

УДК 539.14

НОВЫЕ ТЕНДЕНЦИИ В РАЗВИТИИ И ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ГИПЕРСФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Р. И. Джибути

Институт физики АН ГССР, Тбилиси

К. В. Шитикова

НИИЯФ МГУ, Москва

Дан обзор основных результатов, полученных за последние десять лет в рамках метода гиперсферических функций. Изложены новые разработки математического аппарата метода. Приводятся основные результаты по применению метода в теории многочастичных реакций. Дан обзор результатов работ по применению метода гиперсферических функций в исследованиях коллективных возбужденных состояний легких ядер, а также упругих и неупругих сечений реакций с ионами. Излагается подход к решению кулоновской задачи в гиперсферическом базисе, сформулирован метод одновременного учета ядерного и кулоновского взаимодействий. Приводятся основные результаты по применению метода гиперсферических функций для изучения структуры многокварковых систем. Дан обзор результатов по развитию гиперсферического подхода к решению уравнений Фаддеева.

A review of basic results obtained in the last decade within the hyperspherical-function method is given. New developments of the mathematics of the method are expounded. Main results are presented of the application of the method in the theory of multiparticle reactions. A review of the works on the application of the method to study the collective excited states of light nuclei and elastic and inelastic cross sections of reactions with ions is given. An approach is proposed for solving the Coulomb problem in the hyperspherical basis and a method is formulated how the nuclear and Coulomb interactions may simultaneously be taken into account. Results are also presented of the application of the hyperspherical-function method for investigating the structure of multiquark systems. A review of results obtained in the application of the hyperspherical approach to the solution of the Faddeev equations.

ВВЕДЕНИЕ

Последние два десятилетия в физике ядра характеризуются бурным развитием теории нескольких тел, стимулирующим экспериментальные исследования различных свойств малонуклонных ядер и ядерных реакций на таких ядрах. В этой теории одним из часто применяемых методов является метод разложения по базису гиперсферических функций, который сравнительно быстро завоевал популярность после опубликования известных работ Ю.А. Симонова и А.М. Бадалян [1]. Результаты первого десятилетия развития и при-

менения метода гиперсферических функций (МГФ) подытожены в [2—5]. В последнее десятилетие в развитии МГФ наметились новые направления по дальнейшей теоретической разработке его приложений.

Так, в теории гиперсферического базиса значительную роль стало играть преобразование Рейнала — Реваи, применение которого привело к существенному упрощению расчетной техники. С точки зрения применения метода достигнуты успехи в описании непрерывного спектра многочастичных систем и многочастичных процессов. В последние годы метод широко применяется в атомной и молекулярной физике и в физике элементарных частиц (многокварковые системы). Найден способ «гибридизации» методов уравнений Фаддеева и гиперсферических функций.

В связи с этим возникла необходимость подытожить пройденный десятилетний этап и продемонстрировать широкое приложение гиперсферического базиса в различных областях развития теоретической физики.

В обзоре излагаются новые разработки математического аппарата метода гиперсферических функций: преобразование Рейнала — Реваи для трех и четырех тел, алгебра гиперсферических функций и проблема симметризации в гипербазисе для случая, когда наряду с идентичными частицами в системе присутствует частица с другой массой.

Далее приводятся основные результаты по применению метода гиперсферических функций в теории многочастичных реакций. Излагается метод описания «истинно» трех- и четырехчастичных рассеяний, приводятся основные результаты по описанию многочастичных реакций распадного типа. Излагаются результаты по применению МГФ в исследованиях коллективных возбужденных состояний легких ядер и упругих и неупругих сечений реакций с тяжелыми ионами.

Затем излагается решение кулоновской задачи в гиперсферическом базисе. Описываются связанные состояния заряженных частиц, рассеяние и многочастичные кулоновские функции, сформулирован метод одновременного учета ядерного и кулоновского взаимодействия.

Приводятся основные результаты по применению МГФ к изучению структуры многокварковых систем.

И, наконец, излагается «гибридный» метод исследования систем нескольких частиц, а именно: парциальное разложение в теории интегральных уравнений Фаддеева в гиперсферическом базисе, приложение гибридного метода к исследованию трехчастичных процессов.

1. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА МГФ

Унитарное преобразование в МГФ. Математический аппарат МГФ в последнее десятилетие получил дальнейшее развитие. Часть новых разработок в этом направлении изложена в [6]. Существенным мо-

ментом в этих разработках является использование преобразования Рейвала — Реваи. Это преобразование было введено для трех тел [7], а затем было обобщено для четырех тел [8]. Остановимся коротко на этих преобразованиях.

Рассмотрим систему из трех частиц с разными массами. Соответствующие гиперсферические функции образуют полный набор базисных ортонормированных функций и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi_K^{l_{x_i} l_{y_i} m_{x_i} m_{y_i}}(\Omega_i) = \\ = N_K^{l_{x_i} l_{y_i}} (\cos \alpha_i)^{l_{x_i}} (\sin \alpha_i)^{l_{y_i}} P_n^{l_{y_i} + \frac{1}{2}, l_{x_i} + \frac{1}{2}}(\cos 2\alpha_i) \times \\ \times Y_{l_{x_i} m_{x_i}}(\hat{\mathbf{x}}_i) Y_{l_{y_i} m_{y_i}}(\hat{\mathbf{y}}_i), \end{aligned} \quad (4)$$

где K — гипермомент, $l_{x_i}, l_{y_i}, m_{x_i}, m_{y_i}$ — орбитальные моменты, соответствующие трехчастичным координатам Якоби $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i$ и их проекции; $P_n^{l_1, l_2}$ — полиномы Якоби; $\Omega_i \equiv (\alpha_i, \hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{y}}_i)$ — совокупность пяти углов, четыре из которых определяют направление векторов Якоби, а пятый вводится соотношениями: $x_i = \rho \cos \alpha_i; y_i = \rho \sin \alpha_i; \rho$ — гиперрадиус;

$$N_K^{l_{x_i} l_{y_i}} = \sqrt{\frac{2n! (K+2) (n+l_{x_i}+l_{y_i}+1)!}{\Gamma(n+l_{x_i}+3/2) \Gamma(n+l_{y_i}+3/2)}}, \quad n = \frac{1}{2} (K - l_{x_i} - l_{y_i}). \quad (2)$$

В формулах (1) и (2) индекс i пробегает значения 1, 2, 3 в соответствии с тремя наборами координат Якоби. Если гиперсферические функции берутся в виде (1), то матричные элементы взаимодействия j -й и k -й частиц, а именно матричные элементы типа $\langle \Phi_K(\Omega_i) | V(\mathbf{x}_k) | \Phi_K(\Omega_i) \rangle$ сравнительно легко вычислить. Однако при вычислении с теми же функциями матричного элемента взаимодействия другой пары частиц, например матричного элемента $\langle \Phi_K(\Omega_i) | V(\mathbf{x}_k) | \Phi_K(\Omega_i) \rangle$, возникают большие трудности. Рейвалом и Ревай [7] были введены коэффициенты унитарного преобразования между трехчастичными гиперсферическими функциями (1), определенными на разных наборах координат Якоби:

$$\Phi_{KLM}^{l_{x_i} l_{y_i}}(\Omega_i) = \sum_{l_{x_k} l_{y_k}} \langle l_{x_k} l_{y_k} | l_{x_i} l_{y_i} \rangle_{KL} \Phi_{KLM}^{l_{x_k} l_{y_k}}(\Omega_k), \quad (3)$$

где $\langle l_{x_k} l_{y_k} | l_{x_i} l_{y_i} \rangle_{KL}$ — коэффициенты Рейвала — Ревай,

$$\Phi_{KLM}^{l_{x_i} l_{y_i}}(\Omega_i) = \sum_{m_{x_i} m_{y_i}} (l_{x_i} l_{y_i} m_{x_i} m_{y_i} | LM) \Phi_K^{l_{x_i} l_{y_i} m_{x_i} m_{y_i}}(\Omega_i). \quad (4)$$

Введение такого преобразования представляет собой существенный этап в развитии теории гиперсферических функций. В [7] получено аналитическое выражение указанных коэффициентов и найдена

их связь с коэффициентами Талми — Мошинского. Вычисление по аналитическому выражению — довольно трудоемкая задача, особенно для гармоник с большим значением гипермомента K . Расчетная техника существенно упрощается при использовании рекуррентных соотношений. Ряд таких соотношений был получен Я.А. Смородинским и В.Д. Эфросом [9] при использовании связи с коэффициентами Талми — Мошинского. В [10] другим путем была получена совокупность рекуррентных соотношений, позволяющая, не прибегая к громоздкой общей формуле, находить всевозможные коэффициенты Рейнала — Реваи. Использование коэффициентов Рейнала — Реваи приводит к существенному упрощению схемы построения гиперсферических функций заданной симметрии [11].

Рассмотрим теперь систему из четырех частиц с разными массами. Соответствующие гиперсферические функции имеют вид [8]:

$$\begin{aligned} \Psi_{\mu K}^{l_x l_y l_z m_x m_y m_z}(\omega) = & N_K^{l_x l_y} (\cos \alpha)^{l_x} (\sin \alpha)^{l_y} P_n^{l_y + \frac{1}{2}, l_z + \frac{1}{2}}(\cos 2\alpha) \times \\ & \times N_{\mu + 3/2}^{l_z K + \frac{3}{2}} (\cos \beta)^{l_z} (\sin \beta)^K P_m^{K+2, l_z + \frac{1}{2}}(\cos 2\beta) \times \\ & \times Y_{l_x m_x}(\hat{x}) Y_{l_y m_y}(\hat{y}) Y_{l_z m_z}(\hat{z}), \end{aligned} \tag{5}$$

где μ и K — гипермоменты соответственно для четырех и трех тел; $l_x, l_y, l_z, m_x, m_y, m_z$ — орбитальные моменты, соответствующие четырехчастичным координатам Якоби x, y, z и их проекции; $\omega \equiv \equiv (\alpha, \beta, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ — совокупность восьми углов, шесть из которых определяют направления векторов Якоби, а два вводятся соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} x = \rho \cos \alpha \sin \beta; \quad y = \rho \sin \alpha \sin \beta; \quad z = \rho \cos \beta; \\ N_a^{bc} = \sqrt{\frac{2d! (a+2) \Gamma(d+c+b+2)}{\Gamma(d+b+3/2) \Gamma(d+c+3/2)}}; \\ 2d = a - b - c; \quad 2m = \mu - K - l_z; \quad 2n = K - l_x - l_y. \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

В формулах (5) и (6) опущены индексы, фиксирующие набор четырехчастичных координат Якоби. В [8] было введено унитарное преобразование четырехчастичных гиперсферических функций, определенных на разных наборах координат Якоби:

$$\Psi_{\mu KLM}^{l_x l_y l_z m_x m_y m_z}(\omega) = \sum_{l'_x l'_y l'_z m'_x m'_y m'_z} \langle l'_x l'_y l'_z m'_x m'_y m'_z | l_x l_y l_z m_x m_y m_z \rangle_{\mu L} \Psi_{\mu K' L'M}^{l'_x l'_y l'_z m'_x m'_y m'_z}(\omega'), \tag{7}$$

где $\langle l'_x l'_y l'_z m'_x m'_y m'_z | l_x l_y l_z m_x m_y m_z \rangle_{\mu L}$ — четырехчастичные коэффициенты Рейнала — Реваи;

$$\begin{aligned} & \Psi_{\mu KLM}^{l_x l_y l_z m_x m_y m_z}(\omega) = \\ & = \sum_{m_x m_y m_z} (l_x l_y m_x m_y | l_x m_x) (l_x l_z m_x m_z | LM) \Psi_{\mu K}^{l_x l_y l_z m_x m_y m_z}(\omega). \end{aligned} \tag{8}$$

Найдены аналитические выражения четырехчастичных коэффициентов унитарных преобразований [8] и их связь с трех- и двухчастичными коэффициентами Талми — Мошинского [12]. В [13] получена совокупность рекуррентных соотношений, приводящая к упрощению расчетной техники.

Изложенную схему рассмотрения трех- и четырехчастичных базисных гиперсферических функций естественно можно обобщить и приложить для систем с большим числом частиц, и, что особенно важно, ее удобно применить не только в том случае, когда исследуемая система состоит только из всех одинаковых частиц или всех частиц с разными массами, но и в случае, когда наряду с идентичными частицами присутствует частица с другой массой. В [14] были введены пятичастичные коэффициенты унитарных преобразований гиперсферических функций и найдена их связь с четырех- и двухчастичными коэффициентами Талми — Мошинского. В [15] была найдена простая формула для коэффициентов преобразований гиперсферических функций N тел в случае, когда гипермомент равен полному орбитальному моменту системы. Коэффициенты, найденные по этой формуле, можно использовать в качестве исходных, а коэффициенты с большими гипермоментами (при прежнем значении полного орбитального момента) можно находить, используя рекуррентные соотношения.

Алгебра гиперсферических функций нескольких тел. Гиперсферические функции являются обобщением на многомерные пространства обычных сферических функций. Следовательно, часть соотношений (а может быть и все), имеющих место для последних, может иметь аналоги в пространстве гиперсферических функций. В [16] были получены некоторые результаты, способствующие развитию алгебры гиперсферических функций нескольких тел.

Пусть $\rho \equiv (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ — совокупность векторов, на базе которой построены гиперсферические функции $\Psi_{\nu_n}(\Omega_{3n})$, реализующие представление группы $O(3n)$, где ν_n — совокупность следующих квантовых чисел; l_1, l_2, \dots, l_n — орбитальные моменты; L_2, L_3, \dots, L_n — полные орбитальные моменты подсистемы; M_n — проекция полного орбитального момента; K_1, K_2, \dots, K_{n-1} — гипермоменты подсистемы.

Из разложения n -мерной сферической волны по гиперсферическим функциям получаем:

$$\begin{aligned}
 (\rho\rho')^m = 2^{1-m}\pi^{\frac{3n}{2}} (\rho\rho')^m m! \sum_{(K_{n-1})} \left[\left(\frac{m-K_{n-1}}{2} \right)! \Gamma \left(\frac{m+K_{n-1}+3n}{2} \right) \right]^{-1} \times \\
 \times \sum_{(K_{n-1})} \Psi_{\nu_n}^*(\Omega_{3n}) \Psi_{\nu_n}(\Omega'_{3n}). \tag{9}
 \end{aligned}$$

В (9) K_{n-1} принимает все неотрицательные значения одной четности с m , не превышающие m , и знак $\sum_{(\tau)}$ означает, что суммирование

ведется по всем квантовым числам, кроме τ , $\rho = [\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2]^{1/2}$.

Решая бесконечную систему (9), получаем

$$\sum_{(K_{n-1})} \Psi_{v_n}^* (\Omega_{3n}) \Psi_{v_n} (\Omega'_{3n}) = \frac{\pi^{-3n/2}}{4} (2K_{n-1} + 3n - 2) \Gamma\left(\frac{3n-2}{2}\right) C_{K_{n-1}}^{\frac{3n-2}{2}}\left(\frac{\rho\rho'}{\rho\rho'}\right), \quad (10)$$

где $C_{\beta}^{\alpha}(x)$ — полиномы Гегенбауера.

При $\rho' \rightarrow \rho$ имеем:

$$\sum_{(K_{n-1})} |\Psi_{v_n} (\Omega_{3n})|^2 = \frac{3n-1}{K_{n-1}(K_{n-1}+3n-2)} Q_n(K_{n-1}), \quad (11)$$

где

$$Q_n(K) = \frac{\pi^{-3n/2}}{4} (2K + 3n - 2) (3n - 2) \binom{K + 3n - 2}{K - 1} \Gamma\left(\frac{3n-2}{2}\right). \quad (12)$$

Действуя на обе части формулы (10) разными дифференциальными операторами и переходя к пределу $\rho' \rightarrow \rho$, получаем следующие соотношения:

$$\sum_{(K_{n-1})} M_n |\Psi_{v_n} (\Omega_{3n})|^2 = 0; \quad (13)$$

$$\sum_{(K_{n-1})} M_n^2 |\Psi_{v_n} (\Omega_{3n})|^2 = Q_n(K_{n-1}) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\xi_i}{\rho} \sin \theta_i\right)^2; \quad (14)$$

$$\sum_{(K_{n-1})} l_i(l_i + 1) |\Psi_{v_n} (\Omega_{3n})|^2 = 2Q_n(K_{n-1}) \left(\frac{\xi_i}{\rho}\right)^2; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \sum_{(K_{n-1})} K_m(K_m + 3m + 1) |\Psi_{v_n} (\Omega_{3n})|^2 = \\ = Q_n(K_{n-1}) (3m + 2) \sum_{i=1}^{m+1} \left(\frac{\xi_i}{\rho}\right)^2. \end{aligned} \quad (16)$$

В [16] получен также ряд других формул. Как и следовало ожидать, формулы (10) — (16) при $n = 1$ переходят в хорошо известные формулы для сферических функций.

Гиперсферический базис для системы из трех тождественных и одной частицы с другой массой. В целом ряде физических четырехчастичных задач требуется выделение степеней свободы одной из частиц (исследование четырехчастичных гиперядер, формфакторов, ядерных реакций с вылетом одной частицы и т.д.). При рассмотрении систем, состоящих из трех тождественных и одной частицы с другой массой, процедура симметризации представляет собой трехчастичную задачу при выборе $(3 + 1)$ -конфигурации. Имея базис четырехчасти-

чных гиперсферических функций, симметризованных по трем частицам, с помощью операторов Юнга можно построить базис симметризованных по четырем частицам функций и найти соответствующие генеалогические коэффициенты. Эта программа была выполнена в [17].

Для четырехчастичной гиперсферической функции, симметризованной по трем частицам, имеем:

$$\Psi_{\mu L K}^{[\bar{f}] \lambda_{[\bar{f}]} \nu_{[\bar{f}]} l_{12} l_3}(\omega) = \sum_{l_1 l_2} C_{K l_{12}}^{[\bar{f}] \lambda_{[\bar{f}]} \nu_{[\bar{f}]}}(l_1 l_2) \Psi_{\mu L K}^{l_1 l_2 l_{12} l_3}(\omega), \quad (17)$$

где $C_{K l_{12}}^{[\bar{f}] \lambda_{[\bar{f}]} \nu_{[\bar{f}]}}(l_1 l_2)$ — трехчастичные коэффициенты симметризации (в [6] приведены формулы, связывающие эти коэффициенты с трехчастичными коэффициентами Рейнала — Реваи; там же даны таблицы для этих коэффициентов при нескольких главных значениях квантовых чисел); $[\bar{f}]$ — схема Юнга трехчастичной системы; $\lambda_{[\bar{f}]}$ — строка представления $[\bar{f}]$; $\nu_{[\bar{f}]}$ — номер появления представления $[\bar{f}]$ при данных K и l_{12} . Введем коэффициенты преобразования функции (17) при перестановках частиц

$$P_{i4} \Psi_{\mu L K}^{[\bar{f}] \lambda_{[\bar{f}]} \nu_{[\bar{f}]} l_{12} l_3}(\omega) = \sum_{[\bar{f}'] \lambda_{[\bar{f}']} \nu_{[\bar{f}']} l'_{12} l'_3 K'} \Psi_{\mu L K'}^{[\bar{f}'] \lambda_{[\bar{f}']} \nu_{[\bar{f}']} l'_{12} l'_3}(\omega) \times \langle [\bar{f}'] \lambda_{[\bar{f}']} \nu_{[\bar{f}']} l'_{12} l'_3 K' | [\bar{f}] \lambda_{[\bar{f}]} \nu_{[\bar{f}]} l_{12} l_3 K \rangle_{\mu L}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (18)$$

С другой стороны, функции $\Psi_{\mu L M}^{l_1 l_2 l_{12} l_3}(\omega)$ при перестановках частиц преобразуются с помощью четырехчастичных коэффициентов Рейнала — Реваи [6, 8]:

$$P_{i4} \Psi_{\mu L K}^{l_1 l_2 l_{12} l_3}(\omega) = \sum_{l'_1 l'_2 l'_3 K'} \langle l'_1 l'_2 l'_3 K' | l_1 l_2 l_{12} l_3 K \rangle_{\mu L} P_{i4} \Psi_{\mu L K'}^{l'_1 l'_2 l'_3}(\omega). \quad (19)$$

Из формул (17) — (19) для коэффициентов преобразования получим:

$$\begin{aligned} & \langle [\bar{f}'] \lambda_{[\bar{f}']} \nu_{[\bar{f}']} l'_{12} l'_3 K' | [\bar{f}] \lambda_{[\bar{f}]} \nu_{[\bar{f}]} l_{12} l_3 K \rangle_{\mu L} = \\ & = \sum_{l_1 l_2 l'_{12}} C_{K' l'_{12}}^{[\bar{f}'] \lambda_{[\bar{f}']} \nu_{[\bar{f}']}}(l_1 l_2) \langle l'_1 l'_2 l'_{12} l'_3 K' | l_1 l_2 l_{12} l_3 K \rangle_{\mu L} C_{K l_{12}}^{[\bar{f}] \lambda_{[\bar{f}]} \nu_{[\bar{f}]}}(l_1 l_2). \quad (20) \end{aligned}$$

С помощью коэффициентов (20) можно найти генеалогические коэффициенты для четырехчастичного симметризованного базиса, т.е. можно построить базис симметризованных четырехчастичных гиперсферических функций на основе базиса (17).

Генеалогические коэффициенты для гиперсферических четырехчастичных симметризованных функций определяются формулой

$$\Psi_{\mu L}^{[f] \lambda_{[f]} \nu_{[f]}}(\omega) = \sum_{\alpha \nu_{[\bar{f}]}} B_{\mu L}^{[f] \lambda_{[f]} \nu_{[f]}}(\nu_{[\bar{f}]} \alpha) \Psi_{\mu L}^{[\bar{f}] \lambda_{[\bar{f}]} \nu_{[\bar{f}]}}(\omega), \quad (21)$$

$$\alpha \equiv K l_{12} l_3.$$

где $[f]$, $\lambda_{[f]}$, $\nu_{[f]}$ — соответственно схема Юнга, строка представления, номер представления $[f]$ при данных μ и L , относящихся к группе перестановок четырех частиц; $\bar{[f]}$ получается из $[f]$ путем удаления клетки, относящейся к четвертой частице.

В [17] построены операторы Юнга и с помощью этих операторов найдена связь генеалогических коэффициентов с коэффициентами (20).

2. МГФ В ТЕОРИИ МНОГОЧАСТИЧНЫХ РЕАКЦИЙ

Истинно трех- и четырехчастичные рассеяния. Гиперсферические функции являются собственными функциями операторов кинетической энергии. Естественно, поэтому, что волновые функции конечного состояния многочастичных реакций (функции непрерывного спектра) можно разложить по полному набору соответствующих гиперсферических функций. Такой подход позволяет надеяться единым образом описать начальное и конечное состояния в реакциях с участием нескольких частиц. Использование разложения трех- и четырехчастичных функций непрерывного спектра по соответствующим гиперсферическим функциям позволило [18, 19] обобщить метод фазовых функций [20, 21] для квантовомеханических задач трех и четырех тел. Такое обобщение возможно лишь для истинно многочастичных рассеяний.

Рассмотрим процесс $3 \rightarrow 3$, когда в начале и в конце процесса присутствуют три свободные частицы. Процесс трехчастичного рассеяния представляется довольно сложным, и при обобщении теории двухчастичного рассеяния на случай трех и более частиц возникают принципиальные трудности. В координатном представлении эти трудности связаны с граничными условиями. Более подробно соответствующие вопросы обсуждены в обзоре [19]. Когда в трехчастичном рассеянии возникают двухчастичные связанные состояния или имеет место двухчастичное рассеяние на энергетической поверхности, гиперсферический базис при решении уравнений Шредингера не может обеспечить нужной асимптотики трехчастичной волновой функции. Это связано с тем фактом, что гиперкоординаты являются коллективными и переход к ним удобен тогда, когда в системе «демократия» (ни одна пара не выделяется в смысле образования связанных состояний и рассеяния на энергетической поверхности). При соблюдении такой демократии рассеяние будем называть истинно трехчастичным. В последнем разделе настоящего обзора мы убедимся, что при переходе к решению уравнений Фаддеева возможности МГФ в принципе расширяются.

Волновую функцию непрерывного спектра трех частиц разложим по гиперсферическим функциям (случай нетождественных частиц):

$$\Psi_{pq}(x, y) = \sum_{K, l, x', y', LM} \frac{U_{KL}^{l, x' y'}(\rho)}{\rho^2} \Phi_{KLM}^{l, x' y'}(\Omega_\rho) \Phi_{KLM}^{l, x' y'}(\Omega_{x_0}), \quad (22)$$

где

$$p^2 + q^2 = \kappa_0^2 = 2mE/\hbar^2; \quad q = \kappa_0 \cos \alpha_{\kappa_0}; \quad p = \kappa_0 \sin \alpha_{\kappa_0};$$

$$\Omega_{\kappa_0} \equiv (\alpha_{\kappa_0}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}}).$$

Для гиперрадиальных функций из трехчастичного уравнения Шредингера получаем систему зацепляющихся одномерных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U_{KL}^{l_x l_y}(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dU_{KL}^{l_x l_y}(\rho)}{d\rho} + \left[\kappa_0^2 - \frac{(K+2)^2}{\rho^2} \right] U_{KL}^{l_x l_y}(\rho) = \\ = \sum_{K' l'_x l'_y} W_{KK'LM}^{l_x l_y; l'_x l'_y}(\rho) U_{K'L}^{l'_x l'_y}(\rho), \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$W_{KK'LM}^{l_x l_y; l'_x l'_y}(\rho) = \frac{2m}{\hbar^2} \int \Phi_{KLM}^{l_x l_y L}(\Omega) U_{123} \Phi_{K'LM}^{l'_x l'_y}(\Omega) d\Omega; \quad (24)$$

U_{123} — потенциальная энергия трехчастичной системы.

Решение одного уравнения из системы (23) (теория легко обобщается и на случай любого числа уравнений [6, 19]) можно представить в виде

$$U_{KL}^{l_x l_y}(\rho) = A_{KL}^{l_x l_y}(\rho) [\cos \delta_{KL}^{l_x l_y}(\rho) J_{K+2}(\kappa_0 \rho) - \sin \delta_{KL}^{l_x l_y}(\rho) N_{K+2}(\kappa_0 \rho)], \quad (25)$$

где $J_{K+2}(\kappa_0 \rho)$ и $N_{K+2}(\kappa_0 \rho)$ — функция Бесселя первого рода и функция Неймана $(K+2)$ -го порядка; $\delta_{KL}^{l_x l_y}(\rho)$ — фазовая функция, которая получается решением нелинейного уравнения типа Риккати; $A_{KL}^{l_x l_y}(\rho)$ — амплитудная функция, уравнение которой решается в квадратурах. Амплитудные функции определяют нормировку волновой функции и связаны с граничными условиями.

Совершенно аналогично можно рассмотреть истинно четырехчастичное рассеяние, вводя четырехчастичные фазовые функции $\delta_{\mu K L}^{l_x l_y l_x y l_z}(\rho)$ и амплитудные функции $A_{\mu K L}^{l_x l_y l_x y l_z}(\rho)$. Имеют ли место в природе такие процессы и насколько важно их исследование? Конечно, экспериментальное осуществление процессов истинно трех- и четырехчастичных рассеяний на ускорителях в настоящее время невозможно. Тем не менее детальное теоретическое рассмотрение этих процессов может дать весьма полезные сведения о многих аспектах проблемы многочастичных систем. Многие результаты из теории двухчастичного рассеяния можно перенести и обобщить на случай «истинно» многочастичных рассеяний. Уже проведено обобщение вариационных принципов Хюльтена и Коона, а также Швингера для фаз истинно трехчастичного рассеяния и сформулирована соответствующая оптическая теорема [22]. Этот путь обобщения, безусловно, можно продолжить. Наконец, в атомной и ядерной физике существует большой класс многочастичных реакций, в конечных состояниях которых преобладают истинно многочастичные перераспределения. Это реакции полного развала [19].

