

# СТРУКТУРА ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ И СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ ГРИНА ОТ БЕСЦВЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ В МОДЕЛИ ШВИНГЕРА

*А. Н. Тавхелидзе, В. Ф. Токарев*

Институт ядерных исследований АН СССР, Москва

На основе точного решения модели Швингера в поперечной калибровке изучены вопросы, связанные со структурой основного состояния и свойства калибровочно-инвариантных операторов, а также их произведений как на малых, так и на больших расстояниях. Проанализирована возможность применения в данной модели правил сумм и операторного разложения.

Questions connected with the structure of the ground state and properties of gauge-invariant operators at small and at large distances are studied on the basis of the exact solution of the Schwinger model. The validity of sum rules and Wilson expansion is analysed in this model.

## ВВЕДЕНИЕ

Для описания адронной физики в рамках КХД существенное значение приобретает знание основного состояния системы и функций Грина от бесцветных операторов.

В последнее время появились серьезные аргументы в пользу того, что требование калибровочной инвариантности приводит к сложной структуре основного состояния в калибровочных теориях поля [1—4]\*. Со сложной структурой вакуума связаны определенные надежды на решение  $U(1)$ -проблемы [5, 6], описание удержания кварков, а также на объяснение спонтанного нарушения киральной инвариантности [7, 8].

В объединенных моделях элементарных частиц структура вакуума приводит к возможности несохранения барионного числа [9—11], которое, как было показано В. А. Рубаковым [12], будет сильным в присутствии магнитного монополя и приводит к значительному увеличению вероятности распада протона (эффект Рубакова).

Исследование эффектов, связанных со структурой вакуума, в основном ведется по двум направлениям. Первое из них основано на применении квазиклассического приближения в теории поля,

\* Методы изучения структуры основного состояния в квантовых системах с вырождением были развиты Н. Н. Боголюбовым в его основополагающих работах по теории сверхтекучести и сверхпроводимости.

которое наиболее просто проводится в рамках формализма функционального интегрирования. Второе направление связано с применением разложения Вильсона [13], которое позволяет полуфеноменологическим образом учесть такие важные свойства вакуума, как существование в нем кваркового глюонного и скалярного конденсатов [14, 15].

Однако применимость этих методов в рамках КХД недостаточно обоснована и дальнейшее продвижение в понимании сущности перечисленных выше проблем требует более детального изучения структуры основного состояния.

В связи с этим большой интерес вызывают точно решаемые модели квантовой теории поля, на примере которых могут быть проверены приближенные методы, используемые в реалистичных моделях квантовой теории поля. Одной из таких моделей является модель Швингера [16] — двумерная безмассовая квантовая электродинамика. Эта модель с различных точек зрения изучалась в работах [2—4, 17—20].

В предлагаемом обзоре на основе точного решения модели Швингера в поперечной калибровке рассмотрены вопросы, связанные со структурой основного состояния, и свойства калибровочно-инвариантных операторов, а также их произведений как на малых, так и на больших расстояниях. Проанализирована применимость к этой модели правил сумм.

Статья построена следующим образом. В первой части найдено операторное решение, выражающее изначальные поля  $\psi(x)$  и  $A_\mu(x)$  через свободные псевдоскалярные поля  $\eta(x)$ ,  $\Sigma(x)$  и фермионное поле  $\psi_0(x)$ .

С учетом этого решения уравнения Максвелла сводятся к уравнению связи в форме  $L_\mu = 0$ , где  $L_\mu = \bar{\psi}_0 \gamma_\mu \psi_0 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \eta$ .

Решение этого уравнения выделяет из расширенного пространства  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Sigma) \otimes \mathcal{H}(\eta) \otimes \mathcal{H}(\psi_0)$  физическое пространство  $\mathcal{H}_{\text{ph}}$ .

В результате построено основное состояние системы, не имеющее определенных фермионного и кирального чисел и характеризующееся двумя произвольными параметрами  $\theta_\pm (0 \leq \theta_\pm < 2\pi)$ .

Возбуждения системы описываются одним нейтральным полем  $\Sigma(x)$ , что означает отсутствие в спектре заряженных состояний.

Условие конфайнмента в данной модели формулируется как равенство нулю в физическом пространстве оператора электрического заряда. Это условие является прямым следствием теоремы Гаусса и того факта, что поперечная степень свободы калибровочного поля  $A_\mu$  динамическим образом приобрела некоторую массу.

Во второй части обзора устанавливается связь между уравнением связи и инвариантностью физического пространства состояний относительно локальных калибровочных преобразований, оставшихся после наложения калибровки Лоренца.

В процессе построения основного состояния мы пришли к необ-

ходимости расширить класс калибровочных преобразований, а именно: включить в рассмотрение калибровочные функции с неубывающими асимптотиками на бесконечности.

В третьей части подробно обрисована физическая картина модели.

Операторное решение модели дало возможность установить точную связь между градиентно-инвариантными токами, построенными из фермионных и калибровочных полей, и физическим полем  $\Sigma(x)$ .

В результате был прослежен механизм несохранения аксиального тока. Нарушение аксиальной симметрии проявилось в появлении кваркового конденсата  $\langle \psi\bar{\psi} \rangle \neq 0$  и в появлении у псевдоскалярной  $\Sigma$ -частицы ненулевой массы (решение  $U(1)$ -проблемы).

Существенной чертой модели является возможность альтернативного рассмотрения  $\Sigma$ -частицы как кварк-антикваркового состояния, так и псевдоскалярного «глюония».

Такое рассмотрение основывается на операторных тождествах, устанавливающих в пределе низких энергий прямую пропорциональность между псевдоскалярными токами и полем физической частицы  $\Sigma$ .

Смысл этих приближенных операторных тождеств демонстрируется на примере вычисления двухточечной функции Грина от псевдоскалярного тока, составленного из кварковых полей.

Показывается, что в пределе больших расстояний точная функция Грина хорошо аппроксимируется пропагатором поля  $\Sigma$ , а в спектральной плотности эта частица проявляется как бесконечно узкий резонанс.

В четвертой части получено асимптотическое поведение функций Грина в пределе малых расстояний. Имея точное операторное решение модели и тем самым операторное представление всевозможных произведений через свободные поля, мы проанализировали различные виды операторного разложения в данной модели. Коэффициентные функции, вообще говоря, неаналитически зависят от  $e^2$ . Перепределением операторов неаналитичности убираются, и в одном из базисов, в главном логарифмическом приближении, имеется соответствие точного операторного разложения с теоретико-возмущенческим разложением Вильсона. Совпадение этих разложений возможно лишь при знании связи между ультрафиолетовой точкой вычитания для операторов с инфракрасной точкой вычитания для коэффициентных функций.

В связи с широким использованием конечно-энергетических правил сумм [14, 21, 22, 29] в КХД в настоящем обзоре проанализирована точность их выполнения в модели Швингера.

Так как резонанс в исследуемой модели формируется в области сильной связи, где эффективная константа  $\alpha_s \sim 1$ , естественно, что правила сумм в импульсном пространстве выполняются плохо.

Оказалось, что в  $x$ -пространстве резонанс лежит в области асимптотической свободы ( $\alpha_s \sim 1/4$ ), поэтому использование правил

сумм в  $x$ -пространстве позволило вычислить параметры резонанса с достаточной точностью.

Преимущество правил сумм в  $x$ -пространстве заключается также в том, что они позволяют учесть вклады от контактных членов.

### 1. ОПЕРАТОРНОЕ РЕШЕНИЕ МОДЕЛИ ШВИНГЕРА

Лагранжиан модели Швингера имеет вид [16]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\psi}\gamma_{\mu}(\partial_{\mu} - ieA_{\mu})\psi, \quad (1)$$

где  $A_{\mu}$ ,  $\psi$  — электромагнитное и фермионное поля;  $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$ ,  $\mu = 0, 1$ , а двумерные  $\gamma$ -матрицы выбраны в виде

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Уравнения движения, следующие из лагранжиана (1), имеют вид

$$\partial_{\mu}F_{\mu\nu} = -eJ_{\nu}; \quad (2)$$

$$i\gamma_{\mu}(\partial_{\mu} - ieA_{\mu})\psi = 0. \quad (3)$$

Ток  $J_{\mu}$  определяется калибровочно-инвариантным образом [16]:

$$\left. \begin{aligned} J_{\mu}(x) &= \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon^2 \neq 0} \{J_{\mu}(x|\varepsilon) + J_{\mu}(x|-\varepsilon)\}; \\ J_{\mu}(x|\varepsilon) &= \bar{\psi}(x)\gamma_{\mu} \exp\left\{-ie \int_x^{x+\varepsilon} A_{\nu} d\xi^{\nu}\right\} \psi(x+\varepsilon). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

В работе используется поперечная калибровка

$$\partial_{\mu}A_{\mu} = 0. \quad (5)$$

В этой калибровке на поля  $\psi$  и  $A$  наложены одновременные коммутационные соотношения

$$\{\psi_i(x^1, t), \psi_j^{\dagger}(y^1, t)\} = \delta_{ij}\delta(x^1 - y^1), \quad i, j = 1, 2;$$

$$[\partial_0 A_1(x^1, t), A_1(y^1, t)] = -i\delta(x^1 - y^1);$$

$$[\partial_0 A_0(x^1, t), \partial_0 A_1(y^1, t)] = i\frac{\partial}{\partial x^1} \delta(x^1 - y^1),$$

остальные коммутаторы равны нулю.

Операторное решение модели Швингера в поперечной калибровке имеет вид [2]

$$\left. \begin{aligned} A_{\mu}(x) &= \frac{\sqrt{\pi}}{e} \varepsilon_{\mu\nu} \partial^{\nu} (\Sigma(x) + \eta(x)); \\ \psi(x) &= K: \exp\{-i\sqrt{\pi}\gamma_5(\Sigma(x) + \eta(x))\}: \psi_0(x), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где  $\Sigma$  — свободное псевдоскалярное поле с массой  $m = e/\sqrt{\pi}$ ;  $\eta$  — свободное безмассовое поле, квантуемое с отрицательной метрикой, т. е.

$$[\partial_0 \eta(x^1, t), \eta(y^1, t)] = +i\delta(x^1 - y^1);$$

$\psi_0$  — свободное безмассовое фермионное поле (свободные скалярные и фермионные поля в двумерном пространстве-времени подробно описаны в работах [23]). Отрицательно-частотная часть перестановочной функции поля  $\eta$  равна

$$D^- = -\frac{i}{4\pi} \ln(-\mu^2 x^2 + i\epsilon x_0),$$

где  $\mu$  — произвольный параметр размерности массы [23]. Коэффициент  $K$  в (6) выражается через этот параметр следующим образом:

$$K = (e\gamma/2\mu\sqrt{\pi})^{1/4},$$

где  $\gamma$  — постоянная Эйлера ( $\gamma \approx 1,781$ ).

Подстановка (6) удовлетворяет условию (5) и уравнение (3) тождественно, а уравнение (2) сводится к операторному уравнению

$$L_\mu = 0, \tag{7}$$

где

$$L_\mu = j_\mu + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \eta, \tag{8}$$

а  $j_\mu = : \bar{\psi}_0(x) \gamma_\mu \psi_0(x) :$  — ток свободных фермионов, удовлетворяющий уравнению  $\square j_\mu = 0$ .

Поскольку исходные операторы  $A_\mu$  и  $\psi(x)$  выражаются соотношением (6) через свободные операторы  $\Sigma$ ,  $\eta$ ,  $\psi_0$ , то в нашем распоряжении имеется гильбертово пространство состояний

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Sigma) \otimes \mathcal{H}(\eta) \otimes \mathcal{H}(\psi_0).$$

Поскольку во всем этом пространстве поля  $\eta$  и  $\psi_0$  являются независимыми, то соотношение (7) в  $\mathcal{H}$  не выполнено, однако должно существовать подпространство  $\mathcal{H}_{ph} \subset \mathcal{H}$ , где условие (7) выполняется тождественно. Именно в этом подпространстве подстановка (6) является решением уравнений движения (2), (3). Что можно сразу сказать о пространстве  $\mathcal{H}_{ph}$ ?

