«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1989, ТОМ 20, ВЫП. 3

УДК 539.12

РАЗМЕРНАЯ РЕДУКЦИЯ СИММЕТРИЧНЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ, МОДЕЛИ ХИГГСА И СПОНТАННАЯ КОМПАКТИФИКАЦИЯ

И. П. Волобуев, Ю. А. Кубышин

Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ, Москва

Ж. М. Моурао

Лиссабонский университет, Лиссабон, Португалия

Г. Рудольф

Университет им. Карла Маркса, Лейпциг, ГДР

В обзоре обсуждается круг вопросов, связанных с размерной редукцией симметричных калибровочных полей в многомерных пространствах вида $E = M \times G/H$. Для таких полей последовательно изложены общий геометрический метод размерной редукции и метод вычисления потенциалов скалярных полей редуцированной теории в случае симметрических пространств G/H. Детально прослежена связь размерной редукции калибровочных полей с теорией спонтанной компактификации и с физической интерпретацией решений этой теории. Значительное внимание уделено применению метода размерной редукции к фермионным полям материи и построению этим методом реалистических моделей взаимодействий элементарных частиц в пространстве Минковского.

The review tackles a set of problems connected with the dimensional reduction of symmetric gauge fields in multidimensional spaces of the type $E = M \times G/H$. For such fields, we consecutively expound a general geometrical method of dimensional reduction and a method of calculating the scalar field potentials of reduced theories in the case of symmetric spaces G/H. The link between the dimensional reduction of gauge fields and the spontaneous compactification theory is traced in detail, which provides a physical interpretation for solution of this theory. Considerable attention is paid to dimensional reduction of fermion matter fields and to discussing realistic models of elementary particles interactions in Minkowski space constructed by this method.

ВВЕДЕНИЕ

По-видимому, большинство физиков, работающих в области теории элементарных частиц, сейчас едино в том, что модель Вайнберга — Салама — Глэшоу и квантовая хромодинамика (КХД) в целом правильно описывают электрослабые и сильные взаимодействия, по крайней мере, при энергиях современных ускорителей. Обе эти теории являются калибровочными, и их экспериментальное подтверждение, в особенности открытие промежуточных векторных бозонов, явилось мощным аргументом в пользу того, что в основе теории взаимодействий элементарных частиц лежит фундаментальный физический принцип локальной калибровочной инвариантности. Теперь на повестке дня стоит задача создания теории, единым образом описывающей все известные взаимодействия. Эта теория в «низкоэнергетическом» пределе должна естественно включать в себя принцип локальной калибровочной инвариантности, объяснять киральность и число поколений фермионов, происхождение скалярных полей, а также позволить избавиться от большого числа свободных параметров, присущих нынешним теориям, сведя их к небольшому числу фундаментальных констант.

Одним из возможных путей решения этой задачи является построение калибровочных теорий великого объединения в четырехмерном пространстве-времени [1]. Дальнейшее развитие этого направления связано с построением суперсимметричных теорий [2] и теорий супергравитации [3].

Другой путь состоит в переходе к теориям поля в пространстве большего, чем 4, числа измерений. Идея такого подхода восходит к работам Калуцы [4] и Клейна [5]. Однако логика развития теории поля в последние годы фактически привела к слиянию первого и второго направлений, так как последовательная математическая формулировка наиболее современных схем объединения, а именно теорий $N \geqslant 4$ супергравитации [3, 6] и теорий суперструн [7], возможна лишь в пространствах с числом измерений большим четырех.

На наш взгляд, к дополнительным измерениям пространства-времени следует относиться как к физической реальности и, по возможности, выяснить, какие свойства частиц в нашем четырехмерном мире, доступные исследованию на современных или строящихся ускорителях, могли бы определяться многомерным характером пространства-времени. Это позволило бы экспериментально проверить гипотезу о дополнительных измерениях и получить ограничения на их структуру и размеры.

В настоящее время общепринята следующая схема теорий, основанных на гипотезе о дополнительных измерениях (см. работы [6, 8—11] и ссылки в них). В пространстве времени E с $\dim E = D \geqslant 4$ рассматривается либо одно гравитационное поле, либо гравитационное поле, взаимодействующее с некоторым набором других полей. Действие теории выбирается так, чтобы одним из решений классических уравнений движения было решение, метрика которого отвечает факторизации пространства E, т.е. $E = M \times I$, где $\dim M = 4$, и M интерпретируется как обычное четырехмерное пространство-время, а I — внутреннее пространство, или пространство дополнительных измерений, которые обычно считаются пространственными. Из требования макроскопической ненаблюдаемости дополнительных измерений следует, что многообразие I должно иметь малый размер L; обычно он получается порядка обратной массы Планка, $L \sim$

$\sim M_{\rm Pl}^{-1}$. Внутреннее пространство предполагается также компактным, так как в этом случае эффективная четырехмерная теория имеет счетный набор полей (подробнее см. ниже). Такое решение объявляется классическим вакуумом и считается, что рассматриваемая система в силу некоторого, пока не ясного, динамического принципа переходит в это состояние, т.е. дополнительные измерения спонтанно компактифицируются.

После того как вакуумное состояние многомерной теории найдено, встает задача интерпретации этой теории в терминах объектов, заданных в четырехмерном пространстве-времени. Исторически именно эта задача была рассмотрена в первую очередь, причем факторизованная структура многомерного пространства постулировалась, а не получалась динамически. Так, в первых работах Калуцы и Клейна [4, 5] была рассмотрена теория гравитации в пятимерном пространстве вида $E = M \times S^1$ и было показано, что при определенном выборе многомерной метрики такая теория эквивалентна теории гравитации, взаимодействующей с электромагнитным полем в четырехмерном пространстве, причем компоненты электромагнитного поля возникают из компонент многомерной метрики. Пятое измерение при этом не рассматривалось, по существу, как физическая реальность, и пятимерная теория считалась лишь компактной формой записи четырехмерной теории Эйнштейна — Максвелла. Впоследствии эта идея развивалась в работах [12, 13].

Обобщение подхода Калуцы — Клейна на неабелев случай было дано в [14—16]. В этом случае внутреннее пространство является неабелевой группой, а многомерная теория гравитации сводится в четырехмерном пространстве к теории, содержащей гравитационное, неабелево калибровочное и скалярные поля. Однако скалярные поля взаимодействуют с калибровочным полем неминимально и обладают существенно нелинейным самодействием, а при добавлении к исходной многомерной теории фермионного сектора нельзя получить нужную киральность и спектр масс в M. Кроме того, в рамках такого подхода не удается динамически получить в качестве четырехмерного пространства-времени M пространство Минковского M^4 (кроме тривиального случая компактификации дополнительных измерений в тор). Этих трудностей удается избежать в альтернативном подходе, предложенном в [17—19]. Авторы этих работ с самого начала рассматривали многомерную гравитацию, взаимодействующую с калибровочными полями и полями материи.

В рамках этого подхода удается получить классические решения, приводящие к спонтанной компактификации дополнительных измерений и дающие в качестве четырехмерного пространства-времени пространство Минковского. В качестве полей материи здесь достаточно взять только фермионные поля, так как скалярные поля в соответствующей четырехмерной теории можно получить из компонент калибровочного поля, касательных к внутреннему пространству (см. ниже).

Конечно, при этом частично теряется первоначальная идея введения дополнительных измерений — получение всех известных взаимодействий в четырехмерном пространстве из теории единого многомерного поля. Однако оправданием этому может служить то, что поля материи естественно возникают в многомерных вариантах супергравитации. Кроме того, существование нетривиальных вакуумных конфигураций калибровочных полей [20] (монополей, инстантонов) является необходимым условием возникновения в четырехмерной теории киральных фермионов [21, 22].

В зависимости от выбора компактифицирующих полей многомерной теории (и ее действия) получаются различные типы пространств дополнительных измерений [23]. Так, в модели гетероидной (гибридной) струны с группой $E_8 \times E_8$, претендующей на роль единой теории всех взаимодействий, популярный вариант спонтанной компактификации приводит к пространству I типа многообразия Калаби — Яу или орбифолда [24]. При этом предполагается, что компактификация десятимерного пространства осуществляется только полями бозонного сектора, и в пространстве M сохраняется $N = 1$ суперсимметрия. Если же в компактификации участвуют и нетривиальные конденсаты фермионных полей, то многообразие I может быть одним из следующих шестимерных однородных пространств: $SU(3)/U(1) \times U(1)$, $G_2/SU(3)$, $SO(5)/SU(2) \times U(1)$ [25]. Однородные пространства (а также некоторые пространства более сложной структуры) получаются и при компактификации $D = 11$ супергравитации с помощью механизма Фройнда — Рубина [26]. Важным моментом при компактификации в однородные пространства является наличие изометрий, что существенно упрощает задачу интерпретации многомерной теории в терминах четырехмерных полей.

Однородные пространства G/H (G — компактная группа Ли, H — ее замкнутая подгруппа), и особенно их частные случаи — симметрические [27] и изотропно неприводимые пространства [28] — хорошо изучены в математической литературе. Поэтому оказывается возможным развить эффективные методы исследования теорий в пространствах вида $E = M \times G/H$, построить в явном виде соответствующие четырехмерные теории и изучить их структуру и свойства. Так как основная цель нашего обзора — изложение общих методов и результатов в задачах размерной редукции и спонтанной компактификации, то в дальнейшем мы будем рассматривать лишь случаи $I = G/H$.

Среди различных методов построения решений, описывающих компактификацию в однородные пространства, помимо упоминавшихся выше отметим еще механизмы сопоставления калибровочным полям векторов Киллинга [17—19] и спиновой связности [29—32] (см. также [33—36] и обзор [11]).

Развиваются также нестандартные подходы, в которых внутреннее пространство или содержит времениподобные измерения [10, 30, 37], или является некомпактным пространством малого объема [38], или многомерное пространство E не представимо в виде прямого произведения [39].

В качестве вакуума многомерной теории естественно взять классические решения, обладающие максимальной симметрией относительно группы движений пространства $E = M \times I$. Если $M = M^4$ — пространство Минковского, а $I = G/H$, то такой группой будет прямое произведение (группа Пуанкаре) $\times$ G. Стандартный выбор вакуумных конфигураций в задаче спонтанной компактификации следующий: многомерная метрика $\hat{g}^{\text{vac}} = \eta \oplus \gamma$, где η — метрика Минковского, а γ — G-инвариантная метрика на G/H, четырехмерные компоненты калибровочного поля $\hat{A}_\mu^{\text{vac}}$ и спинорные поля $\hat{\psi}^{\text{vac}}$ равны нулю, а компоненты калибровочного поля $\hat{A}_m^{\text{vac}}$, отвечающие дополнительным измерениям, зависят лишь от координат пространства G/H [29—36]. Требование G-инвариантности $\hat{A}_m$ оказывается слишком ограничительным. Вместо этого требование G-инвариантности накладывается только на калибровочно-инвариантные величины, что приводит к требованию G-симметричности калибровочного поля. Понятие G-симметричного калибровочного поля [40] является одним из центральных в нашем обзоре и состоит в том, что такое поле инвариантно относительно действия G на E с точностью до калибровочного преобразования.

Если классический вакуум теории выбран, то следующим этапом является задача интерпретации этого вакуума и полевых конфигураций над ним с точки зрения четырехмерной теории. Решение этой задачи раскрывает физическое содержание многомерной теории и необходимо для нахождения ее низкоэнергетического предела. Мы поясним суть проблемы на примере калибровочных полей многомерной теории.

В пространстве калибровочных полей на $E = M \times G/H$ естественно задается представление группы G, индуцированное из ограничения присоединенного представления группы K на подгруппу $\tau(H)$, $(\mathrm{Ad}\, K) \downarrow \tau(H)$, где $\tau\colon H \to K$ обозначает гомоморфизм стационарной подгруппы H в калибровочную группу многомерной теории K. Действие группы G на поля включает в себя как пространственные преобразования, так и калибровочные преобразования специального вида, связанные с нетривиальным действием G в соответствующем главном K-расслоении [40]. Это представление можно разложить на неприводимые, и соответственно произвольное калибровочное поле в E можно представить в виде следующего гармонического разложения [41]:

$$\hat{A}_\mu(x, \xi) = \sum_{(p),\,\alpha} D^{(p),\,\alpha}(\xi)\, a_\mu^{(p),\,\alpha}(x);$$

$$\hat{A}_m(x, \xi) = \hat{A}_m^{\text{vac}}(\xi) + \sum_{(p),\,\alpha} D_m^{(p),\,\alpha}(\xi)\, \varphi^{(p),\,\alpha}(x),$$

где x^μ — координаты в M, ξ^m — в G/H, а $D^{(p),\alpha}(\xi)$, $D^{(p),\alpha}_m(\xi)$ — матричные элементы неприводимых представлений G, индуцированных из представлений α, которые возникают в разложении $(\mathrm{Ad}\, K)\downarrow\tau(H)$. Заметим, что в литературе часто рассматриваются разложения полей $\hat{A}_\mu(x,\xi)$ и $\hat{A}_m(x,\xi)$ для случая, когда действие группы G включает в себя лишь пространственные преобразования [8, 33].

После подстановки вышеприведенных формул в действие многомерной теории и интегрирования по внутреннему пространству мы придем к действию эффективной четырехмерной теории, при этом функции $a^{(p),\alpha}_\mu(x)$ и $\varphi^{(p),\alpha}(x)$ будут играть роль полей в четырехмерном пространстве M. В частности, G-симметричным калибровочным полям будут соответствовать коэффициенты $a^{(0),\alpha}_\mu(x)$, $\varphi^{(0),\alpha}(x)$ при функциях $D^{(0),\alpha}(\xi)$, $D^{(0),\alpha}_m(\xi)$, реализующих тривиальное представление G. Обычно $\hat{A}^{\mathrm{vac}}_m(\xi)$ выбирается так, что на нем тоже реализуется тривиальное представление G.

Детальный анализ спектра бесконечного набора полей в M^4 показывает, что нет прямого соответствия между симметричными и безмассовыми полями: некоторые симметричные поля могут иметь ненулевые массы, в то время как некоторые безмассовые поля могут быть несимметричными [41]. В настоящее время не существует конструктивного метода изучения эффективной четырехмерной теории с полным бесконечным набором полей. Поэтому возникает вопрос: каким сектором этой эффективной теории можно ограничиться?

Один из ответов на этот вопрос следующий (см., например, [6, 11]). Так как ненулевые массы четырехмерных полей пропорциональны $1/L$, где L — характерный размер внутреннего пространства I, и обычно получают $L \sim M_{\mathrm{Pl}}^{-1}$, то при энергиях современных ускорителей для наблюдения доступны лишь безмассовые поля (нулевые моды). Если многомерная теория претендует на описание реальной физики, то ее набор нулевых мод, их свойства и взаимодействия должны соответствовать известным низкоэнергетическим полям. При этом предполагается, что малые ($\ll M_{\mathrm{Pl}}$) ненулевые массы известных частиц должны возникать за счет каких-либо других механизмов, например динамически. Однако оказывается, что достичь согласованности редуцированной четырехмерной и исходной многомерной теорий (в смысле эквивалентности их уравнений движения) удается только либо сохранив весь бесконечный набор полей в гармоническом разложении, либо ограничившись лишь симметричными полями (эта проблема получила название проблемы усечения) [42]. Поэтому другой вариант ответа на поставленный выше вопрос состоит в том, чтобы изучить сектор четырехмерной теории, определяемый многомерными симметричными полями. Этот сектор содержит как безмассовые, так и массивные поля, и действие для этого сектора, вид взаимодействия полей и их свойства могут быть последовательно выведены из действия многомерной теории и геометрии многомерного пространства. Другими словами, низкоэнергетические (безмассовые) и высокоэнергетические (с массами $\sim L^{-1} \sim M_{\text{Pl}}$) поля являются проявлениями единого многомерного поля, и их свойства и взаимодействия согласованы друг с другом так, как это описывается сектором симметричных полей. Изучению этого сектора теории и посвящен настоящий обзор. Анализ безмассовых несимметричных полей требует специальных методов и нами рассматриваться не будет.

Интерпретация многомерной теории, рассматриваемой на симметричных конфигурациях, в пространстве меньшего числа измерений получила название размерной редукции (для случая, когда внутреннее пространство I является однородным пространством G/H, в зарубежной литературе часто используется термин «схема CSDR» — Coset Space Dimensional Reduction). Понятие размерной редукции для калибровочных полей возникло в результате попыток найти точные решения уравнений Янга — Миллса. С этой целью обычно конструировались сферически-симметричные подстановки (анзатцы), которые, задавая определяемую требованием симметрии зависимость от угловых переменных, тем самым уменьшали число пространственных переменных и упрощали нелинейные полевые уравнения. Описываемые такими подстановками поля являются симметричными полями. По-видимому, впервые в работе [43] на примере описываемых подстановками сферически-симметричных калибровочных полей было замечено, что действие на таких полях после интегрирования по угловым переменным сводится к действию двумерной модели Хиггса. Этот результат стимулировал разработку новых, более общих, чем составление подстановок, методов описания таких полей. Важным этапом на этом пути были работы [40, 44], в которых было дано общее определение симметричного калибровочного поля, замечена связь таких полей с инвариантными связностями, а также классифицированы статические сферически-симметричные поля в трехмерном пространстве.

Можно сказать, что размерная редукция калибровочных полей в современном понимании началась с работы [45]. В этой работе были рассмотрены $SO(3)$-симметричные калибровочные поля в шестимерном пространстве $E = M^4 \times S^2$ и было показано, что при определенном выборе калибровочных групп многомерной теории ее действие после интегрирования по сфере S^2 сводится к действию бозонного сектора модели Вайнберга — Салама, т.е. модели с калибровочной группой $SU(2) \times U(1)$, включающей дублет скалярных полей. В [46] методы работы [45] были обобщены на случай произвольных однородных пространств G/H, снабженных так называемой нормальной G-инвариантной метрикой, зависящей только от одного параметра [47]. В этой работе были четко выделены два аспекта метода размерной редукции — геометрический и теоретико-групповой. Геометрический аспект состоит в нахождении набора полей редуцированной теории, ее калибровочной группы (которая в общем случае является подгруппой калибровочной группы исходной многомерной теории) и действия, при этом скалярные поля в общем случае оказываются подчиненными связям, являющимся наследием условия симметричности теории в многомерном пространстве. Явное разрешение этих связей и представляет собой теоретико-групповой аспект метода размерной редукции.

Эти результаты были уточнены и распространены на случай произвольных G-инвариантных метрик на $E = M \times G/H$ в работах [48—52], в которых использовались глобальные геометрические методы, основанные на описании симметричных калибровочных полей как инвариантных связностей в главных расслоенных пространствах. Исследованию вопросов о связи между свойствами многомерной теории и геометрией многомерного пространства, с одной стороны, и такими характеристиками редуцированной теории, как тип потенциала скалярных полей и его экстремумы, тип представления скалярных полей и т.д., с другой, посвящены работы [53—55]. В них также был разработан общий метод явного вычисления скалярных потенциалов редуцированной теории. Таким образом, в настоящее время имеется последовательная теория размерной редукции симметричных калибровочных полей в псевдоримановых пространствах вида $E = M \times G/H$ с произвольной G-инвариантной метрикой.

Метод размерной редукции может быть распространен на многомерные теории, включающие гравитацию [56, 57] и фермионные поля [21, 58—64]. В случае фермионов основные усилия были сосредоточены на разработке механизмов, обеспечивающих нужную киральность в четырехмерном пространстве [21, 59, 65]. Были получены условия на структуру внутреннего пространства, при которых это возможно. Размерная редукция в суперсимметричных теориях, теориях супергравитации и суперструн рассматривалась в работах [60, 66].

Одновременно с развитием общей теории метода размерной редукции исследовалась возможность построения этим методом четырехмерных моделей, претендующих на описание известных в настоящее время свойств сильных и электрослабых взаимодействий. В качестве таких моделей обычно рассматривалась модель Вайнберга — Салама (в предположении, что $L \sim M_W^{-1}$) [45, 54, 58, 59] или один из вариантов теории великого объединения [21, 59, 67—74]. При этом в большинстве работ изучался лишь вопрос о типе представлений скалярных полей или о киральности, спектре масс и числе поколений фермионов в четырехмерной теории [59, 65, 67—69, 72—74]. Действие редуцированной теории в явном виде вычислялось в работах [21, 45, 54, 55, 58, 70, 71].

Оказалось также, что метод размерной редукции позволяет по новому взглянуть на спонтанную компактификацию. А именно если в качестве компактифицирующих полей используются калибровочные поля, то метод размерной редукции устанавливает соответствие между симметричными вакуумными конфигурациями многомерной теории и полями четырехмерной редуцированной теории [35, 75—78].

Это сильно упрощает задачу построения решений многомерных уравнений Эйнштейна — Янга — Миллса, позволяет дать им физическую интерпретацию и выяснить вопрос устойчивости вакуумных конфигураций в симметричном секторе.

Таким образом, метод размерной редукции многомерных теорий дает принципиальную возможность для объяснения происхождения скалярных полей в четырехмерном пространстве, связывает между собой параметры известных фундаментальных взаимодействий и позволяет надеяться на то, что на этом пути удастся построить реалистическую четырехмерную теорию всех взаимодействий с правильными квантовыми числами, правильным числом поколений фермионов и т.д. Однако на сегодняшний день удовлетворительная с физической точки зрения модель не построена. Более того, в рамках многомерного подхода возникает ряд новых проблем. Не имея в данном обзоре возможности остановиться на них подробно, мы ограничимся только перечислением некоторых из них.

