«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1984, ТОМ 15, ВЫП. 5

УДК 517. 944+516.4

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ТЕОРИИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ

Б. М. Барбашов, В. В. Нестеренко
Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Обзор посвящен геометрическому подходу к явно интегрируемым и вполне интегрируемым нелинейным уравнениям в частных производных с двумя независимыми переменными, которые возникают в теории релятивистской струны. Рассматривается геометрия двумерных минимальных поверхностей в n-мерном псевдоевклидовом пространстве. Описание этих поверхностей дифференциальными формами позволяет получить две серии систем нелинейных уравнений, общие решения которых строятся в явном виде. Излагается геометрический способ получения новых нелинейных уравнений, допускающих представление Лакса. Эти уравнения описывают релятивистскую струну в пространстве-времени де Ситтера, сферу в трехмерном унимодулярном аффинном пространстве и специальную параметризацию на обычной сфере в трехмерном евклидовом пространстве.

The survey is devoted to the geometrical approach to the explicitly and completely integrable partial nonlinear equations with two independent variables in the relativistic string theory. The geometry of the minimal surfaces in n-dimensional pseudo-Euclidean space is considered. The description of these surfaces in terms of the exterior differential forms enables one to obtain two series of nonlinear equation sets general solutions of which are constructed explicitly. The geometrical approach to obtaining new nonlinear equations admitting the Lax representation is represented also. These equations describe the relativistic string in the de Sitter space-time, the sphere in the three-dimensional unimodular affine space and the special parametrization on the usual sphere in the three-dimensional Euclidean space.

ВВЕДЕНИЕ

Экспериментальные данные по высокоэнергетическим взаимодействиям элементарных частиц, получаемые на современных ускорителях, все убедительнее свидетельствуют о том, что теорией, описывающей динамику адронов, является квантовая хромодинамика (КХД). Однако успехи теоретиков в решении принципиальных вопросов КХД, таких, например, как выяснение механизма удержания кварков внутри адронов и выход за рамки теории возмущений, пока значительно более скромные в сравнении с экспериментальными результатами в данной области. В такой ситуации естественно возникла потребность в моделях, которые являлись бы некоторым огрублением или приближением к КХД. И целый ряд таких моделей был создан. Это всевозможные потенциальные модели, постулирующие тот или иной запирающий потенциал для кварков в адронах, модели мешков, партонная модель, модели, феноменологически учитывающие нетривиальные свойства вакуума в КХД, и т. д.

Наглядную картину механизма удержания кварков в адронах дает модель релятивистской струны. Она состоит в следующем. Если расстояние между кварками значительно меньше размера адронов, то кварки оказываются практически свободными. При увеличении же этого расстояния основную роль во взаимодействии кварков друг с другом начинают играть такие конфигурации глюонного поля, в которых это поле сконцентрировано в виде жгута или трубки вдоль линии, соединяющей кварки. Пренебрегая поперечными размерами жгута, мы получаем одномерно-протяженный объект, соединяющий кварки, который получил название релятивистской струны. Действие струны, очевидно, должно представлять собой соответствующее приближение к действию неабелева глюонного поля. Однако уже одно требование релятивистской инвариантности и аналогия с действием точечной частицы позволяют написать действие струны практически однозначно. Действие релятивистской струны выбирается пропорциональным площади мировой поверхности, покрываемой струной в процессе своего движения в пространстве Минковского.

Принципиальные трудности, возникающие при построении квантовой теории релятивистской струны (нефизическая размерность пространства-времени, тахионные состояния), стимулировали поиски нестандартных подходов к этой модели. Один из таких подходов — геометрический — основывается на описании мировой поверхности релятивистской струны дифференциальными формами, удовлетворяющими условиям интегрируемости, которые представляют собой нелинейные уравнения в частных производных Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи. В геометрическом подходе эти уравнения рассматриваются как уравнения движения, задающие динамику струны. Замечательным свойством этих уравнений в теории релятивистской струны является возможность построить их общее решение.

Простейшими уравнениями здесь могут служить: нелинейное уравнение Лиувилля и упрощенная система двух нелинейных уравнений Лунда — Редже. Уравнение Лиувилля возникает помимо теории релятивистской струны, например, при исследовании инстантонных решений в неабелевых калибровочных теориях, а система Лунда — Редже представляет интерес с точки зрения нелинейной двумерной сигма-модели с группой симметрии SO (4). В общем же случае геометрический подход в теории релятивистской струны приводит к новым системам нелинейных уравнений, для которых можно указать алгоритм построения общих решений.

Прежде чем переходить к квантованию релятивистской струны в рамках геометрического подхода, необходимо исследовать на классическом уровне нелинейные уравнения, описывающие динамику струны в данном подходе. Этому и посвящен в основном настоящий обзор.

Вначале мы кратко перечислим некоторые методы построения явных решений нелинейных уравнений в частных производных, развитые в последнее время.

Сразу следует отметить, что возможность построить общее решение для нелинейного уравнения в частных производных является чрезвычайной редкостью. Современная теория таких уравнений в лучшем случае может дать ответ на вопрос о существовании и единственности решения. А для целого ряда нелинейных уравнений, причем весьма важных с физической точки зрения, например уравнение Новье — Стокса, не удается получить исчерпывающего ответа даже на этот вопрос. Поиски общих решений нелинейных уравнений в частных производных стали «одной из тихих заводей математики, далекой от основного русла, где дилетанты могли плескаться в свое удовольствие, не тревожимые конкуренцией с профессионалами» [1]. В этой ситуации прогресс в исследовании нелинейных уравнений в частных производных, достигнутый за последние 15 лет, был совершенно неожиданным. Мы имеем в виду метод обратной задачи рассеяния, который был создан в этот период и успешно применен к целому ряду нелинейных уравнений [2—6].

Для решения математической задачи — построения общего решения нелинейного уравнения в частных производных — были использованы хорошо разработанные в теоретической физике спектральный анализ уравнений Шредингера и Дирака и процедура восстановления потенциала по экспериментальным результатам рассеяния на нем частиц. Успех метода обратной задачи рассеяния еще раз продемонстрировал плодотворность тесного сотрудничества чистой математики и теоретической физики, сотрудничества, которое, к сожалению, в последние годы стало чрезвычайной редкостью [1].

Как это часто бывает в аналогичной ситуации, успех метода обратной задачи рассеяния привлек к данной проблеме внимание многих математиков и физиков-теоретиков. По этой теме существует уже довольно обширная литература [2—6].

Наряду с методом обратной задачи рассеяния были предложены и другие подходы к построению общих решений нелинейных уравнений в частных производных. Чисто групповой метод построения таких решений был развит в серии работ [7—10].

Нами был предложен способ построения общих решений нелинейных уравнений [11—14], использующий методы классической дифференциальной геометрии [15—18]. Кроме того, был развит метод построения целой серии нелинейных уравнений, допускающих представление Лакса [19—24]. При этом существенным моментом было использование математического аппарата теории поверхностей [16, 17].

В данном обзоре мы постараемся кратко изложить идеи и основные результаты именно этого чисто геометрического подхода к явно интегрируемым и вполне интегрируемым нелинейным уравнениям.

Следует отметить, что во всех подходах, перечисленных выше, речь идет только о нелинейных уравнениях в частных производных специального типа. Класс этих уравнений всегда будет оставаться чрезвычайно узким по сравнению со всем многообразием нелинейных уравнений. Тем не менее способы построения общих решений нелинейных уравнений даже специального вида несомненно заслуживают внимания как математиков, так и физиков.

Нелинейные уравнения, с которыми мы будем иметь дело, возникают в теории минимальных поверхностей. Вначале мы дадим геометрическое определение минимальной поверхности, а потом укажем, в каких разделах теоретической физики возникают такие поверхности.

В каждой точке двумерной поверхности ее кривизна характеризуется двумя инвариантами: *полной* или *гауссовой кривизной* и *средней кривизной* [15, 16, 25]. Первый инвариант определяет *внутреннюю кривизну* поверхности, т. е. кривизну, которая не зависит от изгибания поверхности. Изгибанием называется такая деформация поверхности, которая сохраняет метрические соотношения на ней (расстояния между двумя точками, углы между пересекающимися кривыми). Иначе можно сказать, что при изгибании сохраняется *первая квадратичная форма поверхности*. Средняя кривизна поверхности характеризует ее внешнюю кривизну, и этот инвариант существенно зависит от того, как вложена поверхность в объемлющее пространство.

Поверхности с постоянной гауссовой кривизной и постоянной средней кривизной служили предметом исследования для многих поколений геометров. Примерами поверхностей первого типа являются сфера, гиперболоиды, псевдосферы. Интересно отметить, что с поверхностями *постоянной полной кривизны* тесно связано нелинейное уравнение синус-Гордона [16, 26—28]:

$$\varphi_{xy} = \sin \varphi, \tag{1}$$

являющееся классическим уравнением, решаемым методом обратной задачи рассеяния *.

Пример поверхности с *постоянной средней кривизной*, причем нулевой, дает *минимальная поверхность* [25, 31, 77]. Определение минимальной поверхности допускает вариационную формулировку. К отысканию такой поверхности приводит задача о нахождении поверхности с наименьшей площадью, имеющей заданную границу (задача Плато [32]). В обычном евклидовом 3-мерном пространстве наглядное представление о минимальных поверхностях дают мыльные пленки, натянутые на жесткие проволочные каркасы.

* Одной из первых работ, в которой рассматривалось это уравнение, является оригинальное сообщение русского математика П. Л. Чебышева «О кройке одежды», сделанное им в Париже в 1878 г. [29]. В этой связи уравнение (1) уместно было бы назвать уравнением Чебышева. Тем более что устоявшееся название для него — уравнение синус-Гордона — является лишь довольно неудачным жаргоном. Но, к сожалению, такое предложение [30] не получило поддержки даже в отечественной литературе.

История минимальных поверхностей восходит к работам Лагранжа (1760), но и в настоящее время эта задача привлекает внимание математиков [33—35]. Вероятно, еще рано говорить о закончившейся «бурной молодости» этой проблемы и начале ее «усталой старости» [36].

Минимальные поверхности в псевдоевклидовом пространстве стали рассматриваться в теоретической физике при формулировке теории одномерно-протяженного релятивистского объекта — релятивистской струны [37, 38]. Релятивистская струна определяется своим действием, которое пропорционально площади мировой поверхности, покрываемой струной в процессе ее движения в пространстве Минковского. Модель релятивистской струны возникает в различных разделах теоретической физики: при исследовании нелинейных двумерных моделей типа Борна — Инфельда [39], в дуально-резонансном подходе к физике адронов [37, 38], при рассмотрении взаимодействия кварков в адронах [40, 41], в космологии при выяснении механизма образования галактик [42, 43].

План нашего изложения следующий. В первом разделе приводятся основные факты из классической дифференциальной геометрии, касающиеся теории поверхностей. При этом основное внимание уделяется описанию подвижного базиса на поверхности, что позволяет задавать поверхность ее фундаментальными дифференциальными формами. Выводятся уравнения вложения Гаусса, Петерсона — Кодацци, Риччи, которым должны удовлетворять эти формы [17, 18].

Во втором разделе дается определение минимальной поверхности [15, 17, 31, 33] и строится разложение для ее координат в специальном базисе. В результате декартовы координаты минимальной поверхности, погруженной в n-мерное псевдоевклидово пространство, оказываются выраженными через 2 $(n-2)$ произвольные функции одной переменной [11, 44].

В третьем разделе выписываются в явном виде нелинейные уравнения вложения для минимальной поверхности в 3, 4, 5 и 6-мерном псевдоевклидовом пространстве. Здесь же строятся общие решения этих уравнений [12—14, 45].

В четвертом разделе минимальные поверхности рассматриваются в специальной параметризации (так называемая калибровка $t = \tau$ в теории релятивистской струны). Здесь получается новая серия нелинейных уравнений, для которых строится общее решение [12—14].

В пятом разделе показано, как можно использовать классическую теорию поверхностей для получения нелинейных уравнений, допускающих представление Лакса [21, 24].

В шестом разделе дана геометрическая интерпретация нелинейного уравнения $\varphi_{,11} - \varphi_{,22} = e^{\varphi} - e^{-2\varphi}$ и построена для него линейная спектральная задача в матрицах из алгебры Ли группы $SL(3, R)$ [20].

В седьмом разделе получена новая система из двух нелинейных уравнений, описывающая минимальную поверхность в пространстве-времени постоянной кривизны [19]. Для этой системы также построено в явном виде представление Лакса.

В восьмом разделе показано, как можно получить исходя из геометрии обычной сферы новое нелинейное вполне интегрируемое уравнение [22].

В заключении кратко подведены итоги геометрического подхода к нелинейным явно интегрируемым и вполне интегрируемым уравнениям.

В приложении показано, как можно простым путем построить общее решение нелинейного уравнения Лиувилля, рассматривая геометрию обычной сферы в 3-мерном евклидовом пространстве.

1. ОСНОВНЫЕ ФАКТЫ ИЗ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Пусть мы имеем некоторое n-мерное плоское пространство с произвольной сигнатурой метрики, координаты которого мы будем обозначать так: x^μ, $\mu = 0, 1, \ldots, n-1$. Если в этом пространстве задана m-мерная поверхность $(m \leqslant n)$, то это означает, что задан набор из n функций от m переменных $u^1, \ldots, u^m$

$$x^\mu (u^1, u^2, \ldots, u^m), \; \mu = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{2}$$

причем

$$\mathrm{Rang} \left| \frac{\partial x^\mu}{\partial u^i} \right| \equiv \mathrm{Rang} \mid x^\mu_{,i} \mid = m. \tag{3}$$

В этом случае говорят о параметрическом задании m-мерной поверхности и параметры $u^1, \ldots, u^m$ играют роль криволинейных координат на ней. Функции (2) дают исчерпывающую информацию о поверхности [17, 18].

Однако в ряде случаев не требуется такое детальное описание поверхности, например при исследовании сразу целого класса поверхностей, характеризуемых каким-либо общим признаком, или же при изучении локальных свойств поверхности в заданной точке. Для этих целей и во многих других случаях оказывается удобным задавать поверхность ее основными *дифференциальными формами.*

В теории поверхностей используются *квадратичные* и *линейные* дифференциальные формы. Первые были введены в геометрию Гауссом [46], вторые — Дарбу [47] и Картаном [48]. Эти формы естественно возникают при рассмотрении *подвижного базиса* на поверхности.

