_\tau} + \right. \\ & \left. + \tau_\alpha \left\langle \left(\frac{a_\alpha^+}{\sqrt{N}} + \frac{\lambda_\alpha^*}{\omega_\alpha} \bar{C}_\alpha^* \right) \left(\frac{a_\alpha}{\sqrt{N}} + \frac{\lambda_\alpha}{\omega_\alpha} \bar{C}_\alpha \right) \right\rangle_{H_\tau} \right] \leq \xi_N, \tau_{\tau_\alpha > 0, N \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Исходя из (48) и неравенства (44), легко получить соотношения для квазисредних от операторов $L_\alpha^\#$, $a_\alpha^\#/\sqrt{N}$ и параметров $\bar{C}_\alpha^\#$ следующего типа [20]:

$$\left. \begin{aligned} \langle L_\alpha \rangle_H &= \bar{C}_\alpha, \\ \left\langle \frac{a_\alpha}{\sqrt{N}} \right\rangle_H &= -\frac{\lambda_\alpha}{\omega_\alpha} \bar{C}_\alpha, \\ \left\langle \frac{a_\alpha^+ a_\alpha}{N} \right\rangle_H &= \frac{|\lambda_\alpha|^2}{\omega_\alpha^2} |\bar{C}_\alpha|^2 \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

и т. д. В общем случае эти соотношения можно выразить в виде следующих «правил замены» при вычислении одианных и бинарных средних:

$$\frac{a_\alpha^\#}{\sqrt{N}} \leftrightarrow -\frac{\lambda_\alpha^\#}{\omega_\alpha} L_\alpha^\# \leftrightarrow -\frac{\lambda_\alpha^\#}{\omega_\alpha} \bar{C}_\alpha^\#. \quad (50)$$

В работе [39] эти правила замены были распространены на произвольные средние вида

$$\left\langle \dots \frac{a_\alpha^+}{\sqrt{N}} \dots \frac{a_\beta}{\sqrt{N}} \dots L_\alpha \dots L_\beta^\# \dots \right\rangle. \quad (51)$$

При вычислении всех таких средних операторы $a_\alpha^\#/\sqrt{N}$, $L_\alpha^\#$ и параметры $\bar{C}_\alpha^\#$ взаимозаменяемы по правилу (50) (на уровне квазисредних).

Отметим, что в случае обычной модели Дикке (5) мы имеем как раз случай вырождения. Можно показать, что при конечных N при всех температурах $\langle S^\pm \rangle_H \equiv 0$ из-за скрытой симметрии гамильто-

ниана (5). (Эта симметрия проявляется косвенно и в том, что свободная энергия $f [H_A(C)]$ (9) не зависит от фазы параметра \bar{C} и фаза $\bar{\varphi}$ для $\bar{C} = |\bar{C}| e^{i\bar{\varphi}}$ может быть выбрана произвольно.) Однако на уровне квазисредних $|\langle S^\pm \rangle| \equiv |\bar{C}| \neq 0$ при $\theta \leq \theta_c$, как следует из общих результатов (49). Отметим, что при переходе к более общей модели (17) (при $\mu \neq 0$) симметрия пропадает, параметры \bar{C} , \bar{C}^* определяются однозначно (здесь $\varphi = 0$) и квазисредние совпадают с обычными средними.

Заметим, что нарушение симметрии в гамильтониане (47) (если она есть) фактически осуществляется только линейными членами $\tau_\alpha \bar{C}_\alpha^* a_\alpha$, $\tau_\alpha c_\alpha a_\alpha^+$.

В конкретных системах средние и квазисредние от операторов L_α обычно имеют смысл «параметров порядка» в подсистеме вещества. При этом соотношения (49), (50) означают, что возникновение упорядоченности в веществе ($\langle L_\alpha \rangle \equiv \bar{C}_\alpha \neq 0$) с необходимостью во всех случаях сопровождается макроскопическим заполнением бозонных мод, при котором эффективно $a_\alpha \propto \sqrt{N}$, $a_\alpha^+ a_\alpha \propto N$. Это свойство имеет универсальный характер и не зависит от конкретных особенностей подсистемы вещества [20].

Заметим также, что, как видно из формы гамильтониана \tilde{H} (24), взаимодействие вещества с бозонным полем приводит к дополнительному эффективному «притяжению» [отрицательный L^2 -член в (24)], которое способствует упорядочению.

1.4. Другие модели. Несколько замечаний. В рассмотренный в пп. 1.2, 1.3 класс систем попадают различные модификации модели Дикке и ряд других моделей.

Сюда входит, например, следующий обобщенный вариант модели Дикке (5):

$$H = \sum_{m=1}^S \omega_m a_m^+ a_m + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=1}^S \sum_{j=1}^N [a_m (\lambda_{mj}^* \sigma_j^+ + \mu_{mj} \sigma_j^-) + a_m^+ (\lambda_{mj} \sigma_j^- + \mu_{mj}^* \sigma_j^+)] + \sum_{j=1}^N (\epsilon_j^x \sigma_j^x + \epsilon_j^y \sigma_j^y + \epsilon_j^z \sigma_j^z), \quad (52)$$

частным случаем которого является (17) и модели из разд. 3—(72), (82). Другими примерами могут служить модель Кубаяши в теории сегнетоэлектриков с водородными связями [81, 82], модель Фрелиха в теории сверхпроводимости [83], модели ферромагнитного кристалла с фононной неустойчивостью [84—86], модель аномального сегнетоэлектрического перехода в прустите Ag_3AsS_3 [87] и т. д. Подчеркнем, что термин «сверхизлучательный фазовый переход» при этом применяется не только по отношению к диполь-фотонным системам, но и к системам, взаимодействующим с фононными полями [24]. Так, в работе [24] рассматривался кристалл с N парамагнитными примес-

ными центрами со спином S в постоянном поле H_0 . Кристалл представляет собой резонатор акустических продольных волн с частотой ω , резонансной для переходов $\Delta M = 2$ в зеемановском спектре системы (M — магнитное квантовое число). Гамильтониан такой системы имеет вид [24]:

$$H = \hbar\omega \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right) + \sum_{j=1}^N \hbar\omega_0 S_j^z + \\ + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N [G (S_j^+)^2 a_k e^{ikr_j} - G^* (S_j^-)^2 a_k^\dagger e^{-ikr_j}], \quad (53)$$

где a_k^\dagger , a_k — операторы фононов с волновым вектором k ; ω_0 — частота зеемановского расщепления; S_j — операторы спина S , и члены $G (S_j^+)^2$, $G^* (S_j^-)^2$ представляют спиновую часть тензорного спин-фононного взаимодействия (см. подробнее [24]). Такой гамильтониан относится к общему классу, рассмотренному в настоящем разделе, и описывает фазовый переход. Экспериментально такой переход можно, по-видимому, наблюдать по резкому усилению рассеяния Мандельштама — Бриллюэна вблизи θ_C [24].

Как уже отмечалось в п. 1.3, общей особенностью таких систем является одновременное упорядочение в подсистемах вещества и поля. В моделях [82, 83], где квазиспиновая или фермионная подсистема взаимодействует с фононами кристаллической решетки, при фазовом переходе происходят одновременное упорядочение в веществе и структурная перестройка в решетке.

Различные физические модели обсуждаются также в следующем разделе.

2. ОБОБЩЕНИЯ МОДЕЛИ ДИККЕ И ОПИСАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ

2.1. Проблема реализации условий сильной связи в многокомпонентной системе. В предыдущем разделе уже говорилось о том, что фазовый переход в сверхизлучательное состояние возможен лишь при выполнении условия сильной связи типа (4), имеющего физический характер. Это обстоятельство может служить серьезным препятствием для реализации такого перехода в конкретных физических системах. В этой связи в работе [32] приводились доводы в пользу того, что в двухкомпонентной системе для фазового перехода в обеих компонентах достаточно выполнения условия сильной связи лишь для одной из компонент. Для системы с произвольным числом компонент проблема существования сверхизлучательного фазового перехода исследовалась в [37].

Следуя [37], рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H^{(m, n)} = \sum_{i=1}^m \hbar\omega_i a_i^\dagger a_i + \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \sigma_j^z + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} (\sigma_j^- a_i^\dagger + \sigma_j^+ a_i). \quad (54)$$

Здесь $\sigma_j \equiv \sum_j \sigma_{jj}$; m — число мод; n — число компонент, т. е. «сортов» двухуровневых излучателей (m и n — фиксированные числа), и параметры λ_{ij} определяются обычным для модели Дикке образом. Предполагается, что каждая компонента состоит из одного и того же макроскопического числа излучателей N . В соответствии с методом, изложенным в предыдущем разделе, совершим ренормировку операторов поля

$$a_i^{\dagger} \rightarrow \tilde{a}_i^{\dagger} = a_i^{\dagger} + \frac{1}{\hbar\omega_i \sqrt{N}} \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \sigma_j^{\dagger}; \quad a_i \rightarrow \tilde{a}_i = a_i + \frac{1}{\hbar\omega_i \sqrt{N}} \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \sigma_j.$$

В результате эффективный гамильтониан (при $N \rightarrow \infty$) M -системы может быть представлен в виде (частный случай гамильтониана \tilde{H} из п. 1.2 предыдущего раздела)

$$H_M^{(m, n)} = \sum_j \epsilon_j \sigma_j^z - \frac{1}{N} \sum_{i, j} \frac{\lambda_{ij}^2}{\hbar\omega_i} \sigma_i^{\dagger} \sigma_j - \frac{1}{N} \sum_{j, k} \frac{\lambda_{ij} \lambda_{ik}}{\hbar\omega_i} \sigma_j^{\dagger} \sigma_k, \quad j \neq k. \quad (55)$$

Последний член в (55) выделен, так как описывает взаимодействие квазиспинов разных сортов. Такого рода взаимодействие встречается в ряде задач теорий магнетизма и сегнетоэлектричества [88, 89]. При исследовании систем с таким взаимодействием необходимо использовать не стандартный вариационный принцип, связанный с минимизацией свободной энергии, но более сложный принцип минимакса, введенный в [90], так как в противном случае можно получить нефизические результаты [89]. Распространение принципа минимакса на квазиспиновые системы достаточно общего вида было дано в [91]. Основная идея подхода состоит в следующем. Пусть для простоты гамильтониан содержит взаимодействие частиц только двух сортов, описываемых квазиспиновыми операторами $\Lambda^{(1)}$, $\Lambda^{(2)}$ соответственно:

$$H = -\frac{\lambda}{N} \Lambda^{(1)} \Lambda^{(2)}, \quad \Lambda^{(j)} = \sum_{f=1}^N \sigma_{fj}^{\pm}, \quad [\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}] = 0.$$

Этот гамильтониан тождественным образом может быть представлен в виде

$$H = -\frac{\lambda}{2N} P^2 + \frac{\lambda}{2N} \{(\Lambda^{(1)})^2 + (\Lambda^{(2)})^2\}, \quad (56)$$

где $P \equiv \Lambda^{(1)} + \Lambda^{(2)}$. Аппроксимирующий термодинамически эквивалентный гамильтониан для (56) выбирается в виде

$$H_0 = -\frac{\lambda}{2} (2P - \xi) \xi + \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^2 (2\Lambda^{(j)} - \eta_j) \eta_j,$$

причем вариационные параметры ξ, η_j определяются из условия [88, 89]

$$\min_{(\xi)} \max_{(\eta_j)} F_0, F_0 \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{\Theta}{N} \ln \text{Sp} e^{-H_0/\Theta} \right\}.$$

Отметим, что порядок экстремумов здесь существен [50, 90].

В случае гамильтониана (55) последний член по аналогии с (56) может быть представлен в следующей форме:

$$-\frac{1}{N} \sum_{i=1}^m \sum_{j, k=1}^n \frac{\lambda_{ij} \lambda_{ik}}{2\hbar\omega_i} (1 - \delta_{jk}) [(\sigma_j^- + \sigma_k^+)^2 - (\sigma_j^-)^2 - (\sigma_k^+)^2].$$

Теперь, используя принцип минимакса, нетрудно показать, что гамильтониан M -системы в (54) термодинамически эквивалентен аппроксимирующему гамильтониану

$$H_M^{(m, n)}(\xi) = \sum_i \varepsilon_j \sigma_j^z - \sum_i \sum_{j, k} \frac{\lambda_{ij} \lambda_{ik}}{\hbar\omega_i} (\sigma_j^- \xi_k + \sigma_j^+ \xi_j^* - \xi_j^* \xi_k), \quad (57)$$

где $\xi_k = \langle \frac{\sigma_k^+}{N} \rangle$. Параметр ξ_k просто связан со спонтанной поляризацией P_k в k -й компоненте: $P_k \propto |\xi_k|$. Поэтому величины ξ_k могут рассматриваться как параметры порядка в M -системе. Для B -системы параметром порядка, характеризующим заполнение i -й моды, является $\sum_j \lambda_{ij} |\xi_j|$. Гамильтониан (57) линеен по операторам σ^\pm и легко диагонализуется. После несложных вычислений получаем для свободной энергии M -системы:

$$F_M = \sum_i \sum_{j, k} \frac{\lambda_{ij} \lambda_{ik}}{\hbar\omega_i} \xi_j^* \xi_k - \Theta \sum_j \ln 2 \text{ch} \frac{E_j}{\Theta},$$

где

$$E_j = \sqrt{\varepsilon_j^2 + |A_j|^2},$$

$$A_j = \sum_i \left\{ \frac{\lambda_{ij}^2}{\hbar\omega_i} \xi_j + \sum_k (1 - \delta_{jk}) \frac{\lambda_{ij} \lambda_{ik}}{\hbar\omega_i} \xi_k \right\}.$$

Параметры порядка ξ_j являются решениями системы [37]:

$$A_j = A_j \sum_{i, k} \frac{\lambda_{ij} \lambda_{ik}}{\hbar\omega_i} \frac{\text{th}(E_j/\Theta)}{2E_j}; \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (58)$$

Ясно, что при любой температуре $\Theta \geq 0$ имеет место решение

$$\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = 0,$$

соответствующее отсутствию упорядочения. Будем искать далее нетривиальные решения. Предположим, что при определенной температуре какое-то из $\xi_j = \xi_{j_0} \neq 0$, тогда как все остальные $\xi_j = 0$. Тогда вместо (58) имеем

$$\sum_i \frac{\lambda_{ij}\lambda_{ij_0}}{\hbar\omega_i} \xi_{j_0} = \left(\sum_i \frac{\lambda_{ij}\lambda_{ij_0}}{\hbar\omega_i} \xi_{j_0} \right) \sum_{i,h} \frac{\lambda_{ij}\lambda_{ih}}{\hbar\omega_i} \frac{\text{th}(\tilde{F}_j/\Theta)}{2\tilde{F}_j},$$

$$\tilde{F}_j \equiv \sqrt{\varepsilon_j^2 + \left| \sum_i \frac{\lambda_{ij}\lambda_{ij_0}}{\hbar\omega_i} \xi_{j_0} \right|^2}.$$

Так как по предположению $\xi_{j_0} \neq 0$, то

$$2\tilde{E}_j = \sum_{i,h} \frac{\lambda_{ij}\lambda_{ih}}{\hbar\omega_i} \text{th} \frac{\tilde{F}_j}{\Theta}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Эта система допускает нетривиальное решение лишь в том случае, когда выполняются условия связи

$$\forall_j, k = 1, 2, \dots, n, \quad \varepsilon_j / \text{Ar th } B_j = \varepsilon_k / \text{Ar th } B_k, \quad (59)$$

где $B_j \equiv \sum_{i,h} \frac{\lambda_{ij}\lambda_{ih}}{\hbar\omega_i}$. При этом критическая температура для j_0 -й компоненты

$$\Theta_c = \varepsilon_{j_0} / \text{Ar th } B_{j_0}. \quad (60)$$

Так как условия связи (59) не зависят от выбора конкретного значения j_0 ($1 \leq j_0 \leq n$), то в силу (60) фазовый переход во всех компонентах происходит при одной и той же критической температуре. Это обстоятельство представляется совершенно ясным с физической точки зрения. Действительно, возникновение спонтанной поляризации в любой из компонент приводит к появлению «среднего поля», в котором поляризуются все остальные компоненты.