Полный развал трех- и четырехчастичных ядер. Процесс полного развала определяется матричным элементом:

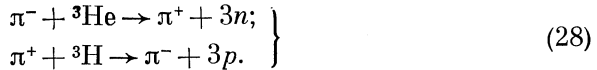
$$\langle f | H' | i \rangle = \int \Psi_f^* H' \Psi_i d\tau. \quad (26)$$

Волновая функция начального состояния Ψ_i быстро падает с ростом гиперрадиуса ρ (ρ — радиус гиперсферы, где разыгрываются взаимодействия между частицами). Следовательно, из волновой функции конечного состояния Ψ_f в матричный элемент (26) вносят вклад те члены, которые соответствуют малому значению гиперрадиуса ρ и в конечном итоге малым межчастичным расстояниям. Действительно, $\rho^2 = \sum_{i < j} \mathbf{r}_{ij}^2$, где \mathbf{r}_{ij} — относительный радиус-вектор пары i, j , и малому значению ρ соответствует ситуация, когда все \mathbf{r}_{ij} малы. Таким образом, для матричного элемента (26) важна лишь та часть конфигурационного пространства в непрерывном спектре, где разыгрываются истинно многочастичные рассеяния (демократия не нарушается при полном развале, при котором подсистемы не могут перерассеиваться на энергетической поверхности из-за того, что остальные частицы тоже находятся на близких расстояниях и вносят вклад в энергетический баланс). В [19] были обсуждены результаты ранних исследований реакций полного развала легких ядер элементарными частицами. В этом направлении продолжались исследования с использованием МГФ. Так, в [23] с использованием различных потенциалов нуклон-нуклонного взаимодействия исследована реакция захвата отрицательного мюона ядром трития:



Волновые функции начального и конечного ядерных состояний были получены с использованием одних и тех же нуклон-нуклонных потенциалов (потенциалы $S1$ и $S2$ Аффана — Танга, Волкова и Эйкемеера — Хакенброиха). Бралась волновые функции начального состояния, полученные Мухтаровой и Эфросом с учетом $K \leq 24$, а волновая функция конечного состояния получалась решением системы уравнений (23) методом фазовых функций с учетом двух гармоник. Показано, что взаимодействие в конечном состоянии (ВКС) между всеми нейтронами существенно влияет на исследуемый процесс: качественно меняется энергетическое распределение нейтрино и сильно увеличивается скорость μ -захвата. По всей видимости, это связано с тем фактом, что включение ВКС приводит к пространственной локализации трех нейтронов, в результате чего перекрытие волновых функций начального и конечного состояний для данного NN -потенциала увеличивается, что приводит к увеличению скорости μ -захвата. Показано далее, что учет ВКС усиливает чувствительность скорости μ -захвата к виду NN -потенциала. С использованием аналогичного подхода к изучению начального и конечного ядерных состояний в [24] была исследована реакция двойной перезарядки пио-

нов на трехчастичных ядрах с полным развалом:



Показано, что эффект ВКС между продуктами полного развала ядерной системы является решающим и приводит к появлению максимума в дифференциальном сечении в области малых энергий их

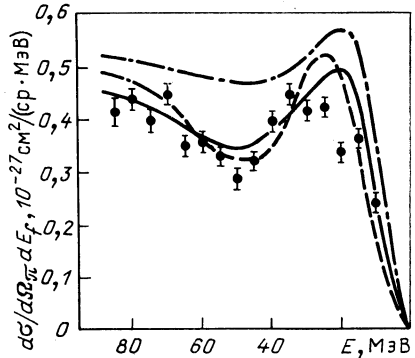


Рис. 1. Зависимость дифференциального сечения реакции $\pi^- + {}^3\text{He} \rightarrow \pi^+ + 3n$ от кинетической энергии E трех нейтронов. Экспериментальные данные из [25]: сплошная кривая — для потенциала; штриховая — для потенциала; штрихпунктирная — для потенциала Эйкемера — Хакенброиха

относительного движения (рис. 1). В [24] продемонстрирована хорошая сходимость сечения реакции по гипермоментам как начального, так и конечного состояния.

При изучении процессов истинно многочастичного рассеяния удобно использовать гиперсферический формализм в импульсном представлении [11]. В этом представлении волновую функцию несвязанного состояния трех взаимодействующих частиц можно представить в виде разложения:

$$\Psi_{\mathbf{q}_0\mathbf{p}_0}(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i) = \sum_{Kl_i l_p i K_0 L M} \Phi_{KLK_0}^{l_i l_p i}(\kappa, \kappa_0) \Phi_{KLM}^{*l_i l_p i}(\Omega_i) \Phi_{K_0 LM}^{l_i l_p i}(\Omega_0), \quad (29)$$

где $p_0^2 + q_0^2 = \kappa_0^2 = 2mE/\hbar^2$, $E > 0$ — энергия трех тел в системе центра масс; Ω_i и Ω_0 — совокупности гиперуглов, соответствующих шестимерным импульсным пространствам $(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i)$ и $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$; гипермоменты K_0 и K характеризуют систему соответственно до и после истинно трехчастичного рассеяния.

Для гиперрадиальных функций $\Phi_{KLK_0}^{l_i l_p i}(\kappa, \kappa_0)$ получается система зацепляющихся одномерных неоднородных сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \Phi_{KLK_0}^{l_i l_p i}(\kappa, \kappa_0) &= \frac{\delta(\kappa - \kappa_0)}{\kappa_0^5} \delta_{KK_0} - \frac{2m}{\hbar^2} \kappa^{-2} (\kappa^2 - \kappa_0^2 - i\epsilon)^{-1} \times \\ &\times \sum_{jK'} \sum_{l'_q l'_p \tilde{l}'_q \tilde{l}'_p} i^{K-K'} \langle \tilde{l}'_q \tilde{l}'_p | l_q l_p \rangle_{KL}^i \langle \tilde{l}'_q \tilde{l}'_p | l'_q l'_p \rangle_{K'L}^i \end{aligned}$$

$$\times \int \kappa'^3 d\kappa' \int \rho d\rho J_{K+2}(\kappa\rho) J_{K'+2}(\kappa'\rho) \int d\Omega_{\rho_i} \Phi_{K'LM}^{\widetilde{q}^1 \widetilde{p}^*}(\Omega_{\rho_j}) \times \\ \times U(x_j) \Phi_{KLM}^{q^1 p^1}(\Omega_{\rho_j}) \Phi_{K'LK_0}^{q^1 p^1}(\kappa', \kappa_0). \quad (30)$$

Формулы, аналогичные формулам (29) и (30), имеют место для связанного состояния трех тел. Отличие состоит в том, что в разложении типа (29) присутствует одна гиперсферическая функция в импульсном представлении, а вместо системы (30) имеем систему зацепляющихся одномерных однородных интегральных уравнений.

Теория легко обобщается на случай четырех тел [13]. В частности, для четырехчастичной связанной системы в импульсном представлении имеет место разложение

$$\Psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \sum_{\mu K l_1 l_2 l_3} \Phi_{\mu K L}^{l_1 l_2 l_3}(\kappa) \Psi_{\mu K L M}^{l_1 l_2 l_3}(\omega_\kappa), \quad (31)$$

где \mathbf{p} , \mathbf{q} и \mathbf{r} — импульсы Якоби; $\omega_\kappa \equiv (\alpha, \beta, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{r}})$, $p = \kappa \cos \alpha \sin \beta$; $q = \kappa \sin \alpha \sin \beta$; $r = \kappa \cos \beta$; $\kappa^2 = p^2 + q^2 + r^2$.

Такой подход неоднократно использовался в исследованиях структуры и реакций полного развала легких ядер и гиперъядер. Так, в [26] исследовалась проблема гипертретия в базисе гиперсферических функций в импульсном представлении. Были вычислены энергия связи и волновая функция гипертретия. Впервые проведено исследование мезонного и безмезонного распадов этого гиперъядра с учетом ВКС. Получено заключение, что МГФ в импульсном представлении позволяет без привлечения модельных представлений в единой схеме удовлетворительно описать как связанное состояние гиперъядра ${}^3\text{H}$, так и состояние непрерывного спектра. Показано далее, что эффект ВКС между нуклонами из реакции ${}^3\text{H} \rightarrow \pi^- + p + p + n$ существенно влияет на вероятность процесса. Только с учетом этого эффекта получается разумное число для вероятности распада. Было получено также заключение о том, что канал безмезонного распада ${}^3\text{H} \rightarrow p + n + n$ сильно подавлен из-за рыхлости гипертретия. С использованием МГФ в импульсном представлении в рамках предположения об истинно многочастичном характере перерасеяния продуктов распада в [27] был разработан единый подход к исследованию структуры гиперъядра ${}^9\text{Be}$ и ядерной реакции ${}^9\text{Be} \rightarrow \alpha + \alpha + p + \pi^-$. Показано, что такой подход позволяет провести сравнительно всестороннее исследование физики гиперъядра ${}^9\text{Be}$ в рамках единого формализма. Если потенциалы $\alpha\alpha$ - и $\lambda\alpha$ -взаимодействий сравнительно мягкие, то трехчастичная кластерная структура этого гиперъядра передается в основном минимальной гармоникой, хотя следующая гармоника вносит в энергию связи заметный вклад. Эффект ВКС между всеми частицами системы $\alpha + \alpha + p$ является определяющим и приводит как к количественному, так и качественному изменению всех рассматриваемых характеристик реакции ${}^9\text{Be} \rightarrow \alpha + \alpha + p + \pi^-$. Энергетический спектр л-мезонов в этой реакции имеет резко выраженный пик в области

больших энергий π -мезонов, а в распределении по относительным энергиям α -частиц в области малых энергий существует узкий пик, обусловленный главным образом эффектом взаимодействия между α -частицами в конечном состоянии. Далее показано, что α -частицы из реакции ${}^9\text{Be} \rightarrow \alpha + \alpha + p + \pi^-$ должны лететь в основном в противоположные стороны. Обнаружена достаточная критичность исследуемых характеристик к выбранной форме потенциалов $\alpha\alpha$ - и $\alpha\lambda$ -взаимодействий и выявлены качественные особенности этих характеристик. Все это делает весьма интересной задачу детального экспериментального исследования реакции ${}^9\text{Be} \rightarrow \alpha + \alpha + p + \pi^-$. Заметное усиление в последнее время внимания к развитию гиперъядерной физики позволяет надеяться, что такая задача будет решена в ближайшее время.

В [28] было предложено итерационное решение трех- и четырех-частичных уравнений МГФ в импульсном представлении [типа (30)] и на его основе были изучены двойные гиперъядра и очарованные суперъядра.

3. МГФ В ИССЛЕДОВАНИЯХ КОЛЛЕКТИВНЫХ ВОЗБУЖДЕННЫХ СОСТОЯНИЙ ЛЕГКИХ ЯДЕР И ПРОЦЕССОВ С УЧАСТИЕМ ЛЕГКИХ ИОНОВ

В этом разделе излагаются результаты исследований по применению МГФ к изучению структуры легких ядер, проявляющейся в упругом и неупругом рассеянии ионов. Особым образом выделен вопрос об эффекте изменения свойств ядер с энергией возбуждения, который автоматически учитывается в МГФ.

Эффект изменения свойств ядер с энергией возбуждения в МГФ [29]. В последние годы было проведено много экспериментальных исследований с тяжелыми ионами, в которых ядра находятся в высоковозбужденных состояниях в процессе глубоконеупругих столкновений. Одним из результатов этих исследований является тот факт, что свойства ядер меняются в зависимости от энергии возбуждения и эти изменения влияют на процесс реакции (деление). С другой стороны, были предприняты различные теоретические попытки описать температурную зависимость таких ядерных свойств, как распределение плотности, размеров и формы ядер. В [30] использован реалистичский микроскопический эффективный гамильтониан в рамках сферического хартри-фоковского приближения с конечной температурой для изучения термодинамических свойств ядер ${}^{16}\text{O}$ и ${}^{40}\text{Ca}$. Показано, что зависимость свойств этих ядер от температуры значительно сильнее, чем соответствующие результаты, которые были получены с феноменологическими силами нулевого радиуса. Этот эффект более значителен для легких, чем для тяжелых ионов. В [29] предлагается другой путь изучения зависимости распределения плотности размеров ядер от энергии возбуждения без непосредственного введения в метод расчета температурного параметра T . Использован коллективный гамильтониан с эффективным NN -взаимодействием для опи-

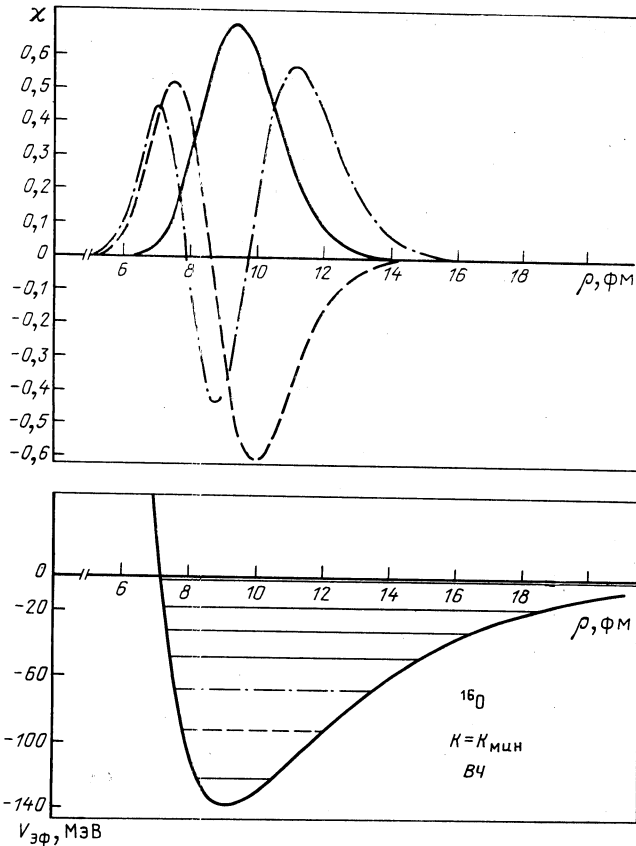


Рис. 2. Эффективный потенциал, собственные значения и первые три радиальные волновые функции, полученные как решения уравнения (32) для ядра ^{16}O

сания ядра как системы многих тел, состоящей из A нуклонов. Это позволяет изучать изменение коллективных свойств ядер с увеличением энергии возбуждения.

Система уравнений для нахождения собственных значений и радиальных собственных функций записывается как

$$\left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{L_K(L_K+1)}{\rho^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E + W_{K\gamma}^{K\gamma}(\rho)) \right\} \chi_{K\gamma}(\rho) = \frac{2m}{\hbar^2} \sum_{K'\gamma' \neq K\gamma} W_{K'\gamma'}^{K'\gamma'}(\rho) \chi_{K'\gamma'}(\rho). \quad (32)$$

На рис. 2 показан эффективный потенциал

$$V_{эф} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{L_K(L_K+1)}{\rho^2} + W_{K\gamma}^{K\gamma}(\rho),$$

собственные значения и первые три радиальные волновые функции, полученные как решения уравнения (32) для ядра ^{16}O , с использованием потенциала $B4$ Бринка — Баккера [31]. Видно, что эффективный потенциал автоматически расширяется для высоколежащих по энергии состояний. Вследствие этого, предложенный формализм корректно воспроизводит расширение радиальных волновых функций с увеличением энергии возбуждения ядра. В теории среднего

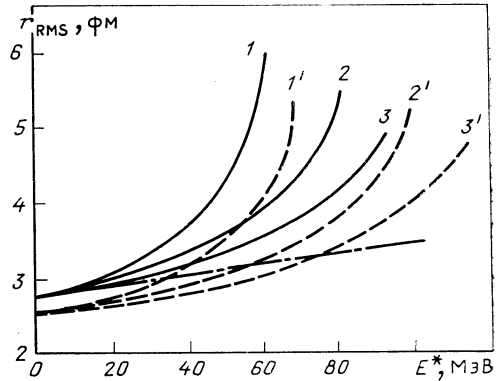


Рис. 3. Зависимость среднеквадратичного радиуса от энергии возбуждения для ядер ^{12}C (1, 1'), ^{15}O (2, 2') и ^{16}O (3, 3'). Штрихпунктирная линия — результаты [30]

поля, где используется осцилляторный потенциал для описания взаимодействия, этот эффект создается за счет изменения числа базисных состояний и значения радиуса осциллятора с увеличением параметра T , который соответствует высоким возбуждениям в ядрах. На рис. 3 показана зависимость среднеквадратичного радиуса от энергии возбуждения для ядер ^{12}C , ^{15}O и ^{16}O [29] в сравнении с результатами для ^{16}O [30], где формула для расчета среднеквадратичного радиуса имеет следующий вид:

$$r_{RMS}(E^*) = 2,74 (1,0056 + 6,51 \cdot 10^{-3} / \sqrt{E^*} + 1,89 \cdot 10^{-3} E^*). \quad (33)$$

Цифры 1 (B1) и 1' (B4) соответствуют ядру ^{12}C , 2 (B1) и 2' (B4) — ядру ^{15}O и 3 (B1), 3' (B4) — ядру ^{16}O . Скобки описывают набор параметров NV -взаимодействия.

Итак, в [29] была изучена зависимость свойств легких ядер как функция энергии возбуждения. Результаты расчета сравнивались с соответствующими результатами в теории поля, в котором используется реалистический микроскопический эффективный гамильтониан при конечной температуре.

Предсказания об изменении свойств ядер с увеличением энергии возбуждения, которые получают в МГФ, отличаются от тех результатов, которые дает теория среднего поля. В частности, проведенные в [29] расчеты показали, что среднеквадратичный радиус как функция энергии возбуждения стремится к бесконечности при энергии возбуждения, близкой к энергии связи, в то время как теория среднего поля предсказывает конечное значение радиуса в этом случае.

Это расхождение может быть обусловлено тем фактом, что в МГФ вся энергия возбуждения ядра концентрируется на одной степени свободы, связанной с коллективной переменной ρ , в то время как в методе Хартри — Фока энергия возбуждения ядра распределяется по большому числу частично-дырочных возбуждений различной природы. В согласии с теми результатами, которые получают в методе Хартри — Фока при конечной температуре, использующем реалистический микроскопический эффективный гамильтониан, предложенный здесь метод указывает на более сильную температурную зависимость для легких ядер, чем для тяжелых.

В [32] исследовано влияние эффекта изменения свойств ядра с энергией возбуждения на результаты расчетов для мультипольных гигантских резонансов.

Монопольные гигантские резонансы. Изучение природы монопольных гигантских резонансов в легких ядрах стимулируется тем фактом, что проблема экспериментального обнаружения монопольных гигантских резонансов не является тривиальной и для большинства легких ядер до сих пор не решена окончательно. Базис МГФ чрезвычайно удобен для микроскопического описания монопольных колебаний. Возбуждение по коллективной переменной ρ соответствует монопольным колебаниям ядра как целого, т.е. плотность является динамической переменной.

Результаты расчета энергии возбуждения монопольных состояний и распределения энергетически взвешенной монопольной суммы для легких ядер $4 \leq A \leq 16$ [5] показали, что форма распределения монопольной суммы одинакова для всех изученных ядер, а именно 70—80% монопольного правила сумм вбирает первое монопольно-возбужденное состояние и порядка 10% — второе. Эти результаты не очень чувствительны к выбору варианта NV -потенциала, что следует из сравнения этих значений для ядра ^{16}O с соответствующими результатами, полученными в [34, 35].

В качестве следующего шага интересно рассмотреть влияние изменения свойств ядер с энергией возбуждения на потенциал взаимодействия двух тяжелых ионов и на сечение неупругого рассеяния ядро — ядро. Можно ожидать, что этот эффект играет важную роль для описания таких процессов, в которых возбуждаются гигантские резонансы в районе 20 МэВ при неупругом рассеянии тяжелых ионов. Такое исследование было проведено в [36]. С использованием плотностей ядер, полученных в методе гиперсферических функций, были построены фолдинг-потенциалы для системы $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$. При этом изучались свойства потенциалов взаимодействия двух тяжелых частиц как в основном, так и в монопольно-возбужденных состояниях с энергией 20—40 МэВ. Результаты расчета представлены на рис. 4. Видно, что потенциал взаимодействия для обоих ядер в основном состоянии самый глубокий. В принципе он становится шире с увеличением энергии возбуждения системы, однако потенциал для обоих фрагментов, находящихся в первом возбужденном состоянии, глуб-

же, чем соответствующий потенциал для такой комбинации, в которой одно ядро в основном состоянии, а другое — во втором возбужденном состоянии, несмотря на то что полная энергия возбуждения системы выше в первом случае. Этот факт объясняется различной структурой волновых функций, характеризующих различные ядерные состояния, которые определяют радиальное распределение плотностей ядер и, следовательно, форму фолдинг-потенциала.

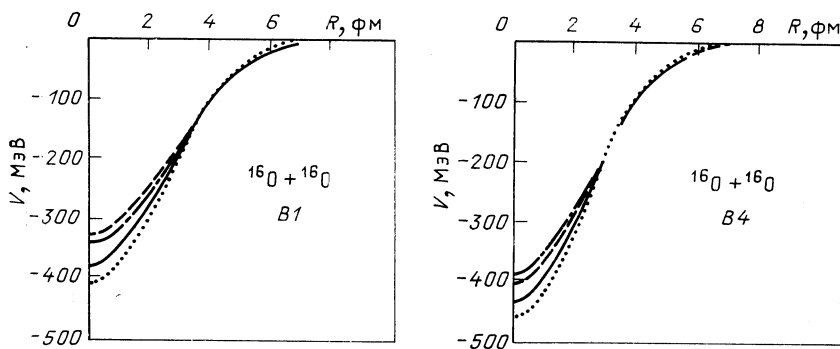


Рис. 4. Фолдинг-потенциал с силами Скирма для системы $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$: $V_{0,0}$ — точечная линия; $V_{0,0_1^+}$ — сплошная линия; $V_{0^1,0_1^+}$ — штрихпунктирная линия; $V_{0,0_2^+}$ — пунктирная линия

Первая попытка микроскопического описания углового распределения в неупругом ядерно-ядерном рассеянии с возбуждением одного из ядер была предпринята для системы $^{12}\text{C} (^3\text{He}, ^3\text{He})^{12}\text{C}^{0+}$, $E_{^{12}\text{C}^{0+}}^* = 20,3$ МэВ при энергии падающих частиц $E_{^3\text{He}} = 108$ МэВ и $^{12}\text{C} (^4\text{He}, ^4\text{He}^{0+})^{12}\text{C}$, $E_{^4\text{He}^{0+}}^* = 20,1$ МэВ при $E_{^4\text{He}} = 65$ МэВ [37, 38]. Результаты, показанные на рис. 5 и 6, находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными. Это означает, что при расчете сечения процесса неупругого рассеяния необходимо учитывать эффект расширения ядра с увеличением энергии возбуждения.

Дипольные гигантские резонансы. На рис. 7 даны результаты расчетов изовекторных состояний ядра ^{16}O с $J^\pi = 1^-, T = 1$, называемых дипольным гигантским резонансом [32]. В модели оболочек, в которой не учитывается эффект изменения свойств ядра, полная дипольная сумма концентрируется в области энергии возбуждения до 30 МэВ. В МГФ дипольная сумма перераспределяется в область более высоких энергий возбуждения. Этот факт находится в хорошем согласии с экспериментальными данными [33], которые показывают, что примерно 50% дипольной суммы в ^{16}O находится за гигантским резонансом.

Таким образом, учет изменения свойств ядер с увеличением энергии возбуждения позволяет описать свойства мультипольных гиган-

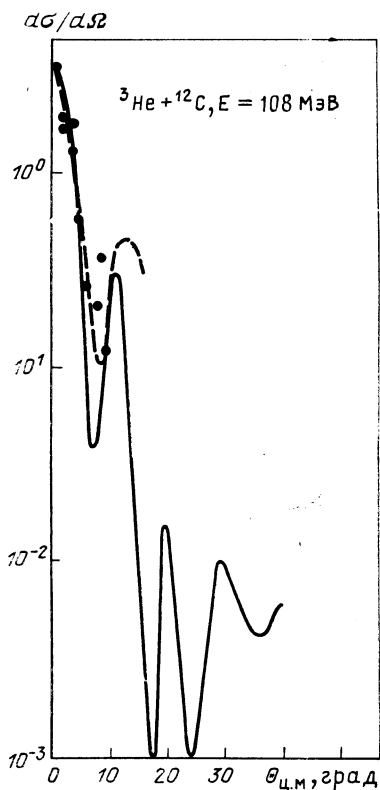


Рис. 5. Угловое распределение неупругого рассеяния ${}^3\text{He} + {}^{12}\text{C}$ при $E_{{}^3\text{He}} = 108$ МэВ:

сплошная линия — расчет [38]; пунктирная — феноменологическое описание [39]; точки — экспериментальные данные

тских резонансов в хорошем согласии с экспериментальными данными.

Изучение структуры ядра ${}^{12}\text{C}$ в рассеянии ионов. Возбужденные состояния ядра ${}^{12}\text{C}$ изучались в ряде теоретических [41—44] и экспериментальных [48] работ. При этом исследовались спектроскопические характеристики этого ядра и решались задачи упругого и неупругого рассеяния на ${}^{12}\text{C}$.

В теоретических исследованиях детально изучалась природа низших возбужденных состояний в различных моделях. Так, в [41] в МГФ были проведены расчеты четырехчастичных возбуждений в ядре ${}^{12}\text{C}$. В результате удалось описать низшее возбужденное 0^+ -состояние (энергия — 7,65 МэВ). Было показано, что это состояние имеет внутреннюю волновую функцию, соответствующую четырехчастичному возбуждению, и может быть удовлетворительно описано

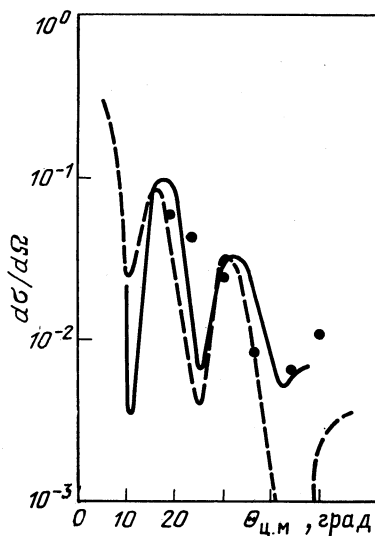


Рис. 6. Сечение неупругого рассеяния ${}^4\text{He} + {}^{12}\text{C}$ при $E_{{}^4\text{He}} = 65$ МэВ [40]. Кривые имеют те же обозначения, что на рис. 5

одной $K_{\text{мин}} + 4$ -гармоникой. Позднее, в [42], была успешно описана структура состояний положительной и отрицательной четности в ^{12}C в рамках микроскопической 3α -частичной модели.

В [43] сделана попытка рассчитать энергию связи и характеристики 0^+ -уровней различной природы ядра ^{12}C в ортогональной схеме с наиболее симметричными схемами Юнга, имеющими $K = K_{\text{мин}}, K_{\text{мин}} + 2, K_{\text{мин}} + 4$. И, наконец, в [44] детально изучалась переходная плотность 0^+ (основное состояние) $\rightarrow 2^+$ (4,44 МэВ)

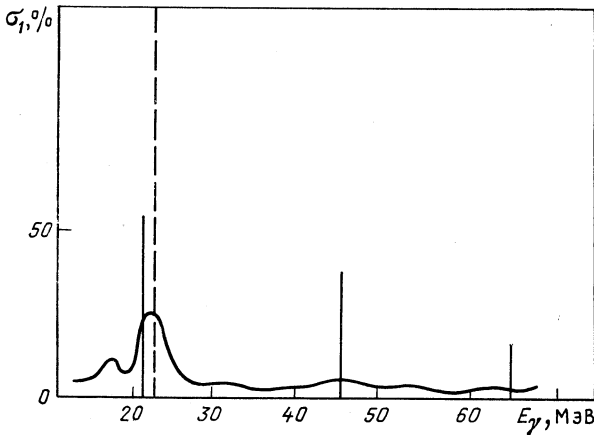


Рис. 7. Дипольный гигантский резонанс в ядре ^{16}O

в ^{12}C в промежуточной модели. В этом случае к состояниям модели оболочек примешиваются состояния изоскалярного гигантского квадрупольного резонанса.