1. Проблема малости четырехмерной космологической постоянной. Некоторые подходы к ее решению описаны в [6].

2. Проблема выбора вакуума многомерной теории. Суть ее в том, что в большинстве вариантов многомерных теорий существует множество (часто бесконечное) вакуумных состояний и не найден пока принцип, позволяющий выделить одно из них. Разумным критерием такого отбора являются критерии классической и квантовой стабильности вакуумов. Под классической стабильностью понимается отсутствие тахионов в спектре возбуждений [33, 34], а под квантовой — отсутствие переходов туннельного типа в силу, например, топологических законов сохранения. Как уже отмечалось выше, интерпретация вакуумных состояний с помощью метода размерной редукции может иметь важное значение при анализе проблемы выбора истинного вакуума.

3. Проблема ультрафиолетовых расходимостей в многомерных теориях и их проявлений в редуцированных четырехмерных теориях. Возможно, что последовательная реализация идей спонтанной компактификации и размерной редукции возможна лишь в конечных суперсимметричных теориях [79, 80] или в суперструнах с $SO\,(32)$ и $E_8 \times E_8$ калибровочными группами, для которых есть серьезные основания полагать, что они свободны от расходимостей [81]. Некоторые подходы к анализу проблемы учета квантовых поправок изложены в [6, 82—85].

4. Наконец, в рамках многомерного подхода возникает вопрос: какова же истинная размерность пространства-времени D? (см. по этому поводу [86]). Низкоэнергетическая физика указывает на то, что $D = 4$. Для непротиворечивой формулировки теории суперструн при энергиях порядка 10^{19} ГэВ требуется, чтобы $D = 10$. Не исключено, что само понятие размерности физического пространства-времени имеет смысл лишь при указании энергетического

масштаба, на котором изучаются явления, и параметр D является функцией этого масштаба. Может даже оказаться, что точная фиксация параметра D (например, значением $D = 4$) есть такая же идеализация реального мира, как, например, материальная точка.

В предлагаемом обзоре мы затронем все основные моменты теории размерной редукции и ее применений. Наше изложение будет построено следующим образом. В разд. 1, носящем преимущественно математический характер, мы приведем общее геометрическое описание размерной редукции калибровочных полей, основанное на теории редукции расслоенных пространств. Здесь же мы кратко остановимся на размерной редукции теории с фермионами и теории гравитации с кручением.

Раздел 2 посвящен теоретико-групповому аспекту метода размерной редукции: явному нахождению скалярных полей редуцированной теории, общему методу вычисления потенциала и исследованию его свойств.

В разд. 3 мы остановимся на связи размерной редукции симметричных калибровочных полей с теорией спонтанной компактификации. Будет изложен довольно общий метод построения компактифицирующих решений. Мы рассмотрим также основные проблемы, возникающие в задачах спонтанной компактификации.

Предметом разд. 4 будет построение из многомерных теорий методом размерной редукции четырехмерных моделей, которые могут представлять интерес с точки зрения феноменологии. При этом мы рассмотрим как чисто калибровочные многомерные теории, так и теории с фермионами, а также остановимся на вопросе о киральности фермионов в редуцированной теории.

Читатели, не интересующиеся математической стороной обсуждаемых вопросов, могут сразу обратиться к формулам (27), (43) разд. 1, в которых сформулированы окончательные результаты размерной редукции многомерных теорий, затем к формуле (66) разд. 2, в которой приведен общий вид потенциала скалярных полей редуцированной теории в случае симметрических внутренних пространств, а после этого перейти к разд. 3 и 4.

Отметим также, что в нашем обзоре мы не будем уделять специального внимания размерной редукции суперсимметричных теорий, а также теорий супергравитации и суперструн. Это связано с тем, что, во-первых, эти вопросы хорошо и подробно изложены в ряде обзоров [6, 9—11]. Во-вторых, наша основная цель — познакомить читателей с содержательными физическими идеями, лежащими в основе нетривиальной размерной редукции и спонтанной компактификации, и красивым математическим аппаратом, используемым для их описания. Объект, наиболее подходящий для этой цели, — чисто калибровочная многомерная теория.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ОБЗОРЕ:

$E = M \times G/H$	— многомерное пространство-время, $\dim E = D$;
M	— четырехмерное псевдориманово пространство-время;
M^4	— четырехмерное пространство Минковского;
G/H	— компактное однородное пространство, G — компактная группа Ли (в нашем обзоре G предполагается простой), H — ее замкнутая подгруппа, $\dim G/H = d = D - 4$;
$o = [e]$	— начало пространства G/H, т.е. класс H;
$\mathfrak{G} = \mathrm{Lie}\,(G)$, $\mathfrak{H} = \mathrm{Lie}\,(H)$	— алгебры Ли групп G и H;
$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{M}$	— редуктивное разложение алгебры Ли $\mathfrak{G}$; пространство $\mathfrak{M}$ отождествляется с T_oG/H, касательным пространством к G/H в начале o;
$\hat{x}^N = (x^\nu, \xi^n)$ $(N = 0, 1, \ldots, D-1)$	— координаты в E;
x^ν $(\nu = 0, 1, 2, 3)$	— координаты в M;
ξ^n $(n = 1, 2, \ldots, d)$	— координаты в G/H;
$\hat{g} = \eta \oplus \gamma$	— метрика на E сигнатуры $(-, +, \ldots, +)$; компоненты метрики $\hat{g}_{MN} = \begin{pmatrix} \eta_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \gamma_{mn} \end{pmatrix}$;
η	— метрика на M;
γ	— G-инвариантная метрика на G/H;
$\{e_A\}$ $(A = 0, 1, \ldots, D-1)$	— подвижный ортонормальный (неголономный) репер на E;
$\hat{A}$ (A)	— 1-форма калибровочного поля на E (M);
$\hat{F}$ (F)	— 2-форма напряженности (кривизны) поля $\hat{A}$ (A);
K	— калибровочная группа многомерной теории; будем считать K простой компактной группой Ли;
C	— калибровочная группа редуцированной четырехмерной теории;
R	— калибровочная группа ненарушенной симметрии после спонтанного нарушения в четырехмерной теории;
$\mathfrak{K}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{R}$	— обозначения для алгебр Ли, введенных выше групп; $\mathfrak{K} = \mathrm{Lie}\,(K)$, $\mathfrak{C} = \mathrm{Lie}\,(C)$, $\mathfrak{R} = \mathrm{Lie}\,(R)$;

$(\ ,)$ и $\langle\ ,\rangle$	— инвариантные скалярные произведения в $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{K}$ соответственно; эти скалярные произведения получаются ограничением на $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{K}$ форм Киллинга — Картана и поэтому отрицательно определены;
$\{v_\alpha\}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, \dim \mathfrak{G})$	— базис в $\mathfrak{G}$, ортонормированный в смысле скалярного произведения $(\ ,)$ в $\mathfrak{G}$, причем $\{v_\alpha\} = \{v_{\bar a}, v_a\}$ $(\bar a = 1, \ldots, \dim \mathfrak{H}$; $a = 1, \ldots, d = \dim \mathfrak{M} = \dim G/H)$, где $v_{\bar a} = \mathfrak{H}$, $v_a \in \mathfrak{M}$;
$\{u_a\}$	— базис в $\mathfrak{M}$, ортонормированный в смысле метрики γ на G/H;
$\mathrm{Ad}\, G$ $(\mathrm{ad}\, \mathfrak{G})$	— присоединенное представление группы G (алгебры Ли $\mathfrak{G}$);
$\mathrm{ad}\mathfrak{G} \downarrow \mathfrak{H}$	— ограничение присоединенного представления $\mathfrak{G}$ на подалгебру $\mathfrak{H}$;
$\mathrm{ad}\, (\mathfrak{H})\, \mathfrak{M}$	— ограничение присоединенного представления $\mathfrak{G}$ на подалгебру $\mathfrak{H}$, действующее на $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{G}$;
$\tilde\varkappa$, $\varkappa$	— многомерная и четырехмерная гравитационные постоянные;
$\tilde g$, g	— многомерная и четырехмерная калибровочные константы.

1. РАЗМЕРНАЯ РЕДУКЦИЯ СИММЕТРИЧНЫХ ПОЛЕЙ

Наиболее адекватным описанием калибровочных теорий является геометрическое описание в терминах расслоенных пространств и связностей [15, 16, 87]. На этом языке симметричным калибровочным полям отвечают инвариантные связности в главных расслоенных пространствах [40, 44]. Здесь мы принимаем это определение в качестве исходного пункта и используем формулировку калибровочных теорий на языке расслоенных пространств, как она изложена, например, в [15]. На этом языке размерная редукция сводится к классификации G-инвариантных связностей и к редукции действия для калибровочных полей вследствие G-инвариантности. Эта задача рассматривалась в работах [49—52, 57]. Здесь мы будем в основном следовать работам [50, 52, 57], в которых для классификации G-инвариантных связностей использовалась теория редукции расслоенных пространств [88, т. 1].

Читатель, интересующийся только физической стороной метода размерной редукции, может пропустить следующее ниже изложение его математического аппарата и сразу перейти к формуле (27) для редуцированного действия калибровочной теории или к формуле (43) для теории с фермионами.

Классификация симметричных калибровочных полей. Обратимся сначала к задаче классификации G-инвариантных связностей. Мы будем рассматривать калибровочную теорию на главном расслоенном пространстве $\hat{P}$ $(E, K; \Psi, \pi)$, где E есть псевдориманово многообразие с некоторой фиксированной метрикой сигнатуры $(-, +, +, \ldots, +)$, K — компактная группа Ли (калибровочная группа), Ψ обозначает правое действие K на $\hat{P}$, а π — каноническая проекция на $\hat{P}$. Калибровочное поле описывается формой связности $\hat{\omega}$ на $\hat{P}$, а поле материи описывается сечением ассоциированного с $\hat{P}$ расслоения с типическим слоем V, или, эквивалентно, эквивариантным отображением ρ: $\hat{P} \to V$ [15].

Пусть G будет произвольной компактной группой Ли, действующей на $\hat{P}$ слева как подгруппа группы автоморфизмов этого расслоения, причем индуцированное действие G на E нетривиально (проблема существования такого действия обсуждалась в работах [48, 89, 90]). Обозначая эти действия L и O, мы имеем: $L_{g_1 g_2} = L_{g_1} \circ L_{g_2}$, $L_g \circ \Psi_a = \Psi_a \circ L_g$, $\pi \circ L_g = O_g \circ \pi$.

Группа G является дополнительной пространственной симметрией теории, если метрика $\hat{g}$ и форма связности $\hat{\omega}$ G-инвариантны, т. е.

$$O_g^* \hat{g} = \hat{g}; \tag{1а}$$

$$L_g^* \hat{\omega} = \hat{\omega}, \quad \forall g \in G. \tag{1б}$$

Действие G на E порождает на этом многообразии орбитную структуру. Для наших целей достаточно рассмотреть случай, когда все орбиты относятся к одному типу G/H, т. е. E представляет собой расслоенное пространство над $M = E/G$ с типическим слоем G/H, ассоциированное с главным расслоением Q $(M, N(H)/H)$, где $N(H)$ есть нормализатор H в G [91, гл. 11]. В дальнейшем пространство M будет иметь смысл четырехмерного пространства-времени, и нашей целью будет описать G-инвариантную связность $\hat{\omega}$ в K-расслоении $\hat{P}$ над E в терминах объектов, заданных в некотором расслоенном пространстве над M. (Однако оказывается, что если расслоение Q $(M, N(H)/H)$ нетривиально, в число этих объектов должна входить и связность в этом расслоении, которая не определяется исходной связностью $\hat{\omega}$, а должна задаваться независимо [51].) При этом, чтобы наше рассмотрение было замкнутым, необходимо считать, что расслоение Q $(M, N(H)/H)$ тривиально, т. е. $E = M \times G/H$, а действие группы $O_G = \{O_g, g \in G\}$ на E сводится к каноническому действию G на G/H. Мы также ограничимся здесь специальным случаем G-инвариантной метрики $\hat{g} = \eta \oplus \gamma$, где γ есть G-инвариантная метрика на G/H (G-инвариантные метрики общего вида рассмотрены в [50, 52]). Подчеркнем еще раз, что метрика здесь не рассматривается динамически.

Обозначим $o = [e]$ начало, т. е. класс H в G/H, и определим подмногообразие $\tilde{M} \subset E$ как $\tilde{M} = M \times \{o\}$. Очевидно, что $\tilde{M}$ состоит из неподвижных точек подгруппы $O_H = \{O_h,\ h \in H\} \subset O_G$.

Пусть $\tilde{P} = \pi^{-1}(\tilde{M})$ обозначает порцию $\hat{P}$ над $\tilde{M}$. Ясно, что $\tilde{P}$ есть главное расслоенное пространство со структурной группой K и базой M. Нетрудно также понять, что G-инвариантная форма связности $\hat{\omega}$ на $\hat{P}$ полностью характеризуется своими значениями в точках $\tilde{P}$. Поэтому сначала мы опишем ограничение $\hat{\omega}$ на $\tilde{P}, \hat{\omega} \mid \tilde{P}$, в терминах геометрических объектов на $\tilde{P}$.

Вследствие того, что O_H действует на $\tilde{M}$ тривиально, группа $L_H = \{L_h,\ h \in H \subset G\}$ действует на $\tilde{P}$ как подгруппа группы вертикальных автоморфизмов. Поскольку H естественно действует на G справа, мы можем канонически построить расслоение $G \times {}_H\tilde{P}$ с типическим слоем $\tilde{P}$, ассоциированное с главным расслоением G $(G/H, H)$ [88]. Расслоение $G \times {}_H\tilde{P}$ диффеоморфно $\hat{P}$, т. е. существует диффеоморфизм

$$\chi\colon\ G \times {}_H\tilde{P} \to \hat{P}; \tag{2а}$$

$$\chi([(g,\ \tilde{p})]) = L_g\tilde{p}, \tag{2б}$$

причем определение (2б) не зависит от выбора представителей в классе $[(g,\ \tilde{p})] = [(gh^{-1},\ L_h\tilde{p})]$. Очевидно, диффеоморфизм χ переводит каноническое левое действие G на $G \times {}_H\tilde{P}$ в действие L_G на $\hat{P}$, а действие структурной группы K на $\tilde{P}$ в действие этой группы на $\hat{P}$.

Представление $\hat{P}$ в виде (2а) позволяет построить отображения [88]

$$i_{\tilde{p}} : G \to \hat{P},\ \ i_{\tilde{p}}(g) = L_g(\tilde{p}); \tag{3а}$$

$$i_e : \tilde{P} \to \hat{P}. \tag{3б}$$

Последнее отображение просто совпадает с определением $\tilde{P}$ как подмногообразия в $\hat{P}$. Из определения $i_{\tilde{p}}$ легко следует, что

$$i_{\Psi_a(\tilde{p})} = \Psi_a \circ i_{\tilde{p}},\ \ a \in K. \tag{4}$$

Очевидно, что обратный образ формы связности $\hat{\omega}$ относительно отображения i_e, $\tilde{\omega} = i_e^*\hat{\omega}$, есть форма связности на $\tilde{P}$, удовлетворяющая условию

$$L_h^* \tilde{\omega} = \tilde{\omega}, \quad \forall h \in H, \tag{5}$$

являющемуся наследием условия (1б).

Далее, для любого $p \in \tilde{P}$ обратный образ

$$i_{\tilde{p}}^* \hat{\omega} = \lambda_{\tilde{p}} \tag{6}$$

есть 1-форма на G со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{K}$ группы K. Вследствие G-инвариантности формы $\hat{\omega}$ $\lambda_{\tilde{p}}$ тоже G-инвариантна и поэтому может быть представлена в виде

$$\lambda_{\tilde{p}} = \Lambda_{\tilde{p}}(\theta), \tag{7а}$$

где θ есть каноническая левоинвариантная форма на группе G [88], а $\Lambda_{\tilde{p}}$ — линейное отображение из алгебры Ли $\mathfrak{G}$ группы G в $\mathfrak{K}$

$$\Lambda_{\tilde{p}} : \mathfrak{G} \to \mathfrak{K}. \tag{7б}$$

Из (4) легко следует, что

$$\Lambda_{\Psi_a(\tilde{p})} = \mathrm{Ad}\,(a^{-1}) \circ \Lambda_{\tilde{p}}. \tag{8}$$

Поскольку L_H действует на $\tilde{P}$ как подгруппа группы вертикальных автоморфизмов, для любого $\tilde{p} \in \tilde{P}$ существует отображение $\tau_{\tilde{p}}$: $H \to K$, задаваемое формулой

$$L_h \tilde{p} = \Psi_{\tau_{\tilde{p}}(h)} \tilde{p} \tag{9}$$

и обладающее следующими свойствами:

$$\tau_{\tilde{p}}(h_1 h_2) = \tau_{\tilde{p}}(h_1)\, \tau_{\tilde{p}}(h_2); \tag{10а}$$

$$\tau_{\Psi_a(\tilde{p})}(h) = \mathrm{Ad}\,(a^{-1})\, \tau_{\tilde{p}}(h). \tag{10б}$$

Формула (10а) означает, что для любого $\tilde{p} \in \tilde{P}$ $\tau_{\tilde{p}}$ есть гомоморфизм группы Ли.

Обозначим R_h правое действие H на G: $R_h g = gh$. Тогда из (2), (9), (10) получаем

$$i_{\tilde{p}} \circ R_h = i_{\Psi_{\tau_{\tilde{p}}(h)}(\tilde{p})}. \tag{11}$$

Применяя $(i_{\tilde{p}} \circ R_h)^*$ к форме $\hat{\omega}$, учитывая (8) и то, что $R_h^* \theta = \mathrm{Ad}\,(h^{-1})\,\theta$ [88], находим

$$\Lambda_{\tilde{p}} \circ \mathrm{Ad}\, h = \mathrm{Ad}\, \tau_{\tilde{p}}(h) \circ \Lambda_{\tilde{p}}. \tag{12}$$

Вследствие компактности G однородное пространство G/H редуктивно, т. е. существует разложение алгебры Ли $\mathfrak{G}$ в сумму алгебры Ли $\mathfrak{H}$ группы H и некоторого подпространства $\mathfrak{M}$, обладающее свойством

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{M}, \quad [\mathfrak{H}, \mathfrak{M}] \subset \mathfrak{M}. \tag{13}$$

Из (3а), (6) и (9) следует, что ограничение $\Lambda_{\tilde{p}}$ на $\mathfrak{H}$ совпадает с дифференциалом отображения $\tau_{\tilde{p}}$ (который мы будем обозначать той же буквой), а $\Lambda_{\tilde{p}} \mid \mathfrak{M} = \varphi_{\tilde{p}}$ вследствие (12) обладает свойством эквивариантности:

$$\Lambda_{\tilde{p}} \mid \mathfrak{H} = \tau_{\tilde{p}} : \mathfrak{H} \to \mathfrak{K}; \tag{14а}$$

$$\varphi_{\tilde{p}} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{K}; \tag{14б}$$

$$\varphi_{\tilde{p}} \circ \mathrm{Ad}\, h = \mathrm{Ad}\, \tau_{\tilde{p}}(h) \circ \varphi_{\tilde{p}}. \tag{14в}$$

Из (8) также следует, что $\varphi_{\tilde{p}}$ обладает свойством эквивариантности и относительно действия структурной группы:

$$\varphi_{\Psi_a(\tilde{p})} = \mathrm{Ad}\,(a^{-1})\, \varphi_{\tilde{p}}. \tag{14г}$$

Здесь нужно отметить, что введенная ранее форма $\tilde{\omega}$ характеризует форму $\hat{\omega}$ на пространстве орбит группы G в $\hat{P}$, а отображение $\Lambda_{\tilde{p}}$ характеризует $\hat{\omega}$ на G-орбите через $\tilde{p}$. Фактически это то же самое линейное отображение (с опорной точкой $\tilde{p}$), которое используется для описания G-инвариантных связностей в расслоениях над редуктивными однородными пространствами в теореме Вана [88].

По форме $\tilde{\omega}$ и отображению $\Lambda_{\tilde{p}}$ можно реконструировать форму $\hat{\omega}$. Действительно, касательные векторы $Y \in T_g G$ и $Z \in T_{\tilde{p}} \tilde{P}$ определяют касательный вектор к $G \times_H \tilde{P}$ в точке $[(g, \tilde{p})]$ как класс $[(Y, Z)]$. Соответствующий касательный вектор $X \in T_{(\chi[(g,\tilde{p})])} \hat{P}$, $X = \chi'[(Y, Z)]$, не зависит от выбора представителя (Y, Z) и имеет вид $X = i'_{\tilde{p}} Y + L'_g Z$, где $i'_{\tilde{p}}$, L'_g обозначают дифференциалы отображений $i_{\tilde{p}}$, L_g (3). Поэтому

$$\hat{\omega}_{\chi([(g,\tilde{p})])}(X) = \hat{\omega}_{L_g \tilde{p}}(i'_{\tilde{p}} Y) + \hat{\omega}_{L_g \tilde{p}}(L'_g Z) = \tilde{\omega}_{\tilde{p}}(Z) + \Lambda_{\tilde{p}}(\theta_g(Y)), \tag{15}$$

причем аналогичное разложение имеет место для любого вектора из $T_{\chi([(g,\tilde{p})])} \hat{P}$. Благодаря свойствам $\tilde{\omega}$ (5), $\Lambda_{\tilde{p}}$ (14) и θ [88] определение $\hat{\omega}$ не зависит от выбора представителя в классе $[(g, \tilde{p})]$.

