

УДК 539.142

# САМОСОГЛАСОВАННАЯ МОДЕЛЬ КОЛЕБАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНЫХ, КВАДРУПОЛЬНО-ОКТУПОЛЬНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ ДЕФОРМИРОВАННЫХ ЯДЕР

*Б. И. Барц, Е. В. Инонин, Н. А. Шляхов*

Харьковский физико-технический институт, Харьков

Для единого описания коллективных состояний как положительной, так и отрицательной четности развита модель, в которой учитываются наряду с квадрупольными, также и октупольные степени свободы. Рассмотрение опирается на представление о самосогласованном характере взаимодействия колебательных степеней свободы через вращение ядра.

Удается так сформулировать модель, что не производится разложение по отношению амплитуды колебаний к статической деформации, поэтому можно изучать единым образом как деформированные, так и переходные ядра, где статическая деформация может быть невелика. Моменты инерции и колебательные жесткости определяются самосогласованным образом и существенно зависят от углового момента уровня. Это приводит при возрастании углового момента к перестройке спектра от вращательного к эквидистантному.

Обсуждается возможность дополнительной ветви спектра, начинающейся с некоторого значения углового момента. Соответствующие коллективные состояния трактуются как динамические неаксиальные изомеры.

A model for the unified description both of positive- and negative-parity collective states has been developed. Besides the quadrupole degrees of freedom, it also takes into account the octupole ones. The treatment is based on the consideration of a self-consistent nature of the interaction between the vibrations via the rotation.

It is possible to formulate the model so that one can avoid the expansion in terms of the vibrational amplitude to the static deformation ratio. This allows one to extend the same method to the transitional nuclei where the static deformation can be small. The moments of inertia and vibrational rigidities are determined in a self-consistent way and essentially depend on angular momentum. This leads to the rearrangement of the rotational spectra to equidistant ones as the momentum increases.

The possibility of an additional branch starting from some angular momentum value is discussed. The corresponding collective states are interpreted as dynamic nonaxial isomers.

## ВВЕДЕНИЕ

Последнее десятилетие ознаменовалось в теории ядра быстрым развитием микроскопических методов описания ядерной структуры (подробнее — см. [1—3]). Однако непосредственные микроскопические расчеты даже в простейших случаях все еще очень сложны и громоздки, а их результаты могут быть осознаны и интерпретированы в основном лишь в рамках модельных представлений (см., например, [4]). Поэтому разумно, используя идеи, высказанные Беляевым [5], несколько изменить цели микроскопической теории, а именно направить главные усилия не столько на получение точных численных решений уравнений микроскопической теории, сколько сосредоточить их на обосновании успешно зарекомендовавших себя феноменологических моделей.

Последние должны будут при этом, разумеется, совершенствоваться с учетом как накопленного опыта в описании данных ядерных явлений, так и достижений микроскопической теории.

Обзору развития одной из таких моделей и посвящена настоящая работа. Как известно, в спектрах возбуждений ядер переходной области и актиноидов наблюдается большое число уровней при энергиях порядка 1—2 МэВ, носящих коллективный характер и связанных с возбуждениями ядерной поверхности.

Феноменологическая теория колебательно-вращательных спектров деформированных ядер развивалась многими авторами, начиная с классических работ О. Бора и Моттельсона [6, 7]. Построенный О. Бором гамильтониан широко использовался впоследствии в работах Давыдова и его сотрудников [8—10] для изучения неаксиальных ядер (модель Давыдова — Филиппова [8]), а также связи  $\beta$ -колебаний с вращениями в так называемых мягких ядрах, деформация которых существенно изменяется с ростом вращательного момента ядра (модель Давыдова — Чабана [9]).

Последовательный учет как вращательных, так и колебательных (но только квадрупольных) степеней свободы был осуществлен Фесслером и Грайнером [11, 12]. В этом подходе, получившем название «колебательно-вращательная модель» (или модель Фесслера — Грайнера), существенно используются два обстоятельства. Во-первых, рассмотрение лишь квадрупольных колебаний приводит к тому, что момент инерции  $\mathcal{I}_3$ , связанный с вращением вокруг оси симметрии, зависит лишь от одной колебательной переменной. Во-вторых, предположение о сильной статической деформации означает слабую зависимость от колебательных переменных моментов инерции  $\mathcal{I}_1$  и  $\mathcal{I}_2$ , связанных с вращениями вокруг поперечных осей; другими словами, в теории возникают малые параметры,

$$|(a_{\lambda\mu} - \bar{a}_{\lambda\mu})/\beta_0| \ll 1 \quad (1)$$

( $a_{\lambda\mu}$  — колебательные переменные,  $\bar{a}_{\lambda\mu}$  — их средние значения,  $\beta_0$  — параметр деформации).

Для описания наблюдающихся состояний с отрицательной четностью необходимо включить в рассмотрение октупольные степени свободы. Однако при этом момент инерции  $\mathcal{I}_3$  становится функцией нескольких колебательных переменных  $a_{\lambda\mu}$  с  $\mu \neq 0$ , характеризующих отклонение формы ядра от аксиально-симметричной (при учете лишь квадрупольных степеней свободы \* момент инерции определяется только одной амплитудой  $a_{22}$ ), в результате колебания оказываются связанными между собой. Поэтому в ранних работах [14—18] при описании октупольных колебаний авторам приходилось делать дополнительные приближения: предполагать добавочную симметрию деформационного потенциала или совсем не учитывать квадрупольные степени свободы. В [19, 20] учитывались как октупольные, так и квадрупольные переменные, однако использованный в них метод приближенного разделения переменных не может счи-

\* В рамках такого приближения выполнена работа [13].

таться достаточно обоснованным и пригоден поэтому лишь для предварительного описания. Проблеме взаимодействия квадрупольных и октупольных степеней свободы посвящена и работа [21]. Однако волновые функции построены в [21] без учета этого взаимодействия и потому могут быть использованы лишь для последующей диагонализации.

Для описания квадрупольно-октупольных возбуждений ядерной поверхности с учетом их взаимодействия через вращения вокруг оси симметрии был предложен метод [22—25], основанный на самосогласованном описании взаимодействующих колебаний. Этот подход опирается на тот факт, что потенциал взаимодействия определяется моментами инерции, а последние в свою очередь целым набором колебательных амплитуд. Поэтому разумно предполагать, что потенциал является достаточно плавной функцией от каждой из колебательных переменных, описывающих взаимодействующие степени свободы. В изучаемой задаче это действительно имеет место, так как уже при рассмотрении квадрупольных и октупольных степеней свободы четыре из них дают вклад в момент  $\mathcal{I}_3$  и, следовательно, в потенциал взаимодействия колебаний. В принципе более высокие мультиполи также могут вносить свой вклад, причем применимость приближения самосогласованных колебаний в этом случае будет только увеличиваться. Заметим, что суммирование по мультиполям ограничено согласно [26] неравенством  $\lambda \leq A^{1/3}$ .

Разделение колебательных переменных с помощью вариационного принципа позволяет получить наилучшую волновую функцию ядра (как функцию коллективных переменных) среди всех мультипликативных функций, описывающих независимые или квазинезависимые колебания.

Тот факт, что количество амплитуд колебаний, нарушающих аксиальную симметрию и потому дающих вклад в момент инерции  $\mathcal{I}_3$ , достаточно велико, позволяет и существенно упростить структуру уравнений Хартри для отдельных колебаний. Так, в предположении о достаточной малости амплитуд взаимодействие колебаний приводит только к изменению жесткостей и, следовательно, частот. Такая перенормировка частот зависит от среднеквадратичных значений амплитуд и потому для каждой полосы  $\{K, \{n_{\lambda\mu}\}\} \equiv p$  оказывается различной. Энергия системы взаимодействующих колебаний (фононов) не равна сумме их энергий, но определяется более сложным выражением.

Для детального сравнения рассчитанных спектров с наблюдаемыми необходимо, разумеется, учесть отличие моментов инерции  $\mathcal{I}_1$  и  $\mathcal{I}_2$  от их статического значения  $\mathcal{I}_0$ , а также возникающие при учете октупольных степеней свободы недиагональные элементы тензора инерции. Соответствующая часть коллективного гамильтониана, обозначаемая обычно как  $\hat{H}_{\text{vibrot}}$ , являясь оператором как по колебательным, так и по вращательным переменным, приводит к смешиванию вращательных полос — величины  $K$ ,  $\{n_{\lambda\mu}\}$  перестают быть точными квантовыми числами, однако их удобно использовать для маркировки коллективных состояний.

Предложенный метод (можно назвать его методом Хартри для фононов или методом самосогласованных фононов) позволил дать неплохое описание колебательно-вращательных спектров деформированных ядер.

При этом рассматривались лишь так называемые жесткие ядра и использовались условия (1). В настоящей работе метод самосогласованных фононов излагается таким образом, что становится возможным рассмотрение не только жестких, но и мягких ядер, в которых динамическая деформация сравнима со статической и условия (1) не выполняются. При этом равновесная деформация определяется из условия минимума полной колебательно-вращательной энергии. Такой подход восходит к работе Давыдова — Чабана [9].

Существенная зависимость всех моментов инерции от колебательных амплитуд приводит к тому, что взаимодействие между колебаниями осуществляется через вращения вокруг всех осей. В результате структура взаимодействия усложняется и оно охватывает все моды колебаний, а не только поперечные ( $\mu \neq 0$ ), как это имеет место для жестких ядер. Такое рассмотрение приводит к тому, что моменты инерции при переходе от одного уровня к другому в данной вращательной полосе могут заметно изменяться; это приводит к существенной перестройке вращательных спектров. Значения моментов инерции определяются как функции углового момента самосогласованным образом.

#### 1. КОЛЕБАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНЫЙ ГАМИЛЬТониАН ДЛЯ ВОЗБУЖДЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ МУЛЬТИПОЛЬНОСТИ

Колебательно-вращательная модель основана на классической работе О. Бора [6], который ввел внутреннюю систему координат, жестко связанную с ядром. При этом переменные  $\alpha_{\lambda\mu}$ , описывающие форму поверхности ядра в лабораторной системе

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left( 1 + \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \varphi) \right), \quad (2)$$

выражаются через переменные  $a_{\lambda\mu}$ , описывающие деформацию ядерной поверхности во внутренней системе координат

$$R(\theta', \varphi') = R_0 \left( 1 + \sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^*(\theta', \varphi') \right), \quad (3)$$

и углы Эйлера  $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ , задающие ориентацию ядра как целого

$$\alpha_{\lambda\mu} = \sum_{\nu} D_{\mu\nu}^{\lambda*}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) a_{\lambda\nu}. \quad (4)$$

Ограничиваясь рассмотрением квадрупольных деформаций, О. Бор фиксировал внутреннюю систему отсчета условиями

$$a_{21} = a_{2-1} = 0, \quad a_{2-2} = a_{22}, \quad (5)$$

означающими, что оси этой системы являются главными осями эллипсоида (квадруполоида) деформаций.

Переходя к деформациям более высокой мультипольности, будем предполагать, что они так же, как и квадрупольные, сохраняют симметрию ядра относительно плоскости  $ZOX$ , проходящей через ось

симметрии ядра. Это предположение

$$a_{\lambda-\mu} = (-1)^\mu a_{\lambda\mu}, \quad (6)$$

совместно с требованием вещественности радиуса ядра (3) приводит к вещественности амплитуд  $a_{\lambda\mu}$

$$a_{\lambda\mu}^* = a_{\lambda\mu}. \quad (7)$$

К этому же выводу можно прийти и другим путем. Координаты и скорости, как известно, по-разному ведут себя при обращении времени: координаты не изменяются, в то время как скорости изменяют знак. В соответствии с этим, рассматривая величины  $a_{\lambda\mu}$  непосредственно как коллективные координаты, естественно потребовать их инвариантность при обращении времени, что сводится к условиям (7).

Так как амплитуды колебаний  $a_{\lambda\mu}$  и  $a_{\lambda-\mu}$  связаны между собой, независимыми можно считать лишь те из них, для которых  $\mu \geq 0$ . Поэтому квадрупольные колебания описываются двумя переменными, а октупольные — четырьмя.

В настоящей работе мы ограничиваемся рассмотрением аксиально-симметричных в основном состоянии ядер, для которых минимуму потенциальной энергии  $V(\{a_{\lambda\mu}\})$  соответствуют значения переменных  $a_{\lambda\mu}$ :

$$a_{\lambda\mu} = \beta_\lambda \delta_{\mu 0}, \quad (8)$$

где  $\beta_\lambda$  — параметр  $\lambda$ -польной деформации.

Считая, что мультипольные деформации более высокого порядка, чем квадрупольные, и представляют собой малые поправки, будем предполагать, что статическая деформация является чисто квадрупольной:

$$\beta_2 \equiv \beta_0, \quad \beta_3 = \beta_4 = \dots = 0. \quad (9)$$

Колебательно-вращательная модель [6, 10] исходит из классической энергии поверженных возбуждений

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\lambda\mu} B_\lambda |\alpha_{\lambda\mu}|^2 + V(\{\alpha_{\lambda\mu}\}), \quad (10)$$

где  $B_\lambda$  — массовые параметры. Переходя с помощью (4) от коллективных переменных  $\alpha_{\lambda\mu}$  в лабораторной системе к колебательным переменным  $a_{\lambda\mu}$  во внутренней системе и углам Эйлера  $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ , характеризующим ориентацию ядра, получаем

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\lambda\mu} B_\lambda |\dot{a}_{\lambda\mu}|^2 + \sum_{i, \lambda\mu} \omega'_i a_{\lambda\mu} F_{i, \lambda\mu} + \frac{1}{2} \sum_{i, j} \mathcal{I}_{ij} \omega'_i \omega'_j + V(\{a_{\lambda\mu}\}), \quad (11)$$

где  $V(\{a_{\lambda\mu}\})$  — потенциал деформации;  $\omega'_i$  — скорости вращения вокруг осей внутренней системы;  $\omega'_i \equiv \dot{\beta}_i$ ;  $\mathcal{I}_{ij}$  — тензор инерции:

$$\mathcal{I}_{ij} \equiv \sum_{\lambda\mu\nu\sigma} B_\lambda a_{\lambda\nu} a_{\lambda\mu} \langle \lambda\mu | \hat{L}_i | \lambda\sigma \rangle \langle \lambda\sigma | \hat{L}_j | \lambda\nu \rangle, \quad (12)$$

диагональные элементы которого представляют собой моменты инерции; коэффициенты

$$F_{i, \lambda\mu} \equiv - \sum_{\nu} B_\lambda \text{Im} \langle \lambda\nu | \hat{L}_i | \lambda\mu \rangle a_{\lambda\nu} \quad (13)$$

описывают «классическое» взаимодействие колебаний с вращениями.



Общая процедура квантования (см. подробнее [12]) приводит к гамильтониану вида

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\kappa_1 \kappa_2} \hat{p}_{\kappa_1} g_{\kappa_1 \kappa_2}^{-1} \hat{p}_{\kappa_2} + V_{\text{add}} + V. \quad (19)$$

Здесь  $\hat{p}_{\kappa}$  — коллективные импульсы, соответствующие коллективным координатам (17):

$$\hat{p}_{\kappa} = \left\{ \hat{M}'_1, \hat{M}'_2, \hat{M}'_3, -i \frac{\partial}{\partial a_{20}}, -i \frac{\partial}{\partial a_{22}}, \right. \\ \left. -i \frac{\partial}{\partial a_{30}}, -i \frac{\partial}{\partial a_{31}}, -i \frac{\partial}{\partial a_{32}}, -i \frac{\partial}{\partial a_{33}} \right\}; \quad (20)$$

$\hat{M}'_i$  — операторы углового момента во внутренней системе;  $V_{\text{add}}$  — дополнительный потенциал, связанный с зависимостью массовых коэффициентов  $g_{\kappa_1 \kappa_2}$  от динамических переменных  $a_{\lambda \mu}$ :

$$V_{\text{add}} = \frac{1}{8D} \sum_{\lambda \mu} \frac{1 + \delta_{\mu 0}}{B_{\lambda}} \left( \frac{\partial^2 D}{\partial a_{\lambda \mu}^2} - \frac{1}{2D} \left( \frac{\partial D}{\partial a_{\lambda \mu}} \right)^2 \right); \quad (21)$$

здесь

$$D = \sqrt{\det g_{\kappa_1 \kappa_2}}. \quad (22)$$

## 2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КОЛЕБАНИЙ И ПРИБЛИЖЕНИЕ САМОСОГЛАСОВАННЫХ ФОНОНОВ В ЖЕСТКИХ ЯДРАХ

Определяющая коллективный колебательно-вращательный гамильтониан матрица  $g_{\kappa_1 \kappa_2}^{-1}$  имеет при учете октупольных степеней свободы довольно сложную структуру. В колебательно-вращательной модели обычно предполагается, что колебания происходят вокруг заданной деформированной формы. Другими словами, изучая малые колебания вокруг равновесия, удобно выделить из величин  $a_{\lambda \mu}$  их равновесные значения

$$a_{\lambda \mu} = \beta_0 \delta_{\lambda 2} \delta_{\mu 0} + a'_{\lambda \mu} \quad (23)$$

и полагать, что амплитуды  $a'_{\lambda \mu}$  малы

$$|a'_{\lambda \mu} / \beta_0| \ll 1, \quad (24)$$

и можно ограничиваться главными членами в разложениях по ним.

Вначале мы рассмотрим колебательно-вращательные возбуждения, удовлетворяющие условию (24), имея в виду приложение к так называемым жестким ядрам, а затем (начиная с разд. 9) обобщим рассмотрение так, чтобы не использовать предположение (24) и сделать тем самым теорию применимой к описанию не только жестких, но и мягких ядер, у которых статическая деформация может быть и невелика.