В [45] изучались возбужденные состояния различной природы ядра ^{12}C в методе гиперсферических функций. Рассчитаны спектр возбужденных 0^+ - и 2^+ -состояний в этом ядре, плотности, среднеквадратичные радиусы, приведенные вероятности $B(E2)$ для исследуемых переходов. Найдены фолдинг-потенциалы, сечения упругого и неупругого рассеяния с участием ионов ^{12}C . Проведенное исследование позволило дать интерпретацию структурных особенностей возбужденных 0^+ - и 2^+ -состояний в ядре ^{12}C .

Кратко изложим схему расчета различных свойств возбужденных состояний ядер с учетом трех гармоник: $K_{\text{мин}}, K_{\text{мин}} + 2, K_{\text{мин}} + 4$. Волновая функция ядра A ищется в виде разложения по K -гармоническим полиномам

$$\Psi(1, 2, \dots, A) = \rho^{-\frac{1}{2}(3A-4)} \sum_{K, \gamma} \chi_{K\gamma}(\rho) |AK\gamma\rangle, \quad (34)$$

где $\gamma = [f] \varepsilon LST$. В ядре ^{12}C в приближении $K = K_{\text{мин}}, K_{\text{мин}} + 2, K_{\text{мин}} + 4$ при нахождении собственных значений и радиальных соб-

ственных функций решается система связанных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned}
 & \left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{23 \cdot 24}{\rho^2} - \frac{2m}{\hbar^2} [E + W_{K\gamma}^{K\gamma}(\rho)] \right\} \chi_{K\gamma}(\rho) = \\
 & = \sum_{\gamma'} \frac{2m}{\hbar^2} [W_{K\gamma}^{K+2\gamma'}(\rho) \chi_{K+2\gamma'}(\rho) + W_{K\gamma}^{K\gamma'}(\rho) \chi_{K\gamma'}(\rho)]; \\
 & \left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{25 \cdot 26}{\rho^2} - \frac{2m}{\hbar^2} [E + W_{K+2\gamma}^{K+2\gamma}(\rho)] \right\} \chi_{K+2\gamma}(\rho) = \\
 & = \frac{2m}{\hbar^2} \sum_{\gamma'} [W_{K+2\gamma}^{K\gamma'}(\rho) \chi_{K\gamma'}(\rho) + W_{K+2\gamma}^{K+2\gamma'}(\rho) \chi_{K+2\gamma'}(\rho) + \\
 & + W_{K+2\gamma}^{K+4\gamma'}(\rho) \chi_{K+4\gamma'}(\rho)]; \\
 & \left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{27 \cdot 28}{\rho^2} - \frac{2m}{\hbar^2} [E + W_{K+4\gamma}^{K+4\gamma}(\rho)] \right\} \chi_{K+4\gamma}(\rho) = \\
 & = \frac{2m}{\hbar^2} \sum_{\gamma'} [W_{K+4\gamma}^{K+2\gamma'}(\rho) \chi_{K+2\gamma'}(\rho) + W_{K+4\gamma}^{K+4\gamma'}(\rho) \chi_{K+4\gamma'}(\rho)],
 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

где $W_{K\gamma}^{K'\gamma'}(\rho)$ — матричные элементы потенциальной энергии нуклон-нуклонного взаимодействия

$$V = \sum_{i < j}^A V(r_{ij}), \quad V(r_{ij}) = f(r_{ij}) W_{\sigma\tau}, \quad (36)$$

которые могут быть выражены через двухчастичные генеалогические коэффициенты в виде

$$\begin{aligned}
 & W_{K\gamma}^{K'\gamma'}(\rho) = \langle AK[f] \varepsilon LST M_L M_S M_T | \hat{V} | AK'[f'] \times \\
 & \times \varepsilon' L'S'T' M_L' M_S' M_T' \rangle = \frac{A(A-1)}{2} \sum \langle AK[f] \varepsilon LST | A-2K_2 [f_2] \times \\
 & \times \varepsilon_2 L_2 S_2 T_2, \Lambda(L''K''); L_0 S_0 T_0 \rangle \langle AK'[f'] \varepsilon' L'S'T' | A-2K_2 [f_2] \times \\
 & \times \varepsilon_2 L_2 S_2 T_2, \Lambda(L''K''); L_0 S_0 T_0 \rangle \langle S_0 T_0 | W_{\sigma\tau} | S_0 T_0 \rangle R_{K''L_0}^{K'K'}(\rho), \quad (37)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 R_{K''L_0}^{K'K'}(\rho) = & \int d\theta_1 (\sin \theta_1)^{3A-7} (\cos \theta_1)^2 N_{KK''L_0} N_{K'K''L_0} f(\rho \cos \theta_1) \times \\
 & \times (\sin \theta_1)^{2K''} (\cos \theta_1)^{2L_0} P_{K-K''-L_0}^{K''+\frac{1}{2}(3A-6)-1, L_0+\frac{1}{2}} (\cos 2\theta_1) \times \\
 & \times P_{K'-K''-L_0}^{K''+\frac{1}{2}(3A-6)-1, L_0+\frac{1}{2}} (\cos 2\theta_1). \quad (38)
 \end{aligned}$$

Для основного состояния ядра ^{12}C $LST = 000$. Если включить в схему расчета наиболее симметричную схему Юнга [444], то для состояний $K_{\text{мин}}$, $K_{\text{мин}} + 2$, $K_{\text{мин}} + 4$ будут рассмотрены следующие

конфигурации:

$$K_{\text{мин}} : |s^4 p^8\rangle = \gamma_1;$$

$$K_{\text{мин}} + 2 : |s^2 p^{10}\rangle = \gamma_2, |s^4 p^6 \cdot 2S^2\rangle = \gamma_3, |s^4 p^6 |d^2\rangle = \gamma_4;$$

$$K_{\text{мин}} + 4 : |s^4 p^4 \cdot 2S^4\rangle = \gamma_5, |s^4 p^4 |d^2 \cdot 2S^2\rangle = \gamma_6, |s^4 p^4 |d^4\rangle = \gamma_7.$$

Таким образом, в приближении $K = K_{\text{мин}}$ ограничиваются рассмотрением одного уравнения, в приближении $K = K_{\text{мин}} + 2$ решают систему четырех связанных дифференциальных уравнений и, наконец, в приближении $K = K_{\text{мин}} + 4$ имеют систему из семи связанных дифференциальных уравнений. Эта система записывается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{23 \cdot 24}{\rho^2} - \frac{2m}{\hbar^2} [E + W_{K\gamma_1}^{K\gamma_1}(\rho)] \right\} \chi_{K\gamma_1}(\rho) = \frac{2m}{\hbar^2} \times \\ & \times [W_{K\gamma_1}^{K+2\gamma_2}(\rho) \chi_{K+2\gamma_2}(\rho) + W_{K\gamma_1}^{K+2\gamma_3}(\rho) \chi_{K+2\gamma_3}(\rho) + \\ & + W_{K\gamma_1}^{K+2\gamma_4}(\rho) \chi_{K+2\gamma_4}(\rho)]; \\ & \left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{25 \cdot 26}{\rho^2} - \frac{2m}{\hbar^2} [E + W_{K+2\gamma_2}^{K+2\gamma_2}(\rho)] \right\} \chi_{K+2\gamma_2}(\rho) = \\ & = \frac{2m}{\hbar^2} W_{K+2\gamma_2}^{K\gamma_1}(\rho) \chi_{K\gamma_1}(\rho); \\ & \left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{25 \cdot 26}{\rho^2} - \frac{2m}{\hbar^2} [E + W_{K+2\gamma_3}^{K+2\gamma_3}(\rho)] \right\} \chi_{K+2\gamma_3}(\rho) = \\ & = \frac{2m}{\hbar^2} [W_{K+2\gamma_3}^{K\gamma_1}(\rho) \chi_{K\gamma_1}(\rho) + W_{K+2\gamma_3}^{K+4\gamma_5}(\rho) \chi_{K+4\gamma_5}(\rho) + \\ & + W_{K+2\gamma_3}^{K+2\gamma_4}(\rho) \chi_{K+2\gamma_4}(\rho) + W_{K+2\gamma_3}^{K+4\gamma_6}(\rho) \chi_{K+4\gamma_6}(\rho)]; \\ & \left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{25 \cdot 26}{\rho^2} - \frac{2m}{\hbar^2} [E + W_{K+2\gamma_4}^{K+2\gamma_4}(\rho)] \right\} \chi_{K+2\gamma_4}(\rho) = \\ & = \frac{2m}{\hbar^2} [W_{K+2\gamma_4}^{K\gamma_1}(\rho) \chi_{K\gamma_1}(\rho) + W_{K+2\gamma_4}^{K+2\gamma_3}(\rho) \chi_{K+2\gamma_3}(\rho) + \\ & + W_{K+2\gamma_4}^{K+4\gamma_6}(\rho) \chi_{K+4\gamma_6}(\rho) + W_{K+2\gamma_4}^{K+4\gamma_7}(\rho) \chi_{K+4\gamma_7}(\rho)]; \\ & \left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{27 \cdot 28}{\rho^2} - \frac{2m}{\hbar^2} [E + W_{K+4\gamma_5}^{K+4\gamma_5}(\rho)] \right\} \chi_{K+4\gamma_5}(\rho) = \\ & = \frac{2m}{\hbar^2} [W_{K+4\gamma_5}^{K+2\gamma_3}(\rho) \chi_{K+2\gamma_3}(\rho) + W_{K+4\gamma_5}^{K+4\gamma_6}(\rho) \chi_{K+4\gamma_6}(\rho)]; \\ & \left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{27 \cdot 28}{\rho^2} - \frac{2m}{\hbar^2} [E + W_{K+4\gamma_6}^{K+4\gamma_6}(\rho)] \right\} \chi_{K+4\gamma_6}(\rho) = \\ & = \frac{2m}{\hbar^2} [W_{K+4\gamma_6}^{K+2\gamma_3}(\rho) \chi_{K+2\gamma_3}(\rho) + W_{K+4\gamma_6}^{K+2\gamma_4}(\rho) \chi_{K+2\gamma_4}(\rho) + \\ & + W_{K+4\gamma_6}^{K+4\gamma_5}(\rho) \chi_{K+4\gamma_5}(\rho) + W_{K+4\gamma_6}^{K+4\gamma_7}(\rho) \chi_{K+4\gamma_7}(\rho)]; \\ & \left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{27 \cdot 28}{\rho^2} - \frac{2m}{\hbar^2} [E + W_{K+4\gamma_7}^{K+4\gamma_7}(\rho)] \right\} \chi_{K+4\gamma_7}(\rho) = \\ & = \frac{2m}{\hbar^2} [W_{K+4\gamma_7}^{K+2\gamma_4}(\rho) \chi_{K+2\gamma_4}(\rho) + W_{K+4\gamma_7}^{K+4\gamma_6}(\rho) \chi_{K+4\gamma_6}(\rho)]. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Решая систему уравнений (38), находят энергию связи и спектр возбужденных состояний ядра ^{12}C , а также соответствующие волновые функции.

На рис. 8 показан эффективный потенциал и первые два решения в нем для ядра ^{12}C в приближениях $K = K_{\text{мин}}$, $K_{\text{мин}} + 4$. В схему расчета были включены NN -потенциалы из [41]. Обращает на себя

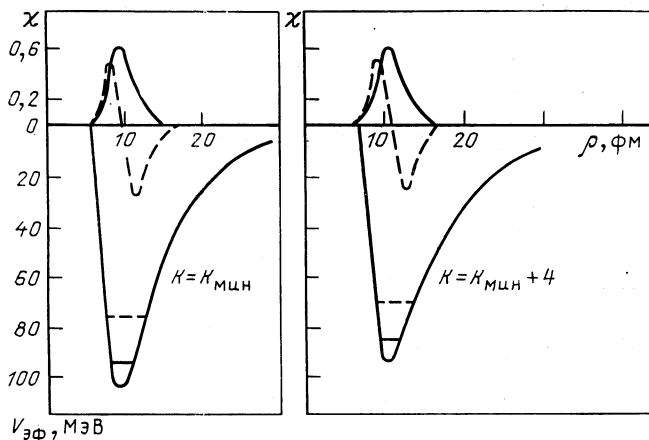


Рис. 8. Эффективный потенциал $V_{\text{эф}}$ и первые два решения χ в нем для ядра ^{12}C

внимание тот факт, что глубина эффективного потенциала резко увеличивается с увеличением глобального момента K , что связано с учетом принципа Паули.

Используя функции $\chi_K(\rho)$, которые были получены при решении уравнений (39), можно построить плотности основного и возбужденных состояний ядер, а также переходные [46, 47] по общей формуле

$$n_{J\pi_J, J'\pi'}(\mathbf{r}) = \left\langle J\pi \left| \sum_K \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_K) \right| J'\pi' \right\rangle, \quad (40)$$

где $J\pi$ и $J'\pi'$ характеризуют начальное и конечное состояния ядра, а мультипольное разложение плотности имеет вид

$$n_{J\pi_J, J'\pi'}(\mathbf{r}) = \sum_{\lambda\mu} n_{J\pi_J, J'\pi'}^\lambda(\mathbf{r}) Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \varphi),$$

где радиальные компоненты $n_{J\pi_J, J'\pi'}^\lambda(\mathbf{r})$ записываются следующим образом:

$$n_{J\pi_J, J'\pi'}^\lambda(\mathbf{r}) = \left\langle J\pi \left| \sum_K r_K^{-2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_K) i^\lambda Y_\lambda(\theta_K, \Phi_K) \right| J'\pi' \right\rangle. \quad (41)$$

Так, плотность основного состояния ядра ^{12}C получается как

$$n_{0+0+}(\mathbf{r}) = \frac{4}{\pi^{3/2}} \Gamma\left(\frac{49}{2}\right) \int_r^\infty \frac{\chi_{0+}^2(\rho) d\rho}{\rho^{47}} \left[\frac{(\rho^2 - r^2)^{22}}{\Gamma(23)} + \frac{4}{3} \frac{r^2 (\rho^2 - r^2)^{21}}{\Gamma(22)} \right], \quad (42)$$

где $\chi_{0+}(\rho)$ — радиальная волновая функция основного состояния ядра ^{12}C , и плотность нормирована следующим образом:

$$4\pi \int n_{0+0+}(r) r^2 dr = A. \quad (43)$$

Среднеквадратичный радиус ядра

$$r_{RMS} = \frac{\int n_{J^\pi J^\pi}(r) r^4 dr}{\int n_{J^\pi J^\pi}(r) r^2 dr}. \quad (44)$$

Плотность возбужденного 2^+ -состояния записывается как

$$\left. \begin{aligned} n_{2+2+}(\mathbf{r}) &= Y_{00}(\theta, \varphi) n_{2+2+}^0(r) + \sum_{\mu} Y_{2\mu}^*(\theta, \varphi) n_{2+2+}^2(r); \\ n_{2+2+}^0(r) &= \frac{8}{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{49}{2}\right)}{\Gamma(23)} \int_r^\infty \frac{(\rho^2 - r^2)^{22}}{\rho^{47}} \chi_2^2(\rho) d\rho + \frac{32}{3\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{49}{2}\right)}{\Gamma(22)} \times \\ &\times \int_r^\infty \frac{r^2 (\rho^2 - r^2)^{21}}{\rho^{47}} \chi_2^2(\rho) d\rho; \\ n_{2+2+}^2(r) &= \frac{32\sqrt{2}}{3\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{49}{2}\right)}{\Gamma(22)} \int_r^\infty \frac{r^2 (\rho^2 - r^2)^{21}}{\rho^{47}} \chi_2^2(\rho) d\rho. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Переходная плотность с возбуждением 2^+ -состояния выражается в виде

$$\left. \begin{aligned} n_{0+2+}(\mathbf{r}) &= \sum_{\mu} Y_{2\mu}^*(\theta, \varphi) n_{0+2+}^2(r); \\ n_{0+2+}^2(r) &= \frac{16\sqrt{7}}{3\sqrt{5}} \frac{\Gamma\left(\frac{49}{2}\right)}{\Gamma(22)} \frac{1}{\pi} \int_r^\infty \frac{r^2 (\rho^2 - r^2)^{21}}{\rho^{47}} \chi_0(\rho) \chi_2(\rho) d\rho. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Приведенная вероятность мультипольного перехода дается выражением

$$B(EL, J^\pi \rightarrow J'^{\pi'}) = \frac{e^2}{2J+1} \left(\int_0^\infty n_{J^\pi J', \pi'}(r) r^{L+2} dr \right)^2 \quad (47)$$

и энергетически взвешенное правило сумм записывается в виде

$$S(EL) = \frac{L(2L+1)^2}{16\pi} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) e^2 A \langle r^{2L-2} \rangle = \Delta EB(EL, 0^+ \rightarrow L^+), \quad (48)$$

где J^π, J'^π — начальное и конечное состояния ядра; L — передаваемый угловой момент.

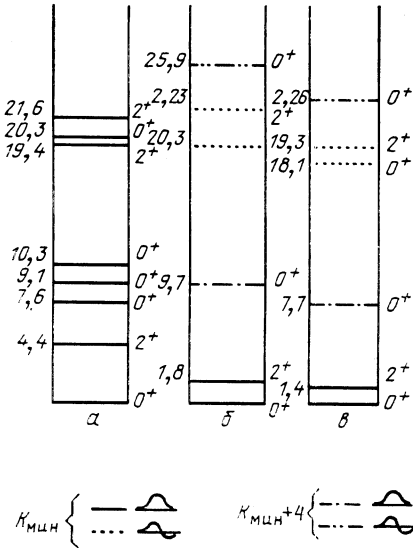


Рис. 9. Спектр возбуждения 0^+ - и 2^+ -состояний ядра ^{12}C в МГФ

На рис. 9 показаны результаты расчета спектра возбуждения 0^+ - и 2^+ -состояний ядра ^{12}C в МГФ с NN -потенциалами [31, 41]. Слева приведены экспериментальные данные. Видно, что низшее возбужденное состояние 2^+ с включением в схему расчета потенциалов [31, 41] находится в области энергий 1,4 — 1,8 МэВ и имеет основной компонентой волновую функцию без узла с $K = K_{\text{мин}}$. Возбужденные уровни 2^+ , расположенные в области энергий 18—22 МэВ, имеют волновую функцию с узлом $K = K_{\text{мин}} + 4$. Возбужденные 0^+ -уровни с энергией возбуждения 7—10 МэВ имеют основной компонентой радиальную волновую функцию без узла с $K = K_{\text{мин}} + 4$. Возбужденные 0^+ -уровни в области энергий ~ 20 МэВ имеют радиальную волновую функцию с узлом с основными компонентами $K = K_{\text{мин}}, K_{\text{мин}} + 4$. Таким образом, в МГФ при расчете основного и низших возбужденных

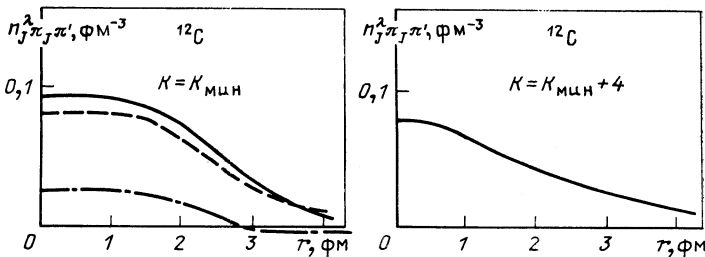


Рис. 10. Плотности основного и возбужденных 0^+ -состояний различной природы ядра ^{12}C

состояний ядер мы получаем в качестве второго решения уравнений (39) резонансы соответствующей мультипольности.

Рис. 11. Плотности возбужденных 0^{+} - и 2^{+} -состояний ядра ^{12}C

На рис. 10 приведены плотности основного и возбужденных 0^{+} -состояний различной природы ядра ^{12}C . На левом рисунке сплошной линией показана плотность основного состояния ядра ^{12}C , пунктирной — плотность монополюсного резонанса, лежащего в области энергий возбуждения порядка 20 МэВ, и штрихпунктирной — переходная плотность с возбуждением монополюсного гигантского резонанса. На правом рисунке приведена плотность «загадочного» 0^{+} -состояния в области энергий 7—10 МэВ.

На рис. 11 показаны три различных распределения плотности ядра ^{12}C : основного состояния [$n_{0^{+}0^{+}}^0(r)$ — сплошная кривая], монополюсного резонанса при энергии 20,3 МэВ [$n_{0^{+}0^{+}}^0(r)$ — пунктирная] и переходной с возбуждением монополюсного резонанса [$n_{0^{+}0^{+}}^0(r)$ — пунктирная с крестом]; здесь же приведены компоненты плотности для низшего 2^{+} -состояния ($n_{2^{+}2^{+}}^0(r)$, $n_{2^{+}2^{+}}^2(r)$ — штрихпунктирная) и переходной плотности с возбуждением низшего 2^{+} -состояния [$n_{0^{+}2^{+}}^2(r)$ — пунктирная с двумя точками].

В табл. 1 даны среднеквадратичные радиусы для возбужденных состояний различной природы ядра ^{12}C , рассчитанные с NV -потен-

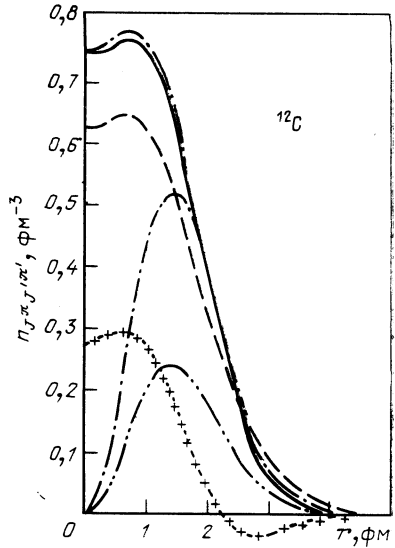


Таблица 1. Энергии возбуждения и среднеквадратичные радиусы для состояний различной природы ядра ^{12}C

E , МэВ	r_{RMS} , фм	$J^{\pi T}$
0	2,63	$0^{+}0$
1,8	2,89	$2^{+}0$
9,7	3,27	$0^{+}0$
20,3	3,05	$0^{+}0$
22,0	2,28	$2^{+}0$
25,9	3,69	$0^{+}0$

циалом [31]. Результаты, приведенные на рис. 10, 11 и в табл. 1, отражают структурные особенности изучаемых состояний. Действи-

тельно, ярко выражен эффект расширения ядра с увеличением энергии возбуждения. С другой стороны, 0^+ -состояние при энергии возбуждения 9,7 МэВ имеет среднеквадратичный радиус больше, чем высоколежащее 0^+ -состояние при энергии 20,3 МэВ. Это объясняется специфической природой функции загадочного низколежащего 0^+ -состояния.

В табл. 2 приведены вероятности $E2$ -переходов с возбуждением 2^+ -состояния, полученные с различными NN -потенциалами [31],

Таблица 2. Вероятности $E2$ -переходов с возбуждением нижнего 2^+ -состояния в ^{12}C

Потенциал	$B(E2)$
$V3$ [31]	71,6
$V7$ [31]	85,9
Модель оболочек [44]	17,5
Эксперимент	42,2

результаты расчета в модели оболочек [44], а также экспериментальные данные. Видно, что значение этих величин сильно зависит от выбора варианта NN -потенциала.

Одним из интересных вопросов исследования структуры ядра ^{12}C является изучение распределения энергетически взвешенной квадрупольной суммы $B(E2)$. Этот вопрос был изучен в [44], где было найдено, что $B(E2) = 1412 e^2 \cdot \text{фм}^4 \cdot \text{МэВ}$ для ядра ^{12}C . При этом низшее 2^+ -состояние вбирает 13 % энергетически взвешенной квадрупольной суммы. В экспериментальных исследованиях было показано, что в ядре ^{12}C в области энергий ниже 30 МэВ наблюдается лишь 20 % энергетически взвешенной квадрупольной суммы. При этом в различных исследованиях положение квадрупольного резонанса на ядре ^{12}C предсказывалось по-разному. В [44] это значение оценивалось в 56 МэВ, а в [48] было найдено значение 28 МэВ. В [45] также была проведена оценка распределения энергетически взвешенной квадрупольной суммы ядра ^{12}C . Расчеты показали, что низший уровень вбирает 8,6 % квадрупольной суммы и приблизительно 8,1 % берет на себя высоколежащий уровень при энергии 21—22 МэВ. Таким образом, в области энергий возбуждения до 30 МэВ исчерпывается 16,7 % энергетически взвешенной квадрупольной суммы. Этот результат находится в хорошем согласии с экспериментом.

Найденные в МГФ плотности основного и возбужденных состояний различной природы использовались в дальнейшем для построения потенциалов двойной свертки [36].

На рис. 12 показан фолдинг-потенциал для системы $^3\text{He} - ^{12}\text{C}$, вычисленный с плотностями, полученными в МГФ [36] с различными NN -потенциалами (рис. 12, а [41], 12, б [31]). Тонкой сплошной ли-

Рис. 12. Фолдинг-потенциалы для системы ${}^3\text{He} - {}^{12}\text{C}$ в основном и монополюбно-возбужденных состояниях различной природы в ядре ${}^{12}\text{C}$

нией показаны результаты расчета, когда оба ядра находятся в основном состоянии, пунктирной — соответствующие результаты, когда ядро ${}^{12}\text{C}$ находится в монополюбном резонансе (20,3 МэВ), и наконец, толстой сплошной линией — фолдинг-потенциал для случая, когда ядро ${}^{12}\text{C}$ находится в загадочном 0^+ -состоянии (при энергии 7—10 МэВ).

Как и следовало ожидать (см. табл. 1), фолдинг-потенциал с возбуждением низшего 0^+ -состояния выше и шире, чем с возбуждением высоковозбужденного 0^+ -состояния. Сравнение результатов расчета, приведенных на рис. 12, а и б демонстрирует зависимость формы фолдинг-потенциала от выбора варианта NN -потенциала при расчете плотности ядер. Для более глубокого варианта NN -потенциала типа Бривка, который дает меньший радиус ядра, фолдинг-потенциал уже и глубже (например, в нуле — на 20 МэВ).

Далее эти фолдинг-потенциалы использованы для расчетов упругих сечений рассеяния. Угловые распределения рассеяния были рассчитаны в методе связанных каналов. При этом предполагалось, что мнимый потенциал должен иметь такую же форму, как и реальный, так что

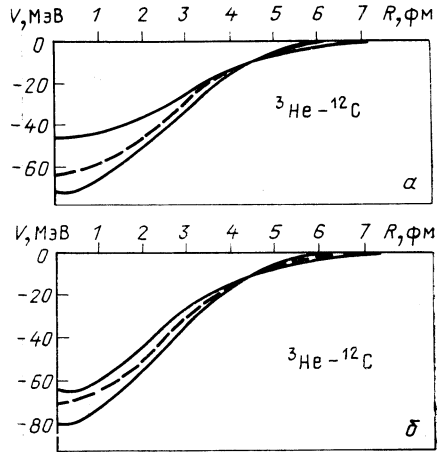
$$U = V_{0,0} (1 + \alpha). \quad (49)$$

Параметр α был найден в упругом канале фитированием теоретического дифференциального сечения по экспериментальным данным. Критерий фитирования обычно следующий: минимизация величины

$$\chi^2 = \sum_i \left[\frac{\sigma_{\text{эксп}}(\theta_i) - \sigma_{\text{теор}}(\theta_i)}{\Delta\sigma_{\text{эксп}}(\theta_i)} \right]^2, \quad (50)$$

где $\sigma_{\text{теор}}(\theta_i)$ — рассчитанные дифференциальные сечения; $\Delta\sigma_{\text{эксп}}(\theta_i)$ — измеренные экспериментальные погрешности.