Исходный лагранжиан (1) является инвариантным относительно глобальных преобразований вида

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \psi(x); \tag{9}$$

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha' \gamma_5} \psi(x). \tag{10}$$

Группе преобразований (9) соответствует локально сохраняющийся ток  $J_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$ , а группе киральных преобразований (10) соответствует ток  $J_\mu^5 = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi$ . Отметим, что эти токи связаны

соотношением

$$J_{\mu}^5 = \varepsilon_{\mu\nu} J^{\nu}. \quad (11)$$

Току  $J_{\mu}$  соответствует сохраняющийся электрический заряд  $Q = - \int J_0 dx^1$ , который мы в дальнейшем (по аналогии с КХД) будем называть цветом, а току  $J_{\mu}^5$  соответствует сохраняющийся на классическом уровне киральный заряд  $Q^5 = \int J_0^5 dx^1$ .

Вычисление  $J_{\mu}$  согласно (4) приводит [2,24] к выражению

$$J_{\mu} = j_{\mu} + \frac{e}{\pi} A_{\mu} \quad (12)$$

или

$$J_{\mu} = L_{\mu} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varepsilon_{\mu\nu} \partial^{\nu} \Sigma,$$

откуда видно, что  $J_{\mu}$  сохраняется на квантовом уровне  $\partial_{\mu} J_{\mu} = 0$ , причем в физическом пространстве  $\mathcal{H}_{\text{ph}}$ , которое определяется условием  $L_{\mu} = 0$ , этот оператор имеет вид

$$J_{\mu} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varepsilon_{\mu\nu} \partial^{\nu} \Sigma. \quad (13)$$

Из верхнего равенства следует, что оператор цвета в  $\mathcal{H}_{\text{ph}}$  есть нулевой оператор

$$Q = - \int J_0 dx^1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \partial_1 \Sigma dx^1 = 0. \quad (14)$$

Интеграл равен нулю, так как поле  $\Sigma(x)$  массивно и поэтому убывает на больших расстояниях.

Тождество (14) можно получить, не используя явного вида (13) оператора тока. Интегрируя уравнение Максвелла (2) по  $x^1$ , получаем

$$eQ = \int \partial_1 F^{10} dx^1 = F^{10}(\infty) - F^{10}(-\infty).$$

Это равенство представляет собой теорему Гаусса применительно к двумерному пространству.

Если предположить, что калибровочные поля тем или иным образом приобрели массу, то из этой теоремы немедленно следует

$$eQ \equiv 0^*.$$

Суть полученного результата в том, что  $\mathcal{H}_{\text{ph}}$  является пространством бесцветных состояний и в физической области рассматриваемая модель обладает свойством конфайнмента.

Физическая сторона результата также понятна — экспоненциально падающее на больших расстояниях электрическое поле может создать только в целом нейтральная система зарядов.

\* Возможно, что этот результат справедлив и для четырехмерных теорий.

Используя формулу (11), получаем следующее выражение для аксиального тока:

$$J_{\mu}^5 = \varepsilon_{\mu\nu} L^{\nu}(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_{\mu} \Sigma.$$

Таким образом, на квантовом уровне этот ток не сохраняется:

$$\partial_{\mu} J_{\mu}^5 = -\frac{m^2}{\sqrt{\pi}} \Sigma(x), \quad (15)$$

что является проявлением аномалии Адлера — Белла — Джаквива в данной модели.

Таким образом, группа (10) является группой симметрии лагранжиана, однако квантовая система не обладает этой симметрией и поэтому  $Q_5$  не является сохраняющимся квантовым числом.

Перейдем теперь к построению физического пространства состояний.

Операторное уравнение (7) следует понимать в смысле равенства нулю в физическом пространстве всех матричных элементов оператора  $L_{\mu}$ , т. е.  $\langle \Phi | L_{\mu} | \Phi' \rangle = 0$  для любых состояний  $|\Phi\rangle$  и  $|\Phi'\rangle$  из физического пространства  $\mathcal{H}_{\text{ph}}$ .

Таким образом, в пространстве  $\mathcal{H}$  это уравнение есть уравнение связи, которое накладывает определенные ограничения на векторы состояний.

Их следует наложить в форме

$$L_{\mu}^{-} | \Phi \rangle = 0. \quad (16)$$

Здесь  $L_{\mu}^{-}$  — отрицательно-частотная часть оператора  $L_{\mu}$ .

Для всех векторов  $|\Phi\rangle$ , удовлетворяющих условию (16), гарантируется выполнение уравнения (7):

$$\langle \Phi | L_{\mu} | \Phi' \rangle \equiv 0. \quad (17)$$

Определим вакуум в пространстве  $\mathcal{H}$  по формуле

$$\Sigma^{-} | 0 \rangle = \eta^{-} | 0 \rangle = \psi_0^{-} | 0 \rangle = 0.$$

Тогда  $|0\rangle$  есть одно из решений уравнения (16). Остальные векторы  $|\Phi\rangle$  могут быть получены из  $|0\rangle$  действием на него таких операторов  $\hat{O}$ , которые не выводят  $|0\rangle$  из физического пространства. Для этого необходимо, чтобы они коммутировали с  $L_{\mu}^{\pm}$ :

$$[\hat{O}, L_{\mu}^{\pm}] = 0. \quad (18)$$

Можно показать, что эти операторы строятся из операторов  $\Sigma(x)$ ,  $\sigma(x)$ ,  $Q_F$ ,  $\tilde{Q}_F$ .

Здесь

$$O_F = - \int j_0 dx^1; \quad \tilde{Q}_F = \int j_1 dx^1 \quad (19)$$

суть операторы «фермионного» числа и «киральности» свободных фермионов соответственно (см. приложение), а  $\sigma(x)$  определен как [3]

$$\sigma_{\pm}(x) = \left(\frac{2\pi}{\mu}\right)^{1/2} \left(\frac{1 \pm \gamma_5}{2}\right) : \exp \left\{ -i\sqrt{\pi} \bar{\psi} \gamma_5 \psi(x) - i\sqrt{\pi} \tilde{\eta}(x) \right\} : \psi_0(x) \exp \left\{ i\frac{\pi}{2} \tilde{Q}_F \right\}. \quad (20)$$

Непосредственным вычислением можно проверить [3] следующие свойства этих операторов:

$$\left. \begin{aligned} [\sigma_{\pm}(x), \sigma_{\pm}(y)] &= [\sigma_{\pm}(x), \sigma_{\mp}(y)] = 0; \\ [\sigma_{\pm}(x), \sigma_{\pm}^{\pm}(y)] &= [\sigma_{\pm}(x), \sigma_{\mp}^{\pm}(y)] = 0; \\ \sigma_{\pm}(x) \sigma_{\pm}^{\pm}(x) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Коммутационные соотношения унитарных операторов  $\sigma_{\pm}$  с операторами зарядов имеют вид

$$[\sigma_{\pm} Q_F] = -\sigma_{\pm}, [\sigma_{\pm} \tilde{Q}_F] = \mp \sigma_{\pm}. \quad (22)$$

Кроме того,  $\sigma_{\pm}(x)$  в физическом пространстве коммутирует с генераторами трансляций и является поэтому постоянным унитарным оператором.

Действительно, определяя  $P_{\mu}$  по формуле

$$P_{\mu} = \int T_{\mu 0}(x) dx^1, \\ T_{\mu\nu}(x) = T_{\mu\nu}(\Sigma) + T_{\mu\nu}(\Psi_0) - T_{\mu\nu}(\eta),$$

получаем

$$[P_{\mu} \sigma_{\pm}(x)] = -\pi (L_{\mu}(x) \pm \epsilon_{\mu\nu} L^{\nu}(x)) \sigma_{\pm}(x). \quad (23)$$

Из условия  $L_{\mu} = 0$  следует, что  $\sigma_{\pm}$  не зависит от  $x$ .

Поскольку поле  $\Sigma$  коммутирует с  $\sigma_{\pm}$ ,  $Q_F$ ,  $\tilde{Q}_F$ , то физическое пространство есть произведение фоковского пространства поля  $\Sigma$  и пространства операторов  $\sigma_{\pm}$ ,  $Q_F$ ,  $\tilde{Q}_F$  с коммутационными соотношениями (21), (22):

$$\mathcal{H}_{\text{ph}} = \mathcal{H}(\Sigma) \otimes \mathcal{H}(\sigma, Q_F, \tilde{Q}_F). \quad (24)$$

Так как гамильтониан коммутирует с  $Q_F$ ,  $\tilde{Q}_F$ , то у этих операторов и гамильтониана существует общий набор собственных векторов. Один из этих векторов есть  $|0\rangle$ :

$$Q_F |0\rangle = \tilde{Q}_F |0\rangle = 0. \quad (25)$$

Из коммутационных соотношений (22) следует, что операторы  $\sigma_{\pm}$  изменяют фермионное и киральное числа ( $Q_F$  и  $\tilde{Q}_F$ ) на  $\pm 1$ . Таким



образом, базис в пространстве  $\mathcal{H}(\sigma, Q_F, \tilde{Q}_F)$  имеет вид

$$|n^+, n^-\rangle = (\sigma_+)^{n^+} (\sigma_-)^{n^-} |0\rangle. \quad (26)$$

Здесь  $n^\pm$  — любые целые числа.

Векторы  $|n^+, n^-\rangle$  имеют определенное фермионное число и киральность:

$$\left. \begin{aligned} Q_F |n^+, n^-\rangle &= (n^+ + n^-) |n^+, n^-\rangle; \\ \tilde{Q}_F |n^+, n^-\rangle &= (n^+ - n^-) |n^+, n^-\rangle. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Поскольку состояние  $|0, 0\rangle$  имеет нулевую энергию, а операторы  $\sigma_\pm$  коммутируют с гамильтонианом, то все векторы  $|n^+, n^-\rangle$  (26) имеют нулевую энергию. Таким образом, основное состояние системы вырождено относительно фермионного числа и киральности.

В качестве основного состояния можно выбрать любую линейную суперпозицию состояний  $|n^+, n^-\rangle$ .

В частности, ее можно выбрать так, чтобы одновременно диагонализировать гамильтониан и операторы  $\sigma_\pm$ . Это возможно, поскольку гамильтониан коммутирует с  $\sigma_\pm$ .

Так как операторы  $\sigma_\pm$  унитарные, то уравнение на собственные значения имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_\pm |\theta_+, \theta_-\rangle &= \exp(-i\theta_\pm) |\theta_+, \theta_-\rangle, \\ 0 &\leq \theta_\pm < 2\pi. \end{aligned} \quad (28)$$

Решением этого уравнения является вектор

$$|\theta_+, \theta_-\rangle = \sum_{n^+, n^-} \exp\{in^+\theta_+ + in^-\theta_-\} |n^+, n^-\rangle \quad (29)$$

— так называемый  $\theta$ -вакуум.

Из соотношений (22) следует, что различные  $\theta$ -вакуумы связаны между собой унитарными операторами

$$U_F(\alpha) = \exp(i\alpha Q_F); \quad \tilde{U}_F(\alpha') = \exp(i\alpha' \tilde{Q}_F) \quad (30)$$

по формуле

$$|Q_+ + \alpha + \alpha', \theta_- + \alpha - \alpha'\rangle = U_F(\alpha) \tilde{U}_F(\alpha') |\theta_+, \theta_-\rangle. \quad (31)$$

Отсюда следует, что все  $\theta$ -вакуумы эквивалентны, т. е. с помощью унитарных операторов могут быть получены из одного вакуума например из  $|\theta_+, \theta_-\rangle|_{\theta_\pm=0}$ .

Поскольку переходы между различными  $\theta$ -вакуумами отсутствуют, то в качестве вакуума системы можно выбрать один из них с фиксированным значением параметров  $\theta_\pm$ .