Обратим внимание на тот факт, что моменты инерции  $\mathcal{I}_{11}$  и  $\mathcal{I}_{22}$ , связанные с вращениями вокруг осей 1 и 2, перпендикулярных оси

симметрии, содержат статическую составляющую  $\mathcal{Y}_0$ :

$$\mathcal{Y}_0 = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} B_{\lambda} \lambda (\lambda + 1) \beta_{\lambda}^2 = 3B_2 \beta_0^2. \quad (25)$$

Остальные элементы тензора  $\mathcal{Y}_{ij}$  квадратичны по малым амплитудам  $a'_{\lambda\mu}$ , а величины  $F_{i,\lambda\mu}$  линейны. Поэтому определитель матрицы  $g_{\kappa_1 \kappa_2}$  сводится к произведению ее диагональных элементов

$$\det g_{\kappa_1 \kappa_2} \simeq \mathcal{Y}_0^2 \mathcal{Y}_{33} 2B_2^2 8B_3^4. \quad (26)$$

Главные члены разложения обратной матрицы  $g_{\kappa_1 \kappa_2}^{-1}$  определяют первые два слагаемых в колебательно-вращательном гамильтониане

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{rot}} + \hat{H}_{\text{vib}} + \hat{H}_{\text{vibrot}}, \quad (27)$$

причем во вращательную часть  $\hat{H}_{\text{rot}}$  включены члены

$$\hat{H}_{\text{rot}} \equiv \frac{\hat{M}'_1{}^2 + \hat{M}'_2{}^2}{2\mathcal{Y}_0} + \frac{\hat{M}'_3{}^2}{2\mathcal{Y}_{33}}. \quad (28)$$

В колебательную часть  $H_{\text{vib}}$  кроме энергии деформации  $V$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\lambda\mu \geq 0} c_{\lambda\mu} a'_{\lambda\mu}{}^2 \quad (29)$$

входит и потенциал  $V_{\text{add}}$ , равный согласно (21)

$$V_{\text{add}} \simeq \frac{1}{\mathcal{Y}_{33}} \left( S - \frac{3}{4\mathcal{Y}_{33}} \sum_{\lambda\mu} B_{\lambda} \mu^2 (\mu^2 - 4) a'_{\lambda\mu}{}^2 \right), \quad (30)$$

где

$$S \equiv \frac{1}{4} \sum_{\lambda\mu \geq 0} \mu^2 - \frac{3}{2}. \quad (31)$$

Вводя более компактные обозначения

$$q_r \equiv a'_{\lambda\mu}, \quad B_r \equiv B_{\lambda} \frac{2}{4 + \delta_{\mu 0}}, \quad (32)$$

где

$$r = \{20, 22, 30, 31, 32, 33\}, \quad (33)$$

колебательный гамильтониан можно представить как

$$\hat{H}_{\text{vib}} = \sum_r \left\{ -\frac{1}{2B_r} \frac{\partial^2}{\partial q_r^2} + \frac{1}{2} \left( c_r - \frac{3B_r \mu^2 (\mu^2 - 4)}{4\mathcal{Y}_{33}} \right) q_r^2 \right\} + \frac{S}{\mathcal{Y}_{33}}. \quad (34)$$

Что же касается колебательно-вращательной части  $\hat{H}_{\text{vibrot}}$ , то она определяется последующими членами разложения обратной матрицы  $g_{\kappa_1 \kappa_2}^{-1}$  по малым амплитудам колебаний и имеет довольно громоздкую структуру. Явный вид  $\hat{H}_{\text{vibrot}}$  будет приведен ниже в разд. 5.

Для колебательно-вращательной модели традиционным является подход, при котором вначале строят волновые функции для гамиль-



тониана

$$\hat{H}_0 \equiv \hat{H}_{\text{vib}} + \hat{H}_{\text{rot}}, \quad (35)$$

а затем уже с помощью диагонализации на этих функциях полного коллективного гамильтониана  $\hat{H}$  получают окончательные решения. Представляя волновую функцию гамильтониана  $\hat{H}_0$  как произведение колебательной и вращательной функций

$$\Phi(\{q_r\}, \theta_1, \theta_2, \theta_3) = \chi_{IK}(\{q_r\}) D_{MK}^{I*}(\theta_1, \theta_2, \theta_3), \quad (36)$$

где  $I$  — полный момент ядра;  $M$  и  $K$  — его проекции на лабораторную ось и ось симметрии ядра, мы видим, что колебательная функция  $\chi_{IK}$  удовлетворяет уравнению Шредингера

$$\hat{H}_{\text{vib}}^{\text{eff}} \chi_{IK}(\{q_r\}) = E_{IK} \chi_{IK}(\{q_r\}) \quad (37)$$

с эффективным колебательным гамильтонианом

$$\hat{H}_{\text{vib}}^{\text{eff}} = \hat{H}_{\text{vib}} + \frac{K^2}{2\mathcal{Y}_{33}} + \frac{I(I+1) - K^2}{2\mathcal{Y}_0}. \quad (38)$$

Гамильтониан (38) описывает колебания поверхности вращающегося ядра (с моментом  $I$  и проекцией момента на ось симметрии  $K$ ) и может быть по своей структуре разделен на три части

$$\hat{H}_{\text{vib}}^{\text{eff}} = \frac{I(I+1) - K^2}{2\mathcal{Y}_0} + \sum_r \hat{H}_r^{(0)} + V_{\text{int}}. \quad (39)$$

Первая из них связана с вращением вокруг перпендикулярной (по отношению к оси симметрии) оси и не является оператором по колебательным переменным. Вторая часть представляет собой гамильтониан системы невзаимодействующих фононов

$$\hat{H}_r^{(0)} = -\frac{1}{2B_r} \frac{\partial^2}{\partial q_r^2} + \frac{1}{2} c_r q_r^2. \quad (40)$$

Наконец, третью часть образуют слагаемые в  $\hat{H}_{\text{vib}}^{\text{eff}}$ , содержащие в знаменателе момент инерции  $\mathcal{Y}_{33}$  (напомним, что ось 3 внутренней системы — ось симметрии ядра),

$$V_{\text{int}} = \frac{\delta_K}{\mathcal{Y}_{33}} + \frac{\sum_r \gamma_r q_r^2}{\mathcal{Y}_{33}^2}, \quad (41)$$

где

$$\delta_K = K^2/2 + S; \quad \gamma_r = -(3/8)B_r \mu^2 (\mu^2 - 4). \quad (42)$$

В модели Фесслера — Грайнера [11], в которой рассматриваются лишь квадрупольные степени свободы, момент инерции  $\mathcal{Y}_{33}^{(2)}$  определяется только переменной  $a_{22}$  и часть  $V_{\text{int}}^{(2)}$  сводится просто к центробежной добавке

$$V_{\text{int}}^{(2)} = -\frac{1 - K^2}{16Ba_{22}^2} \quad (43)$$

и не препятствует разделению колебательных переменных.

В общем случае момент инерции  $\mathcal{Y}_{33}$  зависит от всех переменных  $a_{\lambda\mu}$  с ненулевыми проекциями  $\mu$ , соответствующих колебаниям, нарушающим аксиальную симметрию. Поэтому часть  $V_{\text{int}}$  описывает взаимодействие между этими степенями свободы. Тот факт, что при включении в рассмотрение степеней свободы с  $\lambda > 2$  колебательные переменные не разделяются, приводит к определенным трудностям при построении теории низколежащих коллективных состояний аксиальных ядер. Несмотря на значительные усилия, приложенные для преодоления этих трудностей (см., например, [19, 21]), эту проблему вряд ли можно было считать решенной.

Представляется разумным [22] коллективную волновую функцию  $\chi_{IK}(\{q_r\})$ , описывающую как квадрупольные, так и октупольные (а в принципе, и более высокой мультипольности) колебания, искать в виде

$$\chi_{IK}(\{q_r\}) = \prod_r \chi_r(q_r), \quad (44)$$

где функции  $\chi_r(q_r)$  определяются с помощью вариационного принципа

$$\frac{\delta}{\delta \chi_r} \left\{ \langle \chi_{IK} | \hat{H}_{\text{vib}}^{\text{eff}} | \chi_{IK} \rangle - \sum_{r'} \epsilon_{r'} \langle \chi_{r'} | \chi_{r'} \rangle \right\} = 0 \quad (45)$$

( $\epsilon_r$  — множители Лагранжа). Соотношение (44) в совокупности с уравнениями (45) представляет собой приближение Хартри для коллективных (колебательных) степеней свободы и может быть названо приближением «самосогласованных фононов».

Предположение о самосогласованном характере взаимодействия фононов основывается на следующих соображениях. Дело в том, что уже при учете октупольных степеней свободы в момент инерции  $\mathcal{Y}_{33}$  вносят вклад четыре слагаемых, поэтому роль каждого из них в отдельности относительно невелика.

Так как все эти слагаемые одного знака (положительные), то компенсационных эффектов быть не может и момент инерции  $\mathcal{Y}_{33}$  и, следовательно, потенциал взаимодействия  $V_{\text{int}}$  является достаточно плавной функцией каждого из переменных  $q_r$  при некотором (среднем) значении остальных переменных. Что же касается особенности потенциала при  $q_{r_1} = q_{r_2} = \dots = q_{r_N} = 0$  ( $N$  — число взаимодействующих степеней свободы), то с увеличением размерности пространства ее роль уменьшается и уже при  $N = 4$  (квадруполь + октуполь) эта особенность несущественна.

### 3. ПРИБЛИЖЕНИЕ БОЛЬШОГО ЧИСЛА ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Уравнения Хартри для фононных волновых функций  $\chi_r(q_r)$  могут быть получены и решены без дополнительных приближений. Однако эти уравнения принимают особенно простой вид и картина становится довольно наглядной, если воспользоваться тем, что количество взаимодействующих степеней свободы  $N$  достаточно велико, и разложить потенциал взаимодействия в ряд по степеням  $1/N$ .

Рассматривая с этой точки зрения усреднение по некоторой переменной  $q_r$  величины  $1/\Psi_{33}$ , входящей в потенциал взаимодействия  $V_{\text{int}}$ , нетрудно установить [22]

$$\left\langle \frac{1}{\Psi_{33}} \right\rangle_{q_r} \approx \frac{1}{\langle \Psi_{33} \rangle_{q_r}}, \quad (46)$$

где отброшены члены порядка  $1/N^3$  и выше. В принципе можно удерживать такие члены и получать более точные, однако, громоздкие выражения. Отметим, что поправка третьего порядка к (46) содержит дополнительную малость, так как она пропорциональна дисперсии колебаний  $\langle q_r^4 \rangle - \langle q_r^2 \rangle^2$ . Поэтому даже с учетом накопления погрешностей при последовательном усреднении по всем переменным приближение

$$\left\langle \frac{1}{\Psi_{33}} \right\rangle \approx \frac{1}{\langle \Psi_{33} \rangle} \quad (47)$$

и аналогичное ему приближение

$$\left\langle \frac{\sum_r \gamma_r q_r^2}{\Psi_{33}^2} \right\rangle \approx \frac{\sum_r \gamma_r \langle q_r^2 \rangle}{\langle \Psi_{33} \rangle^2} \quad (48)$$

являются достаточно хорошими.

Используя (47), (48), получаем для каждой функции  $\chi_r$  уравнение Шредингера

$$\hat{H}_r \chi_r = \varepsilon_r \chi_r(q_r) \quad (49)$$

с однофононным осцилляторным гамильтонианом  $\hat{H}_r$

$$\hat{H}_r = -\frac{1}{2B_r} \frac{d^2}{dq_r^2} + \frac{1}{2} c_r^{(p)} q_r^2, \quad (50)$$

но жесткостью  $c_r^{(p)}$

$$c_r^{(p)} = c_r - \frac{2(\delta_K \mu^2 B_r - \gamma_r)}{\langle \Psi_{33} \rangle_{(p)}^2} - \frac{4 \sum_{r'} \gamma_{r'} \langle q_{r'}^2 \rangle_{(p)}}{\langle \Psi_{33} \rangle_{(p)}^3}, \quad (51)$$

зависящей от средних значений всего набора колебательных координат. Последние, в свою очередь, определяются жесткостями  $c_r^{(p)}$

$$\langle q_r^2 \rangle_{(p)} = \frac{n_r + 1/2}{\sqrt{B_r c_r^{(p)}}}, \quad (52)$$

которые зависят, таким образом, от состояния ядра  $p = \{K, \{n_r\}\}$  (речь, разумеется, идет о зависимости от совокупности чисел  $n_r$  с  $\mu \neq 0$ ).

Если ввести частоты  $\omega_r$  и  $\omega_r^{(p)}$

$$\omega_r = \sqrt{c_r/B_r}, \quad \omega_r^{(p)} = \sqrt{c_r^{(p)}/B_r}, \quad (53)$$

то соотношениям (51) можно придать вид

$$\omega_r^{(p)2} = \omega_r^2 - \frac{\mu^2}{\Psi_{33}} \left\{ K^2 + \frac{3}{4} (\mu^2 - 4) + \kappa_{(p)} + 2S \right\}, \quad (54)$$

где среднее значение момента инерции в данном состоянии определяется согласно

$$\bar{J}_{33} = \sum_r \mu^2 \frac{n_r + 1/2}{\omega_r^{(p)}} \quad (55)$$

и введено обозначение

$$\kappa_{(p)} = -\frac{3}{2\bar{J}_{33}} \sum_r \mu^2 (\mu^2 - 4) \frac{n_r + 1/2}{\omega_r^{(p)}} \quad (56)$$

[напомним, что постоянная  $S$  определена формулой (31)].

Уравнения (54) совместно с (55) и (56) образуют замкнутую систему связанных алгебраических уравнений для характеризующих данное состояние  $p$  частот  $\omega_r^{(p)}$ . В пренебрежении колебательно-вращательным взаимодействием  $\hat{H}_{\text{vib rot}}$  эти частоты не зависят от полного момента  $I$  и потому характеризуют всю вращательную полосу, построенную на данном уровне  $p$ .

Уравнения (54) — (56) сводятся к системе из двух уравнений с двумя неизвестными, имеющей, как показывает анализ, единственное решение.

В табл. 1 в качестве примера приведены частоты  $\omega_r^{(p)}$  для различных полос  $p$  (выбор исходных частот  $\omega_r$  соответствуют ядру  $^{238}\text{U}$ ,

Таблица 1. Перестройка ядерных характеристик

Характеристика, кэВ	Исходное значение, кэВ	Полоса				
		g, h. ( $\beta$ )	$n_{22}=1;$ $K=2$	$n_{31}=1;$ $K=1$	$n_{32}=1;$ $K=2$	$n_{33}=1;$ $K=3$
$\omega_{22}^{(p)}$	965	832	842	814	841	823
$\omega_{31}^{(p)}$	806	790	780	780	780	774
$\omega_{32}^{(p)}$	977	847	857	830	856	838
$\omega_{33}^{(p)}$	2000	1715	1813	1736	1811	1797
$1/\bar{J}_{33}$		124	79	106	80	77
$E^{(p)}$	$(E_{g, s} = 330)$		-104	-18	-102	-161

см. ниже). Мы видим, что уже нулевые колебания в основном состоянии существенно нарушают аксиальную симметрию ядра: это приводит к существенному отличию частот  $\omega_r^{(g)}$  от исходных  $\omega_r$ . Хотя

изменение каждой из жесткостей при возбуждении не особенно велико [значения  $\omega^{(p)}$  для различных полос близки], суммарный эффект дополнительного нарушения аксиальной симметрии не так мал — момент инерции  $\bar{Y}_{33}$  заметно изменяется от полосы к полосе. С другой стороны, даже при возбуждении кванта колебаний, когда вклад соответствующей степени свободы в момент  $\bar{Y}_{33}$  возрастает в три раза, величина  $1/\bar{Y}_{33}$  изменяется не более чем в полтора раза. Это подтверждает сделанное выше предположение о характере зависимости части  $V_{\text{int}}$  от колебательных переменных.

#### 4. СПЕКТР ГАМИЛЬТОНИАНА $\hat{H}_0$

Частоты  $\omega^{(p)}$  непосредственно определяют фононные осцилляторные функции  $\chi_r(q_r)$ , из которых построена в соответствии с (44) полная колебательная функция  $\chi_{IK}$  и согласно (36) полная коллективная функция  $\Phi_{IKM}$ . Однако необходимо учесть, что выбор осей внутренней системы координат не является однозначным в том смысле, что существуют различные возможности выбора индексации и направления координатных осей (для данной трехосной системы) [6]. Так как данной форме ядра в лабораторной системе соответствует единственный набор коллективных переменных  $\alpha_{\lambda\mu}$ , то коллективная волновая функция, выраженная через углы Эйлера и амплитуды колебаний во внутренней системе координат, должна быть инвариантной относительно выбора последней. Для этого необходимо, чтобы волновая функция была инвариантна по отношению к преобразованиям, задаваемым операторами  $\hat{R}_1$  (изменение направления отсчета по осям 2 и 3) и  $\hat{R}_2$  (поворот вокруг оси 3 на  $\pi/2$ ). Действуя на функцию (36), получаем [24] для рассматриваемой модели

$$K = \sum_r \mu_r n_r. \quad (57)$$

Требуемым свойством инвариантности относительно преобразования  $\hat{R}_1$  обладает функция

$$\Psi_{IK|M} = \frac{1}{\sqrt{2(1+\delta_{K0})}} \{ \Phi_{IK} + (-1)^{I-K} \pi \Phi_{I, -K} \}, \quad (58)$$

где

$$\pi = (-1)^{\sum_r \lambda n_r} \quad (59)$$

— четность состояния.

Из (58) при  $K = 0$  следует известное правило отбора

$$\pi = (-1)^I, \quad K = 0. \quad (60)$$

Заметим, что симметризация (58) волновых функций сказывается при вычислении с их помощью недиагональных матричных элементов.