На рис. 13 показаны угловые распределения сечения упругого рассеяния ${}^6\text{Li} + {}^{12}\text{C}$ при энергиях падающих частиц 30,6; 90; 99; 156 МэВ [49]. Несмотря на простоту потенциала, который здесь был использован только с одним свободным параметром, согласие с экспериментом оказалось хорошим, параметр был найден: 0,7—0,9.



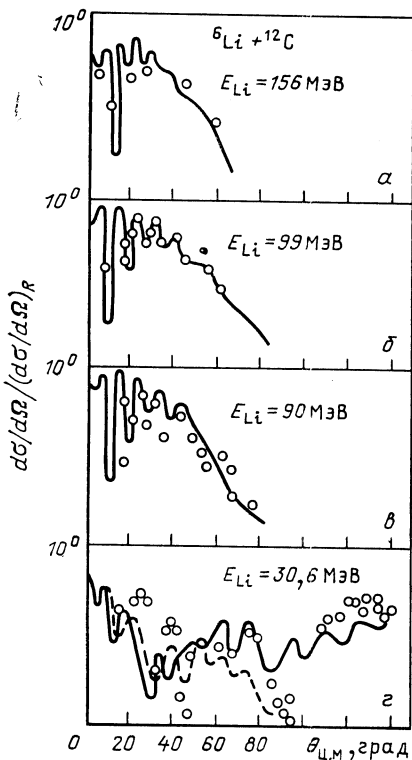


Рис. 13. Угловые распределения сечения упругого рассеяния ${}^6\text{Li} + {}^{12}\text{C}$ при энергиях падающих частиц 30,6; 90; 99 и 156 МэВ

Сравнение с результатами феноменологического описания, в которых используется шесть свободных параметров, иллюстрирует преимущество предложенного микроскопического подхода, имеющего лишь один свободный параметр.

Ядерные потенциалы взаимодействия легких ионов в основном и монополюсно-возбужденных состояниях. В [50] исследовались потенциалы взаимодействия в формализме плотности энергии для ядер ${}^{12}\text{C} - {}^{12}\text{C}$ и ${}^{16}\text{O} - {}^{16}\text{O}$ как в основном, так и в 0^+ -возбужденном состоянии.

В формализме плотности энергии ядерная часть потенциала взаимодействия имеет вид

$$V_N(\mathbf{R}) = \int \{ \epsilon [\rho^A(\mathbf{r} + \mathbf{R}/2) + \rho^B(\mathbf{r} - \mathbf{R}/2)] - \epsilon [\rho^A(\mathbf{r})] - \epsilon [\rho^B(\mathbf{r})] \} dr, \quad (51)$$

где ρ^A и ρ^B — распределение ядерной плотности. Функционал энергии плотности записывается в виде

$$\epsilon(\rho) = \tau_{\text{TF}} + V(\rho, \alpha) + \eta(\Delta\rho)^2, \quad (52)$$

где α — нейтронный избыток; ρ — полная плотность,

$$\alpha = (\rho_n - \rho_p) / (\rho_n + \rho_p).$$

Плотность кинетической энергии определяется в приближении Тома-са — Ферми:

$$\tau_{\text{TF}} = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3}{2} \pi^2 \right)^{2/3} \frac{1}{2} [(1 - \alpha)^{5/3} + (1 + \alpha)^{5/3}] \rho^{5/3}, \quad (53)$$

где m — масса нуклона. Функционал $V(\rho, \alpha)$ есть плотность потенциальной энергии для бесконечной ядерной материи

$$V(\rho, \alpha) = b_1 (1 + a_1 \alpha^2) \rho + b_2 (1 + a_2 \alpha^2) \rho^{4/3} + b_3 (1 + a_3 \alpha^2) \rho^{5/3}. \quad (54)$$

По такой схеме в формализме плотности энергии с использованием плотностей ядер, полученных в МГФ, были рассчитаны ядерные потенциалы для систем $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$ и $^{16}\text{O} - ^{16}\text{O}$, когда одно или оба ядра находятся в 0^+ -возбужденном состоянии.

Результаты для $^{16}\text{O} - ^{16}\text{O}$ показаны на рис. 14 в сравнении с ядерным потенциалом системы в основном состоянии.

В обоих случаях, где встречается 0^+ -возбуждение, глубина потенциала растет, минимум потенциальной ямы слегка сдвигается к меньшим расстояниям и отталкивающий кор исчезает. В поверхностной

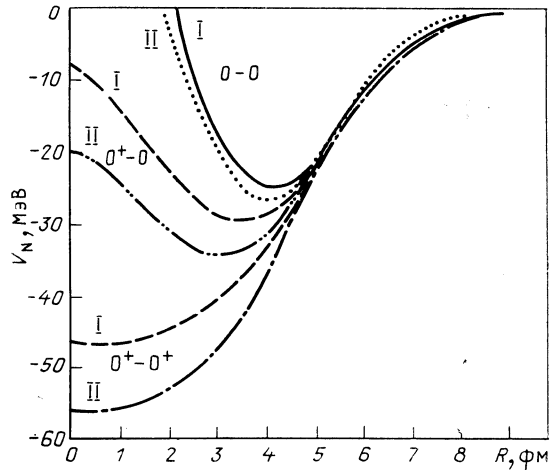


Рис. 14. Ядерные потенциалы для системы $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$, когда оба ядра в основном состоянии (0, 0), одно из ядер в 0^+ -возбужденном состоянии (0^+0), оба ядра в возбужденном состоянии ($0^+ - 0^+$), вычисленные с двумя наборами параметров: I [51] и II [52]

области, где ядерные силы становятся притягивающими, все потенциалы размещаются очень близко. Вычисленные потенциалы (см. рис. 14) отличаются от подобных, построенных в фолдинг-модели. Фолдинг-потенциалы глубже и не имеют отталкивающего кора. Это связано с тем, что принцип Паули не учитывается в фолдинг-процедуре. Использование гиперсферической плотности монополюсно-возбужденных ядер в фолдинг-процедуре приводит к уменьшению глубины потенциала, и потенциал становится шире. Таким образом, в периферической области потенциалы для монополюсно-возбужденных состояний ведут себя одинаковым образом в двух различных методах расчета. Разница проявляется во внутренней области вследствие учета эффекта антисимметризации в формализме плотности энергии.

В последнее время интересные результаты были получены в направлении использования МГФ в кластерной модели легких ядер. В частности, в [53—55] были введены кластерные гипергармоники и исследованы возбуждения монополюсных степеней свободы в ядерных столкновениях. Предложенный подход позволяет произвести такое обобщение алгебраической версии метода резонирующих групп, которое дает возможность учитывать образование компаунд-состоя-

ний в ядерных процессах с участием кластеров. Кроме того, «кластерные» гипергармоники позволяют устанавливать определенную иерархию внутренних функций нуклонных систем.

4. МГФ В КУЛОНОВСКИХ ЗАДАЧАХ НЕСКОЛЬКИХ ТЕЛ

В квантовой механике нескольких тел в последнее время на передний план выдвинулись кулоновские задачи. Много работ посвящено исследованию кулоновских эффектов методом интегральных уравнений Фаддеева, где при наличии принципиальных трудностей были предложены и использованы различные приближенные схемы учета кулоновских сил. Для исследования кулоновского рассеяния в системе трех и более частиц МГФ мало использовался. В работе [56] рассматривались истинно трех- и четырехчастичные кулоновские рассеяния с использованием МГФ.

Истинно трех- и четырехчастичные кулоновские рассеяния. Рассмотрим истинно трехчастичное кулоновское рассеяние частиц с зарядами Z_1e , Z_2e , Z_3e и с массами m_1m , m_2m и m_3m . Соответствующее уравнение Шредингера после исключения движения центра масс принимает вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta_x + \Delta_y) \Psi_{\text{qp}}(x, y) + U_{123}(x, y) \Psi_{\text{qp}}(x, y) = E \Psi_{\text{qp}}(x, y), \quad (55)$$

где

$$\begin{aligned} U_{123}(x, y) &= \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \frac{a_3}{x_3}; \\ a_1 &= \sqrt{\frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}} Z_2 Z_3 e^2, \quad a_2 = \sqrt{\frac{m_1 m_3}{m_1 + m_3}} Z_1 Z_3 e^2; \\ a_3 &= \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} Z_1 Z_2 e^2; \\ x_i &= \sqrt{\frac{m_j m_k}{m_j + m_k}} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k); \end{aligned} \quad (56)$$

i, j, k образуют циклическую перестановку (1, 2, 3); \mathbf{q} и \mathbf{p} — импульсы Якоби, соответствующие координатам Якоби \mathbf{x}_i и \mathbf{y}_i , где

$$\mathbf{y}_i = \sqrt{\frac{m_i (m_j + m_k)}{m_1 + m_2 + m_3}} \left(-\mathbf{r}_i + \frac{m_j \mathbf{r}_j + m_k \mathbf{r}_k}{m_j + m_k} \right).$$

В уравнении (55) перейдем к гиперкоординатам ρ и $\Omega_i \equiv (\alpha_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$ и его решение представим в виде разложения (22). Для кулоновских гиперрадиальных функций окончательно получим систему зацепляю-

щихся одномерных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 \chi_{KL}^{l_1 l_2}(\kappa \rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\chi_{KL}^{l_1 l_2}(\kappa \rho)}{d\rho} + \left[\kappa^2 - \frac{(K+2)^2}{\rho^2} \right] \chi_{KL}^{l_1 l_2}(\kappa \rho) = \sum W_{KK'LL'MM'}^{l_1 l_2 l_1' l_2'}(\rho) \chi_{K'L'}^{l_1' l_2'}(\kappa \rho), \quad (57)$$

где

$$W_{KK'LL'MM'}^{l_1 l_2 l_1' l_2'} = \frac{2m}{\hbar^2} \int \Phi_{KLM}^{*l_1 l_2}(\Omega_1^\rho) \left(\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \frac{a_3}{x_3} \right) \times \Phi_{K'L'M'}^{l_1' l_2'}(\Omega_1^\rho) d\Omega_1^\rho; \quad (58)$$

$$x_1 = \rho \cos \alpha_1; \quad x_2 = \rho \cos \alpha_2; \quad x_3 = \rho \cos \alpha_3;$$

$$\kappa^2 = q_1^2 + p_1^2 = q_2^2 + p_2^2 = q_3^2 + p_3^2 = \frac{2mE}{\hbar^2};$$

$E > 0$ — полная энергия в системе центра масс.

Из трех членов углового интеграла (58) сравнительно легко можно вычислить лишь первый (индексы гиперсферических функций совпадают с индексом оператора). При прямом вычислении остальных двух членов возникают большие трудности. Здесь удобно пользоваться унитарным преобразованием (3), позволяющим найти связь между разными базисными гиперсферическими функциями, определенными на разных наборах координат Якоби x_i и y_i ($i = 1, 2, 3$). С использованием этого преобразования формула (58) принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} W_{KK'LL'MM'}^{l_1 l_2 l_1' l_2'}(\rho) = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{\rho} \left\{ a_1 J_{KK'LL'MM'}^{l_1 l_2 l_1' l_2'} + \right. \\ \left. + a_2 \sum_{\tilde{l}_1 \tilde{l}_2 \tilde{l}_1' \tilde{l}_2'} \langle \tilde{l}_1 \tilde{l}_2 | l_1 l_2 \rangle_{KL} \langle \tilde{l}_1' \tilde{l}_2' | l_1' l_2' \rangle_{K'L'} J_{KK'LL'MM'}^{\tilde{l}_1 \tilde{l}_2 \tilde{l}_1' \tilde{l}_2'} + \right. \\ \left. + a_3 \sum_{\tilde{l}_1 \tilde{l}_2 \tilde{l}_1' \tilde{l}_2'} \langle \tilde{l}_1 \tilde{l}_2 | l_1 l_2 \rangle_{KL} \langle \tilde{l}_1' \tilde{l}_2' | l_1' l_2' \rangle_{K'L'} J_{KK'LL'MM'}^{\tilde{l}_1 \tilde{l}_2 \tilde{l}_1' \tilde{l}_2'} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

где

$$J_{KK'LL'MM'}^{l_1 l_2 l_1' l_2'} = \int \Phi_{KLM}^{*l_1 l_2}(\Omega^\rho) \Phi_{K'LM}^{l_1' l_2'}(\Omega^\rho) \frac{d\Omega^\rho}{\cos \alpha}. \quad (60)$$

Интеграл (60) решается аналитически. Далее в системе уравнений (57) перейдем к новым искомым функциям и к новой переменной согласно формулам

$$\chi_{KL}^{l_1 l_2}(\kappa \rho) = \frac{\Phi_{KL}^{l_1 l_2}(\kappa \rho)}{\sqrt{\rho}}; \quad (61a)$$

$$Z = -2i\kappa\rho. \quad (61b)$$

Окончательно система (57) принимает вид:

$$\frac{d^2\varphi_{KL}^{l_1 l_2}(Z)}{dZ^2} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{4} - (K+2)^2}{Z^2} \right] \varphi_{KL}^{l_1 l_2}(Z) - \frac{i}{Z} \sum_{k' l_1' l_2'} A_{KK'L}^{l_1 l_2 l_1' l_2'}(\kappa) \varphi_{K'L}^{l_1' l_2'}(Z) = 0, \tag{62}$$

где

$$A_{KK'L}^{l_1 l_2 l_1' l_2'}(\kappa) = \frac{m}{\hbar^2 \kappa^2} \left[a_1 F(n, n'; l_1, l_2) N_K^{l_1 l_2} N_{K'}^{l_1' l_2'} \delta_{l_1 l_1'} \delta_{l_2 l_2'} + a_2 \sum_{\tilde{l}_1 \tilde{l}_2}^1 \langle \tilde{l}_1 \tilde{l}_2 | l_1 l_2 \rangle_{KL}^2 \langle \tilde{l}_1 \tilde{l}_2 | l_1' l_2' \rangle_{K'L}^2 F(\tilde{n}, \tilde{n}'; \tilde{l}_1, \tilde{l}_2) N_K^{\tilde{l}_1 \tilde{l}_2} \times \right. \\ \left. \times N_{K'}^{\tilde{l}_1 \tilde{l}_2} + a_3 \sum_{\tilde{l}_1 \tilde{l}_2}^1 \langle \tilde{l}_1 \tilde{l}_2 | l_1 l_2 \rangle_{KL}^3 \langle \tilde{l}_1 \tilde{l}_2 | l_1' l_2' \rangle_{K'L}^3 F(\tilde{n}, \tilde{n}'; \tilde{l}_1, \tilde{l}_2) N_K^{\tilde{l}_1 \tilde{l}_2} N_{K'}^{\tilde{l}_1 \tilde{l}_2} \right]; \tag{63}$$

$$F(n, n'; l_1, l_2) = \frac{1}{2} \Gamma\left(n + l_2 + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(n + l_1 + \frac{3}{2}\right) \times \\ \times \Gamma\left(n' + l_2 + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(n' + l_1 + \frac{3}{2}\right) \times \\ \times \sum_{v=0}^n \frac{(-)^{n-v}}{\Gamma(v+1) \Gamma(n+l_2-v+3/2) \Gamma(n-v+1) \Gamma\left(l_1+v+\frac{3}{2}\right)} \times \\ \times \sum_{v'=0}^{n'} \frac{(-)^{n'-v'}}{\Gamma(v'+1) \Gamma(n'+l_2-v'+3/2) \Gamma(n'-v'+1) \Gamma\left(l_1+v'+3/2\right)} \times \\ \times B[l_1 + (v+v') + 1, l_2 + (n+n') - (v+v') + 3/2]; \tag{64}$$

Γ — гамма-функция, а B — бэта-функция Эйлера; $n = \frac{1}{2} (K - l_1 - l_2)$, $n' = \frac{1}{2} (K' - l_1 - l_2)$.

В приближении минимальной гармоники при фиксированных значениях орбитальных квантовых чисел l_1, l_2 и L из системы (62) останется одно уравнение (диагональное приближение):

$$\frac{d^2\varphi_{KL}^{l_1 l_2}(Z)}{dZ^2} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{4} - (K+2)^2}{Z^2} + \frac{-i A_{KKL}^{l_1 l_2}(\kappa)}{Z} \right] \varphi_{KL}^{l_1 l_2}(Z) = 0, \tag{65}$$

которое решается аналитически. Решениями (нерегулярными) являются функции Уиттекера:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{KL}^{l_1 l_2 (1)}(Z) &= W_{-iA_{KKL, K+2}^{l_1 l_2}}(-2i\kappa\rho); \\ \Phi_{KL}^{l_1 l_2 (2)}(-Z) &= W_{iA_{KKL, K+2}^{l_1 l_2}}(2i\kappa\rho). \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Пользуясь асимптотическими выражениями этих функций, легко можно найти асимптотический вид кулоновских функций, описывающих истинно трехчастичное кулоновское рассеяние в приближении минимальной гармоник при фиксированных значениях l_1, l_2, L :

$$F_{KL}^{l_1 l_2}(\kappa\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\kappa\rho}} \cos \left[\kappa\rho - A_{KKL}^{l_1 l_2 L}(\kappa) l_n \cdot 2\kappa\rho - \frac{1}{2}(K+2)\pi - \frac{\pi}{4} + \eta_{KL}^{l_1 l_2} \right]; \quad (67)$$

$$G_{KL}^{l_1 l_2}(\kappa\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\kappa\rho}} \sin \left[\kappa\rho - A_{KKL}^{l_1 l_2 L}(\kappa) l_n \cdot 2\kappa\rho - \frac{1}{2}(K+2)\pi - \frac{\pi}{4} + \eta_{KL}^{l_1 l_2} \right], \quad (68)$$

где $\eta_{KL}^{l_1 l_2}$ — фаза кулоновского трехчастичного рассеяния.

Как видно из формул (67) и (68), величина $A_{KKL}^{l_1 l_2 L}(\kappa)$ играет роль параметра кулоновского рассеяния. Если рассмотреть S -рассеяние ($l_1 = l_2 = l'_1 = l'_2 = L = 0$), то, пользуясь формулой (63), для этого параметра получаем:

$$A_{KK}(\kappa) = \frac{m}{\hbar^2 \kappa} [a_1 + |{}^1\langle 00|00\rangle_{K0}^2| a_2 + |{}^1\langle 00|00\rangle_{K0}^3| a_3] J_{KK}, \quad (69)$$

где

$$\begin{aligned} J_{KK} &= \left(\frac{K}{2}\right)! (K+2) \left(\frac{K}{2}+1\right)! \Gamma^2\left(\frac{K}{2}+\frac{3}{2}\right) \times \\ &\times \sum_{v=0}^{K/2} \frac{(-)^{\frac{K}{2}-v}}{\Gamma(v+1) \Gamma(K/2-v+3/2) \Gamma(K/2-v+1) \Gamma\left(v+\frac{3}{2}\right)} \times \\ &\times \sum_{v'=0}^{K/2} \frac{(-)^{\frac{K}{2}-v'}}{\Gamma(v'+1) \Gamma(K/2-v'+3/2) \Gamma(K/2-v'+1) \Gamma(v'+3/2)} \times \\ &\times B[v+v'+1, K-(v+v')+3/2]. \end{aligned} \quad (70)$$

В частном случае при $K = 0$ из (70) получим

$$A_{00}(\kappa) = \frac{16}{3\pi} \frac{m}{\hbar^2 \kappa} (a_1 + a_2 + a_3). \quad (71)$$

Легко можно найти также формулу для определения фазы $\eta_{KL}^{l_1 l_2}$. С этой целью будем исходить из уравнения (65) и перейдем к новой функции согласно формуле

$$\varphi_{KL}^{l_1 l_2}(Z) = Z^{\frac{2K+5}{2}} l^{-Z/2} \Phi_{KL}^{l_1 l_2}(Z). \quad (72)$$

Для функции $\Phi_{KL}^{l_1 l_2}(Z)$ получим уравнение:

$$Z \frac{d^2 \Phi_{KL}^{l_1 l_2}(Z)}{dZ^2} + (2K+5-Z) \frac{d\Phi_{KL}^{l_1 l_2}(Z)}{dZ} - \\ - \left[K + \frac{5}{2} + iA_{KKL}^{l_1 l_2}(\kappa) \right] \Phi_{KL}^{l_1 l_2}(Z) = 0. \quad (73)$$

Решением этого уравнения является вырожденная гипергеометрическая функция:

$$\Phi_{KL}^{l_1 l_2}(Z) = F \left(K + \frac{5}{2} + iA_{KKL}^{l_1 l_2}(\kappa), 2K+5, Z \right). \quad (74)$$

Далее, пользуясь известным представлением гипергеометрической функции

$$F(a, c; Z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-Z)^{-a} G(a, a-c+1; -Z) + \\ + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} l^Z Z^{a-c} G(c-a, 1-a; Z), \quad (75)$$

где

$$G(a, b; z) = 1 + \frac{ab}{1!z} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!z^2} + \dots, \quad (76)$$

для определения фазы истинно трехчастичного кулоновского рассеяния окончательно получаем:

$$e^{2i\eta_{KL}^{l_1 l_2}} = \frac{\Gamma \left(K + \frac{5}{2} + iA_{KKL}^{l_1 l_2}(\kappa) \right)}{\Gamma \left(K + \frac{5}{2} - iA_{KKL}^{l_1 l_2}(\kappa) \right)}. \quad (77)$$

Имея в виду (77), легко можно найти следующие представления регулярных и нерегулярных кулоновских функций истинно трехчастичного кулоновского рассеяния в приближении минимальной гармонике при фиксированных значениях l_1, l_2, L :

$$F_{KL}^{l_1 l_2}(\kappa\rho) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi\kappa\rho}} e^{A_{KKL}^{l_1 l_2}(\kappa) \frac{\pi}{2}} \left\{ \left[\frac{\Gamma \left(K + \frac{5}{2} + iA_{KKL}^{l_1 l_2}(\kappa) \right)}{\Gamma \left(K + \frac{5}{2} - iA_{KKL}^{l_1 l_2}(\kappa) \right)} \right]^{1/2} \times \right. \\ \left. \times e^{i \left[-(K+2) \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right]} W_{-iA_{KKL}^{l_1 l_2}(\kappa), K+2}(-2i\kappa\rho) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[\frac{\Gamma \left(K + \frac{5}{2} - iA_{KKL}^{l_1 l_2}(\kappa) \right)}{\Gamma \left(K + \frac{5}{2} + iA_{KKL}^{l_1 l_2}(\kappa) \right)} \right]^{1/2} e^{-i \left[-(K+2) \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right]} \times \\
 & \times W_{iA_{KKL}^{l_1 l_2}(\kappa), K+2} (2i\kappa\rho) \left. \right\}; \tag{78}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{KL}^{l_1 l_2}(\kappa\rho) &= \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{2}{\pi\kappa\rho}} e^{A_{KK}^{l_1 l_2}(\kappa) \frac{\pi}{2}} \times \\
 & \times \left\{ \left[\frac{\Gamma \left(K + \frac{5}{2} + iA_{KKL}^{l_1 l_2}(\kappa) \right)}{\Gamma \left(K + \frac{5}{2} - iA_{KKL}^{l_1 l_2}(\kappa) \right)} \right]^{1/2} e^{i \left[-(K+2) \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right]} \times \right. \\
 & \times W_{iA_{KKL}^{l_1 l_2}(\kappa), K+2} (-2i\kappa\rho) - \\
 & - \left[\frac{\Gamma \left(K + \frac{5}{2} - iA_{KKL}^{l_1 l_2}(\kappa) \right)}{\Gamma \left(K + \frac{5}{2} + iA_{KKL}^{l_1 l_2}(\kappa) \right)} \right]^{1/2} e^{-i \left[-\frac{\pi}{2}(K+2) - \frac{\pi}{4} \right]} \times \\
 & \left. \times W_{iA_{KKL}^{l_1 l_2}(\kappa), K+2} (2i\kappa\rho) \right\}. \tag{79}
 \end{aligned}$$

Изложенный подход нетрудно обобщить на случай истинно четырехчастичного кулоновского рассеяния. В частности, вместо формулы (77) для определения четырехчастичной фазы получаем

$$e^{2i\delta_{\mu KL}^{l_1 l_2 l_1 l_2 l_3}} = \frac{\Gamma(\mu + 4 + i\gamma_{\mu KL}^{l_1 l_2 l_1 l_2 l_3}(\kappa))}{\Gamma(\mu + 4 - i\gamma_{\mu KL}^{l_1 l_2 l_1 l_2 l_3}(\kappa))}, \tag{80}$$

где $\gamma_{\mu KL}^{l_1 l_2 l_1 l_2 l_3}(\kappa)$ задается в аналитической форме и играет роль параметра четырехчастичного кулоновского рассеяния.

В частности, для случая s-рассеяния для этого параметра получаем:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{\mu K}(\kappa) &= \frac{m}{\hbar^2 \kappa} [a_1 + |{}^1\langle 00000 | 00000 \rangle_{\mu 0}^2| a_2 + |{}^1\langle 00000 | 00000 \rangle_{\mu 0}^3| a_3 + \\
 & + |{}^1\langle 00000 | 00000 \rangle_{\mu 0}^4| a_4 + |{}^1\langle 00000 | 00000 \rangle_{\mu 0}^5| a_5 + \\
 & + |{}^1\langle 00000 | 00000 \rangle_{\mu 0}^6| a_6] J_{\mu K}, \tag{81} \\
 J_{\mu K} &= \int \Phi_{\mu K}^{*00000}(\omega) \Phi_{\mu K}^{00000}(\omega) \frac{d\omega}{\cos \beta},
 \end{aligned}$$

где $\langle | \rangle_{\mu 0}^h$ — четырехчастичные коэффициенты Рейнала — Реваи [см. формулу (7)],

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \sqrt{\frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}} Z_2 Z_3 e^2; & a_2 &= \sqrt{\frac{m_1 m_3}{m_1 + m_3}} Z_1 Z_3 e^2; \\ a_3 &= \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} Z_1 Z_2 e^2; & a_4 &= \sqrt{\frac{m_1 m_4}{m_1 + m_4}} Z_1 Z_4 e^2; \\ a_5 &= \sqrt{\frac{m_2 m_4}{m_2 + m_4}} Z_2 Z_4 e^2; & a_6 &= \sqrt{\frac{m_3 m_4}{m_3 + m_4}} Z_3 Z_4 e^2. \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

Результаты, полученные в настоящем разделе, могут быть использованы при развитии метода одновременного учета кулоновского и ядерного взаимодействий между частицами при микроскопическом описании трех- и четырехчастичных систем.