В рассмотренной многокомпонентной системе стандартное условие сильной связи (4) заменяется

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_{ij}\lambda_{ik}}{\hbar\omega_{ij}} > 2\varepsilon_j, \quad (61)$$

причем одновременно должны выполняться и условия (59). Следует особо подчеркнуть тот факт, что критическая температура (60) лежит выше, чем соответствующая температура для каждой из компонент, если последнюю рассматривать как «чистую», т. е. независимо от других (рис. 2).

Таким образом, увеличение числа компонент (сортов излучателей) в системе действительно может сыграть роль дополнительного упорядочивающего фактора и приводит к существенному изменению условий существования фазового перехода.

В кристаллических сверхизлучательных системах значительное влияние на условия и характер фазового перехода оказывают тепловые колебания излучателей вблизи равновесных положений. Учет таких колебаний требует исследования гамильтонианов более общих, чем стандартная модель Дикке (2). К рассмотрению таких обобщений мы теперь и перейдем.

В связи с обобщениями модели Дикке, представляющими интерес с точки

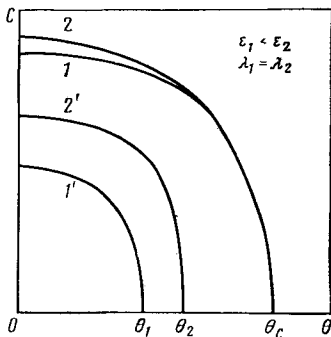


Рис. 2. Результат численного решения уравнения (30) для двухкомпонентной системы. Кривые 1', 2' соответствуют «чистым» компонентам

зрения физических приложений, укажем также так называемые сверхизлучательные модели с трехлинейным взаимодействием, рассматривавшиеся в ряде работ В. Б. Кириянова и В. С. Ярунина [133, 134]. Исследовавшийся гамильтониан имеет вид:

$$H = \hbar\omega a^+a + \sum_{f=1}^N \left\{ \varphi_f^+ \left[-\frac{\hbar\Omega}{2} \sigma^z + \frac{\lambda}{\sqrt{N}} (\sigma^+a + a^+\sigma^-) \right] \varphi_f \right\},$$

где $\varphi_f = (\alpha_f, \beta_f)$, $\alpha_f \alpha_f^+ - \kappa \alpha_f^+ \alpha_f = \beta_f \beta_f^+ - \kappa \beta_f^+ \beta_f = \delta_{ff}$, т. е. в системе происходит взаимодействие фотонного поля с осцилляторами решетки, имеющими частоту Ω . Оказывается, что в случае бозерешетки ($\kappa = 1$) пороговое значение параметра связи λ убывает с ростом величины

$$\langle n \rangle = \frac{1}{N} \left\langle \sum_f (\alpha_f^+ \alpha_f + \beta_f^+ \beta_f) \right\rangle,$$

характеризующей среднее число заполнения решетки (на узел). Этот результат позволяет предположить, что с увеличением числа уровней происходит ослабление условия сильной связи по аналогии с рассмотренным здесь случаем увеличения числа компонент.

2.2. Модели макроскопической двухуровневой системы в кристалле. Обсуждению особенностей поведения сверхизлучательных систем при наличии фононных степеней свободы посвящено большое число

работ (см., например, [22, 27, 38] и приведенные в них ссылки). Здесь мы рассмотрим лишь три основных подхода к исследованию указанной проблемы.

Как хорошо известно, в кристаллах всегда имеет место рассеяние Мандельштама — Бриллюэна — плоская электромагнитная волна дифрагирует на упругих волнах. Модификация модели Дикке, учитывающая такое рассеяние, была предложена в [92]. Соответствующий гамильтониан имеет вид:

$$H = \sum_q \hbar \omega_q a_q^+ a_q + \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \sum_f \sigma_f^z + \sum_{q, f} \frac{\lambda_q}{\sqrt{N}} (a_q \sigma_f^+ + a_q^+ \sigma_f^-) \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k (K_k b_k + K_k^* b_k^+) \right\} + \sum_k \hbar \Omega_k b_k^+ b_k. \quad (62)$$

Здесь b_k^+ (b_k) — оператор рождения (уничтожения) фонона с квазиимпульсом k и частотой Ω_k . Коэффициенты K_k , K_k^* определяются из выражения для энергии Бриллюэна [93]:

$$-\sum_f \mu_f E(x_f) (u_f \nabla) \rho(x_f),$$

где μ_f — оператор дипольного момента; x_f — координаты f -го излучателя; $E(x_f)$ — поперечное электромагнитное поле; u_f — оператор смещения f -го излучателя и $\rho(x_f)$ — средняя плотность. Для такой модели при учете лишь конечного числа мод для бозонных полей удалось показать [92], что наличие фононного вклада приводит к изменению стандартной формы условия сильной связи; при достаточно большом фононном вкладе в энергию системы фазовый переход в сверхизлучательное состояние меняет род со второго на первый.

Другой эффект, связанный с влиянием фононов, обусловлен возможной зависимостью параметра взаимодействия λ в модели Дикке от координат излучателей: $\lambda \rightarrow \lambda(x_f)$. В этой связи укажем работы [22] [94], в которых рассматривалось обобщение модели Дикке для систем с флуктуирующими параметрами диполь-фотонной связи $\lambda(x_f)$ при достаточно слабых условиях на функцию распределения и в качестве примера исследовалась сжимаемая модель Дикке, учитывающая классические колебания решетки. Рассмотрение квантовых колебаний «излучателей» в приближении одной фононной моды проводилось в [27] на основе того же подхода, что и в [22, 94]. Подчеркнем, что наличие зависимости $\lambda(x_f)$ может играть существенную роль лишь в том случае, когда длина волны электромагнитного поля сравнима с расстоянием a между соседними узлами решетки [22]*. Для такого обобщения модели Дикке было показано, что наличие фононных степеней свободы может изменить условие сильной связи и род фазового

* Обычно рассматривается стоячая электромагнитная волна в резонаторе. Физическая система является квазиодномерной, так как основную роль играют фононы с $k \parallel q$ [95].

перехода также и в этом случае [22, 27, 94]. Кроме того, было показано, что сильное взаимодействие фотонов с упругими колебаниями в кристалле может привести к макроскопической деформации решетки, т. е. к структурному фазовому переходу.

Заметим, что условие $\Lambda \ll a$, где Λ — длина волны электромагнитного излучения, соответствует рентгеновскому диапазону частот, тогда как существующие в настоящее время источники когерентного электромагнитного излучения обладают значительно большей длиной волны. Действительно, среднее расстояние между атомами в твердых телах $a = (3 \div 5) 10^{-8}$ М, тогда как, например, для оптического диапазона $\Lambda \sim 10^{-5}$ М. В том случае, когда

$$\Lambda \ll a, \quad (63)$$

константа связи λ меняется при тепловых колебаниях излучателей в кристалле очень слабо. Поэтому при выполнении условий (63) необходимо учитывать другие физические механизмы, связывающие дипольную, фотонную и фононную подсистемы в кристалле. Одним из таких механизмов может служить прямое электростатическое диполь-дипольное взаимодействие [33, 35, 38].

Действительно, когерентная оптическая волна создает в кристалле систему параллельных электрических диполей [96]. Взаимодействие таких диполей может быть записано по аналогии с ферромагнетиком [97] с помощью оператора

$$\sum_{ff'} \{ \Phi_{ff'} \sigma_f^+ \sigma_{f'}^- + \Phi_{ff'}^* \sigma_f^- \sigma_{f'}^+ + \Psi_{ff'} \sigma_f^z \sigma_{f'}^z \},$$

где Φ , Ψ — функции расстояния между соответствующими диполями:

$$\Phi_{ff} = \Phi(|x_f - x_f|), \quad \Psi_{ff} = \Psi(|x_f - x_{f'}|).$$

Эти последние могут быть разложены по относительным смещениям атомов [33], что позволяет ввести оператор диполь-фононного взаимодействия в гамильтониан.

Следуя нашим работам [33, 35, 38], рассмотрим обобщение модели Дикке, характеризуемое гамильтонианом

$$H = H_{\text{phot}} + H_{d-\text{phot}} + H_{\text{phon}} + H_d + H_{d-\text{phon}}. \quad (64)$$

Здесь оператор H_{phot} описывает резонансную моду электромагнитного поля

$$H_{\text{phot}} = \hbar \omega_0 a_0^+ a_0,$$

оператор H_d — дипольную подсистему

$$H_d = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \sum_f \sigma_f^z + \sum_{ff'} \Phi(|x_f - x_{f'}|) \sigma_f^- \sigma_{f'}^+,$$

оператор $H_{d-\text{phon}}$ — обычное взаимодействие в модели Дикке:

$$H_{d-\text{phon}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_f \lambda (\sigma_f^- a_0^+ + a_0 \sigma_f^+)$$

и оператор H_{phon} — свободное фононное поле в приближении конечного числа мод:

$$H_{\text{phon}} = \sum_k \hbar \Omega_k b_k^+ b_k.$$

Для того чтобы построить оператор $H_{d\text{-phon}}$, разложим, как предлагалось выше, функцию $\Phi(\cdot)$ по относительным смещениям $u_{ff'} = u_f - u_{f'}$, $u_f = x_f - f$. Для простоты ограничимся гармоническим приближением

$$H_{d\text{-phon}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{ff'} \sigma_f^+ \sigma_{f'}^- \sum_{k'} B_k(f, f') (b_k^+ + b_k),$$

где

$$B_k(f, f') = B_{-k}^*(f, f') = \frac{-i}{N^2 \sqrt{4M\hbar\Omega_k}} \sum_{\nu} \tau_k \nu \tilde{\Phi}(\nu) (e^{ikf} - e^{ikf'});$$

M — масса «атома», τ_k — единичный вектор поляризации фононов, $\tilde{\Phi}(\nu)$ — фурье-образ функции $\Phi(\cdot)$.

Чтобы получить точное решение, предположим теперь, что

$$\Phi(|f - f'|) = N^{-1} \varphi(|f - f'|),$$

где $\varphi(\cdot)$ — ограниченная функция, удовлетворяющая некоторым специальным условиям [50, 98, 99]. В этом случае, используя методы, изложенные в разд. 2 настоящей работы, для (64) можно построить эффективный термодинамически эквивалентный гамильтониан вида

$$\tilde{H} = \tilde{H}_d + \tilde{H}_{\text{phon}} + \tilde{H}_{\text{phot}}, \quad (65)$$

где

$$\tilde{H}_d = - \sum_{ff'} G(f, f') \sigma_f^+ \sigma_{f'}^- + \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \sum_f \sigma_f^z + \sum_k \frac{N}{\hbar \Omega_k} \eta_k \eta_k^*,$$

$$\tilde{H}_{\text{phon}} = \sum_k \hbar \Omega_k \tilde{b}_k^+ \tilde{b}_k, \quad \tilde{b}_k^+ = b_k^+ + \frac{\eta_k^* \sqrt{N}}{\hbar \Omega_k},$$

$$\tilde{H}_{\text{phot}} = \hbar \omega_0 \tilde{a}_0^+ \tilde{a}_0, \quad \tilde{a}_0 = a_0 + \frac{\lambda \sqrt{N}}{\hbar \omega_0} \xi.$$

Здесь

$$G(f, f') = \frac{\lambda^2}{N \hbar \omega_0} \varphi(f, f') + \sum_k \frac{2}{\hbar \Omega_k} \text{Re} \{ \eta_k^* B_k(f, f') \}.$$

Комплексные параметры ξ и η_k будут определены ниже.

Гамильтониан дипольной подсистемы в (65) в соответствии с методом аппроксимирующих гамильтонианов [50] можно заменить термо-

динамически эквивалентным гамильтонианом вида

$$H_d^{(0)} = - \sum_{ff'} G(f, f') (\sigma_f^+ \xi + \sigma_f^- \xi^* - \xi \xi^*) + \\ + \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \sum_f \sigma_f^z + \sum_k \frac{N}{\hbar \Omega_k} \eta_k \eta_k^*,$$

причем входящие сюда параметры ξ и η_k определяются из уравнений самосогласования [38]

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{(\Delta + Bx)x}{2E} \operatorname{th} \frac{E}{\Theta}, \\ x &= |\xi|^2, \\ \eta_k &= \left\langle \frac{1}{N} \sum_{ff'} B_k(f, f') \sigma_f^+ \sigma_{f'}^- \right\rangle = \tilde{B}_k x, \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

где

$$\Delta \equiv \frac{\lambda^2}{\hbar \omega_0} - \frac{1}{N} \sum_p \varphi(p), \quad B \equiv 2 \sum_k \frac{1}{N} \sum_p B_k(p) / \hbar \Omega_k; \\ E \equiv \sqrt{\left(\frac{1}{2} \hbar \omega_0\right)^2 + (\Delta + Bx)^2 x^2}.$$

Соответствующая $H_d^{(0)}$ плотность свободной энергии Гиббса есть [35]

$$\bar{F}(\Delta, B) = (\Delta + Bx)x + \frac{1}{2} Bx^2 - \Theta \ln 2 \operatorname{ch} \frac{E}{\Theta}. \quad (67)$$

Как нетрудно видеть, при фиксированных Θ и $\hbar \omega_0$ полный дифференциал функции (67) может быть представлен в виде

$$d\bar{F} = -x d\Delta - \frac{1}{2} x^2 dB.$$

Поэтому величина x , сопряженная «внешнему параметру» Δ , может рассматриваться как параметр порядка дипольной подсистемы, тогда как $y \equiv x^2/2$ — параметр, сопряженный с «внешним» фоновым параметром B .

Рассмотрим сначала случай $B = 0$, т. е. пренебрежем фоновым вкладом. Тогда уравнение (66), всегда имеющее нулевое решение, будет также допускать существование ненулевого решения при выполнении условия сильной связи

$$\Delta > \hbar \omega_0 \quad (68)$$

и температурах

$$\Theta < \Theta_c = \hbar \omega_0 / \ln \left(\frac{\Delta + \hbar \omega_0}{\Delta - \hbar \omega_0} \right).$$

В точке Θ_c происходит фазовый переход второго рода в сверхизлучательное состояние, характеризуемое параметром порядка $x > 0$ (рис. 3, кривая 1). Отметим, что учет электростатического дипольного взаимодействия Φ привел к изменению условия сильной связи (68) по сравнению со стандартным случаем (4) и к понижению критической температуры.

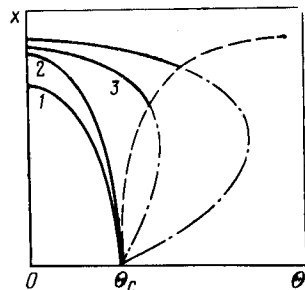


Рис. 3. Температурная зависимость параметра порядка при фиксированном $\Delta > \hbar\omega_0$ и различных B :

пунктирной кривой указаны точки перехода первого рода, штрихпунктирной — неустойчивые решения

Пусть теперь параметр Δ фиксирован и $B \neq 0$. Если $B \leq B_c$, где

$$B_c = \frac{\Delta^2}{(\hbar\omega_0)^2 \Theta_c} [\Delta (3\Delta + \Theta_c) + (\hbar\omega_0)^2], \quad (69)$$

то фазовый переход в системе является переходом второго рода, но кривая $x(\Theta, B_1)$ лежит выше кривой $x(\Theta, B_2)$, если $B_1 < B_2$ (рис. 3, кривая 2). Если же $B > B_c$, то в системе меняется характер фазового перехода. Температура Θ_{tr} перехода первого рода определяется из условия

$$\bar{F}(\Theta_{tr}) = -\Theta_{tr} \ln 2 \operatorname{ch} \frac{\hbar\omega_0}{2\Theta_{tr}}$$

(рис. 3, кривая 3), причем $\Theta_{tr} > \Theta_c$.