Энергия системы взаимодействующих фононов определяется средним значением гамильтониана  $\hat{H}_{\text{vib}}^{c\text{ff}}$  по волновым функциям  $\chi_{IK}$ , что приводит к

$$E_{IK}(\{n_r\}) = \frac{I(I+1) - K^2}{2\mathcal{Y}_0} + \sum_r \langle \chi_r | \hat{H}_r^{(0)} | \chi_r \rangle + \frac{\delta_K + \frac{\kappa(p)}{4}}{\mathcal{Y}_{33}} =$$

$$= \frac{I(I+1) - K^2}{2\mathcal{Y}_0} + \sum_r (n_r + 1/2) \left( \omega_r + \frac{(\omega_r^{(p)} - \omega_r)^2}{2\omega_r^{(p)}} \right) +$$

$$+ \frac{K^2/2 + \kappa_p/4 + S}{\mathcal{Y}_{33}}. \quad (61)$$

При этом энергия возбуждения  $E_{IK}^*(\{n_r\})$ , очевидно, представляет собой разность энергий данного  $\{IK, \{n_r\}\}$  и основного  $\{00, \{n_r = 0\}\}$  состояний

$$E_{IK}(\{n_r\}) = E_{IK}^*(\{n_r\}) - E_{00}(\{n_r = 0\}). \quad (62)$$

Рассмотрим три типа возбужденных состояний.

1. Основная полоса,  $p = g \equiv \{0, \{n_r = 0\}\}$ .

Энергия возбуждения оказывается чисто вращательной (вокруг поперечной к оси симметрии)

$$E_{I0}^*(\{n_r = 0\}) = I(I+1)/2\mathcal{Y}_0. \quad (63)$$

2. Возбуждения, не нарушающие аксиальную симметрию ядра, т. е.  $K = 0$  и отличны от нуля только некоторые из чисел  $n_r$  с  $\mu = 0$ . К таким возбуждениям относятся прежде всего  $\beta$ -полосы  $n_{20} = 1, 2, \dots$ , а также октупольные возбуждения  $n_{30} = 1, 2, \dots$  и т. д. Возбуждения этого типа не изменяют момента инерции  $\mathcal{Y}_{33}$  и частот  $\omega_r^{(p)}$  по сравнению с основным состоянием

$$\omega_r^{(p)} = \omega_r^{(g)}, \quad (64)$$

причем

$$\omega_{\lambda 0}^{(p)} = \omega_{\lambda 0} \quad (65)$$

(для любых состояний).

Энергия возбуждения состоит в этом случае из вращательной энергии и энергии возбужденных фононов

$$E_{I0}^*(\{n_{\lambda\mu} \sim \delta_{\mu 0}\}) = \frac{I(I+1)}{2\mathcal{Y}_0} + \sum_{\lambda} \omega_{\lambda 0} n_{\lambda}. \quad (66)$$

3. Возбуждения, нарушающие аксиальную симметрию ядра. Нарушение симметрии (дополнительное по отношению к создаваемому в основном состоянии нулевыми колебаниями) приводит к изменению момента инерции  $\mathcal{Y}_{33}$  и частот  $\omega_r^{(p)}$

$$\langle \mathcal{Y}_{33} \rangle_{(p)} \neq \langle \mathcal{Y}_{33} \rangle_{(g)}, \quad \omega_r^{(p)} \neq \omega_r^{(g)} (\mu \neq 0). \quad (67)$$

В результате энергия возбуждения содержит дополнительную часть  $E^{(p)}$ , связанную с перестройкой

$$E^{(p)} = \sum_r \frac{1}{2} \left( \frac{(\omega_r^{(p)} - \omega_r)^2}{2\omega_r^{(p)}} - \frac{(\omega_r^{(g)} - \omega_r)^2}{2\omega_r^{(g)}} \right) + \frac{\kappa^{(p)}}{4} + S - \frac{\kappa^{(g)}}{4} + S \quad (68)$$

$$+ \frac{S}{\langle \Psi_{33} \rangle_p} - \frac{S}{\langle \Psi_{33} \rangle_{(g)}}$$

(см. табл. 1) и определяется выражением

$$E_{IK}^* (\{n_r\}) = \frac{I(I+1) - K^2}{2\mathcal{Y}_0} + \sum_r \left( \omega_r + \frac{(\omega_r^{(p)} - \omega_r)^2}{2\omega_r^{(p)}} \right) n_r + \frac{K^2}{2\mathcal{Y}_{33}} + E^{(p)}. \quad (69)$$

### 5. УЧЕТ КОЛЕБАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Следующим шагом является учет [24, 25] части  $\hat{H}_{\text{vib rot}}$  полного коллективного гамильтониана (27), ответственной за отклонение энергий во вращательной полосе от закона  $E_I \sim I(I+1)$ . Точные волновые функции и энергии получаются при этом диагонализацией полного гамильтониана на базе построенных выше функций

$$\Psi_{IM}^{(p)} = \sum_{\nu'} \Psi_{IM, p} c_{\nu'}^{(p)}. \quad (70)$$

Заметим, что волновые функции  $\Psi_{IM, p}$ , относящиеся к различным состояниям  $p_1$  и  $p_2$ , строго говоря, не ортогональны друг к другу. Однако реально параметры  $\omega_r^{(p)}$  «одночастичных» функций  $\chi_r(q_r)$  отличаются не слишком сильно (см. табл. 1) и потому эффекты неортогональности оказываются пренебрежимо малыми. (Даже при  $\Delta\omega/\omega = 0,1$  интеграл перекрытия равен 0,99943.)

Колебательно-вращательную часть  $\hat{H}_{\text{vib rot}}$  можно представить как сумму

$$\hat{H}_{\text{vib rot}} = \hat{H}_{\text{vib rot}}^{(2)} + \hat{H}_{\text{vib rot}}^{(3)} \quad (71)$$

квадрупольного оператора  $\hat{H}_{\text{vib rot}}^{(2)}$ , совпадающего с оператором  $\hat{H}_{\text{vib rot}}$  в модели Фесслера — Грайнера (см. [12]),

$$\hat{H}_{\text{vib rot}}^{(2)} = \frac{1}{2\mathcal{Y}_0} \left\{ \hat{M}_1'^2 \left( -2 \frac{a_{20}'}{\beta_0} - 2 \frac{\sqrt{6}}{3} \frac{a_{22}}{\beta_0} + \right. \right. \\ \left. \left. + 3 \frac{a_{20}''}{\beta_0^2} + 2 \frac{a_{22}''}{\beta_0^2} + 2 \sqrt{6} \frac{a_{20}'' a_{22}''}{\beta_0^2} \right) + \hat{M}_2'^2 \left( -2 \frac{a_{20}'}{\beta_0} + \frac{2\sqrt{6}}{3} \frac{a_{22}}{\beta_0} + \right. \right. \\ \left. \left. + 3 \frac{a_{20}''}{\beta_0^2} + 2 \frac{a_{22}''}{\beta_0^2} - 2 \sqrt{6} \frac{a_{20}'' a_{22}''}{\beta_0^2} \right) \right\} \quad (72)$$

и оператора  $\hat{H}_{\text{vib rot}}^{(3)}$ , возникающего вследствие учета октапольных степеней свободы,

$$H_{\text{vib rot}}^{(3)} = \frac{1}{\mathcal{Y}_0} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\mu_1 \mu_2} \hat{P}_{3\mu_1} f_{3\mu_1} f_{3\mu_2} \hat{P}_{3\mu_2} - \hat{M}'_2 \sum_{\mu} f_{3\mu} \hat{P}_{3\mu} - \right. \\ \left. - \frac{\mathcal{Y}_{13}}{2\mathcal{Y}_{33}} (\hat{M}'_1 \hat{M}'_3 + \hat{M}'_3 \hat{M}'_1) + \frac{\mathcal{Y}_{13}^2}{2\mathcal{Y}_0 \mathcal{Y}_{33}} \hat{M}'_1{}^2 - \frac{\mathcal{Y}_{11}^{(3)}}{2\mathcal{Y}_0} \hat{M}'_1{}^2 \right\}, \quad (73)$$

где  $\mathcal{Y}_{11}^{(3)}$  — октапольная часть момента инерции  $\mathcal{Y}_{11}$  [см. (14)], а амплитуды  $f_{\lambda\mu} \equiv F_{2,\lambda\mu}/B_{\lambda\mu}$  равны:

$$\left. \begin{aligned} f_{30} &= 2\sqrt{3} a_{31}, & f_{31} &= \sqrt{5/2} a_{32} - \sqrt{3} a_{30}; \\ f_{32} &= \sqrt{3/2} a_{33} - \sqrt{5/2} a_{31}, & f_{33} &= -\sqrt{3/2} a_{32}. \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Каждое слагаемое в операторе  $\hat{H}_{\text{vib rot}}$  представляет собой произведение операторов углового момента, действующих только на вращательные переменные, и «колебательных» операторов  $a_{\lambda\mu}$  и  $\hat{p}_{\lambda\mu}$ .

Не приводя громоздких выражений для матричных элементов колебательно-вращательного взаимодействия (которые вычисляются известным методом, см., например, [12]), ограничимся обсуждением их структуры.

Прежде всего заметим, что уже диагональная часть  $\hat{H}_{\text{vib rot}}$  приводит к перенормировке моментов инерции для отдельных полос (табл. 2). Эта перенормировка характеризуется малым параметром

Таблица 2. Перестройка вращательной энергии для различных полос

Полоса	g. b	$\beta$	$\gamma$	Октаполи				$\beta$ -октаполи
				$n_{30}=1;$ $K=0$	$n_{31}=1;$ $K=1$	$n_{32}=1;$ $K=2$	$n_{33}=1;$ $K=3$	
$n_{\lambda\mu};$ $K$	$n_{\lambda\mu}=0;$ $K=0$	$n_{20}=1;$ $K=0$	$n_{22}=1;$ $K=2$	$n_{30}=1;$ $K=0$	$n_{31}=1;$ $K=1$	$n_{32}=1;$ $K=2$	$n_{33}=1;$ $K=3$	$n_{20}=n_{30}=1;$ $K=0$
$\varepsilon^{(P)}/\varepsilon_0$	1,08	1,20	1,15	1,02	1,07	1,05	1,07	1,15

$\varepsilon_0/\omega$  [ $\varepsilon_0 \equiv 1/(2\mathcal{Y}_0)$ ] — вращательная энергия,  $\omega$  — энергия одного из квантов колебаний  $\omega_{\lambda\mu}$ .

Далее, так как часть  $\hat{H}_{\text{vib rot}}$  состоит из слагаемых, линейных или квадратичных по операторам углового момента  $\hat{M}'_i$ , то отличны от нуля матричные элементы с  $|\Delta K| = 0, 1, 2$ . Для состояний с положительной четностью допустимы лишь четные  $K$  и матричных элементов с  $|\Delta K| = 1$  не возникает. Для состояний же отрицательной четности именно эти матричные элементы играют важную роль. Кориолисовы силы ( $|\Delta K| = 1$ ) обусловлены как непосредственным



взаимодействием колебаний с вращениями [слагаемые с  $F_{l,\lambda\mu}$  в кинетической энергии (11)], так и недиагональностью тензора моментов инерции  $\mathcal{Y}_{ij}$ , причем если первые характеризуются только вращательной энергией, то вторые пропорциональны еще и отношению  $1/(\overline{\mathcal{Y}}_{33}\omega)$ .

Матричные элементы с  $|\Delta K| = 0, 2$  значительно меньше корриолисовых, так как содержат дополнительно к  $\epsilon_0$  еще один или два фактора  $\sqrt{\epsilon_0/\omega}$ . Для иллюстрации в табл. 3 приведены численные значения

Таблица 3. Недиagonальные матричные элементы колебательно-вращательного взаимодействия  $\gamma_{pp'}$ , кэВ [см. (75)]

$\pi = +1$				$\pi = -1$				
Полоса	g. b	$\beta$	$\gamma$	Полоса	$n_{30} = 1;$ $K = 0$	$n_{31} = 1;$ $K = 1$	$n_{32} = 1;$ $K = 2$	$n_{33} = 1;$ $K = 3$
g. b	—	-2,0	-1,3	$n_{30} = 1;$ $K = 0$	—	-25,4	-0,2	—
$\beta$	-2,0	—	+0,6	$n_{31} = 1;$ $K = 1$	-25,4	—	-13,2	-0,04
$\gamma$	-1,3	+0,6	—	$n_{32} = 1;$ $K = 2$	-0,2	-13,2	—	-11,5

для различных матричных элементов из расчета для ядра  $^{238}\text{U}$ :

$$\begin{aligned} & \langle IK' \{n'_{\lambda\mu}\} | \hat{H}_{\text{vib rot}} | IK \{n_{\lambda\mu}\} \rangle \equiv \\ \equiv \gamma_{pp'} & \begin{cases} I(I+1) - K^2, & |\Delta K| = 0; \\ \sqrt{I(I+1) - K(K+1)}, & |\Delta K| = 1; \\ \sqrt{I(I+1) - K(K+1)} \sqrt{I(I+1) - (K+1)(K+2)}, & |\Delta K| = 2. \end{cases} \end{aligned} \tag{75}$$

Представляет интерес проследить за перестройкой состояний при «включении» недиагональной части колебательно-вращательного взаимодействия (с помощью изменяющегося от нуля до единицы коэффициента). На рис. 1 показана перестройка энергий 3-состояний различных октупольных полос, средних значений соответствующего числа  $K$

$$\langle K \rangle_p = \sum_{p'} (c_{p'}^p)^2 K \tag{76}$$

и приведенных вероятностей  $E3$ -переходов из основного состояния в данное. Параметр  $\omega_{33}$  для этого расчета выбран таким образом, чтобы «исходные» энергии двух 3-уровней из полос с  $K = 3$  и  $K = 2$  оказались близкими. Естественно, что именно эти состояния перестраиваются наиболее сильно. Однако и два других состояния

с  $K = 1$  и  $K = 0$  также испытывают довольно значительное влияние колебательно-вращательного взаимодействия. Особенно это прояв-

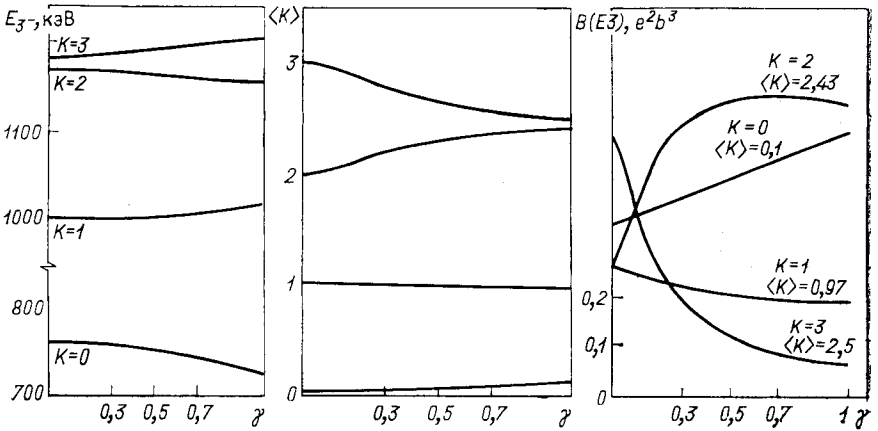


Рис. 1. Перестройка 3-состояний при включении недиагональной части колебательно-вращательного взаимодействия при  $\omega_{33} = 1010$  кэВ

ляется на коэффициентах  $c_p^p$  и, следовательно, на вероятностях электромагнитных переходов между коллективными состояниями.

### 6. ПАРАМЕТРЫ И ИХ ВЫБОР

Коллективный гамильтониан, использованный в настоящем подходе, включает в себя в качестве параметров массовые коэффициенты  $B_\lambda$ , жесткости  $c_{\lambda\mu}$  и параметры статической деформации  $\beta_\lambda$ . Ядро характеризуется девятью величинами (в предположении о квадрупольном характере статической деформации)

$$\beta_2 \equiv \beta_0, B_2, B_3, c_{20}, c_{22}, c_{30}, c_{31}, c_{32}, c_{33}. \tag{77}$$

Для определения волновых функций гамильтониана  $H_0$  достаточно задать шесть частот

$$\omega_{20}, \omega_{22}, \omega_{30}, \omega_{31}, \omega_{32}, \omega_{33}. \tag{78}$$

Для нахождения уровней энергии полного коллективного гамильтониана необходимо знать еще и вращательную энергию

$$\varepsilon_0 \equiv 1/(2\mathcal{I}_0) = 1/(6B_2\beta_0^2), \tag{79}$$

которую можно рассматривать как независимый параметр вместо массового коэффициента  $B_2$  (при хорошо известных из эксперимента величинах  $\beta_0$ ). Эти же величины (78), (79) вместе с  $\beta_0$  определяют и вероятности  $E2$ -переходов между состояниями положительной четности. Вероятности же  $E3$ -переходов, в которых возбуждаются октупольные кванты, обратно пропорциональны массовому коэффициенту  $B_3$ .

В спектрах многих деформированных ядер (отобрано 4 из их числа) кроме основной полосы наблюдаются еще и полосы, которые идентифицируются как  $\beta$  ( $n_{20} = 1$ ),  $\gamma$  ( $n_{22} = 1$ ) и октупольные с  $K = 0, 1, 2$  ( $n_{3K} = 1$ ) возбуждения. Соответственно этому пять параметров из набора (78) выбирались так, чтобы осуществить привязку к одному уровню (как правило, головному) каждой из этих полос. Вращательная энергия  $\epsilon_0$  определялась, как обычно принято, по 2+-уровню основной полосы.

К сожалению, надежных экспериментальных данных, позволяющих таким же образом определить параметр  $\omega_{33}$  нет, — полоса с

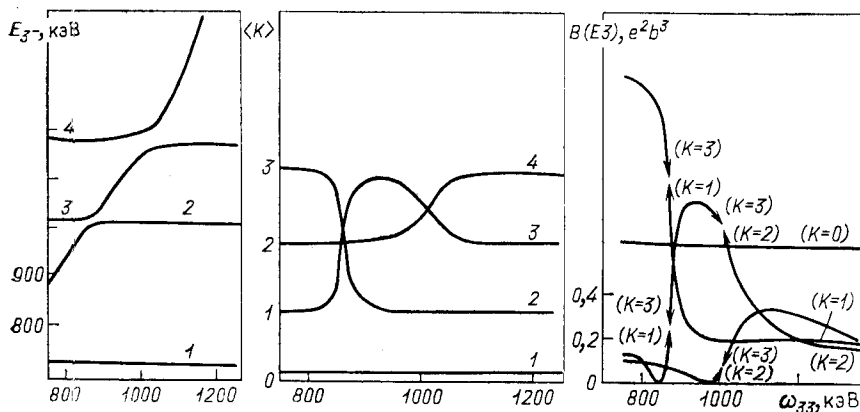


Рис. 2. Зависимость характеристик 3-состояний от параметра  $\omega_{33}$

$K^{(\pi)} = 3^-$  не наблюдается. Поэтому исследовалась зависимость результатов теории от выбора параметра  $\omega_{33}$ . На рис. 2 приведены энергии 3-состояний, средние значения  $\langle K \rangle$  проекций момента на ось симметрии и вероятности переходов из основного состояния в данное, как функции от параметра  $\omega_{33}$  в «резонансной» области, (остальные параметры определялись для каждого значения  $\omega_{33}$  независимо описанным выше способом).