Таким образом, G-инвариантная форма связности $\hat{\omega}$ на $\hat{P}$ полностью характеризуется парой $(\tilde{\omega}, \varphi_{\tilde{p}})$ на $\tilde{P}$ [$\tau_{\tilde{p}}$ в (9), (10) определяется действием L_G на $\hat{P}$].

Оказывается, что вследствие оставшейся L_H-симметрии (5) расслоение $\tilde{P}$ может быть редуцировано дальше. А именно, выберем некоторую точку $\tilde{p}_0 \in \tilde{P}$ и положим $\tau(h) = \tau_{\tilde{p}_0}(h)$. Рассмотрим подмногообразие в $\tilde{P}$, определенное как

$$P = \{\tilde{p} \in \tilde{P},\ \tau_{\tilde{p}}(h) = \tau(h),\ \forall h \in H\}. \tag{16}$$

Из (10б) следует, что P есть подрасслоение в $\tilde{P}$ со структурной группой

$$C = \{c \in K, \quad c\tau(h)\,c^{-1} = \tau(h), \quad \forall\ h \in H\} \tag{17}$$

[централизатор $\tau(H)$ в K], $P = P(M, C)$. Расслоение $\tilde{P}$ аналогично (2) можно представить в виде

$$\tilde{P} = K \times {}_C P; \tag{18а}$$

$$[(k,\ p)] = \Psi_{k^{-1}}(p), \tag{18б}$$

т.е. $\tilde{P}$ получается из P стандартной операцией расширения структурной группы [92]. Сужение $\tilde{\omega}$ на P обозначим ω, $\tilde{\omega} \mid TP = \omega$. Поскольку действие L_h в точках P вследствие (9) сводится к действию $\Psi_{\tau(h)}$, условие инвариантности (5) переписывается для ω так:

$$\omega = L_h^* \tilde{\omega} \mid TP = \Psi_{\tau(h)}^* \tilde{\omega} \mid TP = \mathrm{Ad}\,\tau(h^{-1})\,\tilde{\omega} \mid TP = \mathrm{Ad}\,\tau(h^{-1})\,\omega. \tag{19}$$

Это означает, что ω принимает значения в алгебре Ли $\mathfrak{C}$ группы C, т.е. ω является формой связности на P, и связность в K-расслоении $\tilde{P}$ редуцируема к связности в C-расслоении P; форма $\tilde{\omega}$ стандартным образом восстанавливается по форме ω [88]. Отображение $\varphi_{\tilde{p}}$ в точках $p \in P$ удовлетворяет условию

$$\varphi_p \circ \mathrm{Ad}\,h = \mathrm{Ad}\,\tau(h) \circ \varphi_p. \tag{20}$$

По отображению φ_p отображение $\varphi_{\tilde{p}}$ восстанавливается с помощью соотношений (14в) и (18).

Итак, мы пришли к результату, что G-инвариантная форма связности на $\hat{P}(E, K)$ находится во взаимно однозначном соответствии с парой (ω, φ_p) на расслоении $P(M, C)$, где ω — форма связности на P, а φ_p — линейное отображение, удовлетворяющее (14г) и (20). Последнее означает, что φ можно рассматривать также как эквивариантное отображение из P в подпространство $V_0 \subset \mathfrak{K} \otimes \mathfrak{M}^*$, на котором $\mathrm{Ad}\,H$ действует тривиально, т.е. как скалярное поле на M со значениями в V_0.

Установленное соответствие дает решение задачи классификации G-инвариантных связностей или G-симметричных калибровочных полей. Физически оно означает, что чисто калибровочная теория в многомерном пространстве $E = M \times G/H$ с калибровочной группой K, обладающая дополнительной группой пространственной симметрии G, сводится к калибровочной теории с калибровочной группой C в пространстве M, которая включает в себя дополнительно скалярные поля, описываемые отображением φ. Чтобы полностью характеризовать эту редуцированную теорию, необходимо получить ее действие из действия исходной многомерной теории. Это и будет предметом нашего дальнейшего рассмотрения.

Редукция действия. Возьмем для многомерной теории в $\hat{P}(E, K)$ стандартное действие

$$S = \frac{1}{8\tilde{g}^2} \int\limits_E \langle \hat{F}_{MN}, \hat{F}^{MN} \rangle \, dv_E, \tag{21}$$

где $\tilde{g}$ есть константа связи; $\hat{F}_{MN}$ — компоненты обратного образа $\hat{F} = \sigma^* \hat{\Omega}$ формы кривизны $\hat{\Omega} = d\hat{\omega} + \frac{1}{2}[\hat{\omega}, \hat{\omega}]$ относительно некоторого (локального) сечения σ: $E \to \hat{P}$; $\langle , \rangle$ — K-инвариантное скалярное произведение в $\mathfrak{K}$, а dv_E — элемент объема пространства E, построенный по G-инвариантной метрике $\hat{g} = \eta \oplus \gamma$.

Рассмотрим это действие на G-инвариантных связностях $\hat{\omega}$. Для таких связностей можно получить специальное представление 2-формы кривизны $\hat{F}$, позволяющее легко редуцировать исходное действие (21).

Заметим, что благодаря представлению (2) локальное сечение σ: $E \to \hat{P}$ можно задать с помощью локальных сечений σ_1: $G/H \to G$ и σ_2: $M \to \tilde{P}$ по формуле

$$\sigma(x, \xi) = \chi([(\sigma_1(\xi), \sigma_2(x))]). \tag{22}$$

Учитывая (15), получаем отсюда общее выражение для G-инвариантной формы $\hat{\omega}$ на базе E:

$$\hat{A}_{(x, \xi)} = (\sigma^* \hat{\omega})_{(x, \xi)} = (\sigma_2^* \tilde{\omega})_x + \Lambda_{\sigma_2(x)}((\sigma_1^* \theta)_\xi). \tag{23}$$

Очевидно, вследствие (18) сечение σ_2 можно выбрать так, что $\sigma_2(x) \in P$. Для дальнейшего нам удобно также выбрать σ_1 удовлетворяющим условиям $\sigma_1(o) = e$, $\sigma_1'(T_oG/H) = \mathfrak{M}$, которые устанавливают изоморфизм касательного пространства $T_o\, G/H$ с подпространством $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{G}$. При этом дифференциал канонической проекции π_G в расслоении $G(G/H, H)$, взятый в точке $e \in G$, π_G': $\mathfrak{M} \to T_oG/H$, порождает на $\mathfrak{M}$ Ad H-инвариантное скалярное произведение, отвечающее метрике γ в точке o. Обозначая $\sigma_1^*\theta = \bar{\theta}$, $\varphi_{\sigma_2(x)} = \varphi_x$ и $\sigma_2^* \tilde{\omega} = A$, $A \in \mathfrak{C}$, получаем выражение для G-симметричного калибровочного поля на $E = M \times G/H$ в стандартной калибровке:

$$\hat{A} = A + \tau(\bar{\theta}_{\mathfrak{H}}) + \varphi(\bar{\theta}_{\mathfrak{M}}), \tag{24}$$

где φ_x вследствие (20) удовлетворяет условию

$$\varphi_x \circ \mathrm{Ad}\, h = \mathrm{Ad}\, \tau\,(h) \circ \varphi_x. \tag{25}$$

Нетрудно проверить, что преобразование O_g^* для этого поля эквивалентно калибровочному преобразованию с функцией $\tau\,((\sigma_1\,(g\xi))^{-1} \times g\sigma_1\,(\xi))$, что совпадает с определением G-симметричного калибровочного поля в [40, 44]. Соответствующая полю $\hat{A}$ 2-форма напряженности имеет вид

$$\hat{F} = F + D\varphi_x\,(\bar{\theta}_{\mathfrak{M}}) + \frac{1}{2}\,[\varphi_x\,(\bar{\theta}_{\mathfrak{M}}),\ \varphi_x\,(\bar{\theta}_{\mathfrak{M}})] - \\ - \frac{1}{2}\,\varphi_x\,([\bar{\theta}_{\mathfrak{M}},\ \bar{\theta}_{\mathfrak{M}}]_{\mathfrak{M}}) - \frac{1}{2}\,\tau\,([\bar{\theta}_{\mathfrak{M}},\ \bar{\theta}_{\mathfrak{M}}]_{\mathfrak{H}}), \tag{26}$$

где $F = dA + \frac{1}{2}\,[A,\ A]$, а ковариантная производная определена как $D\varphi_x\,(\theta_{\mathfrak{M}}) = (d\varphi_x)\,(\bar{\theta}_{\mathfrak{M}}) + [A,\ \varphi_x\,(\bar{\theta}_{\mathfrak{M}})]$.

Очевидно, что на полях (24) лангражиан (21) не зависит от точек G/H. Поэтому в (21) можно проинтегрировать по этому пространству, а подынтегральное выражение взять в точках $\tilde{M}$. Выражения для компонент 2-формы F на базисных векторах $\{e_M\} = \{e_\mu,\ e_m\}$ пространства $T_{(x,o)}\,E$ легко находятся с помощью представления (26). В частности, отождествление T_oG/H с $\mathfrak{M}$ и введение в $\mathfrak{M}$ ортонормированного в смысле метрики γ_o базиса $\{u_a\}$ $(a = 1,\ 2,\ \ldots,\ d = \dim G/H)$ позволяет перейти к скалярным полям $\varphi_a\,(x) \equiv \varphi_x\,(u_a)$, на компоненты которых наложены связи (25). В результате (21) принимает вид

$$S = \frac{1}{8g^2} \int \left\{\langle F_{\mu\nu},\ F^{\mu\nu}\rangle + 2 \sum_a \langle D_\mu\varphi_a\,(x),\ D^\mu\varphi_a(x)\rangle - V(\varphi)\right\} dv_M, \tag{27}$$

где $\tilde{g}^2/g^2$ равно объему пространства G/H, вычисленному по метрике γ; dv_M — элемент объема пространства M, построенный по η, $D_\mu\varphi_a\,(x) = \partial_\mu\varphi_a\,(x) + [A_\mu\,(x),\ \varphi_a\,(x)]$, а потенциал $V\,(\varphi)$ неотрицателен и определяется соотношениями

$$V\,(\varphi) = - \sum_{a,b} \langle F_{ab},\ F_{ab}\rangle \geqslant 0; \tag{28а}$$

$$F_{ab} = [\varphi_a\,(x),\ \varphi_b\,(x)] - \varphi_x\,([u_a,\ u_b]_{\mathfrak{M}}) - \tau\,([u_a,\ u_b]_{\mathfrak{H}}). \tag{28б}$$

Мы видим, что редуцированная теория представляет собой калибровочную теорию с калибровочной группой C [см. (17)], включающую в себя скалярные поля, минимально взаимодействующие с калибровочным полем и обладающие самодействием не выше четвертой степени, т.е. в случае $\dim M = 4$ редуцированная теория является перенормируемой. При калибровочных преобразованиях с функцией $c\,(x) \in C$ поле $A_\mu\,(x)$ преобразуется стандартно, а преобразование скалярных полей определяется преобразованием отображения φ_x:

$$\varphi_x \to \varphi'_x = \mathrm{Ad}\,(c\,(x))\,\varphi_x, \tag{29}$$

которое совместно с условием (25).

Остановимся кратко на простейшей размерной редукции калибровочных теорий, которая довольно часто используется для построения четырехмерных моделей [93]. Этой редукции отвечает тривиальный случай $H = \{e\}$, а внутреннее пространство есть групповое многообразие. Из (17) следует, что в этом случае многомерная и четырехмерная калибровочные группы совпадают ($C = K$). G-симметричное калибровочное поле $\hat{A}$ описывается парой (A, φ_a), где A — четырехмерное калибровочное поле, а $\{\varphi_a\}$ — набор скалярных полей в присоединенном представлении $\mathfrak{K}$. Подобно (24), $\hat{A}$ и (A, φ_a) связаны формулой

$$\hat{A}_{(x,\,\xi)} = A_x + \varphi_x\,(\theta_\xi),$$

где φ_x есть произвольное отображение φ_x: $\mathfrak{G} \to \mathfrak{K}$. Заметим, что в общем случае отвечающие внутреннему пространству компоненты $\hat{A}_m$ многомерного G-симметричного поля в локальных координатах (x^μ, ξ^m) зависят и от ξ. Если же группа G — абелева, то существует (и только в этом случае) локальная система координат в G $\{\xi^m\}$ (угловые переменные на торе), для которой $(\theta_\xi)^m = d\xi^m$. В этих координатах $\hat{A}_m$ не зависят от ξ, и их можно отождествить со скалярными полями φ_m. Поэтому в угловых координатах $\{\xi^m\}$ на G размерная редукция поля $\hat{A}_M$ осуществляется наложением на компоненты требования независимости от ξ: $\hat{A}_M = \hat{A}_M\,(x)$. При этом $A_\mu\,(x) = \hat{A}_\mu\,(x)$ играет роль калибровочного поля редуцированной теории, а $\hat{A}_m\,(x)$ образуют набор скалярных полей. Это так называемый случай компактификации дополнительных измерений в d-мерный тор $G/H = U\,(1) \times \ldots \times U\,(1)$ [93].

Размерная редукция полей материи. Как мы установили в начале этого раздела, в результате размерной редукции многомерных калибровочных полей в четырехмерном пространстве-времени возникают калибровочные и скалярные поля. Однако реалистические модели в пространстве Минковского обязательно включают в себя фермионные поля, а также, возможно, содержат и другие поля материи, которые не могут быть получены размерной редукцией калибровочных полей. Для построения методом размерной редукции моделей с такими полями соответствующие поля материи нужно ввести в исходную многомерную теорию. Таким образом, возникает задача размерной редукции полей материи.

В геометрическом подходе к калибровочным теориям поля материи описываются сечением некоторого ассоциированного расслоения или, эквивалентно, эквивариантным отображением из главного расслоения в типический слой, которым является пространство представления калибровочной группы, по которому преобразуется рассматриваемое поле [15]. Мы уже использовали этот факт при нахождении скалярных полей редуцированной теории. Для спин-тензорных полей это описание нужно модифицировать следующим образом.

Обозначим $L(E)$ расслоение линейных реперов многообразия E; это главное расслоенное пространство со структурной группой $GL(D)$. Псевдориманова метрика $\hat{g}$ на E влечет редукцию $L(E)$ до расслоения ортонормальных реперов $O(E)$ со структурной группой $O(1, D-1)$ [88]. Для главных расслоений $O(E)$ и $\hat{P}(E, K)$ можно канонически построить их сумму $Q = O + \hat{P}$, которая определяется так [88]:

$$\hat{Q}(E) = \{(a, \hat{p}) \in O \times \hat{P}, \ \pi_O(a) = \pi_{\hat{P}}(\hat{p})\}. \tag{30}$$

Здесь π_O и $\pi_{\tilde{P}}$ обозначают канонические проекции в O и $\hat{P}$.

Очевидно, $\hat{Q}(E)$ является главным расслоенным пространством со структурной группой $\hat{S} = O(1, D-1) \times K$; каноническую проекцию и действие структурной группы в $\hat{Q}$ будем обозначать π, Ψ_s, $s \in \hat{S}$.

Поле материи произвольного спин-тензорного типа определяется как эквивариантное отображение

$$\rho : \hat{Q} \to R_\delta; \tag{31а}$$

$$\rho \circ \Psi_s = \delta(s^{-1}) \circ \rho, \quad s \in \hat{S}, \tag{31б}$$

где $R_\delta = R_\Delta \otimes R_\alpha$ есть пространство представления $\delta = (\Delta, \alpha)$ группы $\hat{S} = O(1, D-1) \times K$. (Вообще говоря, рассмотрение спинорных представлений Δ требует введения на E спиновой структуры, т.е. главного расслоения над E со структурной группой $\mathrm{Spin}(1, D-1)$, являющейся универсальной накрывающей для $SO(1, D-1)$ [63, 94]. Мы не делаем этого, чтобы не усложнять изложения. На результаты это не влияет.)

Действие группы G на $\hat{P}$ порождает действие G на E, которое вследствие G-инвариантности метрики $\hat{g}$ естественно поднимается до действия G на $O(E)$ [88]. Представление (30) позволяет продолжить действие G и на $\hat{Q}$; мы будем обозначать это действие L_a, $a \in G$. Эквивариантное отображение ρ называется G-инвариантным, если аналогично (1)

$$L_a^* \rho = \rho. \tag{32}$$

Если задано (локальное) сечение σ: $E \to \hat{Q}$, то соответствующее поле материи на базе $\sigma^*\rho$ будет G-симметричным.

Аналогично случаю калибровочного поля определим расслоение $\widetilde{Q} = \pi^{-1}(\widetilde{M})$, по которому можно восстановить расслоение $\hat{Q}$ [см. (2)]. Ясно, что G-инвариантное отображение ρ полностью определяется своим ограничением на $\widetilde{Q}$, которое H-инвариантно, т.е. $L_h^*\rho = \rho$.

Расслоение $\widetilde{Q}$ еще слишком велико для описания ρ. Заметим, что аналогично (30)

$$\widetilde{Q} = \widetilde{O}(M) + \widetilde{P}(M, K), \tag{33}$$

где $\widetilde{O}(M) = \pi_O^{-1}(\widetilde{M})$ есть порция $O(E)$ над $\widetilde{M}$. Метрика $\hat{g} = \eta \oplus \gamma$ и действие группы G на E порождают цепочку редукций

$$\widetilde{O}(M) \to \widetilde{O}'(M) \to O(M). \tag{34}$$

$\widetilde{O}'(M)$ есть расслоение адаптированных ортонормальных реперов со структурной группой $O(1, 3) \times O(d)$ [63, 88], а $O(M)$ — расслоение ортонормальных реперов многообразия M. Вторая редукция означает просто выбор ортонормированного базиса в касательном пространстве T_oG/H в точке $o = [e] \in G/H$.

Первая редукция в (34) влечет редукцию $\widetilde{Q}$ до расслоения $\widetilde{Q}' \subset \widetilde{Q}$ со структурной группой $O(1, 3) \times O(d) \times K$. Вследствие инвариантности метрики $\hat{g}$ расслоение $\widetilde{Q}'$ инвариантно относительно действия группы L_H, которая действует на нем как подгруппа группы вертикальных автоморфизмов. Поэтому, по аналогии с (9), можно определить гомоморфизм $\beta_{\tilde{q}}\colon H \to O(d) \times K$, $\beta_{\tilde{q}} = (\lambda_{\tilde{q}}, \tau_{\tilde{q}})$, где гомоморфизм $\lambda_{\tilde{q}}\colon H \to O(d)$ порождается действием H на касательном пространстве T_oG/H, и построить подрасслоение

$$Q' = \{\tilde{q} \in \widetilde{Q}', \quad \beta_{\tilde{q}}(h) = \beta(h)\ \forall h \in H\} \tag{35}$$

со структурной группой $S' = O(1, 3) \times C_{O(d)}(\lambda(H)) \times C$ [ср. с (1б)]. Наконец, вторая редукция в (34) позволяет редуцировать Q' до подрасслоения $Q \subset Q'$ со структурной группой $S = O(1, 3) \times C$, которое есть не что иное, как $Q = O(M) + P(M, C)$.

Благодаря свойству эквивариантности (31б) отображение $\rho \mid \widetilde{Q}$ полностью характеризуется своими значениями на $Q \subset \widetilde{Q}$. В этом подрасслоении действие L_h сводится к действию структурной группы $\Psi_{\beta(h)}$, поэтому условие G-инвариантности в нем принимает вид [ср. с (18)]:

$$L_h^*\rho = \Psi_{\beta(h)}^*\rho = \delta(\beta(h^{-1}))\rho = \rho. \tag{36}$$

Это означает, что $\rho \mid Q$ принимает значения в пространстве тривиального представления $\beta(H)$ в R_δ, которое мы обозначим $R_0 \subset R_\delta$. Поскольку $\beta(H)$ коммутирует с S, это пространство инвариантно относительно действия структурной группы $S = O(1,3) \times C$ расслоения Q.

Итак, мы получили, что симметричное поле материи на E, т.е. эквивариантное отображение $\rho\colon \hat{Q} \to R_\delta$ со свойствами (32), находится во взаимно однозначном соответствии с эквивариантным отображением $\rho\colon Q \to R_0$, которое описывает, в общем случае, некоторый набор полей материи на M. А именно каждому неприводимому представлению группы $S = O(1, 3) \times C$ в R_0 соответствует свое поле.

Чтобы полностью описать редуцированные поля материи, нужно получить для них четырехмерное действие. Мы сделаем это на примере фермионных полей, т. е. будем считать Δ спинорным представлением группы $O(1, D-1)$.