В каждой точке поверхности с координатами $\{u^1, \ldots, u^m\}$ построим *ортонормированный базис*, образованный набором из n векторов:

$$e^\mu_a (u^1, \ldots, u^m), \qquad a = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

$$\sum_{\mu=0}^{n-1} e^\mu_a e^\mu_b c_\mu = \varepsilon_a \delta_{ab}, \; \varepsilon_a = \pm 1, \; c_\mu = \pm 1 \tag{5}$$

[суммирования по a в (5) нет]. Первые m векторов e^μ_i, $i = 1, \ldots, m$, являются *касательными* к поверхности (2), а оставшиеся $n-m$

векторов e^μ_α, $\alpha = m+1, \ldots, n$,— это *нормами* к ней. Множители c_μ и ε_α в (4) учитывают сигнатуру метрики объемлющего пространства. Начало базиса (4) поместим в точку $x^\mu(u^1, \ldots, u^m)$. Напомним, что набор из m касательных к поверхности (2) векторов дают частные производные $x^\mu_{,i}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. В общем случае эти векторы не ортонормированные, но в силу (3) они заведомо линейно независимы в каждой точке поверхности. Поэтому базис (4) всегда можно построить.

Оказывается, что если в каждой точке поверхности известен такой базис, то по нему можно восстановить и поверхность. Если нас интересуют локальные свойства поверхности, то достаточно найти дифференциальные уравнения, определяющие изменение базиса (4) при движении его начала $x^\mu(u^1, \ldots, u^m)$ по поверхности. Эти уравнения описывают изменение радиус-вектора поверхности

$$dx^\mu = \omega^i e^\mu_i, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{6}$$

и изменение базисных ортов e^μ_a;

$$de^\mu_a = \Omega_{a\cdot}^{\cdot b} e^\mu_b \tag{7}$$

при движении базиса $\{x^\mu;\ e^\mu_a,\ a = 1, \ldots, n\}$ по поверхности. Здесь ω^i и $\Omega_{a\cdot}^{\cdot b}$ — *линейные дифференциальные формы*

$$\omega^i = \omega^i_j(u^1, \ldots, u^m)\, du^j, \tag{8}$$

$$\Omega_{a\cdot}^{\cdot b} = \Omega_{a\cdot|k}^{\cdot b}(u^1, \ldots, u^m)\, du^k; \tag{9}$$

$$i,\ j,\ k = 1, \ldots, m; \quad a,\ b = 1 \ldots, n.$$

Дифференцирование соотношений (5) дает

$$\Omega_{a\cdot}^{\cdot b}\varepsilon_b + \Omega_{b\cdot}^{\cdot a}\varepsilon_a = 0, \quad a,\ b = 1, \ldots, n$$

(по a и b суммирования нет).

Уравнения (6) и (7) являются системой линейных уравнений в частных производных первого порядка следующего вида:

$$d\theta_r(u) = \sum_{i=1}^{m} \psi^i_{rs}(u)\, \theta_s(u)\, du^i \tag{10}$$

или в эквивалентной записи

$$\frac{\partial\theta_r}{\partial u^i} = \psi^i_{rs}\theta_s(u), \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{11}$$

где $\theta_r(u)$ означает набор переменных $\{x^\mu,\ e^\mu_a\}$. На функции $\theta_r(u)$ наложены условия (5). Поэтому уравнения (10), (11) и (5) являются системой *смешанного типа* [16]. Условия интегрируемости уравнений (11) отражают тот факт, что

$$\theta_{r,\,ij} = \theta_{r,\,ji}, \quad i,\ j = 1, \ldots, m. \tag{12}$$

Эти условия приводят к следующим требованиям на матрицы коэффициентов ψ^i в уравнениях (11):

$$\psi^i_{,j} - \psi^j_{,i} + [\psi^i, \psi^j] = 0, \qquad (13)$$
$$i,\ j = 1, \ldots, m.$$

Чтобы переписать условия интегрируемости (12) в терминах дифференциальных форм ω^i и $\Omega_{a\cdot}^{\cdot b}$, удобно использовать формализм внешнего дифференцирования [36, 48—53]. Нам потребуется только правило внешнего дифференцирования линейных форм. Пусть a — линейная дифференциальная форма в базисе $\{du^1, \ldots, du^m\}$

$$a = a_i(u)\, du^i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Тогда внешний дифференциал этой формы da определяется так:

$$da = da_i \wedge du^i = \frac{\partial a_i(u)}{\partial u^j} du^j \wedge du^i = \sum_{i<j} (a_{i,j} - a_{j,i})\, du^j \wedge du^i, \qquad (14)$$

где $\wedge$ — знак внешнего произведения:

$$du^i \wedge du^j = -du^j \wedge du^i. \qquad (15)$$

В результате внешнего дифференцирования линейной формы a мы получаем внешнюю дифференциальную форму второй степени, или 2-форму. Дальнейшее внешнее дифференцирование будет приводить к формам более высокой степени. Функция $f(u^1, \ldots, u^m)$ называется дифференциальной формой нулевой степени. Ее внешний дифференциал совпадает с обычным дифференциалом

$$df = f_{,i} du^i.$$

Используя (14), легко убедиться, что

$$d^2 f \equiv d(df) = 0, \qquad (16)$$

так как $f_{,ji} = f_{,ij}$. Из (14) и (15) следуют правила дифференцирования внешнего произведения двух форм. Если a и b — внешние дифференциальные формы степени p и q соответственно, то

$$d(a \wedge b) = da \wedge b + (-1)^p a \wedge db. \qquad (17)$$

Нам потребуется частный случай формулы (17), когда $p = 1$, $q = 0$, т. е. b — просто функция $f(u^1, \ldots, u^m)$

$$d(a \cdot f) = da \cdot f - a \wedge df. \qquad (18)$$

Условия интегрируемости уравнений (10), которые даются равенством (12), на языке внешних форм записываются согласно (16) в следующем виде:

$$d^2\theta_r = d(d\theta_r) = 0. \qquad (19)$$

Возвратившись к уравнениям (6) и (7), мы можем переписать условия их интегрируемости (19) так:

$$d^2x^\mu = d\,(dx^\mu) = 0, \quad d^2e_a^\mu = d\,(de_a^\mu) = 0. \tag{20}$$

Из (20) с учетом (6), (7) и (18) получаем:

$$\omega^j \wedge \Omega_{j\cdot}^{\cdot\alpha} = 0; \tag{21}$$

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \Omega_{j\cdot}^{\cdot i}; \tag{22}$$

$$d\Omega_{a\cdot}^{\cdot b} = \Omega_{a\cdot}^{\cdot c} \wedge \Omega_{c\cdot}^{\cdot b}; \tag{23}$$

$i, j, k, \ldots = 1, \ldots, m, \ a, b, c, \ldots = 1, \ldots, n, \ \alpha, \beta, \gamma, \ldots = m+1, \ldots, n$.
В покомпонентной записи эти уравнения выглядят так:

$$\omega_i^j \Omega_{j\cdot|k}^{\cdot\alpha} - \omega_k^j \Omega_{j\cdot|i}^{\cdot\alpha} = 0; \tag{24}$$

$$\omega_{k,\,l}^i - \omega_{l,\,k}^i = \omega_l^j \Omega_{j\cdot|k}^{\cdot i} - \omega_k^j \Omega_{j\cdot|l}^{\cdot i}; \tag{25}$$

$$\Omega_{a\cdot|i,k}^{\cdot b} - \Omega_{a\cdot|k,i}^{\cdot b} = \Omega_{a\cdot|k}^{\cdot c}\Omega_{c\cdot|i}^{\cdot b} - \Omega_{a\cdot|i}^{\cdot c}\Omega_{c\cdot|k}^{\cdot b}. \tag{26}$$

Фактически уравнения (24)—(26) представляют собой иную запись уравнений (13) с учетом явного вида матриц ψ.

В курсах дифференциальной геометрии [16—18, 53] доказывается, что система уравнений смешанного типа (6), (7) и (5) при выполнении условий интегрируемости (21)—(23) имеет решение $\{x^\mu(u^1, \ldots, u^m), e_a{}^\mu(u^1, \ldots, u^m)\}$, зависящее от $n\,(n+1)/2$ констант интегрирования, где n — размерность объемлющего пространства. Различный выбор констант интегрирования соответствует сдвигам и поворотам поверхности в пространстве как целого.

Таким образом, имеет место следующая *основная теорема* в теории поверхностей (теорема О. Бонне). Дифференциальные формы ω^i, $\Omega_{a\cdot}^{\cdot b}$, удовлетворяющие условиям интегрируемости (24)—(26), определяют поверхность $x^\mu\,(u^1, \ldots, u^m)$ с точностью до преобразований из группы движений объемлющего пространства.

Помимо линейных форм в теории поверхностей, начиная с работ Гаусса, используются *квадратичные дифференциальные формы*. Первая квадратичная форма g_{ij} задает *внутреннюю геометрию* поверхности

$$dx^\mu\, dx^\mu c_\mu = x^\mu_{,i} x^\mu_{,j} c_\mu\, du^i\, du^j = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}(u)\, du^i\, du^j,$$

$$g_{ij} = x^\mu_{,i} x^\mu_{,j} c_\mu. \tag{27}$$

Вторые квадратичные формы $b_{\alpha\,|\,ij}$ определяют *внешнюю геометрию* поверхности и задаются формулой

$$\nabla_j x^\mu_{,i} = \sum_{\alpha=m+1}^{n} \varepsilon_\alpha b_{\alpha|ij} e^\mu_\alpha. \tag{28}$$

где ∇_j означает *ковариантное дифференцирование* по отношению к метрике g_{ij}:

$$\nabla_j x^\mu_{,i} = x^\mu_{,ij} - \Gamma^k_{ij} x^\mu_{,k}, \tag{29}$$

Здесь Γ^k_{ij} — символы Кристоффеля для g_{ij} [17].

Первая (g_{ij}) и вторые ($b_{\alpha\,|\,ij}$) квадратичные формы задают движение по поверхности базиса, образованного набором из m касательных векторов $x^\mu_{,i}$, $i = 1, \ldots, m$, и $(n - m)$ нормалями e^μ_α, $\alpha = m + 1, \ldots, n$, из формулы (4). Движение этого базиса описывается уравнениями (28) и аналогичными уравнениями на нормали e^μ_α, $\alpha = m + 1, \ldots, n$, которые в терминах g_{ij} и $b_{\alpha\,|\,ij}$ имеют вид:

$$\frac{\partial e^\mu_\alpha}{\partial u^i} = -b_{\alpha|ij} g^{jk} x^\mu_{,k} + \sum_\beta \varepsilon_\beta \nu_{\beta\alpha|i} e^\mu_\beta. \tag{30}$$

Здесь дополнительно к квадратичным дифференциальным формам g_{ij} и $b_{\alpha|ij}$ введены так называемые векторы кручения $\nu_{\beta\alpha|i} = -\nu_{\alpha\beta|i}$, $\alpha, \beta = m + 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, m$.

Условия интегрируемости линейных уравнений (28), (30) легко выписать, пользуясь известным выражением для коммутатора двух ковариантных производных [17]:

$$(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i)\, \lambda_k = R^l_{\cdot kij} \lambda_l, \tag{31}$$

где $R^l_{\cdot kij}$ — тензор кривизны Римана — Кристоффеля для метрики g_{ij}, λ_k — произвольный ковариантный вектор. Эти условия даются уравнениями Гаусса

$$R_{ijkl} = \sum_{\alpha=m+1}^{n} \varepsilon_\alpha (b_{\alpha|ik} b_{\alpha|jl} - b_{\alpha|il} b_{\alpha|jk}); \tag{32}$$

Петерсона — Кодацци

$$\nabla_k b_{\alpha|ij} - \nabla_j b_{\alpha|ik} = \sum_\beta \varepsilon_\beta (\nu_{\beta\alpha|k} b_{\beta|ij} - \nu_{\beta\alpha|j} b_{\beta|ik}) \tag{33}$$

и Риччи

$$\nu_{\beta\alpha|j,k} - \nu_{\beta\alpha|k,j} + \sum_\gamma \varepsilon_\gamma (\nu_{\gamma\beta|j} \nu_{\gamma\alpha|k} - \nu_{\gamma\beta|k} \nu_{\gamma\alpha|j}) + \\ + g^{lm} (b_{\beta|lj} b_{\alpha|mk} - b_{\beta|lk} b_{\alpha|mj}) = 0. \tag{34}$$

Таким образом, если набор функций g_{ij}, $b_{\alpha|ij}$ и $\nu_{\alpha\beta|i}$ удовлетворяет уравнениям (32)—(34), то он определяет поверхность $x^\mu(u^1, \ldots, u^m)$ с точностью до движения ее в пространстве как целого.

Уравнения (32)—(34) полностью эквивалентны условиям интегрируемости (24)—(26) и представляют собой фактически запись этих условий в терминах других переменных.

Между линейными и квадратичными дифференциальными формами поверхности имеет место следующая связь:

$$g_{ij} = \sum_{k=1} \varepsilon_k \omega_i^k \omega_j^k; \tag{35}$$

$$b_{\alpha|ij} = -\sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k \omega_i^k \Omega_{\alpha\cdot|j}^{\cdot k}; \tag{36}$$

$$\nu_{\gamma\alpha|i} = \varepsilon_\gamma \Omega_{\alpha\cdot|i}^{\cdot\gamma}, \tag{37}$$

$i, j, k, l \ldots = 1, \ldots, m, \quad \alpha, \beta, \gamma \ldots = m+1, \ldots, n.$

Мы будем иметь дело с двумерными минимальными поверхностями, вложенными в n-мерное псевдоевклидово пространство с сигнатурой метрики $(+ - - - \ldots)$. К такой задаче приводит исследование *модели релятивистской струны* [38], мировая поверхность которой является двумерной минимальной поверхностью в пространстве Минковского. Таким образом, в рассматриваемом случае

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon_s = 1, \; s = 2, \ldots, n, c_0 = -c_r = 1, \; r = 1, \ldots, n-1.$$

Двумерные поверхности, по сравнению с подмногообразиями большей размерности, являются выделенным случаем с точки зрения простоты уравнений вложения (24)—(26) или (32)—(34). На двумерной поверхности всегда можно выбрать криволинейную систему координат $\{u^1, u^2\}$, в которой метрический тензор g_{ij} будет иметь конформно-плоский вид

$$g_{11} = \pm g_{22}, \; g_{12} = g_{21} = 0. \tag{38}$$

Более того, тензор кривизны R_{ijkl} для двумерной поверхности имеет всего одну существенную компоненту R_{1212}.

2. МИНИМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Минимальные поверхности [17, 33] характеризуются обращением в нуль средней кривизны по направлению всех нормалей $e_\alpha^\mu(u^1, u^2)$, $\alpha = 3, \ldots, n$ к поверхности в данной точке $\{u^1, u^2\}$. Средняя кривизна h_α по направлению e_α^μ есть шпур соответствующего тензора второй квадратичной формы $b_{\alpha|ij}$:

$$h_\alpha = b_{\alpha|ij} g^{ij}. \tag{39}$$

Таким образом, для минимальной поверхности

$$h_\alpha = 0. \tag{40}$$

Задачу нахождения минимальной поверхности можно сформулировать как вариационную задачу для функционала

$$S = \int d^m u \, | g |^{1/2}, \tag{41}$$

где $g = \det \| g_{ij} \|$, $g_{ij}(u)$ — индуцированная метрика (27) на поверхности $x^\mu (u^1, \ldots, u^m)$. Действительно, можно показать [17], что из уравнений Эйлера для (41) следуют условия (40):

$$\frac{\delta \sqrt{|g|}}{\delta x_\mu} = \sqrt{|g|}\, \nabla^i \nabla_i x^\mu = \sqrt{|g|} g^{ij} \nabla_i x^\mu_{,j} =$$

$$= \sqrt{|g|} \sum_{\alpha=m+1}^{n} \varepsilon_\alpha g^{ij} b_{\alpha|ij} e^\mu_\alpha = 0. \tag{42}$$

Здесь было использовано равенство (28), определяющее коэффициенты вторых квадратичных форм $b_{\alpha|ij}$. Так как нормали e^μ_α, $\alpha = m + 1, \ldots, n$, линейно независимы, то

$$h_\alpha = g^{ij} b_{\alpha|ij} = 0, \qquad \alpha = m+1, \ldots, n. \tag{43}$$

Из уравнений (42) следует, что координаты минимальной поверхности $x^\mu(u^1, \ldots, u^m)$ являются гармоническими функциями параметров $u^1, \ldots, u^m$:

$$\nabla^i \nabla_i x^\mu (u^1, \ldots, u^m) = 0, \quad \mu = 0, \ldots, n-1, \tag{44}$$

где

$$\nabla^i \nabla_i = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sqrt{|g|}\, g^{ij} \frac{\partial}{\partial u^j} \right) \tag{45}$$

— оператор Лапласа — Бельтрами для метрики g_{ij}.

Из (42) также видно, что среди n уравнений (44) как минимум m *уравнений являются следствием остальных.* К этому же выводу можно прийти, применяя вторую теорему Нетер [54, 55] к функционалу (41), который инвариантен относительно преобразований

$$\bar{u}^i = f^i (u^1, \ldots, u^m) \tag{46}$$

с m произвольными функциями f^i. Действительно, для (42) и (44) имеют место m тождеств Нетер

$$c_\mu x^\mu_{,j} \nabla^i \nabla_i x^\mu = 0, \qquad j = 1, \ldots, m. \tag{47}$$

Уравнения (44) на координаты минимальной поверхности $x^\mu (u^1, \ldots, u^m)$ в общем случае нелинейные уравнения в частных производных второго порядка, так как метрический тензор g_{ij} определяется через x^μ согласно (27). Но если минимальная поверхность *двумерна*, то на ней, как и на всякой двумерной поверхности, можно выбрать конформно-плоскую систему координат u^1, u^2 (38), в которой уравнения (44) линеаризуются:

$$x^\mu_{,11} \pm x^\mu_{,22} = 0, \quad \mu = 0, \ldots, n-1. \tag{48}$$

Для определенности, мы будем рассматривать гиперболическую метрику g_{ij}, поэтому в (38) и (48) мы возьмем нижний знак. Таким образом, в нашем случае координаты двумерной минимальной поверхности будут подчиняться следующим уравнениям:

$$x^{\mu}_{,11} - x^{\mu}_{,22} = 0, \quad \mu = 0, \ldots, n-1, \tag{49}$$

$$x^2_{,1} = g_{11} = -g_{22} = -x^2_{,2} = e^{-\varphi}, \quad g_{12} = c_{\mu} x^{\mu}_{,1} x^{\mu}_{,2} = 0. \tag{50}$$

Согласно изложенному в предыдущем разделе, минимальную поверхность можно описывать или ее радиус-вектором $x^{\mu}(u^1, u^2)$, подчиняющимся уравнениям (49), (50), или же набором переменных g_{ij}, $b_{\alpha|ij}$, $\nu_{\alpha\beta|i}$, которые удовлетворяют условиям минимальности (43) и уравнениям Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи (32)—(34). Зная решение (49) и (50), можно восстановить g_{ij}, $b_{\alpha|ij}$ и $\nu_{\alpha\beta|i}$ и получить решение соответствующих нелинейных уравнений в частных производных (32)—(34). При этом полученное решение уравнений Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи будет *общим*, если представление для $x^{\mu}(u^1, u^2)$, удовлетворяющее (49) и (50), будет содержать достаточное число произвольных функций.

Оказывается, что для этой цели удобно ввести в объемлющем пространстве специальный базис [44, 53], образованный двумя изотропными векторами η^{μ}_1 и η^{μ}_2, $\eta^2_i = 0$, $i = 1, 2$, $(\eta_1, \eta_2) = 1$ и $(n-2)$ пространственноподобными взаимно ортогональными единичными векторами η^{μ}_{α}, $\eta^2_{\alpha} = -1$, причем $(\eta_1, \eta_{\alpha}) = (\eta_2, \eta_{\alpha}) = 0$, $(\eta_{\alpha}, \eta_{\beta}) = 0$, $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta = 3, 4, \ldots, n$. В этом базисе нелинейные условия (50) оказываются алгебраическими условиями на коэффициентные функции, которые просто разрешаются.

Прежде чем переходить к построению разложения для $x^{\mu}(u^1, u^2)$ в базисе $\{\eta^{\mu}_{\alpha}\}$, мы воспользуемся инвариантностью уравнений (49) и (50) при конформных преобразованиях параметров u^1, u^2

$$\bar{u}^{\pm} = f_{\pm}(u^{\pm}), \quad u^{\pm} = u^1 \pm u^2 \tag{51}$$

с произвольными функциями $f_{\pm}$ и наложим на координаты струны $x^{\mu}(u^1, u^2)$ дополнительно к (50) следующие условия [12—14, 19]:

$$(x^{\mu}_{,11} \pm x^{\mu}_{,12})^2 = -q^2, \tag{52}$$

где q^2 — произвольная положительная константа. Вместо (52) можно выбирать и другие условия. Одна из таких возможностей будет рассмотрена в разд. 4.

Построим теперь разложение для $x^{\mu}(u^1, u^2)$ в базисе $\{\eta^{\mu}_{\alpha}\}$. Пусть

$$x^{\mu}(u^1, u^2) = \psi^{\mu}_{+}(u^+) + \psi^{\mu}_{-}(u^-) \tag{53}$$

есть общее решение уравнений (49). Тогда в силу (50) $\psi'_{+}(u^+)$ и $\psi'_{-}(u^-)$ должны быть изотропными векторами

$$(\psi'_{\pm})^2 = 0. \tag{54}$$

Штрихом мы будем обозначать дифференцирование по аргументу функции. Чтобы удовлетворить (52), необходимо потребовать

$$(\psi''_{\pm})^2 = -q^2/4. \tag{55}$$

Будем искать разложения для $\psi'_{\pm}(u^{\pm})$ в следующем виде:

$$\psi'_{\pm}(u^{\pm}) = A_{\pm}(u^{\pm})\left[\eta_1 + B_{\pm}(u^{\pm})\eta_2 \pm \sum_{r=1}^{n-2} f_{\pm r}(u^{\pm})\eta_{r+2}\right]. \tag{56}$$

Подставляя (56) в (54) и (55), получаем

$$A_{\pm}(u^{\pm}) = \frac{q}{2\sqrt{\sum\limits_{r=1}^{n-2}[f'_{\pm r}(u^{\pm})]^2}}, \quad B_{\pm}(u^{\pm}) = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n-2} f^2_{\pm}(u^{\pm}). \tag{57}$$

Таким образом, мы имеем следующее представление для векторов $\psi'_{\pm}(u^{\pm})$ [12—14]:

$$\psi'_{\pm}(u^{\pm}) = \frac{q}{2\sqrt{\sum\limits_{r=1}^{n-2}[f'_{\pm r}(u^{\pm})]^2}}\left[\eta_1 + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n-2} f^2_{\pm s}(u^{\pm})\eta_2 \pm \right.$$
$$\left. \pm \sum_{p=1}^{n-2} f_{\pm p}(u^{\pm})\eta_{p+2}\right]. \tag{58}$$

С помощью этих формул можно получить выражение для метрики двумерной минимальной поверхности в n-мерном псевдоевклидовом пространстве

$$e^{\varphi} = (g_{11})^{-1} = -(g_{22})^{-1} = (2\psi'_{+}(u^{+})\,\psi'_{-}(u^{-}))^{-1} =$$
$$= \frac{4}{q^2}\,\frac{\sqrt{\sum\limits_{r=1}^{n-2}[f'_{+r}(u^{+})]^2\sum\limits_{s=1}^{n-2}[f'_{-s}(u^{-})]^2}}{\sum\limits_{p=1}^{n-2}[f_{+p}(u^{+}) + f_{-p}(u^{-})]^2} \equiv \Lambda_{n-2}(u^1, u^2). \tag{59}$$

Таким образом, формулы (58) и (59) дают возможность выразить дифференциальные формы минимальной поверхности через $2(n-2)$ произвольных функций одной переменной.

3. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ТЕОРИИ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ИХ ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ

Теперь мы перейдем к явному получению нелинейных уравнений, общие решения для которых будут строиться с помощью разложений (58) и (59). Отметим сразу, что эти уравнения вовсе нетривиальны, т. е. они не сводятся подстановкой к линейным уравнениям в частных производных. Простейшим из них будет нелинейное уравнение Лиувилля [56, 57].

Рассмотрим уравнения (32)—(34) для двумерной минимальной поверхности в конформно-плоской системе координат (50). Условия минимальности (43) в этих координатах записываются так:

$$b_{\alpha|11}=b_{\alpha|22},\qquad \alpha=3,\ldots,n. \tag{60}$$

С помощью несложных преобразований из уравнений Петерсона — Кодацци (33) можно получить [19, 45]

$$\frac{\partial}{\partial u^{\mp}}\sum_{\alpha=3}^{n}(b_{\alpha|11}\pm b_{\alpha|12})^2=0. \tag{61}$$

С другой стороны, в силу (28)

$$\sum_{\alpha=3}^{n}(b_{\alpha|11}\pm b_{\alpha|12})^2=-[\nabla_1(x^{\mu}_{,1}\pm x^{\mu}_{,2})]^2. \tag{62}$$

Это равенство можно продолжить дальше, если учесть явный вид символов Кристоффеля для метрики (50)

$$\Gamma^1_{11}=\Gamma^1_{22}=\Gamma^2_{12}=-\frac{\varphi_{,1}}{2},\qquad \Gamma^2_{11}=\Gamma^2_{22}=\Gamma^1_{12}=-\frac{\varphi_{,2}}{2}. \tag{63}$$

Действительно, подстановка (63) в (62) с учетом (52) дает

$$\sum_{\alpha=3}^{n}(b_{\alpha|11}\pm b_{\alpha|12})^2=-[\nabla_1(x^{\mu}_{,1}\pm x^{\mu}_{,2})]^2=-(x^{\mu}_{,11}\pm x^{\mu}_{,12})^2=q^2. \tag{64}$$

Таким образом, условие (52) на координаты минимальной поверхности $x^{\mu}(u^1,u^2)$ согласуется с уравнениями (33).

Рассмотрим вначале простейший случай — 3-мерное объемлющее пространство. Уравнения (33) в силу (64) оказываются тождественно выполненными, а уравнение Гаусса (32) сводится к уравнению Лиувилля

$$\varphi_{,11}-\varphi_{,22}=2q^2e^{\varphi}. \tag{65}$$

Здесь мы воспользовались следующей формулой для тензора кривизны в метрике (50):

$$R_{1212}=-\frac{1}{2}e^{-\varphi}(\varphi_{,11}-\varphi_{,22}). \tag{66}$$

Представление (59) для метрического тензора минимальной поверхности с $n=3$ дает хорошо известное [53, 56, 57] общее решение уравнения Лиувилля (65):

$$e^{\varphi}=\Lambda_1=\frac{4}{q^2}\,\frac{f'_+(u^+)\,f'_-(u^-)}{[f_+(u^+)+f_-(u^-)]^2}. \tag{67}$$

Другой способ получения общего решения уравнения (65), тоже геометрический, приведен в приложении.

При увеличении размерности объемлющего пространства, в которое помещена минимальная поверхность, резко увеличивается число уравнений в системе (32)—(34), причем число функций g_{ij}, $b_{\alpha|ij}$, $\nu_{\alpha\beta|i}$ превышает число уравнений. Однако эта система уравнений значительно упрощается, если выбрать соответствующим образом подвижный базис на минимальной поверхности. Действительно, в выводе уравнений Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи (32)—(34) ничего не изменится, если от базиса

$$x^{\mu}_{,1},\ x^{\mu}_{,2},\ e^{\mu}_{3},\ \ldots,\ e^{\mu}_{n} \tag{68}$$

перейти к новому базису, получающемуся из (68) вращением из группы $SO(1,1)\times SO(n-2)$, которое не перемешивает касательное пространство поверхности $\{x^{\mu}_{,1},\ x^{\mu}_{,2}\}$ с ее нормальным пространством $\{e^{\mu}_{3},\ \ldots,\ e^{\mu}_{n}\}$.

Если размерность объемлющего пространства $n\geqslant 4$, то в пространстве, нормальном двумерной минимальной поверхности, есть два взаимно-ортогональных пространственноподобных вектора, которые естественно связаны с минимальной поверхностью [14]. Это $\nabla_1 x^{\mu}_{,1}$ и $\nabla_1 x^{\mu}_{,2}$. Вектор $\nabla_2 x^{\mu}_{,2}$ согласно (28) и (60) совпадает с $\nabla_1 x^{\mu}_{,1}$. Действительно, из равенства (64) следует

$$(\nabla_1 x_{,1}\cdot\nabla_1 x_{,2}) = 0. \tag{69}$$

Поэтому естественно направить две нормали к минимальной поверхности по векторам $\nabla_1 x_{,1}^{\mu}$ и $\nabla_1 x_{,2}^{\mu}$, например, так: e^{μ}_3 по $\nabla_1 x_{,1}^{\mu}$, а e^{μ}_4 по $\nabla_1 x_{,2}^{\mu}$. Тогда из (28) сразу получаем

$$b_{3|12} = b_{4|11} = b_{4|22} = b_{\alpha|\,ij} = 0,\ \alpha = 5,\ \ldots,\ n,\ i,\ j = 1,2. \tag{70}$$

Чтобы удовлетворить условию (64), можно положить

$$b_{3|11} = q\cos\frac{\theta}{2},\qquad b_{4|12} = q\sin\frac{\theta}{2}. \tag{71}$$

Уравнение Гаусса (32) принимает теперь вид:

$$\varphi_{,11}-\varphi_{,22} = 2q^2 e^{\varphi}\cos\theta,\quad e^{-\varphi} = x^2_{,1} = -x^2_{,2}, \tag{72}$$

причем это уравнение остается справедливым для любой размерности объемлющего пространства, в которое погружена минимальная поверхность.