Существование унитарных операторов (30) связано с симметрией лагранжиана (1) относительно фазовых преобразований вида

$$\psi(x) \rightarrow \exp(i\alpha) \psi(x), \quad \psi(x) \rightarrow \exp(i\alpha' \gamma_5) \psi(x). \quad (32)$$

Действительно, в пространстве  $\mathcal{H}$  операторы (30) как раз и осуществляют эти преобразования:

$$U_F \psi(x) U_F^\dagger = \exp(i\alpha) \psi(x);$$

$$\tilde{U}_F \psi(x) \tilde{U}_F^\dagger = \exp(i\alpha' \gamma_5) \psi(x).$$

Отметим, что вакуум (29) не инвариантен относительно этих преобразований. Действительно, из (31) следует, что вакуум меняется при этих преобразованиях. Это вызвано тем, что вакуум не имеет определенных  $Q_F$  и  $\tilde{Q}_F$  чисел:

$$Q_F | \theta_+, \theta_- \rangle \neq c_1 | \theta_+, \theta_- \rangle;$$

$$\tilde{Q}_F | \theta_+, \theta_- \rangle \neq c_2 | \theta_+, \theta_- \rangle. \quad (33)$$

Таким образом, выбор физического вакуума с заданным значением  $\theta_\pm$  приводит к нарушению инвариантности относительно преобразований (32).

Нарушение симметрии проявляется в том, что вакуумное среднее от неинвариантного относительно фазовых преобразований оператора  $\sigma_\pm$

$$U_F \sigma_\pm U_F^\dagger = \exp(i\alpha) \sigma_\pm; \quad \tilde{U}_F \sigma_\pm \tilde{U}_F^\dagger = \exp(\pm i\alpha') \sigma_\pm$$

отлично от нуля:

$$\langle \theta_+, \theta_- | \sigma_\pm | \theta_+, \theta_- \rangle = \exp(-i\theta_\pm). \quad (34)$$

В третьей части будет показано, что нарушение симметрии ответственно также за появление кваркового конденсата  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$ .

Таким образом, симметрия (32) нарушена, однако голдстоуновские частицы, соответствующие нарушению (33) этой инвариантности, в физическом спектре отсутствуют. Это связано с тем, что условия теоремы Голдстоуна в данном случае не выполнены. Действительно, для выполнения теоремы нужно, чтобы преобразованиям (32) соответствовали сохраняющиеся токи. Эти токи суть  $j_\mu$  и  $j_\mu^5$  — токи свободных фермионов, но они не коммутируют с  $L_\mu$  и поэтому не принадлежат физическому пространству. Именно в этом пункте условия теоремы Голдстоуна не выполнены. Отметим, что вместо токов  $j_\mu$  и  $j_\mu^5$  нельзя брать токи  $J_\mu$  и  $J_\mu^5$ , которые соответствуют преобразованиям (32) по теореме Нетр, поскольку ток  $J_\mu^5$  не сохраняется, а цветная симметрия, генерируемая током  $J_\mu$ , не нарушена (в физическом секторе  $Q = 0$ ).

## 2. КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В этой части мы прослеживаем связь между уравнением связи  $L_\mu = 0$  и требованием калибровочной инвариантности теории.

Рассмотрим оператор калибровочного преобразования [4, 3]

$$U[\alpha_\pm] = \exp\left\{-i \int dx^1 \alpha_\pm(x) [L^0(x) \pm L_1(x)]\right\}, \quad (35)$$

зависящий от произвольных функций  $\alpha_{\pm}(x^{\pm})$ , удовлетворяющих уравнению  $\square \alpha_{\pm} = 0$ .

Из представления (6), (8) следует, что  $A_{\mu}$  и  $\psi$  преобразуется под действием  $U$  как

$$\left. \begin{aligned} U\psi(x)U^+ &= \exp(i\alpha_{\pm}(x))\psi(x); \\ UA_{\mu}(x)U^+ &= A_{\mu}(x) + \frac{1}{e}\partial_{\mu}\alpha_{\pm}(x). \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Эти преобразования оставляют инвариантным условие Лоренца (5).

С помощью оператора  $U[\alpha_{\pm}]$  условие (18) можно переписать в виде

$$U\hat{\partial}U^+ = \hat{\partial}. \quad (37)$$

Это означает инвариантность физических операторов относительно калибровочных преобразований, а уравнение (16) обеспечивает инвариантность физических векторов состояний относительно этих преобразований.

При получении равенства  $Q = 0$  (14) мы существенно использовали уравнение связи  $L_{\mu} = 0$ , которое гарантирует калибровочную инвариантность теории. Поэтому в данной модели локальная инвариантность операторов и векторов состояний тесно связана с явлением конфайнмента.

Все калибровочные преобразования с калибровочной функцией  $\alpha(x)$ , удовлетворяющей уравнению  $\square\alpha = 0$ , поддаются классификации в зависимости от поведения функции  $\alpha(x)$  на бесконечности.

Функции  $\alpha(x)$  можно разбить на классы, каждый из которых характеризуется двумя числами [3]:

$$n_{\pm}[\alpha] = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx^1 [\partial_0\alpha \mp \partial_1\alpha]. \quad (38)$$

Смысл этих чисел можно прояснить, заметив, что функция  $\alpha(x)$  всегда может быть представлена в виде

$$\alpha(x) = \alpha_-(x_-) + \alpha_+(x_+).$$

Тогда  $n_{\pm}(\alpha)$  определяется асимптотикой этой функции на бесконечности

$$n_{\pm}(\alpha) = -\frac{1}{\pi} [\alpha_{\mp}(\infty) - \alpha_{\mp}(-\infty)].$$

Из калибровочной инвариантности тока  $J_{\mu}(x)$  (12) следует, что при калибровочных преобразованиях ток  $j_{\mu}$  имеет следующий закон преобразования:

$$Uj_{\mu}U^+ = j_{\mu} - \frac{1}{\pi}\partial_{\mu}\alpha,$$

откуда

$$UQ_{\pm}U^+ = Q_{\pm} - n_{\pm}(\alpha), \quad (39)$$

где  $Q_{\pm} = \frac{1}{2}(Q_F \pm \tilde{Q}_F)$ .

Из целочисленности спектра операторов  $Q_{\pm}$  и соотношения (39) следует, что  $n_{\pm}(\alpha)$  — целые числа.

Таким образом, на квантовом уровне существуют только такие операторы  $U(\alpha)$ , для которых  $n_{\pm}(\alpha)$  — целые числа.

Из (39) видно также, что операторы  $U$  несут заряд  $Q_{\pm}$ , равный  $n_{\pm}(\alpha)$ .

Оператор  $U(\alpha)$  (35) несет нулевое топологическое число  $n_{\pm} = 0$ , поскольку он определен только для  $\alpha(x)$ , убывающих на бесконечности.

Действительно, вычисляя коммутатор

$$\left[ \int dx^1 \alpha_{\pm}(x) (L^0 + L_1), \eta^{\pm}(y) \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx^1 \alpha_{\pm}(x)}{x_+ - y_+ - i\epsilon}, \quad (40)$$

убеждаемся, что он определен только, если  $\alpha_+(x_+) \rightarrow 0$  при  $x_+ \rightarrow \infty$ . Выясним смысл унитарных (в одной точке) операторов  $\sigma(x)$  (20) в пространстве  $\mathcal{H}$ .

Действие этих операторов на поля  $A_{\mu}$ ,  $\psi$  выражается [3] формулами

$$\sigma_{\pm}(y) A_{\mu}(x) \sigma_{\pm}^{\dagger}(y) = A_{\mu}(x) + \frac{1}{e} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} F_{\pm}(x|y),$$

$$\sigma_{\pm}(y) \psi(x) \sigma_{\pm}^{\dagger}(y) = \exp \{ i F_{\pm}(x|y) \} \psi(x), \quad \text{где } F_{\pm}(x|y) = \\ = -\pi \theta(x_{\mp} - y_{\mp}).$$

Таким образом, унитарные операторы  $\sigma_{\pm}(y)$  являются операторами сингулярных калибровочных преобразований с калибровочными функциями  $\alpha(x) = F_{\pm}$ .

Калибровочные функции  $F_{\pm}$ , вообще говоря, не убывают на бесконечности и поэтому имеют ненулевые топологические числа

$$n_+ [F_+] = 1, \quad n_- [F_+] = 0, \quad n_+ [F_-] = 0, \quad n_- [F_-] = 1.$$

Отметим, что  $\theta$ -вакуум есть собственное состояние операторов  $\sigma_{\pm}$  в физическом пространстве, это гарантирует стабильность  $\theta$ -вакуума относительно таких калибровочных преобразований.

Поскольку  $\sigma$  коммутирует с  $L_{\mu}$ , то физические векторы (16) будут инвариантны относительно всех возможных калибровочных преобразований. Физические операторы  $\Sigma$ ,  $\sigma$ ,  $Q_F$ ,  $\tilde{Q}_F$  коммутируют с  $L_{\mu}$  по построению и поэтому являются инвариантными относительно топологически тривиальных калибровочных преобразований. Что касается топологически нетривиальных калибровочных преобразований, то операторы  $\sigma$ ,  $\Sigma$  инвариантны, а операторы  $Q_F, \tilde{Q}_F$

приобретают целочисленные с числовые добавки (39) и поэтому не являются инвариантными.

Поскольку  $Q_F$  и  $\tilde{Q}_F$  связывают (31) различные  $\theta$ -вакуумы, то, зафиксировав параметры  $\theta_{\pm}$ , мы по существу исключаем эти операторы из рассмотрения.

### 3. «НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ» СООТНОШЕНИЯ

Из содержания предыдущих параграфов следует, что модель Швингера, будучи калибровочной моделью квантовой теории поля, сформулированной на языке калибровочных  $A_{\mu}$ - и кварковых  $\psi$ -полей, оказывается, в конце концов, эквивалентной квантовой теории свободного, массивного, псевдоскалярного поля  $\Sigma$ .

Фоковское пространство этого поля является пространством бесцветных состояний, что означает, что модель обладает свойством конфайнмента, которое выражается операторным тождеством

$$Q = 0, \quad (41)$$

где  $Q$  — оператор цвета.

Подчеркнем еще раз, что отсутствие заряженных состояний в физическом спектре тесно связано с восстановлением локальной калибровочной инвариантности векторов состояний. Эта инвариантность следует непосредственно из уравнений движения в форме  $L_{\mu} = 0$ , где  $L_{\mu}$  — генераторы остаточных калибровочных преобразований. Из этого уравнения следует, что физический смысл имеют только те операторы, которые коммутируют с  $L_{\mu}$ , т. е. калибровочно-инвариантные операторы. Поэтому, в частности, становится бессмысленным рассматривать оператор кваркового поля  $\psi(x)$  в физическом пространстве. Кроме того, из условия  $L_{\mu} = 0$  следует выражение (13) для оператора тока цветового заряда:

$$J_{\mu}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \epsilon_{\mu\nu} \partial^{\nu} \Sigma, \quad (42)$$

откуда непосредственно следует (41).

Оператор плотности цветового заряда отличен от нуля, однако плотность заряда в  $\Sigma$ -бозоне есть тождественный нуль:

$$\langle \Sigma | J_{\mu}(x) | \Sigma \rangle = 0.$$

Остановимся теперь вкратце на физическом смысле  $\Sigma$ -бозона. Свойства  $\Sigma$ -бозона тесно связаны с киральными свойствами модели. Исходный лагранжиан модели является инвариантным относительно киральных преобразований вида

$$\psi \rightarrow \exp(-i\alpha\gamma_5) \psi. \quad (43)$$

Оператор кирального тока в физическом пространстве имеет вид

$$J_{\mu}^5 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_{\mu} \Sigma \quad (44)$$

и соответственно оператор кирального заряда

$$Q_5(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \partial_0 \Sigma(x^1, t) dx^1. \quad (45)$$

Одновременной коммутатор этого заряда с полем  $\Sigma$

$$[Q_5(t) \Sigma(x^1, t)] = \frac{1}{i\sqrt{\pi}}. \quad (46)$$

Отсюда следует, что оператор

$$U_5(t) = \exp(i\alpha Q_5(t)) \quad (47)$$

осуществляет сдвиг  $\Sigma$  на постоянную величину

$$U_5(t) \Sigma(x^1, t) U_5^\dagger(t) = \Sigma(x^1, t) + \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}. \quad (48)$$

В расширенном пространстве  $\mathcal{H}$  оператор  $U_5(t)$  осуществляет  $\gamma_5$ -поворот кварковых полей

$$U_5(t) \psi(x^1, t) U_5^\dagger(t) = \exp(-i\alpha \gamma_5) \psi(x^1, t). \quad (49)$$

Это следует непосредственно из операторного решения (6) и вида оператора  $Q_5(t)$  в расширенном пространстве (11), (12). Поскольку заряд  $Q_5$  зависит от времени, то гамильтониан и  $Q_5$  не коммутируют, поэтому у них нет общей системы собственных векторов.