Рассмотрим алгебру матриц Дирака пространства E (A, $B = 0, 1, \ldots, D-1$):

$$\{\Gamma^A, \Gamma^B\} = 2\eta^{AB}, \quad \eta^{AB} = \mathrm{diag}(-1, 1, \ldots, 1). \tag{37}$$

Эти матрицы удобно реализовать как тензорные произведения матриц Дирака γ пространства M и матриц Дирака $\tilde{\gamma}$ евклидова пространства G/H размерности $d = D - 4$. Тогда [21]

$$\Gamma^A = \gamma^A \otimes 1, \quad 0 \leqslant A \leqslant 3; \tag{38а}$$

$$\Gamma^A = \gamma^5 \otimes \tilde{\gamma}^{A-3}, \quad 4 \leqslant A \leqslant D-1. \tag{38б}$$

Если D четно, то спинорное представление группы $SO(1, D-1)$, реализованное этими матрицами, приводимо и можно ввести оператор киральности Γ^{D+1}, определяемый по аналогии с γ^5 как

$$\Gamma^{D+1} = (-\mathrm{i})^{\frac{D-2}{2}} \Gamma^0\Gamma^1 \ldots \Gamma^{D-1}. \tag{39}$$

В представлении тензорного произведения

$$\Gamma^{D+1} = \gamma^5 \otimes \tilde{\gamma}^{d+1}, \tag{40}$$

где

$$\tilde{\gamma}^{d+1} = (-\mathrm{i})^{\frac{d}{2}} \tilde{\gamma}^1 \ldots \tilde{\gamma}^d \tag{41}$$

есть оператор киральности в G/H. Таким образом, для вейлевских спиноров в E собственные значения γ^5 и $\tilde{\gamma}^{d+1}$ коррелированы, что важно для получения лево-правой асимметрии в M.

Выбор подвижного адаптированного ортонормального репера $\{e_A\}$ определяет, в частности, (локальное) сечение расслоения $\tilde{O}(M)$. Вместе с сечениями $\sigma_1\colon G/H \to G$ и $\sigma_2\colon M \to \tilde{P}$ из (21) оно задает сечение расслоения $\tilde{Q}(E)$. Взяв обратный образ относительно этого сечения соответствующего эквивариантного отображения, мы получим

G-симметричное спинорное поле $\hat{\psi}(x, \xi)$ на E. Действие для этого поля имеет вид [21]

$$S_D = \int\limits_E \left[-\frac{i}{2} \bar{\hat{\psi}} \Gamma^A e_A^M (\partial_M \hat{\psi} - \omega_M \hat{\psi} - \alpha(\hat{A}_M) \hat{\psi}) + \text{э.с.} \right] dv_E, \qquad (42)$$

где $\bar{\hat{\psi}} = \hat{\psi}^+ \Gamma^0$; ω_M — спиновая связность, определяемая с помощью символа Кристоффеля $\Gamma_{MAB} = \hat{g}(\nabla_{e_A} e_B, \partial_M)$ и $\Sigma^{AB} = \frac{1}{4}[\Gamma^A, \Gamma^B]$ соотношением $\omega_M = \frac{1}{2}\Gamma_{MAB}\Sigma^{AB}$, а $\alpha(\mathfrak{K})$ обозначает представление алгебры Ли $\mathfrak{K}$, отвечающее представлению α калибровочной группы K. Так же как и в случае калибровочного поля, лагранжиан не зависит от точки внутреннего пространства G/H, поэтому в (42) можно проинтегрировать по внутреннему пространству, а подынтегральное выражение взять в точках $\tilde{M}$. Считая, что метрика η на M есть метрика Минковского, получаем [21]

$$S_D = v(G/H) \int\limits_M \left[-\frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi - \alpha(A_\mu) \psi) - \frac{i}{2} \bar{\psi} \left(\frac{1}{8} f_{abc} \tilde{\gamma}^a \tilde{\gamma}^b \tilde{\gamma}^c - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \tilde{\gamma}^a \alpha(\varphi_a) \right) \gamma^5 \psi + \text{э.с.} \right] d^4x. \qquad (43)$$

В этой формуле $v(G/H)$ — объем пространства G/H, вычисленный по G-инвариантной метрике γ, скалярные поля φ_a те же, что и в (26), а величины f_{abc} определяются с помощью ортонормированного в смысле метрики γ базиса $\{u_a\}$ в $\mathfrak{M}$ соотношением $f_{abc} = \gamma(u_a, [u_b, u_c]_{\mathfrak{M}})$.

Редуцированное поле удовлетворяет условиям (36), которые удобно переписать в инфинитезимальной форме

$$\Delta(\lambda(h))\psi + \alpha(\tau(h))\psi = 0, \quad h \in \mathfrak{H}, \qquad (44)$$

где гомоморфизм $\Delta \circ \lambda$: $\mathfrak{H} \to \mathrm{End}(R_\Delta)$ определяется формулой

$$\Delta(\lambda(h)) = \frac{1}{2} \gamma([h, u_a], u_b) \Sigma^{ab}.$$

Хотя формально формулы (27) и (43) дают вид редуцированного действия, необходимо еще разрешить условия связи (25) и (44) и выразить полное действие через независимые поля. Во втором разделе мы подробно остановимся на решении этой задачи для полей бозонного сектора.

Размерная редукция теорий Эйнштейна — Картана. Развитый в этом разделе геометрический метод размерной редукции инвариантных связностей может быть применен и к линейным связностям. Однако размерная редукция линейной связности общего вида, как, например, в [95], малоинтересна для физики. Физический интерес представляет размерная редукция метрической связности, т. е. связности, согласованной с псевдоримановой метрикой [88]. Теории, динамически рассматривающие эти объекты, называются теориями гравитации с кручением, или теориями Эйнштейна — Картана [96]. Эти теории интересны, в частности, тем, что в них может быть решена проблема безмассовых киральных фермионов [97, 98]. Здесь, следуя в основном работе [57], мы кратко изложим геометрический аспект размерной редукции таких теорий.

Будем для простоты изложения считать, что многомерное пространство-время E есть главное расслоенное пространство с базой M и структурной группой G, которая и будет группой симметрии теории (случай $E \sim M \times G/H$ сложнее только в техническом отношении). Действие группы G на E будем считать левым и обозначать L_a, $L_{ab} = L_a L_b$, a, $b \in G$. Это действие естественно поднимается до действия G на расслоении линейных реперов $L(E)$, которое мы будем обозначать тоже L_a.

Конфигурация теории Эйнштейна — Картана на E есть пара $(\hat{\tau}, \hat{g})$, где $\hat{g}$ — псевдориманова метрика на E, которую мы будем рассматривать как эквивариантное отображение [ср. с (31)]:

$$\hat{g}\colon L(E) \to S\left((R^D)^* \otimes (R^D)^*\right), \tag{45}$$

а $\hat{\tau}$ — метрическая связность в расслоении $L(E)$. Условие метричности $\hat{\tau}$ может быть записано как

$$D\hat{g} = 0. \tag{46}$$

Конфигурация $(\hat{\tau}, \hat{g})$ называется G-инвариантной, если

$$L_a^* \hat{\tau} = \hat{\tau}; \tag{47а}$$

$$L_a^* \hat{g} = \hat{g}. \tag{47б}$$

Наша задача состоит в классификации пар $(\hat{\tau}, \hat{g})$, удовлетворяющих (46), (47).

Метрика $\hat{g}$ и действие группы G на E определяют следующую последовательность редукций расслоения $L(E)$:

$$L(E) \to O(E) \to \tilde{O}(E) \to \hat{O}(E). \tag{48}$$

Здесь $O(E)$ — расслоение ортонормальных реперов, $\tilde{O}(E)$ — расслоение адаптированных ортонормальных реперов [88], т.е. главное расслоение над E с типическим слоем $O(1, 3) \times O(d)$, а $\hat{O}(E)$ — главное расслоение с базой E и типическим слоем $O(1, 3)$. Первая редукция является стандартной [88], вторая редукция определяется связностью в E, задаваемой метрикой $\hat{g}$. Третья редукция просто означает тривиальность расслоения $\tilde{\tilde{O}}(E)$ со структурной группой $O(d)$ [57].

Далее нетрудно понять, что $\hat{O}(E)$ есть главное G-расслоение над $O(M)$, расслоением ортонормальных реперов многообразия M. Обозначим $\hat{\pi}$ каноническую проекцию в расслоении $\hat{O}(E) \to E$, а s — форму связности на E, порожденную G-инвариантной метрикой $\hat{g}$. Тогда, вследствие того, что действие L_a на $\hat{O}(E)$ есть подъем действия L_a на E, $\hat{\pi}^*s$ есть форма связности в расслоении $\hat{O}(E) \to O(M)$.

Введем еще следующие обозначения: пусть $\mathfrak{G}$ будет алгеброй Ли группы G, а $\mathfrak{N}$ — дополнение алгебры Ли $\mathfrak{O}(1, 3) \oplus \mathfrak{O}(d)$ в редуктивном разложении $\mathfrak{O}(D) = \mathfrak{O}(1, 3) \oplus \mathfrak{O}(d) \oplus \mathfrak{N}$. Теперь мы готовы описать G-инвариантную конфигурацию $(\hat{\tau}, \hat{g})$ в терминах объектов на расслоении $\hat{O}(E)$.

Известно, что линейная связность в $L(E)$ редуцируема к связности в $O(E)$ тогда и только тогда, когда выполняется (46). Таким образом, $\hat{\tau}$ полностью определяется своим ограничением на $O(E)$, а значит, и на $\hat{O}(E)$. С другой стороны, $\hat{g}$ постоянна на $O(E)$, поэтому задача описания пары $(\hat{\tau}, \hat{g})$ сводится к задаче описания ограничения $\hat{\tau}$ на $\hat{O}(E)$ в терминах объектов на этом расслоении. Эта задача очень похожа на задачу размерной редукции инвариантной связности и может быть решена с помощью аналогичных методов. В результате получается, что пара $(\hat{\tau}, \hat{g})$ на $L(E)$ находится во взаимно однозначном соответствии с квинтетом объектов $(\tau, s, \varphi, \Phi, \Psi)$, где τ есть индуцированная метрическая связность на $O(M)$, s — ранее определенная форма связности в G-расслоении $\hat{O}(E) \to O(M)$, φ — тензориальная 1-форма на $O(M)$ со значениями в $\mathfrak{O}(d) \oplus \mathfrak{N}$, а $\Phi\colon \hat{O}(E) \to \mathfrak{G}^* \otimes R^d$ и $\Psi\colon \hat{O}(E) \to \mathfrak{G}^* \otimes \breve{\mathfrak{O}}(d)$ суть G — эквивариантные отображения.

Редукция действия для этой теории рассматривалась в [99]. В этой работе было показано, что при определенном выборе кручения на внутреннем пространстве в редуцированной теории возникают скалярные поля, обладающие потенциалом самодействия типа Хиггса. В случае нулевого кручения результаты редукции естественно совпадают с результатами стандартной теории Калуцы — Клейна [56].

2. СКАЛЯРНЫЕ ПОЛЯ РЕДУЦИРОВАННОЙ ТЕОРИИ

Как было показано в предыдущем разделе, многомерная теория Янга — Миллса, симметричная относительно канонического действия G на $E = M \times G/H$, редуцируется к калибровочной теории в M, включающей в себя скалярные поля, минимально взаимодействующие с калибровочным полем. При этом набор скалярных полей, константы связи и калибровочная группа C редуцированной теории жестко фиксируются калибровочной группой K исходной теории, ее константой связи и геометрией многомерного пространства-времени. Это, в частности, означает, что редуцированная теория содержит мало свободных параметров. Поэтому изучение свойств четырехмерных полей и редуцированного действия представляет интерес не только с точки зрения общей теории метода размерной редукции, но и с точки зрения построения физических моделей.

Поскольку чисто калибровочный сектор редуцированной теории имеет стандартный вид [см. (27)] и может быть исследован стандартными методами, основная проблема связана с выяснением свойств набора скалярных полей и вычислением потенциала их самодействия, что составляет теоретико-групповой аспект метода размерной редукции. Этим вопросам и посвящен настоящий раздел.

Общие свойства потенциала скалярных полей. Скалярные поля редуцированной теории описываются отображением φ_x: $\mathfrak{M} \to \mathfrak{R}$ (25), а потенциал их самодействия $V(\varphi)$ представляется в терминах этого отображения формулами (28).

Прежде всего заметим, что $V(\varphi) \geqslant 0$, так как согласно (28) выражение для $(-V(\varphi))$ представляет собой сумму квадратов величин F_{ab} в пространстве с отрицательно определенным скалярным произведением. Перепишем формулу (28б) в виде

$$F_{ab} = [\Lambda_{\sigma_2(x)}(u_a),\ \Lambda_{\sigma_2(x)}(u_b)] - \Lambda_{\sigma_2(x)}([u_a,\ u_b]); \tag{49а}$$

$$\Lambda_{\sigma_2(x)}(u) = \begin{cases} \tau(u), & u \in \mathfrak{H}; \\ \varphi_x(u), & u \in \mathfrak{M}. \end{cases} \tag{49б}$$

Отображение $\Lambda_{\sigma_2(x)}: \mathfrak{G} \to \mathfrak{K}$ было введено в разд. 1 [см. формулы (7а), (14)]. Из (28а) следует, что $V(\varphi) = 0$ тогда и только тогда, когда все $F_{ab} = 0$, или, что эквивалентно, отображение φ: $\mathfrak{M} \to \mathfrak{K}$ продолжает гомоморфизм τ: $\mathfrak{H} \to \mathfrak{K}$ до гомоморфизма $\mathfrak{G} \to \mathfrak{K}$ [49; 88, гл. II, § 11]. Следовательно, если скалярное поле редуцированной теории и соответствующее ему отображение φ такие, что Λ является гомоморфизмом, то это поле тождественно удовлетворяет связи (25), отвечает абсолютному минимуму потенциала, и алгебра Ли $\mathfrak{R}$ группы R преобразований, оставляющих этот минимум инвариантным, есть $\mathfrak{R} = C_{\mathfrak{K}}(\Lambda(\mathfrak{G})) = \{r \in \mathfrak{K}\colon\ [r,\ \Lambda(g)] = 0,\ \ \forall g \in \mathfrak{G}\}$ [централизатор $\Lambda(\mathfrak{G})$ в $\mathfrak{K}$; это определение есть очевидная переформулировка определения централизатора для групп, данного в разд. 1] [49]. Другими словами, в этом случае калибровочная группа C спонтанно нарушается до R.

В общем случае для нахождения характера спонтанного нарушения симметрии необходимо найти скалярные поля в явном виде и вычислить потенциал их самодействия. Для этого удобно переписать условие эквивариантности (25) в инфинитезимальной форме

$$(\varphi_x \circ \operatorname{ad} h)(b) = \varphi_x([h,\ b]) = (\operatorname{ad} \tau(h) \circ \varphi_x)(b) = [\tau(h),\ \varphi_x(b)], \tag{50}$$

где $b \in \mathfrak{M}$, а $\operatorname{ad} h$ обозначает присоединенное действие $h \in \mathfrak{H}$.

Чтобы перейти к обычным скалярным полям, необходимо разрешить условие связи (50) и выразить φ_x через независимые функции. Условие (50) означает, что отображение φ_x является оператором, который сплетает представления алгебры $\mathfrak{H}$ в линейных пространствах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{K}$: $\mathrm{ad}\,(\mathfrak{H})\,\mathfrak{M}$ и $\mathrm{ad}\,(\tau\,(\mathfrak{H}))\,\mathfrak{K}$. Для того чтобы построить отображение φ_x, необходимо разложить эти представления на неприводимые и воспользоваться леммой Шура [100]. Однако, прежде чем делать это, целесообразно конкретизировать вид алгебры $\mathfrak{H}$ и сплетаемых представлений.

Поскольку H — компактная группа Ли, то ее алгебра Ли имеет вид

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}' \oplus \mathfrak{Z}; \tag{51а}$$

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{H}_P, \quad \mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{Z}_q, \tag{51б}$$

где $\mathfrak{H}_i$ — простой (неабелев) идеал; $\mathfrak{H}'$ — максимальная полупростая подалгебра, а $\{\mathfrak{Z}_k\}$ — одномерные абелевы идеалы, отвечающие $U\,(1)$-факторам в H. Неприводимые представления алгебры Ли $\mathfrak{H}$ будем характеризовать сигнатурой $\alpha = [\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(P)}]\,(\varkappa^{(1)}, \ldots, \varkappa^{(q)})$, где $\alpha^{(i)}$ обозначает тип представления относительно $\mathfrak{H}_i$, а $\varkappa^{(k)}$ есть собственное значение некоторого фиксированного элемента $h_k \in \mathfrak{Z}_k$, являющегося генератором соответствующей $U\,(1)$ подгруппы.

Относительно внутреннего пространства G/H мы сделаем предположение, что в разложении $\mathrm{ad}\,\mathfrak{G} \downarrow \mathfrak{H}$ на неприводимые есть лишь одно присоединенное представление $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}_i$ каждого неабелева идеала в (51), которое реализуется в подалгебре $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$. В физически интересных случаях это предположение оказывается, как правило, справедливым. Далее, мы будем считать гомоморфизм τ: $\mathfrak{H} \to \mathfrak{K}$ в (50) инъективным (случай неинъективного гомоморфизма τ рассмотрен в [122]), вследствие чего в разложении $\mathrm{ad}\,\mathfrak{K} \downarrow \tau\,(\mathfrak{H})$ всегда будет присутствовать представление $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}$. Замечая наконец, что вследствие редуктивности разложения $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{M}$ представления $\mathrm{ad}\,(\mathfrak{H})\,\mathfrak{M}$ и $\mathrm{ad}\,\mathfrak{G} \downarrow \mathfrak{H}$ различаются на представление $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}$, мы можем представить интересующие нас разложения в следующем виде:

$$\mathrm{ad}\,\mathfrak{G} \downarrow \mathfrak{H} = \mathrm{ad}\,\mathfrak{H} + \mathrm{ad}\,(\mathfrak{H})\,\mathfrak{M} = \mathrm{ad}\,\mathfrak{H} + \zeta + \sum_{k=1}^{N} m_k \alpha_k; \tag{52а}$$

$$\mathrm{ad}\,\mathfrak{K} \downarrow \tau\,(\mathfrak{H}) = \mathrm{ad}\,\mathfrak{H} + \sum_{i=1}^{P} p_i\,\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}_i + \zeta' + \sum_{k=1}^{N} n_k \alpha_k + \vartheta. \tag{52б}$$

Здесь ζ и ζ' обозначают наборы (возможно, пустые) тривиальных представлений. Через $\alpha_k = [\alpha_k^{(1)}, \ldots, \alpha_k^{(P)}]\,(\varkappa_k^{(1)}, \ldots, \varkappa_k^{(q)})$ обозначены нетривиальные неприводимые представления $\mathfrak{H}$, числа $m_k \geqslant 1$ и $n_k \geqslant 0$ указывают кратность. Предположим, что ни одно из представлений α_k не совпадает с $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}_i$, и $\dim\,\zeta = 0$, если $\dim\,\mathfrak{Z} > 0$. Символ ϑ обозначает нетривиальные представления, не эквивалентные α_k и $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}_i$. В соответствии со сделанными предположениями в обоих разложениях явно выделены (в общем случае приводимые) представления ad $\mathfrak{H}$.

Разложения алгебр Ли $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{K}$ на инвариантные подпространства, соответствующие разложениям (52), могут быть представлены в виде

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{M} = \mathfrak{H} \oplus A \oplus \bigoplus_{k=1}^{N} T^{(k)}, \quad T^{(k)} = \bigoplus_{i=1}^{m_k} T_i^{(k)}; \tag{53а}$$

$$\mathfrak{K} = \tau(\mathfrak{H}) \oplus \bigoplus_{i=1}^{P} U^{(i)} \oplus \mathfrak{C}' \oplus \bigoplus_{k=1}^{N} V^{(k)} \oplus V_{\vartheta}; \tag{53б}$$

$$U^{(i)} = \bigoplus_{k=1}^{p_i} U_k^{(i)}, \quad V^{(k)} = \bigoplus_{s=1}^{n_k} V_s^{(k)}. \tag{53в}$$

Здесь A и $\mathfrak{C}'$ обозначают пространства тривиальных представлений, т.е. A есть алгебра Ли группы $N_G(H)/H$. $T_i^{(k)}$ и $V_s^{(k)}$ — подпространства в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{K}$, в которых реализуется неприводимое представление α_k. Индексы i, s нумеруют подпространства эквивалентных представлений, и при $n_k = 0$ необходимо считать $V^{(k)} = \{0\}$. В пространствах $U_k^{(i)}$ при $p_i > 0$ реализуются представления типа ad $\mathfrak{H}_i$, а подпространство V_ϑ отвечает представлениям, входящим в ϑ. Не ограничивая общности, можно считать все разложения в (53) ортогональными относительно ad $\mathfrak{G}$-инвариантного скалярного произведения (,) в $\mathfrak{G}$ и ad $\mathfrak{K}$-инвариантного скалярного произведения $\langle,\rangle$ в $\mathfrak{K}$.

По поводу пространств A и $\mathfrak{C}'$ нужно сделать еще следующие замечания:

1) если в (51) $\mathfrak{Z} = \{0\}$, т.е. $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}'$ — полупростая алгебра Ли, то $A = C_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{H})$ (централизатор $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{G}$) и $\mathfrak{C}' = \mathfrak{C} = C_{\mathfrak{K}}(\tau(\mathfrak{H}))$;

2) если $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}' \oplus \mathfrak{Z}$ в (51а), то A — лишь часть $C_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{H})$, а именно $C_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{H}) = A \oplus \mathfrak{Z}$. В этом случае $\mathfrak{C} = C_{\mathfrak{K}}(\tau(\mathfrak{H})) = \mathfrak{C}' \oplus \tau(\mathfrak{Z})$. В силу сделанных выше предположений в нашем рассмотрении при этом обязательно $A = \{0\}$.