Через функцию $\theta(u^1,\ u^2)$ с помощью уравнений Петерсона — Кодацци (33) при $\alpha = 3,4$ определяется вектор кручения $\nu_{34|i}$, $i = 1,\ 2$:

$$\nu_{34|1} = \frac{\theta_{,2}}{2},\quad \nu_{34|2} = \frac{\theta_{,1}}{2}. \tag{73}$$

В четырехмерном пространстве-времени система (32)—(34) сводится к двум нелинейным уравнениям

$$\varphi_{,11}-\varphi_{,22}=2q^2e^{\varphi}\cos\theta,\qquad \theta_{,11}-\theta_{,22}=2q^2e^{\varphi}\sin\theta, \tag{74}$$

где функция $\varphi(u^1, u^2)$ определяет конформно-плоскую метрику на минимальной поверхности $g_{11}=-g_{22}=e^{-\varphi}$, $g_{12}=0$, а $\theta(u^1, u^2)$ определяет вторые квадратичные формы $b_{3|ij}$ и $b_{4|ij}$ $(i, j=1, 2)$ и вектор кручения $\nu_{34|i}$ по формулам (70), (71) и (73).

Специальный выбор нормалей e_3^μ и e_4^μ к минимальной поверхности позволил сразу получить из общей системы (32)—(34) систему из двух уравнений на две функции φ и θ в отличие от работ [19, 24], где нормали e_3^μ и e_4^μ никак не фиксировались. В этих работах приходилось вводить вспомогательные функции $\alpha_\pm$, которые входили в конечные уравнения только в виде разности $\theta=\alpha_+-\alpha_-$.

Общее решение системы (74) получаем с помощью формул (58) и (59):

$$e^{\varphi}=\Lambda_2, \tag{75}$$

$$\theta=\operatorname{arctg}\frac{b_{4|12}}{b_{3|11}}=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{(\nabla_1 x_{,2})^2}{(\nabla_1 x_{,1})^2}}. \tag{76}$$

Для явного выражения θ через произвольные функции $f_\pm(u^\pm)$ удобно пользоваться не формулами (53), (58) и (76), а определить θ из первого уравнения (74), подставив туда (75). В результате получаем

$$\theta(u^1, u^2)=\arccos\Delta_2, \tag{77}$$

где

$$\Delta_r=\frac{2}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{r}f_{+k}'^2\sum\limits_{j=1}^{r}f_{-j}'^2}}\times$$

$$\times\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{r}(f_{+i}+f_{-i})f_{+i}'\sum\limits_{j=1}^{r}(f_{+j}+f_{-j})f_{-j}'}{\sum\limits_{i=1}^{r}(f_{+i}+f_{-i})^2}-\sum_{i=1}^{r}f_{+i}'f_{-i}'\right], \tag{78}$$

$$f_{\pm i}\equiv f_{\pm i}(u^\pm).$$

В работе [76] общее решение системы (74) было выписано сведением этих уравнений к одному уравнению Лиувилля на комплексную функцию $\varphi+i\theta$.

Новая система трех нелинейных уравнений, не встречавшаяся ранее в литературе, получается при рассмотрении данным методом двумерных минимальных поверхностей в пятимерном псевдоевклидовом пространстве. Выбирая нормали e_3 и e_4 так, как это было описано выше, получаем формулы (70), (71), (73) и уравнение (72). Дополнительно к переменным, фигурировавшим в четырехмерном случае, здесь появляются два вектора кручения $\nu_{35|i}$ и $\nu_{45|i}$, $i = 1,2$. Уравнения Петерсона — Кодацци (33) с $\alpha = 5$ дают

$$\nu_{35|2} \cos\frac{\theta}{2} = \nu_{45|1} \sin\frac{\theta}{2}, \qquad \nu_{45|2} \sin\frac{\theta}{2} = \nu_{35|1} \cos\frac{\theta}{2}. \tag{79}$$

Чтобы удовлетворить этим равенствам, необходимо положить

$$\left.\begin{aligned} \nu_{35|2} &= h(u^1, u^2)\sin\frac{\theta}{2}, & \nu_{45|1} &= h(u^1, u^2)\cos\frac{\theta}{2}, \\ \nu_{45|2} &= p(u^1, u^2)\cos\frac{\theta}{2}, & \nu_{35|1} &= p(u^1, u^2)\sin\frac{\theta}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

Уравнения Риччи (34) записываются теперь в следующем виде:

$$\theta_{,11} - \theta_{,22} - (h^2 - p^2)\sin\theta = 2q^2 e^{\varphi} \sin\varphi, \tag{81}$$

$$\sin\frac{\theta}{2}(h_{,1} - p_{,2}) + \cos\frac{\theta}{2}(h\theta_{,1} - p\theta_{,2}) = 0, \tag{82}$$

$$\cos\frac{\theta}{2}(p_{,1} - h_{,2}) + \sin\frac{\theta}{2}(h\theta_{,2} - p\theta_{,1}) = 0. \tag{83}$$

Подстановка

$$h = \varkappa_{,2}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-2}, \qquad p = \varkappa_{,1}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-2} \tag{84}$$

обращает уравнение (82) в тождество, а (83) дает

$$\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\theta}{2}\varkappa_{,1}\right)_{,1} = \left(\operatorname{ctg}^2\frac{\theta}{2}\varkappa_{,2}\right)_{,2}. \tag{85}$$

Окончательно система (32)—(34) в случае пятимерного объемлющего пространства сводится к следующим трем нелинейным уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_{,11} - \varphi_{,22} = 2q^2 e^{\varphi}\cos\theta, \\ &\theta_{,11} - \theta_{,22} + 2\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^3\frac{\theta}{2}}(\varkappa_{,1}^2 - \varkappa_{,2}^2) = 2q^2 e^{\varphi}\sin\theta, \\ &\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\theta}{2}\varkappa_{,1}\right)_{,1} = \left(\operatorname{ctg}^2\frac{\theta}{2}\varkappa_{,2}\right)_{,2}. \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

Интересно отметить, что последнее уравнение в (86) в точности совпадает со вторым уравнением в нелинейной системе Лунда — Редже [58].

Выпишем общее решение системы (86):

$$\left.\begin{aligned} &e^{\varphi}=\Lambda_3, \quad \theta=\arccos\Delta_3, \\ &\frac{\varkappa_1^2}{\sin^2\frac{\theta}{2}}=q^2\cos^2\frac{\theta}{2}e^{\varphi}-\frac{\theta_{,2}^2}{4}-\left[\left(\frac{\nabla_1 x^{\mu}_{,1}}{q\cos\frac{\theta}{2}}\right)_{,1}\right]^2, \\ &\frac{\varkappa^2_{,2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}=-q^2\cos^2\frac{\theta}{2}e^{\varphi}-\frac{\theta^2_{,1}}{4}\left[\left(\frac{\nabla_1 x^{\mu}_{,1}}{q\cos\frac{\theta}{2}}\right)_{2},\right]^2. \end{aligned}\right\} \qquad (87)$$

Величины Λ_3 и Δ_3 определяются формулами (59) и (78) соответственно, а ковариантную производную $\nabla_1 x^{\mu}_{,1}$ следует строить с помощью разложений (53) и (58).

При увеличении размерности объемлющего пространства на единицу, т. е. при $n=6$, у нас вновь появляется калибровочный произвол, связанный с возможностью вращения нормалей e_5 и e_6 на произвольный угол α. При этом величины $\nu_i=\nu_{56|i}=-\Omega_{6\cdot|i}^{\cdot 5}$, $i=1, 2$, преобразуются следующим образом:

$$\bar{\nu}_i=\nu_i-\alpha_{,i}, \quad i=1,\ 2. \qquad (88)$$

Угол $\alpha\,(u^1,\ u^2)$ всегда можно выбрать таким, что преобразованные величины $\bar{\nu}_i$, $i=1,\ 2$, будут удовлетворять, например, «условию Лоренца»

$$\bar{\nu}_{1,1}-\bar{\nu}_{2,2}=0. \qquad (89)$$

Очевидно, что для этого в качестве угла α достаточно взять решение следующего уравнения:

$$\alpha_{,11}-\alpha_{,22}=\nu_{1,1}-\nu_{2\ 2}.$$

Условие (89) удовлетворяется, если

$$\bar{\nu}_1=\psi_{\ 2},\ \bar{\nu}_2=\psi_{,1}. \qquad (90)$$

Вводя дополнительно к $h\,(u^1,\ u^2)$ и $p\,(u^1,\ u^2)$ в замене (80) новые функции $r\,(u^1,\ u^2)$ и $s\,(u^1,\ u^2)$

$$\left.\begin{aligned} &\nu_{36|1}=s\,(u^1,u^2)\sin\frac{\theta}{2}, \quad \nu_{36|2}=r\,(u^1,\ u^2)\sin\frac{\theta}{2}, \\ &\nu_{46|1}=r\,(u^1,\ u^2)\cos\frac{\theta}{2}, \quad \nu_{46|2}=s\,(u^1,\ u^2)\cos\frac{\theta}{2}, \end{aligned}\right\} \qquad (91)$$

систему уравнений Гаусса, Петерсона — Кодацци, Риччи (32)—(34) можно свести к следующим нелинейным уравнениям:

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_{,11}-\varphi_{,22}=2q^2e^{\varphi}\cos\theta;\\
&\theta_{,11}-\theta_{,22}-(h^2+r^2-p^2-s^2)\sin\theta=2q^2e^{\varphi}\sin\theta;\\
&\psi_{,11}-\psi_{,22}=(pr-hs)\cos\theta;\\
&r_{,2}-s_{,1}+\psi_{,1}h-\psi_{,2}p+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}(s\theta_{,1}-r\theta_{,2})=0;\\
&h_{,2}-p_{,1}+\psi_{,2}s-\psi_{,1}r+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}(p\theta_{,1}-h\theta_{,2})=0;\\
&s_{,2}-r_{,1}+\psi_{,1}p-\psi_{,2}h+\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}(s\theta_{,2}-r\theta_{,1})=0;\\
&p_{,2}-h_{,1}+\psi_{,2}r-\psi_{,1}s+\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}(p\theta_{,2}-h\theta_{,1})=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(92)$$

Система (92) состоит из семи уравнений, три из которых второго порядка и четыре уравнения перрого порядка. Неизвестными являются семь функций φ, θ, ψ, p, h, r, s. Вероятно, существует подстановка, аналогичная (84), которая сводит четыре последних уравнения в (92) к одному уравнению второго порядка. Общее решение системы нелинейных уравнений (92) можно построить с помощью формул (49), (78) и разложений (53) и (58). При этом функции φ, θ, ψ, p, h, r, s будут выражены через восемь функций $f_{\pm j}(u^{\pm})$, $j=1,\ldots,4$, одной переменной $u^{\pm}$.

Другой способ редукции системы уравнений (32)—(34) в случае двумерной минимальной поверхности, вложенной в 6-мерное псевдоевклидово пространство, рассматривался в работе [45].

Очевидно, что изложенный здесь метод можно применить и к объемлющим пространствам более высокой размерности $n>6$. При этом общее решение уравнений (32)—(34) можно опять-таки выразить с помощью формул (59), (78) и разложений (53) и (58) через $2(n-2)$ произвольных функций $f_{\pm j}(u^{\pm})$, $j=1,\ldots,n-2$, одной переменной $u^{\pm}$.

Система из $(n-2)$ нелинейных уравнений, описывающих релятивистскую струну в n-мерном пространстве-времени, была получена в работе [78] путем полного устранения функционального произвола в уравнениях вложения (32)—(34). Другой подход к этой проблеме рассматривался в [79].

В заключение этого раздела следует отметить, что получение системы нелинейных уравнений (86) и построение их общего решения в рамках чисто группового подхода было выполнено в работе [9]. Другая форма записи этих уравнений была предложена в [10].

Исследование уравнений, описывающих минимальные поверхности в псевдоевклидовом пространстве с размерностью $n\geqslant 4$, представляет не только чисто математический интерес, как способ получения явно интегрируемых нелинейных уравнений, но оно интересно и с точки зрения модели релятивистской струны. Учитывая, что до сих пор нет удовлетворительной квантовой теории этого объекта, было бы интересно рассмотреть, по аналогии с нелинейными сигма-моделями, $1/n$-разложение и в модели релятивистской струны.

4. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ $t=\tau$ В ТЕОРИИ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В модели релятивистской струны представляет интерес такое описание двумерной минимальной поверхности в пространстве Минковского, когда одна из криволинейных координат $u^1 = \tau$ на этой поверхности совпадает с временной координатой объемлющего пространства $x^0 = t$. Это так называемая калибровка $t = \tau$ [24, 38]. Геометрическое описание минимальной поверхности с помощью дифференциальных форм в параметризации $t = \tau$ приводит к новым нелинейным уравнениям, общее решение которых может быть выписано методом, аналогичным изложенному в разд. 3.

В параметризации $t = \tau$ двумерная минимальная поверхность, погруженная в n-мерное псевдоевклидово пространство Минковского, описывается $(n - 1)$-мерным евклидовым вектором $\mathbf{x} = \{x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$, зависящим от двух параметров $u^1 = \tau = x^0 = t$ и $u^2 = \sigma$. Уравнения (49) и (50), определяющие минимальную поверхность, записывают теперь так [12, 14]:

$$\mathbf{x}_{,11} - \mathbf{x}_{,22} = 0, \tag{93}$$

$$\mathbf{x}^2_{,1} + \mathbf{x}^2_{,2} = 1, \quad \mathbf{x}_{,1}\mathbf{x}_{,2} = 0. \tag{94}$$

Условия (94) диктуют следующий вид метрического тензора на поверхности $\mathbf{x}\,(u^1, u^2)$:

$$g_{11} = \mathbf{x}^2_{,1} = \sin^2\theta, \quad g_{22} = \mathbf{x}^2_{,2} = \cos^2\theta, \quad g_{12} = 0. \tag{95}$$

В дальнейшем нам потребуются символы Кристоффеля, соответствующие этой метрике:

$$\left.\begin{array}{ll} \Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{22} = \theta_{,1}\operatorname{ctg}\theta, & \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \theta_{,2}\operatorname{ctg}\theta, \\ \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = -\theta_{,2}\operatorname{tg}\theta, & \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = -\theta_{,1}\operatorname{tg}\theta. \end{array}\right\} \tag{96}$$

Двумерная поверхность $\mathbf{x}\,(u^1, u^2)$ в $(n - 1)$-мерном евклидовом пространстве, определяемая уравнениями (93), (94), не является минимальной с точки зрения этого пространства, т. е. для нее не выполняются условия

$$g^{ij}b_{\alpha|ij} = 0, \quad \alpha = 3, \ldots, n - 1. \tag{97}$$

Тем не менее уравнения (93) и (94), переписанные в терминах квадратичных форм g_{ij} и $b_{\alpha|ij}$, приводят к таким же равенствам, как и (60):

$$b_{\alpha|11} = b_{\alpha|22}, \quad \alpha = 3, \ldots, n - 1. \tag{98}$$

Единственная существенная компонента тензора кривизны R_{1212} в метрике (95) имеет вид [24]:

$$R_{1212}=\frac{1}{2}\sin 2\theta\,(\theta_{,11}-\theta_{,22}). \tag{99}$$

Уравнение Гаусса (32) записывается так:

$$\frac{1}{2}\sin 2\theta\,(\theta_{,11}-\theta_{,22})=\sum_{\alpha=3}^{n-1}(b^2_{\alpha|11}-b^2_{\alpha|12}). \tag{100}$$

Построение общих решений системы уравнений (33), (34) и (100) будет основываться, как и в разд. 3, на записи решений уравнений (93), удовлетворяющих нелинейным условиям (94), в специальном базисе.