При достаточно больших значениях B фазовый переход первого рода возможен в системе и при нарушении условия сильной связи (68), когда переход второго рода невозможен принципиально. Соответствующая ситуация изображена на рис. 4.

На рис. 5 приведена зависимость параметра порядка x от температуры при фиксированном B и меняющихся Δ . Видно, что с увеличением Δ температура перехода первого рода растет, достигая при $\Delta = \Delta_c$, определяемом из условия $B = B_c(\Delta_c)$, температуры Θ_c , после чего при увеличении Δ фазовый переход становится переходом второго рода.

Вернемся к рассмотрению гамильтониана $H_d^{(0)}$. После перехода к диагональному представлению он принимает вид:

$$H_d^{(0)} = \sum_f ES_f^z + N \frac{B}{2} x^2 + N (\Delta + Bx) x,$$

где $\sum_f S_f^z$ — оператор разности заселенности уровней:

$$S_f^z = (u^2 - v^2) \sigma_f^z - 2uv (\sigma_f^+ + \sigma_f^-),$$

$$u = \sqrt{\frac{E + \hbar\omega_0/2}{2E}}, \quad v = \sqrt{\frac{E - \hbar\omega_0/2}{2E}}.$$

Тогда

$$S = \left\langle \frac{1}{N} \sum_f S_f^z \right\rangle = 1 - 2(e^{2E/\Theta} + 1)^{-1}.$$

Зависимость S от Θ изображена на рис. 6.

Далее, как нетрудно убедиться, в системе имеет место когерентная квазиламаровская прецессия квазиспинов (средних дипольных моментов)

$$\frac{d\mathbf{S}_f}{dt} = [\mathbf{S}_f \times \mathcal{E}], \quad \mathcal{E} = \{0, 0, E\}$$

с частотой E , зависимость которой от температуры изображена на рис. 7.

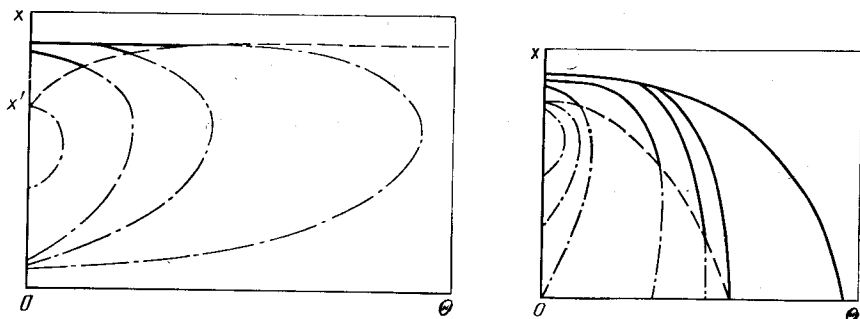


Рис. 4. Температурная зависимость параметра порядка при фиксированном $\Delta < \hbar\omega_0$ и различных B ; $x' = \frac{1}{6B_0} (B_0 - 2\Delta + \sqrt{4\Delta^2 + 8\Delta B_0 + B_0^2 - 24B_0\hbar\omega_0})$; пунктирной кривой указаны точки перехода первого рода; штрихпунктирной — неустойчивые решения

Рис. 5. Температурная зависимость параметра порядка при фиксированном B и различных $\hbar\omega_0$. Пунктир соответствует точкам перехода первого рода, штрихпунктир — неустойчивым решениям

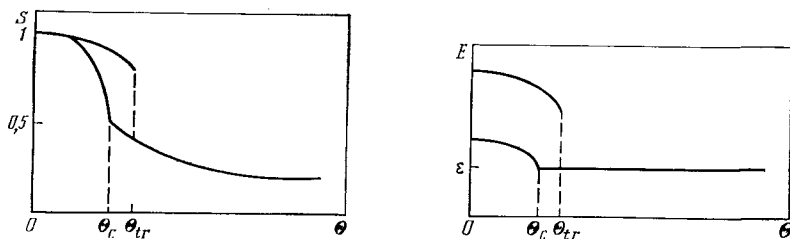


Рис. 6. Температурная зависимость разности заселенностей. Сплошная линия соответствует переходу второго рода

Рис. 7. Температурная зависимость частоты коллективной прецессии. Сплошная кривая соответствует переходу второго рода

Таким образом, учет прямого электростатического взаимодействия диполей и эффектов, связанных с наличием фононной подсистемы, приводит к существенному изменению условий сильной связи и в некоторых случаях к смене рода перехода в сверхизлучательное состояние. Кроме того, переход в сверхизлучательное состояние в рассмотренной модели сопровождается макроскопической деформацией решетки, т. е. структурным переходом. Заметим, что такая деформация в ряде случаев может рассматриваться по аналогии со сверхизлучением (см. п. 1.3 и [24]).

2.3. Проблема сверхизлучательной генерации в сегнетоэлектриках. Рассмотрим одну из возможных физических реализаций модельной задачи, исследованной в предыдущем пункте. Прежде всего заметим, что взаимодействие, описывающее сегнетоэлектрическое упорядочение в кристаллах, выбирается обычно в форме, согласующейся с H_d в (64) (см., например, [100]). Так как параллельное упорядочение диполей в сегнетоэлектриках возникает самопроизвольно при понижении температуры ниже точки Кюри Θ_S , указанная аналогия позволяет предположить, что в системе сегнетоэлектрический резонатор — электромагнитное поле ниже Θ_S может возникнуть сверхизлучательная конденсация резонансной моды электромагнитного поля [44].

Следуя [46], рассмотрим простейшую квазиспиновую модель сегнетоэлектрика типа порядок — беспорядок, взаимодействующего с резонансной модой электромагнитного поля, и исследуем возможность сверхизлучательной генерации в такой системе. Пусть система состоит из резонатора (кристалла типа KN_2PO_4) и стоячей электромагнитной волны. Гамильтониан такой системы имеет вид [46]:

$$H = H_K + H_{\text{phot}} + H_{d\text{-phot}}. \quad (70)$$

Здесь H_K — так называемый гамильтониан Кубаяши [81]:

$$H_K = \hbar\Omega b^+ b - \varepsilon \sum_j \sigma_j^x - \frac{1}{2} \sum_{ff'} J(f, f') \sigma_j^z \sigma_{f'}^z + \frac{1}{\sqrt{N}} K \sum_j \sigma_j^z (b^+ + b),$$

где $\hbar\Omega$ — энергия оптического фонона; $\varepsilon > 0$ — интеграл туннелирования протона в двухминимумном потенциале водородной связи; J — параметр сегнетоэлектрического взаимодействия и K — константа квазиспин-фононной связи. Оператор H_{phot} описывает энергию резонансной моды электромагнитного поля:

$$H_{\text{phot}} = \hbar\omega a^+ a.$$

Оператор энергии взаимодействия диполей с резонансной фотонной модой $H_{d\text{-phot}}$ имеет вид:

$$H_{d\text{-phot}} = \frac{1}{\sqrt{N}} D \sum_j \sigma_j^z (a^+ + a),$$

где D — параметр диполь-фотонной связи:

$$D = d \sqrt{2\pi\hbar\omega\rho}.$$

Здесь ρ — плотность среды и d — величина дипольного электрического момента перехода между симметричными и антисимметричными состояниями протона. При этом

$$\hbar\omega = E_{\text{ant}} - E_{\text{sym}},$$

где E_{\dots} — соответствующая энергия. Учитывая определение интеграла туннелирования [100], имеем отсюда для частоты резонансной моды

$$\omega = 2\varepsilon/\hbar. \quad (71)$$

Как было показано в [82], диполь-фононное взаимодействие в модели Кобаяши может быть эффективным образом учтено за счет перенормировки параметра диполь-дипольного взаимодействия:

$$J(f, f') \rightarrow J(f, f') + 2K^2/N\hbar\Omega.$$

Более того, так как (70) представляет собой частный случай гамильтониана (64) предыдущего пункта, в термодинамическом пределе его можно заменить эффективным гамильтонианом вида

$$\left. \begin{aligned} \tilde{H} &= \tilde{H}_{\text{phon}} + \tilde{H}_{\text{phot}} + \tilde{H}_d; \\ \tilde{H}_{\text{phon}} &= \hbar\Omega\tilde{b}^+\tilde{b}; \quad \tilde{b} = b + K\sqrt{N}\xi(\hbar\Omega)^{-1}; \\ \tilde{H}_{\text{phot}} &= 2\varepsilon\tilde{a}^+\tilde{a}, \quad \tilde{a} = a + D\sqrt{N}\xi(2\varepsilon)^{-1}, \\ \tilde{H}_d &= -\varepsilon \sum_f \sigma_f^z - \frac{1}{2} \sum_{ff'} \mathcal{Y}(f, f') \sigma_f^z \sigma_{f'}^z, \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(f, f') &= J(f, f') + 2K^2(N\hbar\Omega)^{-1} + 2D^2(N \cdot 2\varepsilon)^{-1}, \\ \xi &= \langle N^{-1} \sum_f \sigma_f^z \rangle. \end{aligned}$$

В эффективном гамильтониане (72) каждая из подсистем определена таким образом, что соответствующие пространства состояний не пересекаются; следовательно, каждая из подсистем вносит независимый аддитивный вклад в полную свободную энергию системы. В соответствии с результатом предыдущего раздела конденсация резонансной фотонной моды определяется величиной

$$P = N^{-1} \langle a^+a \rangle = D^2(2\varepsilon)^{-2}\xi^2. \quad (73)$$

Сверхизлучательное состояние возникает в системе при $P > 0$. Найдем условия, при которых $P > 0$. В этой связи отметим, что обычно в теории сегнетоэлектричества используют приближение среднего поля, приводящее к удовлетворительному согласию с эксперимен-

том [101, 102]. В соответствии с методом аппроксимирующих гамильтонианов [50] указанное приближение приводит к точному результату для квазиспиновой системы с гамильтонианом типа \tilde{H}_d , когда ядро $\mathcal{Y}(f, f')$ описывает взаимодействие «бесконечного радиуса». В простейшем случае достаточно предположить, что

$$\mathcal{Y}(f, f') = \mathcal{Y}N^{-1}, \quad \mathcal{Y} = \text{const},$$

т. е.

$$J(f, f') = \text{const} \cdot N^{-1}.$$

Тогда для параметра порядка нетрудно получить уравнение

$$\xi = \mathcal{Y}\xi E^{-1} \text{th}(E\Theta^{-1}), \tag{74}$$

где $E = \sqrt{\varepsilon^2 + \mathcal{Y}^2\xi^2}$. Как нетрудно видеть, $\xi > 0$ при условии

$$\varepsilon < \mathcal{Y}, \quad \Theta < \Theta_S = \varepsilon/\text{Arth}(\varepsilon\mathcal{Y}^{-1}). \tag{74a}$$

Подчеркнем, что соотношение (74a) играет здесь роль условия сильной связи (4). При выполнении (74a) в системе происходит сегнетоэлектрическое упорядочение, характеризуемое параметром порядка (74). В силу (73) это соответствует макроскопическому заполнению резонансной фотонной моды. Таким образом, возникновение спонтанной поляризации в сегнетоэлектрике можно рассматривать как получение инверсной заселенности с помощью чисто тепловой накачки. Когерентное электромагнитное сверхизлучение в такой системе может быть реализовано, например, при быстрой переполяризации сегнетоэлектрика во внешнем классическом поле. Такого рода эффект наблюдался, по-видимому, в монокристаллах BaTiO_3 ниже Θ_S [103]. Известную аналогию можно провести также с процессом лазерной генерации в парамагнетиках, впервые реализованным в кристаллах $\text{La}_2\text{Mg}_3(3\text{O}_3)_{12} \cdot 24\text{H}_2\text{O}$ (LaMN) с примесью CO^+ и Ce^{3+} [104].

Таким образом, при $\Theta < \Theta_S$ и внезапном обращении внешнего классического поля в сегнетоэлектрике KDP-типа возникает инверсная заселенность, т. е. такую систему можно рассматривать как лазер с тепловой накачкой. Мощность излучения в такой системе можно оценить с помощью соотношения

$$U = |\mathcal{E}_S - \mathcal{E}_P|\tau, \tag{75}$$

где $\mathcal{E}_S = \frac{1}{2} \mathcal{Y}\xi^2 - E\text{th}(E\Theta^{-1})$; $\mathcal{E}_P = -\varepsilon\text{th}(\varepsilon\Theta^{-1})$ и τ — характерное время релаксации. Вопрос об определении τ будет детально исследован в следующем разделе.

Заметим далее, что в соответствии с (71) частота излучения определяется интегралом туннелирования. Последний существенно меняется при переходе от вещества к веществу. Кроме того, в силу изотопического эффекта [102] частота излучения должна меняться при

дейтерирования. Зависимость интеграла туннелирования от массы туннелирующей частицы определяется соотношением [105]

$$\varepsilon = \frac{\Omega_0}{2} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{D}{\Omega_0} \Phi \left(\frac{D}{2\rho\Omega_0} \right) \right] + \frac{2\rho}{V\pi} \exp \left[- \left(\frac{D}{2\rho\Omega_0} \right)^2 \right] \right\} e^{-\rho^2},$$

где

$$\rho^2 = m\Omega_0 \frac{(2\delta)^2}{\hbar}; \quad \Phi(x) = \frac{2}{V\pi} \int_0^x e^{-y^2} dy;$$

m — масса туннелирующей частицы; Ω_0 — частота осциллятора в одном из минимумов потенциала водородной связи; 2δ — расстояние между минимумами (для KDP $2\delta \sim 3,5 \times 10^{-8}$ м); D — параметр асимметрии ($D \sim \sim 250 \div 350$ см⁻¹).

В рассмотренном случае также имеет место когерентная квазиларморовская прецессия квазиспинов, описываемая уравнением [46]

$$\frac{d\tilde{\xi}}{dt} = [\tilde{\xi}(t) \times \mathcal{E}(t)], \quad \mathcal{E} = \{2\varepsilon, 0, 2\mathcal{Y}\xi_z(t)\}.$$

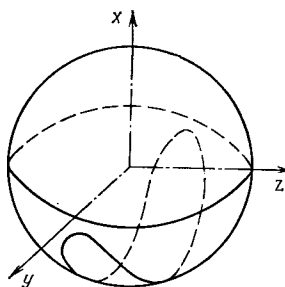


Рис. 8. Траектория конца вектора $\tilde{\xi}(t)$, определяемая уравнением прецессии

Траектория вектора $\tilde{\xi}$ определяется уравнениями

$$\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2 = C_1 = \text{const}; \quad \varepsilon\xi_x + \frac{1}{2}\mathcal{Y}\xi_z^2 = C_2 = \text{const};$$

$$t = \frac{-\mathcal{Y}}{4\sqrt{2\varepsilon^4\varepsilon^2 + \mathcal{Y}(C_1\mathcal{Y} - 2C_2)}} \{F(\varphi(t), k) - F(\varphi(0), k)\},$$

где $F(\varphi, k)$ — эллиптический интеграл первого рода и

$$\varphi(t) = \arcsin \left\{ \xi_z(t) \frac{2\mathcal{Y}\sqrt{\varepsilon(C_2\mathcal{Y} - \varepsilon^2 + \gamma)}\sqrt{\gamma}}{\sqrt{(C_1\varepsilon^2 - C_2^2)[2\mathcal{Y}^2(\gamma + \varepsilon^2 - C_2\mathcal{Y}) + \xi_z^2(t)]}} \right\},$$

$$k \equiv \frac{\sqrt{C_1\varepsilon^2 - C_2^2}}{2\mathcal{Y}\sqrt{C_2\mathcal{Y} - \varepsilon^2 + \gamma}\sqrt{\gamma}}; \quad \gamma \equiv \varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 + \mathcal{Y}(C_1\mathcal{Y} - 2C_2)} \quad (\text{рис. 8}).$$

Далее, применяя соотношения (50) для фоновых операторов, нетрудно получить для деформации решетки следующее выражение:

$$\langle u_f \rangle = 2k\xi/\hbar\Omega,$$

где $\langle u_f \rangle$ — среднее смещение f -го излучателя.