Напомним, что $\mathfrak{C}$ является алгеброй Ли группы C—калибровочной группы редуцированной теории. В физически интересных моделях желательно, чтобы эта группа имела не больше одного $U(1)$-фактора. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что $\dim \mathfrak{Z} \leqslant 1$.

Вернемся теперь к сплетающему оператору φ_x. По лемме Шура он может быть представлен в виде:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_x = \sum_{k=0}^{N} \varphi_x^{(k)}; \\ &\varphi_x^{(0)} : A \to \mathfrak{C}; \ \varphi_x^{(k)} : T^{(k)} \to V^{(k)} \ (k = 1, \ldots, N); \\ &\varphi_x^{(k)} = \sum_{i=1}^{m_k} \sum_{s=1}^{n_k} f_s^{(k,i)}(x)\, \varphi_{is}^{(k)}; \\ &\varphi_{is}^{(k)} : T_i^{(k)} \to V_s^{(k)}. \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Отображения $\varphi_{is}^{(k)}$ являются базисными сплетающими операторами, по существу, устанавливающими изоморфизм между подпространствами $T_i^{(k)}$ и $V_s^{(k)}$, в которых реализуются эквивалентные представления. Так как тривиальное представление является одномерным, то в формулах (54) надо положить $m_0 = \dim A$, $n_0 = \dim \mathfrak{C}$. Функции $f_s^{(k,i)}(x)$ играют роль скалярных полей редуцированной теории. Свойства этих полей относительно преобразований из группы C, а также задача построения сплетающих операторов $\varphi_{is}^{(k)}$ в явном виде обсуждаются ниже в настоящем разделе.

В целях упрощения дальнейшего анализа будем считать, что в формулах (52а), (53а), (54) $m_k = 1$ для всех $k = 1, 2, \ldots, N$ и $\dim \zeta \leqslant 1$. Эти условия выполняются в большинстве физически интересных моделей (см. ниже и разд. 4). Рассмотрение общего случая представляет лишь технические, но не принципиальные трудности. Тогда в соответствии с [47, 88] произвольная G-инвариантная метрика γ на G/H может быть определена формулой

$$\gamma(u, v) = -\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{M_k^2}(u^{(k)}, v^{(k)}), \quad u, v \in \mathfrak{M};$$

$$u = \sum_k u^{(k)}, \quad v = \sum_k v^{(k)}, \tag{55}$$

где $u^{(k)}$, $v^{(k)} \in T^{(k)} (k = 1, \ldots, L)$, $u^{(0)}$, $v^{(0)} \in A$, а M_k — параметры размерности массы, характеризующие внутреннее пространство. Индекс a удобно представить в виде $a = (k, r)$, где k нумерует типы представлений, а r — различные элементы в $T^{(k)}$. Затем от базиса $\{u_a\}$, ортонормированного в смысле метрики γ, перейдем к элементам $v_{(k,r)} = u_{(k,r)}/M_k$, удовлетворяющим условиям

$$(v_{(k,r)}, v_{(l,r')}) = -\delta_{kl}\delta_{rr'}.$$

Далее, обозначим Ω пространство отображений φ_x, удовлетворяющих (50), и рассмотрим величину $\langle \varphi_x(u), \varphi'_x(v) \rangle$, где $u, v \in \mathfrak{M}$, $\varphi, \varphi' \in \Omega$. Нетрудно проверить, используя (50), что при фиксированных φ и φ' это скалярное произведение задает ad $\mathfrak{H}$-инвариантную билинейную форму в $\mathfrak{M}$ и, следовательно, в соответствии с разложением (53а) может быть записано в виде

$$\langle \varphi(u), \varphi'(v) \rangle = \sum_{k=0}^{N} (\varphi^{(k)}, \varphi'^{(k)})(u^{(k)}, v^{(k)});$$

$$u = \sum_k u^{(k)}, \quad v = \sum_k v^{(k)}, \quad u^{(k)}, v^{(k)} \in T^{(k)}, \quad u^{(0)}, \quad v^{(0)} \in A, \tag{56}$$

где величины $\langle \varphi^{(k)}, \varphi'^{(k)} \rangle$ определяют положительно определенное скалярное произведение компонент $\varphi_x^{(k)}$ и $\varphi_x'^{(k)}$:

$$(\varphi_x^{(k)}, \varphi_x'^{(k)}) = \langle \varphi_x^{(k)}(u^{(k)}), \varphi_x'^{(k)}(v^{(k)}) \rangle / (u^{(k)}, v^{(k)})$$

при $(u^{(k)}, v^{(k)}) \neq 0$ и, следовательно, скалярное произведение в Ω как $(\varphi, \varphi') = \sum\limits_k (\varphi^{(k)}, \varphi'^{(k)})$.

Легко проверить, что величина $\langle \tau(h), \tau(h') \rangle$, $h, h' \in \mathfrak{H}$ определяет Ad $\mathfrak{H}$ — инвариантное скалярное произведение в $\mathfrak{H}$ и поэтому может быть представлена в виде

$$\langle \tau(h), \tau(h') \rangle = \sum_{i=\varkappa}^{P} \lambda_i (h^{(i)}, h'^{(i)}). \tag{57}$$

Здесь $\varkappa = 1$, если в (51) $\mathfrak{Z} = \{0\}$, т.е. $\mathfrak{H}$ — полупростая алгебра, и $\varkappa = 0$, если $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}' \oplus \mathfrak{Z}$, а $\mathfrak{Z} \equiv \mathfrak{H}_0$ — одномерный центр, соответствующий $U(1)$ — фактору группы H (мы опять ограничимся случаем, когда такой фактор один). $h^{(i)}$ и $h'^{(i)}$ обозначают $\mathfrak{H}_i$ — компоненты элементов h и h'. Числа λ_i характеризуют вложение подалгебр $\mathfrak{H}_i$ в $\mathfrak{K}$; они равны отношению индексов подалгебр $\mathfrak{H}_i$ в $\mathfrak{K}$ и в $\mathfrak{G}$ [101].

Для того чтобы проанализировать выражение (28) для потенциала скалярных полей редуцированной теории, представим его в виде ряда по степеням отображения φ:

$$\begin{aligned}
&V(\varphi) = V^{(0)} + V^{(1)} + V^{(2)} + V^{(3)} + V^{(4)};\\
&V^{(0)} = -\sum_{a,b} \langle \tau([u_a, u_b]_{\mathfrak{H}}), \tau([u_a, u_b]_{\mathfrak{H}}) \rangle;\\
&V^{(1)} = -2\sum_{a,b} \langle \tau([u_a, u_b]_{\mathfrak{H}}), \varphi([u_a, u_b]_{\mathfrak{M}}) \rangle;\\
&V^{(2)} = -\sum_{a,b} \{\langle \varphi([u_a, u_b]_{\mathfrak{M}}), \varphi([u_a, u_b]_{\mathfrak{M}}) \rangle -\\
&\qquad -2\langle \tau([u_a, u_b]_{\mathfrak{H}}), [\varphi(u_a), \varphi(u_b)] \rangle\};\\
&V^{(3)} = -2\sum_{a,b} \langle \varphi([u_a, u_b]_{\mathfrak{M}}), [\varphi(u_a), \varphi(u_b)] \rangle;\\
&V^{(4)} = -\sum_{a,b} \langle [\varphi(u_a), \varphi(u_b)], [\varphi(u_a), \varphi(u_b)] \rangle.
\end{aligned} \tag{58}$$

Слагаемое $V^{(0)}$ легко приводится к виду

$$V^{(0)} = \sum_{i=\varkappa}^{P} \lambda_i \sum_{k=1}^{N} d_k M_k^4 C_2^{H_i}(\alpha_k^{(i)}) > 0. \tag{59}$$

Здесь $d_k = \dim \alpha_k$, а $C_2^{H_i}(\beta)$ обозначает собственное значение квадратичного оператора Казимира подгруппы $H_i \subset H$ на пространстве неприводимого представления β (см., например, [35]).

Поскольку разложение (53б) ортогонально относительно $\langle , \rangle$ и, согласно нашему предположению, в $\mathfrak{M}$ нет представлений, входящих в присоединенное представление алгебры $\mathfrak{H}$, $V^{(1)}(\varphi) = 0$ в (58). Отсюда сразу следует, что $\varphi = 0$ является экстремумом потенциала.

Член $V^{(2)}(\varphi)$ может быть преобразован к виду

$$\left.\begin{aligned} V^{(2)}(\varphi) &= \sum_{k=0}^{N} (\varphi^{(k)},\ \varphi^{(k)})\, M_k^4 \Theta^{(k)};\\ \Theta^{(k)} &= \sum_{l,\,m=0}^{N} \frac{M_l^2 M_m^2}{M_k^4} \sum_{r=1}^{d_l} \sum_{s=1}^{d_m} \sum_{t=1}^{d_k} [C_{(l,\,r)(m,\,s)}^{(k,\,t)}]^2 - 2d_k \sum_{i=\varkappa}^{P} C_2^{H_i}(\alpha_k^{(i)}), \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

где $C_{\alpha\beta}^{\gamma}$ — структурные константы группы G в базисе $\{v_\alpha\}$. Слагаемое $V^{(2)}(\varphi)$ важно при исследовании вопроса об экстремумах потенциала. Действительно, нетрудно показать, принимая во внимание свойство $V(\varphi) \geqslant 0$ для всех φ, что значение $\varphi = 0$ не является минимумом потенциала, если хотя бы для одного k_0 $\Theta^{(k_0)} < 0$. Следовательно, выполнение условия $\Theta^{(k)} < 0$ хотя бы для одного k является достаточным условием спонтанного нарушения симметрии в четырехмерной редуцированной теории.

Из (60) ясно, что этот вывод о спонтанном нарушении симметрии зависит как от вида метрики γ (через константы M_k^2), так и от свойств представлений алгебры $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{M}$, т.е., по существу, от геометрии внутреннего пространства G/H. Приведем несколько иллюстраций этого утверждения.

1. В вырожденном случае, когда все $M_k^2 = M^2$ (так называемая нормальная метрика [47]), выражение для $\Theta^{(k)}$ может быть приведено к виду

$$\Theta^{(k)} = -4d_k C_2^G(\mathrm{Ad})\left(r_k - \frac{1}{4}\right), \tag{61}$$

где $C_2^G(\mathrm{Ad})$ — собственное значение оператора Казимира группы G на пространстве присоединенного представления, а $r_k = \sum_{i=\varkappa}^{P} C_2^{H_i}(\alpha_k^{(i)})/C_2^G(\mathrm{Ad})$. Нетрудно показать, что $0 < r_k \leqslant 1/2$, причем $r_k = 1/2$ тогда и только тогда, когда элементы вида $[v_a,\ v_b]$ не имеют компоненты в $T^{(k)}$ ни при каких a, b (см. [35]). Данные для вычисления величин $C_2^{H_i}(\alpha_k^{(i)})$, $C_2^G(\mathrm{Ad})$ и r_k могут быть найдены в [35, 102, 103].

Формула вида (61) для $\Theta^{(k)}$ справедлива для изотропно неприводимых пространств [28], для которых в $\mathfrak{M}$ имеется лишь одно неприводимое представление в разложении (52a). В частности, для симметрических пространств $r = 1/2$ и потенциал редуцированной теории приводит к спонтанному нарушению симметрии [55, 78] [исключение составляет случай, когда абсолютный минимум $V(\varphi)$ реализуется тривиальным синглетом группы C].

Отметим также, что к классу симметрических пространств относятся такие представляющие физический интерес пространства, как сферы $S^l = SO(l+1)/SO(l)$, комплексные проективные пространства $CP^m = SU(m+1)/SU(m) \times U(1)$, вещественные грассмановы многообразия $G_{2,m+2}(\mathbb{R}) = SO(m+2)/SO(m) \times U(1)$.

2. Пусть внутренним пространством является шестимерное несимметрическое однородное пространство $G/H = \mathrm{Sp}\,(2)/SU\,(2) \times U\,(1)$, а $K = SU\,(5)$. Подпространство $\mathfrak{M}$ разлагается на два нетривиальных неприводимых представления, т.е. $N = 2$ и $A = \{0\}$ в формуле (53а). Если гомоморфизм τ: $SU\,(2) \times U\,(1) \to SU\,(5)$ определен так, что калибровочная группа редуцированной теории $C = SU\,(3) \times \times U\,(1)$, то оператор φ сплетает лишь одно из этих представлений и

$$V^{(2)}\,(\varphi) = -4\,(\varphi,\ \varphi)|M_1^4\,(2 - \beta),$$

где $\beta = M_2^2/M_1^2$. Таким образом, если метрика (55) выбрана так, что $\beta < 2$, то абсолютный минимум потенциала достигается при $\varphi \neq 0$ [а именно при $(\varphi, \varphi) = 2\,(2 - \beta)/3$]. Если же $\beta > 2$, то абсолютный минимум достигается при $\varphi = 0$.

Метод вычисления потенциала. Здесь мы изложим идею метода вычисления скалярного потенциала редуцированной теории и приведем общую формулу для него через инвариантные характеристики пространства G/H и вложения $\tau\,(\mathfrak{H})$ в $\mathfrak{K}$. Чтобы избежать технических сложностей, рассмотрим случай, когда внутреннее пространство G/H является симметрическим [27].

Напомним, что для компактного симметрического пространства $[\mathfrak{M},\ \mathfrak{M}] \subset \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M}$ является пространством неприводимого представления $\mathfrak{H}$. Следовательно, в формуле (58) слагаемое $V^{(3)}\,(\varphi) = 0$, а $V^{(0)}$ и $V^{(2)}\,(\varphi)$ даются выражениями (59) — (61) с $r = 1/2$. Для вычисления $V^{(4)}\,(\varphi)$ обсудим более детально свойства сплетающих операторов φ_x и величин $[\varphi_x\,(u_a),\ \varphi_x\,(u_b)]$. Согласно лемме Шура, сплетающий оператор равен нулю для пространств, в которых реализуются неэквивалентные представления, и обратим для пространств, в которых реализуются эквивалентные представления. В последнем случае число сплетения (вещественная размерность пространства базисных сплетающих операторов) может быть 1, 2 или 4 в зависимости от типа представления [100]. Известно, что для комплексных представлений число сплетения всегда равно 2. Следовательно, удобно комплексифицировать алгебры $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{K}$ [104, 105] и продолжить отображение φ_x и условие эквивариантности (50) по линейности на комплексифицированные пространства $\mathfrak{H}^c$, $\mathfrak{M}^c$ и $\mathfrak{K}^c$ [53—55]. Оператор φ_x^c должен удовлетворять условию вещественности: $\overline{\varphi_x^c\,(u)} = \varphi_x^c\,(\bar{u})$, $u \in \mathfrak{M}^c$, где черта обозначает комплексное сопряжение в $\mathfrak{G}^c$ и $\mathfrak{K}^c$. Нетрудно убедиться в том, что искомый оператор φ_x равен φ_x^c, ограниченному на подпространство $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}^c$. В дальнейшем мы будем работать с комплексными алгебрами Ли и значок c будем опускать.

В случае симметрического пространства G/H алгебра $\mathfrak{H}$ представляет собой сумму не более трех идеалов (см. список симметрических пространств в [27]):

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2,$$

где $\mathfrak{H}_0$ обозначает центр $\mathfrak{H}$, отвечающий $U(1)$ — фактору группы H ($\dim \mathfrak{H}_0 = 0$ или 1), а $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — простые алгебры. Пространство $\mathfrak{M} = T = \overline{T}$ неприводимо, если $\mathfrak{H}$ — полупростая алгебра ($\dim \mathfrak{H}_0 = 0$) и $\mathfrak{M} = T \oplus \overline{T}$, где T — неприводимое подпространство, если $\mathfrak{H}$ содержит одномерный центр. В последнем случае $\dim T = \frac{1}{2} \dim \mathfrak{M}$, $[T, T] = 0$, и $[T, \overline{T}] = \mathfrak{H}$ [105].

Определим отображения из $D(T \otimes \overline{T})$, где D обозначает выделение антисимметризованной части тензорного произведения $T \otimes T$, если $T = \overline{T}$, и D — тождественная операция, если $T \neq \overline{T}$, на $\mathfrak{H}$ и в $\mathfrak{K}$ с помощью формул

$$F_1(D(u \otimes \overline{v})) = [u, \overline{v}];$$

$$F_2(D(u \otimes \overline{v})) = [\varphi(u), \varphi(\overline{v})],$$

где $u, v \in T$, $\varphi \in \Omega$. Нетрудно проверить, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & D(T \otimes \overline{T}) \arrow[dl, "F_1"'] \arrow[dr, "F_2"] & \\ \mathfrak{H} \arrow[rr, "F"] & & \mathfrak{K} \end{tikzcd}$$

коммутативна, т.е. отображение $F\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{K}$ $F([u, \overline{v}]) = [\varphi(u), \varphi(\overline{v})]$ может быть корректно определено тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие для ядер отображений: $\ker F_1 \subset \ker F_2$. Равенство (50) позволяет убедиться в том, что F является сплетающим оператором, который сплетает присоединенное представление $\operatorname{ad} \mathfrak{H}$ с представлением $\operatorname{ad} \mathfrak{K} \downarrow \tau(\mathfrak{H})$.

Применительно к рассматриваемому случаю удобно видоизменить обозначения формулы (53б), положив $U^{(0)} = \mathfrak{C}'$. Тогда в подпространствах $U^{(i)}$, $i = 0,1,2$ (возможно, нулевых), реализуются наборы представлений сигнатуры $[0,0]\,(0)$, $[\operatorname{ad} \mathfrak{H}_1, 0]\,(0)$ и $[0, \operatorname{ad} \mathfrak{H}_2]\,(0)$, т.е. присоединенных представлений $\operatorname{ad} \mathfrak{H}_0$, $\operatorname{ad} \mathfrak{H}_1$ и $\operatorname{ad} \mathfrak{H}_2$ соответственно. При этом централизатор $\tau(\mathfrak{H})$ в $\mathfrak{K}$ есть $\mathfrak{C} = \tau(\mathfrak{H}_0) \oplus U^{(0)} = \tau(\mathfrak{H}_0) \oplus \mathfrak{C}'$. Тогда по лемме Шура

$$F\colon \mathfrak{H} \to \sum_{i=0}^{2} (\tau(\mathfrak{H}_i) \oplus U^{(i)}); \tag{62а}$$

$$F = \sum_{i=0}^{2} (\nu_i \tau_i + F_i), \tag{62б}$$

где $\tau_i = \tau \mid \mathfrak{H}_i$, а F_i обозначает $U^{(i)}$-компоненту F. Для коэффициентов ν_i нетрудно доказать соотношение универсальности [55]:

$$\lambda_0 \nu_0 = \lambda_1 \nu_1 = \lambda_2 \nu_2 = (\varphi, \varphi). \tag{63}$$

Определим величины

$$|F_i|^2 = \langle F_i(h), F_i(h')\rangle/(h, h'), \tag{64а}$$

где $h, h' \in \mathfrak{H}_i$, $(h, h') \neq 0$. Очевидно, $|F_i|^2$ являются инвариантами калибровочной группы C четвертой степени по f и их можно представить в виде

$$|F_i|^2 = \sigma_i |f|^4 + I_i(f), \tag{64б}$$

где σ_i — некоторые константы, а $I_i(f)$ — инварианты четвертой степени, отличные от $|f|^4$.

Для определенности рассмотрим случай, когда $T \neq \overline{T}$. Учитывая дуальность V_s и $\overline{V}_s$ в $\mathfrak{H}$, введем в линейном пространстве Ω базис $\{\varphi_s, \overline{\varphi}_t\}$, $\varphi_s : T \to V_s$, $\overline{\varphi}_t : \overline{T} \to \overline{V}_t$, нормированный условиями $(\varphi_s, \varphi_t) = \delta_{st}$. Тогда любой сплетающий оператор, удовлетворяющий условию вещественности, можно представить в виде

$$\varphi_x = \sum_{s=1}^{n} (f_s(x)\varphi_s + \overline{f_s}(x)\overline{\varphi}_s), \tag{65}$$

и $(\varphi, \varphi) = \sum\limits_{s=1}^{n} |f_s(x)|^2 = |f|^2$. Очевидно, что формула (65) представляет собой частный случай общих формул (54).