Из этого следует, что вакуум и  $\Sigma$ -бозон не имеют определенного  $Q_5$ -числа. Например,

$$Q_5(t) |\text{vac}\rangle = i\sqrt{m} \exp(imt) a_0^\dagger |\text{vac}\rangle, \quad (50)$$

где  $a_0^\dagger$  — оператор рождения  $\Sigma$ -бозона с нулевым импульсом.

Кроме того, симметрия относительно сдвигов поля  $\Sigma$  (48) явно нарушена, так как это поле массивно, а массовый член в лагранжиане нарушает симметрию (48).

Появление ненулевой массы у  $\Sigma$ -бозона означает решение  $U(1)$ -проблемы в данной модели.

Отметим, что оператор  $\tilde{U}_F$  (30) также выполняет преобразование (49), однако поле  $\Sigma$  при этом не меняется.

В первой части мы убедились, что симметрия, генерируемая оператором  $\tilde{U}_F$ , нарушена спонтанным образом.

Перейдем теперь к обсуждению вопроса о возможности рассмотрения  $\Sigma$ -бозона как связанного состояния кварка и антикварка.

Из операторного решения (6) можно получить представление для токов, составленных из кварковых полей, через оператор  $\Sigma(x)$  [20]:

$$\left. \begin{aligned} J(x) &= \bar{\psi}(x) \psi(x) = -A: \cos(\Sigma/f_\Sigma + \theta); \\ J_5(x) &= -i \bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x) = A: \sin(\Sigma/f_\Sigma + \theta). \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Здесь введены новые обозначения:

$$A = \gamma m / 2\pi; \quad f_\Sigma = 1/2\sqrt{\pi}; \quad \theta = \pi + \theta_- - \theta_+; \quad (52)$$

$\theta_\pm$  — произвольно фиксированные числа.

Из (51) следует, что вакуумные средние от операторов  $J$  и  $J_5$  отличны от нуля:

$$\left. \begin{aligned} \langle \theta_+, \theta_- | J | \theta_+, \theta_- \rangle &= -A \cos \theta; \\ \langle \theta_+, \theta_- | J_5 | \theta_+, \theta_- \rangle &= A \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (52a)$$

Сумма квадратов этих величин не зависит от параметра  $\theta$ :

$$\langle \theta | J | \theta \rangle^2 + \langle \theta | J_5 | \theta \rangle^2 = A^2. \quad (53)$$

Это соотношение отражает существование окружности равноправных вакуумов, свойства которых подробно были рассмотрены в разд. 1.

Переопределением фермионных полей  $\psi(x)$  при помощи  $\gamma$ -поворота от параметра  $\theta$  можно избавиться.

Для операторов  $J$  и  $J_5$  такой поворот формально сведется к добавлению к  $\Sigma$  в формуле (51) постоянной величины

$$\Sigma/f_\Sigma \rightarrow \Sigma/f_\Sigma - 2\alpha. \quad (54)$$

Выбором  $\alpha = -\theta/2$  всегда можно сделать нулевым эффективный угол  $\theta$ . В этом случае

$$\langle J \rangle = -A; \quad \langle J_5 \rangle = 0. \quad (55)$$

Такой выбор соответствует ненулевой величине кваркового конденсата  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  и нулевой величине  $\langle \bar{\psi}\gamma_5\psi \rangle$ .

Таким образом, выбор основного состояния с фиксированным значением параметра  $\theta$  приводит к существованию кваркового конденсата.

Рассмотрим теперь формулу (51) при  $\theta = 0$  в пределе больших расстояний, где поле  $\Sigma(x)$  является экспоненциально малым. Разлагая (51) в ряд по  $\Sigma$ , получаем

$$\left. \begin{aligned} J(x) &\approx \langle J \rangle = \Psi(0) f_\Sigma; \\ J_5(x) &\simeq \Psi(0) \Sigma(x). \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Здесь введено обозначение  $\Psi(0) = -A/f_\Sigma$ , причем из (56) следует, что  $\Psi(0)$  может быть представлена в виде

$$\Psi(0) = \langle \text{vac} | J_5(0) | \Sigma \rangle. \quad (57)$$

Из соотношений (56), (57) видно, что  $\Sigma$ -бозон может рассматриваться как кварк-антикварковое состояние с волновой функцией в нуле, равной  $\Psi(0)$ .

Из (44) вытекает тождество, устанавливающее прямую пропорциональность между дивергенцией аксиального тока и поля  $\Sigma$ :

$$\partial_\mu J_\mu^5 = -2f_\Sigma m^2 \Sigma(x). \quad (58)$$

Это соотношение по форме напоминает тождество частичного сохранения аксиального тока [25], которое появляется в теории сильных взаимодействий на уровне гипотезы.

$\Sigma$ -бозон можно рассматривать и как «глюоний». Действительно, из операторного решения имеем тождество

$$\frac{e}{4\pi} \epsilon_{\mu\nu} F^{\mu\nu}(x) = -f_{\Sigma} m^2 \Sigma(x), \quad (59)$$

откуда

$$\langle \text{vac} | -\frac{e}{4\pi} \epsilon_{\mu\nu} F^{\mu\nu} | \Sigma \rangle = f_{\Sigma} m^2, \quad (60)$$

что равно вычету  $\Sigma$ -бозона в канале псевдоскалярного глюония.

Поясним смысл разложения операторов на больших расстояниях. Возьмем для примера разложение (56). Оно означает, что если вычислить функцию Грина двух токов

$$\Pi(x) = \langle \text{vac} | T(J_5(x) J_5(0)) | \text{vac} \rangle, \quad (61)$$

то при  $x \rightarrow \infty$  хорошим приближением для  $\Pi(x)$  будет [см. (56)]

$$\begin{aligned} \Pi(x) &\approx |\psi(0)|^2 \langle \text{vac} | T(\Sigma(x) \Sigma(0)) | \text{vac} \rangle = \\ &= |\psi(0)|^2 \frac{1}{i} \Delta(x, m^2), \end{aligned} \quad (62)$$

где  $\Delta(x, m^2)$ -функция Грина массивного поля:

$$\Delta(x, m^2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{\exp(ipx) d^2p}{m^2 - p^2 - i\epsilon} = \frac{i}{2\pi} K_0(m \sqrt{-x^2 + i\epsilon}), \quad (63)$$

а  $K_0$  — функция Макдональда.

Для двухточечной функции  $\Pi(x)$  справедливо представление Челлена — Лемана

$$\Pi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \rho(s) \Delta(x, s) ds, \quad (64)$$

где  $\rho(s)$  — функция спектральной плотности. Разложение (62) означает, что в пределе низких энергий  $\rho(s)$  хорошо аппроксимируется дельта-функцией:

$$\rho(s) \approx F \delta(s - m^2), \quad (65)$$

причем  $F$  связано с  $\Psi(0)$  (6) формулой

$$F = 2\pi |\Psi(0)|^2 = 2\gamma^2 m^2. \quad (66)$$

Покажем, что в пределе больших расстояний точная функция  $\Pi(x)$  хорошо описывается формулой (62), а точная  $\rho(s)$  может быть аппроксимирована резонансом (65).

Используя представление (51), легко получить точное выражение для  $\Pi(x)$ :

$$\Pi(x) = A^2 \text{sh}(-4\pi i \Delta(x, m^2)). \quad (67)$$

Функция  $\rho(s)$ , удовлетворяющая (64), (67), оказывается равной [26, 27]

$$\rho(s) = F \delta(s - m^2) + \sum_{k=1}^{\infty} F \frac{2^{2k}}{(2k+1)!} \Omega_{2k+1}(s). \quad (68)$$



Здесь  $\Omega_n(s)$  есть  $n$ -частичный фазовый объем, определяемый формулой

$$\Omega_n(q^2) = \int \frac{dp_1^1 \dots dp_n^1}{2p_1^0 \dots 2p_n^0} \delta(p_1 + \dots + p_n - q), \quad (69)$$

$$p_i^1 = \sqrt{m^2 + (p_i^0)^2}.$$

Из (68) видно, что в псевдоскалярном канале имеется резонанс с массой  $m$  и константой связи  $F$ , это находится в полном согласии с формулой (65). А из (67) видно, что при  $x \gg 1/m$   $\Pi(x)$  действительно хорошо аппроксимируется формулой (62).

#### 4. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ ГРИНА НА МАЛЫХ РАССТОЯНИЯХ

Формула (68) дает общее представление для спектральной функции через фазовые объемы  $\Omega_n(s)$ . Однако в общем случае  $\Omega_n$  вычислить не удастся. Тем не менее можно вычислить асимптотику  $\rho(s)$  при  $s \rightarrow \infty$ . Сделать это позволяет свойство асимптотической свободы модели. Модель обладает этим свойством в силу того, что константа связи имеет размерность квадрата массы, и поэтому ряд теории возмущений развивается по безразмерной константе:

$$\alpha_s(p^2) = e^2/\pi p^2 = m^2/p^2. \quad (70)$$

Из этого выражения видно, что эффективная константа связи  $\alpha_s$  очень быстро (по сравнению с  $\alpha_s$  в КХД) убывает в области высоких энергий или малых расстояний.

Из выражения (67) легко найти асимптотику  $\Pi(x)$  при  $x \rightarrow 0$ .

В евклидовом пространстве асимптотика имеет вид [27]

$$\begin{aligned} \Pi(x) = & \frac{1}{2\pi^2 x^3} \left\{ 1 + \alpha_s(x) (2 - L_x) + \right. \\ & + \alpha_s^2(x) \left( \frac{11}{4} - \gamma^4 - \frac{9}{4} L_x + \frac{1}{2} L_x^2 \right) + \\ & + \alpha_s^3(x) \left[ \frac{317}{108} + 2\gamma^4 - \left( \frac{59}{18} + \gamma^4 \right) L_x + \right. \\ & + \left. \frac{5}{4} L_x^2 - \frac{1}{6} L_x^3 \right] + \frac{1}{4!} \alpha_s^4(x) \left[ \frac{1021}{16} - 30\gamma^4 - \left( \frac{6359}{72} - 42\gamma^4 \right) L_x + \right. \\ & + \left. \left( \frac{557}{12} - 12\gamma^4 \right) L_x^2 - 11L_x^3 + L_x^4 \right] \left. \right\}, \quad (71) \end{aligned}$$

где

$$\alpha_s(x) = m^2 x^2/4; \quad L_x = \ln[\gamma^2 \alpha_s(x)].$$

Вычислим фурье-образ от функции  $\Pi(x)$ :

$$\Pi(p) = 2\pi \int \Pi(x) \exp(ipx) d^2x$$

в пределе больших импульсов  $p$ .