Начнем рассмотрение с простейшего случая трехмерного пространства-времени, в которое помещена минимальная поверхность. В параметризации $t=\tau$ координаты $x^1\,(u^1,\,u^2)$ и $x^2\,(u^1,\,u^2)$ задают плоскость, которая является проекцией минимальной поверхности из пространства $\{x^0,\,x^1,\,x^2\}$ на координатную плоскость Ox^1x^2. В этом случае $b_{\alpha|ij}=0$ и $\nu_{\alpha\beta|i}=0$. Единственным нетривиальным уравнением в системе (33), (34) и (100) оказывается уравнение Гаусса (100), которое сводится к уравнению Д'Аламбера

$$\theta_{,11}-\theta_{,22}=0. \tag{101}$$

Продемонстрируем на этом простом примере всю схему получения общих решений уравнений (32) — (34). Решение уравнений (93) и (94) для двумерного радиус-вектора $\mathbf{x}\,(u^1,\,u^2)$ возьмем в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{x}\,(u^1,\,u^2)=\psi_+(u^+)-\psi_-(u^-),\qquad (\psi'_\pm)^2=1,\\&u^\pm=u^1\pm u^2,\end{aligned}\right\} \tag{102}$$

$$\psi'_\pm(u^\pm)=\frac{1}{\sqrt{2}}\{\cos\varphi_\pm(u^\pm),\ \pm\sin\varphi_\pm(u^\pm)\}. \tag{103}$$

Согласно (95) $\theta\,(u^1,\,u^2)$ определяется формулой

$$\theta\,(u^1,\,u^2)=\operatorname{arctg}\left(\frac{\mathbf{x}^2_{,1}}{\mathbf{x}^2_{,2}}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{104}$$

Подставляя сюда (102) и (103), получаем общее решение уравнения (101)

$$\theta\,(u^1,\,u^2)=\operatorname{arctg}\left[\frac{1-\cos(\varphi_++\varphi_-)}{1+\cos(\varphi_++\varphi_-)}\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\,[\varphi_+(u^+)+\varphi_-(u^-)]. \tag{105}$$

Перейдем теперь к четырехмерному псевдоевклидову пространству, в которое погружена минимальная поверхность. В этом случае уравнения (33), (34) и (100) не будут столь тривиальны, как рассмотренное выше уравнение (101).

В параметризации $t = \tau$ минимальная поверхность описывается трехкомпонентным евклидовым вектором $\mathbf{x}(u^1, u^2)$, который задает проекцию этой поверхности из четырехмерного пространства Минковского в обычное трехмерное евклидово пространство. Система уравнений (33), (34) и (100) с учетом (96) и (98) сводится, как это нетрудно показать, к следующим двум нелинейным уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} &\theta_{,11} - \theta_{,22} + \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}(\varkappa_{,1}^2 - \varkappa_{,2}^2) = 0, \\ &(\operatorname{ctg}^2\theta\varkappa_{,1})_{,1} = (\operatorname{ctg}^2\theta\varkappa_{,2})_{,2}, \end{aligned}\right\} \tag{106}$$

где функция $\varkappa(u^1, u^2)$ определяет коэффициенты второй квадратичной формы

$$b_{11} = b_{22} = \operatorname{ctg}\theta\varkappa_{,2}, \qquad b_{12} = \operatorname{ctg}\theta\varkappa_{,1}. \tag{107}$$

Система (106) отличается от известных уравнений Лунда — Редже [58] отсутствием в первом уравнении слагаемого $\sin\theta\cos\theta$. Уравнения (106) можно получить из системы (86), если положить там $\varphi \to -\infty$, $\theta \to 2\theta$. Однако, как найти общее решение для (106), исходя из решения для системы (86), не ясно. Поэтому будем строить общее решение для системы нелинейных уравнений (106) заново.

Опять представим вектор $\mathbf{x}(u^1, u^2)$ с помощью формулы (102), а для $\psi'_\pm(u^\pm)$ возьмем сферические координаты в трехмерном евклидовом пространстве:

$$\psi'_\pm(u^\pm) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\sin\omega_\pm\cos\varphi_\pm,\ \pm\sin\omega_\pm\sin\varphi_\pm,\ \pm\cos\omega_\pm\}, \tag{108}$$

$$\omega_\pm \equiv \omega_\pm(u^\pm),\quad \varphi_\pm \equiv \varphi_\pm(u^\pm).$$

Для функции $\theta(u^1, u^2)$ согласно (104) получаем

$$\theta(u^1, u^2) = \operatorname{arctg}\left\{\frac{1 - [\sin\omega_+\sin\omega_-\cos(\varphi_+ + \varphi_-) - \cos\omega_+\cos\omega_-]}{1 + [\sin\omega_+\sin\omega_-\cos(\varphi_+ + \varphi_-) - \cos\omega_+\cos\omega_-]}\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{109}$$

Используя теорему косинусов для сферического треугольника [59], легко убедиться, что 2θ в (109) есть угол, лежащий в сферическом треугольнике против стороны $\varphi_+ + \varphi_-$, у которой прилегающие углы равны ω_+ и ω_-.

В систему (108) входят только частные производные функции $\varkappa(u^1, u^2)$. Согласно деривационным формулам (28) они определяются следующим образом:

$$\varkappa_{,1} = \operatorname{tg}\theta\sqrt{(\nabla_1\mathbf{x}_{,2})^2},\quad \varkappa_{,2} = \operatorname{tg}\theta\sqrt{(\nabla_1\mathbf{x}_{,1})^2}. \tag{110}$$

Очевидно, что разложения (102) и (108) позволяют выразить $\varkappa_{,i}$, $i = 1, 2$, через 4 произвольные функции одной переменной $\varphi_\pm(u^\pm)$

и $\omega_\pm (u^\pm)$, поэтому мы не будем приводить здесь эти громоздкие формулы.

Обобщая представления (103) и (108) на n-мерный случай, можно построить общие решения системы нелинейных уравнений (33), (34), (100) в параметризации $t = \tau$ для произвольной размерности объемлющего пространства, в которое помещена минимальная поверхность.

5. ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛАКСА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Для того чтобы нелинейное уравнение в частных производных можно было исследовать методом обратной задачи рассеяния, необходимо найти для него операторное представление Лакса, т. е. представить это уравнение как результат совместности некоторой линейной спектральной задачи [2—6]. Общих алгоритмов построения представления Лакса для заданного уравнения нет. Обычно используют обратный ход рассуждений. Берется тот или иной класс матричных интегро-дифференциальных операторов и рассматривается условие их совместности. В результате получается некоторая совокупность нелинейных уравнений, для которых заведомо можно применять метод обратной задачи рассеяния.

Одну из таких серий нелинейных уравнений, как отмечалось в [19—24], дает теория поверхностей. Действительно, уравнения Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи (32) — (34), являющиеся нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка на дифференциальные формы поверхности, по своему выводу представляют условие совместности линейных уравнений, описывающих движение базиса по поверхности. Открытым остается здесь вопрос введения спектрального параметра в соответствующие линейные уравнения. Однако в ряде случаев такой параметр удается ввести, используя ту или иную симметрию нелинейного уравнения.

Хорошо известна связь уравнения синус-Гордона и соответствующей линейной спектральной задачи с поверхностями постоянной кривизны [24]. Оказывается, что аналогичную связь можно установить и для других нелинейных уравнений, решаемых методом обратной задачи рассеяния. Ниже мы рассмотрим несколько примеров таких уравнений.

6. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ УРАВНЕНИЯ $\varphi_{,11} - \varphi_{,22} = e^{\varphi} - e^{-2\varphi}$

Этому уравнению, получившему название уравнения Буллафа — Додда, была посвящена целая серия работ [60—62]. Для соответствующей двумерной полевой теории была найдена точная S-матрица [63].

Уравнение Буллафа — Додда оказывается связанным также с поверхностями постоянной кривизны, но не в обычном евклидовом пространстве, а в трехмерном унимодулярном аффинном пространстве [20].

Не претендуя на полноту изложения, мы приведем здесь основные идеи аффинной дифференциальной геометрии [53, 64—67]. Эта теория оперирует с аффинным n-мерным пространством, элементами которого являются точки (или векторы) с координатами $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$. В этом пространстве задана группа аффинных преобразований

$$x'^i = c^i_j x^j + b^i \tag{111}$$

с условием $\det \| c^i_j \| \neq 0$.

Согласно Клейну [66], аффинная геометрия изучает инварианты преобразований (111). Теория поверхностей в аффинном пространстве, т. е. дифференциальная аффинная геометрия, может быть построена по аналогии с дифференциальной геометрией обычного евклидова пространства [67]. В основу теории полагаются дифференциальные формы, которые должны быть *инвариантами* при преобразованиях пространства (111).

Для наших целей будет достаточно ограничиться случаем трехмерного унимодулярного аффинного пространства. Преобразования (111) для унимодулярной аффинной группы $SL(n, R)$ подчинены условию

$$\det \| c^i_j \| = 1. \tag{112}$$

Векторы этого пространства, как и векторы обычного трехмерного евклидова пространства, будем обозначать $\mathbf{r}$. Двумерную поверхность в трехмерном аффинном пространстве будем задавать в параметрическом виде $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$.

В теории поверхностей евклидова пространства, как уже отмечалось в разд. 2, основную роль играют две квадратичные дифференциальные формы:

$$\Phi_1 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\, du^i\, du^j, \quad g_{ij} = \mathbf{r}_{,i}\mathbf{r}_{,j}, \quad \mathbf{r}_{,i} = \partial\mathbf{r}/\partial u^i \tag{113}$$

и

$$\Phi_2 = \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}\, du^i\, du^j, \quad b_{ij} = \mathbf{r}_{,ij}\mathbf{n}, \tag{114}$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности $\mathbf{n} = [\mathbf{r}_{,1} \times \mathbf{r}_{,2}]/\sqrt{\det \| g_{ij} \|}$.

В унимодулярной аффинной геометрии можно ввести понятие инвариантного объема параллелепипеда, построенного на трех векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$:

$$V_{\text{inv}} = (\mathbf{abc}) = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}. \tag{115}$$

С учетом этого строятся инвариантные дифференциальные формы, определяющие поверхность $\mathbf{r}(u^1, u^2)$ в данной геометрии. Первая квадратичная форма

$$\Psi_1 = \sum_{i, j=1}^{2} \tilde{g}_{ij}\, du^i\, du^j \tag{116}$$

задается тензором

$$\tilde{g}_{ij} = \frac{a_{ij}}{(|a|)^{\frac{1}{4}}}, \quad a_{ij} = (\mathbf{r}_{,ij}\mathbf{r}_{,1}\mathbf{r}_{,2}), \quad a = \det \| a_{ij} \|. \tag{117}$$

Вторая дифференциальная форма в аффинной унимодулярной геометрии, в отличие от евклидова случая, *кубическая*:

$$\Psi_2 = \sum_{i, j, k=1} T_{ijk}\, du^i\, du^j\, du^k, \tag{118}$$

где тензор T_{ijk} определяется с помощью вспомогательного внешнего к поверхности вектора

$$\mathbf{m} = \frac{[\mathbf{r}_{,1} \times \mathbf{r}_{,2}]}{(|a|)^{\frac{1}{4}}} \tag{119}$$

следующим образом:

$$T_{ijk} = \nabla_i \nabla_j \mathbf{r}_{,k}\mathbf{m}. \tag{120}$$

Здесь ∇_j означает ковариантное дифференцирование по отношению к тензору $\tilde{g}_{ij}$.

Тензоры $\tilde{g}_{ij}$ и T_{ijk} симметричны по своим индексам и связаны соотношением аполярности

$$\tilde{g}^{ij} T_{ijk} = 0. \tag{121}$$

Наряду с внешним вектором $\mathbf{m}$ важную роль в теории играет *аффинная нормаль*

$$\mathbf{N} = \frac{1}{2} \tilde{g}^{ij} \nabla_i \nabla_j \mathbf{r} = \frac{1}{2} \Box \mathbf{r}, \tag{122}$$

где $\Box$ — ковариантный оператор Лапласа — Бельтрами для метрического тензора $\tilde{g}_{ij}$.

На поверхности $\mathbf{r}(u^1, u^2)$ аффинного пространства подвижный репер образован двумя касательными векторами $\mathbf{r}_{,1}(u^1, u^2)$ и $\mathbf{r}_{,2}(u^1, u^2)$ и аффинной нормалью $\mathbf{N}(u^1, u^2)$. Перемещение этого репера по поверхности описывается деривационными уравнениями Гаусса

$$\nabla_i \mathbf{r}_{,j} = T^k_{ij} \mathbf{r}_{,k} + \tilde{g}_{ij} \mathbf{N} \tag{123}$$

и Вейнгартена

$$\mathbf{N}_{,i} = A^j_i \mathbf{r}_{,j}. \tag{124}$$

Поднятие и опускание индексов производится, как обычно, с помощью тензора $\tilde{g}_{ij}$, величины A_{ij} определяются формулой

$$A_{ij} = \nabla_k T^k_{ij} - H\tilde{g}_{ij}, \tag{125}$$

где $2H = -A^i_i$.

Инвариант H называется средней кривизной поверхности, и в геометрии унимодулярной аффинной группы он играет ту же роль, что и средняя кривизна

$$h = -\frac{1}{2} b^i_i \tag{126}$$

в евклидовой теории поверхностей. Вторым инвариантом, связанным с тензорами A_{ij} и $\tilde{g}_{ij}$, является полная кривизна

$$K = \det \| A^j_i \| = \frac{\det \| A_{ij} \|}{\det \| \tilde{g}_{ik} \|}. \tag{127}$$

Ее аналогом в евклидовой теории является полная или гауссова кривизна поверхности

$$k = \det \| b^j_i \| = \frac{\det \| b_{ij} \|}{\det \| g_{ik} \|}. \tag{128}$$

Согласно *теореме Родона* [53] дифференциальные формы (116) и (118), связанные соотношением аполярности (121), определяют поверхность с точностью до унимодулярных аффинных преобразований, если выполнены условия совместности уравнений (123) и (124).