Проведенное рассмотрение без труда обобщается на сегнетоэлектрики других типов, отличных от КДР.

Так как для сегнетоэлектриков характерно наличие сильной связи между дипольной и фононной подсистемами, в них имеют место стрикционные и пьезоэлектрические эффекты. Последние также могут быть использованы для создания инверсной заселенности при $\Theta > \Theta_s$ [46]. С другой стороны, воздействие коротковолнового классического поля при определенных условиях может привести к частичной или полной компенсации стрикционных эффектов [46]. К рассмотрению этой возможности мы теперь и перейдем.

2.4. Модель Дикке на решетке во внешнем классическом поле. Влияние внешнего классического поля на фазовый переход в модели Дикке рассматривалось Джилмором и Боуденом [19]. В этом случае стандартный гамильтониан Дикке следует дополнить членом вида

$$v(x_f)(\sigma_f^+ + \sigma_f^-), \quad (76)$$

где $v(\cdot)$ — параметры, вводящие классическое поле в точке x_f . В работе [19] рассматривался простейший случай $v(x_f) = v = \text{const}$ и было показано, что для параметра порядка в M -системе при этом не реализуется тривиальное решение. Более интересные ситуации реализуются, однако, тогда, когда излучатели помещены в узлах сжимаемой решетки и длина волны классического поля сравнима с параметром решетки [46]. При этом полный гамильтониан системы имеет вид:

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + \sum_f \left\{ \frac{1}{2} \hbar\omega \sigma_f^z + \lambda N^{-1/2} (\sigma_f^+ a + \sigma_f^- a^\dagger) + v(x_f) (\sigma_f^+ + \sigma_f^-) \right\} + \sum_q \hbar\Omega_q b_q^\dagger b_q. \quad (77)$$

Ограничимся рассмотрением случая, когда система представляет собой резонатор и поле v — синусоидальную стоячую волну с фазой φ и волновым вектором k

$$v(x_f) = v_0 \sin(kx_f - \varphi), \quad v_0 = \text{const}.$$

Пусть u_f — смещение f -го излучателя; $u_f = x_f - f$. Разложим $v(x_f)$ по смещениям u_f :

$$v(x_f) = v(f) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (u_f \nabla_{u_f})^n v(f).$$

Ограничимся линейным по u_f приближением и, переходя обычным образом к представлению вторичного квантования, получаем вместо

последнего слагаемого в (77)

$$N^{-1/2} \sum_f (\sigma_f^- + \sigma_f^+) \sum_q [B_q(f) (b_q + b_{-q}^+) + B_q^*(f) (b_{-q} - b_q^+)];$$

$$B_q(f) = \tau_q k (2m\Omega_q)^{-1/2} e^{iqf} v_0 \cos(kf - \varphi).$$

Здесь m — масса «излучателя»; τ_q — единичный вектор поляризации фонона с квазиимпульсом q . Предполагая наличие сильной связи между дипольной и фононной подсистемами и нестабильность одной или нескольких фононных мод при сверхизлучательном фазовом переходе, ограничимся далее рассмотрением лишь конечного числа фононных мод. При этом, используя изложенные выше методы, для дипольной подсистемы в (77) получаем эквивалентный эффективный гамильтониан вида

$$H_d = \sum_f \left\{ \frac{1}{2} \hbar \omega \sigma_f^z + v(f) \sigma_f^x - \right.$$

$$\left. - N^{-1} \sum_{f'} \left[\frac{\lambda^2}{\hbar \omega} \sigma_f^+ \sigma_{f'}^- + 2 \sum_q \frac{B_q(f) B_q^*(f')}{\hbar \Omega_q} \sigma_f^z \sigma_{f'}^x \right] \right\}.$$

В соответствии с общим методом [50] этот гамильтониан, в свою очередь, можно аппроксимировать оператором

$$H_d^{(0)} = \sum_f \left\{ \frac{1}{2} \hbar \omega \sigma_f^z + v(f) \sigma_f^x - \frac{\lambda^2}{\hbar \omega} (\sigma_f^- \xi^* + \sigma_f^+ \xi - \xi \xi^*) - \right.$$

$$\left. - \sum_q \frac{2}{\hbar \Omega_q} [B_q(f) \eta_q^* + B_q^*(f)] \sigma_f^x \right\} + \sum_q 2N \frac{1}{\hbar \Omega_q} \eta_q \eta_q^*.$$

Входящие сюда вариационные параметры ξ и η_q определяются из уравнений самосогласования вида

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -N^{-1} \sum_f z_f \frac{\text{th}(E_f/\Theta)}{E_f}, \\ \eta_q &= -N^{-1} \sum_f B_q(f) \text{Re } z_f \frac{\text{th}(E_f/\Theta)}{E_f}, \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

где

$$E_f = \frac{1}{2} \sqrt{(\hbar \omega)^2 + 4z_f z_f^*},$$

$$z_f = v(f) - \frac{\lambda^2}{\hbar \omega} \xi - \sum_q \frac{2}{\hbar \Omega_q} [B_q(f) \eta_q^* + B_q^*(f) \eta_q].$$

Уравнения (78) позволяют определить не только модуль дипольного параметра порядка ξ , как в стандартной модели Дикке, но и аргумент $\arg \xi = \Psi$. Решения системы (78) существенно зависят от дли-

ны волны и фазы классического поля. Рассмотрим лишь несколько характерных ситуаций. Из соображений простоты и наглядности ограничимся случаем, когда эффективна лишь одна мода фононного поля $\Omega_q = \Omega$, и будем считать вектор k коллинеарным оси Ox (квазиодномерный кристалл).

С л у ч а й 1. Длина волны классического поля Δ равна постоянной решетки a и $\varphi = -(\pi/2)$ (см. рис. 8, *a*). Тогда $v(f) = v_0$, $B(f) = 0$. Второе уравнение в (78) имеет только тривиальное решение $\eta = 0$.

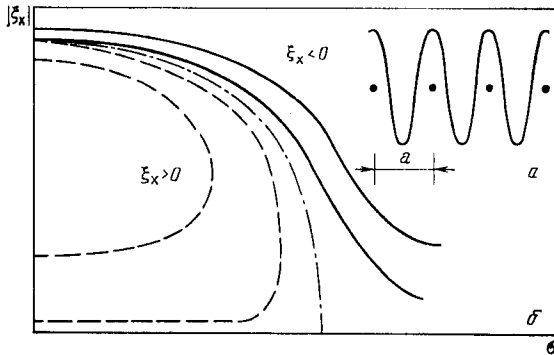


Рис. 9. Линейная цепочка излучателей в классическом поле с длиной волны a и фазой $\varphi = -\pi/2$ (*a*) и температурная зависимость вещественного параметра порядка ξ_x (*b*).

Иначе говоря, при таком выборе поля система оказывается «нечувствительной» к малым тепловым колебаниям излучателей в кристалле. Из первого уравнения (78) имеем

$$\left. \begin{aligned} \text{Re } \xi &\equiv \xi_x = -\frac{v_0 - \lambda^2 \xi_x / \hbar \omega}{E} \text{th } \frac{E}{\Theta}, \\ \text{Im } \xi &\equiv \xi_y = \frac{\lambda^2 \xi_y}{\hbar \omega E} \text{th } \frac{E}{\Theta}, \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

$$E \equiv \frac{1}{2} \sqrt{(\hbar \omega)^2 + 4(v_0 - \lambda^2 \xi_x / \hbar \omega)^2}.$$

Отсюда $\text{Im } \xi = 0$. Зависимость ξ_x от Θ для различных соотношений между v_0 и $\lambda^2/\hbar\omega$ приведена на рис. 9, *б*. Для каждого фиксированного v_0 и $\lambda^2/\hbar\omega$ существуют две ветви решения, одна из которых соответствует случаю $\xi_x > 0$ (пунктирные линии), а другая случаю $\xi_x < 0$ (сплошная линия). При $v_0 \rightarrow 0$ ветви сближаются, переходя при $v_0 = 0$ в обычное решение для модели Дикке (штрихпунктирная линия). Такая ситуация наглядно иллюстрирует концепцию квазисредних Н. Н. Боголюбова [80], согласно которой сколь угодно малое возмущение может привести к качественному изменению в поведении параметра порядка. Исследуя соответствующие свободные энергии,

можно показать, что абсолютно устойчивым оказывается решение с $\xi_x < 0$. Укажем, что сходный результат был получен в работе Джилмора и Боудена [19] для постоянного внешнего классического поля.

В рассмотренном случае фазовый переход в системе отсутствует (при $\nu > 0$); состояние системы характеризуется монотонно убывающим параметром порядка $|\xi_x|$.

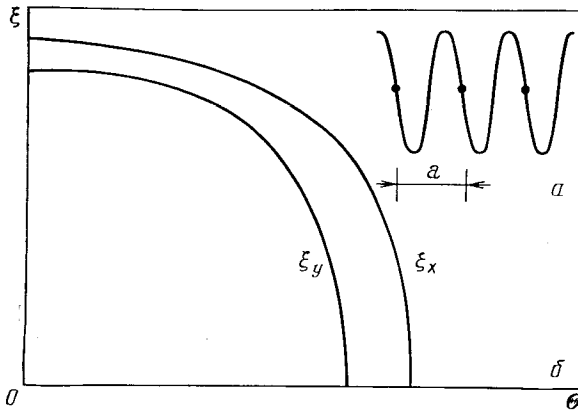


Рис. 10. Линейная цепочка излучателей в классическом поле с длиной волны a и фазой $\varphi = 0$ (а) и температурная зависимость действительной и мнимой частей параметра порядка ξ (б)

С л у ч а й 2. $\Lambda = a$, $\varphi = n\pi$, $n = 0, 1 \dots$ (рис. 10, а). При этом

$$\nu(f) = 0, B(f) = \nu_0 A (\hbar\Omega)^{-1/2}, A \equiv 2\pi a^{-1} (2m)^{-1/2}.$$

Уравнения (78) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \left[\frac{\lambda^2}{\hbar\omega} \xi + 2\nu_0 \frac{A}{(\hbar\Omega)^{3/2}} (\eta + \eta^*) \right] \frac{\text{th}(E/\Theta)}{E}; \\ \eta &= 4\nu_0 A (\hbar\Omega)^{-3/2} \left[\frac{\lambda^2}{\hbar\omega} \xi_x + 4\nu_0 \frac{A}{(\hbar\Omega)^{3/2}} \text{Re } \eta \right] \frac{\text{th}(E/\Theta)}{E}, \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

где

$$E \equiv \frac{1}{2} \sqrt{(\hbar\omega)^2 + 4 \left| \frac{\lambda^2}{\hbar\omega} \xi + 4\nu_0 \frac{A}{(\hbar\Omega)^{3/2}} \text{Re } \eta \right|^2}.$$

Из второго уравнения видно, что $\eta = \text{Re } \eta$, $\text{Im } \eta = 0$. Далее, сравнивая первое и второе уравнения в (80), находим

$$\eta = 4\nu_0 \frac{A}{(\hbar\Omega)^{3/2}} \xi_x.$$

Предположим, что $\xi_y \neq 0$. В этом случае при $\nu_0 \neq 0$ имеем $\xi_x = 0$. Для ξ_y имеет место уравнение

$$\frac{1}{2} \xi_y \sqrt{(\hbar\omega)^2 + 4\lambda^4 \xi_y^2 / (\hbar\omega)^2} = \frac{\lambda^2}{\hbar\omega} \operatorname{th} \left(\frac{1}{2\Theta} \sqrt{(\hbar\omega)^2 + 4\lambda^4 \xi_y^2 / (\hbar\omega)^2} \right).$$

Таким образом, при $\Theta < \Theta_c = \hbar\omega/2 \operatorname{Arth} [(\hbar\omega)^2/2\lambda^2]$ в системе возникает упорядочение, характеризуемое чисто мнимым параметром порядка $\xi = i\xi_y$, причем, фоновый параметр порядка $\eta = 0$.

Пусть теперь $\xi_x \neq 0$. В этом случае $\xi_y = 0$ и

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \xi_x \sqrt{(\hbar\omega)^2 + 4[\lambda^2/\hbar\omega + 16\nu_0^2 A^2 (\hbar\Omega)^{-3}]^2 \xi_x^2} &= \left[\frac{\lambda^2}{\hbar\omega} + 16\nu_0^2 \frac{A^2}{(\hbar\Omega)^3} \right] \times \\ &\times \operatorname{th} \left\{ \frac{1}{2\Theta} \sqrt{(\hbar\omega)^2 + 4[\lambda^2/\hbar\omega + 16\nu_0^2 A^2 (\hbar\Omega)^{-3}]^2 \xi_x^2} \right\}. \end{aligned}$$

При $\Theta < \Theta'_c = \hbar\omega/2 \operatorname{Arth} \left\{ \hbar\omega/2 \left[\frac{\lambda^2}{\hbar\omega} + 16\nu_0^2 \frac{A^2}{(\hbar\Omega)^3} \right] \right\}$ в системе возникает упорядочение, характеризуемое чисто вещественным параметром порядка $\xi = \xi_x$. Ясно, что $\Theta_c < \Theta'_c$, причем абсолютно устойчивым оказывается именно решение с $\xi_x \neq 0$ (рис. 10, б). При этом условие сильной связи принимает вид:

$$\hbar\omega < \frac{\lambda^2}{\hbar\omega} + 16\nu_0^2 \frac{A^2}{(\hbar\Omega)^3},$$

т.е. наличие внешнего классического поля в специальном случае $\Lambda = a$ и $\varphi = 0$ приводит к существенному изменению условия фазового перехода в сверхизлучательное состояние.

С л у ч а й 3. $\Lambda = 2a$, $\varphi = +\pi/2$ (рис. 11). В этом случае

$$\begin{aligned} \sin(kf - \varphi) &= \begin{cases} +1, & f = 2n + 1, \quad n = 1, 2 \dots, \\ -1, & f = 2n, \end{cases} \\ \cos(kf - \varphi) &= 0 \end{aligned}$$

откуда $B(f) = 0$, т. е. $\eta = 0$. Первое уравнение (78) принимает вид:

$$\xi = \left(\frac{\lambda^2}{\hbar\omega} \xi - \nu_0 \right) \frac{\operatorname{th}(E_+/\Theta)}{2E_+} + \left(\frac{\lambda^2}{\hbar\omega} \xi + \nu_0 \right) \frac{\operatorname{th}(E_-/\Theta)}{2E_-},$$

где

$$E_{\pm} = \sqrt{(\hbar\omega)^2 + 4|\nu_0 \mp \lambda^2 \xi^2 (\hbar\omega)^{-1}|}.$$

Решения этого уравнения качественно согласуются со случаем 1.

Таким образом, наличие коротковолнового внешнего классического поля в системе приводит к изменению условия сильной связи и качественному изменению в поведении параметра порядка.