Используя выражение (62б) для $[\varphi(u), \varphi(\overline{v})] = F([u, \overline{v}])$ и формулы (63)—(65), можно получить следующее общее выражение для потенциала скалярных полей редуцированной теории в случае симметрического пространства G/H [55]:

$$V(f) = M^4 \{G_1(|f|^2 - G_2/G_1)^2 + I(f) + G_0\};$$

$$\left.\begin{aligned}
&G_1 = \tilde{d} \sum_{i=0}^{2} C_2^{H_i}(\alpha^{(i)}) \frac{1+\sigma_i\lambda_i}{\lambda_i}\left(2 - \delta_{0i}\frac{d}{2}\right);\\
&G_2 = \frac{d}{2} C_2^G(\mathrm{Ad});\\
&I(f) = \tilde{d} \sum_{i=0}^{2} C_2^{H_i}(\alpha^{(i)}) I_i(f)\left(2 - \delta_{0i}\frac{d}{2}\right);\\
&G_0 = d \sum_{i=0}^{2} \lambda_i C_2^{H_i}(\alpha^{(i)}) - G_2^2/G_1,
\end{aligned}\right\} \tag{66}$$

где M — константа размерности массы; $1/M$ характеризует размер внутреннего пространства G/H. Если в формуле (66) считать $\tilde{d} = d$ при $\dim \mathfrak{H}_0 = 1$ и $\tilde{d} = d/2$ при $\dim \mathfrak{H}_0 = 0$, то она оказывается справедливой как для случаев, когда $\mathfrak{H}$ — полупростая, так и когда $\mathfrak{H}$ содержит одномерный центр $\mathfrak{H}_0$. Очевидно, что суммирование в (66) ведется только по тем значениям индекса i, которые отвечают ненулевым идеалам $\mathfrak{H}_i$. При выводе формулы для $V(f)$ было учтено, что $C_2^G(\mathrm{Ad}) = 2\sum_{i=0}^{2} C_2^{H_i}(\alpha^{(i)})$.

Обсудим два важных частных случая общей формулы (66).

1. Пусть $\mathfrak{H}$ — простая алгебра и в $\mathfrak{K}$ нет других подпространств, кроме $\tau(\mathfrak{H})$, в которых реализуется присоединенное представление относительно ad $\tau(\mathfrak{H})$. В этом случае

$$[\varphi(u),\ \varphi(v)] = \frac{|f|^2}{\lambda}\tau([u,\ v]),\quad u,\ v \in \mathfrak{M} = T \tag{67}$$

[см. (62), (63)], а потенциал редуцированной теории равен

$$V(f) = M^4\frac{d}{\lambda}C_2^H(\alpha)(|f|^2 - \lambda)^2. \tag{68}$$

Потенциал достигает своего минимального значения $V = 0$ при $|f|^2 = \lambda$. Как видно из формулы (67), при этом отображение $\varphi: \mathfrak{M} \to \mathfrak{K}$ продолжает гомоморфизм $\tau: \mathfrak{H} \to \mathfrak{K}$ до гомоморфизма $\mathfrak{G} \to \mathfrak{K}$ (49) в соответствии с общим результатом, приведенным в начале раздела.

2. Пусть $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1$, где $\mathfrak{H}_1$ — простая алгебра, а $\mathfrak{H}_0$ — одномерный центр, отвечающий $U(1)$-фактору группы H, и в $\mathfrak{K}$ нет других подпространств сигнатуры [ad $\mathfrak{H}_1$] (0), кроме $\tau(\mathfrak{H}_1)$. Тогда $[\varphi(u),\ \varphi(\bar{v})] = \nu_0\tau_0([u,\ \bar{v}]_{\mathfrak{H}_0}) + \nu_1\tau_1([u,\ \bar{v}]_{\mathfrak{H}_1}) + F_0([u,\ \bar{v}]_{\mathfrak{H}_0})$, $u \in T$, $\bar{v} \in \bar{T}$, где F_0 отображает $\mathfrak{H}_0$ в пространство $\mathfrak{C} = \tau(\mathfrak{H}_0) \oplus \oplus\, \mathfrak{C}'$, в котором реализуется представление сигнатуры [0] (0). Если при этом дополнительно $[\varphi(T),\ \varphi(T)] = 0$, где подпространство $\varphi(T) = V$ определено формулой (53б), то потенциал $V(f)$ может быть приведен к виду

$$V(f) = M^4 d C_2^{H_0}(\alpha^{(0)})\left[\frac{1}{2\lambda_1}\left(|f|^2 - \lambda_1)^2 + \lambda_0 - \lambda_1\right]. \tag{69}$$

Метод вычисления потенциала скалярных полей, развитый для симметрических пространств, может быть обобщен на случай произвольного однородного пространства G/H. Для этого нужно определить отображения $F_1: A(T_i^{(l)} \otimes T_k^{(m)}) \to \mathfrak{G}$ и $F_2: A(T_i^{(l)} \otimes T_k^{(m)}) \to \mathfrak{K}$ для каждой пары неприводимых представлений в разложении (53а), выяснить условия существования сплетающего оператора $F: \mathfrak{G} \to \mathfrak{K}$, замыкающего диаграмму $F \circ F_1 = F_2$, и аналогично (62) найти его общий вид, а затем подставить все это в (58). Однако общие формулы такого рода получаются очень громоздкими, и представляется более целесообразным применять этот метод для классов пространств с одинаковой структурой представления изотропии ad $(\mathfrak{H})\,\mathfrak{M}$.

Заметим еще, что задачи о разложении алгебр $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{K}$ на подпространства, инвариантные относительно действия ad $\mathfrak{H}$ и ad$\tau(\mathfrak{H})$, о нахождении централизатора $\tau(\mathfrak{H})$ в $\mathfrak{K}$, а также о явном построении сплетающего оператора φ_x могут быть эффективно решены с помощью корневой техники для комплексных алгебр Ли [101, 104, 105], в частности, с применением так называемых корневых решеток [53—55].

Неприводимость мультиплета скалярных полей. Обсудим теперь поведение скалярных полей редуцированной теории при преобразованиях из группы C.

Заметим прежде всего, что если $\varphi_x \in \Omega$, то отображение $\varphi'_x = \operatorname{ad} c\varphi_x = [c, \varphi_x]$, $c \in \mathfrak{C}$ удовлетворяет условию

$$[\tau(h), \varphi'(u)] = [\tau(h), [c, \varphi(u)]] = \varphi'([h, u]), \tag{70}$$

где $h \in \mathfrak{H}$ и $u \in \mathfrak{M}$, следующему из тождества Якоби и определения централизатора. Следовательно, φ'_x является сплетающим оператором из линейного пространства Ω, и на Ω действует представление $\operatorname{Ad} C$ калибровочной группы C. Более того, из формулы (70) видно, что $\varphi(u)$ и $\varphi'(u)$ принадлежат инвариантным относительно действия $\operatorname{ad} \tau(\mathfrak{H})$ подпространствам в $\mathfrak{K}$, в которых реализуются эквивалентные представления. Это означает, что набор скалярных полей $\{f_j^{(k,i)}(x), s = 1, 2, \ldots, n_k\}$ при фиксированных k и i [см. (54)] образует мультиплет относительно преобразований из группы C. Однако в общем случае $\operatorname{Ad} C$ действует на Ω приводимо, т. е. приводимым является мультиплет $\{f_s^{(k,i)}(x)\}$.

Ниже мы рассмотрим задачу нахождения класса многомерных теорий, которые после размерной редукции приводят к моделям с одним неприводимым мультиплетом скалярных полей. Такие модели представляют интерес для физических приложений, и схема спонтанного нарушения симметрии в них хорошо изучена.

Из общей теории известно, что полупростая подалгебра Ли $\mathscr{R}$ простой алгебры Ли $\mathscr{S}$ определяется, с точностью до эквивалентности, разложением некоторого определяющего неприводимого представления алгебры $\mathscr{S}$ на неприводимые относительно $\mathscr{R}$ [101]. Для всех комплексных алгебр Ли $\mathscr{S}$ классических серий A_n [отвечает компактной группе $SU(n+1)$], B_n $(SO(2n+1))$, C_n $(\mathrm{Sp}(n))$, D_n $(SO(2n))$, рассмотрением которых мы здесь ограничимся, определяющее представление $\omega_{\mathscr{S}}$ является нетривиальным представлением низшей размерности, т. е. $\omega_{\mathscr{S}}$ — фундаментальное представление с $\dim \omega_{\mathscr{S}} = n+1$ для A_n и векторное для B_n $(\dim \omega_{\mathscr{S}} = 2n+1)$, D_n $(\dim \omega_{\mathscr{S}} = 2n)$ и C_n $(\dim \omega_{\mathscr{S}} = 2n)$. Присоединенное представление $\varphi_{\mathscr{S}} = \operatorname{ad} \mathscr{S}$ для этих алгебр выражается через $\omega_{\mathscr{S}}$ по следующим формулам: $\varphi_{A_n} = \omega \mathbin{\tilde{\otimes}} \omega^*$, $\varphi_{B_n, D_n} = A(\omega \otimes \omega)$, $\varphi_{C_n} = S(\omega \otimes \omega)$, где $*$ обозначает контраградиентное представление, тильда — отбрасывание одномерного тривиального представления, а A и S — антисимметризацию и симметризацию тензорного произведения.

Разложение определяющего представления $\omega_{\mathscr{S}}$ позволяет классифицировать подалгебры $\mathscr{R} \subset \mathscr{S}$ по числу нетривиальных неприводимых представлений каждого простого идеала из $\mathscr{R}$ в этом разложении. Поясним идею дальнейшего анализа на примере с простой алгеброй $\mathscr{R}$. Рассмотрим вложение $\mathscr{R} \subset \mathscr{S}$, для которого

$$\omega_{\mathscr{S}} \downarrow \mathscr{R} = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \zeta, \quad \omega_{\mathscr{S}} \neq \omega^*_{\mathscr{S}} \tag{71а}$$

или

$$\omega_{\mathscr{S}} \downarrow \mathscr{R} = \{\alpha_1\} + \ldots + \{\alpha_n\}, \ \omega_{\mathscr{S}} = \omega^*_{\mathscr{S}}, \tag{71б}$$

где $\{\alpha_i\} = \alpha_i$ при $\alpha_i = \alpha_i^*$ и $\{\alpha_i\} = \alpha_i + \alpha_i^*$ при $\alpha_i \neq \alpha_i^*$. Здесь α_i обозначает нетривиальное неприводимое представление $\mathscr{R}$, а ζ — набор (возможно, пустой) тривиальных представлений. Мы будем называть такие подалгебры и такие вложения n-подалгебрами и n-вложениями.

Возьмем вложение алгебры $\mathscr{R}$ в $\mathscr{S} = A_n$, отвечающее разложению (71а) с $n = 1$, т.е. 1-вложение. Тогда

$$\varphi_{\mathscr{S}} = \varphi_{A_n} = \omega_{\mathscr{S}} \tilde{\otimes} \omega^*_{\mathscr{S}} \to \alpha \tilde{\otimes} \alpha^* + \zeta \tilde{\otimes} \zeta^* + \chi + \alpha \otimes \zeta^* + \zeta \otimes \alpha^*. \tag{72}$$

Легко проверить, что $\zeta \tilde{\oplus} \zeta^*$ есть тривиальное представление $\mathscr{R}$, принадлежащее $\mathscr{B} = C_{\mathscr{S}}(\mathscr{R})$ — централизатору $\mathscr{R}$ в $\mathscr{S}$; еще одно тривиальное представление размерности 1 обозначено χ. В $\alpha \tilde{\otimes} \alpha^*$ обязательно содержится присоединенное представление ad $\mathscr{R}$ [106], а также, возможно, другие нетривиальные представления.

Разложению (71а) естественно соответствует разложение пространства представления

$$V_{\omega_{\mathscr{S}}} = V_\alpha \oplus V_\zeta, \tag{73}$$

которое порождает отвечающее (72) разложение пространства $V_{\omega_{\mathscr{S}}} \tilde{\otimes} \bar{V}_{\omega_{\mathscr{S}}}$ изоморфного алгебре Ли $\mathscr{S}$:

$$\mathscr{S} = V_\alpha \tilde{\otimes} \bar{V}_\alpha \oplus V_\alpha \otimes \bar{V}_\zeta \oplus V_\zeta \otimes \bar{V}_\alpha \oplus V_\zeta \tilde{\otimes} \bar{V}_\zeta \oplus V_\chi. \tag{74}$$

Если на $V_{\omega_{\mathscr{S}}} \tilde{\otimes} \bar{V}_{\omega_{\mathscr{S}}}$ ввести $\mathscr{S}$ — инвариантную билинейную форму (a, b^*), то на $V_{\omega_{\mathscr{S}}} \tilde{\otimes} \bar{V}_{\omega_{\mathscr{S}}}$ можно естественно определить структуру алгебры Ли формулой

$$[a \otimes b^*, \ c \otimes d^*] = a \otimes d^* (c, \ b^*) - c \otimes b^* (a, \ d^*).$$

Тогда централизатор $\mathscr{B} = \mathscr{B}' \oplus V_\chi$ с $\mathscr{B}' = V_\zeta \tilde{\otimes} \bar{V}_\zeta$ (в нашем примере $\mathscr{B}' = A_{l-1}$, где $l = \dim V_\zeta$).

В случае 1-вложений несложно разобраться, каким образом каждый член в (74) ведет себя при действии централизатора $\mathscr{B}$. Можно показать, что пространства $V_\alpha \otimes \bar{V}_\zeta$ и $V_\zeta \otimes \bar{V}_\alpha$ разлагаются в суммы подпространств V_s и $\overline{V}_s$ ($s = 1, \ldots, \dim V_\xi$), в каждом из которых реализуется неприводимое представление α, причем на каждом из множеств $\{V_s\}$ и $\{\overline{V}_s\}$ централизатор $\mathscr{B}$ действует транзитивно. Следовательно, ограничение присоединенного представления $\varphi_{\mathscr{S}} = \mathrm{ad}\mathscr{S}$ на $\mathscr{R} \oplus \mathscr{B}$ имеет вид

$$\varphi_{\mathscr{S}} \to [\alpha \tilde{\otimes} \alpha,\ 0]\,(0) + [\alpha,\ \beta]\,(1) + [\alpha,\ \beta^*]\,(-1) + \mathrm{ad}\,\mathscr{B}, \tag{75}$$

где β — неприводимое представление $\mathscr{B}'$ размерности $l = \dim V_\xi$ (в нашем примере $\beta = \omega_{A_{l-1}}$ — определяющее представление). Здесь, как и выше, в квадратных скобках указан тип представления относительно $\mathscr{R} \oplus \mathscr{B}'$, а цифры в круглых скобках — собственное значение выделенного вектора $\tilde{H}$ из V_χ в этом представлении.

Изучим теперь вопрос о неприводимости сплетающего оператора φ_x в случае, когда G/H — симметрическое пространство. Будем называть отображение φ_x тривиальным, если или $\varphi = 0$, или φ принадлежит тривиальному представлению $\mathfrak{C}$ в Ω.

Для симметрического пространства G/H с простой группой H представление $\alpha = \mathrm{ad}\,(\mathfrak{H})\,\mathfrak{M}$ неприводимо и не совпадает с тривиальным. Кроме того, в $\alpha \tilde{\otimes} \alpha$ содержится только одно представление типа $\mathrm{ad}\ \mathfrak{H}$ (т. е. $p_i = 0$ в формуле (52б) и $F_i = 0$ в (62б) и не содержится представлений типа α [27]). Пусть вложение $\tau\,(\mathfrak{H}) \subset \mathfrak{K}$ является 1-вложением и по аналогии с (71а)

$$\omega_{\mathfrak{K} \downarrow \tau(\mathfrak{H})} = \alpha' + \zeta'. \tag{76}$$

Тогда возможны два случая.

1. Представление $\mathrm{ad}\,(\mathfrak{H})\,\mathfrak{M} = \alpha$ эквивалентно α'. Тогда φ_x отображает $\mathfrak{M}$ в $V_{\alpha'} \otimes \overline{V}_{\zeta'} \oplus V_{\zeta'} \otimes \overline{V}_{\alpha'}$ и преобразуется по неприводимому представлению $[\beta]$ (1) относительно $\mathfrak{C}$.

2. Представление α не эквивалентно α'. В этом случае φ может сплетать $\mathrm{ad}\,(\mathfrak{H})\,\mathfrak{M}$ лишь с представлениями в $\alpha' \tilde{\otimes} \alpha'^*$, но из (75) ясно, что они преобразуются по тривиальному представлению $\mathfrak{C}$. Аналогичным способом можно рассмотреть полупростые 1-подалгебры $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ и 1-подалгебры, содержащие одномерный центр $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$. Можно сформулировать следующее утверждение [55]: для того чтобы в случае симметрического пространства G/H и классической калибровочной группы многомерной теории K редуцированная теория содержала только один неприводимый нетривиальный мультиплет скалярных полей, достаточно, чтобы $\tau\,(\mathfrak{H})$ была подалгеброй типа 1 в $\mathfrak{K}$, и представление α' в (76), определяющее вложение τ, было эквивалентно $\alpha = \mathrm{ad}\,(\mathfrak{H})\,\mathfrak{M}$. Это условие выполняется для регулярных вложений [54].

Конкретные примеры моделей с одним неприводимым мультиплетом скалярных полей, построенные этим методом, будут обсуждаться в разд. 4.

Развитый здесь метод можно распространить и на исключительные калибровочные группы K. Для алгебр Ли таких групп также существуют определяющие представления, однако они либо совпадают с присоединенным, либо последнее выражается через них сложным образом, своим для каждой алгебры [106]. Поэтому общие формулы в этом случае получить не удается, и аналогичный анализ нужно проводить для каждого конкретного случая.

3. СПОНТАННАЯ КОМПАКТИФИКАЦИЯ И РАЗМЕРНАЯ РЕДУКЦИЯ

В разд. 1 и 2 рассматривалась задача размерной редукции калибровочных теорий, заданных в многомерном пространстве E с фиксированной метрикой, отвечающей факторизованной структуре этого пространства: $E = M \times G/H$. Однако, как уже отмечалось во введении, более последовательным является подход, в котором пространство такой структуры и метрика на нем возникают динамически, как решение уравнений движения многомерной теории гравитации, возможно, взаимодействующей с полями материи или калибровочными полями. Эти решения объявляются классическим вакуумом системы, и их нахождение составляет основное содержание задачи спонтанной компактификации [8, 17—19, 29—32, 35, 36, 75—78].

Отметим, что в большинстве работ по спонтанной компактификации исследуется случай, когда дополнительные измерения компактифицируются в симметрическое пространство G/H. Случай произвольных однородных пространств, также представляющий физический интерес, рассмотрен в [35, 36, 78]. Основное внимание в этом разделе мы уделим взаимосвязи спонтанной компактификации и размерной редукции [75—78]. Эта взаимосвязь состоит в том, что, с одной стороны, решения многомерной теории могут быть интерпретированы на языке четырехмерной теории, а с другой — по простым решениям редуцированной теории (экстремумам потенциала скалярных полей) можно построить многомерные калибровочные поля, приводящие к спонтанной компактификации.

Уравнения спонтанной компактификации. На сегодняшний день известно несколько методов построения решений (механизмов) спонтанной компактификации. В многомерной теории гравитации, взаимодействующей с калибровочным полем, в первых работах [17—19] компактифицирующие классические поля $\hat{A}_m(\xi)$ сопоставлялись векторам Киллинга внутреннего пространства G/H. Позднее [29—32] был предложен другой метод, названный механизмом сопоставления связностей. В нем вакуумные поля $\hat{A}_m(\xi)$ приравнивались к $\mathfrak{H}$-компонентам канонической формы группы G, задающей инвариантную риманову (спиновую) связность на симметрическом пространстве G/H. В теориях $D = 11$ супергравитации наиболее популярным является механизм Фройнда — Рубина [26], в рамках которого компактификация обеспечивается вакуумным конденсатом антисимметричного абелева поля A_{MNP}, в некоторых вариантах учитываются также и конденсаты фермионных полей [25, 107]. Заметим, однако, что и в этих теориях оказывается применимым механизм сопоставления связностей, обобщенный на случай антисимметричных калибровочных полей [108, 109]. Задача спонтанной компактификации в суперструнах рассматривалась в [24].

Для того чтобы изложить некоторые принципиальные вопросы спонтанной компактификации, и прежде всего ее связь с методом размерной редукции, в качестве исходной многомерной теории возьмем теорию гравитации, взаимодействующей с калибровочным полем. Такой выбор обусловлен тем, что размерная редукция в чисто гравитационной теории приводит к серьезным трудностям, перечисленным во введении. С другой стороны, калибровочное и гравитационные поля являются полями геометрической природы и их взаимодействие определяется из общих геометрических принципов. Мы возьмем действие многомерной теории в псевдоримановом пространстве E ($\dim E = D = 4 + d$) в стандартном виде:

$$S = S_{\text{Э}} + S_{\text{ЯМ}}; \tag{77а}$$

$$S_{\text{Э}} = \int\limits_E d\hat{x} \sqrt{-\det \hat{g}} \left(\frac{1}{16\pi\tilde{\varkappa}} \hat{R} - \Lambda \right); \tag{77б}$$

$$S_{\text{ЯМ}} = \int\limits_E d\hat{x} \sqrt{-\det \hat{g}} \, \frac{1}{8\tilde{g}^2} \langle \hat{F}_{MN}, \hat{F}^{MN} \rangle, \tag{77в}$$

где $\hat{R}$ и Λ — скалярная кривизна и космологическая постоянная многомерного пространства; $\hat{g}$ — метрика в E, ее сигнатура выбрана в виде $\operatorname{sign} \hat{g} = (-, +, +, \ldots, +)$. Константа $\tilde{\varkappa}$ играет роль многомерной гравитационной постоянной, член $S_{\text{ЯМ}}$ — действие для калибровочного поля с калибровочной группой K, редукция которого обсуждалась в разд. 1 и 2. Таким образом, в качестве исходной многомерной теории мы выбрали теорию Эйнштейна — Янга — Миллса; многомерные обобщения нестандартных вариантов теорий гравитации и калибровочных теорий в нашем обзоре обсуждаться не будут (см. по этому поводу [110, 111]).