Теперь перейдем к определению аффинной сферы в терминах инвариантов K и H. Напомним вначале, что обычная евклидова сфера $\mathbf{r}^2 = R^2$ на языке k и h задается условиями

$$h = \text{const} = \frac{1}{R}, \quad k = \text{const} = \frac{1}{R^2} = h^2. \tag{129}$$

Действительно, из (113), (114), (125), (128) и с учетом того, что для сферы $\mathbf{n} = \mathbf{r}/R$, имеем:

$$b_{ij} = -\frac{1}{R} g_{ij}, \quad h = -\frac{1}{2} b^i_i = \frac{1}{R}, \quad k = \frac{1}{R^2}. \tag{130}$$

Сферы в геометрии унимодулярной аффинной группы определяются как поверхности, у которых аффинные нормали пересекаются в одной точке

$$\mathbf{r} + R\mathbf{N} = \mathbf{c}, \tag{131}$$

где **c** — постоянный вектор в аффинном пространстве. Можно показать, что из (131), в полной аналогии с (129), следует [64, 65]

$$H = \mathrm{const} = \frac{1}{R}, \quad K = H^2. \tag{132}$$

Для наглядности приведем два примера поверхностей, которые являются аффинными сферами с центрами в начале координат:

$$z\,(x^2 + y^2) = 1, \qquad xyz = 1.$$

На аффинной сфере выберем систему координат в линиях кривизны [64]

$$\tilde{g}_{11} = -\tilde{g}_{22} = e^{\varphi}, \quad \tilde{g}_{12} = \tilde{g}_{21} = 0. \tag{133}$$

Из условия аполярности (121) следует, что все компоненты тензора T_{ijk} выражаются через две величины, которые мы обозначим A и B:

$$T_{111} = T_{221} = A, \qquad T_{222} = T_{112} = B. \tag{134}$$

Для наших целей достаточно считать A и B константами:

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = 0, \quad H = -\frac{1}{2}.$$

Подвижный базис на аффинной сфере, образованный двумя касательными векторами $\mathbf{r}_{,1}$ и $\mathbf{r}_{,2}$ и нормалью $\mathbf{N}$ (122), не нормирован. Можно нормировать его, введя вместо $\mathbf{N}$ вектор $\mathbf{e}_3 = e^{-\varphi}\mathbf{N}$. Тогда с помощью формул (117), (122) и (133) легко проверить, что базис $\{\mathbf{r}_{,1}, \mathbf{r}_{,2}, \mathbf{e}_3\}$ нормирован условием

$$(\mathbf{r}_{,1}\mathbf{r}_{,2}\mathbf{e}_3) = 1. \tag{135}$$

Теперь выпишем явно уравнения, определяющие движение базиса $\{\mathbf{r}_{,1}, \mathbf{r}_{,2}, \mathbf{e}_3\}$ по аффинной сфере, пользуясь (123) и (124) и сделав следующую замену параметров u^1, u^2:

$$u^1 \pm u^2 \to \lambda^{\pm 1}\,(u^1 \pm u^2),$$

где λ — константа. В дальнейшем она будет играть роль спектрального параметра [68]. Эти уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial u^j}\begin{pmatrix}\mathbf{r}_{,1}\\ \mathbf{r}_{,2}\\ \mathbf{e}_3\end{pmatrix} = \Omega^j \begin{pmatrix}\mathbf{r}_{,1}\\ \mathbf{r}_{,2}\\ \mathbf{e}_3\end{pmatrix}, \quad j = 1,\ 2, \tag{136}$$

где матрицы Ω^j, $j=1, 2$, принадлежат алгебре Ли группы $SL(3, R)$ и определяются формулами

$$\left.\begin{aligned}
\Omega^1 &= \begin{vmatrix} \frac{\varphi_{,1}}{2}+\lambda_+e^{-\varphi} & \frac{\varphi_{,2}}{2}-\lambda_-e^{-\varphi} & 2\lambda_+e^{2\varphi} \\ \frac{\varphi_{,2}}{2}+\lambda_-e^{-\varphi} & \frac{\varphi_{,1}}{2}-\lambda_+e^{-\varphi} & -2\lambda_-e^{2\varphi} \\ \lambda_+e^{-\varphi} & \lambda_-e^{-\varphi} & -\varphi_{,1} \end{vmatrix}, \\
\Omega^2 &= \begin{vmatrix} \frac{\varphi_{,2}}{2}+\lambda_-e^{-\varphi} & \frac{\varphi_{,1}}{2}-\lambda_+e^{-\varphi} & 2\lambda_-e^{2\varphi} \\ \frac{\varphi_{,1}}{2}+\lambda_+e^{-\varphi} & \frac{\varphi_{,2}}{2}-\lambda_-e^{-\varphi} & -2\lambda_+e^{2\varphi} \\ \lambda_-e^{-\varphi} & \lambda_+e^{-\varphi} & -\varphi_{,2} \end{vmatrix},
\end{aligned}\right\} \tag{137}$$

$$\lambda_\pm = \frac{1}{4}\left(\lambda \pm \frac{1}{\lambda}\right).$$

Условие совместности для линейных уравнений (136)

$$\Omega^1_{,2} - \Omega^2_{,1} + [\Omega^1, \Omega^2] = 0, \tag{138}$$

как нетрудно проверить, дает

$$\varphi_{,11} - \varphi_{,22} = e^{\varphi} - e^{-2\varphi}. \tag{139}$$

Это уравнение представляет собой конкретную запись в системе координат (133) общего уравнения в геометрии аффинных сфер [65]

$$\square \ln J = 6(H+J),$$

где $J = \frac{1}{2} T^{ijk}T_{ijk}$ — инвариант Пика.

В работе [60] для уравнения (139) было построено представление Лакса в матрицах 3×3 методом, отличным от рассмотренного здесь.

Понизить размерность матричных уравнений (136) аналогично тому, как это делается для уравнения синус-Гордона переходом к спинорному представлению группы вращений $SO(3)$ [24, 68, 69], нельзя, так как группа унимодулярных аффинных преобразований в трехмерном аффинном пространстве $SL(3, R)$ не имеет матричных представлений меньшей размерности, чем три.

7. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛАКСА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ДВУМЕРНУЮ МИНИМАЛЬНУЮ ПОВЕРХНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ ДЕ СИТТЕРА

Здесь мы рассмотрим следующую систему двух нелинейных уравнений [19]:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{,11} - \varphi_{,22} &= e^{\varphi}\cos\theta + \varepsilon e^{-\varphi}, \\ \theta_{,11} - \theta_{,22} &= e^{\varphi}\sin\theta, \quad \varepsilon = \pm 1. \end{aligned}\right\} \tag{140}$$

Эти уравнения описывают двумерную минимальную поверхность в пространстве-времени постоянной кривизны. Такие поверхности возникают, например, в теории релятивистской струны во вселенной де Ситтера. Полагая в (140) $\theta = 0$, получаем уравнение

$$\varphi_{,11} - \varphi_{,22} = 2 \begin{cases} \sinh \varphi, & \varepsilon = -1, \\ \cosh \varphi, & \varepsilon = +1, \end{cases} \tag{141}$$

описывающее минимальную поверхность в трехмерном пространстве-времени де Ситтера. Уравнение (141) является обобщением на случай знаконеопределенной метрики известного в дифференциальной геометрии результата о вложении минимальной поверхности в трехмерное пространство постоянной кривизны [27].

Мы получим представление Лакса для системы (140), используя геометрическую природу этих уравнений. Другим путем представление Лакса для этих уравнений было найдено в работе [70]. Ниже будет показано, почему для системы (140) нельзя построить общее решение методом, изложенным в разд. 2—4.

Пространство-время де Ситтера можно рассматривать как гиперболоид в псевдоевклидовом 5-мерном пространстве с координатами z^μ, $\mu = 0, \ldots, 4$:

$$(z^0)^2 - (z^1)^2 - (z^2)^2 - (z^3)^2 + \varepsilon (z^4)^2 = \varepsilon R^2, \tag{142}$$

где $\varepsilon = +1$ для вселенной де Ситтера первого рода и $\varepsilon = -1$ для вселенной де Ситтера второго рода [71].

Любое подмногообразие пространства-времени де Ситтера также можно описывать дифференциальными формами g_{ij}, $b_{\alpha|ij}$ и $\nu_{\alpha\beta|i}$, которые должны удовлетворять уравнениям Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи. При этом уравнения Петерсона — Кодацци (33) и Риччи (34) сохраняют свой вид, а уравнение Гаусса (32) модифицируется следующим образом [17]:

$$R_{ijkl} = \sum_{\sigma=3}^{4} \varepsilon_\sigma (b_{\sigma|ik} b_{\sigma|jl} - b_{\sigma|il} b_{\sigma|jk}) + \frac{\varepsilon}{R^2} (g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{kj}). \tag{143}$$

Уравнения (33), (34) и (143) являются условиями совместности линейных уравнений

$$\nabla_j z^\mu_{,i} = \sum_{\sigma=3}^{4} \varepsilon_\sigma b_{\sigma|ij} e^\mu_\sigma - \frac{\varepsilon}{R^2} g_{ij} z^\mu, \tag{144}$$

$$e^\mu_{\sigma,i} = -b_{\sigma|ij} g^{jk} z^\mu_{,k} - \sum_\tau \varepsilon_\tau \nu_{\tau\sigma|i} e^\mu_\sigma, \tag{145}$$

$$i, j, k \ldots = 1, 2, \quad \tau, \sigma \ldots = 3, 4,$$

описывающих движение по поверхности $z^\mu = z^\mu(u^1, u^2)$ базиса

$$z^\mu_{,1}, \; z^\mu_{,2}, \; e^\mu_3, \; e^\mu_4, \; z^\mu. \tag{146}$$

Роль третьей нормали в этом базисе выполняет, в силу (142), сам радиус-вектор поверхности $z^\mu(u^1, u^2)$.

Условие минимальности поверхности [17] по-прежнему дается формулами (43)

$$g^{ij}b_{\alpha|ij} = 0, \quad \alpha = 3, 4. \tag{147}$$

Свертка с метрическим тензором g^{ij} уравнения (144) приводит с учетом (147) к известному результату в теории минимальных поверхностей, вложенных в пространства постоянной кривизны [72], а именно действие оператора Лапласа — Бельтрами $\nabla_i\nabla^i$ на вектор z^μ определяется уравнением

$$\nabla_i\nabla^i z^\mu = -2\frac{\varepsilon}{R^2}z^\mu. \tag{148}$$

Ни в какой системе криволинейных координат u^1, u^2 на минимальной поверхности это уравнение, в отличие от (44), не линеаризуется. Поэтому не удается построить его общее решение, и, следовательно, нельзя применить метод получения общих решений нелинейных уравнений (33), (34) и (143), изложенный в разд. 2—4. Однако исходя из геометрической природы этих уравнений для них удается построить представление Лакса.

Вначале покажем, как из (33), (34) и (143) следует система (140).

Опять на минимальной поверхности возьмем конформно-плоскую систему координат

$$g_{11} = -g_{22} = e^{-\varphi}, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \tag{149}$$

в которой условия минимальности (147) записываются так:

$$b_\alpha|_{11} = b_\alpha|_{22}, \quad \alpha = 3, 4. \tag{150}$$

Если исключить из уравнений Петерсона — Кодацци (33) векторы кручения $\gamma_{34|i}$, $i = 1, 2$, и учесть (150), то мы придем к (61):

$$\frac{\partial}{\partial u^\pm}\sum_{\alpha=3}^{4}(b_{\alpha|11} \pm b_{\alpha|12})^2 = 0. \tag{151}$$

Этим уравнениям мы удовлетворим, если положим

$$\sum_{\alpha=3}^{4}(b_{\alpha|11} \pm b_{\alpha|22})^2 = q^2, \tag{152}$$

где q — некоторая константа. С помощью (144) и (149) равенства (152) можно переписать в следующем виде:

$$\left[\left(\nabla_1 z^\mu_{,1} + \frac{\varepsilon}{R^2}e^{-\varphi}z^\mu\right) \pm \nabla_2 z^\mu_{,1}\right]^2 = q^2. \tag{153}$$

Таким образом, в объемлющем 5-мерном пространстве мы имеем два взаимноортогональных вектора, естественно связанных с координатами минимальной поверхности. Это следующие векторы:

$$\nabla_1 z^\mu_{,1} + \frac{\varepsilon}{R^2} e^{-\varphi} z^\mu \text{ и } \nabla_2 z^\mu_{,1}. \tag{154}$$

Направив нормаль e_3^μ по первому из них, а e_4^μ — по второму, получим

$$b_{3\,|\,12} = b_{4\,|\,11} = b_{4\,|\,22} = 0. \tag{155}$$

Чтобы удовлетворить условию (153), можно положить

$$b_{3\,|\,11} = q\cos\frac{\theta}{2},\quad b_{4\,|\,12} = q\sin\frac{\theta}{2}. \tag{156}$$

Теперь нетрудно показать, что уравнения Гаусса (143) и Риччи (34) сводятся к системе (140), а уравнения Петерсона — Кодацци (33) с $\alpha = 3, 4$ определяют через функцию θ вектор кручения $\nu_{34|i}$, $i = 1, 2$:

$$\nu_{34\,|\,1} = \frac{\theta_{,2}}{2},\quad \nu_{34\,|\,2} = \frac{\theta_{,1}}{2}. \tag{157}$$

Перейдем к выводу представления Лакса для системы (140). Для этого построим из базиса (146) новый ортонормированный базис $\bar{e}_a$, $a = 1, \ldots, 5$:

$$\begin{gathered}\bar{e}_1 = z_{,1} e^{\varphi/2},\quad \bar{e}_2 = \mathrm{i} z_{,2} e^{\varphi/2},\quad \bar{e}_3 = \mathrm{i} e_3,\\ \bar{e}_4 = \mathrm{i} e_4,\quad \bar{e}_5 = \sqrt{\varepsilon}\frac{z}{R},\quad \bar{e}_a \bar{e}_b = \delta_{ab}.\end{gathered} \tag{158}$$

С помощью формул (144), (145) и (158) мы получаем следующие уравнения, описывающие движение базиса $\{\bar{e}_a\}$ по минимальной поверхности:

$$\frac{\partial \bar{e}_a}{\partial u^j} = \sum_{b=1}^{5} \omega^j_{ab} \bar{e}_b,\quad a, b = 1, \ldots, 5,\quad j = 1, 2, \tag{159}$$

где ω^j — матрицы, размером 5×5, принадлежащие алгебре Ли группы $SO(5)$:

$$\omega^1 = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{\mathrm{i}}{2}\varphi_{,2} & \mathrm{i}q e^{\varphi/2}\cos\frac{\theta}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{\varepsilon}}{R}e^{\varphi/2} \\ -\frac{\mathrm{i}}{2}\varphi_{,2} & 0 & 0 & -q e^{\varphi/2}\sin\frac{\theta}{2} & 0 \\ -\mathrm{i}q e^{\varphi/2}\cos\frac{\theta}{2} & 0 & 0 & \frac{\theta_{,2}}{2} & 0 \\ 0 & q e^{\varphi/2}\sin\frac{\theta}{2} & -\frac{\theta_{,2}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{\varepsilon}}{R}e^{\varphi/2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{160}$$

$$\omega^2 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{i}{2}\varphi_{,1} & 0 & iqe^{\varphi/2}\sin\frac{\theta}{2} & 0 \\ -\frac{i}{2}\varphi_{,1} & 0 & -qe^{\varphi/2}\cos\frac{\theta}{2} & 0 & i\frac{\sqrt{\varepsilon}}{R}e^{\varphi/2} \\ 0 & qe^{\varphi/2}\cos\frac{\theta}{2} & 0 & \frac{\theta_{,1}}{2} & 0 \\ -iqe^{\varphi/2}\sin\frac{\theta}{2} & 0 & -\frac{\theta_{,1}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -i\frac{\sqrt{\varepsilon}}{R}e^{\varphi/2} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \tag{161}$$

Теперь мы используем тот факт, что группа $SO(5)$ допускает представление матрицами 4×4. В этом представлении генераторы группы $SO(5)$ определяются формулами [73]:

$$I_{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \quad \mu, \nu = 1, \ldots, 5, \tag{162}$$

где γ_μ — известные матрицы Дирака

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 1, \ldots, 5. \tag{163}$$

Для дальнейшего удобно взять такое представление γ-матриц, в котором матрица $\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ диагональна:

$$\gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_k \\ -i\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{164}$$

где σ_k — матрицы Паули, $k = 1, 2, 3$.