Приведенные на рис. 2 величины весьма чувствительны к выбору параметра  $\omega_{33}$ , когда энергия 3- ( $K = 3$ )-уровня близка к энергии какого-либо другого 3-уровня и взаимодействие между ними особенно существенно. Остальные величины (энергии уровней положительной четности, вероятности переходов между ними) практически не изменяются в широкой области значений  $\omega_{33}$  — от 1000 кэВ до 100 МэВ.

Для последующих расчетов использовались значения  $\omega_{33}$ , значительно превышающие «резонансные», поэтому приводимые далее результаты слабо зависят от выбора этого параметра. Такой подход, при котором параметры коллективного гамилтониана определяются по соответствующему числу экспериментальных фактов (энергий уровней), является типичным для коллективной модели. Если при

этом удается хорошо описать значительно большее число наблюдаемых, то это свидетельствует о том, что данный вариант коллективной модели правильно ухватывает характер изучаемого коллективного движения.

Гамильтониан Бора имеет довольно ясный физический смысл и будущая микроскопическая теория ядра, весьма вероятно, сможет вычислять его параметры. В этом случае не придется производить описанную выше привязку параметров к нескольким наблюдаемым уровням. Это позволит изучать ядра, для которых экспериментальная информация бедна либо совсем отсутствует. В то же время параметры гамильтониана успешно зарекомендовавшей себя коллективной модели могут служить и тестом для проверки будущих микроскопических расчетов.

## 7. СПЕКТРЫ ВОЗБУЖДЕНИЙ ЖЕСТКИХ ЯДЕР

На рис. 3—6 представлены наблюдаемые и рассчитанные [24, 25] спектры коллективных возбуждений ядер  $^{156}\text{Gd}$ ,  $^{228}\text{Th}$ ,  $^{230}\text{Th}$ ,  $^{238}\text{U}$ . Исползованные значения параметров (78) приведены в табл. 4.

Т а б л и ц а 4. Значения параметров теории (в последнем столбце для сравнения приведены значения параметров модели Фесслера—Грайнера [12]), кэВ

Ядро	$\omega_{20}$	$\omega_{22}$	$\omega_{30}$	$\omega_{31}$	$\omega_{32}$	$\omega_{33}$	$\omega_{22}^{\text{FG}}$
$^{156}\text{Gd}$	1027	1028	1169	1111	1485	2000	1122
$^{228}\text{Th}$	831	852	256	804	929	2000	—
$^{230}\text{Th}$	635	710	448	827	922	2000	764
$^{238}\text{U}$	993	965	625	806	977	2000	1047

Для каждой полосы слева пунктиром на рис. 3—6 показаны энергии без учета недиагональной части колебательно-вращательного взаимодействия, в центре — результаты диагонализации полного коллективного гамильтониана и, наконец, справа — соответствующие экспериментальные значения энергий коллективных состояний. Разумеется, колебательно-вращательное взаимодействие приводит к смешиванию состояний по  $K$  и  $n_{\lambda\mu}$ , поэтому указанные на рисунках (отличные от нуля) значения этих величин используются только для маркировки полос и соответствуют пределу  $\hat{H}_{\text{vib rot}} \rightarrow 0$ .

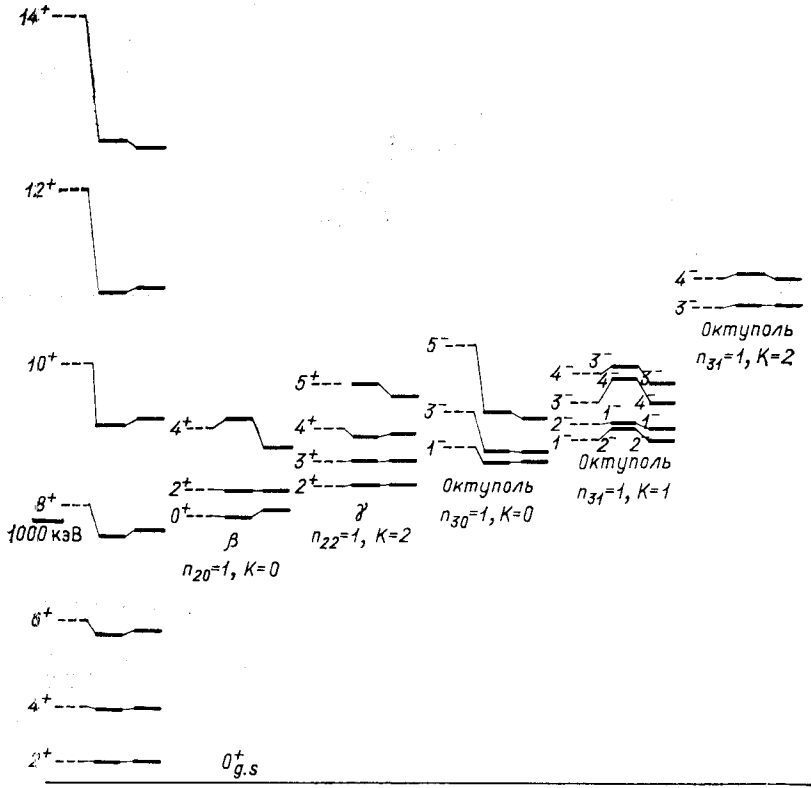


Рис. 3. Спектр возбуждений ядра  $^{166}\text{Gd}$

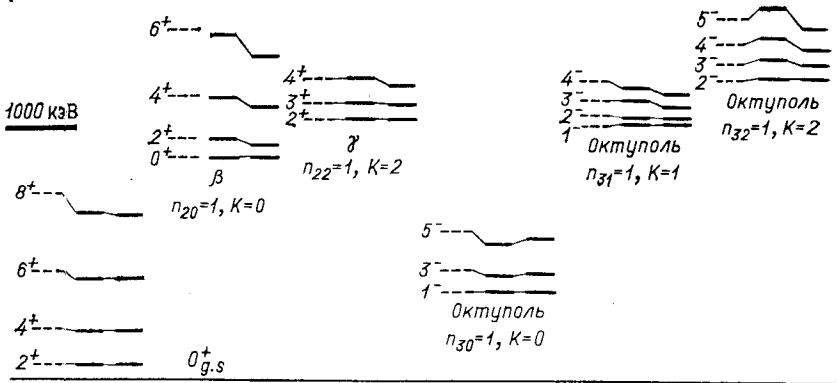


Рис. 4. Спектр возбуждений ядра  $^{228}\text{Th}$

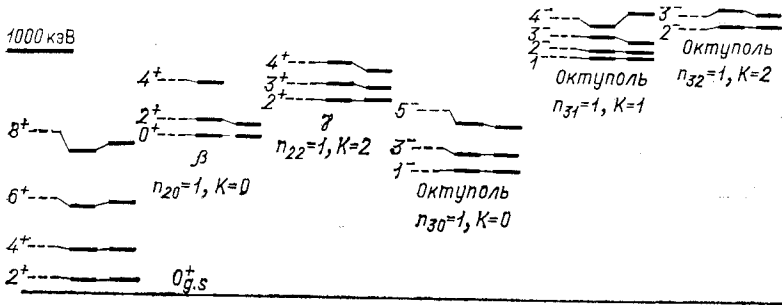


Рис. 5. Спектр возбуждений ядра  $^{230}\text{Th}$

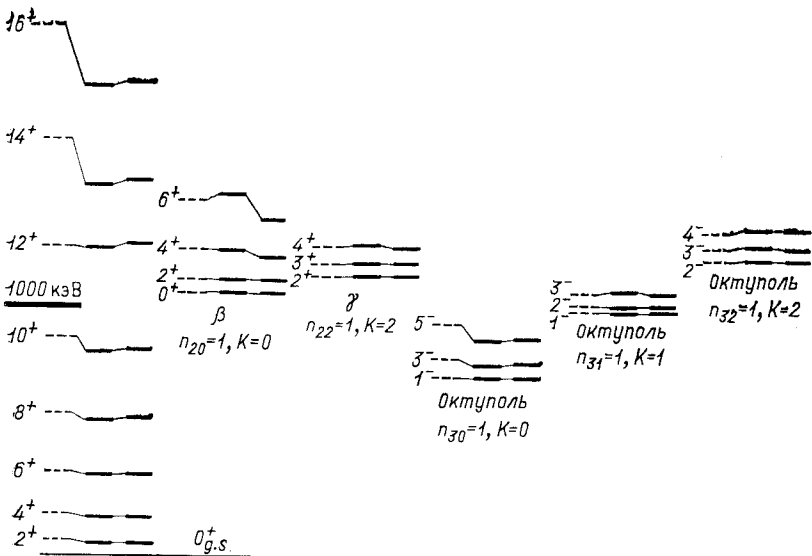


Рис. 6. Спектр возбуждений ядра  $^{238}\text{U}$

Наглядное представление о смешивании полос взаимодействием  $H_{\text{vib rot}}$  дают средние значения  $\langle K \rangle$ , приведенные в табл. 5.

Сравнение расчетных и наблюдаемых результатов позволяет сделать вывод, что предлагаемое в настоящей работе единое описание ядер квадрупольных и октупольных степеней свободы деформированных ядер достаточно адекватно отражает их структуру. Удастся не только объяснить большое число коллективных уровней как положительной, так и отрицательной четности, но и воспроизвести аномальный порядок следования уровней  $2^-, 1^-, 4^-, 3^-$  в октупольной полосе  $K^\pi = 1^-$  в  $^{156}\text{Gd}$ . Необходимо отметить следующее обстоятельство. Учет наряду с квадрупольными октупольных степеней свободы качественно сказывается и на классификации состояний положительной четности, а именно  $\gamma$ -возбуждений. В модели Фесслера — Грайнера

Таблица 5. Средние значения проекции  $\langle K \rangle$

I	$^{156}\text{Gd}$			$^{228}\text{Th}$			$^{238}\text{U}$		
	K = 0	K = 1	K = 2	K = 0	K = 1	K = 2	K = 0	K = 1	K = 2
1	0,396	0,604	—	0,006	0,994	—	0,021	0,979	—
2	—	1,016	—	—	1,075	1,925	—	1,033	—
3	0,482	0,585	1,942	0,032	1,150	1,819	0,100	1,000	1,967
4	—	1,065	1,959	—	1,207	1,795	—	—	1,901
5	0,520	—	1,765	0,070	—	1,647	0,186	—	1,886

Энергия вращения вокруг оси симметрии  $K^2/(2\mathcal{Y}_{33}^{(2)})$  оказывается довольно велика ( $\sim \omega$ ), так как момент  $\mathcal{Y}_{33}^{(2)}$  определяется одной лишь квадрупольной амплитудой  $a_{22}$ . Поэтому первые возбуждения с  $K = 2$  приходится интерпретировать как бесфононные ( $n_{22} = 0$ ). В то же время октупольные возбуждения приводят к значительно более сильному динамическому нарушению аксиальной симметрии, в результате момент  $\mathcal{Y}_{33}$  оказывается в несколько раз больше, а соответствующая вращательная энергия  $K^2/(2\mathcal{Y}_{33})$  — в несколько раз меньше, чем в имеющей дело только с квадрупольными возбуждениями модели Фесслера — Грайнера. Поэтому в рассматриваемом подходе  $\gamma$ -возбуждения естественным образом классифицируются как однофононное состояние с  $n_{22} = 1$  и  $K = 2$ .

### 8. ВЕРОЯТНОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПЕРЕХОДОВ

Важную информацию о структуре коллективных состояний представляют собой приведенные вероятности переходов. Наиболее интересными с этой точки зрения нам представляются вероятности  $B(E2)$  и  $B(E3)$ , измеряемые при кулоновском возбуждении уровней  $2^+$  и  $3^-$ . Матричные элементы таких переходов можно определить стандартным методом [10, 12] с помощью мультипольных операторов в коллективном пространстве

$$\mathcal{M}(EL, M) = e \int dr r^L Y_{LM}(\Omega) \rho_p(r, \{\alpha\}), \quad L \geq 2, \quad (80)$$

где  $\rho_p(r, \{\alpha\})$  — плотность протонов при данных значениях коллективных переменных  $\{\alpha\}$ , предполагается для простоты постоянной внутри ядра

$$\rho_p(r, \{\alpha\}) = Z/V\Theta(R(\theta, \varphi) - r). \quad (81)$$

Здесь радиус  $R(\theta, \varphi)$  выражается через коллективные переменные  $\{\alpha_{\lambda\mu}\}$  согласно (2);  $Z$  и  $V$  — заряд ядра и его объем. С точностью до квадратичных по  $\alpha_{\lambda\mu}$  членов выражение (80) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(EL, M) = & \frac{3ZR_0^L e}{4\pi} \left\{ \alpha_{LM} + \frac{L+2}{2} \sum_{\substack{\lambda\mu \\ \lambda'\mu'}} (-1)^{\mu+\mu'} \alpha_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda'\mu'} \times \right. \\ & \left. \times \sqrt{\frac{(2\lambda+1)(2\lambda'+1)(2L+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} L & \lambda & \lambda' \\ M-\mu-\mu' & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \lambda & \lambda' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad (82) \end{aligned}$$

где  $\begin{pmatrix} L & \lambda & \lambda' \\ M-\mu-\mu' & 0 & 0 \end{pmatrix}$  — 3j-символы.

Для вычисления матричных элементов между состояниями, описываемыми волновыми функциями вида (36), выражение для мультипольных операторов удобно преобразовать, переходя от переменных  $\alpha_{\lambda\mu}$  в лабораторной системе к колебательным переменным  $a_{\lambda\mu}$  во внутренней системе и углам Эйлера, характеризующим вращение ядра, согласно (4):

$$\mathcal{M}(EL, M) = \frac{3ZR_0^L e}{4\pi} \sum_m D_{Mm}^{L*} \left\{ a_{Lm} + \frac{L+2}{2} \sum_{\lambda\nu\lambda'\nu'} (-1)^{\nu+\nu'} a_{\lambda\nu} a_{\lambda'\nu'} \times \right. \\ \left. \times \sqrt{\frac{(2\lambda+1)(2\lambda'+1)(2L+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} L & \lambda & \lambda' \\ M-\nu-\nu' & \nu & \nu' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \lambda & \lambda' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (83)$$

Обратим внимание, что для состояний с  $K \neq 0$  волновые функции должны быть симметризованы в соответствии с (58). При этом матричный элемент перехода состоит из двух слагаемых

$$\langle \Psi_K | \mathcal{M} | g.s \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle \Phi_K | \mathcal{M} | g.s \rangle + \langle \Phi_{-K} | \mathcal{M} | g.s \rangle), \quad (84)$$

равных между собой, поэтому

$$\langle \Psi_K | \mathcal{M} | g.s \rangle = \sqrt{2} \langle \Phi_K | \mathcal{M} | g.s \rangle. \quad (85)$$

Рассматриваемый переход соответствует возбуждению фонона мультипольности  $\lambda$  с проекцией  $K$ , поэтому матричный элемент по колебательным переменным содержит  $1/\sqrt{B_{\lambda K}}$ , причем  $B_{\lambda K} = 2B_\lambda$  при  $K \neq 0$ . В результате дополнительные множители  $\sqrt{2}$  (по сравнению со случаем  $K = 0$ ) в числителе и знаменателе сокращаются. Такое сокращение вряд ли является случайным, так как оба множителя возникают по одной причине — корреляции деформаций с противоположными значениями проекций  $K$ .

Для переходов  $0^+ g.s \rightarrow 2^+ (K, \{n_r\})$  матричные элементы равны

$$\left. \begin{aligned} \langle 2M0, g.b | \mathcal{M}(E2, M) | g.s \rangle &= \frac{3ZR_0^2 e}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{5}} \beta_0 \left( 1 + \frac{2}{7} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \beta_0 \right); \\ \langle 2M0, n_{20} = 1 | \mathcal{M}(E2, M) | g.s \rangle &= \\ &= \frac{3ZR_0^2 e}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{2B_2\omega_{20}}} \left( 1 + \frac{4}{7} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \beta_0 \right); \\ \langle 2M2, n_{22} = 1 | \mathcal{M}(E2, M) | g.s \rangle &= \\ &= \frac{3ZR_0^2 e}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{2B_2\omega_{22}}} \left( 1 - \frac{4}{7} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \beta_0 \right); \\ \langle 2M2, n_{20} = n_{22} = 1 | \mathcal{M}(E2, M) | g.s \rangle &= \\ &= \frac{3ZR_0^2 e}{4\pi} \frac{-1}{\sqrt{5}} \frac{\frac{4}{7} \sqrt{\frac{5}{\pi}}}{\sqrt{2B_2\omega_{20}} \sqrt{2B_2\omega_{22}}}. \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

Входящий сюда квадрупольный массовый параметр  $B_2$  можно выра-



зить через вращательную энергию согласно (79). Матричные элементы (86) непосредственно определяют приведенные вероятности соответствующих переходов

$$B(EL, i \rightarrow f) = \frac{1}{2I_i + 1} \sum_{M_i, M_f, M} |\langle I_f M_f K_f | \mathcal{M}(EL, M) | I_i M_i K_i \rangle|^2, \quad (87)$$

где  $I_i M_i K_i$  и  $I_f M_f K_f$  — моменты и их проекции в начальном и конечном состояниях. Эти же матричные элементы позволяют вычислить вероятности возбуждения «смешанных» состояний, описываемых волновыми функциями вида (70):

$$B(E2, g.s \rightarrow 2^+) = \frac{9Z^2}{16\pi^4} \sigma^2 e^2 \left\{ c_g \beta_0 \left( 1 + \frac{2}{7} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \beta_0 \right) + c_\beta \sqrt{\frac{3\varepsilon_0 \beta_0^2}{\omega_{20}}} \left( 1 + \frac{4}{7} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \beta_0 \right) + c_\gamma \sqrt{\frac{3\varepsilon_0 \beta_0^2}{\omega_{22}^{(p)}}} \left( 1 - \frac{4}{7} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \beta_0 \right) - c_{\beta\gamma} \frac{3\varepsilon_0 \beta_0^2}{\sqrt{\omega_{20} \omega_{22}^{(p)}}} \frac{4}{7} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \right\}^2, \quad (88)$$

где  $\sigma = \pi R_0^2$ , а коэффициенты  $c_g$ ,  $c_\beta c_\gamma$  и  $c_{\beta\gamma}$  — проекции данного  $2^+$ -состояния на соответствующее «чистое» состояние.