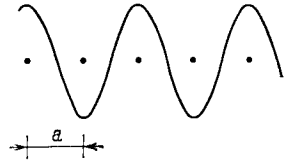


Рис. 11. Линейная цепочка излучателей в классическом поле с длиной волны $2a$ и фазой $\varphi = -\pi/2$

2.5. Расчет макроскопических характеристик нелинейного оптического преобразования. Следует указать еще один важный пример физической системы, для которой методы, рассмотренные в разд. 1, позволяют получить точное (при $N \rightarrow \infty$) решение. Речь идет об описании многофотонных процессов в многоуровневых системах в связи с проблемой нелинейного оптического преобразования частоты когерентного электромагнитного излучения из инфракрасного диапазона в область видимого света. Указанная проблема имеет большое значение в связи с созданием устройств для визуализации и регистрации инфракрасного излучения, что представляет несомненный интерес для прикладных задач инфракрасной спектроскопии, оптической свя-

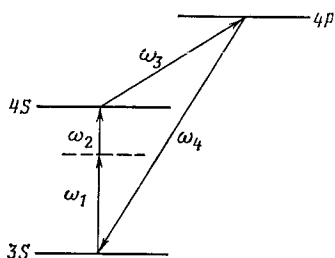


Рис. 12. Схема рабочих уровней атома натрия. Штриховой линией указан виртуальный уровень, используемый для описания двухфотонного перехода

зи, инфракрасной астрономии и т. д. [106]. Проиллюстрируем такой процесс на примере преобразования частоты в парах натрия, недавно реализованного в эксперименте [107, 108].

Схема рабочих уровней атома натрия, используемых при преобразовании, изображена на рис. 12. Переход $3S - 4S$ является дипольно запрещенным и поэтому возбуждается двухфотонной накачкой от лабораторных лазеров (фотоны ω_1 и ω_2). Частота перехода $4S - 4P$ соответствует окну прозрачности атмосферы в инфракрасном диапазоне ($\lambda_3 \sim 1,06$ мкм). Переход $4S - 4P$ возбуждается внешним сигналом. Испускание при переходе $4P - 3S$ происходит на суммарной частоте, соответствующей видимой части спектра.

Описанный процесс соответствует преобразованию сигнала с фиксированной частотой. Однако такую многоуровневую систему можно использовать и для спектроскопии инфракрасного излучения. В этом случае исследуемый сигнал играет роль одного из фотонов в возбуждении перехода $3S - 4S$ (например, ω_2), тогда как переход $4S - 4P$ возбуждается накачкой от лабораторного лазера. При этом накачка на частоте ω_1 должна производиться лазером, перестраиваемым по частоте [108]. В такой схеме спектроскопа частота исследуемого сигнала определяется из условий резонанса.

Необходимо указать, что в настоящее время квантовое нелинейное преобразование частоты экспериментально осуществлено в целом ряде газообразных и кристаллических сред, в частности в прустите Ag_3AsS_3 [109], титогалате серебра [110], титогалате ртути [111], парах Na [112] и т. д. Важными особенностями такого преобразования являются его безынерционность и низкий уровень шумов [107].

Одной из основных задач, связанных с описанием такого процесса, является определение эффективности преобразования, т. е. зависи-

мости напряженности поля излучения от напряженностей полей сигнала и накачки. При этом с неизбежностью возникает проблема описания многофотонного процесса в многоуровневой системе. Такие процессы описываются обычно либо с помощью полуклассической теории возмущений [107, 108], либо приближенными методами нелинейной механики [109].

С другой стороны, для описания m -фотонного резонанса в двухуровневой системе в [55, 56, 110, 111] развивался микроскопический подход, основанный на использовании членов взаимодействия вида

$$g \sum_f (\sigma_f^- \prod_{i=1}^m a_i^+ + \sigma_f^+ \prod_{i=1}^m a_i),$$

где g — параметр, пропорциональный дипольному матричному элементу m -фотонного перехода в двухуровневом атоме (см. также [112]).

Однако для описания двухфотонного возбуждения в системе, изображенной на рис. 12, можно воспользоваться иным приемом — в соответствии с идеей Салюра [54] представить двухфотонную накачку перехода $3S - 4S$ как комбинацию двух однофотонных возбуждений, т. е. ввести промежуточный виртуальный уровень. При этом мы будем иметь дело с эффективной четырехуровневой системой с четырехфотонным взаимодействием [43]. Модель для описания многоуровневой системы была развита Джилмором [213, 214] и характеризуется гамильтонианом вида

$$H = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \hbar \omega_{ji} a_{ji}^+ a_{ji} + \sum_{f=1}^N \sum_i \varepsilon_i M_i(f) + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{f=1}^N \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{ji} [a_{ji}^+ E_{ij}(f) + a_{ji} E_{ji}^+(f)]. \quad (81)$$

Здесь n — число уровней, число мод равно $\binom{n}{2}$, так как каждой паре уровней соответствует одна мода, операторы фотонов удовлетворяют перестановочным соотношениям вида

$$a_{ji} = a_{ij}^+, [a_{j'i'}, a_{ji}^+] = \delta_{j'j} \delta_{i'i}.$$

Оператор $E_{ji}(f)$ описывает переход из состояния i в состояние j в f -м излучателе. Операторы M, E являются генераторами группы $SU(n)$. Подчеркнем, что идея описания состояния систем из n -уровневых излучателей с помощью представлений группы $SU(n)$ была предложена Шелепиным [115].

В работе [19] рассматривались обобщения модели (81), связанные с учетом внешних классических полей и «классических токов». Последние вводятся в гамильтониан с помощью дополнительных

членов вида [19]

$$h\sqrt{N}a^{\dagger} + h^*\sqrt{N}a.$$

Вернемся к рассматриваемой нами эффективной четырехуровневой системе с четырехфотонным взаимодействием (рис. 12). В этом случае гамильтониан (81) может быть записан в виде [43]

$$H = \sum_{i=1}^4 \hbar\omega_i a_i^{\dagger} a_i + \sum_f \left[\varepsilon_i M_i(f) + \frac{\lambda_i}{\sqrt{N}} (a_i^{\dagger} E_i(f) + a_i E_i^{\dagger}(f)) - v_i (E_i(f) + E_i^{\dagger}(f)) \right]. \quad (82)$$

Здесь ε_i — энергия соответствующего уровня, параметры λ_i определены соотношением

$$\lambda_i = \Delta\varepsilon_i d_i \sqrt{2\pi\hbar/\omega_i \mathcal{V}},$$

где $\Delta\varepsilon_i$ — разность энергий соответствующих уровней и d_i — матричный элемент оператора дипольного момента перехода. Параметры v_i описывают классические поля:

$$v_i = d_i \mathcal{E}_i,$$

где \mathcal{E}_i — напряженность соответствующего поля. Операторы $M_i(f)$, $E_i(f)$ являются соответственно диагональными и ступенчатыми (недиагональными) генераторами группы $SU(4)$, соответствующими f -му излучателю (атому Na).

Решение модельной задачи с гамильтонианом (82) также может быть найдено с помощью общего метода, изложенного в разд. 1 настоящей работы. Аппроксимирующий термодинамически эквивалентный гамильтониан для (82) представляется в виде

$$\tilde{H} = \sum_i \left\{ \hbar\omega_i \tilde{a}_i^{\dagger} \tilde{a}_i + \sum_f \left[\varepsilon_i M_i(f) - \left(\frac{\lambda_i^2}{\hbar\omega_i} \xi_i + v_i \right) (E_i(f) + E_i^{\dagger}(f)) \right] + N \frac{\lambda_i^2}{\hbar\omega_i} \xi_i^2 \right\}, \quad (83)$$

где

$$\tilde{a}_i = a_i + \frac{\lambda_i}{\hbar\omega_i} \xi_i \sqrt{N} \mathbf{1}$$

и $\mathbf{1}$ — единичный оператор. Свободная энергия M -системы в (83) имеет вид [43]:

$$F(\Theta, \xi) = \sum_i \frac{\lambda_i^2}{\hbar\omega_i} \xi_i^2 - \Theta \ln \text{Sp} e^{-Q/\Theta},$$

где Q —матрица вида

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \beta_1 & 0 & \beta_4 \\ \beta_1 & \varepsilon_2 & \beta_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \varepsilon_3 & \beta_3 \\ \beta_4 & 0 & \beta_3 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}$$

и $\beta_i \equiv -\left(v_i + \frac{\lambda_i^2}{\hbar\omega_i} \xi_i\right)$. Параметры ξ_i определяются из условия минимальности функции $F(\Theta, \xi)$, что приводит к системе уравнений

$$\xi_\alpha = \left\{ -\sum_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_\alpha} e^{-\varphi_i/\Theta} \right\} \left\{ 2 \frac{\lambda_\alpha^2}{\hbar\omega_\alpha} \sum_i e^{-\varphi_i/\Theta} \right\}, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4,$$

где φ_i — корни характеристического уравнения $\det(Q - \varphi I) = 0$, являющегося алгебраическим уравнением четвертого порядка. Аналитическое решение системы уравнений для ξ_α при произвольных Θ не представляется возможным. Поэтому дальнейшие расчеты следует проводить на ЭВМ, что и было сделано в [43] для числовых значений параметров, соответствующих экспериментальной ситуации при преобразовании в парах Na [107, 108]. Анализ численного решения приводит к выводу о существовании зависимости вида

$$\mathcal{E}_4 = \gamma \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_3,$$

где $\gamma \propto \omega_4^2$. Такая зависимость хорошо согласуется с результатами экспериментов [107, 108]. Характер зависимости сохраняется и при значительном изменении напряженности полей накачек и сигнала. Для показателя эффективности преобразования сигнала с частотой ω_3 имеем

$$\kappa \equiv \left| \frac{\mathcal{E}_4}{\mathcal{E}_3} \right|^2 = \gamma^2 |\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2|^2,$$

что также хорошо согласуется с результатами эксперимента при условиях, близких к резонансным.

Таким образом, проведенное в настоящем разделе рассмотрение «реалистических» примеров показывает, что методы точного решения, изложенные в разд. 1, позволяют получить адекватное описание для целого ряда конкретных физических явлений.

Перейдем теперь к рассмотрению динамических процессов в сверхизлучательных системах.

3. ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАКРОСКОПИЧЕСКИХ ДВУХУРОВНЕВЫХ СИСТЕМ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ ПОЛЯМИ

3.1. Точное кинетическое уравнение для обобщенной модели Дикке. Как уже указывалось во введении, точное описание динамики двухуровневой $M - F$ -системы удалось получить сравнительно не-

давно [75—77] в результате распространения на такие системы методов, развитых в работах Н. Н. Боголюбова [72, 73] в связи с исследованием проблемы полярона. Следуя работе [75], рассмотрим систему, характеризуемую гамильтонианом вида

$$\left. \begin{aligned} H_t &= H_M + H_F + H_{MF}; \\ H_M &= \sum_{f=1}^N \frac{1}{2} \hbar \Omega_f \sigma_f^z + H_0; \\ H_F &= \sum_k \hbar \omega_k a_k^+ a_k; \\ H_{MF} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{h, f} \lambda_h e^{\epsilon t} \{ a_h e^{i h x_f} (\sigma_f^+ + \mu \sigma_f^-) + a_h^+ e^{-i h x_f} (\sigma_f^- + \mu \sigma_f^+) \}. \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Здесь H_0 — оператор кинетической энергии излучателей; t — время, $\epsilon \in \mathbf{R}$ и «противовращательные члены» с μ введены, как и в разд. 1, из соображений общности.

Обозначим \mathcal{D}_t статистический оператор M — F -системы (84), удовлетворяющий уравнению Лиувилля,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{D}_t = [H_t, \mathcal{D}_t] \quad (85)$$

с начальными условиями вида

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{D}_{t_0} &= \rho(M) \mathcal{D}(F); \\ \mathcal{D}(F) &= e^{-H_F/\Theta} \Big/ \underset{(F)}{S_p} e^{-H_F/\Theta}; \\ \frac{S_p}{(M)} \rho(M) &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

соответствующими равновесному состоянию поля, причем его взаимодействие с M -системой считается включенным в начальный момент времени $t = t_0$. Как нетрудно видеть из (85), (86), $\underset{(M,F)}{S_p} \mathcal{D}_t = 1$.

Следуя работе [75], введем представление Гейзенберга для динамической величины $\mathfrak{A}(t, M, F)$, заданной в представлении Шредингера соотношением

$$\mathfrak{A}(t, M_t, F_t) = U^{-1}(t, t_0) \mathfrak{A}(t, M, F) U(t, t_0),$$

где унитарный оператор $U(t, t_0)$ определяется уравнением

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H_t U(t, t_0); \quad U(t_0, t_0) = 1.$$

Пусть $\Theta(M)$ — оператор, действующий на собственные функции гамильтониана (84) только как на функции переменных, отно-

сящихся к M -системе. Уравнение движения для оператора $\Theta(M)$ в представлении Гейзенберга с помощью метода исключения бозонных переменных [73] можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} & \text{Sp}_{(M)} \left\{ \Theta(M) \frac{\partial \rho_t(M)}{\partial t} + (i\hbar)^{-1} \left[H_0 + \frac{1}{2} \sum_f \hbar \Omega_f \sigma_f^z, \Theta(M) \right] \rho_t(M) \right\} = \\ & = N^{-1} \sum_k \lambda_k^2 \int_{t_0}^t d\tau \text{Sp}_{(M, F)} e^{-i\omega_k(t-\tau)} e^{e(t+\tau)} \left\{ N_k \sum_f e^{-ikh_f} [\sigma_f^-(\tau) + \mu \sigma_f^+(\tau)] \times \right. \\ & \times \left[\Theta(M_t), \sum_f e^{ikh_f} (\sigma_f^+(t) + \mu \sigma_f^-(t)) \right] + (1 + N_k) \sum_f e^{ikh_f} [\sigma_f^+(t) + \\ & + \mu \sigma_f^-(t), \Theta(M_t)] \sum_f e^{-ikh_f} [\sigma_f^-(\tau) + \mu \sigma_f^+(\tau)] \} \mathcal{D}_{t_0} + N^{-1} \sum_k \lambda_k^2 \times \\ & \times \int_{t_0}^t d\tau \text{Sp}_{(M, F)} e^{i\omega_k(t-\tau)} e^{e(t+\tau)} (1 + N_k) \sum_f e^{ikh_f} (\sigma_f^+(\tau) + \mu \sigma_f^-(\tau)) \times \\ & \times \Theta(M_t), \sum_f e^{-ikh_f} (\sigma_f^-(t) + \mu \sigma_f^+(t)) + \\ & + N_k \left[\sum_f e^{-ikh_f} (\sigma_f^-(t) + \mu \sigma_f^+(t)), \Theta(M_t) \right] \sum_f e^{ikh_f} (\sigma_f^+(\tau) + \sigma_f^-(\tau)) \} \mathcal{D}_{t_0}. \end{aligned} \tag{87}$$

Здесь $\rho_t(M) = \text{Sp}_{(M)} \mathcal{D}_t$ и

$$N_k = \frac{e^{-\hbar\omega_k/2\Theta}}{2 \text{sh}(\hbar\omega_k/2\Theta)}.$$

В ряде случаев более удобно использовать вместо индивидуальных квазиспиновых переменных σ_f формализм коллективных операторов излучателей [75, 116]. Пусть вектор ν соответствует модам в рабочем объеме резонатора

$$\nu_\alpha = 2\pi n_\alpha / L_\alpha, \quad \alpha = x, y, z,$$

n_α — целые числа и $\prod_\alpha L_\alpha = V$. Тогда коллективные операторы излучателей можно определить соотношением

$$R_\nu^\pm = \sum_f \sigma_f^\pm e^{\pm i\nu x_f}; \quad R_\nu^z = \sum_f \sigma_f^z e^{i\nu x_f}; \quad \Omega_\nu = \sum_f \Omega_f e^{i\nu x_f}.$$

Учитывая очевидные соотношения

$$N^{-1} \sum_f e^{i(\nu - \nu') x_f} = \delta_{\nu\nu'}; \quad N^{-1} \sum_f e^{i\nu(x_f - x_{f'})} = \delta_{ff'},$$

уравнение (87) после перехода к коллективным переменным можно привести к виду

$$\begin{aligned}
 \text{Sp}_{(M)} \left\{ \Theta(M) \frac{\partial \rho_t(M)}{\partial t} + (i\hbar)^{-1} \left[\sum_{\nu} \frac{1}{2} \hbar \Omega_{\nu} R_{\nu}^z + H_0, \Theta(M) \right] \rho_t(M) \right\} = \\
 = N^{-1} \sum_{k, \nu} \lambda_k^2 \int_{t_0}^t d\tau \text{Sp}_{(M, F)} e^{-i\omega_k(t-\tau)} e^{\varepsilon(t+\tau)} \times \\
 \times \{ N_k Q_{\nu}^{\dagger}(\tau) [\Theta(M_t), Q_{\nu}(t)] + (1 + N_k) [Q_{\nu}(t) \Theta(M_t)] Q_{\nu}^{\dagger}(\tau) \} \mathcal{D}_{t_0} + \\
 + N^{-1} \sum_{k, \nu} \lambda_k^2 \int_{t_0}^t d\tau \text{Sp}_{(M, F)} e^{i\omega_k(t-\tau)} e^{\varepsilon(t+\tau)} \times \\
 \times \{ (1 + N_k) Q_{\nu}(\tau) [\Theta(M_t), Q_{\nu}^{\dagger}(t)] + N_k [Q_{\nu}^{\dagger}(t), \Theta(M_t)] Q_{\nu}(\tau) \} \mathcal{D}_{t_0}, \quad (88)
 \end{aligned}$$

где использованы обозначения

$$Q_{\nu}(t) \equiv R_{\nu}^{\dagger}(t) \varphi(k - \nu) + \mu R_{\nu}^{-}(t) \varphi(k + \nu); \quad \varphi(z) \equiv N^{-1} \sum_f e^{izx_j}.$$

Уравнение (87) и эквивалентное ему уравнение (88) в пределе при $t_0 \rightarrow -\infty$ представляют собой обобщенное кинетическое уравнение для динамической системы с гамильтонианом (84).