Как обычно в теории спонтанной компактификации мы будем изучать классические (вакуумные) решения уравнений движения, отвечающие факторизации пространства E, $E = M^4 \times G/H$:

$$\hat{g}_{MN} = \begin{pmatrix} \eta_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \gamma_{mn}(\xi) \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_\mu = 0, \quad \hat{A}_m = \hat{A}_m(\xi), \tag{78}$$

где $\eta_{\mu\nu} = \operatorname{diag}(-1, +1, +1, +1)$ — метрика Минковского, а γ — G-инвариантная метрика на G/H. Такой анзатц для основного состояния многомерной теории приводит к не зависящим от точек M^4 полям эффективной четырехмерной теории и обеспечивает пуанкаре-инвариантность в этом пространстве.

Подставляя (78) в многомерные уравнения Эйнштейна — Янга — Миллса, нетрудно получить уравнения спонтанной компактификации [17—19]:

$$\hat{R}_{mn} = -\frac{4\pi\tilde{\varkappa}}{\tilde{g}^2}\langle \hat{F}_{ml}, \hat{F}^l_n\rangle; \tag{79а}$$

$$\nabla_m \hat{F}^{mn} + [\hat{A}_m, \hat{F}^{mn}] = \partial_m \hat{F}^{mn} + \Gamma^l_{ml}\hat{F}^{mn} + [\hat{A}_m, \hat{F}^{mn}] = 0; \tag{79б}$$

$$\Lambda = -\frac{1}{8\tilde{g}^2}\langle \hat{F}_{mn}, \hat{F}^{mn}\rangle, \tag{79в}$$

записанные в некоторой системе координат $\{\xi^m\}$ в G/H. Поскольку Λ — константа, то для того, чтобы соотношение (79в) было непротиворечивым, достаточно потребовать, чтобы поле $\hat{A}_m(\xi)$ было G-симметричным.

Благодаря тому, что мы ограничились поиском симметричных вакуумов, сложную задачу решения системы нелинейных дифференциальных уравнений (79а), (79б) удается свести к системе нелинейных алгебраических уравнений. Действительно, вследствие G-симметричности уравнения (79а), (79б) можно решить в одной точке, а затем распространить решения на все многообразие G/H.

В силу G-инвариантности метрики γ и G-симметричности $\hat{A}_m(\xi)$ тензоры γ_{mn}, $\hat{R}_{mn}(\gamma)$ и $Q_{mn}(\gamma, \hat{A}) = -\langle \hat{F}_{ml}, \hat{F}^l_n\rangle$ являются G-инвариантными симметричными тензорами второго ранга. Известно, что множество таких тензоров в G/H находится во взаимно однозначном соответствии с множеством ad $\mathfrak{H}$ — инвариантных симметричных билинейных форм на $\mathfrak{M}$ [88, 112]. Следовательно, для того, чтобы найти наиболее общее выражение для G-инвариантной метрики γ, нужно разложить ad $(\mathfrak{H})$ $\mathfrak{M}$ на неприводимые представления, т.е. выписать разложения (52а), (53а). В дальнейшем мы ограничимся случаем, когда все $m_k = 1$ и $\dim A \leqslant 1$. Тогда искомая метрика в начале $o \in G/H$ задается формулой (55). С помощью базиса $\{v_a = v_{(k,r)}\}$ в $\mathfrak{M}$, удовлетворяющего $(v_{(k,r)}, v_{(l,s)}) = -\delta_{kl}\delta_{rs}$, компоненты метрики γ в точке $o \in G/H$ могут быть записаны в виде

$$\gamma_{ab} = \gamma_o(v_a, v_b), \quad \gamma_{(k,r)(k',s)} = \frac{1}{M_k^2}\delta_{kk'}\delta_{rs}. \tag{80}$$

Аналогично

$$\hat{R}_{(k,r)(k',s)} = \hat{R}_k(M_l^2)\,\delta_{kk'}\delta_{rs}; \tag{81а}$$

$$Q_{(k,r)(k',s)} = Q_k(M_l^2, \hat{A})\,\delta_{kk'}\delta_{rs}, \tag{81б}$$

где мы указали зависимость $\hat{R}_k$ и Q_k от параметров $M_l(l = 0,1, \ldots, N)$, имеющих размерность массы и характеризующих внутреннее пространство G/H; величины Q_k зависят также и от полевой конфигурации $\hat{A}_m(\xi)$.

В соответствии с формулой (24) произвольное G-симметричное поле на G/H, отвечающее анзацу (78), имеет вид

$$\hat{A}_m = \tau((\bar{\theta}_{\mathfrak{H}})_m) + \varphi((\bar{\theta}_{\mathfrak{M}})_m), \tag{82}$$

причем отображение φ не зависит от x. Здесь $(\bar{\theta}_{\mathfrak{H}})_m$ и $(\bar{\theta}_{\mathfrak{M}})_m$ являются коэффициентами разложения форм $\bar{\theta}_{\mathfrak{H}}$ и $\bar{\theta}_{\mathfrak{M}}$, т.е. $\mathfrak{H}$- и $\mathfrak{M}$-компонент формы $\bar{\theta}$, введенной в разд. 1, по базису $\{d\xi^m\}$: $\bar{\theta}_{\mathfrak{H}} = (\bar{\theta}_{\mathfrak{H}})_m\, d\xi^m$, $\bar{\theta}_{\mathfrak{M}} = (\bar{\theta}_{\mathfrak{M}})_m d\xi^m$. Если $\sigma(\xi) \in G$ есть некоторый выбор представителей в смежных классах из G/H [т.е. локальное сечение в главном H-расслоении $G = G(G/H, H)$], то форма $\bar{\theta}$ может быть вычислена по формуле [8,88]:

$$\bar{\theta} = (\sigma(\xi))^{-1}\, d\sigma(\xi).$$

При этом компоненты метрического тензора пространства дополнительных измерений в выбранной координатной окрестности имеют вид

$$\gamma_{mn}(\xi) = \sum_{ab} \bar{\theta}^a_m \bar{\theta}^b_m \gamma_{ab}.$$

Другими словами, компоненты формы $\bar{\theta}_{\mathfrak{M}}$ относительно базиса $\{v_a\}$ пространства $\mathfrak{M}$ образуют ортогональный, но, вследствие (80), ненормированный подвижный корепер в окрестности $o \in G/H$.

Отметим, что в механизме сопоставления связностей [29—32] используется частный случай формулы (82), а именно с $\varphi = 0$.

Решение уравнений спонтанной компактификации. Вследствие (81) уравнение (79а) принимает вид

$$\hat{R}_k(M^2_l) = \frac{4\pi\varkappa}{g^2} Q_k(M^2_l, \hat{A}), \quad k = 0, 1, \ldots, N, \tag{83}$$

где мы учли, что $\tilde{\varkappa}/\tilde{g}^2 = \varkappa/g^2$. Величины $\hat{R}_k$ как функции от M^2_l могут быть рассчитаны по стандартным формулам для тензора кривизны (см., например, [88, 113]). Вычисление $Q_k(M^2_l, \hat{A})$ эквивалентно вычислению отдельных частей потенциала скалярных полей в теории, полученной размерной редукцией из многомерной теории (77в) с метрикой (80) на калибровочных полях (82).

Обратимся теперь к уравнению (79б). Подставляя в него выражение (82), вычисляя символы Кристоффеля для метрики (80) и пользуясь уравнением Маурера — Картана для формы $\bar{\theta}$, можно получить следующее уравнение на отображение φ:

$$\frac{1}{2}\gamma_{cb}\gamma^{ef}\gamma^{da}C^c_{df}\hat{F}_{ae} + \gamma^{ad}[\varphi(v_d), \hat{F}_{ab}] = 0, \tag{84}$$

где γ^{ab} — матрица, обратная к γ_{ab}; C^c_{df} — структурная константа группы G, а величины $\hat{F}_{ab}$ суть компоненты $\hat{F}$ относительно неголономного подвижного корепера $\{\bar{\theta}^a\}$ [см. (28б)]:

$$\hat{F}_{mn}(\xi) = \hat{F}_{ab}\bar{\theta}^a_m\bar{\theta}^b_n;$$

$$\hat{F}_{ab} = [\varphi(v_a),\ \varphi(v_b)] - \tau([v_a,\ v_b]_{\mathfrak{H}}) - \varphi([v_a,\ v_b]_{\mathfrak{M}}). \qquad (85)$$

Уравнение (84) для изотропно неприводимых пространств было получено в работе [35]. Из (85) следует, что $\varphi = 0$ в общем случае не является решением (84). Однако нетрудно проверить, используя (80), что уравнение (84) имеет тривиальное решение, если среди представлений в $\mathfrak{M}$ нет представлений, эквивалентных представлениям, входящим в ad $\mathfrak{H}$, т.е. при том же условии, при котором $V^{(1)}(\varphi) = 0$ (58).

Для того чтобы выяснить смысл уравнения (84) и сформулировать эффективный способ его решения, воспользуемся методом размерной редукции. Нетрудно показать, что экстремумы действия (77в) в классе симметричных калибровочных полей являются экстремумами в классе всех полей [114]. Другими словами, отбрасывание несимметричных мод в гармоническом разложении для $\hat{A}_m(\xi)$ является согласованной процедурой в том смысле, что многомерные и четырехмерные уравнения движения для симметричных мод эквивалентны [42]. Легко проверить, что уравнение (79б) получается варьированием по $\hat{A}_m(\xi)$ эффективного действия

$$S_{\text{эф}} = -\frac{1}{8\tilde{g}^2}\int d\xi \sqrt{\det\gamma}\,\langle \hat{F}_{mn},\ \hat{F}^{mn}\rangle.$$

На симметричных полях подынтегральное выражение постоянно, поэтому его можно вычислить в точке $o \in G/H$ и проинтегрировать по $d\xi$. В результате, очевидно, $S_{\text{эф}}$ совпадает с выражением для скалярного потенциала $V(\varphi)$ редуцированной теории (28). Итак, мы пришли к выводу, что уравнения (84) эквивалентны уравнениям на экстремумы потенциала $V(\varphi)$ с учетом связей (50). Из формул типа (58)—(60) легко понять, что в $V(\varphi)$ входят также параметризующие метрику γ величины M_k^2 ($k = 0, 1, \ldots, N$), имеющие размерность квадрата массы.

Итак, мы получаем следующий алгоритм для нахождения решений уравнений спонтанной компактификации.

1. Вычислим методом размерной редукции скалярный потенциал в теории с действием (77в), рассматриваемой на G-симметричных полях (82). При этом потенциал будет функцией скалярных полей $f_s^{(k)}$, связанных с отображением φ формулами типа (54), и параметров M_l^2.

2. При фиксированном наборе параметров $\{M_l^2\}$ найдем экстремумы потенциала $\tilde{f}_s^{(k)} = \tilde{f}_s^{(k)}(M_l^2)$ как функции этих параметров.

3. Подставим отображение $\tilde{\varphi}$, построенное по $\tilde{f}_s^{(k)}(M_l^2)$, в Q_{mn} и вычислим величины $Q_k(M_l^2, \tilde{\varphi})$, входящие в правую часть (83). Тем

самым мы получим уравнения на величины M_l^2, причем число уравнений совпадает с числом неизвестных. Решив эту систему алгебраических уравнений, мы найдем решение уравнений Эйнштейна — Янга — Миллса.

Замечание: в общем случае потенциал $V(f)$ может иметь различные системы экстремумов при различных соотношениях между параметрами M_l^2 (см. пример из разд. 2). Поэтому необходимо исследовать все такие возможности.

В качестве примера применения изложенной выше схемы рассмотрим компактификацию дополнительных измерений в симметрическое пространство. Для простоты рассмотрим случаи, когда потенциал имеет вид [см. (68), (69)]:

$$V(f) = M^4 [\lambda (| f | ^2 - \rho)^2 + \chi], \tag{86}$$

где λ, ρ, χ — некоторые безразмерные константы, зависящие от конкретной модели, а M — единственный размерный параметр, задающий метрику на G/H; M^{-1} является характерным размером внутреннего пространства. Потенциал имеет два экстремума при любом $M : \tilde{f}_{(1)} = 0$ и $\tilde{f}_{(2)} \neq 0$ с $|\tilde{f}_{(2)}|^{(2)} = \rho$ (в данном примере $f_{(1),(2)}$ не зависят от M). Из определения (81б) следует, что $Q(M^2, \hat{A}) = V(\varphi)/(dM^2)$. Значит,

$$Q^{(1)} \equiv Q(M^2, \hat{A})\Big|_{\varphi=\tilde{\varphi}_{(1)}=0} = \frac{V(0)}{M^2 d} = \frac{M^2}{d}(\lambda\rho^2 + \chi);$$

$$Q^{(2)} \equiv Q(M^2, \hat{A})_{\varphi=\tilde{\varphi}_{(2)}} = \frac{V(\tilde{\varphi}_{(2)})}{M^2 d} = \frac{M^2}{d}\chi$$

[см. (68), (69)]. Левая часть уравнения (83) равна $\hat{R}(M^2) = R_d/dM^2$, где R_d — скалярная кривизна внутреннего пространства; $R_d = rM^2$, причем число r определяется только пространством G/H. В результате мы получаем два решения уравнений (79а), (79б):

$$M_{(1)}^2 = \frac{g^2}{4\pi\varkappa}\,\frac{r}{\lambda\rho^2 + \chi};\ \tilde{f}_{(1)} = 0,\ \tilde{A}_m^{(1)}(\xi) = \tau((\bar{\theta}_{\mathfrak{H}})_m); \tag{87а}$$

$$\left.\begin{aligned} &M_{(2)}^2 = \frac{g^2}{4\pi\varkappa}\,\frac{r}{\chi}\quad (\chi \neq 0);\ |\tilde{f}_{(2)}|^2 = \rho;\\ &\tilde{A}_m^{(2)}(\xi) = \tau((\bar{\theta}_{\mathfrak{H}})_m) + \tilde{\varphi}_{(2)}((\bar{\theta}_{\mathfrak{M}})_m). \end{aligned}\right\} \tag{87б}$$

В большинстве работ по спонтанной компактификации рассматривалось решение (87а) с $\varphi = 0$ [17—19, 29—31, 33, 34]; оно отвечает так называемой канонической инвариантной связности [88]. Решения (87б) изучались в работах [35, 41, 75—78]. Многомерная конфигурация калибровочного поля с $\varphi = 0$ отвечает неустойчивому локальному максимуму потенциала Хиггса (86) [поскольку $\chi > 0$, см. (59)], в то время как конфигурация (87б) отвечает хиггсовскому вакууму редуцированной теории и поэтому представляется физически более интересной. На наш взгляд, такая интерпретация решений теории спонтанной компактификации дает четкий критерий их физической адекватности, который должен учитываться при любой постановке задачи в этом подходе.

Так как в случае симметрического пространства тензор γ_{ab}, задающий метрику согласно (80), равен $\gamma_{ab} = \delta_{ab}/M^2$, то уравнение (84) принимает вид

$$\sum_a [\varphi(v_a), [\varphi(v_a), \varphi(v_b)] - \tau([v_a, v_b])] = 0. \tag{88}$$

Явным вычислением можно проверить, то оно имеет те же решения, что и уравнение на экстремумы потенциала редуцированной теории.

В механизме сопоставления связностей [29—31] вместо уравнения Янга — Миллса (79б) предлагается исследовать условие параллелизуемости

$$\nabla_m \hat{F}_{nl} + [\hat{A}_m, \hat{F}_{nl}] = \partial_m \hat{F}_{nl} - \Gamma^k_{mn}\hat{F}_{kl} - \Gamma^k_{ml}\hat{F}_{nk} + [\hat{A}_m, \hat{F}_{nl}] = 0,$$

которое фактически означает, что тензор напряженности $\hat{F}_{mn}$ постоянен при параллельном переносе в смысле калибровочной связности и связности Леви—Чивита, порожденной метрикой γ. Ясно, что любое решение условия параллелизуемости удовлетворяет уравнению (79б), т.е. это условие, вообще говоря, является более сильным, чем уравнение Янга—Миллса. С другой стороны, оно является более простым, что облегчает поиск компактифицирующих решений для симметрических пространств. Аналогично уравнению (79б) условие параллелизуемости может быть преобразовано к следующему уравнению на отображение φ:

$$[\varphi(v_a), [\varphi(v_b), \varphi(v_c)] - \tau([v_b, v_c]) = 0. \tag{89}$$

Если все $U^{(i)} = \{0\}$ в формуле (55б), то можно показать, что (88) и (89) эквивалентны в следующих случаях: а) $\mathfrak{H}$ — простая алгебра; б) $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ — полупростая алгебра, но индексы λ_1 и λ_2 равны (см. разд. 2); в) $[\varphi(T), \varphi(T)] = 0$. В других случаях уравнение (89) имеет лишь тривиальное решение, отвечающее канонической связности [см. (87а)]. Отметим, что в случах а) и б) гомоморфизм $\tau: H \to K$ продолжается до гомоморфизма $G \to K$, если отображение φ отвечает минимуму потенциала, и $\chi = 0$.

Рассмотрим теперь кратко пример спонтанной компактификации в несимметрическое однородное пространство $G/H = \mathrm{Sp}(2)/SU(2) \times U(1)$. Так как при этом $\mathrm{ad}(\mathfrak{H})\,\mathfrak{M} = [1](2) + [\underline{1}](-2) + [2] + (1) + [\underline{2}](-1)$, то инвариантная метрика на G/H характеризуется двумя параметрами: M_1^2 и M_2^2. Вычисление тензора кривизны дает: $\hat{R}_1 = 3 - 1/(2\beta)$; $R_2 = 2 + 1/(2\beta^2)$, где мы ввели обозначение: $\beta = M_2^2/M_1^2$.

Пусть $K = SU(5)$ и группа $H = SU(2) \times U(1)$ вложена в K так, что скалярное поле редуцированной теории преобразуется по фундаментальному представлению неабелевой части группы $C = SU(3) \times U(1)$ [71] (вопрос о спонтанном нарушении симметрии в этой модели анализировался в разд. 2). В соответствии с алгоритмом решения уравнений спонтанной компактификации, изложенным выше, вычислим сначала скалярный потенциал редуцированной теории и величины Q_1, Q_2;

$$V(f) = M_1^4 \left(\frac{12}{5}(3+\beta^2) - 4(2-\beta)|f|^2 + 3|f|^4\right);$$

$$Q_1 = M_1^4\left[\frac{3}{4}|f|^4 - 2|f|^2 + \frac{9}{5} + \frac{1}{2}\beta|f|^2\right];$$

$$Q_2 = M_1^4\left[|f|^2 + \frac{6}{5}\beta\right].$$

[Наш результат для $V(f)$ отличается от результата работы [71], а именно в этой работе член нулевой степени по $|f|$ равен $6M_1^2(3+2\beta^2)/5$.] Рассмотрим два случая: а) при $\beta \geqslant 2$ $V(f)$ имеет абсолютный минимум в точке $\tilde{f} = 0$; б) при $\beta < 2$ $V(f)$ имеет два экстремума: локальный максимум при $\tilde{f}_{(1)} = 0$ и абсолютный минимум при $|\tilde{f}_{(2)}|^2 = 2(2-\beta)/3$, зависящий от β. Подставив экстремальные значения $\tilde{f}$ в Q_1, Q_2, решим уравнения (83) и найдем соответствующие M_1^2 и $\beta = M_2^2/M_1^2$. В результате в данной модели получаем следующие два компактифицирующих решения:

1) решение, отвечающее неустойчивому локальному максимуму потенциала Хиггса:

$$M_1^2 \simeq 1{,}455\,\frac{g^2}{4\pi\varkappa}; \qquad \beta \simeq 1{,}312;$$

$$\tilde{f} = 0; \quad \tilde{A}_m(\xi) = \tau((\bar{\theta}_{\mathfrak{H}})_m);$$

2) решение, отвечающее хиггсовскому вакууму:

$$M_1^2 = \frac{5}{2}\,\frac{g^2}{4\pi\varkappa}; \quad \beta = \frac{1}{2}; \quad |\tilde{f}|^2 = 1; \quad \tilde{A}_m = \tau((\bar{\theta}_{\mathfrak{H}})_m) + \tilde{\varphi}((\bar{\theta}_{\mathfrak{M}})_m).$$

Мы видим, что в обоих случаях $\beta < 2$, т.е. динамика выбирает решение со спонтанным нарушением симметрии.

В заключение отметим, что решения уравнений спонтанной компактификации в явном виде для определенных симметрических пространств G/H и калибровочных групп K приведены в работах [17—19, 29—34, 75]; решения для несимметрических пространств обсуждались в [35, 36, 71]. Наконец заметим, что уравнение (79в) дает точную подстройку для космологической постоянной Λ.

Проблемы теории спонтанной компактификации. Важным вопросом является исследование стабильности компактифицирующих решений. Для этого изучают спектр флуктуаций вокруг такого вакуумного решения. Наличие мод с отрицательным квадратом массы (тахионов) свидетельствует о нестабильности. Интерпретация конфигураций калибровочных полей (78), являющихся решениями многомерных уравнений, в терминах экстремумов скалярного потенциала редуцированной теории оказывается существенной при анализе вопроса о стабильности таких решений. Действительно, рассмотрим флуктуации калибровочных полей в следующих случаях.