Метод одновременного учета кулоновского и ядерного взаимодействий при исследовании систем из трех- и четырех тел. Исследование систем из нескольких частиц, потенциал взаимодействия между которыми наряду с короткодействующей частью содержит в себе дальнедействующий кулоновский потенциал, представляет собой весьма сложную, но вместе с тем очень важную задачу как с фундаментальной, так и с практической точки зрения. В последнее время такие задачи выдвигаются на передний план в теории систем из нескольких частиц. В [57] показано, что использование гиперсферического базиса позволяет обобщить метод фазовых функций на случай трех и четырех тел, когда наряду с ядерным взаимодействием присутствует и кулоновское взаимодействие. Найлены уравнения для соответствующих фазовых и амплитудных функций. Определены парциальные амплитуды истинно трех- и четырехчастичных рассеяний и найдена их связь с соответствующими фазами кулоновского и ядерного рассеяний. Найлены также уравнения, позволяющие найти энергии связи связанных состояний трех и четырех тел с учетом ядерного и кулоновского взаимодействий. В частности, трехчастичная фазовая функция $\delta_{KL}^{l_1 l_2}(\rho)$ и амплитудная функция $A_{KL}^{l_1 l_2}(\rho)$ в приближении минимальной гармоники с фиксированными значениями орбитальных моментов удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{d\delta_{KL}^{l_1 l_2}(\rho)}{d\rho} = -\frac{\pi}{2} N_{KLM}^{l_1 l_2}(\rho) \rho \times \\ \times [\cos \delta_{KL}^{l_1 l_2}(\rho) F_{KL}^{l_1 l_2}(\chi\rho) - \sin \delta_{KL}^{l_1 l_2}(\rho) G_{KL}^{l_1 l_2}(\chi\rho)]; \quad (83)$$

$$\frac{dA_{KL}^{l_1 l_2}(\rho)}{d\rho} = -\frac{\pi}{2} N_{KLM}^{l_1 l_2}(\rho) \rho [\sin \delta_{KL}^{l_1 l_2}(\rho) F_{KL}^{l_1 l_2}(\chi\rho) + \cos \delta_{KL}^{l_1 l_2}(\rho) G_{KL}^{l_1 l_2}(\chi\rho)] \times \\ \times [\cos \delta_{KL}^{l_1 l_2}(\rho) F_{KL}^{l_1 l_2}(\chi\rho) - \sin \delta_{KL}^{l_1 l_2}(\rho) G_{KL}^{l_1 l_2}(\chi\rho)] A_{KL}^{l_1 l_2}(\rho), \quad (84)$$

где

$$N_{KLM}^{l_1 l_2}(\rho) = \frac{2m}{\hbar^2} \int \Phi_{KLM}^{*l_1 l_2}(\Omega_1^0) \times \\ \times [V_{23}(\mathbf{x}_1) + V_{13}(\mathbf{x}_2) + V_{12}(\mathbf{x}_3)] \Phi_{KLM}^{l_1 l_2}(\Omega_1^0) d\Omega_1^0; \quad (85)$$

$V_{ij}(\mathbf{x})$ — потенциал ядерного взаимодействия; $F_{KL}^{l_1 l_2}(\kappa\rho)$ и $G_{KL}^{l_1 l_2}(\kappa\rho)$ — регулярные и нерегулярные кулоновские функции истинно трехчастичного рассеяния, которые задаются в аналитическом виде формулами (78) и (79).

Четырехчастичные уравнения, аналогичные уравнениям (83) и (84), имеют вид:

$$\frac{d\delta_{\mu KL}^{l_1 l_2 l_1 l_2 l_3}(\rho)}{d\rho} = -\frac{1}{\kappa} N_{\mu KL}^{l_1 l_2 l_1 l_2 l_3}(\rho) \times \\ \times [\cos_{\mu KL}^{l_1 l_2 l_1 l_2 l_3}(\rho) F_{\mu KL}^{l_1 l_2 l_1 l_2 l_3}(\kappa\rho) - \sin \delta_{\mu KL}^{l_1 l_2 l_1 l_2 l_3}(\rho) G_{\mu KL}^{l_1 l_2 l_1 l_2 l_3}(\kappa\rho)]^2; \quad (86)$$

$$\frac{dA_{\mu KL}^{l_1 l_2 l_1 l_2 l_3}(\rho)}{d\rho} = -\frac{1}{\kappa} N_{\mu KL}^{l_1 l_2 l_1 l_2 l_3}(\rho) \times \\ \times [\sin_{\mu KL}^{l_1 l_2 l_1 l_2 l_3}(\rho) F_{\mu KL}^{l_1 l_2 l_1 l_2 l_3}(\kappa\rho) + \cos \delta_{\mu KL}^{l_1 l_2 l_1 l_2 l_3}(\rho) G_{\mu KL}^{l_1 l_2 l_1 l_2 l_3}(\kappa\rho)] \times \\ \times [\cos \delta_{\mu KL}^{l_1 l_2 l_1 l_2 l_3}(\rho) F_{\mu KL}^{l_1 l_2 l_1 l_2 l_3}(\kappa\rho) - \sin \delta_{\mu KL}^{l_1 l_2 l_1 l_2 l_3}(\rho) G_{\mu KL}^{l_1 l_2 l_1 l_2 l_3}(\kappa\rho)] \times \\ \times A_{\mu KL}^{l_1 l_2 l_1 l_2 l_3}(\rho); \quad (87)$$

$$N_{\mu KL}^{l_1 l_2 l_1 l_2 l_3}(\rho) = \frac{2m}{\hbar^2} \int \Phi_{\mu KLM}^{*l_1 l_2 l_1 l_2 l_3}(\omega_1^0) \times \\ \times [V_{23}(\xi_1) + V_{34}(\xi_2) + V_{14}(\xi_3) + V_{12}(\xi_4) + V_{13}(\xi_5) + V_{24}(\xi_6)] \times \\ \times \Phi_{\mu KLM}^{l_1 l_2 l_1 l_2 l_3}(\omega_1^0) d\omega_1^0, \quad (88)$$

$F_{\mu KL}^{l_1 l_2 l_1 l_2 l_3}(\kappa\rho)$ и $G_{\mu KL}^{l_1 l_2 l_1 l_2 l_3}(\kappa\rho)$ — регулярные и нерегулярные кулоновские функции истинно четырехчастичного рассеяния, которые тоже задаются в аналитической форме [56].

Из результатов предыдущих разделов видно, что МГФ в кулоновской задаче нескольких тел обладает весьма важным преимуществом перед другими методами рассмотрения таких задач. При использовании МГФ большую часть выкладок можно провести аналитически. Аналитические выражения получаются для основных характеристик в определенном приближении. Эти выражения можно использовать при более точном решении задачи. Подтверждением такого заключения являются результаты следующего раздела.

Приближенное аналитическое решение проблемы связанного состояния трех тел в атомной физике. В [58] изложена одна из возможностей развития безмодельного подхода к исследованию проблемы трех тел в атомной физике, в первом приближении которого получаются аналитические выражения не только для волновых функций, но и для энергетических спектров атомов.

Если волновую функцию связанного состояния трех заряженных частиц представить в виде разложения по гиперсферическим функциям:

$$\Psi(x_i, y_i) = \sum_{K l_1 l_2} \frac{\Phi_{KL}^{l_1 l_2}(\rho)}{\rho^{5/2}} \Phi_{KLM}^{l_1 l_2}(\Omega_i), \quad (89)$$

то для гиперрадиальных функций $\Phi_{KL}^{l_1 l_2}(\rho)$ получается система зацепляющихся дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Phi_{KL}^{l_1 l_2}(\rho)}{d\rho^2} - \left[\kappa_0^2 + \frac{(K+2)^2 - \frac{1}{4}}{\rho^2} \right] \Phi_{KL}^{l_1 l_2}(\rho) = \\ = \frac{2}{\rho} \sum_{K' l_1' l_2'} I(K, K'; l_1, l_2; l_1' l_2') \Phi_{K'L}^{l_1' l_2'}(\rho), \end{aligned} \quad (90)$$

где $I(K, K'; l_1 l_2; l_1', l_2')$ — аналитическая функция аргументов:

$$I(K, K'; l_1, l_2; l_1', l_2') = \frac{\hbar^2 \kappa^2}{m} A_{KK' l_1 l_2 l_1' l_2'}^{l_1 l_2 l_1' l_2'}(\kappa); \quad (91)$$

$A_{KK' l_1 l_2 l_1' l_2'}^{l_1 l_2 l_1' l_2'}(\kappa)$ задается формулой (63).

Рассмотрим проблему атома гелия и гелийподобных ионов. В системе (90) все орбитальные моменты приравняем нулю и оставим первое уравнение с фиксированным K :

$$\frac{d^2 \varphi_K}{d\rho^2} - \left[\kappa_0^2 + \frac{(K+2)^2 - \frac{1}{4}}{\rho^2} \right] \varphi_K(\rho) = \frac{2}{\rho} I(K) \varphi_K(\rho). \quad (92)$$

Учитывая асимптотический вид решения этого уравнения, общее решение будем искать в виде:

$$\varphi_K(\rho) = C_K \rho^{K + \frac{5}{2}} \exp(-\kappa_0 \rho) U_K(\rho). \quad (93)$$

Подставив (93) в (92), для $U_K(\rho)$ получим уравнение:

$$\begin{aligned} r U_K''(r) + [2(K + 5/2) - r] U_K'(r) - \\ - \left[(K + 5/2) + \frac{1}{\kappa_0} I(K) \right] U_K(r) = 0, \end{aligned} \quad (94)$$

где $r = 2\kappa_0 \rho$. Решением этого уравнения является вырожденная гипергеометрическая функция следующего вида:

$$U_K(r) = F \left[K + \frac{5}{2} + \frac{1}{\kappa_0} I(K), 2 \left(K + \frac{5}{2} \right), r \right]. \quad (95)$$

Теперь, пользуясь стандартным методом, будем исходить из связанности системы трех частиц и на функцию (95) наложим условие, чтобы она превратилась в полином. Получим условие квантования для энергии:

$$K + \frac{5}{2} + (I(K)/\kappa_0) = -N, \quad (96)$$

где $N = 0, 1, 2 \dots$

Из (96) для энергетического спектра атома гелия и гелийподобных ионов получаем:

$$E_J = - | J (K) |^2 / 2J (K)^2, \quad (97)$$

где $J(K) = N + K + 5/2$.

С учетом (89), (93), (95), пользуясь связью вырожденной гипергеометрической функции с обобщенными полиномами Лагерра, получаем следующее общее аналитическое выражение для волновых функций атома гелия и гелийподобных ионов:

$$\Psi(x, y) = (2\kappa_0^J)^3 \left[\frac{(J-K-5/2)!}{2K+5} \right]^{1/2} \frac{1}{[(J+K+3/2)!]^{3/2}} \times \\ \times \rho^K \exp(-\kappa_0^J \rho) L_{J+K+3/2}^{2K+4} (2\kappa_0^J \rho) \Phi_{K00}^{00}(\Omega). \quad (98)$$

Теперь перейдем к рассмотрению конкретных атомов.

Для n -гелия имеем полностью симметричное состояние и, следовательно, гипермомент $K = 0$. Из (98) для волновой функции n -гелия получаем

$$\Psi_n^J(x, y) = (2\kappa_n^J)^3 \frac{[(J+5/2)!]^{1/2}}{V^5 [(J+3/2)!]^{3/2}} \times \\ \times \exp(-\kappa_n^J \rho) L_{J+3/2}^4 (2\kappa_n^J \rho) \Phi_{000}^{00}(\Omega), \quad (99)$$

где $(\kappa_n^J)^2 = -2mE_n^J$; E_n^J — энергия атома, соответствующая уровню с квантовым числом J . Энергетический спектр n -гелия определяется формулой

$$E_n^J = -(|I(0)|^2 / 2J^2), \quad (100)$$

где $J = 5/2, 7/2, 9/2 \dots$

Для основного состояния $J = 5/2$ и из формул (63), (91) и (100) получаем $E_n^{5/2} = -68,1$ эВ, что составляет около 86 % экспериментального значения этой величины. Волновые функции возбужденных состояний n -гелия получаются из (99) при $J = 7/2, 9/2 \dots$ Конечно, все они ортогональны друг к другу и к функции основного состояния. Далее из формулы (100) для первого возбужденного состояния n -гелия получаем значение $E_n^{7/2} = -34,7$ эВ, что составляет около 60 % экспериментального значения. С ростом энергии возбуждения вклад первого уравнения в энергию атома уменьшается, что указывает на то, что в этих пространственных конфигурациях n -гелия электронные состояния становятся настолько неэквивалентными, что ограничение одним уравнением из системы (90) уже является грубым приближением и требуется учитывать больше членов в разложении (89), чем в случае основного состояния. Такой результат вполне соответствует действительной картине в n -гелии. Вышеуказанные возбуждения являются одночастичными, в них участвует лишь один электрон, тогда как другой электрон совместно с ядром атома составляет водородоподобный остов.

В случае 0-гелия два электрона в атоме находятся в антисимметричном пространственном состоянии, так как их спины параллельны. Следовательно, гипермомент $K = 0$ запрещен для такого состояния и основной вклад должен внести гипермомент $K = 2$. Из (98) для волновой функции 0-гелия получаем:

$$\Psi_0^J(x, y) = \frac{8}{3} (\kappa_0^J)^3 \frac{[(J-9/2)!]^{1/2}}{[(J-7/2)!]^{3/2}} \times \\ \times \rho^2 \exp(-\kappa_0^J \rho) L_{J+7/2}^8(2\kappa_0^J \rho) \Phi_{200}^{00}(\Omega), \quad (101)$$

а энергетический спектр 0-гелия определяется формулой

$$E_0^J = -(|I(2)|^2/2J^2), \quad (102)$$

где $J = 9/2, 11/2, 13/2 \dots$. Для основного состояния ($J = 9/2$) из формулы (102) получаем $-48,7$ эВ, что составляет около 86 % экспериментального значения.

Интересно отметить, что в изложенной схеме отсутствует связь между основными состояниями пара- и ортогелия, что выражается тем фактом, что функция $I(K, K')$ тождественно обращается в нуль при $K = 0$ и $K' = 2$. Это естественным образом приводит к объяснению существования двух видов гелия в природе. Последний факт, как известно, связан с симметрией волновой функции, которая в этой схеме существенно отлична при $K = 0$ и $K' = 2$.

Энергетический спектр уровней гелийподобных ионов с двумя электронами H^- , Li^+ , Be^{++} также состоит из двух систем уровней, в одну из которых входят синглетные уровни (параионы), а в другую — триплетные уровни (ортоионы). Поэтому состояние пара- и ортоионов можно описывать соответственно функциями (99) и (101), а энергетический спектр вычислять по формулам (100) и (102) с той лишь разницей, что в указанные формулы войдут соответствующие ионам H^- , Li^+ , Be^{++} величины κ и $I(K)$. Легко можно убедиться, что полученные результаты и здесь передают качественную картину.

Адиабатическое приближение в МГФ. В последнее время в МГФ часто применяют адиабатическое приближение типа Борна — Оппенгеймера, которое для задачи гелия впервые было применено в [59]. Позднее такое приближение было применено и для других атомных систем, в частности для H^- [60], для (pe^-e^+) [61], для $(e^+e^-e^-)$ [62]. В этом же приближении в [63, 64] была исследована роль корреляций в расчете автоионизационных состояний атома гелия. Оригинальный вариант адиабатического приближения был предложен в [65]. В этом приближении вместо разложения по гиперсферическим функциям (89) применяется разложение трехнуклонной волновой функции по полному набору ортогональных базисных функций $B_\lambda(\rho, \Omega)$, являющихся решениями уравнения

$$\left\{ - \left[L^2(\Omega) - \frac{(D-1)(D-3)}{4} \right] \rho^{-2} + V(\rho, \Omega) \right\} B_\lambda(\rho, \Omega) = \omega_\lambda(\rho) B_\lambda(\rho, \Omega), \quad (103)$$

где $L(\Omega)$ — оператор полного орбитального момента в пространстве с размерностью D (для трех тел $D = 6$).

Уравнение (103) отличается от исходного трехчастичного уравнения Шредингера в гиперсферических координатах тем, что в нем отсутствует операторный член $d^2/d\rho^2$ и собственное значение $K^2 = 2mE/\hbar^2$ заменено функцией $\omega_\lambda(\rho)$, зависящей от ρ как от параметра. Функцию $B_\lambda(\rho, \Omega)$ разложим по трехчастичным гиперсферическим функциям

$$B_\lambda(\rho, \Omega) = \sum_{K^l x^l y} \chi_{KL, \lambda}^{l x^l y}(\rho) \Phi_{KLM}^{l x^l y}(\Omega). \tag{104}$$

Воспользуемся ортонормированностью базисных функций B_λ и $\Phi_{KLM}^{l x^l y}$ на гиперсфере и из формулы (104) для функции $\chi_{KL, \lambda}^{l x^l y}(\rho)$ получим условие ортонормированности

$$\sum_{K^l x^l y} \chi_{KL, \lambda}^{l x^l y} \chi_{KL, \lambda'}^{l x^l y} = \delta_{\lambda\lambda'}.$$

Подставим (104) в уравнение (103), полученное выражение умножим на $\Phi_{KLM}^{l x^l y}$ и проинтегрируем на гиперсфере единичного радиуса. В результате имеем матричное уравнение

$$\sum_{K^l x^l y} \left[\frac{L_K(L_K+1)}{\rho^2} \delta_{KK'} \delta_{l_x l'_x} \delta_{l_y l'_y} + \langle K l_x l_y | V | K' l'_x l'_y \rangle \right] \times \chi_{KL, \lambda}^{l x^l y}(\rho) = \omega_\lambda(\rho) \chi_{KL, \lambda}^{l x^l y}(\rho), \tag{105}$$

где собственные значения $\omega_\lambda(\rho)$ и собственные векторы $\chi_{KL, \lambda}^{l x^l y}(\rho)$ являются параметрическими функциями переменной ρ .

Решения системы (105) функции $\chi_{KL, \lambda}^{l x^l y}(\rho)$ с помощью формулы (103) позволяют получить новые базисные функции $B_\lambda(\rho, \Omega)$. Разлагая трехчастичную волновую функцию по новым функциям

$$\Psi(\bar{x}, \bar{y}) = \rho^{-5/2} \sum_{\lambda} \zeta_\lambda(\rho) B_\lambda(\rho, \Omega) \tag{106}$$

и вводя это разложение в исходное трехчастичное уравнение Шредингера для гиперрадиальных функций $\zeta_\lambda(\rho)$, получаем систему зацепляющихся уравнений. В несвязанном адиабатическом приближении [65] в разложении (106) ограничиваются одним членом. В этом приближении пренебрегается изменением новых базисных функций $B_\lambda(\rho, \Omega)$ в зависимости от ρ , что равносильно разделению сложного движения в системе трех тел на гиперорбитальное и гиперрадиальное движение. В [65] на примерах нескольких потенциалов с отталкиванием на малых расстояниях продемонстрирована довольно высокая точность такого приближения.

В [63, 64] при исследовании роли корреляций в автоионизационных состояниях атома гелия была использована адиабатическая процедура из [59], где исходным является уравнение типа уравне-

ний (103), однако нахождение волновой функции сводится к решению системы уравнений

$$\left[\left(\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} U_\mu(\rho) + 2E \right) \delta_{\mu\nu} + \left(\Phi_\mu, \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial \rho} \right) \frac{d}{d\rho} + \left(\Phi_\mu, \frac{\partial^2 \Phi_\nu}{\partial \rho^2} \right) \right] F_\nu(\rho) = 0. \quad (107)$$

Каналовые функции Φ_ν являются собственными функциями оператора $\lambda^2 - \rho V(\omega)$, отвечающими собственным значениям $U_\mu(\rho)$, параметрически зависящим от ρ . При нахождении собственных функций сводят задачу Штурма — Лиувилля к решению системы однородных алгебраических уравнений. Для этого используют собственные функции оператора полного орбитального момента $\hat{\lambda}^2$, которые выражаются через полиномы Якоби и биполярные гармоники. Степень учета радиальных корреляций зависит от старшей степени полиномов Якоби, включенных в полный набор.

При нахождении потенциалов $U_\mu(R)$ использована процедура экстраполяции по размерности подпространства с $l_1 = l_2 = 0$, на котором диагонализуется оператор $\hat{\lambda}^2 - \rho V(\omega)$. Расчеты показывают, что значения потенциалов $U_\mu(\rho)$, полученных при увеличении размерности подпространства, стремятся к своим асимптотическим значениям, однако не достигают их. Зная потенциалы при нескольких значениях размерностей подпространства, можно экстраполировать их значения на бесконечную размерность по формуле Паде

$$U_i(\rho) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_i^{(n)}(\rho) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_i(\rho) + n^2 b_i(\rho)}{1 + n^2 c_i(\rho)}, \quad (108)$$

где a_i , b_i и c_i — параметры, подлежащие определению.

Найденные значения экстраполированных потенциалов имеют хорошую асимптотику. Полученные значения энергий в адиабатическом приближении приведены в табл. 3. Там же приведены резуль-

Таблица 3. Энергии автоионизационного состояния 1S -атома гелия, сходящиеся к порогу $n=2$ и $n=3$ иона гелия (He^+), эВ

Состояние	Метод ГСК			Метод наложения конфигураций [67]	Эксперимент [68]
	[63, 64]	[59]	[66]		
$2s^2$	58,34	57,99	56,91	57,91	57,82
$2s3s$	62,93	63,10	62,64	63,00	62,94
$2s4s$	64,17	64,25	64,21	64,20	64,18
$2s5s$	64,68	64,71	64,70	—	64,67
$2s6s$	64,93	—	64,94	—	—
$3s^2$	69,71	—	—	69,78	—
$3s4s$	71,39	—	—	71,39	—
$3s5s$	72,06	—	—	—	—
$3s6s$	72,38	—	—	—	—

таты, полученные другими авторами [59, 65, 67], и имеющиеся экспериментальные данные [68]. Как видно из таблицы, значения энергии, полученные в [63, 64] (кроме $2s^2$ и $3s^2$), находятся в наилучшем согласии с экспериментом. Этот результат показывает, что для неэквивалентных электронов важную роль играют радиальные корреляции, которые в определенной степени учтены в указанных работах. Что касается $2s^2$ - и $3s^2$ -состояний, то для них, по-видимому, важное значение имеют угловые корреляции, которые в этих работах не учитывались.

Проблема сходимости в МГФ для кулоновских задач. Система гиперрадиальных уравнений МГФ (57) является бесконечной, и поэтому возникает проблема сходимости по числу учитываемых уравнений. В обзоре [69], посвященном рассмотрению МГФ в микроскопической теории связанных состояний и рассеяния многочастичных систем, обсуждается эта проблема для ядерных систем. Проблема сходимости в МГФ для кулоновских задач обсуждалась во многих работах [70—74]. Когда число необходимых уравнений растет, естественно, растут и трудности численного решения такой системы зацепляющихся уравнений. Для упрощения задачи часто применяется вариационный подход к решению гиперрадиальных уравнений. При реализации этого подхода используется так называемый «физический» базис гиперсферических функций, построенный Эфросом [75]. Для решения системы гиперрадиальных уравнений применяют метод разложения по некоторому полному на интервале $[0, \infty]$ гиперрадиальному базису $\{R_n(\rho)\}$:

$$\chi_{KL}^{lxly}(\rho) = \sum_n C_{nKL}^{lxly} R_n(\rho), \quad (109)$$

где $R_n(\rho)$ — гиперрадиальные специальные функции, удовлетворяющие условию ортогональности.

С помощью разложения (109) задача о связанном состоянии системы трех тел сводится к задаче нахождения собственных значений и собственных векторов симметричной матрицы. Размерность этой матрицы зависит от выбранной формы базисных гиперрадиальных функций $R_n(\rho)$. В [76, 77] впервые были предложены искусственно подобранные базисные гиперрадиальные функции, свободный параметр которых подбирался из условия достижения наилучшей сходимости разложения. Этот параметр, а также вид базисных функций не зависят не от орбитальных моментов (l_x, l_y, L) и не от гипермомента (K). Для кулоновской задачи трех тел такой базис применялся в [73]. В [72] был предложен гиперрадиальный базис другого вида, где уже присутствует зависимость от гипермомента, однако и в этом базисе производится подбор свободного параметра $\hbar\omega$. Конечно, от выбора оптимального гиперрадиального базиса во многом зависят успехи МГФ. В кулоновской задаче трех тел наиболее точные значения для энергии получаются применением вариационных методов. В частности, если воспользоваться разложением по экспоненциаль-

ным волновым функциям, зависящим от межчастичных расстояний, то, учитывая большое количество членов, можно обеспечить рекордную точность с точки зрения атомной спектроскопии [78]. Для задачи двухэлектронного атома такая волновая функция, строго говоря, возникает лишь в приближении пренебрежения отталкивательным взаимодействием между электронами. С другой стороны, неоднократно было подчеркнута [79], что учет взаимодействия между электронами должен существенно изменить аналитический вид волновых функций трехчастичных атомов. Это обстоятельство усиливает интерес к приближенным аналитическим решениям исходных трехчастичных уравнений [58].

В [74] развит метод решения системы одномерных связанных дифференциальных уравнений с использованием степенных рядов. Изучена возможность применения этого метода в теории нескольких тел на основе гиперсферического базиса. Рассматривались атом гелия, основное состояние позитронного иона и отрицательного водорода. Степенные ряды аргумента и его логарифма были использованы при решении связанных радиальных уравнений МГФ еще раньше в [81]. В [74] показано, что применение степенного разложения в кулоновской задаче трех тел обеспечивает сходимость по числу учитываемых гармоник для волновой функции $1/K_m^2$, а для энергии $1/K_m^4$.

МГФ в молекулярной физике и химии. В этом разделе до сих пор рассматривались вопросы атомной физики, при решении которых с успехом можно применить МГФ. С не меньшим успехом применяют этот метод в молекулярной физике и особенно в химии. Сравнительно подробную библиографию можно найти в [82, 83]. С применением МГФ рассматривалась трехатомная молекула с использованием парных потенциалов типа Ван-дер-Ваальса [84]. С использованием этих же потенциалов рассматривались молекулярные рассеяния [85]. Двойные возбужденные состояния молекулярного типа с использованием гиперсферических координат исследовались в [86].

5. ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ МНОГОКВАРКОВЫХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МГФ

В этом разделе будут изложены основные результаты, полученные при использовании метода гиперсферических функций для исследования структуры многокварковых систем.

Структура многокварковых систем. В последнее время в нерелятивистской модели кварковых систем интенсивно применяется МГФ. На основе этого метода выполнены многочисленные расчеты по исследованию структуры как тяжелых барионов, так и других мультикварковых систем с использованием разных потенциалов межкваркового взаимодействия. МГФ в физике тяжелых барионов впервые был применен в [87], где рассматривалась кварковая система CCC и исследовались низколежащие радиальные возбуждения этой системы со спином и четностью $3/2^+$. Барионы из кварков с одинаковыми

массами с использованием МГФ исследовались и в [88]. В [89, 90] этим же методом изучались барионы из кварков с различными массами. В последнее время часто применяется корнельский потенциал [91], с использованием которого кварковые системы в рамках МГФ наиболее интенсивно исследовались в работах группы Бадаля [92, 93]. Тот же метод в квазиклассическом приближении был использован в [94] для вычисления спектров некоторых $6q$ -, $9q$ - и $12q$ -систем. Логаритмический потенциал кварк-кваркового взаимодействия в МГФ был использован в [95]. Ранее в [105] МГФ был применен для изучения свойств тяжелых барионов.

В [96] метод МГФ был применен к решению задачи для системы трех кварков. Получены аналитические выражения для эффективного потенциала. Показана неаддитивность вклада спин-спинового взаимодействия, что приводит к изменению ширины кора и глубины ямы для эффективного потенциала. Вторым решением задачи на собственные значения в трехкварковой системе найдены состояния, отвечающие дыхательной моде возбуждения. Изучался спектр $3q$ -системы, среднеквадратичный радиус и формфактор упругого eN -рассеяния. Остановимся на результатах этой работы более подробно.