Предположим теперь, что

$$\mathcal{D}_F = |0\rangle \langle 0|; \quad H_0 = 0, \quad (89)$$

т. е. что в начальный момент времени излучение в системе отсутствует и излучатели жестко закреплены в узлах кристаллической решетки. Будем также предполагать, что распределение собственных частот излучателей Ω_f симметрично относительно некоторой частоты Ω и не зависит от координат излучателей x_f . Обозначим $J(\Omega_f)$ функцию распределения частот и усредним величину $e^{i\Omega_f t}$ с учетом лоренцева неоднородного уширения [2]:

$$\langle e^{i\Omega_f t} \rangle \equiv e^{i\Omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iWt} J(W) dW = e^{i\Omega t} e^{-\frac{|t|}{2T}},$$

где T — так называемое время жизни осциллятора. Заметим, что обычно рассматривается лишь простейший случай $\Omega_f = \Omega = \text{const}$. Предположим далее, что $\varepsilon = 0$, и пренебрежем быстро осциллирующими членами типа R^+R^+ , R^-R^- . Будем считать, что $T \gg t \gg t_{\text{макс}} \sim \frac{L\alpha}{c}$, где c — скорость света [2], и учтем, что функция $\varphi(k - \nu)$ имеет острый максимум при $k = \nu$. С учетом сказанного уравнение (88)

можно преобразовать к виду [75].

$$\begin{aligned} \text{Sp}_{(M)} \left\{ \Theta(M) \frac{\partial \rho_t(M)}{\partial t} + (i)^{-1} \frac{1}{2} \Omega \sum_{\nu} [R_{\nu}^z, \Theta(M)] \rho_t(M) \right\} = \\ = \frac{1}{2} \sum_{\nu} \{ \Gamma_{\nu}^{-} [R_{\nu}^{+}, \Theta(M)] R_{\nu}^{-} + \Gamma_{\nu}^{+} [R_{\nu}^{-}, \Theta(M)] R_{\nu}^{+} + \text{э.с.} \} \mathcal{D}_{t_0}, \quad (90) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu}^{\pm} &\equiv \gamma_{\nu}^{\pm} - i\Omega_{\nu}^{\pm}; \\ \gamma_{\nu}^{\pm} &\equiv 2(2\pi)^{-3} \int dk \frac{2T\lambda_k^2 \varphi^2(k-\nu)}{1+4T^2(\omega_k \pm \Omega)^2}; \\ \Omega_{\nu}^{\pm} &\equiv 8(2\pi)^3 T^2 \int dk \lambda_k^2 \varphi^2(k-\nu) \frac{\omega_k \pm \Omega}{1+4T^2(\omega_k \pm \Omega)^2}. \end{aligned}$$

Определим оператор

$$S_{\nu} \equiv \sum_{ff'} \sigma_f^{\dagger} \sigma_{f'}^{-} e^{i\nu(x_f - x_{f'})}.$$

Теперь из (90) имеем

$$\begin{aligned} \text{Sp}_{(M)} \left\{ \Theta(M) \frac{\partial \rho_t(M)}{\partial t} + i(\Omega + \Omega') \left[\Theta(M), \sum_{\nu} R_{\nu}^z \right] \rho_t(M) - \right. \\ \left. - \frac{i}{2} \sum_{\nu} \tilde{\Omega}_{\nu} [\Theta(M), S_{\nu}] \rho_t(M) = \right. \\ = \frac{1}{2} \sum_{\nu} \gamma_{\nu}^{-} \{ [R_{\nu}^{+}, \Theta(M)] R_{\nu}^{-} + R_{\nu}^{+} [\Theta(M), R_{\nu}^{-}] \} \mathcal{D}_{t_0} + \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{\nu} \gamma_{\nu}^{+} \{ [R_{\nu}^{-}, \Theta(M)] R_{\nu}^{+} + R_{\nu}^{-} [\Theta(M), R_{\nu}^{+}] \} \mathcal{D}_{t_0}. \quad (91) \right. \end{aligned}$$

Здесь величина

$$\Omega' \equiv \frac{1}{2} \sum_{\nu} (\Omega_{\nu}^{+} + \Omega_{\nu}^{-})$$

определяет постоянный сдвиг частот — так называемую бете-часть сдвига Лэмба [116], тогда как

$$\tilde{\Omega}_{\nu} \equiv \Omega_{\nu}^{+} + \Omega_{\nu}^{-}$$

определяет величину коллективного сдвига частот. Заметим, что при $T \rightarrow +\infty$ уравнение (91) совпадает с марковским Master Equation работы [116], полученным в приближении слабого взаимодействия. Простейший вариант уравнения (91) был получен для одномодового случая в указанном приближении в [65]. Такое уравнение описывает коллективное спонтанное излучение [116]. Подчеркнем, что уравне-

ние (91), установленное в [75], получено как частный случай обобщенного кинетического уравнения в коллективных переменных (88) с начальными условиями (89) для неоднородного лоренцева уширения и системы излучателей, жестко закрепленных в узлах кристаллической решетки. На основе обобщенного уравнения (88) могут быть получены и другие результаты теории сверхизлучательных систем, например, уравнение для угла Блоха ψ , вводимого соотношением [2]

$$R_v = \frac{1}{2} N \cos \psi.$$

Определяя зависимость интенсивности излучения от времени соотношением

$$I(t) = -\frac{\partial}{\partial t} \langle R^2 \rangle,$$

из (91) нетрудно также получить уравнение Эберли для $I(t)$ [117]. Подчеркнем, что подход к описанию динамики двухуровневой макроскопической $M - F$ -системы, развитый в [75—77] и основанный на использовании точного кинетического уравнения (87) или (88), представляется наиболее общим.

3.2. Релаксационные процессы в макроскопических двухуровневых системах. При исследовании динамики сверхизлучательных систем большое значение имеет адекватное определение характерных времен конверсии (релаксации в девозбужденное состояние), так как это является одним из определяющих факторов при выборе рабочей среды и режима и при оценке мощности сверхизлучательных лазеров [62, 63] (см. также [46]). С этой целью в работе [76] на основе обобщенного кинетического уравнения (88) было получено уравнение для одночастичной функции распределения [118, 119]

$$W_t(p, m) = \text{Sp}_{(2, \dots, N)} \rho_t(p_1, m_1; \dots, p_N, m_N),$$

где p_t — импульс f -й частицы и m_f — индекс «квазиспинового состояния». Следуя [76], определим функцию $\mathcal{O}(M)$ как $\mathcal{O}(p_f, \sigma_f^z)$. Для таких операторов справедливы перестановочные соотношения вида

$$e^{i\hbar x_f} \mathcal{O}(p_f) = \mathcal{O}(p_f - \hbar k) e^{i\hbar x_f};$$

$$\mathcal{O}(p_f) e^{i\hbar x_f} = e^{i\hbar x_f} \mathcal{O}(p_f + \hbar k);$$

$$\sigma_f^+ \mathcal{O}(\sigma_f^z) = \mathcal{O}(\sigma_f^z - 1) \sigma_f^+;$$

$$\sigma_f^- \mathcal{O}(\sigma_f^z) = \mathcal{O}(\sigma_f^z + 1) \sigma_f^-.$$

С другой стороны, при $f \neq f'$

$$[\sigma_f^\pm e^{\pm i\hbar x_f}; \mathcal{O}(p_{f'}, \sigma_{f'}^z)] = 0.$$

С учетом этих перестановочных соотношений коммутаторы, входящие в правую часть кинетического уравнения (87), можно представить в виде

$$[\mathcal{O}(p_f, \sigma_f^\pm), R_k^\pm] = \{\mathcal{O}(p_f, \sigma_f^\pm) - \mathcal{O}p_f \mp \hbar k, \sigma_f^\pm \mp 1\} \sigma_f^\pm e^{\pm i\hbar x_f}. \quad (92)$$

Предположим теперь, что взаимодействие в H_{MF} мало, и приближенно выразим $R_k^\pm(\tau)$ через $R_k^\pm(t)$. В «нулевом приближении» [73, 76] имеем

$$x_f(\tau) = x_f(t) - \frac{p_f(t)}{m}(t - \tau);$$

$$\sigma_f^\pm(\tau) = \sigma_f^\pm(t) e^{\mp i\Omega(t - \tau)}.$$

Здесь для простоты рассматривается одномодовый случай: $\Omega_f \equiv \Omega$. Теперь с помощью операторного соотношения [119, 120]

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A, B]}$$

нетрудно получить, что

$$e^{i\hbar x_f(\tau)} = e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p_f^2(t) - [p_f(t) - \hbar k]^2 (t - \tau)}{2m}} e^{i\hbar x_f(t)} =$$

$$= e^{i\hbar x_f(t)} e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{[p_f(t) - \hbar k]^2 - p_f^2(t)}{2m} (t - \tau)}.$$

Для $R_k^\pm(\tau)$ имеем

$$R_k^\pm(\tau) = \sum_f \sigma_f^\pm(\tau) e^{\pm i\hbar x_f(\tau)} =$$

$$= \sum_f \sigma_f^\pm(t) e^{\pm i\hbar x_f(t)} e^{-\frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{[p_f \pm \hbar k]^2 - p_f^2}{2m} \pm \hbar \Omega \right\} (t - \tau)} =$$

$$= \sum_f e^{-\frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{[p_f(t) \mp \hbar k]^2 - p_f^2(t)}{2m} \mp \hbar \Omega \right\} (t - \tau)} \sigma_f^\pm(t) e^{\pm i\hbar x_f(t)}. \quad (93)$$

Вычисляя с помощью (92), (93) коммутаторы, входящие в правую часть уравнения (87), и учитывая, что в силу сделанного предположения о малости взаимодействия в H_{MF} члены с множителями типа

$$e^{\pm i\hbar(x_{f'} - x_f)} \sigma_{f'}^\pm \sigma_f^\mp$$

при усреднении и суммировании дадут лишь малый вклад, кинетическое уравнение можно представить в виде

$$\text{Sp}_{(M)} \mathcal{O}(p_f, \sigma_f^\pm) \frac{\partial p_t(M)}{\partial t} = N^{-1} \sum_h |\lambda_h|^2 \int_{i_0}^t d\tau \text{Sp}_{(M)} e^{i\omega_h \tau} (1 + N_h) \times$$

$$\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\frac{(p_f - \hbar k)^2 - p_f^2}{2m} - \hbar \Omega \right] (t - \tau) \right\} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \{ \Theta (p_f - \hbar k, \sigma_f^z - 1) - \Theta (p_f, \sigma_f^z) \} \sigma_f^+ \sigma_f^- \rho_t + \\
& + N^{-1} \sum_k |\lambda_k|^2 \int_{t_0}^t d\tau \operatorname{Sp}_{(M)} e^{-i\omega_k \tau} N_k \times \\
& \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\frac{(p_f + \hbar k)^2 - p_f^2}{2m} + \hbar \Omega \right] (t - \tau) \right\} \times \\
& \times \{ \Theta (p_f + \hbar k, \sigma_f^z + 1) - \Theta (p_f, \sigma_f^z) \} \sigma_f^- \sigma_f^+ \rho_t, \quad (94)
\end{aligned}$$

где $\rho_t \equiv \operatorname{Sp}_{(F)} \mathcal{D}_{t_0}$. Так как

$$\sigma_f^+ \sigma_f^- = \frac{1}{2} (1 + \sigma_f^z), \quad \sigma_f^- \sigma_f^+ = \frac{1}{2} (1 - \sigma_f^z),$$

имеем

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Sp}_{(M)} \{ \Theta (p_f, \sigma_f^z) \sigma_f^+ \sigma_f^- \rho_t \} = \\
& = \sum_m \int d\rho \Theta (p, m) \delta \left(m \mp \frac{1}{2} \right) W_t (p, m).
\end{aligned}$$

Поэтому с учетом соотношений (93) и (94) получаем уравнение для одночастичной функции распределения $W_t (p, m)$:

$$\begin{aligned}
& \sum_m \int dp \Theta (p, m) \frac{\partial}{\partial t} W_t (p, m) = \\
& = 2\pi \hbar N^{-1} \sum_m \sum_k |\lambda_k|^2 \int dp \left\{ (1 + N_k) \delta \times \right. \\
& \times \left(\hbar \omega_k - \hbar \Omega + \frac{p^2 - (p + \hbar k)^2}{2m} \right) \delta \left(m + \frac{1}{2} \right) W_t (p + \hbar k, m + 1) - \\
& - (1 + N_k) \delta \left(\hbar \omega_k - \hbar \Omega - \frac{p^2 - (p + \hbar k)^2}{2m} \right) \delta \left(m - \frac{1}{2} \right) W_t (p, m) + \\
& + N_k \delta \left(\hbar \omega_k - \hbar \Omega - \frac{p^2 - (p + \hbar k)^2}{2m} \right) \delta \left(m - \frac{1}{2} \right) W_t (p + \hbar k, m - 1) - \\
& \left. - N_k \delta \left(\hbar \omega_k - \hbar \Omega + \frac{p^2 - (p + \hbar k)^2}{2m} \right) \delta \left(m + \frac{1}{2} \right) W_t (p, m) \right\} \Theta (p, m).
\end{aligned}$$

Так как $\Theta (p, m)$ произвольная функция, отсюда получается следующее уравнение для одночастичной функции распределения:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} W_t (p, m) = 2\pi \hbar N^{-1} \sum_k |\lambda_k|^2 \left\{ (1 + N_k) W_t \left(p + \hbar k, \frac{1}{2} \right) - \right. \\
& \left. - N_k W_t \left(p, -\frac{1}{2} \right) \right\} \delta \left(m + \frac{1}{2} \right) \delta \left(\hbar \omega_k - \hbar \Omega + \frac{p^2 - (p + \hbar k)^2}{2m} \right) +
\end{aligned}$$

$$+ 2\pi\hbar N^{-1} \sum_k |\lambda_k|^2 \left. \right\} N_k W_t \left(p + \hbar k, -\frac{1}{2} \right) - (1 + N_k) \times \\ \times W \left(p, \frac{1}{2} \right) \left. \right\} \delta \left(m - \frac{1}{2} \right) \delta \left(\hbar\omega_k - \hbar\Omega + \frac{(p + \hbar k)^2 - p^2}{2m} \right).$$