Матричные элементы переходов в чистые октупольные состояния,  $g.s \rightarrow 3^-$  ( $K, n_{3K} = 1$ ) равны:

$$\langle 3MK, n_{3K} = 1 | \mathcal{M}(E3, M) | g.s \rangle =$$

Т а б л и ц а 6. Вероятности возбуждения  $2^+$ -состояний  $B(E2, g.s \rightarrow 2^+)$  — в единицах  $b^2 e^2$ , энергия — в кэВ

Полоса	Энергия, вероятность	$^{156}\text{Gd}$			$^{230}\text{Th}$			$^{238}\text{U}$		
		теория	эксперимент	литература	теория	эксперимент	литература	теория	эксперимент	литература
g. b.	E	88,0	89,0	[22]	52,6	53,2	[22]	44,7	44,9	[22]
	B	3,39	—	—	6,98	—	—	11,65	11,7—13,2	[24]
β	E	1151	1129,5	[22]	698,6	677,8	[22]	1043	1937	[22]
	B	0,01	0,07 0,013	[22]	0,18	0,046	[23]	0,20	0,63 0,080 0,164	[23] [24] [22]
γ	E	1164	1152,2	[22]	781,4	781,4	[22]	1060	1060	[22]
	B	0,16	0,06 0,12	[22]	0,176	0,123 0,14	[23] [22]	0,20 0,22	0,127 0,090	[23] [24]

Таблица 7. Вероятности возбуждения 3<sup>-</sup>-состояний  $V(E3, g.s \rightarrow 3^-)$  — в единицах  $e^2 b^3 \times 2B_2/3B_3$ , энергия — в кэВ и их отношение

K	Энергия, вероятность	<sup>156</sup> Gd			<sup>230</sup> Th			<sup>238</sup> U		
		теория	эксперимент	литература	теория	эксперимент	литература	теория	эксперимент	литература
0	E	1279	1276,2	[22]	571,0	571,8	[22]	727	731,3	[22]
	B	0,13	0,16	[22]	0,43	0,64	[23]	0,55	0,64	[23]
1	E	1611	1539,0	[22]	1034	1012,2	[22]	0,31 1018	0,59 998	[26] [22]
	B	0,0035	—	—	0,11	0,50	[23]	0,08 0,10	0,24 0,19	[23] [26]
2	E	1851	1852,1	[22]	1114	1127,9	[22]	1179	1169	[22]
	B	0,044	—	—	0,06	—	—	0,14 0,10	0,28	[23]
$\frac{0^+ \rightarrow 3^-(1)}{0^+ \rightarrow 3^-(0)}$		0,03	—	—	0,26	—	—	0,26 0,32	0,38 0,32	[23] [26]
$\frac{0^+ \rightarrow 3^-(2)}{0^+ \rightarrow 3^-(0)}$		0,35	—	—	0,14	—	—	0,33 0,32	0,44 0,25	[23] [26]

$$= \frac{3ZR_0^3}{4\pi} e \frac{1 + (-1)^K \beta_0 \frac{4-K^2}{3} \sqrt{\frac{5}{4\pi}}}{\sqrt{2B_3 \omega_3^{(p)K}}} \frac{1}{\sqrt{7}}, \quad (89)$$

а приведенные вероятности возбуждения октупольных состояний можно вычислить по формуле

$$V(E3, g.s \rightarrow 3^-, K) = \left( \frac{3Ze}{4\pi^2} \right)^2 \frac{1}{\pi} \sigma^3 \mathcal{Z} \varepsilon_0 \beta_0^3 \frac{B_2}{B_3} \times \\ \times \left| \sum_{K'=0}^3 c_{K'}^K \frac{1 + (-1)^{K'} \frac{4-K'^2}{3} \beta_0 \sqrt{\frac{5}{4\pi}}}{\sqrt{\omega_3^{(p)K'}}} \right|^2. \quad (90)$$

В табл. 6 и 7 представлены результаты расчетов приведенных вероятностей возбуждения 2<sup>+</sup>- и 3<sup>-</sup>-состояний ядер <sup>156</sup>Gd, <sup>230</sup>Th, <sup>238</sup>U. Поскольку величины  $B_3$  неизвестны, то, чтобы не вводить дополнительных параметров, мы приводим рассчитанные величины  $V(E3)$  в единицах  $2B_2/(3B_3)$ , а также отношения вероятностей возбуждения различных 3<sup>-</sup>-состояний, которые совсем не зависят от параметров  $B_3$ .

## 9. МЕТОД САМОСОГЛАСОВАННЫХ ФОНОНОВ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Выше при построении квадрупольно-октупольной модели мы ограничивались, как это делается и в модели Фесслера — Грайнера, предположением о том, что статическая деформация существенно превышает колебательные амплитуды. Рассматриваемый метод самосогласованных фононов позволяет, однако, обойтись и без этого ограничения, дает возможность единым образом изучать ядра как со значительной, так и с малой статической деформацией — так называемые мягкие ядра. Более общее рассмотрение позволяет проследить и за перестройкой при закручивании жестких ядер, причем в пределе  $\omega \mathcal{Y}_0 \gg I$  ( $\omega$  — энергия колебательного кванта;  $\mathcal{Y}_0$  — статический момент инерции;  $I$  — полный угловой момент состояния) такая схема существенно упрощается и переходит в описанную выше.

Переходя к единому описанию как жестких, так и мягких ядер, с точки зрения вращательных переменных в полном гамильтониане (19) удобно выделить диагональную часть  $\hat{H}_0$ , которая состоит из вращательного  $\hat{H}_{\text{rot}}$  и колебательного  $\hat{H}_{\text{vib}}$  гамильтонианов:

$$\hat{H}_0 = \hat{H}_{\text{rot}} + \hat{H}_{\text{vib}}, \quad (91)$$

причем вращательный гамильтониан определим так

$$\hat{H}_{\text{rot}} = \frac{\hat{M}'_1{}^2 + \hat{M}'_2{}^2}{4} \left( \frac{1}{\mathcal{Y}_1} + \frac{1}{\mathcal{Y}_2} \right) + \frac{\hat{M}'_3{}^2}{2\mathcal{Y}_3}, \quad (92)$$

где  $\hat{M}'_i$  — операторы вращений вокруг осей внутренней системы;  $\mathcal{Y}_i$  — соответствующие моменты инерции (диагональные элементы тензора для краткости маркируем одним индексом), существенно зависящие от колебательных переменных.

В колебательный гамильтониан включим, как и ранее, так называемый дополнительный потенциал  $V_{\text{add}}$ , связанный с зависимостью коэффициентов инерции от динамических переменных,

$$\hat{H}_{\text{vib}} = \sum_r \frac{\hat{p}_r^2}{2B_r} + V(\{a_r\}) + V_{\text{add}}. \quad (93)$$

Напомним, что индексом  $r$  обозначена совокупность индексов  $\lambda$  и  $\mu$ ,  $B_r \equiv B_\lambda \frac{2}{1 + \delta_{\mu 0}}$ ,  $B_\lambda$  — массовые параметры,  $V(\{a_r\})$  — деформационный потенциал.

Оставшаяся часть  $\hat{H}'$  представляет собой недиагональный (по крайней мере по вращательным переменным) оператор, связанный как с недиагональностью тензора моментов инерции, так и с тем, что  $\mathcal{Y}_1 \neq \mathcal{Y}_2$ . Отыскание решения для полного гамильтониана  $\hat{H}$  проводится в два этапа. Вначале строятся волновые функции для гамильтониана  $\hat{H}_0$ , которые затем используются как базис для диагонализации  $\hat{H}'$ .

Волновую функцию гамильтониана  $\hat{H}_0$  можно искать в виде произведения (36) колебательной и вращательной функций, причем колебательная волновая функция  $\chi_{IK}$  не зависит от проекции  $M$  и удовлетворяет уравнению Шредингера с эффективным колебательным гамильтонианом

$$H_{\text{vib}}^{\text{eff}} = H_{\text{vib}} + \frac{I(I+1) - K^2}{4} \left( \frac{1}{\mathcal{Y}_1} + \frac{1}{\mathcal{Y}_2} \right) + \frac{K^2}{2\mathcal{Y}_3}. \quad (94)$$

Связанные с вращением слагаемые в эффективном гамильтониане (94) зависят от целого набора колебательных амплитуд  $a_r$  и потому эквивалентны взаимодействию между различными модами колебаний

$$V_{\text{int}} = \frac{I(I+1) - K^2}{4} \left( \frac{1}{\mathcal{Y}_1} + \frac{1}{\mathcal{Y}_2} \right) + \frac{K^2}{2\mathcal{Y}_3} + V_{\text{add}}, \quad (95)$$

причем это взаимодействие довольно сильно зависит от углового момента ядра  $I$ . Это принципиально отличает ситуацию для мягких и жестких ядер. В самом деле, в случае жестких ядер моменты инерции  $\mathcal{Y}_1$  и  $\mathcal{Y}_2$  определялись главным образом статической составляющей, поэтому основная часть вращательного гамильтониана не зависела от колебательных переменных и не приводила, таким образом, к взаимодействию колебательных мод.

Полагая колебания малыми, деформационный потенциал выбираем в виде

$$V = \sum_r \frac{1}{2} c_r (a_r - \beta_r)^2, \quad (96)$$

где  $c_r$  — жесткость и  $\beta_r$  — статическая деформация.

Входящий в (95) дополнительный потенциал выражается согласно (21) через детерминант матрицы коэффициентов инерции и может быть представлен как

$$V_{\text{add}} \simeq \frac{1}{8} \sum_r \frac{1}{B_r} \left\{ \sum_i \left( \frac{1}{\mathcal{Y}_i} \frac{\partial^2 \mathcal{Y}_i}{\partial a_r^2} - \frac{1}{\mathcal{Y}_i^2} \left( \frac{\partial \mathcal{Y}_i}{\partial a_r} \right)^2 \right) + \frac{1}{4} \left( \sum_i \frac{1}{\mathcal{Y}_i} \frac{\partial \mathcal{Y}_i}{\partial a_r} \right)^2 \right\}. \quad (97)$$

Мы пренебрегли здесь квадратом недиагонального элемента тензора моментов инерции  $\mathcal{Y}_{13}$  по сравнению с произведением  $\mathcal{Y}_1 \mathcal{Y}_3$  диагональных элементов.

Обратим внимание на важную роль, которую играет классическое взаимодействие колебаний с вращениями. При выполнении условий (5) и (7) отлично от нуля слагаемое в кинетической энергии, пропорциональное скорости октупольных колебаний и скорости вращения вокруг оси 2. После квантования вклад этого слагаемого в гамильтониане полностью компенсирует влияние октупольных амплитуд на вращение вокруг оси 2 — в выражения (95) и (97) входит чисто

квадрупольная часть момента инерции  $\mathcal{Y}_2$

$$\mathcal{Y}_2 = B_2 (\sqrt{3} a_{20} - \sqrt{2} a_{22})^2. \quad (98)$$

В то же время моменты  $\mathcal{Y}_1$  и  $\mathcal{Y}_2$  в этих выражениях определяются как квадрупольными, так и октупольными частями.

Предполагая, что взаимодействие колебаний осуществляется через среднее поле, создаваемое всеми фононами и определяющееся само-согласованным образом, колебательную волновую функцию вновь будем искать в виде произведения (44), где функции  $\chi_r(q_r)$  удовлетворяют уравнениям Хартри, которые можно получить из вариационного принципа, аналогичного (45). Однофононный гамильтониан можно представить в виде

$$\hat{H}_r = \frac{p_r^2}{2B_r} + V_r(a_r), \quad (99)$$

где

$$V_r(a_r) = \langle V^{\text{eff}} \rangle_{[r]} \equiv \int \left\{ \prod_{r' \neq r} da_{r'} \chi_{r'}(a_{r'}) \right\} V^{\text{eff}} \quad (100)$$

— потенциал среднего поля, а  $V^{\text{eff}} = V + V^{\text{int}}$ .

Уравнения Хартри представляют собой систему уравнений, описывающих связанные между собой колебания. Предполагая, что взаимодействие, модифицируя эти колебания, оставляет их малыми, представим потенциалы  $V_r$  в виде

$$V_r(a_r) \simeq V_r(\tilde{\beta}_r) + \frac{1}{2} c_r^{(p)} (a_r - \tilde{\beta}_r)^2, \quad (101)$$

где модифицированные жесткости

$$c_r^{(p)} = \left. \frac{\partial^2 V_r}{\partial a_r^2} \right|_{a_r = \tilde{\beta}_r}, \quad (102)$$

а положения  $\tilde{\beta}_r$  смещенных минимумов определяются из условий

$$\left. \frac{\partial V_r}{\partial a_r} \right|_{a_r = \tilde{\beta}_r} = 0. \quad (103)$$

Если теперь ввести амплитуды колебаний относительно смещенных положений равновесия

$$q_r = a_r - \tilde{\beta}_r, \quad (104)$$

то они будут, очевидно, обладать свойствами

$$\overline{q_r} = 0, \quad \overline{q_r^2} = \frac{n_r + 1/2}{\sqrt{B_r c_r^{(p)}}}, \quad (105)$$

где черта означает интегрирование с квадратом соответствующей волновой функции.

Уравнения (102) — (105) и (100), образующие замкнутую систему, можно существенно упростить, сведя к чисто алгебраическим, если,

выделив из моментов их средние (а не статические!) значения

$$\mathcal{Y}_i = \bar{\mathcal{Y}}_i + \delta\mathcal{Y}_i, \tag{106}$$

разложить входящие в потенциал  $V_r$  обратные величины  $1/\mathcal{Y}_i$  по отношению флуктуации момента  $\delta\mathcal{Y}_i$  к среднему значению  $\bar{\mathcal{Y}}_i$

$$\frac{1}{\mathcal{Y}_i} = \frac{1}{\bar{\mathcal{Y}}_i} - \frac{\delta\mathcal{Y}_i}{\bar{\mathcal{Y}}_i^2} + \frac{(\delta\mathcal{Y}_i)^2}{\bar{\mathcal{Y}}_i^3}. \tag{107}$$

Это дает возможность вычислить интегралы в (100) и определить потенциалы  $V_r$  в явном виде. Представляя потенциал взаимодействия (95) как

$$V^{\text{int}} = \sum_i \left( \frac{\delta_i}{\bar{\mathcal{Y}}_i} - \frac{1}{2} \bar{\gamma}_{ii} \frac{1}{\bar{\mathcal{Y}}_i^2} \right) + \frac{1}{8} \sum_{i,h} \bar{\gamma}_{ih} \frac{1}{\bar{\mathcal{Y}}_i \bar{\mathcal{Y}}_h}, \tag{108}$$

где

$$\left. \begin{aligned} \bar{\gamma}_{ih} &= \frac{1}{4} \sum_r \frac{1}{B_r} \mathcal{Y}_{i,r} \mathcal{Y}_{h,r}; \\ \delta_{1,2} &= \frac{I(I+1) - K^2}{4} + S_{1,2}; \quad \delta_3 = \frac{K^2}{2} + S_3; \\ S_i &= \frac{1}{8} \sum_r \frac{1}{B_r} \mathcal{Y}_{i,rr}; \\ \mathcal{Y}_{i,r} &\equiv \frac{\partial \mathcal{Y}_i}{\partial a_r}; \quad \mathcal{Y}_{i,rr} \equiv \frac{\partial^2 \mathcal{Y}_i}{\partial a_r^2}, \end{aligned} \right\} \tag{109}$$

уравнения (103) и (102) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} c_r (\tilde{\beta}_r - \beta_r) &= \sum_i \left\{ \frac{\delta_i}{\bar{\mathcal{Y}}_i^2} \mathcal{Y}_{i,r} + \frac{1}{2} \frac{1}{\bar{\mathcal{Y}}_i^2} \bar{\gamma}_{ii,r} - \bar{\gamma}_{ii} \frac{1}{\bar{\mathcal{Y}}_i^2} \mathcal{Y}_{i,r} \right\} - \\ &- \frac{1}{8} \sum_{i,h} \frac{1}{\bar{\mathcal{Y}}_i \bar{\mathcal{Y}}_h} \left\{ \bar{\gamma}_{ih,r} - \bar{\gamma}_{ih} \left( \frac{1}{\bar{\mathcal{Y}}_i} \mathcal{Y}_{i,r} + \frac{1}{\bar{\mathcal{Y}}_h} \mathcal{Y}_{h,r} \right) \right\} \end{aligned} \tag{110}$$

и

$$\begin{aligned} c_r^{(p)} &= c_r + \sum_i \left\{ \frac{\delta_i}{\bar{\mathcal{Y}}_i^2} \left( \frac{2}{\bar{\mathcal{Y}}_i} \mathcal{Y}_{i,r}^2 - \mathcal{Y}_{i,rr} \right) - \right. \\ &- \frac{1}{2\bar{\mathcal{Y}}_i^2} \left( \bar{\gamma}_{ii,rr} - \frac{4}{\bar{\mathcal{Y}}_i} \mathcal{Y}_{i,r} \bar{\gamma}_{ii,r} - \right. \\ &- \left. \left. \frac{2}{\bar{\mathcal{Y}}_i} \bar{\gamma}_{ii} \mathcal{Y}_{i,rr} + \frac{6}{\bar{\mathcal{Y}}_i^2} \bar{\gamma}_{ii} \mathcal{Y}_{i,r}^2 \right) \right\} + \\ &+ \frac{1}{8} \sum_{i,h} \frac{1}{\bar{\mathcal{Y}}_i \bar{\mathcal{Y}}_h} \left\{ \bar{\gamma}_{ih,rr} - 2\bar{\gamma}_{ih,r} \left( \frac{1}{\bar{\mathcal{Y}}_i} \mathcal{Y}_{i,r} + \frac{1}{\bar{\mathcal{Y}}_h} \mathcal{Y}_{h,r} \right) + \right. \\ &+ \bar{\gamma}_{ih} \left( \frac{2}{\bar{\mathcal{Y}}_i^2} \mathcal{Y}_{i,r}^2 + \frac{2}{\bar{\mathcal{Y}}_h^2} \mathcal{Y}_{h,r}^2 + \frac{2}{\bar{\mathcal{Y}}_i \bar{\mathcal{Y}}_h} \mathcal{Y}_{i,r} \mathcal{Y}_{h,r} - \right. \\ &- \left. \left. \frac{1}{\bar{\mathcal{Y}}_i} \mathcal{Y}_{i,rr} - \frac{1}{\bar{\mathcal{Y}}_h} \mathcal{Y}_{h,rr} \right) \right\}, \end{aligned} \tag{111}$$

причем производные  $\Psi_{i,r}$  и  $\gamma_{ik,r}$  берутся в точке  $a_r = \tilde{\beta}_r$ . Уравнения (110) и (111) с учетом выражений для моментов инерции (14) и (98), определений (109) и свойств колебательных амплитуд (105) и (104) образуют систему нелинейных алгебраических уравнений для определяющих фазонные волновые функции жесткостей  $c_r^{(p)}$  и положений равновесия  $\tilde{\beta}_r$ . Эта система является обобщением обсуждавшейся выше для жестких ядер системы уравнений (51).