В пренебрежении контактными членами вида  $(\square_p)^n \delta(p)$ , которые получаются из членов вида  $(x^2)^n$  в разложении (71), имеем [27]

$$\begin{aligned} \Pi(p) = & -\ln \frac{p^2}{\mu^2} + \alpha_2(p) + \alpha_3^2(p) \left[ \ln \alpha_s(p) - \frac{1}{4} \right] + \alpha_s^3(p) \left[ 2 \ln^2 \alpha_s(p) + \right. \\ & \left. + 2 \ln \alpha_s(p) - \frac{35}{9} + 4\gamma^4 \right] + \alpha_s^4(p) \left[ 6 \ln^3 \alpha_s(p) - \frac{33}{2} \ln \alpha_s(p) - \right. \\ & \left. - \left( \frac{123}{4} + 36\gamma^4 \right) \ln \alpha_s(p) - \frac{415}{48} - 69\gamma^4 - 24\zeta(3) \right]; \quad (72) \\ & \zeta(3) \simeq 1,202. \end{aligned}$$

В этом выражении  $\alpha_s(p)$  дается формулой (70).

Отметим, что первые два члена в этом разложении могут быть вычислены по теории возмущений\*. Им соответствуют диаграммы теории возмущений вида



Следующие члены ряда (72), вообще говоря, не могут быть получены по теории возмущений, поскольку они содержат неаналитические зависимости от константы связи вида  $\ln^k \alpha_s$ . Причина такого несоответствия заключается в том, что эти члены ряда являются инфракрасно бесконечными. Поэтому, чтобы придать им смысл, нужна некоторая процедура устранения этих бесконечностей.

Из (70), (72) следует, что главный вклад в  $\Pi(p)$  при  $p \rightarrow \infty$  дает первый член в разложении (72). Отсюда с учетом (64) получаем асимптотическое значение  $\rho(s)$ :  $\rho(\infty) = 1$ .

В промежуточной области энергий  $9m^2 \leq s \leq 25m^2$  функция  $\rho(s)$  описывается трехчастичным фазовым объемом  $\Omega_3(s)$ , которая вычисляется [27] точно:

$$\Omega_3(s) = 2K(\omega) [(s + 2m\sqrt{s} - 3m^2)(s - 2m\sqrt{s} + m^2)]^{-\frac{1}{2}} \theta(s - 9m^2),$$

где  $K(\omega)$  — полный эллиптический интеграл первого рода,

$$\omega^2 = \frac{(s - 2m\sqrt{s} - 3m^2)(s + 2m\sqrt{s} + m^2)}{(s + 2m\sqrt{s} - 3m^2)(s - 2m\sqrt{s} + m^2)}.$$

Отметим медленный выход на асимптотику спектральной плотности  $\rho(s)$ .

Например, при  $s = 9m^2$ , где эффективная константа связи мала ( $\alpha_s = 0,11$ ),  $\rho(s)$  почти вдвое отличается от своего асимптотического значения:

$$\rho(9m^2) \simeq 1,92, \quad \rho(25m^2) \simeq 0,88$$

\* Этот факт нам помогли установить А. А. Пивоваров, Ф. В. Ткачев и К. Г. Четыркин.

(график функции  $\rho(s)$  приведен на рис. 1). Между тем разложение (72) на этих масштабах работает хорошо, т. е. для коррелятора  $\Pi(p)$  асимптотическая свобода наступает значительно быстрее, чем для спектральной плотности  $\rho(s)$ .

Не исключено, что такая же ситуация реализуется в КХД, где эффективная константа связи  $\alpha_s$  убывает на больших энергиях значительно медленнее, чем в рассматриваемой модели.

В последнее время появилось большое количество работ, в которых делаются попытки описать свойства резонансов в рамках КХД на основе использования правил сумм.

При этом обычно используется разложение Вильсона — математический аппарат, позволяющий полуфеноменологически учесть непертурбативные эффекты, ответственные за свойства резонансов.

Единственным на сегодняшний день способом получения коэффициентов функций в разложении Вильсона является теория возмущений.

В следующей части настоящей работы мы исследуем операторное разложение на примере модели Швингера.

## 5. ОПЕРАТОРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим операторное разложение на примере произведений токов  $J(x)$  и  $J_5(x)$ . Введем обозначения

$$J^\pm(x) = \bar{\psi} \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \psi = \frac{1}{2} (J(x) \pm iJ_5(x)). \quad (73)$$

Из операторного представления (6) можно получить представление для  $J^\pm$  через единственный динамический оператор  $\Sigma$  [20]:

$$J^\pm(x) = -\frac{A}{2} N \exp(\mp 2i\sqrt{\pi}\Sigma(x)). \quad (74)$$

Здесь  $N$  — символ нормального упорядочения.

Регулярные операторы из  $T$ -произведений этих токов выделяются с помощью теоремы Вика по формулам:

$$\begin{aligned} T(J^+(x) J^-(0)) &= \frac{A^2}{4} \exp(-4\pi i\Delta(x)) \times \\ &\times N \exp\{-2\sqrt{\pi}i(\Sigma(x) - \Sigma(0))\}; \\ T(J^+(x) J^+(0)) &= \frac{A^2}{4} \exp(4\pi i\Delta(x)) \times \\ &\times N \exp\{-2\sqrt{\pi}i(\Sigma(x) + \Sigma(0))\}. \end{aligned} \quad (75)$$

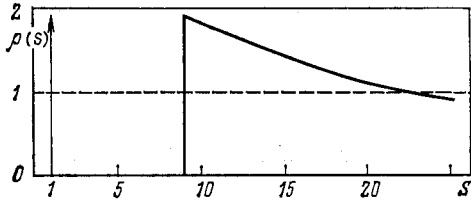


Рис. 1. Зависимость спектральной плотности  $\rho$  от  $s$

Оператор, входящий в (75) под знаком нормального произведения, является регулярным при  $x \rightarrow 0$ , поэтому его можно разложить в ряд по  $x_\mu$ .

Удержим в этом разложении несколько первых членов:

$$\begin{aligned}
 T(J^+(x)J^-(0)) &= \frac{A^2}{4} \exp(-4\pi i \Delta(x)) \times \\
 &\times N \left\{ 1 - \frac{2\sqrt{\pi i}}{1!} \left( x_\mu \partial_\mu \Sigma(0) + \frac{x_\mu x_\nu}{2!} \partial_\mu \partial_\nu \Sigma(0) + \right. \right. \\
 &+ \frac{x_\mu x_\nu x_k}{3!} \partial_\mu \partial_\nu \partial_k \Sigma(0) + \frac{1}{4!} x_\mu x_\nu x_k x_n \partial_\mu \partial_\nu \partial_k \partial_n \Sigma(0) \left. \right\} + \\
 &+ \frac{1}{2!} (2\sqrt{\pi i})^2 ((x_\mu \partial_\mu \Sigma(0))^2 + \\
 &+ x_\mu x_\nu x_k \partial_\nu \partial_k \Sigma(0) \partial_\mu \Sigma(0) + \frac{1}{4} (x_\mu x_\nu \partial_\mu \partial_\nu \Sigma(0))^2 + \\
 &+ \frac{1}{3} (x_\mu \partial_\mu \Sigma(0) x_\nu x_k x_n \partial_\nu \partial_k \partial_n \Sigma(0)) + \frac{1}{3!} (-2\sqrt{\pi i})^3 [(x_\mu \partial_\mu \Sigma(0))^3 + \\
 &+ \frac{3}{2!} (x_\mu \partial_\mu \Sigma(0))^2 x_\nu x_k \partial_\nu \partial_k \Sigma(0)] + \frac{1}{4!} (2\sqrt{\pi i})^4 (x_\mu \partial_\mu \Sigma(0))^4 + O(x^4) \left. \right\}. \quad (76)
 \end{aligned}$$

В данном случае коэффициентную функцию

$$C_0(x) = \frac{A^2}{4} \exp(-4\pi i \Delta(x)) \quad (77)$$

также следует разложить в ряд при  $x \rightarrow 0$  и ограничиться необходимым количеством членов:

$$\begin{aligned}
 C_0(x) &= \frac{1}{4\pi^2 x^2} \left\{ 1 + \alpha_s(x) (2 - \ln(\gamma^2 \alpha_s)) + \right. \\
 &+ \alpha_s^2 \left( \frac{1}{2} \ln^2 \gamma^2 \alpha_s - \frac{9}{4} \ln \gamma^2 \alpha_s + \frac{11}{4} \right) \left. \right\}, \quad (78)
 \end{aligned}$$

где

$$\alpha_s = e^2 x^2 / 4\pi.$$

Разложение (76), (78) является операторным разложением  $T$ -произведения двух токов на малых расстояниях.

Это разложение идет по хорошо определенным нормальным произведениям операторов, взятых в одной точке. Однако коэффициентные функции, например  $C_0(x)$ , неаналитически зависят от константы связи  $e^2$ .

Покажем, что переопределением операторов эти неаналитичности можно убрать.

Вместо оператора  $N(\partial_\mu \Sigma(0) \partial_\mu \Sigma(0))$  определим оператор  $T(\partial_\mu \Sigma(0) \partial_\nu \Sigma(0))$ . Для этого рассмотрим симметричный предел

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} T(\partial_\mu \Sigma(0) \partial_\nu \Sigma(0)) = N(\partial_\mu \Sigma(0) \partial_\nu \Sigma(0)) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \partial_\mu \partial_\nu \Delta(\epsilon).$$

Используя явное выражение для  $\Delta(\epsilon)$ , получаем

$$-\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{i} \partial_\mu \partial_\nu \Delta(\epsilon) = -\frac{m^2}{8\pi} g_{\mu\nu} \ln(-\gamma^2 \epsilon^2 m^2/4).$$

Определим  $R$ -операцию для устранения ультрафиолетовых бесконечностей в следующем виде:

$$RT(\partial_\mu \Sigma(0) \partial_\nu \Sigma(0)) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} T(\partial_\mu \Sigma(\epsilon) \partial_\nu \Sigma(0)) + \frac{m^2}{8\pi} g_{\mu\nu} \ln(-\gamma^2 \epsilon^2 m^2/4), \quad (79)$$

где  $\mu$  — произвольная точка вычитания размерности массы. Тогда  $N$ -произведение связано с соответствующим  $T$ -произведением формулой

$$RT(\partial_\mu \Sigma(0) \partial_\nu \Sigma(0)) = N(\partial_\mu \Sigma(0) \partial_\nu \Sigma(0)) - \frac{m^2}{8\pi} \ln \frac{m^2}{\mu^2} g_{\mu\nu}. \quad (80)$$

При таком определении оператор неаналитически зависит от константы связи  $e^2$ , например, его вакуумное среднее равно

$$\langle RT(\partial_\mu \Sigma(0) \partial_\nu \Sigma(0)) \rangle = -\frac{m^2}{8\pi} \ln \frac{m^2}{\mu^2} g_{\mu\nu}. \quad (81)$$

Из (80) легко получить формулу

$$RT(x_\mu \partial_\mu \Sigma)^2 = N(x_\mu \partial_\mu \Sigma)^2 - \frac{(mx)^2}{8\pi} \ln \frac{m^2}{\mu^2}. \quad (82)$$

Аналогично можно переопределить все остальные операторы, а именно:

$$\left. \begin{aligned} RT(x_\mu x_\nu x_k \partial_\mu \Sigma \partial_\nu \partial_k \Sigma) &= N(x_\mu \partial_\mu \Sigma x_k x_\nu \partial_k \partial_\nu \Sigma); \\ RT(x_\mu x_\nu \partial_\mu \partial_\nu \Sigma)^2 &= N(x_\mu x_\nu \partial_\mu \partial_\nu \Sigma)^2 - \frac{3}{8} \frac{(mx)^4}{4\pi} \ln \frac{m^2}{\mu^2}; \\ RT(x_\mu \partial_\mu \Sigma x_\nu x_k x_n \partial_\nu \partial_k \partial_n \Sigma) &= N(x_\mu \partial_\mu \Sigma x_\nu x_k x_n \partial_\nu \partial_k \partial_n \Sigma) + \\ &+ \frac{3}{8} \frac{(mx)^4}{4\pi} \ln \frac{m^2}{\mu^2}; \\ RT(x_\mu \partial_\mu \Sigma)^3 &= N(x_\mu \partial_\mu \Sigma)^3 - \frac{3}{2} (mx)^2 \ln \frac{m^2}{\mu^2} x_\mu \partial_\mu \Sigma; \\ RT(x_\mu \partial_\mu \Sigma)^4 &= N(x_\mu \partial_\mu \Sigma)^4 - \frac{3}{4\pi} \frac{(mx)^2}{\mu^2} \ln \frac{m^2}{\mu^2} N(x_\mu \partial_\mu \Sigma)^2 + \\ &+ \frac{3}{4} (mx)^4 \frac{1}{(4\pi)^2} \ln^2 \frac{m^2}{\mu^2}. \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Формулы (83) позволяют выразить  $N$ -произведения, входящие в разложение (76), через соответствующие  $T$ -произведения. Если это