Уравнениям (159) мы можем однозначно сопоставить следующие две системы линейных уравнений, содержащие теперь только по 4 уравнения:

$$\frac{\partial\psi_a}{\partial u^j} = \frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu>1}^{5} \omega^j_{\mu\nu}(\gamma_\mu\gamma_\nu)_{ab}\psi_b = \frac{1}{4}\Omega^j_{ab}\psi_b, \qquad j = 1, 2. \tag{165}$$

Здесь $\psi_a(u^1, u^2)$ — четырехкомпонентная функция-столбец, а Ω^j — матрицы 4×4 следующего вида:

$$\Omega^j = 2\sum_{\mu>\nu=1}^{5} \omega^j_{\mu\nu}\gamma_\mu\gamma_\nu, \qquad j = 1, 2. \tag{166}$$

Чтобы выписать эти матрицы явно, введем обозначения

$$\Omega^j = \begin{pmatrix} a^j_{11} & a^j_{12} \\ a^j_{21} & a^j_{22} \end{pmatrix}, \tag{167}$$

где a^j_{kl}, в свою очередь, являются матрицами 2×2. Используя (159) — (166), получаем для a^j_{kl} в уравнениях (167) следующие разложения по матрицам σ_i:

$$\left.\begin{aligned} &a^1_{11}=Q^*\sigma_1-\varkappa^*_{,2}\sigma_3, && a^2_{11}=-\mathrm{i}Q^*\sigma_1-\varkappa^*_{,1}\sigma_3,\\ &a^1_{12}=a^1_{21}=-\mathrm{i}\sigma_1\frac{\sqrt{\varepsilon}}{R}e^{\varphi/2}, && a^2_{12}=a^2_{21}=-\sigma_2\frac{\sqrt{\varepsilon}}{R}e^{-\varphi/2},\\ &a^1_{22}=Q\sigma_2-\varkappa_{,2}\sigma_3, && a^2_{22}=-\mathrm{i}Q\sigma_1-\varkappa_{,1}\sigma_3, \end{aligned}\right\}\tag{168}$$

где $Q=qe^{\varkappa}$, $2\varkappa=\varphi+\mathrm{i}\theta$, $\varepsilon=\pm 1$.

Условия совместности для линейных уравнений (165)

$$\Omega^1_{,2}-\Omega^2_{,1}+\frac{1}{4}[\Omega^1,\ \Omega^2]=0 \tag{169}$$

сводятся к системе нелинейных уравнений (140). Чтобы ввести спектральный параметр в (165), необходимо перейти к новым переменным $\bar{u}^1$, $\bar{u}^2$:

$$\bar{u}^1+\bar{u}^2=\lambda(\bar{u}^1+u^2),\qquad \bar{u}^1-\bar{u}^2=\lambda^{-1}(u^1-u^2). \tag{170}$$

При этом уравнения (140) сохранят свой вид, а в матричные элементы Ω^j_{ab} войдут комбинации $\lambda+1/\lambda$. Мы не будем проделывать здесь эти элементарные преобразования.

8. НОВОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ, СВЯЗАННОЕ СО СФЕРОЙ В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

При чтении материала, изложенного в предыдущих разделах, может создаться впечатление, что каждой поверхности того или иного типа соответствует определенное нелинейное уравнение или система нелинейных уравнений. Однако это не так. Одной и той же поверхности могут соответствовать различные нелинейные уравнения. На поверхности можно выбрать различные криволинейные системы координат и в результате получить разные нелинейные уравнения. Рассмотрим, например, обычную сферу в трехмерном евклидовом пространстве

$$\mathbf{r}^2=1,\qquad \mathbf{r}=\mathbf{r}(u^1,\ u^2). \tag{171}$$

Если на ней выбрана так называемая чебышевская система координат [67]

$$ds^2=(dv^1)^2+2\cos\omega\, dv^1\, dv^2+(dv^2)^2, \tag{172}$$

то уравнение Гаусса (32) дает уравнение синус-Гордона

$$\omega_{,12}=\sin\omega. \tag{173}$$

Если же на сфере взята конформно-плоская система координат:

$$ds^2=e^{\varphi}[(du^1)^2+(du^2)^2], \tag{174}$$

то из (32) получаем уравнение Лиувилля (см. приложение):

$$\varphi_{,11} + \varphi_{,22} = -2e^{\varphi}. \tag{175}$$

Мы рассмотрим на сфере (171) криволинейную систему координат, в которой координатными линиями являются геодезические эллипсы и гиперболы [26, 74]. Квадрат элемента длины в этом случае имеет вид:

$$ds^2 = \frac{(du^1)^2}{\sin^2(\theta/2)} + \frac{(du^2)^2}{\cos^2(\theta/2)}. \tag{176}$$

В системе координат (176) подвижный репер $\{\mathbf{r}_{,1}, \mathbf{r}_{,2}, \mathbf{e}_3\}$ ортогональный, но не ортонормальный:

$$\mathbf{r}^2_{,1} = \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-2}, \quad \mathbf{r}^2_{,2} = \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-2}, \quad \mathbf{r}_{,1}\mathbf{r}_{,2} = 0.$$

Тем не менее именно такой базис оказывается удобным для введения спектрального параметра в получаемое ниже представление Лакса.

Возможность выбора системы координат (176) на сфере доказывается в классических курсах дифференциальной геометрии [47, 74]. Однако функция $\theta(u^1, u^2)$ не может быть произвольной, она должна удовлетворять некоторому нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка [22]. Этим уравнением является уравнение Гаусса для двумерного риманова многообразия постоянной кривизны с метрикой (176).

Движение репера $\{\mathbf{r}_{,1}, \mathbf{r}_{,2}, \mathbf{e}_3\}$ по сфере определяется уравнениями (28) и (30):

$$\nabla_j \mathbf{r}_{,i} = b_{ij}\mathbf{e}_3, \tag{177}$$

$$\partial_i \mathbf{e}_3 = -b_i^j \mathbf{r}_{,j}, \quad i, j, k = 1, 2. \tag{178}$$

Учтем здесь тот факт, что в случае сферы вторая квадратичная форма пропорциональна первой [15, 24]:

$$\begin{aligned} b_{11} &= -\frac{1}{R} g_{11} = -\frac{1}{R}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-2}, \\ b_{22} &= -\frac{1}{R} g_{22} = -\frac{1}{R}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-2}, \\ b_{12} &= -\frac{1}{R} g_{12} = 0, \end{aligned} \tag{179}$$

а символы Кристоффеля для метрики (176) даются следующими выражениями:

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = -\varphi_{,1}\operatorname{ctg}\varphi, \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -\varphi_{,2}\operatorname{ctg}\varphi, \quad \Gamma^1_{22} = -\varphi_{,1}\operatorname{tg}^3\varphi, \\ &\Gamma^2_{11} = \varphi_{,2}\operatorname{ctg}^3\varphi, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \varphi_{,1}\operatorname{tg}\varphi, \quad \Gamma^2_{22} = \varphi_{,2}\operatorname{tg}\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{180}$$

$$\varphi = 2\theta.$$

Теперь уравнения (177), (178) принимают вид:

$$\frac{\partial}{\partial u^j}\begin{pmatrix}\mathbf{r}_{,1}\\ \mathbf{r}_{,2}\\ \mathbf{e}_3\end{pmatrix}=\omega^j\begin{pmatrix}\mathbf{r}_{,1}\\ \mathbf{r}_{,2}\\ \mathbf{e}_3\end{pmatrix}, \quad j=1,\ 2, \tag{181}$$

где 3×3-матрицы ω^j определяются формулами:

$$\left.\begin{aligned}\omega^1&=\begin{vmatrix}-\varphi_{,1}\operatorname{ctg}\varphi & \varphi_{,2}\operatorname{ctg}^3\varphi & -R^{-1}(\sin\varphi)^{-1}\\ -\varphi_{,2}\operatorname{ctg}\varphi & \varphi_{,1}\operatorname{tg}\varphi & 0\\ R^{-1} & 0 & 0\end{vmatrix},\\ \omega^2&=\begin{vmatrix}-\varphi_{,2}\operatorname{ctg}\varphi & \varphi_{,1}\operatorname{tg}\varphi & 0\\ -\varphi_{,1}\operatorname{tg}^3\varphi & \varphi_{,2}\operatorname{tg}\varphi & -R^{-1}(\cos\varphi)^{-2}\\ 0 & R^{-1} & 0\end{vmatrix}.\end{aligned}\right\} \tag{182}$$

Условие совместности линейных уравнений (181)

$$\omega^1_{,2}-\omega^2_{,1}=[\omega^2,\ \omega^1] \tag{183}$$

сводится к следующему нелинейному уравнению гиперболического типа на функцию $\varphi\,(u^1,\ u^2)$:

$$(\varphi_{,1}\operatorname{tg}^2\varphi)_{,1}+(\varphi_{,2}\operatorname{ctg}^2\varphi)_{,2}=\frac{1}{R^2}(\sin 2\varphi)^{-1}. \tag{184}$$

Уравнение (184) есть уравнение Гаусса (32)

$$R_{1212}=b_{12}b_{12}-b_{11}b_{22},$$

где R_{1212} — тензор кривизны Римана — Кристоффеля для метрики (176). Уравнения Петерсона — Кодацци для сферы удовлетворяются тождественно, поэтому вместо трех условий совместности для линейной системы (181) имеет место одно условие (184).

Если мы хотим использовать матрицы ω^i (182) для построения линейной вспомогательной спектральной задачи, которая необходима для решения уравнения (184) методом обратной задачи рассеяния, то в ω^i необходимо внести зависимость от спектрального параметра λ. Для этого учтем тот факт, что нелинейное уравнение (184) инвариантно относительно следующих преобразований:

$$u^i\to\lambda u^i,\quad i=1,\ 2,\quad R\to\lambda R,\quad \varphi\to\varphi, \tag{185}$$

где λ — константа. Линейные уравнения (181) не инвариантны при таких заменах, в результате которых матрицы ω^i начинают зависеть от спектрального параметра λ.

Таким образом, нелинейному уравнению (184) мы можем сопоставить следующую линейную спектральную задачу:

$$\frac{\partial\psi}{\partial u^i}=\Omega^i(\lambda)\,\psi,\quad i=1,\ 2, \tag{186}$$

где $\psi(u^1, u^2)$ — функция-столбец с тремя компонентами, а матрицы $\Omega^i(\lambda)$ имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \Omega^1(\lambda) &= \left|\begin{matrix} -\varphi_{,1}\operatorname{ctg}\varphi & \varphi_{,2}\operatorname{ctg}^3\varphi & -\frac{\lambda}{R}(\sin\varphi)^{-2} \\ -\varphi_{,2}\operatorname{ctg}\varphi & \varphi_{,1}\operatorname{tg}\varphi & 0 \\ (\lambda R)^{-1} & 0 & 0 \end{matrix}\right|, \\ \Omega^2(\lambda) &= \left|\begin{matrix} -\varphi_{,2}\operatorname{ctg}\varphi & \varphi_{,1}\operatorname{tg}\varphi & 0 \\ -\varphi_{,1}\operatorname{tg}^3\varphi & \varphi_{,2}\operatorname{tg}\varphi & -\frac{\lambda}{R}(\cos\varphi)^{-2} \\ 0 & (\lambda R)^{-1} & 0 \end{matrix}\right|. \end{aligned}\right\} \qquad (187)$$

С помощью калибровочного преобразования

$$\overline{\Omega}^i = g^{-1}\Omega^i g - g^{-1}\partial_i g, \qquad i = 1,\ 2,$$

с матрицей $g = \operatorname{diag}((\sin\varphi)^{-1}, (\cos\varphi)^{-1}, 1)$ можно перейти к линейной спектральной задаче, аналогичной (186), с матрицами Ω^i из алгебры Ли группы $SL(3, R)$ $\overline{\Omega}^1 = \varphi_{,2}\operatorname{ctg}^2\varphi X_1 + R^{-1}(\sin\varphi)^{-1}X_2$, $\overline{\Omega}^2 = \varphi_{,1}\operatorname{tg}^2\varphi X_1 + R^{-1}(\cos\varphi)^{-1}X_3$, где

$$X_1 = \left|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right|, \quad X_2 = \left|\begin{matrix} 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda^{-1} & 0 & 0 \end{matrix}\right|, \quad X_3 = \left|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & \lambda^{-1} & 0 \end{matrix}\right|,$$

$$[X_1, X_2] = -X_3, \quad [X_2, X_3] = -X_1, \quad [X_3, X_1] = -X_2.$$

С целью получения нового нелинейного интегрируемого уравнения метрика (176) на поверхности постоянной кривизны рассматривалась и в работе [80]. Однако из-за погрешности в вычислениях уравнение, полученное там, не совпадает с (184).

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные нами примеры показывают, что классическая теория минимальных поверхностей дает довольно богатую серию систем нелинейных уравнений, для которых можно построить общее решение явно. Существенно, что метод построения решения оказывается чисто алгебраическим, что и объясняет его чрезвычайную простоту.