#### 10. РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ И САМОСОГЛАСОВАННЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

Проанализируем прежде всего некоторые закономерности, вытекающие из структуры уравнений (110) и (111) для основных характеристик коллективных колебательно-вращательных состояний. Прежде всего заметим, что так как в выражениях для моментов инерции (14), (98) отсутствуют слагаемые, представляющие перекрестные произведения квадрупольной и октупольной амплитуд, то таких слагаемых нет и в выражениях для величин  $\gamma_{ik}$ , определенных согласно (109), поэтому система уравнений (110) распадается на две подсистемы линейных уравнений для квадрупольных и октупольных величин  $\tilde{\beta}$  в отдельности (точнее говоря, квазилинейных, так как величины  $\tilde{\beta}$  входят еще и в выражения для средних значений  $\bar{\Psi}_i$  и  $\bar{\gamma}_{ik}$ ). Отсюда следует, что наличие эффективной деформации  $\tilde{\beta}$ , непосредственно определяется наличием затравочной деформации той же мультипольности в потенциале (96). Другими словами, из предположения об отсутствии октупольной деформации

$$\beta_{3\mu} = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (112)$$

из уравнений (110) вытекает

$$\tilde{\beta}_{3\nu} = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, 3). \quad (113)$$

Что же касается квадрупольной деформации, то нарушение симметрии между осями 1 и 2, связанное с наличием октупольных степеней свободы, приводит к тому, что эффективная неаксиальная деформация  $\tilde{\beta}_{22}$  возникает даже в том случае, когда деформационный потенциал (96) предполагает аксиальную симметрию

$$\beta_{20} = \beta_0 \neq 0, \quad \beta_{22} = 0. \quad (114)$$

Величины  $\tilde{\beta}_{20}$  и  $\tilde{\beta}_{22}$  удобно измерять в единицах затравочной деформации  $\beta_0$  и характеризовать параметрами

$$x \equiv \tilde{\beta}_{20}/\beta_0, \quad y \equiv \sqrt{2/3} \tilde{\beta}_{22}/\beta_0. \quad (115)$$

Далее, входящие в правые части уравнений (110) и (111) средние  $\bar{\Psi}_i$  и  $\bar{\gamma}_{ik}$  определяются в соответствии с (14), (98), (105) и (110), (111) всеми величинами  $c_r^{(p)}$  и отличными от нуля величинами  $\tilde{\beta}_r$ . Поэтому

уравнения для всех этих переменных, характеризующих данное коллективное состояние  $| I, K \{n_r\} \rangle$ , оказываются связанными между собой.

Вместо жесткостей  $c_r$  и  $c_r^{(p)}$  удобнее рассматривать частоты  $\omega_r$  и  $\omega_r^{(p)}$ , определенные согласно (53), и придать уравнениям вид

$$x = 1 + f(x, y, \{\omega_r^{(p)}\}); \tag{116}$$

$$y = g(x, y, \{\omega_r^{(p)}\}); \tag{117}$$

$$\omega_r^{(p)2} = \omega_r^2 + F_r(x, y, \{\omega_r^{(p)}\}), \tag{118}$$

где входящие в правые части функции  $f$ ,  $g$  и  $F_r$  связаны со взаимодействием коллективных мод через вращение и зависят от полного момента уровня  $I$ , его проекции на ось симметрии  $K$ , набора осцилляторных чисел  $\{n_r\}$ , а также всех искомым характеристик  $x$ ,  $y$  и  $\{\omega_r^{(p)}\}$ .

Уравнения (116) — (118) упрощаются в предельном случае жестких ядер, для которых  $|q_r| \ll \beta_0$  и моменты  $\mathcal{Y}_1$  и  $\mathcal{Y}_2$  содержат большую статическую составляющую  $\mathcal{Y}_0$

$$\omega \mathcal{Y}_0 \gg 1 \tag{119}$$

( $\omega$  — энергия возбуждения колебательного кванта), и в функциях  $F_r$  доминируют слагаемые, определяющиеся моментом  $\mathcal{Y}_3$ . При этом в пределе  $\omega \mathcal{Y}_0 \rightarrow \infty$  четыре уравнения принимают вид

$$x = 1, y = 0, \omega_{20}^{(p)} = \omega_{20}, \omega_{30}^{(p)} = \omega_{30}, \tag{120}$$

а четыре оставшихся уравнения переходят в рассмотренные выше (54) для  $\omega_{\lambda\mu}^{(p)}$  с  $\mu \neq 0$ , решения которых обозначим  $(\omega_{\lambda\mu}^{(p)})_{\text{rig}}$ :

$$\omega_{\lambda\mu}^{(p)} = (\omega_{\lambda\mu}^{(p)})_{\text{rig}} \quad (\mu \neq 0), \tag{121}$$

величины  $(\omega_{\lambda\mu}^{(p)})_{\text{rig}}$  не зависят от углового момента  $I$ , но различны для разных полос  $\{K, \{n_r\}\}$ .

С ростом  $I$  поправки к решению (120), (121) могут стать существенными даже для достаточно жестких ядер,

$$x = 1 + \frac{3}{(\omega_{20} \mathcal{Y}_0)^2} \{I(I+1) - K^2 + 6\}; \tag{122}$$

$$y = \frac{2}{(\omega_{22} \mathcal{Y})^2} \left\{ \frac{7}{2} + \left( \frac{\mathcal{Y}_0}{\mathcal{Y}_1} - \frac{\mathcal{Y}_0}{\mathcal{Y}_2} \right) \left( I(I+1) - K^2 - \frac{\mathcal{Y}_0}{2\mathcal{Y}_3} - \frac{5}{2} \right) \right\}; \tag{123}$$

$$\omega_{20}^{(p)2} = \omega_{20}^2 + \frac{9}{\mathcal{Y}_0^2} \{I(I+1) - K^2 + 6\}; \tag{124}$$

$$\omega_{30}^{(p)2} = \omega_{30}^2 - \frac{3}{\mathcal{Y}_0^2} \left\{ I(I+1) - K^2 + \frac{75}{4} \right\}; \tag{125}$$

$$\omega_r^{(p)2} = (\omega_r^{(p)})_{\text{rig}}^2 + \sum_{r'} \frac{\partial (\omega_r^{(p)})_{\text{rig}}^2}{\partial \omega_r^2} k_r \cdot \frac{1}{\mathcal{Y}_0^2} \{I(I+1) - K^2\}, \tag{126}$$

$(r, r' = 22, 31, 32, 33),$



где

$$k_{22} = 3, \quad k_{31} = -5/2, \quad k_{32} = -4, \quad k_{33} = -3/2. \quad (127)$$

Из этих выражений видно, что реальным малым параметром, характеризующим деформируемость ядра, является  $I/(\omega\mathcal{Y}_0)$ , а не  $1/(\omega\mathcal{Y}_0)$ .

Возвратимся теперь к решению уравнений (116) — (118) для основных характеристик в общем случае произвольных соотношений между энергиями возбуждения колебательных квантов  $\omega_r$  и статическим моментом  $\mathcal{Y}_0$ . Довольно естественным и в то же время достаточно эффективным оказывается итерационный метод с начальными значениями

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 0, \quad (\omega_r^{(p)})_0 = \omega_r, \quad (128)$$

соответствующими решению в отсутствие взаимодействия коллективных мод. Для сходимости итерационного процесса необходимо ввести смешивание, т. е. определить значение переменных на  $(n + 1)$ -й итерации как

$$z_{n+1} = z_n + S\delta z_n, \quad (129)$$

где  $z_n$  — любая из искомых величин  $\{x, y, \{\omega_r^{(p)}\}\}$  на  $n$ -й итерации;  $\delta z_n$  — поправка к ней, вычисленная на  $n$ -й итерации сравнением левой и правой частей соответствующего уравнения системы (116) — (118). Параметр  $S$ , подбираемый в интервале  $0 \leq S \leq 1$ , характеризует скорость итерационного процесса и влияет на его сходимость. Удачным оказывается значение  $S = 0,5$ .

Зависимость от углового момента  $I$  искомых характеристик основной полосы представлена в табл. 8 для жесткого ядра  $^{238}\text{U}$  и в табл. 9 для мягкого ядра  $^{194}\text{Pt}$ . Как видно из таблиц, квадрупольные жесткости с ростом  $I$  увеличиваются, в то время как октупольные уменьшаются. Это связано с предположением о квадрупольном характере статической деформации.

Что же касается эффективной деформации  $\tilde{\beta}_r$ , то продольная деформация  $\tilde{\beta}_{20}$  возрастает с ростом углового момента. В то же время эффективная неаксиальная деформация  $\tilde{\beta}_{22}$  вначале убывает до нуля, а затем, изменив знак (по отношению к аксиальной деформации), начинает возрастать. Такое поведение наблюдается как для жесткого ядра  $^{238}\text{U}$ , так и для мягкого ядра  $^{194}\text{Pt}$ , хотя, разумеется, сами величины  $\tilde{\beta}_{22}/\beta_0$  для мягкого ядра значительно больше.

Обратим внимание на различное поведение моментов инерции  $\overline{\mathcal{Y}}_i$  как функций  $I$ . Так, для жесткого ядра  $^{238}\text{U}$  моменты  $\overline{\mathcal{Y}}_1$  и  $\overline{\mathcal{Y}}_2$  не слишком далеки от статического  $\mathcal{Y}_0$ , увеличиваясь к  $I = 24$  приблизительно на 20%. В то же время момент  $\overline{\mathcal{Y}}_3$  приблизительно на порядок меньше  $\mathcal{Y}_0$  и практически не зависит от  $I$ . Для мягкого ядра  $^{194}\text{Pt}$  моменты  $\overline{\mathcal{Y}}_1$  и  $\overline{\mathcal{Y}}_2$  отличаются от значения  $\mathcal{Y}_0$  в два-три раза и существенно различны при малых  $I$ . С ростом  $I$  момент инерции  $\overline{\mathcal{Y}}_2$  возрастает значительно быстрее, поэтому уже при  $I = 8$   $\overline{\mathcal{Y}}_1(I) \approx \approx \overline{\mathcal{Y}}_2(I)$ . Момент инерции  $\overline{\mathcal{Y}}_3$ , близкий к  $\mathcal{Y}_0$  при  $I = 0$ , уменьшается

Таблица 8. Зависимость основных характеристик коллективных

$I$	$\omega_{20}^{(p)} \mathcal{Y}_0$	$\omega_{22}^{(p)} \mathcal{Y}_0$	$\omega_{30}^{(p)} \mathcal{Y}_0$	$\omega_{31}^{(p)} \mathcal{Y}_0$	$\omega_{32}^{(p)} \mathcal{Y}_0$
0	66,56	56,43	45,30	56,83	60,88
2	66,85	55,54	45,16	56,78	60,81
4	67,52	56,80	44,85	56,68	60,65
6	68,48	57,18	44,38	56,52	60,41
8	69,67	57,66	43,79	56,33	60,11
10	70,99	58,20	43,10	56,10	59,76
12	73,40	58,79	42,33	55,86	59,39
14	73,83	59,39	41,52	55,60	58,99
16	75,25	60,00	40,67	55,33	58,59
18	76,64	60,60	39,81	55,07	58,19
20	77,98	61,19	38,94	54,81	57,78
22	79,27	61,76	38,06	54,55	57,39
24	80,50	62,31	37,20	54,29	57,01

Примечание.  $\omega_{20} \mathcal{Y}_0 = 66,30$ ,  $\omega_{22} \mathcal{Y}_0 = 66,01$ ,  $\omega_{30} \mathcal{Y}_0 = 45,80$ ,  $\omega_{31} \mathcal{Y}_0 = 60,61$ ,

Таблица 9. Зависимость основных характеристик коллективных

$I$	$\omega_{20}^{(p)} \mathcal{Y}_0$	$\omega_{22}^{(p)} \mathcal{Y}_0$	$\omega_{30}^{(p)} \mathcal{Y}_0$	$\omega_{31}^{(p)} \mathcal{Y}_0$	$\omega_{32}^{(p)} \mathcal{Y}_0$
0	15,48	5,89	12,17	24,65	24,23
2	16,36	4,91	11,95	24,60	24,04
4	17,19	4,35	11,36	24,48	23,61
6	18,12	5,30	10,61	24,34	23,52
8	19,00	6,32	9,88	24,20	23,26
10	19,78	7,14	9,23	24,09	23,05
12	20,46	7,78	8,66	24,00	22,88
14	21,05	8,30	8,15	23,92	22,73

Примечание.  $\omega_{20} \mathcal{Y}_0 = 15,58$ ,  $\omega_{22} \mathcal{Y}_0 = 5,84$ ,  $\omega_{30} \mathcal{Y}_0 = 12,71$ ,  $\omega_{31} \mathcal{Y}_0 = \omega_{22} \mathcal{Y}_0 = \omega_{32} \mathcal{Y}_0 =$

примерно в полтора раза при  $I = 20$  и оказывается, как это имеет место в случае жестких ядер, существенно меньше поперечных моментов инерции  $\mathcal{Y}_1$  и  $\mathcal{Y}_2$ .

## 11. СПЕКТРЫ КОЛЕБАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ

Энергия коллективного состояния, описываемого волновой функцией (44), определяется средним значением коллективного гамильтониана (94) по этим функциям и может быть представлена в виде

$$E = E_0 + E_1 + E_2 + E_3, \quad (130)$$

состояний от углового момента для основной полосы ядра <sup>238</sup>U

$\omega_{33}^{(p)} \gamma_0$	$x$	$y$	$\gamma_0/\bar{\gamma}_1$	$\gamma_0/\bar{\gamma}_2$	$\gamma_0/\bar{\gamma}_3$
114,41	1,0032	0,0021	0,855	0,967	8,588
114,39	1,0066	0,0018	0,850	0,961	8,589
114,34	1,0142	0,0014	0,840	0,946	8,593
114,28	1,0256	0,0007	0,624	0,925	8,598
114,20	1,0401	0,0000	0,805	0,899	8,603
114,12	1,0572	-0,0009	0,783	0,870	8,609
114,04	1,0761	-0,0017	0,759	0,840	8,612
113,95	1,0964	-0,0025	0,735	0,809	8,614
113,87	1,1177	-0,0034	0,711	0,778	8,616
113,80	1,1396	-0,0042	0,687	0,749	8,616
113,73	1,1619	-0,0049	0,664	0,720	8,615
113,67	1,1844	-0,0056	0,641	0,693	8,613
113,61	1,2070	-0,0062	0,620	0,667	8,612

$\omega_{32} \gamma_0 = 67,34, \omega_{33} \gamma_0 = 134,68.$

состояний от углового момента для основной полосы ядра <sup>194</sup>Pt

$\omega_{33}^{(p)} \gamma_0$	$x$	$y$	$\gamma_0/\bar{\gamma}_1$	$\gamma_0/\bar{\gamma}_2$	$\gamma_0/\bar{\gamma}_3$
22,91	1,0059	0,2343	0,451	1,38	1,08
22,93	1,0568	0,1535	0,481	0,99	1,24
22,02	1,1231	0,0073	0,523	0,69	1,30
21,51	1,2031	-0,0615	0,517	0,56	1,41
21,13	1,2879	-0,0923	0,484	0,485	1,49
20,86	1,3722	-0,1056	0,444	0,429	1,54
20,66	1,4540	-0,1119	0,406	0,386	1,58
20,51	1,5326	-0,1152	0,372	0,351	1,61

24,77.