сделать, то разложение (76) примет вид

$$\begin{aligned}
 T(J^+(x)J^-(0)) &= C_0^R(x) - 2\sqrt{\pi} i C_1^R(x) x_\mu \partial_\mu \Sigma(0) - \\
 &- 2\sqrt{\pi} i C_1^R(x) \left\{ \frac{x_\mu x_\nu}{2} \partial_\mu \partial_\nu \Sigma \right\} - 2\sqrt{\pi} i C_2^R(x) \left\{ \frac{1}{3!} x_\mu x_\nu x_k \partial_\mu \partial_\nu \partial_k \Sigma + \right. \\
 &+ \frac{1}{4!} x_\mu x_\nu x_k x_n \partial_\mu \partial_\nu \partial_k \partial_n \Sigma \left. \right\} + \frac{1}{2!} (2\sqrt{\pi} i)^2 C_1^R(x) RT(x_\mu \partial_\mu \Sigma)^2 + \\
 &+ (2\sqrt{\pi} i)^2 \frac{1}{2!} C_2^R(x) \left\{ RT(x_\mu x_\nu x_k \partial_\mu \Sigma \partial_\nu \partial_k \Sigma) + \frac{1}{4} RT(x_\mu x_\nu \partial_\mu \partial_\nu \Sigma)^2 + \right. \\
 &+ \frac{1}{3} RT(x_\mu x_\nu x_k x_n \partial_\mu \Sigma \partial_\nu \partial_k \partial_n \Sigma) \left. \right\} + \frac{1}{3} (-2\sqrt{\pi} i)^3 C_2^R(x) \times \\
 &\times \left\{ RT(x_\mu \partial_\mu \Sigma)^3 + \frac{3}{2} RT((x_\mu \partial_\mu \Sigma)^2 x_\nu x_k \partial_\nu \partial_k \Sigma) \right\} + \\
 &+ \frac{1}{4!} (2\sqrt{\pi} i)^4 C_2^R(x) RT(x_\mu \partial_\mu \Sigma)^4 + O(x)^2. \tag{84}
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned}
 C_0^R(x) &= \frac{1}{4\pi^2 x^2} \left\{ 1 + \alpha_s(x) \left( 2 - \ln \frac{\gamma^2 x^2 \mu^2}{4} \right) + \right. \\
 &+ \alpha_s^2 \left( \frac{1}{2} \ln^2 \frac{\gamma^2 x^2 \mu^2}{4} - \frac{9}{4} \ln \frac{\gamma^2 x^2 \mu^2}{4} + \frac{11}{4} \right) \left. \right\}; \\
 C_1^R(x) &= \frac{1}{4\pi^2 x^2} \left\{ 1 + \alpha_s(x) \left( 2 - \ln \frac{\gamma^2 x^2 \mu^2}{4} \right) \right\}; \\
 C_2^R(x) &= \frac{1}{4\pi^2 x^2}.
 \end{aligned} \right\} \tag{85}$$

Таким образом, коэффициентные функции  $C_i^R(x)$  избавились от логарифмической зависимости от  $e^2$ . Усреднение (16) по вакууму дает следующее представление для функции Грина:

$$\begin{aligned}
 \langle T(J^+(x)J^-(0)) \rangle &= C_0(x) = C_0^R(x) + \pi x^2 C_1^R(x) \langle RT(\partial_\mu \Sigma)^2 \rangle + \\
 &+ \frac{\pi x^4}{2^4} C_2^R(x) \langle RT(\partial^2 \Sigma)^2 \rangle + \frac{\pi^2 x^4}{4} C_2^R(x) \langle RT(\partial_\mu \Sigma)^2 (\partial_\nu \Sigma)^2 \rangle + O(x^2), \tag{86}
 \end{aligned}$$

причем

$$\left. \begin{aligned}
 \langle RT(\partial_\mu \Sigma)^2 \rangle &= -\frac{m^2}{4\pi} \ln \frac{m^2}{\mu^2}; \\
 \langle RT(\partial^2 \Sigma)^2 \rangle &= -\frac{m^4}{4\pi} \ln \frac{m^2}{\mu^2}; \\
 \langle RT(\partial_\mu \Sigma)^2 (\partial_\nu \Sigma)^2 \rangle &= \frac{2m^4}{(4\pi)^2} \ln^2 \frac{m^2}{\mu^2}.
 \end{aligned} \right\} \tag{87}$$

В импульсном пространстве (86) примет вид

$$\begin{aligned}
 F_1(p) &= 2\pi \int \exp(ipx) \langle T J^+(x) J^-(0) \rangle d^2x; \\
 2F_1(p) &= -\ln \frac{p^2}{\mu^2} + \alpha_s(p) + \alpha_s^2(p) \left[ \ln \frac{\mu^2}{p^2} - \frac{1}{4} \right] - \\
 &\quad - \frac{4\alpha_s(p)\pi}{p^2} \langle RT (\partial_\mu \Sigma)^2 \rangle + O\left(\frac{1}{p^6} \ln^2 p^2\right). \quad (88)
 \end{aligned}$$

При вычислении фурье-образа мы пренебрегли контактными членами вида  $\square_p^n \delta(p)$ . Параметр  $\bar{\mu}$  возник после устранения ультрафиолетовых бесконечностей из функции  $C_0^R(x)$ . Параметр  $\mu$  соответствует разделению неаналитичностей по  $e^2$ , и  $F_1(p)$  в целом от него не зависит.

Для того чтобы разложение (88) можно было сравнить со стандартным разложением Вильсона, возникающим в рамках теории возмущений, необходимо поле  $\Sigma$  в (88) выразить через изначальные кварковые или глюонные поля. Это можно сделать несколькими способами. Если использовать соотношение

$$\Sigma(x) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2e} \varepsilon_{\mu\nu} F^{\mu\nu}(x),$$

то коэффициентная функция при соответствующем операторе в (88) не будет зависеть от  $e^2$ , а в следующих членах разложения (88) будет возникать [28] неаналитическая зависимость коэффициентных функций вида  $1/e^n$ , которую невозможно получить в рамках теории возмущений.

Второй способ состоит в использовании соотношения

$$\partial_\mu \Sigma = \sqrt{\pi} \bar{\Psi} \gamma_\mu \gamma_5 \Psi.$$

В этом случае оператор имеет вид

$$\langle RT (\partial_\mu \Sigma)^2 \rangle = \pi \langle RT (\bar{\Psi} \gamma_\mu \gamma_5 \Psi)^2 \rangle. \quad (89)$$

Стандартная схема получения разложения Вильсона по теории возмущений приводит к ответу

$$2F_1(p) = 2F_1^0(p) + \frac{2\pi e^2}{p^4} \langle (\bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi)^2 \rangle - \frac{e^2}{p^4} \langle F_{\mu\nu}^2 \rangle - \frac{4e^2\pi}{p^4} \langle (\bar{\Psi} \gamma_\mu \gamma_5 \Psi)^2 \rangle, \quad (90)$$

где

$$2F_1^0(p) = -\ln \frac{p^2}{\mu^2} + \alpha_s(p) + \alpha_s^2(p) \left[ \ln \frac{\bar{\mu}^2}{p^2} + B \right]. \quad (91)$$

Первые два члена в  $F_1^0(p)$  совпадают с точным ответом (72) и, как уже отмечалось в четвертой части, могут быть получены по теории возмущений.

Третьему члену в  $F_1^0$  соответствуют диаграммы теории возмущений вида



Эти диаграммы являются инфракрасно бесконечными: интеграл по глюонной линии расходится при малых импульсах как  $\int d^2k/k^2$ .

В размерной  $\epsilon$ -регуляризации диаграммы становятся конечными и после вычитания полюсов по  $\epsilon$  возникает параметр  $\bar{\mu}$ , соответствующий устранению бесконечностей при малых импульсах\*.

Если идентифицировать операторы, возникшие в рамках теории возмущений в разложении (90) с точными операторами, определенными как (89),

$$\begin{aligned} \langle RT F_{\mu\nu}^2 \rangle &= 2\pi \langle RT (\bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi)^2 \rangle = -2\pi \langle RT (\bar{\Psi} \gamma_\mu \gamma_5 \Psi)^2 \rangle = \\ &= -2 \langle RT (\partial_\mu \Sigma)^2 \rangle = \frac{m^2}{2\pi} \ln \frac{m^2}{\bar{\mu}^2}, \end{aligned}$$

то разложение (90) будет совпадать с точным разложением (88), (89), причем константа  $B$  в (91) определяет связь между точками вычитания  $\bar{\mu}$  и  $\mu$ :

$$\mu^2 = \bar{\mu}^2 \exp\left(B + \frac{1}{4}\right).$$

Рассмотрим  $T$ -произведение  $T(J^+(x)J^+(0))$ , которое примечательно тем, что вакуумное среднее от него равно нулю в любом порядке теории возмущений. Покажем, что и в этом случае неаналитичности по  $e^2$  также разделяются, т. е. все они будут содержаться в операторах.

Вторая из формул (75) может быть переписана в виде

$$T(J^+(x)J^+(0)) = \exp(4\pi i \Delta(x)) N(J^+(x)J^+(0)).$$

При малых  $x$  существует разложение

$$\begin{aligned} T(J^+(x)J^+(0)) &= f_0(x) N(J^+(0))^2 + f_1(x) x_\mu N(\partial_\mu J^+(0)J^+(0)) + \\ &+ f_1(x) \frac{x_\mu x_\nu}{2} N(\partial_\mu \partial_\nu J^+(0)J^+(0)) + \dots, \end{aligned} \quad (92)$$

где

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \frac{m^2 \gamma^2 x^2}{4} (1 - \alpha_s(x) (2 - \ln \alpha_s)); \\ f_1(x) &= \frac{m^2 \gamma^2 x^2}{4}, \end{aligned}$$

т. е.  $f_0(x)$  неаналитически зависит от  $e^2$ .

Определим операторы

$$RT(J^+(0))^2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} T(J^+(\epsilon)J^+(0)) \equiv 0. \quad (93)$$

\* Последний член в  $F_1^0(p)$  (91) был вычислен Л. Р. Сургуладзе и Ф. В. Ткачевым.