Принимая во внимание явный вид функции λ_k и переходя от суммирования по k к интегрированию, получаем окончательный вид уравнения для одночастичной функции распределения [76]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} W_t \left(p, -\frac{1}{2} \right) = \\ = \frac{d^2}{\pi} \int dk \frac{1}{\omega_k} \left\{ (1 + N_k) W_t \left(p + \hbar k, \frac{1}{2} \right) - \right. \\ \left. - N_k W_t \left(p, -\frac{1}{2} \right) \right\} \delta \left(\hbar\omega_k - \hbar\Omega + \frac{p^2 - (p + \hbar k)^2}{2m} \right); \\ \frac{\partial}{\partial t} W_t \left(p, \frac{1}{2} \right) = \frac{d^2}{\pi} \int dk \frac{1}{\omega_k} \left\{ N_k W_t \left(p + \hbar k, -\frac{1}{2} \right) - \right. \\ \left. - (1 + N_k) W_t \left(p, \frac{1}{2} \right) \right\} \delta \left(\hbar\omega_k - \hbar\Omega + \frac{(p + \hbar k)^2 - p^2}{2m} \right). \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

Сравнивая уравнения (95) с так называемым уравнением кинетического баланса Паули (см., например, [121]), нетрудно убедиться, что вероятность того, что излучатель с импульсом p поглощает фотон и переходит в состояние $|+\rangle$, есть

$$\Gamma_+ = \frac{d^2}{\pi} \int dk \frac{1}{\omega_k} N_k \delta \left(\hbar\omega_k - \hbar\Omega + \frac{p - (p + \hbar k)^2}{2m} \right).$$

Вероятность перехода в состояние $|-\rangle$ с испусканием фотона имеет вид:

$$\Gamma_- = \frac{d^2}{\pi} \int dk \frac{1}{\omega_k} (1 + N_k) \delta \left(\hbar\omega_k - \hbar\Omega + \frac{(p + \hbar k)^2 - p^2}{2m} \right).$$

Соответствующие характерные времена релаксации определяются как

$$\tau_{\pm} = \Gamma_{\pm}^{-1}.$$

Далее, используя известное свойство δ -функции $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$ и учитывая соотношение $\omega_k = kc$, имеем

$$\delta \left(\hbar\omega_k - \hbar\Omega \mp \frac{(p + \hbar k)^2 - p^2}{2m} \right) = \\ = \frac{m}{\hbar pk} \delta \left(\frac{mc}{p} - \frac{m\Omega}{pk} \mp \left(\cos \varphi + \frac{\hbar k}{2p} \right) \right),$$

где φ — угол между векторами k и p . Делая естественное предположение $\hbar\Omega \ll mc^2$, получаем для τ_{\pm}

$$\tau_{\pm} = \beta \frac{\hbar^2 pc^2}{2md} \left\{ \ln \frac{e^{\mp\beta\hbar k_c} - 1}{e^{\mp\beta\hbar k+c} - 1} \right\},$$

где

$$k_{\pm} = \Omega/(c \pm p/m).$$

Для нерелятивистских частиц ($p \ll mc$) в случае высоких температур ($\beta \ll 1/\hbar\Omega$) получаем отсюда

$$\tau_+ = \tau_- = \tau = \frac{\hbar^2 c^3}{4d^2} \beta.$$

Это выражение соответствует времени релаксации в системе некоррелированных излучателей.

При низких температурах ($\beta \gg 1/\hbar\Omega$), когда в системе реализуется сверхизлучательное состояние, получим

$$\tau_+ \rightarrow \infty, \quad \tau_- = \hbar c^3 / 4d^2 \Omega. \quad (96)$$

Это выражение для времени конверсии τ_- хорошо согласуется со стандартной оценкой для времени, соответствующего максимуму испускания в сверхизлучательном лазере [62, 63].

3.3. Оценка мощности излучения в сегнетоэлектрическом сверхизлучательном лазере. Покажем теперь, как соотношения типа (96) могут быть использованы для оценки мощности генерации в сверхизлучательном лазере. В качестве примера остановимся на генерации, возникающей при переполаризации сегнетоэлектрика KDP-типа, рассмотренной в п. 2.2. Как указывалось, мощность излучения в такой системе можно оценить с помощью соотношения (75). Оценим теперь время конверсии τ , входящее в правую часть (75). Заметим, что для этого можно было бы провести рассмотрение, аналогичное проведенному в пп. 3.1 и 3.2 для системы с гамильтонианом (70). Возможен, однако, и другой способ определения вероятности Γ_- и, следовательно, времени конверсии τ , связанный с использованием формализма двухвременных температурных функций Грина, введенного в статистическую механику Н. Н. Боголюбовым и С. В. Тябликовым [123].

Из соображений общности рассмотрим систему, характеризуемую гамильтонианом вида

$$H = \sum_k \hbar \omega_k a_k^\dagger a_k + \hbar \Omega \sum_f \sigma_f^z + \\ + \frac{\lambda}{2\sqrt{N}} \sum_{k, f} (a_k^\dagger \sigma_f^- + a_k \sigma_f^+) - \sum_{f, f'} J(f, f') \sigma_f^+ \sigma_{f'}^-. \quad (97)$$

Здесь последний член описывает прямое диполь-дипольное взаимодействие. Следуя [124], рассмотрим запаздывающую функцию Грина вида

$$G_{gf}(t - t') = \langle \sigma_g^-(t) | \sigma_f^+(t') \rangle$$

и составим для нее уравнение движения

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} G_{gf}(t - t') &= \delta(t - t')(1 - 2\langle n \rangle) + \\ &+ \hbar\Omega G_{gf}(t - t') + \frac{\lambda}{2\sqrt{N}} \sum_h G_h^{(1)}(t - t') - \\ &- \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \sum_h G_h^{(2)}(t - t') + \sum_p J(g, p) G_{pf}(t - t') - \\ &- 2 \sum_p J(p, f) \langle \langle \sigma_g^+ \sigma_g^- \sigma_p^- | \sigma_f^+ \rangle \rangle. \end{aligned} \quad (98)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &\equiv \langle \sigma_g^+(0) \sigma_g^-(0) \rangle; \\ G_h^{(1)}(t - t') &\equiv \langle \langle a_h(t) | \sigma_f^+(t') \rangle \rangle; \\ G_h^{(2)}(t - t') &\equiv \langle \langle a_h(t) \sigma_g^+(t) \sigma_g^-(t) | \sigma_f^+(t') \rangle \rangle. \end{aligned}$$

Уравнения движения для функций $G_h^{(1)}$ и $G_h^{(2)}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} G_h^{(1)}(t - t') &= 2\delta(t - t') \langle a_h(0) \sigma_f^+(0) \rangle + \\ &+ \hbar\omega_k G_h^{(1)}(t - t') + \frac{\lambda}{2\sqrt{N}} \sum_p G_{pf}(t, t'); \end{aligned} \quad (99)$$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} G_h^{(2)}(t - t') &= \delta(t - t') \langle a_h(0) \sigma_f^+(0) n_g(0) \rangle + \\ &+ \frac{\lambda}{2\sqrt{N}} \sum_{p \neq g} \langle \langle n_g \sigma_p^- | \sigma_f^+ \rangle \rangle - \frac{\lambda}{2\sqrt{N}} \sum_q \langle \langle a_q^+ a_k \sigma_g^- \sigma_f^+ \rangle \rangle. \end{aligned} \quad (100)$$

Делая, как и в предыдущем параграфе, предположение о малости взаимодействия и применяя расщепления

$$\begin{aligned} \langle \langle n_g \sigma_p^- | \sigma_f^+ \rangle \rangle &= \langle n \rangle G_{pf}(t - t'); \\ \langle \langle a_q^+ a_k \sigma_q^- | \sigma_f^+ \rangle \rangle &= \delta_{qk} \langle v_k \rangle G_{gf}(t - t'); \\ \langle v_k \rangle &\equiv \langle a_k^+ a_k \rangle, \end{aligned}$$

получаем после перехода к E -представлению.

$$EG_{gf}(E) = \frac{1!}{2\pi} (1 - 2\langle n \rangle) \delta_{gf} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \hbar\Omega G_{gf}(E) + \frac{\lambda}{2\sqrt{N}} \sum_k \{G_k^{(1)}(E) - 2G_k^{(2)}(E)\} + \\
 & + \sum_p J(g, p) G_{pf}(E) - 2 \sum_p J(g, p) \langle n \rangle G_{pf}(E); \\
 EG_k^{(1)}(E) & = \hbar\omega_k G_k^{(1)}(E) + \frac{\lambda}{2\sqrt{N}} \sum_p G_{pf}(E) + \frac{1}{\pi} \langle a_k \sigma_f^\dagger \rangle; \\
 EG_k^{(2)}(E) & = \hbar\omega_k G_k^{(2)}(E) + \frac{\lambda}{2\sqrt{N}} \sum_{p \neq g} \langle n \rangle G_{pf} - \\
 & - \frac{\lambda}{2\sqrt{N}} \langle v_k \rangle G_{gf}(E) + \frac{1}{2\pi} \langle a \sigma_f^\dagger n_g \rangle.
 \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned}
 (E - \hbar\Omega) G_{gf}(E) & = \frac{1}{2\pi} (1 - 2 \langle n \rangle) \delta_{gf} + \\
 + \frac{\lambda^2}{4N} \sum_k \frac{1}{E - \hbar\omega_k} \sum_p G_{pf}(E) - \frac{\lambda^2}{2N} \sum_p \frac{1}{E - \hbar\omega_k} \sum_p \langle n \rangle G_{pf}(E) + \\
 & + \frac{\lambda^2}{2N} \langle n \rangle \sum_k \frac{\langle n \rangle + \langle v_k \rangle}{E - \hbar\omega_k} G_{gf}(E) + \\
 + \sum_p J(g, p) G_{gf}(E) - 2 \sum_p J(g, p) \langle n \rangle G_{gf}(E). \tag{101}
 \end{aligned}$$

Для системы на решетке типа сегнетоэлектрика с водородными связями необходимо учесть наличие трансляционной инвариантности, откуда

$$G_{gf}(E) = N^{-1} \sum_q e^{i(g-f, q)} G_q(E); \quad \delta_{gf} = N^{-1} \sum_q e^{i(g-f, q)}.$$

Теперь из (101) получаем уравнение для функции G_q в E -представлении

$$\begin{aligned}
 (E - \hbar\Omega) G_q(E) & = \frac{1}{2\pi} (1 - 2 \langle n \rangle) + \frac{\lambda^2}{4N} \sum_k \frac{1 - 2 \langle n \rangle}{E - \hbar\omega_k} G_q(E) + \\
 + \frac{\lambda^2}{2N} \sum_k \frac{\langle n \rangle + \langle v_k \rangle}{E - \hbar\omega_k} G_q(E) + J(q) (1 - 2 \langle n \rangle) G_q(E), \tag{102}
 \end{aligned}$$

где

$$J(q) \equiv \sum_p J(g-p) e^{i(g-p, q)}.$$

Из уравнения (102) имеем

$$G_q(E) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - 2 \langle n \rangle}{E - \hbar\Omega - J(q) (1 - 2 \langle n \rangle) - M(E)},$$

где массовый оператор

$$M(E) = \frac{\lambda^2}{4N} \sum_k \frac{1+2\langle v_k \rangle}{E - \hbar\omega_k}.$$

При малом затухании получаем отсюда для вероятности перехода в состояние $|-\rangle$ с испусканием фотона

$$\Gamma = \pi \frac{\lambda^2}{4N} \sum_k (1+2\langle v_k \rangle) \delta(\hbar\Omega - \hbar\omega_k - J(q)(1-2\langle n \rangle)).$$

Принимая во внимание, что

$$\langle v_k \rangle = (e^{\beta\hbar\omega_k} - 1)^{-1}$$

и переходя от суммирования по k к интегрированию, получаем окончательно общее выражение для вероятности перехода в девозбужденное состояние

$$\Gamma = \frac{2d^2}{\hbar^2 c^3} \{ \hbar\Omega + J(q)(1-2\langle n \rangle) \} \{ 1 + 2 [e^{\beta(\hbar\Omega + J(q)(1-2\langle n \rangle))} - 1]^{-1} \}.$$

В частном случае низких температур, когда система переходит в сегнетоэлектрическую фазу, имеем

$$\Gamma \cong \frac{2d\Omega}{\hbar c^3} \left\{ 1 + \frac{J(q)}{\hbar\Omega} (1-2\langle n \rangle) \right\}.$$

Соответственно для времени конверсии при $\beta \rightarrow \infty$ находим

$$\tau_{\beta \rightarrow \infty} = \frac{\hbar c^3}{2d\Omega} \left\{ 1 + \frac{J(q)}{\hbar\Omega} (1-2\langle n \rangle) \right\}^{-1}. \quad (103)$$

Подставляя теперь (103) в выражение (75), получаем для мощности излучения следующую оценку:

$$U = \left| \frac{1}{2} \mathcal{Y} \xi^2 - E \text{th}(E\beta) - \varepsilon \text{th}(\varepsilon\beta) \right| \frac{\hbar c^3}{2d\Omega} \left\{ 1 + \frac{J(q)}{\hbar\Omega} (1-2\langle n \rangle) \right\}^{-1}. \quad (104)$$

Подставляя в (104) параметры конкретного сегнетоэлектрического кристалла КДР-типа, можно оценить мощность излучения в достаточно широком интервале температур.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведем краткий итог проведенного в настоящей работе рассмотрения методов исследования равновесных и динамических свойств макроскопических систем, взаимодействующих с бозонными полями.

Прежде всего отметим, что методы, изложенные в разд. 1 и 3, применимы для исследования весьма широкого класса модельных задач. Помимо рассмотренных в обзоре проблем квантовой радиофизики, в этой связи можно указать задачу о структурном фазовом переходе в средах с магнитным упорядочением [84—86], проблему фазового перехода типа металл — диэлектрик в кристаллах с фоновой неустойчивостью (см., например, [125, 126]), задачу о парамагнитной примеси в кристаллах [127] и многое другое. С другой стороны, указанные методы позволяют получить адекватное описание целого ряда конкретных физических явлений в двухуровневых и многоуровневых системах, в том числе для преобразования частоты инфракрасного излучения вверх в нелинейных оптических средах.

Характерно, что если первые экспериментальные работы были направлены на прямое наблюдение «классического» сверхизлучения Дикке, возникающего за счет корреляций излучателей в процессе обмена фотонами [34, 128, 129], то в последнее время активно ведутся экспериментальные и теоретические исследования систем, в которых упорядочение электрических диполей, возникающее за счет температурных фазовых переходов или иных причин, может быть использовано для генерации сверхизлучения. Как показывает проведенное здесь рассмотрение процесса сверхизлучательной генерации в сегнетоэлектриках KDP-типа, развитые точные методы позволяют построить оценки для таких важных физических характеристик лазеров с тепловой накачкой, как мощность излучения, сдвиг частот и т. п.