В нерелятивистской потенциальной модели [97—106] гамильтониан системы кварков $H = T + V$ (где $T = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + \sum_i m_i$) с выделенным центром масс записывается следующим образом:

$$T = \frac{1}{2M} \mathbf{P}^2 + \frac{1}{2M} \sum_{i < j} \left(\frac{\mathbf{p}_i^2}{m_i} - \frac{\mathbf{p}_j^2}{m_j} \right) m_i m_j + Mc^2, \quad (110)$$

где $\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i$; $M = \sum_i m_i$. Потенциальная энергия системы $V = \sum_{i < j} \lambda_{ij}$, $\lambda_{ij} V(r_{ij})$ состоит из центрального члена $V_c(r) = Br^2 + C$, определяющего конфайнмент, и спин-спинового члена $V_s = \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j \delta(r)$ или $V_b = \boldsymbol{\sigma}_i \boldsymbol{\sigma}_j e^{-r^2/\Lambda^2}$, определяющего разность $N - \Delta$ -масс. В [91—99] в результате изучения свойств трех- и шестикварковых систем в рамках нерелятивистской модели с функциями гармонического осциллятора было предложено несколько вариантов кварк-кварковых потенциалов:

$$V_{ij} = (\lambda_i \lambda_j) [f(r_{ij}) + (\boldsymbol{\sigma}_i \boldsymbol{\sigma}_j) g(r_{ij})]; \quad (111)$$

$$f(r) = Ae^{-r^2/\alpha^2} + Br^2 + c + K\delta(r), \quad (112)$$

где

$$g(r) = \frac{2}{3} K\delta(r) \text{ или } g(r) = \frac{2}{3} Ke^{-r^2/\Lambda^2};$$

$$f(r) = -ar^2 + \frac{\alpha_s \hbar c}{4r}, \quad g(r) = -\frac{\pi \alpha_s \hbar^3}{6m^2 c} \delta(r);$$

$$V_{ij} = (\lambda_i \lambda_j) \left[-ar_{ij} + \frac{\alpha_s}{4r_{ij}} - \frac{\pi \alpha_s}{4m_q^2} \left(1 + \frac{2}{3} \boldsymbol{\sigma}_i \boldsymbol{\sigma}_j \right) \delta(r_{ij}) \right]. \quad (113)$$

Эта модель успешно развивалась и позволила получить ряд ценных сведений, как о массах, так и о распадных свойствах легких барионных систем. Однако использование базисных функций гармонического осциллятора приводит к тому, что для описания масс n -кварковой системы и воспроизведения ее размеров используются разные значения радиуса осциллятора b_0 ($b_0 = 0,4$ и $b_0 = 0,8$ соответственно). Параметры же используемого кварк-кваркового потенциала очень чувствительны к величине b_0 . Проиллюстрируем этот факт на примере параметра K , определяющего разность $N - \Delta$ -масс:

$$V_b(r) = \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j K \left(1 + \frac{2}{3} \sigma_i \sigma_j \right) \delta(r_{ij}). \quad (114)$$

Разность масс $\Delta M = M_\Delta - M_N = 293$ МэВ определяется как

$$\langle \Psi_\Delta | V_b(r) | \Psi_\Delta \rangle - \langle \Psi_N | V_b(r) | \Psi_N \rangle = \Delta M. \quad (115)$$

Для трехкварковой системы соответствующие волновые функции имеют следующую симметрию:

$$\Psi_\Delta : [1^3]_c [3]_L \{ [3]_T \times [3]_S \}_{[3]_{TS}};$$

$$\Psi_N : [1^3]_c [3]_L \{ [21]_T \times [21]_S \}_{[3]_{TS}}.$$

где для спиновых функций χ_i имеем

$$[3]_S = \left\{ \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} \right)^1 \frac{1}{2} \right\}_{\frac{3}{2}} = \chi_1;$$

$$[21]_S = \begin{cases} \left[\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \right] = \left\{ \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} \right)^1 \frac{1}{2} \right\}_{\frac{1}{2}} = \chi_1; \\ \left[\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \right] = \left\{ \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} \right)^0 \frac{1}{2} \right\}_{\frac{1}{2}} = \chi_0; \end{cases}$$

тогда для Δ -частицы спин-изоспиновая часть волновой функции имеет вид $[3]_{TS} = \tau_1 \chi_1$, соответственно для N -частицы $[3]_{TS} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times (\tau_1 \chi_1 + \tau_0 \chi_0)$. Среднее значение по функциям χ_1 и χ_0 от $\sigma_1 \sigma_2$ для $S = 1$ $\langle \chi_1 | \sigma_1 \sigma_2 | \chi_1 \rangle = 1$, для $S = 0$ $\langle \chi_0 | \sigma_1 \sigma_2 | \chi_0 \rangle = -3$. Далее можно найти матричные элементы от спин-спинового взаимодействия для N - и Δ -частиц:

$$\left. \begin{aligned} & \langle \Psi_N | \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j \sigma_i \sigma_j \delta(r_{ij}) | \Psi_N \rangle = \\ & = 3 \left(-\frac{2}{3} \right) \frac{1}{2} \langle \tau_1 \chi_1 + \tau_0 \chi_0 | \sigma_1 \sigma_2 | \tau_1 \chi_1 + \tau_0 \chi_0 \rangle \langle 0s | \delta(\mathbf{r}) | 0s \rangle = 2\bar{V}; \\ & \langle \Psi_\Delta | \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j \sigma_i \sigma_j \delta(r_{ij}) | \Psi_\Delta \rangle = -2\bar{V}, \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

где

$$\bar{V} = \langle 0s | \delta(\mathbf{r}) | 0s \rangle = \frac{1}{(2\pi b^2)^{3/2}} \int e^{-\frac{r^2}{2b^2}} \delta(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \frac{1}{(2\pi b^2)^{3/2}}. \quad (117)$$

Найдем теперь спин-спиновый матричный элемент для N - и Δ -частиц

$$\begin{aligned} \langle \Psi_N | V_b | \Psi_N \rangle &= K \left(-2 + \frac{2}{3} 2 \right) \bar{V} \quad \text{и} \quad \langle \Psi_\Delta | V_b | \Psi_\Delta \rangle = \\ &= K \left(-2 + \frac{2}{3} (-2) \right) \bar{V} \end{aligned} \quad (118)$$

и разность масс

$$\Delta M = \langle \Psi_\Delta | V_b | \Psi_\Delta \rangle - \langle \Psi_N | V_b | \Psi_N \rangle = -\frac{8}{3} K \frac{1}{(2\pi)^{3/2} b^3}. \quad (119)$$

Тогда константа K определяется следующим образом:

$$K = -\frac{3}{8} (2\pi)^{3/2} b^3 \Delta M. \quad (120)$$

В случае, когда, например, $b_N = b_\Delta = b_0 = 0,8$ фм $K = -886$ МэВ \times фм³.

Можно определить параметры осциллятора для волновых функций N - и Δ -систем из анализа результатов расчета в методе гиперсферических функций. В этом случае $b_N = 0,39$ фм и $b_\Delta = 0,42$ фм, что приводит к значению $K = (2\pi)^{3/2} \Delta M / \left(\frac{1}{b_N^3} - \frac{5}{b_\Delta^3} \right) = -173$ МэВ \cdot фм³.

Таким образом, оценки показывают, что параметр K сильно изменяется при учете коллективных эффектов в модели трехкварковой системы. Следует отметить, что в [104], в которых исследовалась структура барионов на основе уравнений Фаддеева, показана необходимость учета этих эффектов. В [96] предлагается метод, позволяющий уточнить параметры кварк-кварковых потенциалов в релятивистской кварковой модели. В этом случае используется метод гиперсферических функций, в котором вместо свободного параметра — радиуса осциллятора имеют коллективную переменную ρ , так что в результате получают самонастраивающуюся кварковую систему, в которой параметры qq -взаимодействия определяют размеры системы. В рассматриваемом подходе изучаются единым образом спектр $3q$ -системы, размеры и формфактор упругого рассеяния. Остановимся несколько подробнее на методе расчетов.

В МГФ волновая функция n -кварковой системы представляется в виде разложения по K -гармоническим полиномам:

$$\Psi(1, 2, \dots, n) = \rho^{-\frac{1}{2}(3n-4)} \sum_{K\gamma} \chi_{K\gamma}(\rho) |nK\gamma\rangle, \quad (121)$$

где $\gamma = [f] \varepsilon_c LST$; $\int \chi_{K\gamma}^2(\rho) d\rho = 1$. Гамильтониан имеет вид

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\rho^{3n-4}} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^{3n-4} \frac{d}{d\rho} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\rho^2} \Delta_\theta + V(\rho), \quad (122)$$

и система уравнений для нахождения собственных функций $\chi(\rho)$ и собственных значений E записывается следующим образом:

$$\left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{L(L+1)}{\rho^2} - \frac{2m}{\hbar^2} (E + W_{K\gamma}^{K\gamma}(\rho)) \right\} \chi_{K\gamma}(\rho) = \\ = \frac{2m}{\hbar^2} \sum_{K'\gamma' \neq K\gamma} W_{K\gamma}^{K'\gamma'}(\rho) \chi_{K'\gamma'}(\rho), \quad (123)$$

где $L = K + (3A - 6)/2$, а $W_{K\gamma}^{K\gamma}(\rho)$ — эффективный потенциал. Вычисления значительно упрощаются, если использовать двухчастичные генеалогические коэффициенты, с помощью которых можно провести интегрирование по координатам $(n - 2)$ -частиц. В этом случае эффективный потенциал $W(\rho)$ приобретает следующий вид:

$$W_{K\gamma}^{K\gamma}(\rho) = \langle nK [f] \varepsilon_c LST | \hat{V} | nK [f] \varepsilon_c LST \rangle = \\ = \frac{n(n-1)}{2} \sum_{K_2[f_2] \varepsilon_{c_2} L_2 S_2 T_2 L_0 S_0 T_0 \varepsilon_0 \Lambda L' K'} \langle nK [f] \varepsilon_c LST | n-2 | K_2 [f_2] \varepsilon_{c_2} L_2 S_2 T_2, \Lambda (L'' K''); L_0 S_0 T_0 \varepsilon_{0c} \rangle^2 \langle \varepsilon_{0c} S_0 T_0 | W_{\lambda\sigma\tau} | \varepsilon_{0c} S_0 T_0 \rangle R_{K', L_0}^{K, K}(\rho), \quad (124)$$

где $R_{K', L_0}^{K, K}(\rho)$ — орбитальная часть, а $\langle \varepsilon_{0c} S_0 T_0 | W_{\lambda\sigma\tau} | \varepsilon_{0c} S_0 T_0 \rangle$ — цвет-спин-изоспиновая часть матричных элементов двухчастичного кварк-кваркового взаимодействия. Далее получают аналитические выражения для эффективного потенциала в МГФ для трехкварковой системы с $L = 0$ (три частицы в s -состоянии), имеющей симметрию: $\{3\}_L, \{3\}_{ST}, \{1\}_C^3$. При этом для N -изобары $ST = 1/2, 1/2$ и для Δ -изобары $ST = 3/2, 3/2$.

Согласно формуле (124) эффективный потенциал для этого случая приобретает вид

$$W(\rho) = \frac{8}{\pi} \int_0^1 V(\rho \sqrt{2Z}) \sqrt{Z(1-Z)} dZ. \quad (125)$$

Проводя простое интегрирование по Z для кварк-кварковых потенциалов (111), (113), получают выражения, приведенные ниже:

$V(r)$	$-ar$	$-a'r^2$	b/r	$\kappa\delta(r)$	$V_1 e^{-r^2/\alpha^2}$
$W(\rho)$	$-0,96 a\rho$	$-a'\rho^2$	$1, 2 b/\rho$	$\frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{\kappa}{\rho^3}$	$\frac{2V_1\alpha^2}{\rho^2} I_1(\rho^2/\alpha^2)$

где $I_1(\rho^2/\alpha^2)$ — модифицированная функция Бесселя.

Важная особенность δ -образного спин-спинового взаимодействия заключается в том, что его вклад в эффективный потенциал действует во всей области коллективной переменной ρ .

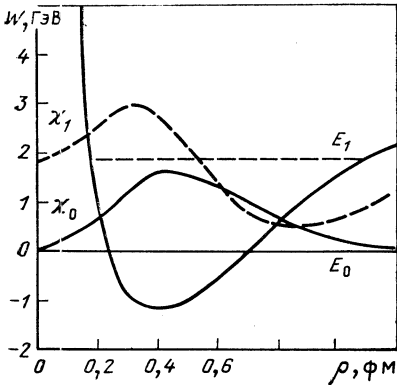


Рис. 15. Эффективный потенциал $W(r)$, первые два решения в нем E_0 и E_1 и соответствующие волновые функции $\chi_0(r)$, $\chi_1(r)$ для трехкварковой системы без учета спин-спинового расщепления ($K = 0$)

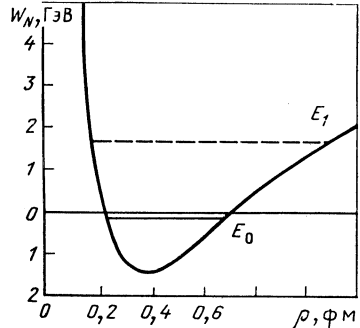


Рис. 16. Эффективный потенциал и первые два решения в нем для нуклона с учетом спин-спинового взаимодействия в δ -образной форме

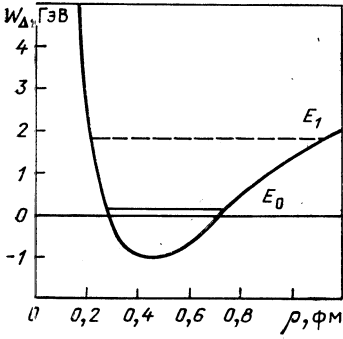


Рис. 17. Эффективный потенциал и первые два решения в нем для Δ -изобары с учетом спин-спинового взаимодействия в δ -образной форме

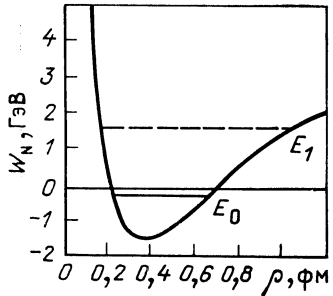


Рис. 18. Эффективный потенциал и первые два решения в нем для нуклона с учетом гауссовского спин-спинового взаимодействия

В [96] были проведены расчеты эффективного потенциала, собственных значений, собственных функций, плотностей, среднеквадратичных радиусов и формфактора упругого eN -рассеяния для исследуемой трехкварковой системы. Результаты расчетов показаны в табл. 4, 5 и на рис. 15–22.

В расчетах МГФ перенормировали константу C потенциала Харвея [97] (первая строка табл. 4) так, чтобы воспроизвести массу нуклона, а параметр K этого кварк-кваркового потенциала изменялся так, чтобы описать разность масс ($M_\Delta - M_N = 293$ МэВ). На рис. 15 показаны эффективный потенциал, первые два решения в нем и соот-

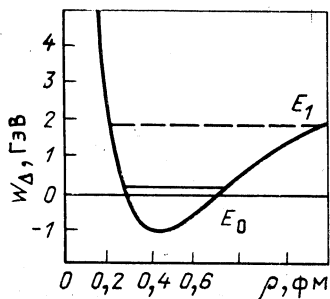


Рис. 19. Эффективный потенциал и первые два решения в нем для Δ -изобары с учетом гауссовского спин-спинового взаимодействия

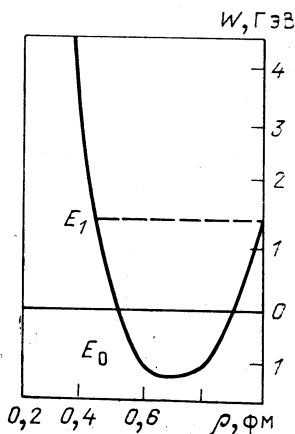


Рис. 20. Эффективный потенциал и первые два решения в нем для шестикварковой системы

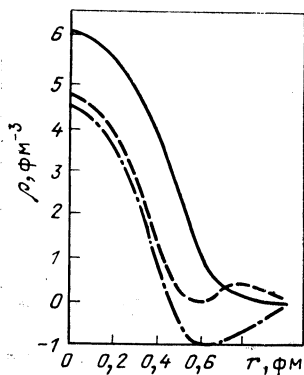


Рис. 21. Плотности распределения для нуклона в основном состоянии (сплошная линия), монополюсно-возбужденном состоянии (пунктирная) и переходная плотность (штрихпунктирная)

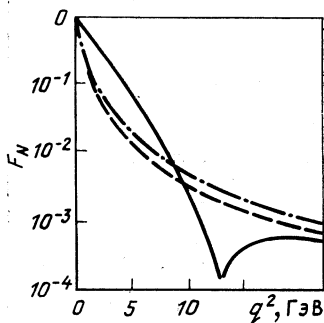


Рис. 22. Формфактор упругого рассеяния нуклона: сплошная (пунктирная линия) — нерелятивистский расчет; штрихпунктирная — дипольный формфактор

ветствующие волновые функции для трехкварковой системы без учета спин-спинового расщепления ($K = 0$) (см. также табл. 4, 5).

Видно, что расчет в методе гиперсферических функций приводит к существенному увеличению константы C . При этом в трехкварковой системе появляется коллективный монополюсный уровень с энергией $\sim 1,8$ ГэВ. На рис. 16 и 17 и в табл. 4, 5 показаны результаты расчеты для N и Δ -частиц с включением δ -образного спин-спинового взаимо-

Таблица 4. Параметры кварк-кваркового потенциала в методе гиперсферических функций

$b = \alpha$, фм	A , МэВ	B , МэВ·фм ⁻²	C , МэВ	K , МэВ·фм ³	Λ , фм	Модель
0,8	3810,0	-12,5	-479,8	-911,0	0	Харвей
0,8	3810,0	-12,5	-1715	0	0	Рис. 15
0,8	3810,0	-12,5	-1614	-61	0	Рис. 16
0,8	3810,0	-12,5	-1614	-61	0	Рис. 17
0,8	3810,0	-12,5	-1618	-73	0,2	Рис. 18
0,8	3810,0	-12,5	-1618	-73	0,2	Рис. 19

Таблица 5. Результаты расчета массы и среднеквадратичных радиусов для трехкварковой системы

M_N , МэВ	M_Δ , МэВ	E_0 , МэВ	E_1 , МэВ	r_0 , фм	r_1 , фм	Модель
1086	1086	0	1858	0,39	0,60	Рис. 15
940,5	—	-145,5	1681	0,39	0,60	Рис. 16
—	1232	146,0	1889	0,42	0,64	Рис. 17
938,4	—	-147,6	1673	0,39	0,60	Рис. 18
—	1228,3	142,3	1869	0,42	0,63	Рис. 19

действия. В отличие от результатов расчета с функциями гармонического осциллятора, где спин-спиновое взаимодействие входит аддитивно, в методе гиперсферических функций при включении спин-спинового взаимодействия меняется ширина кора и глубина ямы (ширина кора меньше, глубина эффективного потенциала больше для нуклона). Вследствие этого энергия монополюсно-возбужденного состояния для N -частицы меньше ($\sim 1,7$ ГэВ), чем для Δ (1,9 ГэВ), и радиус для N ($r_N = 0,39$ фм) меньше, чем для Δ ($r_\Delta = 0,42$ фм). Помимо того, расчеты показывают, что сильно меняются (примерно в 1,6 раза) размеры системы в возбужденном состоянии $r_N^* = 0,6$ фм и $r_\Delta^* = 0,64$ фм для N и Δ -частиц соответственно. Проведены расчеты для трехкварковой системы с учетом гауссовского спин-спинового взаимодействия ($\Lambda = 0,2$ фм) (рис. 18, 19). Это приводит к незначительной перенормировке константы C и к увеличению в 1,2 раза параметра K (а именно $K = -0,61$ МэВ·фм³ для $\Lambda = 0$ и $K = -73$ МэВ·фм³ для $\Lambda = 0,2$ фм). Таким образом, при решении трехкварковой задачи в МГФ проявляются следующие эффекты:

1. Перенормировка параметров C и K по сравнению с теми, которые были предложены в модели гармонического осциллятора.

2. Неаддитивность вклада спин-спинового взаимодействия, что приводит к изменению ширины и глубины ямы для эффективного потенциала.

3. Вторым решением задачи на собственные значения в трехкварковой системе были найдены состояния, отвечающие дыхательной моде возбуждения.

Изучение $6q$ -системы в минимальном приближении МГФ. В [111] были проведены расчеты свойств $6q$ -системы в минимальном приближении метода гиперсферических функций. Использовались кварк-кварковые потенциалы из [96] с учетом спин-спинового взаимодействия в гауссовой форме. Изучались единым образом масса и размеры $6q$ -системы, а также свойства высоковозбужденных монополярных состояний. В минимальном приближении МГФ волновая функция шестикварковой системы имеет следующие характеристики:

$$|s^6 [6]_L [2^3]_C [33]_{ST} L = 0 \ S = 1 \ T = 0\rangle. \quad (126)$$

Используя двухчастичные генеалогические коэффициенты, можно выразить матричный элемент эффективного потенциала через двухчастичные матричные элементы кварк-кваркового взаимодействия в виде

$$\begin{aligned} W(\rho) = \langle s^6 [6]_L [2^3]_C [33]_{ST} LST = 010 | \hat{V}_{q\bar{q}} | s^6 [6]_L [2^3]_C [33]_{ST} LST = \\ = 010 \rangle = -\frac{19}{6} W_{L_0=0}^{S_0=1}(\rho) - \frac{5}{6} W_{L_0=0}^{S_0=0}(\rho), \end{aligned} \quad (127)$$

где $W_{L_0}^{S_0}(\rho)$ — определяется по формуле (125).

На рис. 20 показан эффективный потенциал и первые два решения в нем для исследуемой шестикварковой системы.

Для того чтобы воспроизвести массу шестикварковой системы, в [111] перенормировали константу C ($C = -1618$ МэВ для трехкварковой системы и $C = -1994$ МэВ для шестикварковой системы). Здесь также как и для трехкварковой системы появляется монополярно-возбужденное состояние при энергии возбуждения 1,43 ГэВ. В расчете проявляется эффект расширения системы с увеличением энергии возбуждения. Так, среднеквадратичный радиус для основного состояния $r_{NR} = 0,38$ фм и среднеквадратичный радиус для монополярно-возбужденного состояния $r_{NR}^* = 0,52$ фм.

Упругое N-рассеяние в трехкварковой системе. С помощью радиальных функций $\chi_i(\rho)$ можно найти плотности основного и возбужденных состояний в трехкварковой системе:

$$n_{ij}(r) = N \int_r^\infty \frac{(\rho^2 - r^2)^{\frac{3n-8}{2}}}{\rho^{3n-5}} \chi_i(\rho) \chi_j(\rho) d\rho \quad (128)$$

и среднеквадратичный радиус

$$r_{NR} = \frac{\int n_{ii}(r) r^4 dr}{\int n_{ii}(r) r^2 dr}, \quad (129)$$

где $n_{ii}(r)$ — плотность — нормирована следующим образом:

$$4\pi \int n_{ii}(r) r^2 dr = n. \quad (130)$$

На рис. 21 приведены результаты расчета плотностей нуклона в основном и монополюсно-возбужденном состояниях, а также переходная плотность. Расчет проведен с использованием волновых функций для системы, показанной на рис. 18 с параметрами кварк-кварковой потенциала из табл. 4. Далее, используя эти плотности, были проведены нерелятивистские расчеты формфактора упругого eN -рассеяния в трехкварковой системе:

$$F_{NR}(q^2) = \frac{1}{n} \int n_{ii}(r) e^{iqr} dr. \quad (131)$$

На рис. 22 показан нерелятивистский формфактор (q^2) (сплошная линия). Видно, что удовлетворительное согласие с феноменологическим дипольным формфактором

$$F_{\Delta}(q^2) = (1 + q^2/0,71)^{-2} \quad (132)$$

наблюдается только при $q^2 \ll M_N^2$. Для того чтобы описать формфактор упругого рассеяния нуклона при переданных импульсах $q^2 \gtrsim M_N^2$, необходимо учесть релятивистские эффекты [106, 107].

С этой целью был использован метод релятивизации формфакторов, предложенным в работах [106, 107], в которых по существу учтен эффект лоренцевого преобразования продольных расстояний при переходе от системы Брейта к лабораторной. Тогда релятивистский формфактор можно достаточно просто определить через нерелятивистский:

$$F_R(q^2) = \frac{1}{(1 + q^2/4M_A^2)^{n-1}} F_{NR}\left(\frac{q^2}{1 + q^2/4M_A^2}\right), \quad (133)$$

где n — число кварков в системе; M_A — эффективный параметр преобразования, для которого в [106—108] предложено следующее соотношение:

$$M_A^2 = \sum_i (m_i^{3\Phi}) = nm_q^2. \quad (134)$$

Здесь m_q — масса кварка, которая в расчетах выбиралась в виде: $m_q = 1,086/3 = 0,362$ ГэВ, откуда следует, что $M_A^2 = 0,393$ ГэВ². Отметим, что релятивистский формфактор при $q^2 \gg M_A^2$ удовлетворяет правилам кваркового счета [109]:

$$F_R(q^2 \rightarrow \infty) \sim \left(\frac{4M_A^2}{q^2}\right)^{n-1} F_{RF}(4M_A). \quad (135)$$

Важным моментом в расчетах является тот факт, что учет релятивистских эффектов приводит к увеличению среднеквадратичного ра-

диуса n -кварковой системы:

$$r_R = r_{NR} + \frac{3(n-1)}{2M_A^2}. \quad (136)$$

Из рис. 22 видно, что включение эффекта релятивизации приводит к хорошему согласию с дипольным формфактором.

Весьма существенным здесь является то, что для описания eN -рассеяния во всей области измеренных переданных импульсов $q^2 < < 24 \text{ ГэВ}^2$ требуется информация о нерелятивистском формфакторе в области небольших $q^2 < 1,6 \text{ ГэВ}^2$, т. е. вклад так называемой высокоимпульсной компоненты в нерелятивистскую волновую функцию пренебрежимо мал.

Как уже отмечалось выше, релятивизация приводит к увеличению размеров исследуемой системы. Так, для нуклона $r_R = 0,66 \text{ фм}$, что согласуется с экспериментальным радиусом нуклона $r_{\text{эксп}} = 0,78 \text{ фм}$.

Эффект релятивизации проявляется сильнее для $6q$ -системы, чем для трехкварковой: $r_R = 0,72 \text{ фм}$ и $r_R^* = 0,80 \text{ фм}$ для основного и монополюсно-возбужденного состояний соответственно.

В заключение отметим следующие результаты, полученные в [96, 111, 115]:

1. В МГФ с кварк-кварковым потенциалом типа $V_{qq} = \sum \lambda_i \lambda_j V_{ij}(r)$, где $V_{ij} = (Ae^{-r^2/\alpha^2} + Br^2 + C) + K(1 + \frac{2}{3}\sigma_i \sigma_j) \times \times e^{-r^2/\Lambda^2} = V_{ij}^c + V_{ij}^\sigma$, который приводит к аналитическому эффективному потенциалу $3q$ -системы $W(\rho)$, получено, что с параметрами, приведенными в табл. 4, удается описать:

- а) $(N - \Delta)$ — разность масс,
- б) среднеквадратичный радиус нуклона,
- в) формфактор упругого eN -рассеяния.

2. Найдены энергии возбуждения и плотности для основного и монополюсно-возбужденного состояний N -частиц.

3. Показано, что включение спин-спинового потенциала V_{ij}^σ существенно изменяет эффективный потенциал $W(\rho)$ (кор и глубину), т. е. V_{ij}^σ входит в V_{qq} неаддитивно.

Универсальное описание мезонов и барионов в основном состоянии в потенциальной модели [120, 130]. В [120] были рассчитаны массы основного состояния всех мезонов и барионов с использованием потенциала Cornell в предположении $V_{qq} = \frac{1}{2} V_{q\bar{q}}$. Результаты расчета для масс мезонов и барионов представлены в табл. 6, 7 и находятся в удовлетворительном согласии с экспериментом.