Аналогично из (92) получаем

$$\begin{aligned}
 RT(\partial_\mu \partial_\nu J^+(0) J^+(0)) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} T \square J^+(0) J^+(0) = \\
 &= \frac{1}{2} m^2 \gamma^2 N (J^+(0))^2 g_{\mu\nu}; \\
 RT(x_\mu x_\nu x_i \partial_\mu \partial_\nu \partial_i J^+ J^+) &= \frac{3}{2} m^2 \gamma^2 x_\mu N(\partial_\mu J^+ J^+); \\
 RT(\partial_\mu \partial_\nu \partial_i \partial_j J^+(0) J^+(0)) &= \frac{\pi^4 \gamma^4}{2} N(J^+(0))^2 (\delta_{\mu\nu} \delta_{ij} + \delta_{\mu i} \delta_{\nu j} + \\
 &+ \delta_{\mu j} \delta_{\nu i}) \left( \ln \frac{m^2}{\mu^2} + 1 \right) + \frac{m^2 \gamma^4}{2} [N(\partial_\mu \partial_\nu J^+ J^+) \delta_{ij} + \\
 &+ \text{симметризация}].
 \end{aligned} \tag{94}$$

С учетом (94) разложение (92) примет вид

$$\begin{aligned}
 T(J^+(x) J^+(0)) &= \frac{1}{2!} x_\mu x_\nu RT(\partial_\mu \partial_\nu J^+ J^+) f_0^R(x) + \\
 + \frac{1}{3!} x_\mu x_\nu x_\kappa RT(\partial_\mu \partial_\nu \partial_\kappa J^+ J^+) + \frac{1}{4!} x_\mu x_\nu x_\kappa x_n RT(\partial_\mu \partial_\nu \partial_\kappa \partial_n J^+ J^+) + \dots, \tag{95}
 \end{aligned}$$

где  $f_0^R(x) = 1 + \alpha_s(x) \left( \ln \frac{\gamma^2 x^2 \mu^2}{4} - 3 \right)$  аналитически зависит от  $e^2$ , причем неаналитичность содержится в операторах

$$\begin{aligned}
 \langle RT \square J^+ J^+ \rangle &= m^2 \gamma^2 A^2 / 4; \\
 \langle RT \square^2 J^+ J^+ \rangle &= m^4 \gamma^2 A^2 \left( \ln \frac{m^2}{\mu^2} + 1 \right).
 \end{aligned}$$

Введем функцию Грина

$$2F_2(p) = 2\pi \int \langle T J^+(x) J^+(0) \rangle \exp(ipx) d^2x.$$

Из (95) получаем

$$2F_2(p) = -\frac{32\pi e^2}{p^6} \langle RT \square J^+ J^+ \rangle + \dots \tag{96}$$

Разложение Вильсона по теории возмущений для функции  $F_2$  сводится к вычислению диаграммы вида



и приводит к следующему ответу:

$$2F_2(p) = \frac{8\pi e^2}{p^4} \langle (J^+)^2 \rangle - \frac{32\pi e^2}{p^6} \langle \square J^+ J^+ \rangle + \dots$$

Если идентифицировать возникшие операторы с точными операторами, определенными формулами (93), (94), то получается полное согласие с точной формулой (96).

Остановимся теперь на проверке гипотезы вакуумной доминантности [14].

Согласно этой гипотезе среднее от оператора  $\bar{\psi}\Gamma_1\psi\bar{\psi}\Gamma_2\psi$  может быть приближенно оценено по формуле

$$\langle \bar{\psi}\Gamma_1\psi\bar{\psi}\Gamma_2\psi \rangle = \frac{1}{4} \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 (\text{tr } \Gamma_1 \text{tr } \Gamma_2 - \text{tr } (\Gamma_1\Gamma_2)).$$

Здесь  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  есть кварковый конденсат, который находится точно из формулы (74):

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -A.$$

Применение к случаю

$$\Gamma_{1,2} = (1 \pm \gamma_5)/2$$

дает

$$\langle J^-(0) J^+(0) \rangle = \frac{1}{4} A^2, \quad \langle J^+(0) J^-(0) \rangle = 0.$$

Вторая из этих формул согласуется с определением (93), тогда как первая дает неверный ответ, поскольку  $\langle RTJ^-J^+ \rangle$  зависит от  $\mu$ , а константа  $A$  от  $\mu$  не зависит. Аналогичная ситуация имеет место в случае векторных токов.

Подводя итоги, отметим, что существуют различные способы определения регулярных составных операторов.

Им соответствуют различные представления операторного разложения. При одном способе определения операторов имеется соответствие точного разложения с теоретико-возмущенческим разложением.

Полное совпадение этих разложений возможно лишь при знании связи между ультрафиолетовой точкой вычитания  $\mu$  для операторов и инфракрасной точкой вычитания  $\bar{\mu}$  для коэффициентных функций. В рамках теории возмущений эту связь установить невозможно.

## 6. ПРАВИЛА СУММ

Одним из приближенных методов получения информации о поведении КХД в низкоэнергетической области является использование конечноэнергетических правил сумм [21, 22] и их модификаций [14, 29].

Использование метода правил сумм во многих случаях позволило описать свойства резонансов. Поэтому представляет интерес проверить этот метод на примере рассмотрений нами точно решаемой модели [27].

Рассмотрим псевдоскалярный канал, который описывается током  $J_5$ .

Задача состоит в том, чтобы исходя из асимптотики (71) функции

Грина для двух токов  $J_5$  (61) восстановить параметры резонанса  $\Sigma$  ( $m^2 = e^2/\pi$ ,  $F = 2m^2\gamma^2$ ) с помощью правил сумм.

Запишем правила сумм с экспоненциальной весовой функцией

$$\int \rho^{\text{exp}}(s) e^{-s/M^2} \frac{ds}{M^2} = \hat{B}_M \Pi(p^2) = \Pi(M^2), \quad (97)$$

где  $\Pi(M^2)$  — преобразование Бореля от функции  $\Pi(p^2)$ , которое определяется по формуле

$$\Pi(M^2) = \hat{B}_M \Pi(p^2) = \lim_{\substack{p^2 \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty \\ p^2/n = M^2}} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n)} (p^2)^n \frac{d^n}{(dp^2)^n} \Pi(p^2).$$

Используя разложение (72) для функции  $\Pi(p^2)$  в области высоких энергий, получаем [27]

$$\begin{aligned} \Pi(M^2) = & 1 + \frac{m^2}{M^2} - \left( \frac{m^2}{M^2} \right)^2 \left( \ln \frac{M^2}{m^2} + 0,673 \right) + \\ & + \left( \frac{m^2}{M^2} \right)^3 \left( 17,7 + 0,846 \ln \frac{M^2}{m^2} + \ln^2 \frac{M^2}{m^2} \right) + O \left( \frac{m^8}{M^8} \ln^3 M^2 \right). \end{aligned} \quad (98)$$

Это разложение справедливо при  $M^2 \gg m^2$ . В дальнейшем удобно зафиксировать масштаб, положив  $m^2 = 1$ .

В качестве  $\rho^{\text{exp}}(s)$ , для которого существует точное выражение (68), выберем общепринятое приближение в форме

$$\rho^{\text{exp}}(s) = F_R \delta(s - m_R^2) + \theta(s - 9). \quad (99)$$

Такой выбор спектральной плотности учитывает как существование резонанса, так и существование континуума, который начинается с трехчастичного порога и имеет своей асимптотикой  $\rho(\infty) = 1$ .

С учетом этого приближения правила сумм (97) примут вид

$$\hat{\Pi}(M^2) \equiv \Pi(M^2) - \exp(-9/M^2) = \frac{F_R}{M^2} \exp\left(-\frac{m_R^2}{M^2}\right).$$

Дифференцируя это соотношение по  $M^2$ , получаем второе уравнение для определения двух параметров  $m_R^2$  и  $F_R$ :

$$\frac{d}{dM^2} (\hat{\Pi}(M^2) M^2) = \frac{F_R m_R^2}{M^4} \exp\left(-\frac{m_R^2}{M^2}\right).$$

Параметр  $m_R^2$  находится из этих уравнений в виде

$$m_R^2 = M^2 \left( 1 + M^2 \hat{\Pi}'(M^2) / \hat{\Pi}(M^2) \right).$$

Оценим точность определения  $m_R^2$ . В линейном по погрешности приближении имеем

$$\frac{\Delta m_R^2}{m_R^2} = \left( 1 - \frac{M^2}{m_R^2} \right) \left\{ \frac{\Delta \hat{\Pi}'}{\hat{\Pi}'} - \frac{\Delta \hat{\Pi}}{\hat{\Pi}} \right\}.$$

Отсюда следует, что погрешность в определении  $m_R^2$  растет при больших  $M^2$  линейно. Для того чтобы эта погрешность была порядка погрешности в определении функции  $\hat{\Pi}(M^2)$ , необходимо работать в области  $M^2 \leq m_R^2$ . Однако даже для граничного значения  $M^2 = m_R^2$  разложение (98) неприменимо:

$$\Pi(1) = 1 + 1 - 0,673 + 17,7 + \dots$$

Таким образом, в данной модели нельзя вычислить параметры резонанса методом стандартных правил сумм из-за неприменимости разложения (98) в области резонанса.

Это связано с тем, что в исследуемой модели резонанс лежит вне области асимптотической свободы. Действительно, эффективная константа связи  $\alpha_s(p^2)$  в области резонанса  $p^2 = m^2$  равняется единице, что соответствует области сильной связи.

Покажем теперь, что тем не менее резонанс можно описать с помощью правил сумм в  $x$ -пространстве.

В  $x$ -пространстве разложение (71) в области резонанса  $m x \simeq 1$  сводится хорошо и к тому же учитывает контактные члены.

Отметим, что представление Челлена — Лемана (64), записанное в форме

$$2\pi^2 x^2 \Pi(x) = \frac{x^2}{2} \int_0^\infty \rho(s) K_0(x\sqrt{s}) ds, \quad (100)$$

в евклидовой области представляет собой набор правил сумм, зависящий от параметра  $x$ . Поскольку функция  $K_0(x\sqrt{s})$  экспоненциально мала при  $x \rightarrow \infty$ , то, выбирая  $x$  довольно большим, можно обеспечить подавление фона по сравнению с резонансом в выражении (100).

Выбирая приближение для  $\rho(s)$  в форме

$$\rho(s) = F_R \delta(s - m_R^2) + \theta(s - s_0),$$

где  $s_0$  — начало эффективного континуума, и подставляя его в (100), получаем уравнение [27]

$$\frac{1}{2} F_R x^2 K_0(m_R x) = 2\pi^2 x^2 \Pi(x) - \sqrt{s_0} x K_1(x\sqrt{s_0}) \equiv f(x). \quad (101)$$

Уравнение для определения параметра  $m_R$  получается из (101) в форме

$$2 - E^{-1}(z) = x'f(x)/f(x), \quad z = m_R x, \quad (102)$$

где  $E(z) = K_0(z)/zK_1(z)$ .

Графины функций, стоящих в левой и правой частях уравнения (102), для параметра  $s_0 = 9$  приведены на рис. 2.

Кривая 1 соответствует функции  $2 - E^{-1}(x)$ , кривая 2 — функции  $x'f(x)$ , где  $f(x)$  определена формулой (101), кривые 3, 4, 5, 6 соответствуют функции  $x'f(x)$ , где  $f(x)$  вычисляется по форму-

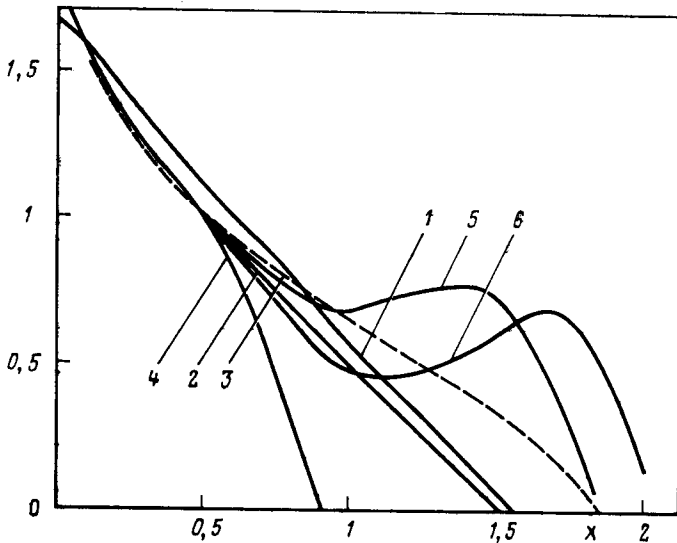


Рис. 2. Графики функций, используемых в уравнении (102)

ле (101), причем для  $\Pi(x)$  взято соответственно первое, второе, третье и четвертое приближения по  $\alpha_s(x)$  в разложении (71).