Помимо получения явно интегрируемых нелинейных уравнений классическая теория поверхностей оказывается полезной и при нахождении новых нелинейных уравнений, которые можно исследовать методом обратной задачи рассеяния, как это было показано в разд. 6—8.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь мы покажем, как можно получить общее решение нелинейного уравнения Лиувилля, исходя из внутренней геометрии обычной сферы в трехмерном евклидовом пространстве [24]. Рассмотрим эллиптический случай, т. е. уравнение (175). Как уже отмечалось в разд. 8, если на сфере (171) выбрана конформно-плоская система криволинейных координат (174), то функция $\varphi(u^1, u^2)$ удовлетворяет уравнению Лиувилля (175). Простейшим примером конформно-плоской системы координат являются стереографические координаты на сфере. Эти координаты определяются следующим образом. Через экватор сферы проводится плоскость, на которую точки сферы проектируются с помощью прямых, выходящих из верхнего полюса. На плоскости вводится прямоугольная система координат u^1 и u^2 с началом в центре сферы. Стереографическими координатами точки на сфере являются координаты u^1, u^2 ее проекции на экваториальную плоскость. Если θ и φ — сферические координаты, то стереографические координаты u^1, u^2 связаны с ними следующими соотношениями:

$$u^1 = \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\sin\varphi, \quad u^2 = \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\cos\varphi. \tag{П.1}$$

Линейный элемент на сфере в этих координатах имеет вид:

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2 = \frac{4}{[1+(u^1)^2+(u^2)^2]^2}\,[(du^1)^2+(du^2)^2] = \frac{4\,dz\,d\bar{z}}{(1+|z|^2)^2}, \tag{П.2}$$

где $z = u^1 + iu^2$, а черта означает комплексное сопряжение. Таким образом, координаты u^1, u^2 на сфере — конформно-плоские. Из сравнения (174) и (П.2) следует, что частное решение уравнения Лиувилля (175) определяется выражением

$$e^{\varphi} = \frac{4}{[1+(u^1)^2+(u^2)^2]^2} = \frac{4}{(1+|z|^2)^2}. \tag{П.3}$$

Теперь учтем тот факт, что конформно-плоский вид метрики (П.2) сохранится при следующих преобразованиях координат u^1, u^2:

$$u^1 + iu^2 \to \Phi(u^1 + iu^2) \quad \text{или} \quad z \to \Phi(z), \tag{П.4}$$

где $\Phi(z)$ — произвольная аналитическая функция комплексной переменной z, удовлетворяющая условиям Коши — Римана

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}} = \frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial z} = 0. \tag{П.5}$$

Преобразование (П.4) приводит метрику (П.2) к виду

$$ds^2 = \frac{4\,|\Phi_z'|^2}{(1+|\Phi|^2)^2}\,dz\,d\bar{z}. \tag{П.6}$$

Отсюда непосредственно следует общее решение уравнения Лиувилля (175)

$$e^{\varphi} = \frac{4\,|\Phi_z'|^2}{(1+\Phi^2)^2}. \tag{П.7}$$

Дополнительно мы получаем примечательное свойство решений уравнения (175): если $f(z)$, $z = u^1 + iu^2$, определяет некоторое решение этого уравнения согласно равенству

$$e^{\varphi} = f(z),$$

то соотношение

$$e^{\varphi} = f(\Phi(z))\,|\Phi_z'|^2,$$

где $\Phi(z)$ — произвольная аналитическая функция переменной z, будет также определять решение уравнения (175) (см. работу [75]).

Уравнение Лиувилля (175) и уравнение синус-Гордона (173) описывают метрику одной и той же поверхности [сферы (171)], но в разных системах координат (172) и (174). Поэтому естественно попытаться перейти от конформно-плоских координат (174) к чебышевской координатной сети (172), чтобы с помощью общего решения уравнения Лиувилля (П.7) получить общее решение уравнения синус-Гордона (173). Однако задача нахождения такого преобразования параметров

$$u^1 = u^1(v^1, v^2), \quad u^2 = u^2(v^1, v^2) \tag{П.8}$$

оказывается не менее простой, чем решение самого уравнения синус-Гордона. Действительно, для перехода от (174) к (172) функции (П.8) должны удовлетворять известным *уравнениям Сервана — Бианки* [67]:

$$\frac{\partial^2 u^1}{\partial v^1 \partial v^2} + \Gamma^1_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial v^1} \frac{\partial u^j}{\partial v^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u^2}{\partial v^1 \partial v^2} + \Gamma^2_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial v^1} \frac{\partial u^j}{\partial v^2} = 0, \tag{П.9}$$

где Γ^i_{jk} — символы Кристоффеля для метрики (174),

$$\Gamma^1_{11} = -\Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{12} = \frac{\varphi_{,1}}{2}, \quad \Gamma^2_{22} = \Gamma^1_{12} = -\Gamma^2_{11} = \frac{\varphi_{,2}}{2}, \tag{П.10}$$

причем в (П.9) и (П.10) необходимо подставить общее решение уравнения Лиувилля (П.7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дайсон Ф. Дж.**— УМН, 1980, т. 35, вып. 1 (211), с. 171.
2. **Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.** Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
3. **Faddeev L. D., Korepin V. E.**— Phys. Rep. C, 1978, v. 42, N 1, p. 1.
4. **Soliton** theory: Proc. of the Soviet-American Symposium on Soliton Theory. Kiev, 4—16 Sept. 1979/Ed. S. V. Manakov, V. E. Zakharov. Amsterdam: North-Holland, 1981.
5. **Solitons**/Ed. by R. K. Bullough, P. J. Caudrey.— Berlin: Springer-Verlag, 1980; Солитоны/Сборник статей под ред. Р. Буллафа и Ф. Кодри. Пер. с англ. М.: Мир, 1983.
6. **Мельников В. К.**— ЭЧАЯ, 1980, т. 11, вып. 5, с. 1224.
7. **Лезнов А. Н., Савельев М. В.**— Там же, вып. 1, с. 40; 1981, т. 12, вып. 1, с. 125.
8. **Leznov A. N., Saveliev M. V.**— Commun. Math. Phys., 1980, v. 74, p. 11.
9. **Лезнов А. Н., Савельев М. В.**— ТМФ, 1983, т. 54, № 3, с. 323; Lett. Math. Phys., 1982, v. 6, N 6, p. 505.
10. **Leznov A. N., Saveliev M. V.** Preprint IHEP 82-113, Serpukhov, 1982; **Saveliev M. V.** Preprint IHEP 83-141, Serpukhov, 1983.
11. **Барбашов Б. М., Нестеренко В. В., Червяков А. М.** Проблемы квантовой теории поля.— В кн.: Тр. VI Международного совещания по проблемам квантовой теории поля, Алушта, Крым, 5—9 мая 1981 г. Дубна, ОИЯИ, 1981, Д2-81-543, с. 101.
12. **Barbashov B. M., Nesterenko V. V., Chervjakov A. M.**— Commun. Math. Phys., 1982, v. 84, p. 471.
13. **Barbashov B. M., Nesterenko V. V.**— Hadronic J., 1982, v. 5, N 2, p. 659.
14. **Барбашов Б. М., Нестеренко В. В., Червяков А. М.**— ТМФ, 1982, т. 52, № 1, с. 3.
15. **Рашевский П. К.** Курс дифференциальной геометрии. М.: Гостехтеориздат, 1956.

16. **Eisenhart L. P.** An Introduction to differential Geometry with Use of the Tensor Calculus. Princeton University Press, Princeton, 1940.
17. **Eisenhart L. P.** Riemannian Geometry. Princeton, 1964.
18. **Spivak M. A.** Comprehensive Introduction to Differential Geometry. Vols 1—5. Publish or Perish. Boston, 1970—1975.
19. **Barbashov B. M., Nesterenko V. V.**— Commun. Math. Phys., 1981, v. 78, p. 499.
20. **Nesterenko V. V.**— Lett. Math. Phys., 1980, v. 4, p. 451; Phys. Lett., 1983, v. 99A, N 6, 7, p. 287; ТМФ, 1984, т. 58, № 2, с. 192.
21. **Nesterenko V. V.**— Czechos. J. Phys., 1982, N 6, p. 668.
22. **Нестеренко В. В.** Препринт ОИЯИ Р5-81-785, Дубна, 1981.
23. **Барбашов Б. М., Нестеренко В. В., Червяков А. М.**— ТМФ, 1980, т. 45, № 3, с. 365.
24. **Barbashov B. M., Nesterenko V. V.**— Fortschr. Phys., 1980, Bd 28, Heft 8/9, S. 427.
25. **Гильберт Д., Кон-Фоссен С.** Наглядная геометрия. М.: Наука, 1981.
26. **Eisenhart L. P.** A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces. Dover Publications, INC, N.Y., 1960.
27. **Bianchi L.** Lezioni di Geometria Differenziale, 4th ed. Bologna, 1922—1923.
28. **Гильберт Д.** Основания геометрии: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.
29. **Чебышев П. Л.**— УМН, 1946, т. 1, вып. 2 (12), с. 38.
30. **Позняк Э. Г.** Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. М.: ВИНИТИ, 1977, т. 8, с. 229.
31. **Nitsche J. C. C.** Vorlesungen uber Minimalfachen. Berlin, Springer-Verlag, 1975.
32. **Plateau J.**— Mem. acad. roy Belgique, New Series, 1849, p. 23.
33. **Osserman R.**— Bull. Amer. Math. Soc., 1969, v. 75, p. 1091.
34. **Курант Р.** Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1953.
35. **Фоменко А. Т.**— УМН, 1981, т. 36, вып. 6 (222), с. 105.
36. **Бляшке В.** Введение в дифференциальную геометрию М.: Гостехтеориздат, 1957.
37. **Scherk J.**— Rev. Mod. Phys., 1975, v. 47, N 1, p. 123.
38. **Барбашов Б. М., Нестеренко В. В.**— ЭЧАЯ, 1978, т. 9, вып. 5, с. 709.
39. **Барбашов Б. М., Черников Н. А.**— ЖЭТФ, 1966, т. 50, с. 1296.
40. **Nambu Y.**— Phys. Rev. D, 1974, v. 10, p. 4262; Phys. Rep. C, 1976, v. 23, p. 250.
41. **Wilson K. G.**— Phys. Rev. D, 1974, v. 10, p. 2445; Phys. Rep. C, 1976, v. 23, p. 331.
42. **Zel'dovich Ya. B.**— Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1980, v. 192, p. 663.
43. **Kibble T. W. B.**— J. Phys. A, 1976, v. 9, p. 1387.
44. **Барбашов Б. М., Кошкаров А. Л.**— ТМФ, 1979, т. 39, с. 27, (1979).
45. **Барбашов Б. М., Кошкаров А. Л., Нестеренко В. В.** Сообщение ОИЯИ Е2-82-364, 1982.
46. **Gauss C. F.** Werke. Bd 1—12, Gottingen, 1870—1927.
47. **Darboux G.** Lecons sur La Theorie generale des surfaces 2 ed., Paris, 1914—1925.
48. **Картан Э.** Риманова геометрия в ортогональном репере. М.: Изд-во МГУ, 1960.
49. **Ефимов Н. В.** Введение в теорию внешних форм. М.: Наука, 1977.
50. **Franders H.** Differential forms. N.Y.— Lond.: Academic Press, 1963.
51. **Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.** Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
52. **Рашевский П. К.** Геометрическая теория уравнений с частными производными. М.—Л.: Гостехтеориздат, 1947.

53. **Фавар Ж.** Курс локальной дифференциальной геометрии: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.

54. **Нетер Э.** Инвариантные вариационные задачи.— В кн.: Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1959, с. 611.

55. **Barbashov B. M., Nesterenko V. V.**— Fortsch. Phys., 1983, Bd 31, N 9, S. 536—567.

56. **Liouville J.**— J. Math. pures et appl., 1853, v. 18, p. 71.

57. **Forshyt R.** Theory of Differential Equations. Part 4, vol. 6, N.Y., Dover, 1959.

58. **Lund F., Regge T.**— Phys. Rev. D, 1976, v. 14, p. 1524.

59. **Справочник** по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовича, И. Стигана М.: Наука, 1979.

60. **Михайлов А. В.**— Письма в ЖЭТФ, 1979, т. 30, с. 443.

61. **Жибер А. В., Шабат А. Б.**— ДАН СССР, 1979, т. 247, с. 1103.

62. **Dodd R. K., Bullough R. K.**— Proc. Roy. Soc. Lond. A, 1977, v. 353, p. 481.

63. **Arinshtein A. E., Fateyev V. A., Zamolodchikov A. B.**— Phys. Lett. B, 1979, v. 87, N 4, p. 389.

64. **Blaschke W.** Vorlesungen uber Differentialgeometrie, Band II, Affine Differentialgeometrie. Berlin, Springer, 1923.

65. **Широков П. А., Широков А. П.** Аффинная дифференциальная геометрия. М.: Физматгиз, 1959.

66. **Веблен О., Уайтхед Дж.** Основания дифференциальной геометрии: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1949.

67. **Каган В. Ф.** Основы теории поверхностей. М.: Гостехтеориздат, 1948, ч. II, гл. 16.

68. **Neveu A., Papanicolaou N.**— Commun. Math. Phys., 1976, v. 58, p. 31.

69. **Pohlmeyer K.**— Ibid., v. 46, p. 209.

70. **Fordy A. P., Gibbons J.**— Ibid., 1980, v. 77, p. 21.

71. **Хокинг С., Эллис Дж.** Крупномасштабная структура пространства — времени: Пер. с англ. М.: Мир, 1977.

72. **Takahashi T.**— J. Math. Soc. Japan, 1966, v. 18, p. 380.

73. **Гюрши Ф.** Введение в теорию групп.— В кн.: Теория групп и элементарные частицы: Пер. с англ. М.: Мир, 1967, с. 25.

74. **Bianchi L.** Vorlesungen uber Differentialgeometrie. Erste Liferung S. 163, 252, Druck and Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1896.

75. **Векуа И. Н.**— Сиб. мат. журн., 1960, т. 1, № 3, с. 331.

76. **Barbashov B. M., Nesterenko V. V., Chervjakov A. M.**— J. Phys. A, 1980, v. 13, p. 301.

77. **Торп Д. А.** Начальные главы дифференциальной геометрии: Пер. с англ. М.: Мир, 1982.

78. **Барбашов Б. М., Нестеренко В. В., Червяков А. М.** Препринт ОИЯИ Р2-83-542, Дубна, 1983; ТМФ, 1984.

79. **Желтухин А. А.**— ТМФ, 1983, т. 56, № 2, с. 230.

80. **Chowdhury A. R., Paul S.**— J. Phys. A, 1984, v. 17, p. L97.