где часть  $E_0$  связана с собственно колебаниями

$$\begin{aligned}
 E &= \langle \chi_{IK} | \sum_r \left( \frac{\hat{p}_r^2}{2B_r} + \frac{1}{2} c_r q_r^2 \right) | \chi_{IK} \rangle = \\
 &= \sum_r \omega_r (n_r + 1/2) + \sum_r \frac{(\omega_r - \omega_r^{(p)})^2}{2\omega_r^{(p)}} (n + 1/2), \quad (131)
 \end{aligned}$$

часть  $E_1$  связана с тем, что вследствие взаимодействия коллективных мод эффективная деформация  $\tilde{\beta}_r$  отличается от статической  $\beta_r$ , мини-

мизировавшей деформационный потенциал (96),

$$E_1 = \frac{1}{2} \sum_r c_r (\tilde{\beta}_r - \beta_r)^2. \quad (132)$$

Величины  $E_2$  и  $E_3$  представляют собой основную часть и поправку к ней от вращательной и дополнительной энергий

$$E_2 = \sum_i \left( \frac{\delta_i}{\mathcal{Y}_i} - \frac{1}{2} \frac{\bar{\gamma}_{ii}}{\mathcal{Y}_i^2} \right) + \frac{1}{8} \sum_{i, h} \frac{\bar{\gamma}_{ih}}{\mathcal{Y}_i \mathcal{Y}_h}; \quad (133)$$

$$E_3 = \frac{1}{2} \sum_r \left\{ c_r^p - c_r + \sum_i ((\delta_i - \bar{\gamma}_{ii}/\mathcal{Y}_i) \mathcal{Y}_{i, rr} + \frac{1}{2} \gamma_{ii, rr}) \frac{1}{\mathcal{Y}_i^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{8} \sum_{i, h} (\bar{\gamma}_{ih} \left( \frac{\mathcal{Y}_{i, rr}}{\mathcal{Y}_i} + \frac{\mathcal{Y}_{h, rr}}{\mathcal{Y}_h} \right) - \gamma_{ih, rr}) \frac{1}{\mathcal{Y}_i \mathcal{Y}_h} \right\} \bar{q}_r^2. \quad (134)$$

Энергия возбуждения коллективного состояния, характеризующегося угловым моментом  $I$ , его проекцией на внутреннюю ось симметрии  $K$ , совокупностью осцилляторных чисел  $\{n_r\}$ , определяется соотношением (62), где  $E_{IK} \{n_r\}$  и  $E_{00} \{0\}$  — энергии возбужденного и основного состояний ядра, вычисляемые по формулам (130) — (134).

Для иллюстрации в табл. 10—13 представлены рассчитанные таким образом энергии колебательно-вращательных возбуждений ядер  $^{150}\text{Sm}$ ,  $^{156}\text{Dy}$ ,  $^{194}\text{Pt}$  и  $^{238}\text{U}$  (столбец  $T$ ) в сравнении с экспериментальными данными и другими расчетами [13, 32, 33]. Результаты,

Таблица 10. Спектр колебательно-вращательных возбуждений ядра  $^{150}\text{Sm}$  (энергия — в кэВ)

Полоса	$I$	Эксперимент [23]	$T$	$\tilde{T}$	$RV1$ [20]	$RV2$ [20]	$RV3$ [20]
$g$	0	333,4	334,5	333,3	268,0	225,0	356,0
	4	772,6	823,8	819,5	830,0	937,0	1044,0
	6	1277,8	1356,0	1347,0	1244,0	1074,0	2047,0
	8	1836,0	1914,0	1899,0	1860,0	558,0	3388,0
	10	2431,7	2492,4	2469,0	2538,0	—	5078,0
	12	3046,2	3085,4	3055,0	—	—	—
	(14)	3676,0	3691,0	3653,0	—	—	—
$\beta$	0	740,4	762,2	762,2	740,0	740,0	740,0
	2	1046,1	1046,3	1046,0	953,0	1916,0	1143,0
	4	1449,1	1573,3	1572,0	1362,0	3292,0	2005,0
	6	1926,0	2176,6	2175,0	—	—	—
$\gamma$	2	1165,5	1165,0	1166,0	1194,0	3453,0	1364,0
	3	1504,5	1463,4	1453,0	1335,0	—	1629,0
	4	1643,0	1748,0	1753,0	1713,0	9998,0	2985,0
	5	2020,4	2043,8	2044,0	—	—	—

Т а б л и ц а 11. Спектр колебательно-вращательных возбуждений ядра  $^{166}\text{Dy}$  (энергия — в кэВ)

Полоса	$I$	Эксперимент [23]	$T$	$\tilde{T}$	$RV1$ [20]	$RV2$ [20]
g	2	137,8	137,9	137,8	133,6	141,0
	4	404,1	410,0	408,2	408,0	435,0
	6	770,3	761,5	756,0	770,0	849,0
	8	1215,7	1162,6	1152,0	1201,0	1381,0
	10	1725,0	1597,9	1551,0	1708,0	2038,0
	12	2285,9	2058,9	2035,0	2301,0	2824,0
	14	2887,8	2540,1	2509,0	—	—
	16	3498,9	3037,9	2999,0	—	—
	18	4026,1	3549,5	3502,0	—	—
	20	4635,6	4073,1	4018,0	—	—
	(22)	5320,3	4607,1	4544,0	—	—
β	0	675,6	683,1	683,4	675,0	675,0
	2	828,7	829,3	829,0	802,0	855,0
	4	1988,3	1127,5	1125,0	1081,0	1200,0
	6	1437,1	1517,6	1511,0	1384,0	1727,0
	8	1658,6	1959,1	1949,0	1761,0	2444,0
	10	2315,6	2431,5	2417,0	2236,0	3353,0
	12	2706,9	2924,9	2908,0	2813,0	4452,0
	14	3065,9	3434,2	3415,0	—	—
	16	3523,3	3956,1	3936,0	—	—
	18	4178,2	4448,9	4469,0	—	—
	20	4859,0	5030,8	5011,0	—	—
γ	2	890,7	869,6	890,1	75,0	5,0
	3	1022,1	1026,8	1027,0	1046,0	1047,0
	4	1168,5	1190,7	1195,0	1216,0	1416,0
	5	1335,2	1373,9	1374,0	—	—
	6	1525,2	1571,7	1582,0	—	—
	7	1728,8	1780,7	1781,0	—	—
	8	1957,2	1998,6	2018,0	—	—
	9	2191,6	2224,1	2224,0	—	—
	10	2448,0	2455,7	2485,0	—	—
	11	2712,4	2693,0	2693,0	—	—
	12	2997,2	2935,1	2974,0	—	—

полученные при диагонализации полного гамильтониана (19), приведены в столбце  $\tilde{T}$ . Параметры теории — частоты  $\omega_r$  выбирались по положениям  $2^+$ -уровней в  $\beta$ - и  $\gamma$ -полосах и  $3^-$ -уровней в имеющих октупольных полосах, а вращательная энергия  $\varepsilon_0 \equiv 1/(2\mathcal{I}_0)$  — по положению  $2^+$ -уровня основной полосы. Отсутствие данных о ряде октупольных полос затрудняет выбор соответствующих параметров  $\omega_{3\mu}$ . Однако эти величины слабо влияют (при соответствующем выборе остальных параметров) на представленные в табл. 10—13 результаты (мы выбирали, как и в [25], для соответствующих полос  $\omega_{r'} = 2000$  кэВ, что существенно превышает остальные  $\omega_r$ ).

Результаты по ядру  $^{238}\text{U}$  оказываются близкими для малых угловых моментов  $I$  к полученным выше в разд. 7. Однако с ростом угло-

Таблица 12. Спектр колебательно-вращательных возбуждений ядра  $^{184}\text{Pt}$  (энергия — в кэВ)

Полоса	$I$	Эксперимент [23]	$T$	$\tilde{T}$	$RV1$ [20]	$RV2$ [20]
$g$	2	328,5	330,8	328,4	331,0	345,0
	4	811,2	822,8	800,2	810,0	1046,0
	6	1481,6	1481,9	1427,0	1376,0	2129,0
	8	2099,2	2230,6	2144,0	2115,0	3567,0
	10	2438,2	3038,5	2920,0	3038,0	—
	12	2829,5	3893,1	3744,0	—	—
$\beta$	0	1479,3	1344,0	1344,0	1267,0	1267,0
	2	1622,3	1622,3	16622,0	1514,0	1780,0
	4	—	2132,2	2130,0	2274,0	3159,0
$\gamma$	2	622,1	620,0	622,0	637,0	641,0
	3	922,8	872,2	872,2	781,0	1252,0
	4	1229,5	1179,2	1201,0	1235,0	1782,0
	5	1498,7	1528,9	1529,0	—	—
	6	1925,7	1911,3	1963,0	—	—

вого момента появляются существенные различия. Это отражает тот факт, что ядро становится мягче и перестают выполняться приближения, при которых обсуждаемая сейчас более общая схема сводится к более простой, рассмотренной выше для описания жестких ядер.

Подчеркнем, что разделение коллективного гамильтониана на вращательную и колебательно-вращательную части теперь отличается от традиционного для колебательно-вращательной модели: во вращательный гамильтониан естественным образом включается значительная часть взаимодействия колебательных мод через вращения (за исключением недиагональной части по вращательным переменным, в частности, взаимодействия полос отрицательной четности с  $\Delta K = 1$ ). Поэтому в отличие от работ, основанных на колебательно-вращательной модели [11], роль колебательно-вращательной части полного гамильтониана, по крайней мере для состояний с положительной четностью, не очень существенна.

Ядра  $^{150}\text{Sm}$ ,  $^{156}\text{Dy}$  и  $^{194}\text{Pt}$  были рассмотрены в [13], где авторы предложили для описания трех полос (основной,  $\beta$ - и  $\gamma$ -) модифицированный вариант колебательно-вращательной модели с пятью параметрами: наряду с двумя квадрупольными жесткостями и массовым параметром, определяющим момент инерции  $\mathcal{J}_0$ , авторы ввели дополнительные массовые параметры для  $\beta$ - и  $\gamma$ -полос, сделав, таким образом, независимыми подгоночными параметрами моменты инерции  $\beta$ - и  $\gamma$ -полос. Отметим в этой связи, что в рассматриваемом подходе для описания этих же трех полос используются, по существу, только три (первых) параметра.

В табл. 13 приведены для сравнения энергии уровней основной полосы ядра  $^{238}\text{U}$ , вычисленные в модели переменного момента инер-

Таблица 13. Спектр колебательно-вращательных возбуждений ядра  $^{238}\text{U}$  (энергия — в кэВ)

Полоса	$I$	Эксперимент [23]	$T$	$\tilde{T}$	$VMI$ [32]	$MVM I$ [33]	
$g$	2	44,9	44,91	44,9	44,7	44,5	
	4	148,4	148,3	148,2	148,2	148,3	
	6	307,2	307,2	306,7	308,4	308,0	
	8	518,8	517,2	515,9	522,5	519,0	
	10	775,7	774,0	771,1	786,7	776,4	
	12	1076,5	1072,7	1068	1076	1100	
	14	1415,3	1409,3	1401	1458	1414	
	16	1788,2	1779,7	1768	1856	1786	
	18	2190,7	2180,5	2164	2191	2191	
	20	2618,7	2608,9	2587	2626	2626	
	22	3067,2	3062,0	3034	—	3088	
	(24)	3534,5	3503,9	3503	—	3576	
	$\beta$	0	993	989,2	989,2	—	—
		2	1037,3	1037,4	1037	—	—
4		1127	1148,3	1148	—	—	
$\gamma$	2	1060,3	1060,4	1060	—	—	
	3	1105,6	1106,6	1107	—	—	
	4	1167,7	1167,7	1168	—	—	
$K^\pi = 0^-$	1	679,8	686,2	681,1	—	—	
	3	731,3	756,0	731,0	—	—	
	5	326,4	381,9	830,0	—	—	
	7	965,9	1058,3	982,5	—	—	
	9	1150,3	1281,9	1188	—	—	
	11	1378,4	1548,6	1443	—	—	
	13	1648,9	1854,4	1743	—	—	
	15	1958,6	2195,5	2083	—	—	
	17	2305,0	2568,4	2459	—	—	
$K^\pi = 1^-$	1	930,8	904,7	909,8	—	—	
	2	950,0	934,1	934,6	—	—	
	3	997,5	977,9	997,5	—	—	
$K^\pi = 2^-$	2	1128,7	1120,1	1123	—	—	
	3	1169,4	1163,7	1169	—	—	
	4	1242,9	1221,3	1230	—	—	

ции [32] и в предложенной совсем недавно ангармонической вибрационной модели [33]. Хотя эти модели предназначены для феноменологической аппроксимации наблюдающихся уровней одной лишь основной полосы с помощью соответственно двух и трех параметров, качество описания спектра в настоящей работе оказывается по крайней мере не худшим. Напомним, что единственный параметр, используемый для задания основной полосы, выбирается по положению  $2^+$ -уровня.

## 12. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ — ВОЗМОЖНОСТЬ СУЩЕСТВОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ИЗОМЕРОВ ФОРМЫ

Существенная нелинейность уравнений (110), (111) для новых положений равновесия  $\tilde{\beta}_r$  и жесткостей  $c_r^p$  делает нетривиальным вопрос о единственности (для данного набора квантовых чисел  $I, K, \{n_r\}$ ) найденного выше (см. разд. 10) решения, которое представляет собой модифицированное взаимодействием колебаний «свободное» решение (128). Оказывается, что при не слишком малых угловых моментах  $I$ , начиная с  $I \gtrsim \omega \Psi_0$  ( $\omega$  — минимальная энергия кванта колебаний,  $\Psi_0$  — статический момент инерции), взаимодействие коллективных мод становится достаточно сильным для того, чтобы могла произойти качественная перестройка, и возникают дополнительные решения, характеризующиеся существенной неаксиальной деформацией,  $y > x$ .

Прежде чем приводить численные результаты, проследим за возникновением дополнительных решений (будем называть их аномальными в отличие от исследованных выше — нормальных) в предельном случае  $I \rightarrow \infty$ , когда в правых частях уравнений (110) и (111) достаточно оставить лишь слагаемые, пропорциональные  $I(I+1)$ ,

$$c_r(\tilde{\beta}_r - \beta_r) = \frac{I(I+1)}{4} \left( \frac{\Psi_{1,r}}{\Psi_1^2} + \frac{\Psi_{2,r}}{\Psi_2^2} \right); \quad (135)$$

$$c_r^{(p)} = c_r + \frac{I(I+1)}{4} \left( \frac{2\Psi_{1,r}^2}{\Psi_1^3} + \frac{2\Psi_{2,r}^2}{\Psi_2^3} - \frac{\Psi_{1,rr}}{\Psi_1^2} - \frac{\Psi_{2,rr}}{\Psi_2^2} \right). \quad (136)$$

В сделанных нами выше предположениях (6) и (112) уравнения (136) для октупольных мод  $r=3\mu$  сводятся к

$$c_r^{(p)} = c_r - \frac{I(I+1)}{4} \frac{\Psi_{1,rr}}{\Psi_1^2} \quad (r=3\mu), \quad (137)$$

откуда следует, что амплитуды октупольных колебаний с ростом  $I$  возрастают. Это приводит к тому, что содержащий вклад октупольных вибраций момент инерции  $\bar{\Psi}_1$  оказывается больше не содержащего этого вклада момента инерции  $\bar{\Psi}_2$ , поэтому для анализа можно пренебречь членами  $1/\bar{\Psi}_1$  по сравнению с членами  $1/\bar{\Psi}_2$  и свести уравнения для квадрупольных мод к виду

$$x - 1 = \frac{I(I+1)}{2} \frac{3}{(\omega_{20}\Psi_0)^2} \frac{x-y}{j_2^2}; \quad (138)$$

$$y = -\frac{I(I+1)}{2} \frac{1}{(\omega_{22}\Psi_0)^2} \frac{x-y}{j_2^2}; \quad (139)$$

$$(\omega_{20}^{(p)}\Psi_0)^2 = (\omega_{20}\Psi_0)^2 + 3I(I+1) \left( \frac{2(x-y)^2}{j_2} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{J_2^2}; \quad (140)$$

$$(\omega_{22}^{(p)}\Psi_0)^2 = (\omega_{22}\Psi_0)^2 + I(I+1) \left( \frac{2(x-y)^2}{j_2} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{J_2^2}; \quad (141)$$

$$j_2 \equiv \frac{\bar{\Psi}_2}{\Psi_0} = (x-y)^2 + \frac{3(n_{20}+1/2)}{\omega_{20}^{(p)}\Psi_0} + \frac{n_{22}+1/2}{\omega_{22}^{(p)}\Psi_0}. \quad (142)$$



Для аналитического исследования удобно вычесть (139) из (138), после чего результат представить как

$$1 - \frac{I(I+1)}{2} \frac{1}{j_2^2} \left( \frac{3}{(\omega_{20} \mathcal{Y}_0)^2} + \frac{1}{(\omega_{22} \mathcal{Y}_0)^2} \right) = \frac{1}{x-y}. \quad (143)$$

Нетрудно установить, рассматривая случаи  $(x-y)^2 > j_2/4$  и  $(x-y)^2 < j_2/2$ , что левая часть (143) как функция от величины  $(x-y)$  имеет вид, показанный на рис. 7, причем при увеличении углового момента  $I$  минимум при  $x-y=0$  опускается ( $I_1 > I_2$ ). Как видно из рисунка, при любом значении  $I$  имеется точка пересечения с гиперболой  $(x-y)^{-1}$  в первой четверти — эта точка и соответствует обсуждавшемуся выше нормальному решению,  $x > y$ . Кроме того, начиная с некоторого значения  $I$ , появляются две дополнительные точки пересечения в третьей четверти, причем соответствующие им решения отвечают колебаниям вокруг существенно неаксимальной деформации ( $y > x$ ). Из уравнений (137) и (138) видно, что решения, сильно отличающиеся от  $x=1, y=0$ , могут иметь место только при  $I \gtrsim \omega \mathcal{Y}_0$ .