Изучались спектры всех барионов от легчайших до тяжелых в нерелятивистской потенциальной модели. Показано, что основное состояние барионов может быть описано с использованием универсального кулоновского + линейного потенциала кварк-кваркового взаимодействия. Рассчитанные барионные массы и спин-спиновое рас-

Таблица 6. Массы 1S_0 -и 2S_1 -мезонов

Состояние	$u\bar{u}$	$u\bar{s}$	$u\bar{c}$	$u\bar{b}$	$s\bar{s}$	$s\bar{c}$	$c\bar{c}$
$M(^3S_1)$, МэВ:							
теория	758	887	1982	5324	1022	2098	3101
эксперимент	770	892	2006	5325	1020	2110	3097
$M(^1S_0)$, МэВ:							
теория	107	494	1832	5266	751	1970	2977
эксперимент	135	493	1865	5277	770	1970	2980

Таблица 7. Массы основного состояния барионов, ГэВ

Барион	Теория	Эксперимент	Барион	Теория	Эксперимент
N	0,934	0,939	Ξ_c^S	2,566	—
Δ	1,245	1,232	Ξ_c^*	2,628	—
Λ	1,117	1,115	Ξ_{cc}	3,605	—
Σ	1,200	1,193	Ξ_{cc}^*	3,680	—
Σ^*	1,386	1,383	$\Omega_c \left(\frac{1}{2} \right)$	2,725	2,740
Λ_c	2,258	2,282	$\Omega_c \left(\frac{3}{2} \right)$	2,830	—
Σ_c	2,435	2,450	$\Omega_{cc} \left(\frac{1}{2} \right)$	3,73	—
Σ_c^*	2,491	—	$\Omega_{cc} \left(\frac{3}{2} \right)$	3,80	—
Λ_b	5,595	5,50	Ω_{ccc}	4,793	—
Σ_b	5,80	—			
Σ_b^*	5,82	—			
Ξ_c	1,330	1,318			
Ξ_c^*	1,528	1,533			
Ω	1,664	1,672			
Ξ_c^A	2,462	2,460			

Таблица 8. Спин-спиновое расщепление (udf) барионов

Тип частиц	ΔE_{ss}^{cb} , МэВ		Барион	E_{ss}^{cb} , МэВ
	теория	эксперимент		
$\Delta - N$	314	294	N	-157
$\Sigma - \Lambda$	83	78	Λ	-153
$\Sigma^* - \Sigma$	198	215	Λ_c	-162
$\Sigma_c - \Lambda_c$	177	168	Λ_b	-174
$\Xi^* - \Xi$	198	215		

щепление сравнивались с экспериментом. В табл. 8 приведены результаты расчета спин-спинового расщепления (udf) барионов в сравнении с экспериментальными данными. В [114] представлена простая

потенциальная модель для исследования свойств барионов в рамках нерелятивистской кварковой модели с использованием техники гиперсферических функций. Кварк-кварковый потенциал записывается следующим образом:

$$V_{ij} = -V_0 + Ar_{ij}^2 + \lambda_i \lambda_j \alpha_s \left\{ r_{ij}^{-1} + c \frac{\pi}{2} \delta(r_{ij}) \left(m_i^{-2} + m_j^{-2} + \frac{4}{3} \frac{\sigma_i \sigma_j}{m_i m_j} \right) \right\}. \quad (137)$$

Первые два члена описывают обычный конфайнмент. Третий член происходит из КХД. Авторы ввели дополнительный параметр C в член с δ -взаимодействием для приближенного учета членов, отсутствующих в стандартном потенциале Ферми — Брэйта. В этом смысле используемое здесь взаимодействие феноменологическое. В [114] сохраняется значение $\alpha_s = 0,4$ и трактуется V_0 , A и C как параметры.

Барионная волновая функция выражается следующим образом:

$$\Psi = \left\{ \sum_K U_K(r) B_K(\Omega) \right\} \Psi_{ST} \Psi_C, \quad (138)$$

$U_K(r)$ — гиперсферические функции. Они разлагаются по приведенным полиномам Лагерра:

$$U_K(r) = \sum_n a_{nK} L_n(\beta r) \exp(-\beta r/2). \quad (139)$$

В этом выражении оставляют только члены $n = 0$, $K = 0$, β рассматривается как вариационный параметр. Записывая $E = \langle \Psi | H | \Psi \rangle$, получают с Ψ , данным в (138), (139):

$$E = \beta^2 \hbar^2 / 4m - 3V_0 + 42A(b_1^2 + b_2^2 + 1/2)/\beta^2 - 32\beta\alpha_s \left\{ \sum_{i,j>1} C_{ij}^{-1} \right\} / 45\pi + \\ + (\alpha_s c \beta^2 / 45\pi) \{ (m_1^{-2} + m_2^{-2} + 4 \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle / 3m_1 m_2) + \\ + 2(m_1^{-2} + m_2^{-2} + 4 \langle \sigma_1 \sigma_3 \rangle / m_1 m_3) / (b_1^2 + b_2^2)^{3/2} \}. \quad (140)$$

В этом случае удается воспроизвести массы основного состояния барионов при следующих значениях параметров потенциала: $V_0 = 132,02$ МэВ, $A = 40,96$ МэВ·фм⁻² и $C = 3,4366$. Для масс кварков приняты значения: $m_u = m_d = 336$ МэВ и $m_s = 565$ МэВ.

Т а б л и ц а 9. Массы в основном состоянии барионов, МэВ

Барионы	N	Λ	$(\Sigma)_s$	$(\Xi)_s$	Δ	$(\Sigma)_{10}$	(Ξ)	Ω^-	$(\Lambda')_1$
Теория	938	1119,8	1184	1344	1232	1379,4	1534	1667	1406
Эксперимент	939	1115,6	1193	1317	1232	1385	1530	1672	1405

В табл. 9 приведены результаты расчета масс барионов в основном состоянии, а также соответствующие экспериментальные данные.

$$B \quad (140) \quad m = \frac{(\sum_{j>i}^3 m_i m_j)}{\sum_{j=1}^3 m_i}; \quad C_{12} = 1; \quad C_{13} = C_{23} = (b_1^2 + b_2^2)^{1/2}; \quad b_1^2 + b_2^2 = (m_1 + m_3)(m_1 + 2m_3)/(2m_3(2m_1 + m_3)).$$

Среднеквадратичный радиус бариона был рассчитан по формуле:

$$\{\langle \Psi | r^2 / 6 | \Psi \rangle\}^{1/2} = \sqrt{7/\beta}.$$

Для протона найден среднеквадратичный радиус 0,794 фм, что находится в хорошем согласии с экспериментом (0,8 фм). Был также рас-

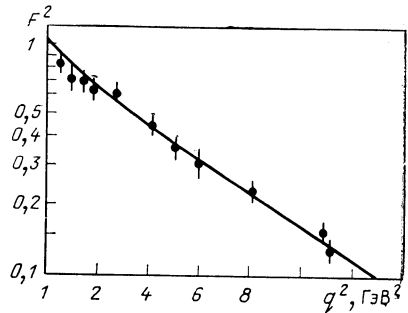


Рис. 23. Протонный формфактор — сплошная линия, точками показаны результаты эксперимента

считан формфактор бариона (нормированный на единицу для переданного момента $q = 0$). Выражение для формфактора с волновой функцией получается следующим образом:

$$F(q) = \langle \Psi | \sum_{j=1}^3 \exp(i\mathbf{q}(\mathbf{r}_j - \mathbf{R})) | \Psi \rangle / 3 = (1 + q^2/3\beta^2)^{-7/2}.$$

На рис. 23 показан протонный формфактор, а также значение экспериментального формфактора. Оба результата находятся в хорошем согласии.

6. ГИБРИДНЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМ НЕСКОЛЬКИХ ЧАСТИЦ

МГФ в импульсном представлении [11, 116] можно применять при решении интегральных уравнений Фаддеева [117]. Вопрос о связи метода Фаддеева и K -гармоник в координатном представлении обсужден в [118]. Объединение этих двух подходов представляется весьма перспективным.

В [117] предложено при решении уравнений Фаддеева в импульсном представлении применить метод парциального разложения не в гильбертовом пространстве двух тел, как обычно делается, а в гильбертовом пространстве трех тел, где вместо сферических функций в трехмерном пространстве вводятся трехчастичные гиперсфери-

ческие функции в шестимерном пространстве импульсов Якоби. Фаддеевские функции $\Psi^{(3)}(K_{12}, p_3)$, $\Psi^{(1)}(K_{23}, p_1)$ и $\Psi^{(2)}(K_{31}, p_2)$ разлагаются по собственным базисным гиперсферическим функциям, и проблема связанного состояния трех тел сводится к решению трех бесконечных систем одномерных однородных интегральных уравнений. Эти уравнения содержат трехчастичные матричные элементы двухчастичной матрицы рассеяния, для определения которых получается бесконечная система одномерных неоднородных интегральных уравнений. При таком подходе к решению уравнений Фаддеева существенно применение унитарного преобразования Рейнала — Реваи. Предложенный в [117] способ «гибридизации» методов Фаддеева и гиперсферических функций был реализован для конкретных задач в [119, 120]. Соответствующие вопросы обсуждались в [69 и 121].

Базисы гиперсферических функций для волновых функций Фаддеева. Рассмотрим связанное состояние трех частиц с массами m_1 , m_2 и m_3 . В методе Фаддеева, как известно, полная волновая функция представляется в виде суммы трех членов

$$\Psi = \Psi^{(3)}(K_{12}, p_3) + \Psi^{(1)}(K_{23}, p_1) + \Psi^{(2)}(K_{31}, p_2), \quad (141)$$

где каждый член зависит от собственного набора импульсов Якоби. В соответствии с этим введем три базиса трехчастичных гиперсферических функций в импульсном представлении

$$\Phi_{K_3 L M}^{l_{K_{12}} l_{p_3}}(\Omega_3^\times), \quad \Phi_{K_1 L M}^{l_{K_{23}} l_{p_1}}(\Omega_1^\times), \quad \Phi_{K_2 L M}^{l_{K_{31}} l_{p_2}}(\Omega_2^\times), \quad (142)$$

где K_1 , K_2 и K_3 — гипермоменты, соответствующие трем разным базисам гиперсферических функций; Ω_i^\times — гиперуглы в импульсном пространстве для i -го базиса.

Связь между функциями (142) осуществляется унитарным преобразованием Рейнала — Реваи. Соответствующая этому преобразованию формула аналогично формуле (3) запишется в виде

$$\Phi_{K_h L M}^{l_{K_{ij}} l_{p_h}}(\Omega_h^\times) = \sum_{l_{K_{ki}} l_{p_j}} \langle l_{K_{hi}} l_{p_j} | l_{K_{ij}} l_{p_h} \rangle_{K_h L} \Phi_{K_h L M}^{l_{K_{hi}} l_{p_j}}(\Omega_j^\times). \quad (143)$$

Индексы $K_h L$ у коэффициентов Рейнала — Реваи указывают на то, что при преобразовании (143) гипермомент K_h и полный орбитальный момент трехчастичной системы не меняются.

Представим фаддеевские функции из формулы (141) в виде разложения по соответствующим базисным гиперсферическим функциям (142):

$$\Psi^{(3)}(K_{12}, p_3) = \sum_{K_3 l_{K_{12}} l_{p_3}} \Phi_{K_3 L}^{l_{K_{12}} l_{p_3}}(\chi) \Phi_{K_3 L M}^{l_{K_{12}} l_{p_3}}(\Omega_3^\times); \quad (144)$$

$$\Psi^{(1)}(K_{23}, p_1) = \sum_{K_1 l_{K_{23}} l_{p_1}} \Phi_{K_1 L}^{l_{K_{23}} l_{p_1}}(\chi) \Phi_{K_1 L M}^{l_{K_{23}} l_{p_1}}(\Omega_1^\times); \quad (145)$$

$$\Psi^{(2)}(K_{31}, p_2) = \sum_{K_2 l_{K_{31}} l_{p_2}} \Phi_{K_2 L}^{l_{K_{31}} l_{p_2}}(\chi) \Phi_{K_2 L M}^{l_{K_{31}} l_{p_2}}(\Omega_2^\times). \quad (146)$$

Используя разложения (144) — (146), на основе преобразования (143) легко найти связь между функциями Фаддеева. Этот факт играет решающую роль в гиперсферическом подходе к решению уравнений Фаддеева.

Конечно, используя прямую связь между различными наборами импульсов Якоби, аргументы каждой из фаддеевской функций из формулы (141) можно свести к одному и тому же набору (стандартный подход). Однако при этом входят углы между импульсами Якоби, что существенно усложняет расчет. Предложенный в [117] подход позволяет избавиться от этих осложнений и свести задачу к решению бесконечных систем одномерных интегральных уравнений для любой формы локальных двухчастичных потенциалов.

Уравнения Фаддеева в гиперсферическом базисе. Система уравнений Фаддеева для отдельных членов из формулы (141) содержит три зацепляющихся интегральных уравнения. Данные уравнения по виду не различаются и могут быть получены одно из другого циклической перестановкой индексов. Поэтому одно из трех уравнений можно рассмотреть в гиперсферическом базисе, а для получения остальных двух в конечном выражении можно произвести циклическую перестановку индексов. Рассмотрим, например, уравнение

$$\begin{aligned} \Psi^{(3)}(\mathbf{K}_{12}, \mathbf{p}_3) = D_{12}^{-1}(\mathbf{K}_{12}, \mathbf{p}_3, Z) \left[\int \langle \mathbf{K}_{12}\mathbf{p}_3 | T_{12}(Z) | \mathbf{K}_{23}\mathbf{p}_1 \rangle \times \right. \\ \times \Psi^{(1)}(\mathbf{K}_{23}, \mathbf{p}_1) d\mathbf{K}_{23} d\mathbf{p}_1 + \int \langle \mathbf{K}_{12}\mathbf{p}_3 | T_{12}(Z) | \mathbf{K}_{31}\mathbf{p}_2 \rangle \times \\ \left. \times \Psi^{(2)}(\mathbf{K}_{31}, \mathbf{p}_2) d\mathbf{K}_{31} d\mathbf{p}_2 \right], \end{aligned} \quad (147)$$

где функцию Грина в гиперимпульсах можно представить в виде

$$D_{12}(\mathbf{K}_{12}, \mathbf{p}_3, Z) = -\frac{\hbar^2}{2m} (\kappa^2 + \kappa_0^2). \quad (148)$$

Здесь для связанного состояния $Z = -\epsilon$, где $\epsilon = \hbar^2\kappa_0^2/2m$ — энергия связи трех тел.

В формуле (147) под интегралом присутствуют матричные элементы двухчастичной матрицы рассеяния, которые взяты в гильбертовом пространстве трех тел и зависят от трехчастичной энергии Z . В отличие от стандартного подхода при их вычислении не будем переходить в гильбертово пространство двух тел (переход от матриц T_{12} к матрицам t_{12}), а будем исходить из первоначального уравнения

$$T_{12}(Z) = v_{12} + v_{12}\sigma_0(Z) T_{12}(Z) \quad (149)$$

и рассмотрим его в базисе трехчастичных гиперсферических функций. В этом уравнении v_{12} — потенциал двухчастичного взаимодействия, $\sigma_0(Z)$ — та же трехчастичная функция Грина, которая присутствует в уравнении Фаддеева.

В базисе гиперсферических функций в импульсном представлении решение уравнения (149) в матричной форме сводится к решению бес-

конечной системы одномерных неоднородных интегральных уравнений [117, 119]:

$$\begin{aligned}
 T_{K_3 K_1 L}^{l_{K_3} l_{K_1} l_{p_3}}; l'_{K_3} l'_{K_1} l'_{p_3} (\chi, \chi', \chi_0) &= V_{K_3 K_1 L}^{l_{K_3} l_{K_1} l_{p_3}}; l'_{K_3} l'_{K_1} l'_{p_3} (\chi, \chi') - \\
 &- \frac{2m}{\hbar^2} \sum_{K_3' \tilde{l}_K \tilde{l}_p; \tilde{l}'_K \tilde{l}'_p} C_{l_{K_3} l_{K_1} l_{p_3}}; l'_{K_3} l'_{K_1} l'_{p_3}; K_1}^{\tilde{l}_K \tilde{l}_p; \tilde{l}'_K \tilde{l}'_p; K_3'} (l_{K_3} l_{p_3}, L) \times \\
 &\times \int \frac{\chi'' d\chi''}{\chi_0^2 + \chi''^2} V_{K_3 K_1 L}^{l_{K_3} l_{K_1} l_{p_3}}; \tilde{l}_K \tilde{l}_p (\chi, \chi'') T_{K_3 K_3 L}^{l_{K_3} l_{K_3} l_{p_3}}; \tilde{l}'_K \tilde{l}'_p (\chi'', \chi', \chi_0), \quad (150)
 \end{aligned}$$

где

$$V_{K_3 K_1 L}^{l_{K_3} l_{K_1} l_{p_3}}; l'_{K_3} l'_{K_1} l'_{p_3} (\chi, \chi') = \int_0^\infty \rho d\rho J_{K_3+2}(\chi\rho) V_{K_3 K_1 L}^{l_{K_3} l_{K_1} l_{p_3}}; l'_{K_3} l'_{K_1} l'_{p_3}(\rho) J_{K_1+2}(\chi'\rho); \quad (151)$$

$$V_{K_3 K_1 L}^{l_{K_3} l_{K_1} l_{p_3}}; l'_{K_3} l'_{K_1} l'_{p_3}(\rho) = \int_0^\infty \Phi_{K_3 L M}^{l_{K_3} l_{p_3}}(\Omega_3^0) v(\rho \cos \alpha_3^0) \Phi_{K_3 L M}^{l'_{K_3} l'_{p_3}}(\Omega_3^0) d\Omega_3^0; \quad (152)$$

$$\begin{aligned}
 &C_{l_{K_3} l_{K_1} l_{p_3}}; l'_{K_3} l'_{K_1} l'_{p_3}; K_1}^{\tilde{l}_K \tilde{l}_p; \tilde{l}'_K \tilde{l}'_p; K_3'} (l_{K_3} l_{p_3}; L) = \\
 &= \frac{\langle \tilde{l}'_K \tilde{l}'_p | l_{K_3} l_{p_3} \rangle_{K_3 L} \langle \tilde{l}'_K \tilde{l}'_p | l_{K_3} l_{p_3} \rangle_{K_3' L}}{\langle l_{K_3} l_{p_3} | l_{K_3} l_{p_3} \rangle_{K_1 L} \langle l'_{K_3} l'_{p_3} | l'_{K_3} l'_{p_3} \rangle_{K_1 L}}. \quad (153)
 \end{aligned}$$

Матрицы $T_{K_3 K_1 L}^{l_{K_3} l_{K_1} l_{p_3}}; l'_{K_3} l'_{K_1} l'_{p_3} (\chi, \chi', \chi_0)$ присутствуют в уравнениях Фаддеева, записанных в гиперсферическом базисе, поэтому чтобы вычислить энергию связи и построить гиперрадиальные функции в импульсном представлении с помощью формул (144) — (146), необходимо сначала решить систему уравнений (150). Уравнения для гиперрадиальных функций получаются после подстановки разложений (144) — (146) в уравнение Фаддеева и выполнения выкладок, обычных для схемы гиперсферического базиса. В результате для функций $\Phi_{K_3 L}^{l_{K_3} l_{p_3}}(\chi)$, $\Phi_{K_1 L}^{l_{K_3} l_{p_3}}(\chi)$ и $\Phi_{K_2 L}^{l_{K_3} l_{p_3}}(\chi)$ получаются три бесконечные системы зацепляющихся одномерных интегральных уравнений. Выпишем одну из них [117, 119]:

$$\begin{aligned}
 &V_{K_3 L}^{l_{K_3} l_{p_3}}(\chi) = -\frac{2m}{\hbar^2} \chi^{-2} (\chi^2 + \chi_0^2)^{-1} \times \\
 &\times \left[\sum_{K_1} \sum_{l_{K_3} l_{p_3}} \sum_{l'_{K_3} l'_{p_3}} \sum_{\tilde{l}'_K \tilde{l}'_p} \sum_{l_{K_3} l_{p_3}} i^{K_1-K} \times \right. \\
 &\times \langle \tilde{l}'_K \tilde{l}'_p | l_{K_3} l_{p_3} \rangle_{K_3 L} \langle l_{K_3} l_{p_3} | l_{K_3} l_{p_3} \rangle_{K_3 L} \langle l_{K_3} l_{p_3} | l'_{K_3} l'_{p_3} \rangle_{K_1 L} \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \int T_{K_1 K_3 L}^{l'_{K_{12}} l'_{P_3}}; \tilde{l}'_{K_{12}} \tilde{l}'_{P_3} (\kappa, \kappa, \kappa_0) \Phi_{K_1 L}^{l_{K_{23}} l_{P_1}} (\kappa') \kappa'^3 d\kappa' + \\
 & + \sum_{K_2} \sum_{l'_{K_{12}} l'_{P_3}} \sum_{l'_{K_{31}} l'_{P_2}} \sum_{\tilde{l}'_{K_{12}} \tilde{l}'_{P_3}} \sum_{l_{K_{31}} l_{P_2}} i^{K_3 - K_2} \langle \tilde{l}'_{K_{12}} \tilde{l}'_{P_3} | l'_{K_{31}} l'_{P_2} \rangle_{K_3 L} \times \\
 & \quad \times \langle l_{K_{12}} l_{P_3} | l_{K_{31}} l_{P_2} \rangle_{K_3 L} \langle l_{K_{31}} l_{P_2} | l_{K_{12}} l_{P_3} \rangle_{K_2 L} \times \\
 & \times \int T_{K_2 K_3 L}^{l'_{K_{12}} l'_{P_3}}; \tilde{l}'_{K_{12}} \tilde{l}'_{P_3} (\kappa, \kappa', \kappa_0) \Phi_{K_2 L}^{l_{K_{31}} l_{P_2}} (\kappa') \kappa'^3 d\kappa'. \quad (154)
 \end{aligned}$$

Два других уравнения получаются циклической перестановкой индексов.

Таким образом, в новом подходе [117, 119] к решению уравнений Фаддеева задача не разделяется на два этапа, как обычно (находят двухчастичную матрицу рассеяния t_{12} из двухчастичной задачи на энергетической поверхности, а затем аналитически продолженную t_{12} матрицу ставят в уравнениях Фаддеева). Здесь одновременно надо решать системы одномерных интегральных уравнений (150) и (154) и подобные системы, полученные из них циклической перестановкой индексов. При этом, что особенно важно, одномерные интегральные уравнения получаются для любой формы потенциала без предварительного его сепарабельного разложения.

Уравнениям (150) и (154) сложную форму придают разнообразные орбитальные квантовые числа, однако это свойственно методу частичного разложения для уравнений Фаддеева [122]. Для системы из трех бозонов, когда все орбитальные моменты — нули, эти уравнения принимают простую форму.

При учете симметризации фаддеевских волновых функций разложения необходимо провести по симметризованным базисным гиперсферическим функциям. Остальные выкладки надо повторить.

Гибридный метод исследования трехчастичных реакций. МГФ можно применить и при решении задачи непрерывного спектра с использованием уравнений Фаддеева. Это впервые было сделано в [120]. Надо исходить из системы интегральных уравнений Фаддеева для непрерывного спектра:

$$\begin{aligned}
 & \Psi_{K_{12}^0, P_3^0}^{(3)}(K_{12}, P_3) = \delta(K_{12} - K_{12}^0) \delta(P_3 - P_3^0) + \\
 & + D_{12}^{-1}(K_{12}, P_3, Z) \left[\int \langle K_{12} P_3 | T_{12}(Z) | K_{31} P_2 \rangle \Psi_{K_{31}^0, P_2^0}^{(0)}(K_{31}, P_2) dK_{31} dP_2 + \right. \\
 & \left. + \int \langle K_{12} P_3 | T_{12}(Z) | K_{23} P_1 \rangle \Psi_{K_{23}^0, P_1^0}^{(1)}(K_{23}, P_1) dK_{23} dP_1 \right] \quad (155)
 \end{aligned}$$

и двух других уравнения, которые получаются циклической перестановкой индексов.

В формуле (155) D_{12}^{-1} — функция Грина:

$$\left. \begin{aligned} D_{12}(\mathbf{K}_{12}, \mathbf{p}_3, \mathbf{Z}) &= -\frac{\hbar^2}{2m} (\kappa^2 - \kappa_0^2 - i\epsilon); \\ \kappa_0^2 &= \mathbf{K}_{12}^{02} + \mathbf{p}_3^{02} = \mathbf{K}_{23}^{02} + \mathbf{p}_1^{02} = \mathbf{K}_{13}^{02} + \mathbf{p}_2^{02} = \frac{2m}{\hbar^2} \mathbf{Z}, \end{aligned} \right\} \quad (156)$$

где $\mathbf{Z} \equiv E > 0$ — полная энергия трех частиц в системе центра масс.

Используя интегральное представление функции $\delta(K_{12} - K_{12}^0) \times \delta(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_3^0)$ и разлагая шестимерную плоскую волну по гиперсферическим функциям, можно легко получить следующее представление:

$$\delta(\mathbf{K}_{12} - \mathbf{K}_{12}^0) \delta(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_3^0) = \frac{\delta(\kappa - \kappa_0)}{\kappa_0^5} \sum_{K_3 l_{K_{12}} l_{p_3} L} \Phi_{K_3 L M}^{*l_{K_{12}} l_{p_3}}(\Omega_3^\kappa) \Phi_{K_3 L M}^{l_{K_{12}} l_{p_3}}(\Omega_3^{\kappa_0}), \quad (157)$$

где Ω_3^κ и $\Omega_3^{\kappa_0}$ — совокупность гиперуглов в шестимерных пространствах импульсов Якоби $(\mathbf{K}_{12}, \mathbf{p}_3)$ и $(\mathbf{K}_{12}^0, \mathbf{p}_3^0)$ соответственно.

По аналогии с разложением (157) представим входящие в уравнение (155) фаддеевские функции в виде следующих разложений:

$$\begin{aligned} \Psi_{K_{12} p_3^0}^{(3)}(\mathbf{K}_{12}, \mathbf{p}_3) &= \\ &= \sum_{K_3 K_0' l_{K_{12}} l_{p_3}} \varphi_{K_3 L K_0'}^{l_{K_{12}} l_{p_3}}(\kappa, \kappa_0) \Phi_{K_3 L M}^{*l_{K_{12}} l_{p_3}}(\Omega_3^\kappa) \Phi_{K_0' L M}^{l_{K_{12}} l_{p_3}}(\Omega_3^{\kappa_0}), \end{aligned} \quad (158)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{K_{23} p_1^0}^{(1)}(\mathbf{K}_{23}, \mathbf{p}_1) &= \\ &= \sum_{K_1 K_0'' l_{K_{23}} l_{p_1}} \varphi_{K_1 L K_0''}^{l_{K_{23}} l_{p_1}}(\kappa, \kappa_0) \Phi_{K_1 L M}^{*l_{K_{23}} l_{p_1}}(\Omega_1^\kappa) \Phi_{K_0'' L M}^{l_{K_{23}} l_{p_1}}(\Omega_1^{\kappa_0}), \end{aligned} \quad (159)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{K_{31} p_2^0}^{(2)}(\mathbf{K}_{31}, \mathbf{p}_2) &= \\ &= \sum_{K_2 K_0''' l_{K_{31}} l_{p_2}} \varphi_{K_2 L K_0'''}^{l_{K_{31}} l_{p_2}}(\kappa, \kappa_0) \Phi_{K_2 L M}^{*l_{K_{31}} l_{p_2}}(\Omega_2^\kappa) \Phi_{K_0''' L M}^{l_{K_{31}} l_{p_2}}(\Omega_2^{\kappa_0}), \end{aligned} \quad (160)$$

где φ — гиперрадиальные функции непрерывного спектра в импульсном представлении. В формулах (158) — (160) гипермоменты K_3 , K_2 и K_1 характеризуют систему после трехчастичного рассеяния, а гипермоменты K_0' , K_0'' , K_0''' — ту же самую систему до такого рассеяния. В общем случае эти гипермоменты могут отличаться друг от друга.