Оценим точность определения параметра  $m_R$  из уравнения (102):

$$\frac{\Delta m_R}{m_R} = \frac{E^2(z)}{E'(z)z} \Delta \left( \frac{xf'}{f} \right) = \frac{E(2E-1)}{zE'} \left\{ \frac{\Delta f'}{f'} - \frac{\Delta f}{f} \right\}, \quad (103)$$

Для того чтобы точность определения  $m_R$  была порядка точности определения самой функции  $f(x)$ , будем работать в области, где коэффициент

$$P(z) = E(z)(2E(z) - 1)/zE'(z)$$

будет порядка единицы (или меньше). Это условие запрещает работать в области очень малых расстояний, поскольку в этой области коэффициент  $P$  очень большой:

$$P(z) \rightarrow 2 \ln^2 z, \quad z \rightarrow 0.$$

Наиболее подходящей областью является окрестность резонанса  $m_R x \simeq 1$ : в ней  $P \ll 1$ , а разложение (71) все еще продолжает работать.

Обработка кривой 6 согласно (101), (102) в точке  $x = 1$  приводит к значениям параметров  $m_R \simeq 1, 1$ ,  $F_R \simeq 7,4$ .

Напомним, что точные значения параметров  $m = 1$ ,  $F \simeq 6,3$ .

Если учесть следующие поправки в разложении (71) и получить хорошее приближение к точной кривой 2 в точке  $x = 2$ , то можно обеспечить лучшую точность. Например, обработка кривой 2 в точке  $x = 2$  приводит к  $m_R \simeq 1,0$ ,  $F_R \simeq 6,3$ .

Такое хорошее совпадение обусловлено сильным подавлением фона и сравнительно малым значением коэффициента  $P = 0,2$ .

Выбор параметра  $s_0 = 9$  является не самым лучшим с точки зрения выполнения правил сумм (100). Для лучшего выполнения соотношения (100) нужно выбрать  $s_0$  несколько меньше 9, с тем чтобы эффективно учесть большой положительный выброс над единицей в точной функции  $\rho(s)$  (см. рис. 1).

На рис. 3 приведены графики зависимости  $m_R(1/x^2)$  для различных значений  $s_0$  [функция  $\Pi(x)$  вычислена с точностью до четвертого

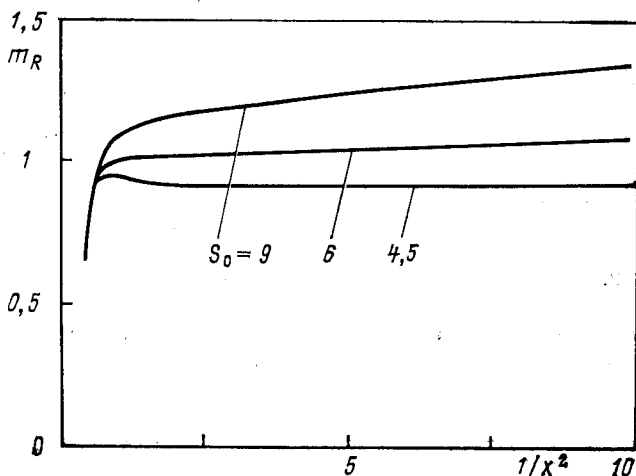


Рис. 3. Зависимость  $m_R$  от  $1/x^2$  для различных значений  $s_0$

порядка по  $\alpha_s$ ]. Из рисунка видно, что наиболее стабильной кривой соответствует  $s_0 = 6$ . Обработка этой кривой в точке  $x = 1$  дает  $m_R \simeq 1,0$ ,  $F_R \simeq 6,18$ .

Таким образом, использование правил сумм в  $x$ -пространстве позволяет вычислить параметры резонанса достаточно надежно, тогда как в  $p$ -пространстве этого сделать не удастся из-за плохой сходимости ряда на масштабах порядка массы резонанса. Однако наш пример не исключает применения правил сумм к вычислению параметров резонанса в  $p$ -пространстве к моделям, в которых ряды на масштабах резонанса сходятся хорошо (см., например, [15]).

В заключение мы благодарим Н. В. Красникова, В. А. Кузьмина, В. А. Матвеева, А. А. Пивоварова, В. А. Рубакова, М. Е. Шапошникову и участников семинара теоретического отдела Института ядерных исследований АН СССР за полезные обсуждения.

Мы благодарим Ф. В. Ткачева и К. Г. Четыркина за разъяснение некоторых аспектов теоретико-возмущенческого разложения Вильсона.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

В приложении описаны основные свойства безмассовых фермионов в двумерном пространстве.

Уравнение Дирака для безмассовых фермионов имеет вид

$$i\gamma_{\mu}\partial_{\mu}\Psi_0(x) = i \begin{pmatrix} 0 & \partial_0 & -\partial_1 \\ \partial_0 & +\partial_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \end{pmatrix} = 0.$$

Это уравнение расщепляется на два независимых уравнения для компонент  $\Psi_{1,2}$ :

$$(\partial_0 - \partial_1)\Psi_2 = 0; \quad (\partial_0 + \partial_1)\Psi_1 = 0.$$

Отсюда следует, что  $\Psi_1$  зависит только от  $x^- = x_0 - x^1$ , а  $\Psi_2$  только от  $x^+ = x^0 + x^1$ , т. е.  $\Psi_1$  представляет собой волну, распространяющуюся направо, а  $\Psi_2$  — волну, распространяющуюся налево.

Разбиение на положительно-частотную и отрицательно-частотную части имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1(x) &= \int dp^1 e^{-ipx\theta}(p^1) \frac{a_1^-(p^1)}{\sqrt{2\pi}} + \int dp^1 e^{ipx\theta}(p^1) b_1^+(p^1)/\sqrt{2\pi}; \\ \Psi_2(x) &= \int dp^1 e^{-ipx\theta}(-p^1) \frac{a_2^-(p^1)}{\sqrt{2\pi}} + \\ &\quad + \int dp^1 e^{ipx\theta}(-p^1) b_2^+(p^1)/\sqrt{2\pi}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.1})$$

Здесь

$$px = |p^1|x^0 - p^1x^1.$$

Введем обозначение

$$(a_i^-)^* = a_i^+, (b_i^+)^* = b_i^-; \quad i = 1, 2.$$

На квантовом уровне операторы  $a_i^{\pm}$  и  $b_i^{\pm}$  подчиняются антикоммутиационным соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \{a_i^-(p^1), a_j^+(q^1)\} &= \delta_{ij}\delta(p^1 - q^1); \\ \{b_i^-(p^1), b_j^+(q^1)\} &= \delta_{ij}\delta(p^1 - q^1); \\ \{a_i^{\pm}(p^1), b_j^{\pm(\mp)}(q^1)\} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.2})$$

Операторы  $a_i^{\pm}$ ,  $(b_i^{\pm})$  с индексом  $i = 1$  — операторы рождения и уничтожения частиц (античастиц) первого сорта. Эти частицы характеризуются тем, что все они распространяются направо. Операторы  $a_i^{\pm}$ ,  $(b_i^{\pm})$ ,  $i = 2$  относятся к частицам второго сорта, которые распространяются налево.

Число частиц первого и второго сорта сохраняется по отдельности. Действительно, сохраняющиеся заряды  $Q_F$  и  $\tilde{Q}_F$  имеют вид

$$\begin{aligned} Q_F &= \int dx^1 : \bar{\Psi}_0 \gamma_0 \Psi_0 : = \int dp^1 \theta(p^1) [a_1^+(p^1) a_1^-(p^1) - b_1^+(p^1) b_1^-(p^1)] + \\ &\quad + \int dp^1 \theta(-p^1) [a_2^+(p^1) a_2^-(p^1) - b_2^+(p^1) b_2^-(p^1)]; \\ \tilde{Q}_F &= \int dx^1 : \bar{\Psi}_0 \gamma_0 \gamma_3 \Psi_0 : = \int dp^1 \theta(p^1) [a_1^+(p^1) a_1^-(p^1) - b_1^+(p^1) b_1^-(p^1)] - \\ &\quad - \int dp^1 \theta(-p^1) [a_2^+(p^1) a_2^-(p^1) - b_2^+(p^1) b_2^-(p^1)] \end{aligned}$$

и представляют собой сумму и разность частиц первого и второго сорта соответственно. Из сохранения  $Q_F$  и  $\tilde{Q}_F$  следует сделанное выше утверждение.

Из формулы (II.1) и коммутационных соотношений (II.2) получаются следующие выражения для антикоммулятора и функции Грина свободных безмассовых полей [23]:

$$\langle \Psi_{1,2}(x_0, x^1) \Psi_{1,2}^\dagger(y_0, y^1) \rangle = \delta(x^\mp - y^\mp);$$

$$\langle \Psi_{1,2}(x_0, x^1) \Psi_{1,2}^\dagger(y_0, y^1) \rangle = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{x^\mp - y^\mp - i0}.$$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jackiw R., Rebbi C.— Phys. Rev. Lett., 1976, v. 37, p. 172; Callan C. G., Dashen R. F., Gross D. J.— Phys. Lett., 1976, v. B63, p. 334.
2. Lowenstein J. H., Swieca J. A.— Ann. of Phys., 1971, v. 68, p. 172.
3. Красников Н. В., Матвеев В. А., Рубаков В. А. и др.— ТМФ, 1980, т. 45, с. 313.
4. Rothe K. D., Swieca J. A.— Phys. Rev., 1977, v. D15, p. 541.
5. 't Hooft G.— Phys. Rev., 1976, v. D14, p. 3432.
6. Weinberg S.— Phys. Rev., 1975, v. D11, p. 3583.
7. Callan C. G., Dashen R. F., Gross D. J.— Phys. Rev., 1979, v. D19, p. 1826.
8. Токарев В. Ф.— ТМФ, 1983, т. 54, с. 111.
9. 't Hooft G.— Phys. Rev. Lett., 1976, v. 37, p. 8.
10. Peccei R. D., Quinn H. R.— Nuovo cimento, 1977, v. 41A, p. 309.
11. Krasnikov N. V., Rubakov V. A., Tokarev V. F.— Phys. Lett., 1978, v. 79B, p. 423.
12. Rubakov V. A.— Nucl. Phys., 1982, v. B203, p. 311.
13. Wilson K.— Phys. Rev., 1969, v. 179, p. 1499.
14. Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I.— Nucl. Phys., 1979, v. B147.
15. Tavkhelidze A. N. Preprint INR, P-0267, 1982; Chetyrkin K. G., Ignatiev A. Yu., Matveev V. A. e.a.— Phys. Lett., 1982, v. B117, p. 252.
16. Schwinger J.— Phys. Rev., 1962, v. 128, p. 2425.
17. Арбузов Б. А., Тавхелидзе А. Н., Фауатов Р. Н.— ДАН СССР, 1961, т. 139, с. 345.
18. Nielsen N. K., Schroer B.— Phys. Lett., 1977, v. B66, p. 373.
19. Дятлов И. Т., Петров В. Ю.— ЖЭТФ, 1978, т. 75, с. 1541.
20. Coleman S., Jackiw R., Susskind L.— Ann. of Phys., 1975, v. 93, p. 267.
21. Logunov A. A., Soloviev L. D., Tavkhelidze A. N.— Phys. Lett., 1967, v. 24, p. 181.
22. Kuzmin V. A., Tavkhelidze A. N., Chetyrkin K. G.— Pisma v ZhETF, 1977, v. 25, p. 456;
23. Chetyrkin K. G., Krasnikov N. V., Tavkhelidze A. N.— Phys. Lett., 1978, v. 76B, p. 831.
24. Вайтман А. Проблемы в релятивистской динамике квантовых полей. М.: Наука, 1968.
25. Velo G.— Nuovo cimento, 1967, v. 52A, p. 1028.
26. Адлер С., Дашен Р.— Алгебры токов: Пер. с англ. М.: Мир, 1970.
27. Tavkhelidze N. N., Tokarev V. F. Preprint INR P-0243, 1982.
28. Pivovarov A. A., Tavkhelidze N. N., Tokarev V. F.— Phys. Lett., 1983, v. B132, p. 402.
29. Тавхелидзе А. Н., Токарев В. Ф. Препринт ИЯИ, П-0314, М.: 1983.
30. Вайнштейн А. И., Волошин М. Б., Захаров В. И. и др.— УФН, 1977, т. 123, вып. 2, с. 217.