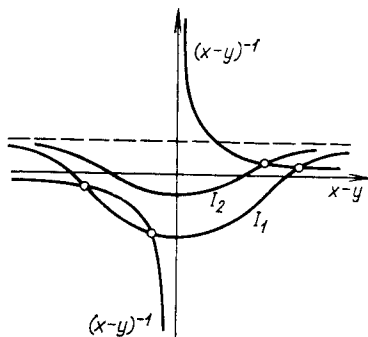


Рис. 7. Графический анализ уравнения (143)

При численном поиске аномальных решений уравнений (116) — (118) используем тот факт, что «основная» нелинейность заключена, как это выяснилось при исследовании жесткого предела [см. (122) — (126)], в уравнении (117). Поэтому удобно, выразив с помощью (116) и (118) через  $y$  остальные искомые величины, свести задачу к решению нелинейного уравнения

$$y - g(y) = 0. \quad (144)$$

Графический анализ этого уравнения приведен на рис. 8 для различных моментов  $I$  (ядро  $^{184}\text{Pt}$ ). Наряду с корнем, лежащим недалеко от точки  $y=0$ , начиная с момента  $I=6$ , появляются два дополнительных корня в области  $y \gtrsim 1$ . Этим решениям отвечают локальный минимум энергии как функции искомых величин  $\tilde{\beta}_r, c_r^{(p)}$  (правый корень) и перевал между этим минимумом и основным. Характеристики соответствующих состояний приведены в табл. 14.

Поскольку параметры динамической деформации  $x$  и  $y$  существенно различаются для аномальных и нормальных состояний, то и переходы между ними могут быть значительно ослаблены. Так, приведенная вероятность  $\mathcal{E}2$ -перехода из аномального состояния

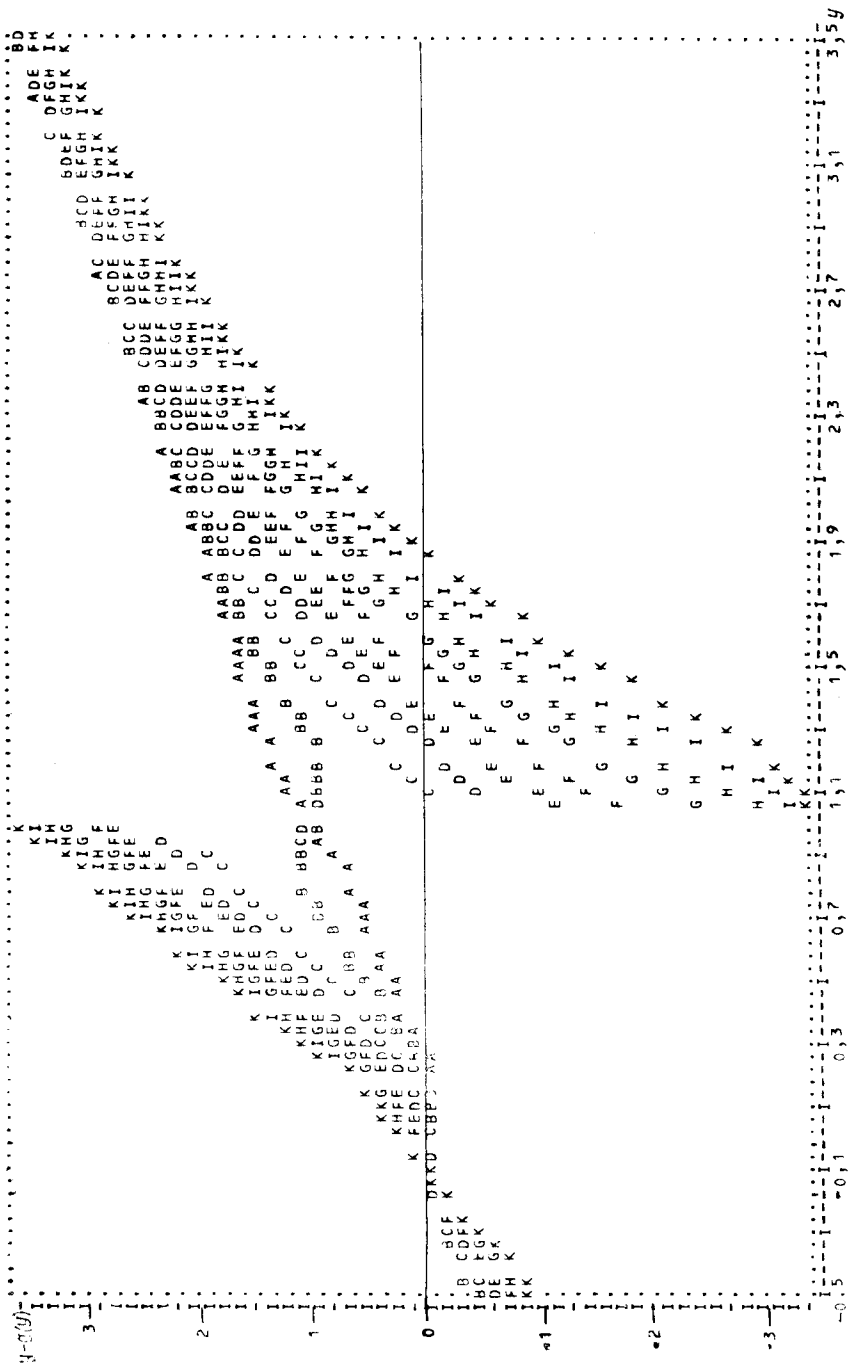


Рис. 8. Графический анализ уравнения (144) для моментов:

A — I = 0; B — I = 2; C — I = 4; D — I = 6; E — I = 8; F — I = 10; G — I = 12; H — I = 14; I — I = 16; K — I = 18

Таблица 14. Характеристики нормальных ( $N$ ) и аномальных ( $A$ ) состояний основной полосы ядра  $^{194}\text{Pt}$ 

$I$	$\frac{N}{A}$	$E$	$x$	$y$	$\omega_{20}^{(p)}\mathcal{Y}_0$	$\omega_{22}^{(p)}\mathcal{Y}_0$	$\omega_{30}^{(p)}\mathcal{Y}_0$
$4^+$	$N$	823	1,1229	0,0007	17,19	4,347	11,36
$6^+$ $6^+$	$N$ $A$	1482 4895	1,2030 0,5564	-0,0617 1,267	18,12 25,40	5,299 13,04	10,61 12,24
$8^+$ $8^+$	$N$ $A$	2230 5945	1,2879 0,5308	-0,0924 1,394	19,00 25,18	6,327 12,87	9,88 12,12
$10^+$ $10^+$	$N$ $A$	3038 6940	1,3722 0,5129	-0,1056 1,509	19,78 24,97	7,143 12,72	9,23 11,99

Примечание.  $\omega_{20}\mathcal{Y}_0=15,58$ ,  $\omega_{22}\mathcal{Y}_0=5,839$ ,  $\omega_{30}\mathcal{Y}_0=12,71$ .

с моментом  $I$  в нормальное с моментом  $I - 2$  определяется выражением

$$B(E2, I_A \rightarrow (I-2)_N) \simeq \left(\frac{3ZeR_0^2}{4\pi}\right)^2 \beta_0^2 \left(\frac{\omega_{20}^{(N)}x_N + \omega_{20}^{(A)}x_A}{\omega_{20}^{(N)} + \omega_{20}^{(A)}}\right)^2 \times \\ \times \frac{3I(I-1)}{2(4I^2-1)} \exp\left\{-\frac{1}{3}\tilde{\omega}_{20}\mathcal{Y}_0(x_A - x_N)^2 - \tilde{\omega}_{22}\mathcal{Y}_0(y_A - y_N)^2\right\}, \quad (145)$$

где

$$\tilde{\omega}_r = \omega_r^{(N)}\omega_r^{(A)} / (\omega_r^{(N)} + \omega_r^{(A)}). \quad (146)$$

В частности, для наиболее вероятного перехода из нижнего аномального состояния  $6^+$  на уровень  $4^+$  основной полосы в  $^{194}\text{Pt}$  имеем

$$B(E2, 6_{(A)}^+ \rightarrow 4^+) / B(E2, 6_{(N)}^+ \rightarrow 4^+) \simeq 0,8 \cdot 10^{-3}, \quad (147)$$

соответствующие же вероятности перехода в единицу времени, выражаемые через приведенные согласно известным формулам (см., например, [10]), оказываются сравнимыми,

$$T(E2, 6_{(A)}^+ \rightarrow 4^+) \simeq 7,2T(E2, 6_{(N)}^+ \rightarrow 4^+) \approx 1,1 \cdot 10^{-15} \text{ с}^{-1}. \quad (148)$$

Таким образом, обсуждаемая в настоящем обзоре модель предсказывает долгоживущие состояния с большими угловыми моментами, представляющие собой динамические изомеры формы. Экспериментальное исследование таких состояний интересно как само по себе, так и для проверки правильности модели.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Колебательно-вращательные свойства атомных ядер исследуются в рамках классического подхода, предложенного О. Бором [6] и заключающегося во введении коллективных переменных и построении соответствующего гамильтониана, исходя из наглядных физических (геометрических) представлений о ядерной деформации и вращении. Альтернативой такому подходу является появившаяся впоследствии [34, 35] и широко используемая в настоящее время модель взаимодействующих бозонов (ИВА), в которой коллективные переменные (бозоны) строятся из соображений симметрии ядерных спектров.

Данное в настоящем обзоре рассмотрение вбирает в себя многое от предшествующих, основанных на гамильтониане Бора. Так, подобно модели Фесслера — Грайнера [11] в коллективном гамильтониане выделяется основная часть (диагональная по вращательным переменным), на собственных функциях которой затем осуществляется диагонализация полного гамильтониана. С другой стороны, как и в модели Давыдова — Чабана [9], используется разложение эффективного колебательного потенциала вблизи точки динамического равновесия. Существенное отличие от предыдущих работ связано с представлением о взаимодействии коллективных мод через некоторое среднее поле. Такое представление становится возможным, когда число взаимодействующих степеней свободы достаточно велико и имеет смысл среднее поле, слабо зависящее от каждой из них в отдельности. Таким образом, одновременное рассмотрение и квадрупольных, и октупольных возбуждений позволяет иначе подойти к отысканию коллективной волновой функции. Разумеется, что включение в рассмотрение гексадекапольных переменных только улучшит применимость такого подхода. (К сожалению, экспериментальные сведения о них пока еще очень скупы и недостаточны для однозначного выбора соответствующих параметров.)

Возможность упрощения задачи при существенном увеличении числа рассматриваемых явно степеней свободы является хотя и неожиданной, но и не единственной в своем роде. В самом деле, ситуация тут очень напоминает ту, с которой сталкивается классическая постановка теории атомного ядра — построить решение уравнения Шредингера для  $A$  нуклонов, если пытаться последовательно переходить от ядра, состоящего из двух нуклонов, к трем, от трех к четырем и т. д. Другое дело, если сразу стартовать с «достаточно большого» ядра,  $A \gg 1$ . Тогда можно использовать многие методы, разработанные в теории ядерной материи, например теорию конечных ферми-систем, метод Хартри — Фока, не говоря уже об оболочечной модели.

Заметим в этой связи, что в последние годы в квантовой механике широко применяется так называемое  $(1/N)$ -разложение, предложенное вначале для решения специальных задач ядерной физики [36], теории критических явлений и квантовой теории поля [37] и затем перенесенное на многие другие задачи (подробнее — см. [38]).

Представления о самосогласованном характере взаимодействия колебательно-вращательных степеней свободы позволяют построить теорию таких возбуждений, в которой наряду с квадрупольными степенями свободы естественным образом включаются и октупольные и, в принципе, более высокой мультипольности. Тот факт, что при этом не производится разложение по отношению амплитуды колебаний к статической деформации, дает возможность рассматривать единым образом как деформированные, так и переходные ядра, где статическая деформация может быть малой.

Возникающая зависимость моментов инерции от углового момента  $I$ , учитываемая также самосогласованным образом, приводит к существенной перестройке спектра — от вращательного закона  $E_I \sim I(I+1)$  при малых  $I$  к эквидистантному при больших, что соответствует реально наблюдаемой картине. Сравнение результатов расчета с экспериментальными данными позволяет сделать вывод об адекватности предлагаемого описания как жестких, так и мягких ядер вплоть до достаточно больших моментов.

Коллективный гамильтониан Бора содержит несколько параметров, характеризующих коллективные свойства ядра (массовые коэффициенты, жесткости, параметры деформации) и подбирающихся по нескольким экспериментальным фактам. В этом смысле основанная на боровском гамильтониане теория является феноменологической. Микроскопическое вычисление параметров гамильтониана позволило бы исследовать такие ядра, информация о спектрах которых скудна или совсем отсутствует. С другой стороны, параметры, найденные из сравнения с экспериментом, могут служить для проверки будущих микроскопических теорий.

Одной из таких теорий коллективного движения является метод обобщенных гиперсферических функций [39], получивший дальнейшее развитие при использовании техники когерентных состояний [40]. В этом подходе последовательно решена проблема введения коллективных переменных, описывающих квадрупольные и монополюльные движения, а также получено микроскопическое обоснование коллективного «квадрупольного» гамильтониана Бора. Обобщение теории на случай октупольных (и более высокой мультипольности) коллективных движений могло бы стать решением обсуждаемой проблемы.

Авторы глубоко благодарны С. Т. Беляеву, И. Н. Михайлову, И. М. Павличенкову, Г. А. Пик-Пичаку, В. Г. Соловьеву и В. А. Ходяко за полезные обсуждения и ценные советы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vauterin D., Brink D.— Phys. Rev., 1972, v. C5, p. 626—647.
2. Барц Б. И., Бологин Ю. Л., Иношин Е. В., Гончар В. Ю. Метод Хартри—Фока в теории ядра. Киев: Наукова думка, 1982. 208 с.
3. Khodel V. A., Saperstein E.E.— Phys. Rep., 1982, v. 92C, p. 183—337.
4. Flocard H.— Nucleonika, 1979, v. 24, p. 19—66.
5. Belyaev S. T.— Nucl. Phys., 1965, v. 64, p. 17—53.
6. Bohr A.— Kgl. Mat.-Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., [1952, v. 26, № 14, p. 1—40.

7. Bohr A., Mottelson B.— Kgl. Mat.-Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 1953, v. 27, № 16, p. 1—174.
8. Давыдов А. С., Филиппов Г. Ф.— ЖЭТФ, 1958, т. 35, с. 440—447.
9. Davydov A.S., Chaban A.A.— Nucl. Phys., 1960, v. 20, p. 499—508.
10. Давыдов А. С. Возбужденные состояния атомных ядер. М.: Атомиздат, 1967, 263 с.
11. Faessler A., Greiner W.— Z. Phys., 1964, v. 168, p. 425—468; 1962, v. 170, p. 105—113; 1964, v. 177, p. 190—205.
12. Айзенберг И., Грайнер В. Модели ядер. Коллективные и одночастичные явления: Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1975. 456 с.
13. Bhardway S. K., Gupta K. K., Gupta J.V., Gupta D.K.— Phys. Rev., 1983, v. C27, p. 872—881.
14. Lipas P.O., Davydson J.P.— Nucl. Phys., 1961, v. 26, p. 80—90.
15. Leper D.P.— Nucl. Phys., 1964, v. 50, p. 234—240.
16. Lipas P.O., Kurki-Suonio K., Peltola E.— Nucl. Phys., 1968, v. A110, p. 211—217.
17. Davydson J.P.— Rev. Mod. Phys., 1965, v. 37, p. 105—158.
18. Davydson J.P.— Nucl. Phys., 1962, v. 33, p. 664—679.
19. Беленький В. М. Низколежащие коллективные и одночастичные возбуждения атомных ядер. Автореф. дис. на соиск. учен. степени доктора физ.-мат. наук. Харьков: ХГУ, 1982, 34 с.
20. Бегжанов Р. Б., Беленький В. М., Абдурахманов С. Р., Ушаров В. Р. Современные модели четно-четных ядер. Ташкент: Узбекистан, 1973. 174 с.
21. Rohozinski S.G., Gajda M., Greiner W.— J. Phys. G, 1982, v. 8, p. 787—819.
22. Варц Б. И., Инопин Е. В. Препринт ХФТИ 83-82. Харьков, 1983.
23. Варц Б. И., Инопин Е. В. Проблемы ядерной физики и космических лучей. Вып. 20. Харьков: Выща школа, 1984, с. 3—14.
24. Варц Б. И., Инопин Е. В., Шляхов Н. А.— В кн.: Тр. XVIII зимней школы ЛИЯФ. Ленинград, 1983, с. 255—287.
25. Варц Б. И., Инопин Е. В., Шляхов Н. А.— ЯФ, 1984, т. 40, с. 659—674.
26. Hill D.L., Wheeler J.— Phys. Rev., 1953, v. 89, p. 1102—1145.
27. Бегжанов Р. Б., Беленький В. М. Гамма-спектроскопия атомных ядер. Ташкент: ФАН, 1980. 472 с.
28. McGowan F.K., Bemis S.E., Jr., Milner W.T.e.a.— Phys. Rev., 1974, v. C10, p. 1146—1155.
29. Ellis Y.A.— Nucl. Data Sheets, 1977, v. 21, p. 549—614.
30. Cooper T., Bertozzi W., Heisenberg J.— Phys. Rev., 1976, v. C13, p. 1083—1094.
31. Saladin J.X.— Nucl. Phys., 1980, v. A347, p. 231—251.
32. Mariscotti M.A.J., Scharif-Coldhaber G., Buck B.— Phys. Rev., 1969, v. 178, p. 1864—1887.
33. Bhattacharya S., Sen S.— Phys. Rev., 1984, v. C30, p. 1014—1016.
34. Jenssen D., Jolos R.V., Donau F.— Nucl. Phys., 1974, v. A224, p. 93—115.
35. Arima A., Jachello F.— Phys. Rev. Lett., 1975, v. 35, p. 1069—1072.
36. Lipkin H.J., Meshkov M., Glick A.J.— Nucl. Phys., 1965, v. 62, p. 188—224.
37. Wilson K.G.— Phys. Rev., 1973, v. D7, p. 2911—2926.
38. Yaffe L.G. Physics Today, August 1983, p. 50. (См. перевод на рус. яз. в кн.: Физика за рубежом, 1984. Серия А. М.: Мир, 1984, с. 60—88).
39. Филиппов Г. Ф., Овчаренко В. И., Смирнов Ю. Ф. Микроскопическая теория коллективных возбуждений атомных ядер. Киев: Наукова думка, 1981, 367 с.
40. Филиппов Г. Ф., Василевский В. С., Чоповский Л. Л.— ЭЧАЯ, 1984, т. 15, с. 1338—1385.