При применении МГФ к решению интегральных уравнений Фаддеева в разложениях возникают три разных набора гипермоментов: (K_1, K_0') , (K_2, K_0'') и (K_3, K_0''') . При применении того же метода к решению уравнений Шредингера возникает лишь один набор. Следовательно, при решении уравнений Фаддеева в принципе возможно

описание всевозможных рассеяний в системе трех тел, тогда как при решении уравнений Шредингера можно описать лишь истинно трехчастичное рассеяние.

В уравнении (155) под интегралом присутствуют матричные элементы двухчастичной матрицы рассеяния, которые взяты в гильбертовом пространстве трех тел и зависят от той же трехчастичной энергии $Z = E$. При их вычислении, так же как и в случае дискретного спектра, не переходим в гильбертово пространство двух тел (стандартный подход), а исходим из первоначального уравнения для $T_{12}(Z)$ -матрицы, записываем его в матричной форме и каждый матричный элемент из полученного уравнения вычисляем в базе трехчастичных гиперсферических функций. В результате задача нахождения двухчастичной матрицы рассеяния сводится к решению системы одномерных, неоднородных, сингулярных интегральных уравнений [120]. Далее, с использованием вышеуказанного представления матричных элементов двухчастичной матрицы рассеяния в базе трехчастичных гиперсферических функций и разложений (158) — (160) из уравнения (155) получаем систему зацепляющихся одномерных неоднородных сингулярных интегральных уравнений для гиперрадиальных функций $\varphi_{KLK_0}^{l_1 l_2 p}(\kappa, \kappa_0)$.

Вышеизложенный гибридный метод использовался при изучении двойной перезарядки каонов на трехчастичных ядрах [120], в исследованиях реакции $\gamma + {}^9\text{Be} \rightarrow \alpha + \alpha + n$ [123] и реакции фоторождения каонов на трехчастичных ядрах с полным развалом [124]. Опишем кратко результаты этих исследований.

Двойная перезарядка каонов на трехчастичных ядрах. Гибридным методом в [120] исследовались реакции $K^- + {}^3\text{H} \rightarrow K^+ + \Xi^- + n + p$ и $K^- + {}^3\text{He} \rightarrow K^+ + \Xi^- + n + p$. В последнее время на передний план выдвинулась проблема исследования ядерных систем с присутствием Ξ^- -частиц. Эта проблема интересна с двух точек зрения. С одной стороны, исследование взаимодействия Ξ^- с нуклонами при низких энергиях необходимо для расширения наших представлений относительно $SU(3)$ -структуры барион-барионных сил. С другой стороны, существуют соображения о том, что при выполнении соответствующих условий двухчастичная система $\Xi^- + p$ может перейти в шестикварковый H -дибарион. Основные заключения работы [120] относительно вышеуказанных реакций следующие: а) взаимодействие между барионами в конечном состоянии существенно влияет на основные характеристики этих реакций; б) экспериментальное исследование реакции двойной перезарядки каонов на трехчастичных ядрах может привести к решению вопроса о возможности наблюдения шестикваркового H -дибариона; в) импульсный спектр K^+ -мезонов из указанных реакций достаточно критичен к взаимодействию между барионами в конечном состоянии и может быть использован для исследования Ξ^-N -взаимодействия.

Трехчастичный фоторазвал ядра ${}^9\text{Be}$. Процесс трехчастичного фоторазвала ядра ${}^9\text{Be}$ γ -квантами малых энергий неоднократно исследо-

вался как экспериментально, так и теоретически. Недавно [125] возобновился интерес к этой проблеме. Повышенный интерес обусловлен тем фактом, что основное состояние ядра ${}^9\text{Be}$ ($3/2^-$) в трехчастичной кластерной модели — это такое состояние, где две α -частицы и нейтрон связаны слабее, чем нейтрон и протон в дейтроне. Под действием γ -кванта с малой энергией [$1,57 \text{ МэВ} \leq E_\gamma \leq \varepsilon$, где ε — порог фотореакций (γ, p) и (γ, n) на α -частице] ядро может развалиться лишь на три составные частицы. Это типичная трехчастичная фотоядерная реакция. Можно исследовать ее в «чистом» виде и таким путем получить более или менее однозначную информацию не только о структуре ядра ${}^9\text{Be}$ в основном состоянии, но и о динамике трехчастичной системы $\alpha + \alpha + n$ в непрерывном спектре.

Интерес к этой реакции значительно возрос после того, как в экспериментах было обнаружено своеобразное поведение кривой сечения вблизи порога. Оказалось, что предположение о том, что в конечное состояние основной вклад вносит возбужденное состояние ядра ${}^9\text{Be}$ ($1/2^+$), не соответствует действительности, и при фитировании теоретических результатов к экспериментальным данным пришлось предположить наличие большого вклада нерезонансного механизма реакции [126]. Однако проведенная в [126] процедура разделения амплитуды перехода на резонансную и нерезонансную

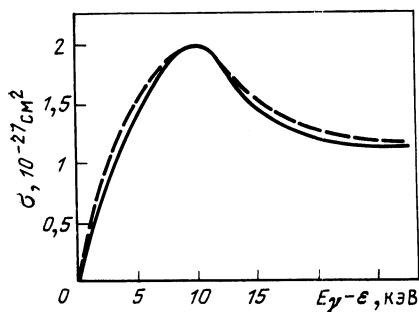


Рис. 24. Результаты расчетов полного сечения реакции $\gamma + {}^9\text{Be} \rightarrow \alpha + \alpha + n$: сплошная линия — с учетом минимальной гармоник ($K_f = 0$), штриховая кривая — с учетом одновременно первых двух гармоник ($K_f = 0,2$)

части и использование затравочных модельных волновых функций ядерных систем в свою очередь содержат достаточно много искусственных приемов и модельных предположений. Между тем можно развить единый безмодельный подход к исследованию процессов типа трехчастичного развала, где с использованием одних и тех же реалистических двухчастичных потенциалов в одном и том же формализме описываются как структура основного состояния исходного ядра, так и динамика конечного состояния трех тел [123].

В [123] получено основное заключение, что своеобразное поведение сечения реакции трехчастичного фоторазвала ядра ${}^9\text{Be}$ вблизи порога описывается без введения подгоночных параметров и искусственного добавления волновой функции резонансного конечного состояния. Это поведение определяется волновой функцией конеч-

ного состояния, которая получается решением уравнений Фаддеева с учетом всех взаимодействий между частицами. На рис. 24 продемонстрирована степень сходимости по числу учитываемых гармоник конечного состояния. На этом рисунке приведены результаты расчетов полного сечения реакции $\gamma + {}^9\text{Be} \rightarrow \alpha + \alpha + n$ для набора потенциалов $\alpha - \alpha$ - и $\alpha - N$ -взаимодействий из [127, 128], полученные с учетом взаимодействия в конечном состоянии между тремя частицами. В расчетах при получении волновой функции начального состояния учитывались гармоники $K_i = 1, 3, 5$, а волновая функция

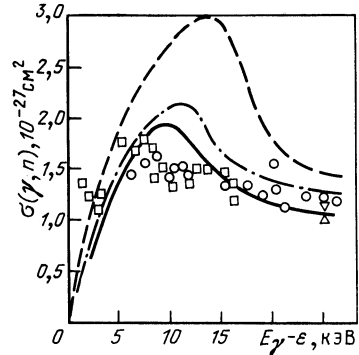


Рис. 25. Кривые полного сечения реакции $\gamma + {}^9\text{Be} \rightarrow \alpha + \alpha + n$:

сплошная кривая — расчет с учетом потенциалов из [127, 128]; штриховая кривая — результат плосковолнового приближения (потенциалы взаимодействий из работ [127, 128]); штрихпунктирная — с учетом взаимодействия между всеми частицами в конечном состоянии (потенциалы из работ [129, 130]); экспериментальные точки: \diamond — из работы [131], ∇ — из [132], \circ и \square — из [133]

конечного состояния бралась в приближении минимальной гармоники $K_f = 0$ (сплошная линия) и с учетом первых двух гармоник $K_f = 0, 2$ (штриховая линия). Как видно, добавление второй гармоники в расчетах волновой функции конечного состояния незначительно изменяет результаты для сечения реакции.

Эффект взаимодействия в конечном состоянии и сравнение с экспериментом показаны на рис. 25, где приведены кривые полного сечения реакции $\gamma + {}^9\text{Be} \rightarrow \alpha + \alpha + n$. Как видно из рисунка, результаты для разных наборов двухчастичных потенциалов заметно различаются, и это позволяет надеяться, что путем дальнейшего уточнения экспериментальных данных можно добиться получения однозначных заключений об этих потенциалах. В настоящее время, как видно из рис. 25, экспериментальные данные заметно различаются и не обеспечены нужной статистикой. Таким образом, здесь имеется интересная экспериментальная задача.

Фоторождение каонов на трехчастичных ядрах. В [124] гибридным методом была исследована реакция (γ, K^+) на трехчастичных ядрах. Такая реакция интересна с точки зрения развития гиперъядерной физики. Дело в том, что в гиперъядерной физике используется в основном реакция (K^-, π^-) , в результате которой образуется гиперъядро. Однако интенсивность современных пучков K^- -мезонов весьма низкая, что затрудняет дальнейшее развитие области исследования гиперъядерной физики в этом направлении. С другой стороны, существует возможность использования для исследований гиперъядер

других процессов, индуцируемых другими элементарными частицами, интенсивность пучков которых намного превышает интенсивность пучка K^- -мезонов. В этом отношении в последнее время на передний план выдвинулся процесс фоторождения K^+ -мезонов на ядрах с образованием гиперъядер. В [124] получены следующие основные заключения относительно реакции (γ, K^+) на трехчастичных ядрах: 1) гибридный метод успешно можно применить для исследования структуры ядер и гиперъядер и реакции фоторождения K^+ -мезонов на трехчастичных ядрах. При этом хорошая сходимость по числу учитываемых гармоник обеспечивается как для энергии связи, так и для сечений реакций; 2) эффект взаимодействия в конечном состоянии между барионами для процессов фоторождения K^+ -мезонов является заметным; 3) влияние ядерной среды на процессы фоторождения имеет в основном количественный характер; 4) при фоторождении K^+ -мезонов на трехчастичных ядрах образованной Λ -частице гораздо выгоднее оставаться в несвязанном состоянии с барионами. Канал с образованием гиперъядра ${}^3\Lambda\text{H}$ в конечном состоянии существенно подавлен.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая работа по своему объему не может претендовать на полное изложение новых тенденций в развитии и применении МГФ. Здесь были изложены лишь некоторые аспекты вопроса, при выборе которых, естественно, определяющими были интересы самих авторов. Конечно, и цитированная литература не может претендовать на полноту. Ряд новых работ по дальнейшему развитию математического аппарата МГФ и применению этого метода в физике кварков, в ядерной физике, в атомной физике, в молекулярной физике и химии остался неосвещенным. Число таких работ, результаты которых представляют большой интерес, довольно быстро растет, и в будущем, возможно, потребуются написать обзоры по применению МГФ отдельно в физике кварков, отдельно в атомной физике и т. д.

Пройденный последний десятилетний этап характеризуется переходом от вычислений энергии связи к рассмотрению непрерывного спектра многочастичных систем и многообразных процессов, рассмотренных с использованием МГФ. Однако при этом МГФ применялся в основном для решения многочастичного уравнения Шредингера, что безусловно ограничивало класс задач непрерывного спектра. При переходе к решению уравнений Фаддеева этот класс естественно будет расширяться.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Симонов Ю. А. // ЯФ. 1966. Т. 3. С. 630—638. Бадалян А. М., Симонов Ю. А. // Там же. С. 1032—1047.
2. Базь А. И., Гринь Ю. Т., Демин В. Ф., Жуков М. В. // ЭЧАЯ. 1972. Т. 3. С. 275—298.
3. Филиппов Г. Ф. // ЭЧАЯ. 1973. Т. 4. С. 992—1017.
4. Базь А. И., Демин В. Ф., Жуков М. В. // ЭЧАЯ, 1975. Т. 6. С. 515—563.

5. Смирнов Ю. Ф., Шитикова К. В.//ЭЧАЯ. 1977. Т. 8. С. 847—910.
6. Джибути Р. И., Крупенникова Н. Б. Метод гиперсферических функций в квантовой механике нескольких тел. Тбилиси: Мецниереба, 1984.
7. Raupal J., Revai J.//Nuovo cimento, 1970. Vol. 68A. P. 612—622.
8. Джибути Р. И., Томчинский В. Ю., Шубитидзе Н. И.//ЯФ. 1973. Т. 18. С. 1164—1172.
9. Смородинский Я. А., Эфрос В. Д.//ЯФ. 1973. Т. 17. С. 210—224.
10. Джибути Р. И., Крупенникова Н. Б., Томчинский В. Ю. Сообщения АН ГССР. 1976. Т. 81. С. 69—72.
11. Jibuti R. I., Krupennikova N. V., Tomchinsky V. Yu.//Nucl. Phys. 1977. Vol. A276. P. 421—435.
12. Джибути Р. И., Шубитидзе Н. И.//ЯФ. 1974. Т. 20. С. 666—670.
13. Джибути Р. И., Крупенникова Н. Б., Шубитидзе Н. И.//ТМФ. 1977. Т. 32. С. 223—236.
14. Шубитидзе Н. И.//Многочастичные аспекты теории легких ядер (Сб. ст.). Тбилиси: Мецниереба, 1977. С. 65—74.
15. Джибути Р. И., Шубитидзе Н. И.//ЯФ. 1980. Т. 32. С. 940—944.
16. Джибути Р. И., Шубитидзе Н. И. Препринт ИФ АН ГССР ЯФ-1. Тбилиси. 1986.
17. Джибути Р. И., Крупенникова Н. Б., Саркисян Л. Л. Препринт ИФ АН ГССР Я-11. Тбилиси, 1986.
18. Джибути Р. И., Сигуа К. И. Препринт ИФ АН ГССР ЯФ-31. Тбилиси, 1977.
19. Джибути Р. И.//ЭЧАЯ. 1983. Т. 14. С. 741—772.
20. Бабиков В. В. Метод фазовых функций в квантовой механике. М.: Наука, 1976.
21. Калоджеро Ф. Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния: Пер. с англ. М.: Мир, 1972.
22. Jibuti R. I., Kezerashvili R. Ya.//Czechosl. J. of Phys. 1980. Vol. B30. P. 1090—1100.
23. Джибути Р. И., Кезерашвили Р. Я.//ЯФ. 1984. Т. 39. С. 1109—1114.
24. Джибути Р. И., Кезерашвили Р. Я.//Там же. С. 419—428.
25. Sperinde J., Hall I., Nagib I. M. e.a.//Phys. Lett. 1970. Vol. 32B. P. 185—189.
26. Джибути Р. И., Циклаури Ш. М.//ЯФ. 1981. Т. 34. С. 58—65.
27. Джибути Р. И., Циклаури Ш. М.//ЯФ. 1982. Т. 36. С. 1387—1395.
28. Джибути Р. И., Циклаури Ш. М.//ЯФ. 1984. Т. 39. С. 1115—1124.
29. Saure P., Shitikova K. V. Preprint E4-85-44. Dubna, 1985.
30. Bozzolo G., Civitarese O., Vary J. P.//Phys. Rev. 1988. Vol. C. 37. P. 1240—1244.
31. Brink D. M., Boeker E.//Nucl. Phys. 1967. Vol. A91. P. 1—26.
32. Shitikova K. V.//Proc. of the X European Sym. on the dynamics of few-body systems, Balatonfured, Hungary. 1985, P. 429—430.
33. Shitikova K. V. Nuclear Structure in Heavy-ion Collisions. World Scientific. Singapore. 1987. Vol. 1. P. 373—386.
34. Strobel G. L.//Nucl. Phys. 1976. Vol. A271. P. 162—172.
35. Fabre de la Ripelle M., Navarro J.//Ann. Phys. 1983. V. 147. P. 281—320.
36. Dymarz R., Molina J. L., Shitikova K. V.//Z. Phys. 1981. Vol. A299. P. 245—249.
37. Шитикова К. В.//ЭЧАЯ. 1985. Т. 16. С. 825—874.
38. Shitikova K. V. I Topical Meeting on Giant Resonance Excitation in Heavy-Ion Collisions. Italy, 1987. P. 66, 67.
39. Lebrun D. e.a. Phys. Lett. 1980. Vol. 97B. P. 358—362.
40. Morsch H. P., Decowski P.//Phys. Lett. 1979. Vol. 82B. P. 1—5.
41. Гринь Ю. Н., Левинсон Л. В.//ЯФ. 1971. Т. 14. С. 536—545.
42. Hegaki E. e.a. Progr. of Theor. Phys. 1977. V. 57. P. 1262—1277.
43. Камунтавичюс Г.-П. П., Сабалаяускас Л. Ю., Янкаускас К. И.//Liet. fiz. riuk. 1971, XIV. Vol. 469. P. 319.
44. Bassel R. H. e.a.//J. Phys. G: Nucl. Phys. 1982. Vol. 8. P. 1215—1218.

45. Kaschiev M., Saupe G., Shitikova K. V. Preprint P4-85-319. Dubna, 1985.
46. Dao Tien Khoa, Shitikova K. V. Preprint E4-85-143. Dubna, 1985.
47. Dao Tien Khoa, Shitikova K. V. Preprint E4-85-384. Dubna, 1985.
48. Kirson M. W.//Nucl. Phys. 1980. Vol. A337. P. 194—227.
49. Saupe G., Shirokova A. A., Shitikova K. V. Preprint E4-85-25. Dubna, 1985.
50. Christov Chr., Delchev I. I., Shitikova K. V.//Болг. физ. журнал. 1986. Т. 13. С. 26—34.
51. Ngo H., Ngo Ch.//Nucl. Phys. 1980. Vol. A348. P. 140.
52. Lombard R. G.//Ann. Phys. 1973. Vol. 77. P. 380—414.
53. Filippov G. F., Vasilevsky V. S., Nesterov A. V.//Nucl. Phys. 1984. Vol. A426. P. 327—338.
54. Filippov G. F., Vasilevsky V. S., Nesterov A. V.//Nucl. Phys. 1983. Vol. 38. P. 584—610.
55. Филиппов Г. Ф., Василевский В. С., Нестеров А. В.//Изв. АН СССР. Сер. физ. 1985. Т. 49. С. 173—181.
56. Джибути Р. И., Имнадзе П. М. Препринт ИФ АН ГССР ЯФ-7. Тбилиси, 1985.
57. Джибути Р. И., Имнадзе П. М. Препринт ИФ АН ГССР ЯФ-8. Тбилиси, 1985.
58. Джибути Р. И., Ефремидзе Т. И., Тедорадзе Д. К.//Химическая физика. 1987. Т. 6. С. 34—40.
59. Macek J. H.//J. Phys. 1968. Vol. B1. P. 831.
60. Fano U.//Rep. Prog. Phys. 1983. Vol. 48. P. 97—165.
61. Pelikan E., Klar H.//Z. Phys. 1983. Vol. A310. P. 153—159.
62. Botero J., Greene Chris H.//Phys. Rev. 1985. Vol. A32. P. 1249—1252.
63. Лендьял В. И., Шитикова К. В., Гайсак М. И.//X Intern. Conf. in Atomic Physics, Tokyo, August, 1986. P. 74.
64. Лендьял В. И., Шитикова К. В., Гайсак М. И.//Международное совещание по теории малочастичных и кварк-адронных систем. Дубна, июнь 1987. С. 27.
65. Fabre de la Ripelle M., Das T. K., Coelho H. T.//Phys. Rev. 1982. Vol. 26. P. 2281—2300.
66. Klar H., Klar M.//J. Phys. 1980. Vol. B13. P. 1057.
67. Гайсак М. И., Лендьял В. И., Навроцкий В. Т., Сабад Е. П.//ЧФЖ. 1982. Т. 2. С. 1617—1625.
68. Hicks P. J., Comer J.//J. Phys. 1975. Vol. B8. P. 1866.
69. Джибути Р. И.//Физика многочастичных систем. 1985. Т. 8. С. 39—61.
70. Ballot J. L., Navarro J.//J. Phys. 1975. Vol. B8. P. 172—182.
71. Mandelzweig V. B.//Ann. Phys. 1977. Vol. 104. P. 1.
72. Micnaco J. A., Raditi I.//J. Phys. 1981. Vol. B14. P. 161—166.
73. Efros V. D., Frolov A. M., Mukhtarova M. I.//J. Phys. 1982. Vol. B15. P. 819—823.
74. Haftel M. L., Mandelzweig V. B.//Ann. Phys. 1983. Vol. 150. P. 48.
75. Эфрос В. Д.//ЯФ. 1978. Т. 27. С. 845—855.
76. Erens G., Wischers J. L., Wan Wageningen R.//Ann. Phys. 1971. Vol. 67. P. 461—469.
77. Фомин В. А., Эфрос В. Д.//ЯФ. 1981. Т. 34. С. 587—599.
78. Фролов А. М.//ЖЭТФ. 1982. Т. 92. С. 1959—1965.
79. Фок В. А.//Изв. АН СССР. Сер. физ. 1954. Т. 18. С. 161—172.
80. Frankowski K., Pekeris C. L.//Phys. Rev. 1966. Vol. 146. P. 46—53.
81. Knirk D. L.//J. Chem. Phys. 1974. Vol. 60. P. 760—767.
82. Lim T. K.//Nucl. Phys. 1984. Vol. A416. P. 491—502.
83. Manz J.//Comments At. Mol. Phys. 1985. Vol. 17. P. 91—113.
84. Nakaichi S., Lim T. K., Akaishi I., Tanaka H.//J. Chem. Phys. 1983. Vol. 78. P. 2103—2109.
85. Haftel M. L., Lim T. K.//J. Chem. Phys. 1982. Vol. 77. P. 4515—4525.
86. Wanatabe S., Lin C. D.//Phys. Rev. 1986. Vol. A34. P. 823—832.

87. Moraes F. S., Coelho T., Chanda R.//Lett. Nuovo cimento. 1979. Vol. 26. P. 466—469.
88. Richard J. M.//Phys. Lett. 1981. Vol. 100B. P. 515—518.
89. Richard J. M., Taxil P.//Phys. Lett. 1983. Vol. 128B. P. 453—456.
90. Richard J. M., Taxil P.//Ann. Phys. 1983. Vol. 150. P. 267—276.
91. Richten V. e.a.//Phys. Rev. 1984. Vol. D21. P. 203—209.
92. Бадалян А. М., Киторoadже Д. И., Парийский Д. С.//ЯФ. 1987. Т. 46. С. 226—232.
93. Badalyan A. M., Jaffe B. L., Smilga A. V.//Nucl. Phys. 1987. Vol. B281. P. 85.
94. Калашникова Ю. С., Народецкий И. М., Симонов Ю. А.//ЯФ. 1987. Т. 46. С. 1181—1193.
95. Хелашвили А. А., Хмаладзе В. Ю., Чачава Н. Д.//ТМФ. 1985. Т. 62. С. 136—143.
96. Буров В. В., Шитикова К. В. Препринт P2-86-543. Дубна, 1986.
97. Harvey M.//Nucl. Phys. 1981. Vol. A352. P. 301—325.
98. Ohta S., Oka M., Arima A., Yazaki K.//Phys. Lett. 1982. Vol. 119B. P. 35—41.
99. Oka M., Yasaki K.//Nucl. Phys. 1983. Vol. A402. P. 477—491.
100. Faessler A. e.a.//Phys. Lett. 1983. Vol. 124A. P. 145; Ibid. 1982. Vol. 122B. P. 201.
101. Suzuki Y. e.a.//Phys. Rev. 1983. Vol. C27. P. 299—311.
102. Neudatahin V. G.e.a.//Z. Phys. 1983. Vol. A313. P. 357—366.
103. Lukyanov V. K., Titov A. I.//In: Few Body Systems and Nucl. Forces, 1978. P. 397—443.
104. Квицинский А. А., Куперин Ю. А., Меркурьев С. П., Новожилов В. Ю.//ЯФ. 1983; Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. ОИЯИ Д1 2-84-599. Дубна, 1984. С. 392.
105. Guimaraes A. V., Coelho H. T.//Phys. Rev. 1981. Vol. 24D. Vol. 5. P. 1343—1346.
106. Stanley D. P., Robson D.//Phys. Rev. 1982. Vol. 26D. P. 223—232.
107. Mitra A. N., Kumari I.//Phys. Rev. 1977. Vol. D15. P. 261—267.
108. Brodsky S. J., Chertok B. T.//Phys. Rev. 1976. Vol. D14. P. 3003—3021.
109. Brodsky S. J., Farrar G.//Phys. Rev. Lett. 1973. Vol. 31. P. 1153—1156.
110. Blantik S., Zovko N.//Acta Phys. Aust. 1974. Vol. 39. P. 62—68.
111. Буров В. В., Шитикова К. В.//VIII Международный семинар по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1986. С. 419—429.
112. Badalyan A. M. Preprint ИТЕР-87-21. М., 1987.
113. Badalyan A. M., Kitoroage D. I. Preprint ИТЕР-87-33. М., 1987.
114. Nag R., Sanyal S., Mukherjee S. N.//11 Intern. Conf. Few body systems in Particle and Nucl. Phys. Tokyo, Sendai. 1987. P. 100—101.
115. Shitikova K. V.//Proc. from the Intern. Symposium on Symmetries and Nuclear Structure. Yugoslavia, 1986. P. 469—475.
116. Джибути Р. И., Крупеникова Н. Б., Томчинский В. Ю.//ЯФ. 1976. Т. 23. С. 539—547.
117. Джибути Р. И. Препринт ИФ АН СССР ЯФ-17. 1983.
118. Coelho H. T., Glöckle W., Delfinov A.//Phys. Rev. 1986. Vol. 122. P. 1796—1802.
119. Джибути Р. И., Циклаури Ш. М.//ЯФ. 1984. Т. 40. С. 1171—1179.
120. Джибути Р. И., Циклаури Ш. М.//ЯФ. 1985. Т. 41. С. 865—874.
121. Джибути Р. И. Свойства малочастичных и кварк-адронных систем. ч. I (Конспекты лекции III Всесоюзной школы по малочастичным и кварк-адронным системам). Вильнюс. 1986. С. 70—100.
122. Ahmadzadeh A., Tjon J. A.//Phys. Rev. 1965. Vol. 139B. P. 1085—1094.
123. Джибути Р. И., Имнадзе П. М., Циклаури Ш. М.//ЯФ. 1986. Т. 43. С. 834—842.
124. Джибути Р. И., Имнадзе П. М., Циклаури Ш. М.//ЯФ. 1986. Т. 43. С. 1169—1175.

125. Fujishiro M., Okamoto K., Tsujimoto T.//Canad. J. Phys. 1983. Vol. 61. P. 1579.
126. Salyers A.//Phys. Rev. 1970. Vol. C2. P. 1653.
127. Buck B., Friedrich H., Wheatley C.//Nucl. Phys. 1977. Vol. A275. P. 246.
128. Tatischeff B., Brussand I.//Nucl. Phys. 1970. Vol. A155. P. 89.
129. Avishai J.//Phys. Rev. 1972. Vol. C. 6. P. 677.
130. Glendening N. K., Veneroni M.//Phys. Rev. 1966. Vol. 144. P. 839.
131. Gibborn J. H., Machlin R. L., Marion J. B., Schmidt H. W.//Phys. Rev. 1959. Vol. 114. P. 1319.
132. John W., Prosser J. M.//Phys. Rev. 1962. Vol. 127. P. 231.
133. Berman B., Van Hement R., Bowman C.//Phys. Rev. 1967. Vol. 163. P. 958.