Авторы признательны Н. Н. Боголюбову за поддержку и полезные обсуждения. Ряд проблем, изложенных в настоящем обзоре, в разное время обсуждался с И. Г. Бранковым, Л. В. Келдышем, Ю. Л. Климонтовичем, Ю. А. Ильинским, А. Н. Мелешко, В. А. Загребновым, С. В. Пелетминским, В. Н. Поповым, Н. С. Тончевым, В. К. Федяниным, И. Р. Юхновским, В. И. Юкаловым, которым мы пользуясь случаем, приносим глубокую благодарность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dicke R. H.— Phys. Rev., 1954, v. 93, p. 99.
2. Аллен Л., Эберли Дж. Оптический резонанс и двухуровневые атомы: Пер. с англ. М.: Мир, 1978.
3. Fried Z.— Phys. Rev. A, 1974, v. 8, p. 2835.
4. Skribanowitz N., Herman I. P., McGillivaray J. C., Feld M. S.— Phys. Rev. Lett., 1973, v. 30, p. 309.
5. Электромагнитное сверхизлучение /Под ред. В. А. Голенищева-Кутузова, В. В. Самарцева. Казань, Изд-во Казанского филиала АН СССР, 1975.
6. Wang Y. K., Hioe F. T.— Phys. Rev. A, 1973, v. 7, p. 831.
7. Hepp K., Lieb E. H.— Ann. Phys., 1973, v. 76, p. 360.
8. Vertogen G., De Vries A. S.— Phys. Lett., 1974, v. 48A, p. 451.
9. Pickles J. B., Thompson B. V.— Ibid., p. 487.
10. Загребнов В. А., Бранков И. Г., Тончев Н. С.— Докл. АН СССР, 1975, т. 225, с. 71.
11. Bogolubov N. N., Jr., Plechko V. N.— Physica A, 1976, v. 82, p. 163; Preprint IC/75/68, Trieste, 1975.

12. Thompson V. V.— J. Phys. A, 1975, v. 8, p. L115.
13. Бранков П. Г., Загребнов В. А., Тончев Н. С.— ТМФ, 1975, т. 22, с. 20.
14. Заславский Г. М., Куденко Ю. А., Сливинский А. П.— ЖЭТФ, 1975, т. 68, с. 2276.
15. Pimental B. M., Zimerman A. H.— Nuovo cimento B, 1975, v. 30, p. 43.
16. Gilmore R., Bowden C. H.— Phys. Rev. A, 1976, v. 13, p. 1898.
17. Елесин В. Ф., Косаев Ю. В.— Письма в ЖЭТФ, 1976, т. 24, с. 78.
18. Емельянов В. И., Климонтович Ю. А.— Квантовая электроника, 1976, т. 3, с. 848.
19. Gilmore R., Bowden C. M.— J. Math. Phys., 1976, v. 17, p. 1617.
20. Боголюбов Н. Н. (мл.), Плечко В. Н.— Докл. АН СССР, 1976, т. 228, с. 1061.
21. Боголюбов Н. Н. (мл.), Курбатов А. М., Плечко В. Н. Сообщение ОИЯИ, Д17-9737, Дубна, 1976.
22. Klemm A., Zagrebnoy V. A.— Physica A, 1977, v. 86, p. 400.
23. Мощинский Б. В., Федянин В. К.— ТМФ, 1977, т. 32, с. 96.
24. Буйнов Н. С., Нагибаров В. Р., Соловаров Н. К.— Докл. АН БССР, 1977, т. 21, с. 13.
25. Боголюбов Н. Н. (мл.), Плечко В. Н., Репников Н. Ф.— ТМФ, 1976, т. 24, с. 357.
26. Rzażewsky K., Wodkiewicz K., Zakowicz W.— Phys. Lett., 1977, v. 58A, p. 211.
27. Klemm A., Zagrebnoy V. A., Ziesche P.— J. Phys. A, 1977, v. 10, p. 1987.
28. Otszag M.— J. Phys. A, 1977, v. 10, p. 1995.
29. Плечко В. Н.— В сб.: Международный симпозиум по избранным проблемам статистической механики. ОИЯИ, Д17-11490, Дубна, 1977, с. 128.
30. Емельянов В. И., Климонтович Ю. Л.— Письма в ЖЭТФ, 1978, т. 27, с. 7.
31. Gilmore R., Narducci L. M.— Phys. Rev. A, 1978, v. 17, p. 1747.
32. Маймистров А. И., Маныкин Э. А.— Журнал прикладной спектроскопии, 1978, т. 29, с. 353.
33. Kudryavtsev I. K., Shumovsky A. S.— Optica Acta, 1979, v. 26, p. 827.
34. Слюсарев В. А., Янкевич Р. П.— ТМФ, 1979, т. 40, с. 124.
35. Кудрявцев И. К., Мелешко А. Н., Шумовский А. С.— Докл. АН СССР, 1979, т. 248, с. 335.
36. Зданьски А. К., Курбатов А. М.— Препринт ИТФ-79-41Р, Киев, 1979.
37. Кудрявцев И. К., Мелешко А. Н., Шумовский А. С.— Квантовая электроника, 1979, т. 6, с. 2434.
38. Кудрявцев И. К., Мелешко А. Н., Шумовский А. С.— Квантовая электроника, 1979, т. 6, с. 2573.
39. Боголюбов Н. Н. (мл.), Возяков В. И., Плечко В. Н. Препринт ОИЯИ Е17-12987, Дубна, 1979; ТМФ, 1980, т. 44, с. 363.
40. Андреев А. В., Арутюнян Р. В., Ильинский Ю. А.— Вестн. МГУ. Сер. физ., астроном., 1979, т. 20, с. 47.
41. Кудрявцев И. К., Шумовский А. С.— Там же, с. 84.
42. Кирьянов В. Б., Ярунин В. С.— ТМФ, 1980, т. 43, с. 91.
43. Ахметели А. М., Мелешко А. Н., Шумовский А. С.— Докл. АН СССР, 1981, т. 256, с. 1094.
44. Ахметели А. М., Мелешко А. Н., Шумовский А. С. Препринт ОИЯИ Д17-81-411, Дубна, 1981.
45. Попов В. Н. Метод функционального интегрирования в теории модельных гамильтонианов. Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 101. Л.: Наука, 1981.
46. Ахметели А. М., Мелешко А. Н., Шумовский А. С. Сообщение ОИЯИ Р17-82-39, Дубна, 1982.
47. Попов В. Н., Федотов С. А.— В сб.: Международный симпозиум по избранным проблемам статистической механики. ОИЯИ, Д17-81-758, Дубна, 1982.
48. Боголюбов Н. Н.— Вестн. МГУ. Сер. физ., астроном., 1947, № 7, с. 43.
49. Bogolubov N. N.— J. Phys., 1947, v. II, p. 23.

50. Боголюбов Н. Н. (мл.). Метод исследования модельных гамильтонианов. М.: Наука, 1974.
51. Gilmore R.— Phys. Lett., 1977, v. 60A, p. 387.
52. Gilmore R.— J. Phys. A, 1977, v. 10, p. 131.
53. Cagnac B.— Ann. Phys. (France), 1975, v. 9, v. 223.
54. Salour M. M.— Ibid., 1978, v. 111, p. 364.
55. McNeil K. J., Walls D. F.— J. Phys. A, 1975, v. 8, p. 104.
56. McNeil K. J., Walls D. F.— Ibid., p. 111.
57. Aharonov Y., Knight I. M.— Phys. Rev. Lett., 1980, v. 45, p. 1920.
58. Ораевский А. Н.— Квантовая электроника, 1979, т. 6, с. 218.
59. Андреев А. В., Емельянов В. И., Ильинский Ю. А.— УФН, 1980, т. 131.
60. Baldwin G. C., Khokhlov R. V.— Phys. Today, 1975, v. 28, p. 32.
61. Ильинский Ю. А., Хохлов Р. В.— Изв. вузов. Радиофизика, 1976, т. 19, с. 792.
62. Андреев А. В.— ЖЭТФ, 1977, т. 72, с. 1397.
63. Андреев А. В., Ильинский Ю. А., Хохлов Р. В.— Там же, т. 73, с. 1296.
64. Bonifacio R., Schwendimann P.— Nuovo cimento Lett., 1970, v. 3, p. 512.
65. Bonifacio R., Schwendimann P., Haake F.— Phys. Rev. A, 1971, v. 4, p. 302; 854.
66. Banfi G., Bonifacio R.— Phys. Rev. A, 1975, v. 12, p. 2068.
67. Bonifacio R., Lugiato L. A.— Ibid., v. 11, p. 1507; v.12, p.587.
68. Zwanzig E.— Physica, 1964, v. 30, p. 1109.
69. Haake F.— Z. Phys., 1969, Bd 227, S. 179.
70. Mandel P.— Phys. Lett., 1974, v. 47A, p. 307.
71. Willis C. R.— J. Math. Phys., 1965, v. 7, p. 404.
72. Боголюбов Н. Н. Сообщение ОИЯИ E17-11822, Дубна, 1978.
73. Боголюбов Н. Н., Боголюбов Н. Н. (мл.).— ЭЧАЯ, 1980, т. 11, вып. 2, с. 245.
74. Боголюбов Н. Н. (мл.), Казарян А. Р., Курбатов А. М.— В сб.: Международный симпозиум по избранным проблемам статистической механики. ОИЯИ, Д17-81-758, Дубна, 1982.
75. Боголюбов, Н. Н. (мл.). Фам Ле Киен, Шумовский А. С. Препринт ОИЯИ P17-81-456, Дубна, 1981.
76. Боголюбов, Н. Н. (мл.). Фам Ле Киен, Шумовский А. С. Препринт ОИЯИ P17-81-514, Дубна, 1981.
77. Боголюбов, Н. Н. (мл.). Фам Ле Киен, Шумовский А. С.— В сб.: Международный симпозиум по избранным проблемам статистической механики. ОИЯИ, Д17-81-758, Дубна, 1981.
78. Махвиладзе Т. М., Рез А. И., Сарычев М. Е.— Журн. прикл. спектроскоп., 1975, т. 22, с. 642.
79. Bogolubov N. N.— Physica, 1960, v. 26S, p. 1.
80. Боголюбов Н. Н. Сообщение ОИЯИ Д-781, Дубна, 1981; Избр. тр., т. 3, Киев: Наукова думка, 1971.
81. Kobayashi K.— J. Phys. Soc. Japan, 1968, v. 24, p. 497.
82. Курбатов А. М., Плечко В. Н.— ТМФ, 1976, т. 28, с. 127.
83. Brankov J. G., Tonchev N. S.— Physica, 1976, v. 84A, p. 371.
84. Кудрявцев И. К., Шумовский А. С.— Докл. АН СССР, 1977, т. 232, с. 1293.
85. Kudryavtsev I. K., Shumovsky A. S.— Phys. Lett., 1978, v. 66A, p. 501.
86. Кудрявцев И. К., Шумовский А. С.— ТМФ, 1979, т. 41, с. 103.
87. Мелешко А. Н., Шумовский А. С. Письма в ЖЭТФ, 1979, т. 29, с. 468.
88. Бранков Й. Г., Шумовский А. С. Сообщение ОИЯИ P4-7205, Дубна, 1973.
89. Осипов М. А., Шумовский А. С.— ТМФ, 1981, т. 46, с. 125.
90. Боголюбов Н. Н. (мл.).— Ядерная физика, 1969, т. 10, с. 425.
91. Боголюбов Н. Н. (мл.), Шумовская А. Г., Шумовский А. С.— ТМФ, 1974, т. 21, с. 258.
92. Thompson V. V.— J. Phys. A, 1975, v. 8, p. 126.

93. Thompson B. V.— J. Phys. C, 1970, v. 3, p. L147.
94. Klemm A., Zagrebnov V. A.— Physica A, 1978, v. 92, p. 599.
95. Займан Дж. Принципы теории твердого тела: Пер. с англ. М.: Мир, 1974.
96. Ressayre E., Tallet A.— Lett. Nuovo cimento, 1972, v. 5, p. 1105.
97. De Marini F.— Ibid., 1974, v. 10, p. 275.
98. Brankov J. G., Tonchev N. S., Zagrebnov V. A.— J. Stat. Phys., 1979, v. 20, p. 317.
99. Shumovsky A. S.— Phys. Lett., 1978, v. 68A, p. 424.
100. Novacovic L. The Pseudo-Spin Method in Magnetism and Ferroelectricity. Oxford, Pergamon Press, 1975.
101. Ваке В. Г. Введение в микроскопическую теорию сегнетоэлектричества. М.: Наука, 1973.
102. Блинц Р., Жекш Б. Сегнетоэлектрики и антисегнетоэлектрики: Пер. с англ. М.: Мир, 1975.
103. Папченко Т. В., Санченко Ю. И., Таран В. Г., Флерова С. А.— Кристаллография, 1976, т. 21, с. 841.
104. Вайсфельд Н. П., Имамугдинов Ф. С., Хасанов А. Х.— Письма в ЖЭТФ, 1981, т. 34, с. 252.
105. Imry I., Pelah I., Wiener E.— J. Chem. Phys., 1965, v. 43, p. 2332.
106. Воронин Э. С., Стрижевский В. Л.— УФН, 1979, т. 127, с. 99.
107. Соломатин В. С., Мелешко А. Н., Красников В. В.— Квантовая электроника, 1979, т. 6, с. 1326.
108. Соломатин В. С., Мелешко А. Н.— Там же, 1979, т. 6, с. 1528.
109. Резонансные взаимодействия света с веществом. М.: Наука, 1977.
110. Shen Y. R.— Phys. Rev., 1967, v. 155, p. 921.
111. Walls D. F.— J. Phys. A, 1971, v. 4, p. 813.
112. Крайнов В. П.— ЖЭТФ, 1976, т. 70, с. 1196.
113. Gilmore R.— Ann. Phys., 1972, v. 74, p. 391.
114. Gilmore R. Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications. N. Y., Wiley, 1974.
115. Шелепин Л. А.— ЖЭТФ, 1968, т. 54, с. 1463.
116. Banfi G., Bonifacio R.— Phys. Rev. A, 1975, v. 12, p. 469.
117. Eberly J. H.— Amer. J. Phys., 1972, v. 40, p. 1374.
118. Боголюбов Н. Н. Лекции по квантовой статистике. Киев: Наукова думка, 1949; Избр. тр. Т. 2, Киев: Наукова думка, 1970.
119. Боголюбов Н. Н., Боголюбов Н. Н. (мл.). Введение в квантовую статистическую механику. 4.2. Сообщение ОИЯИ Р17-80-239. Дубна, 1980.
120. Боголюбов Н. Н., Боголюбов Н. Н. (мл.). Аспекты теории полярона. Сообщение ОИЯИ Р17-81-65, Дубна, 1981.
121. Фудзита С. Статистическая механика: Пер. с англ.— М.: Мир, 1969.
122. Compagno G., Panzarella A., Persico F.— Phys. Lett., 1980, v. 80A, p. 125.
123. Боголюбов Н. Н., Тябликов С. В.— Докл. АН СССР, 1959, т. 126, с. 53.
124. Боголюбов Н. Н., Боголюбов Н. Н. (мл.). Введение в квантовую статистическую механику. 4.1. ОИЯИ, Р17-80-198, Дубна, 1980.
125. Бугаев А. А., Захарченко Б. П., Чудновский Ф. А. Фазовый переход металл—изолятор и его применение.— Л.: Наука, 1979.
126. Нагаев Э. Л. Физика магнитных полупроводников. М.: Наука, 1979.
127. Wagner M.— Z. Phys. B, 1979, Bd 32, S. 225.
128. Skribanowitz N., Herman J. P., MacGillivray J. C., Feld M. S.— Phys. Rev., 1976, v. 14A, p. 1169.
129. Flusherg A., Massberg T., Hartmann S. R.— Phys. Lett., 1976, v. 58A, p. 337.
130. Hioe F. T.— Phys. Rev., 1973, v. 8A, p. 831, 1440.
131. Nepp K., Lieb E.— Ibid., p. 2517.
132. Попов В. Н., Федотов С. А.— ТМФ, 1982, т. 50, с. 146.
133. Кирьянов В. Б., Ярунин В. С.— ТМФ, 1980, т. 43, с. 91.
134. Кирьянов В. Б., Ярунин В. С.— Там же, 1982, т. 51, с. 456.
135. Метод аппроксимирующего гамильтониана в статистической физике.