1. Пусть модель (т.е. тройка $[G/H,\ K,\ \tau]$) такова, что допускает нетривиальную размерную редукцию на M^4, т.е. существует ненулевой сплетающий оператор φ (50). Тогда решения, отвечающие максимуму потенциала $V(\varphi)$ [для симметрического пространства G/H это решения типа (87а)], очевидно, нестабильны, по крайней мере, относительно флуктуаций в секторе симметричных полей [33, 41].

2. Размерная редукция многомерной модели тривиальна в том смысле, что сплетающий оператор $\varphi \equiv 0$, т.е. в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{K}$ нет эквивалентных представлений. Такая ситуация возникает, например, если $K = H$ и в $\mathfrak{M}$ нет присоединенного представления алгебры $\mathfrak{H}$. Проведенные исследования показывают, что в этом случае решение (82) с $\varphi = 0$ оказывается стабильным [33, 34]. Однако после размерной редукции такие модели приводят к неудовлетворительным с физической точки зрения теориям.

3. Как следует из п. 1, в случае, когда теория допускает нетривиальную размерную редукцию, кандидатами на роль стабильных многомерных полевых конфигураций являются поля, отвечающие минимуму потенциала $V(\varphi)$ редуцированной теории [поля типа (87б) для симметрического пространства]. Впервые это предположение было выдвинуто в работе [75] и затем в [76] (см. также [77]). Конкретные расчеты для $G/H = S^2$ и $K = SU(3)$ подтверждают это предположение [75]. Заметим, что решение, отвечающее минимуму потенциала $V(\varphi)$, могло, вообще говоря, оказаться нестабильным относительно несимметричных флуктуаций. Отсутствие такой нестабильности в некоторых конкретных многомерных моделях позволяет надеяться на то, что вакуумные решения действительно являются G-симметричными и описываются анзатцем (80), (82).

Итак, опираясь на результаты размерной редукции калибровочных теорий, можно просто решить задачу анализа устойчивости многомерных вакуумных конфигураций относительно симметричных флуктуаций и определить массы этих флуктуаций. Для этого нужно лишь выяснить, какому экстремуму скалярного потенциала отвечает данное компактифицирующее решение или флуктуациям каких четырехмерных полей (калибровочных или скалярных) отвечают данные симметричные флуктуации многомерной теории [41]. Дальнейший анализ проводится так же, как и в стандартной четырехмерной модели Хиггса.

4. Особого рассмотрения требует случай, когда теория допускает нетривиальную редукцию, но отображение $\tilde{\varphi} \neq 0$, отвечающее минимуму потенциала, продолжает гомоморфизм $\tau : \mathfrak{H} \to \mathfrak{K}$ до гомоморфизма $\mathfrak{G} \to \mathfrak{K}$ в соответствии с (49). Тогда $V(\tilde{\varphi}) = 0$ [т.е. в случае симметрического пространства $\chi = 0$ в (86) и (87)], и уравне-

ния (79а), (79б) не имеют разумного решения для метрики и поля, отвечающего минимуму $V(\varphi)$. [Это просто увидеть, если свернуть (79а) по индексам m и n и учесть, что $\langle \hat{F}_{mn}, \hat{F}^{mn} \rangle = -V(\varphi)$.] Решение же $\varphi = 0$ является, конечно, нестабильным.

Сделаем несколько замечаний, касающихся этой ситуации. Во-первых, случай, когда $\tau : H \to K$ можно продолжить до гомоморфизма $G \to K$ (этот случай обозначают $H \subset G \subset K$), плох еще и потому, что при этом нельзя получить киральные фермионы в M^4 (см. разд. 4). Во-вторых, если группа изотропии H — простая, то при простейших (в частности, регулярных) вложениях $\tau(H) \subset K$ и $\operatorname{rank} G \leqslant \operatorname{rank} K$ всегда имеем $H \subset G \subset K$. Однако такие часто используемые в физических задачах пространства, как сферы S^l, реализуются в виде симметрических пространств $SO(l+1)/SO(l)$ с простой группой $H = SO(l)$. Для того чтобы преодолеть эту трудность, в [55] было предложено использовать специальные нерегулярные вложения $\tau(H) \subset K$ (n — вложения, см. разд. 2). Они позволяют построить многомерные модели в $M^4 \times S^l$, для которых потенциал редуцированной теории $V(\varphi)$ отличен от нуля в минимуме. Следовательно, в такой многомерной теории есть стабильное решение, компактифицирующее дополнительные измерения в сферу S^l.

Оказывается, что, как правило, учет флуктуаций гравитационного поля не меняет вывода о стабильности или нестабильности решений уравнений спонтанной компактификации [33, 75] (см., однако, разд. 4.2 первой работы в [34]).

Такая стабильность, конечно, не гарантирует стабильности на квантовом уровне, поэтому последняя требует особого рассмотрения [83]. Эта проблема тесно связана с подходом к спонтанной компактификации, основанным не на построении классических компактифицирующих решений и последующем квантовании теории на их фоне, а на нахождении компактифицирующих решений, существующих только за счет квантовых эффектов [115]. Этот подход представляет несомненный интерес, однако он также не лишен тех трудностей, которые уже упоминались во введении,— в первую очередь, трудностей с квантованием многомерных теорий. Компактификация за счет квантовых эффектов и проблемы квантовой стабильности заслуживают отдельного рассмотрения и в нашем обзоре больше затрагиваться не будут.

Заметим также, что, вообще говоря, не все стабильные компактифицирующие решения приводят к спонтанному нарушению симметрии в четырехмерной редуцированной теории. Известно, что в некоторых несимметрических пространствах G/H точка $f = 0$ может быть абсолютным минимумом потенциала [35, 71], и в этом случае нет спонтанного нарушения симметрии.

Отметим еще одну проблему, возникающую в задаче спонтанной компактификации. Согласно (79в) многомерная космологическая постоянная должна подстраиваться под интересующее нас решение уравнений (79а), (79б) и равняться

$$\Lambda = \frac{1}{8\tilde{g}^2} M^4 V(\varphi). \tag{90}$$

где M и φ отвечают этому решению. При этом четырехмерная космологическая постоянная равна нулю. Такая подстройка выглядит довольно неестественной и, по-видимому, в более общей теории должен существовать механизм, обеспечивающий равенство (90). Один из возможных путей решения этой проблемы обсуждался в [116].

В заключение раздела отметим, что в данном обзоре мы не затрагиваем такой интересный и обширный круг вопросов, как космологические модели, основанные на гипотезе дополнительных измерений, теориях типа Калуцы — Клейна и схеме спонтанной компактификации (по этому вопросу см. работы [117] и ссылки в них).

4. ПОИСКИ РЕАЛИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

В настоящем разделе мы дадим обзор предпринимавшихся в последние годы попыток построения методом размерной редукции многомерных калибровочных теорий физически интересных моделей в M^4. При этом исходная многомерная теория будет либо чисто калибровочной, либо теорией калибровочного поля, взаимодействующего минимальным образом с неприводимым мультиплетом спинорных полей. Такие теории содержат минимальное число свободных параметров, а именно набор величин M_k размерности массы, характеризующих G-инвариантную метрику на внутреннем пространстве G/H (55) и калибровочную константу g [напомним, что калибровочную группу многомерной теории мы считаем простой и что калибровочная константа этой теории равна $\tilde{g} = \sqrt{v(G/H)}\, g$, где $v(G/H)$ — объем внутреннего пространства].

Физические свойства редуцированных теорий. В рамках стандартных теорий великого объединения [1] и суперсимметричных теорий [2] удается объединить все фундаментальные взаимодействия, кроме гравитационного, при энергиях 10^{14}—10^{15} ГэВ. В теориях супергравитации [3], включающих и гравитационное взаимодействие, масштаб объединения оказывается равным массе Планка: $M_{\text{Pl}} = 1/\varkappa \simeq 10^{19}$ ГэВ. При этом одним из основных положений таких теорий является существование калибровочной иерархии. Считается, что при энергиях 10^{14}—10^{15} или 10^{19} ГэВ соответственно исходная калибровочная группа теории S нарушается до $SU(3)_c \times SU(2)_W \times U(1)_Y$, а затем при энергиях $M_W \simeq 100$ ГэВ — до $SU(3)_c \times U(1)_{em}$. Представим картину такого нарушения симметрий схематически в виде

$$S \xrightarrow[10^{15}\ \text{ГэВ}]{a_1} SU(3)_c \times SU(2)_W \times U(1)_Y \xrightarrow[10^{2}\ \text{ГэВ}]{a_2} SU(3)_c \times U(1)_{em}, \tag{91}$$

где около каждого этапа a_i $(i = 1, 2)$ указан характерный энергетический масштаб.

Наиболее популярным механизмом нарушения симметрии является механизм Хиггса. Он предполагает существование скалярных полей и потенциала их самодействия, содержащего параметры, иерархически отличные друг от друга. Поэтому одной из главных трудностей моделей объединения взаимодействий является объяснение происхождения скалярных полей и потенциалов, приводящих к (91).

Другой путь к решению проблемы объединения взаимодействий — рассмотрение теорий в пространствах с дополнительными измерениями. В связи с тем что в чисто гравитационных многомерных теориях не удалось построить реалистические модели, проводилось интенсивное исследование многомерных моделей, включающих гравитацию, калибровочные поля и, может быть, фермионы.Если калибровочная группа K простая, то такие системы содержат только два параметра, один из которых пропорционален четырехмерной гравитационной постоянной $\varkappa$, а другой — четырехмерному калибровочному заряду g. В отличие от чисто калибровочных многомерных теорий (см. разд. 2) в таких системах метрика является динамической переменной (см. разд. 3).

Конфигурации калибровочных полей, приводящие к спонтанной компактификации дополнительных измерений, калибровочно-неинвариантны, и поэтому симметрия K при спонтанной компактификации нарушается. Этот механизм был предложен как альтернатива к сильному спонтанному нарушению в стандартном подходе [шаг a_1 в (91)] в работе [18]. Массивные поля в гармоническом разложении вокруг вакуумного решения приобретают массу порядка M_{Pl} (что заменяет стандартный механизм Хиггса), а безмассовый сектор интерпретируется как «низкоэнергетический» сектор. В частности, те калибровочные бозоны, которые остаются безмассовыми (здесь речь идет о калибровочных бозонах, возникающих из многомерного калибровочного поля, а не из компонент метрики), отвечают группе ненарушенной симметрии R. Такой механизм схематически представляется диаграммой

$$\begin{array}{lcl} \dim E = 4+d & K & \\ & \quad {\scriptstyle 10^{19}\,\text{ГэВ}} \searrow {\scriptstyle a} & \\ \dim M^4 = 4 & \qquad R & \xrightarrow{\;б\;} SU(3)_c \times U(1)_{em} \end{array} \qquad (92)$$

Здесь энергетическая шкала сильного нарушения группы K (шаг a) возникает естественным образом из единственного размерного параметра теории $\varkappa$. Пунктирная линия в (92) (шаг $б$) означает, что механизм нарушения группы $R \supset SU(3)_c \times SU(2)_W \times U(1)_Y$ до $SU(3)_c \times U(1)_{em}$ не объясняется в данном подходе (например, может произойти динамически).

Основываясь на результатах размерной редукции чисто калибровочного сектора исходной многомерной теории (разд. 2), можно считать, что шаг a состоит из двух последовательных шагов:

$$
\begin{array}{ll}
\dim E = 4+d & K \\
 & \downarrow a_1 \\
\dim M^4 = 4 & C \xrightarrow[10^{19}\ \text{ГэВ}]{a_2} R
\end{array}
\qquad (93)
$$

Шаг a_1 соответствует геометрическому нарушению K до C, централизатора $\tau(H)$ в K, а шаг a_2 — последующему спонтанному нарушению симметрии за счет механизма Хиггса с потенциалом, возникшим в результате размерной редукции. Аналогия $a \leftrightarrow a_1 \cdot a_2$ следует из того, что устойчивые решения уравнений спонтанной компактификации отвечают минимуму потенциала Хиггса (см. разд. 3).

Идея работы [18] была развита в [60] в приложении к минимальной $D = 10$ суперсимметричной калибровочной теории с группой $K = E_8$. Известно, что одной из проблем суперсимметричных теорий является построение удовлетворительного механизма нарушения суперсимметрии, в котором суперсимметричные партнеры известных нам частиц приобрели бы большие массы. В [60] было показано, что на шаге a_1 в (93) нарушается, вообще говоря, не только симметрия K, но и суперсимметрия, а после шага a_2, в принципе, может возникнуть физически интересный набор низкоэнергетических полей. Это позволяет надеяться на то, что спонтанная компактификация сможет решить и проблему нарушения суперсимметрии.

Оказалось также, что сохранение или нарушение $N = 1$ суперсимметрии после размерной редукции зависит лишь от вида внутреннего пространства G/H, в которое компактифицируются дополнительные измерения. В работе [59] перечислены все шестимерные однородные пространства G/H с $\operatorname{rank} G = \operatorname{rank} H$ и указано, в каких случаях условия G-симметрии, налагаемые на поля, сохраняют $N = 1$ суперсимметрию в четырехмерном пространстве.

Модели, в которых параметры M_k, характеризующие инвариантную метрику, а следовательно, и размеры G/H, определяются в результате решения уравнений спонтанной компактификации и все порядка $M_{\text{Pl}} \simeq 10^{19}$ ГэВ, будем называть моделями типа I (см. разд. 3); нарушение симметрии в них описывается схемой (93). В литературе обсуждается также и другой подход к построению реалистических моделей методом размерной редукции. В рамках этого подхода основным является получение моделей с физически интересными калибровочными группами C и R и наборами полей.

Например, многомерная калибровочная теория и пространство дополнительных измерений выбираются так, чтобы калибровочная группа редуцированной теории C либо была одной из групп теорий великого объединения (ТВО) [$SU(5)$, $SO(10)$ и т.д.], либо просто содержала группу $SU(3)_c \times SU(2)_W \times U(1)_Y$ в качестве подгруппы. При этом нарушение симметрии происходит следующим образом:

$$\begin{array}{lcl} E & & K \\ & & \downarrow a_1 \\ M^4 & & C \xrightarrow{\;\;б\;\;} SU(3)_c \times U(1)_{em}, \end{array} \qquad (94)$$

где шаг (*б*) соответствует стандартной (иерархической) схеме нарушения симметрии, а группа $SU(3)_c \times SU(2)_W \times U(1)_Y$ является промежуточным этапом в этом нарушении. Такого рода модели будем называть моделями типа II; они исследовались в работах [58, 59, 67—69, 71—74] (см. также [118]). Некоторые результаты этих исследований приведены ниже. Здесь мы отметим лишь, что в работе [74] приведен почти полный список многомерных калибровочных теорий с калибровочной группой $K = E_8$, заданных в десятимерном пространстве $M^4 \times G/H$ с rank G = rank H, которые дают после размерной редукции один из вариантов ТВО [с $C = E_6$, $SO(10)$, $SU(5) \times U(1)$, $SU(3) \times SU(5) \times U(1)$ и др.]. В работе [68] был исследован конкретный вариант шага (*б*) схемы (94), когда группа C спонтанно нарушается до $R = SU(3)_c \times SU(2)_W \times U(1)_Y$, а дальнейшее нарушение до $SU(3)_c \times U(1)_{em}$ происходит, например, динамически за счет фермионных конденсатов:

$$\begin{array}{lcl} E & & K \\ & & \downarrow a_1 \\ M^4 & & C \xrightarrow[10^{15}\,\text{ГэВ}]{a_2} R = SU(3)_c \times SU(2)_W \times U(1)_Y \xrightarrow[10^{2}\,\text{ГэВ}]{б'} SU(3)_c \times U(1)_{em} \end{array} \qquad (95)$$

Были рассмотрены все случаи с rank G = rank H, $H \subset G \subset K$ и показано, что ни один из них не приводит к удовлетворительному фермионному сектору.

В литературе также часто рассматривают модели типа II, отвечающие такому выбору многомерной калибровочной теории, когда после размерной редукции возникает либо бозонный сектор модели Вайнберга — Салама с калибровочной группой $C = SU(2)_W \times U(1)_Y$ [21, 45, 54, 59, 85], либо модель сильных и электрослабых взаимодействий с калибровочной группой $C = SU(3)_c \times SU(2)_W \times U(1)_Y$ [59, 69]. За счет хиггсовских бозонов, возникших при размерной редукции, группа C нарушается спонтанно либо до $R = U(1)_{em}$, либо до $R = SU(3)_c \times U(1)_{em}$ соответственно:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
E & K \arrow[d, "a_1"'] \arrow[dr] & & \\
& & C=SU(2)_W\times U(1)_Y \arrow[r, "a_2"] & R=U(1)_{em} \\
M^4 & C=SU(3)_C\times SU(2)_W\times U(1)_Y \arrow[rr, "10^2\ \text{ГэВ}"'] & & R=SU(3)_C\times U(1)_{em}\,.
\end{tikzcd}
\tag{96}
$$

Из схем (94)—(96) ясно, что в моделях типа II параметры M_k, характеризующие инвариантную метрику, должны сильно отличаться от M_{Pl} и по порядку величины равняться либо масштабу великого объединения $M_{\text{ТВО}} \simeq 10^{15}$ ГэВ, либо масштабу электрослабого нарушения $M_W \simeq 10^2$ ГэВ. В связи с этим можно полагать, что многомерное пространство не является физической реальностью и лишь вскрывает симметрию четырехмерной модели (как у Калуцы и Клейна). Однако, на наш взгляд, интереснее считать дополнительные измерения физическими. В этом случае необходим механизм, приводящий к нужному изменению параметров M_k. Предполагается, например, что это может происходить за счет квантовых эффектов в результате перенормировки M_k, по крайней мере, для полей симметричного сектора (см. [59, 85]).

Проблемы фермионного сектора. Метод размерной редукции, распространенный на фермионные поля [21, 58, 59], был использован для построения четырехмерных моделей из многомерной теории, включающей фермионы [21, 58—60, 62, 65, 68, 69, 72, 73]. В большинстве работ использовалась локальная форма условия G-симметрии. Отметим, что глобальный геометрический язык для описания гармонического разложения полей материи был развит в [63]; в разд. 1 мы фактически изложили специальный случай работы [63], когда фермионные поля G-симметричные, а $E = M^4 \times G/H$ глобально.

Так же как и в разд. 1, зададим спинорное представление группы $SO(1, D-1)$ с помощью матриц Γ^A ($A = 0, 1, \ldots, D-1$) [см. (37)], действующих в линейном пространстве размерности $2^{[D/2]}$ и обобщающих матрицы Дирака [21, 60]. Это представление неприводимо для нечетных D и приводимо для четных D. Для получения киральных теорий в M^4 методом размерной редукции необходимо рассматривать лишь четные D. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что D — четное. Как и прежде, оператор киральности Γ^{D+1} будет определяться формулой (39), а алгебру $SO(1, D-1)$ реализуем набором матриц $\Sigma^{AB} = [\Gamma^A, \Gamma^B]/4$.

Оператор киральности Γ^{D+1}, обладающий свойством $(\Gamma^{D+1})^2 = 1$, выделяет неприводимые представления $\Delta_D^{\pm}$ ($\Delta_D = \Delta_D^+ + \Delta_D^-$) как представления с определенной (± 1) D-мерной киральностью. Как обычно, будем называть левыми (правыми) частицы, волновые функции которых преобразуются по представлению Δ_D^+ (Δ_D^-) группы

$SO\ (1, D-1)$. При ограничении на подгруппу $SO\ (1, 3) \times SO\ (d)$ в соответствии со структурой многомерного пространства $E = M^4 \times G/H$ представления определенной киральности разлагаются на сумму двух неприводимых представлений:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_D^+ \downarrow SO\,(1,\ 3) \times SO\,(d) &= (\Delta_4^+,\ \Delta_d^+) + (\Delta_4^-,\ \Delta_d^-); \\ \Delta_D^- \downarrow SO\,(1,\ 3) \times SO\,(d) &= (\Delta_4^+,\ \Delta_d^-) + (\Delta_4^-,\ \Delta_d^+). \end{aligned}\right\} \tag{97}$$

Здесь видна корреляция между киральностью в E и киральностями в M^4 и G/H, следующая из соотношения (40). Заметим также, что симметричное спинорное (спин 1/2) поле в E редуцируется к спинорному полю в M^4, в отличие, например, от векторного поля, размерная редукция которого дает не только векторные, но и скалярные поля в M^4.

Рассмотрим в многомерном пространстве E калибровочную теорию со спинорным полем определенной киральности, преобразующимся по представлению δ группы $SO\ (1, D-1) \times K$, $\delta = (\Delta_D^+, \alpha)$. Напомним, что спиноры определенной киральности называются вейлевскими; условие Вейля можно наложить лишь для четных D. Тогда G — симметричное спинорное поле в E эквивалентно спинорному полю в M^4, преобразующемуся по представлению $\bar{\delta}$ группы $SO\ (1, 3) \times C$. Для нахождения $\bar{\delta}$ по заданному δ воспользуемся леммой Шура. Действительно, пусть имеют место следующие разложения:

$$\Delta_d^{\pm} \downarrow \lambda\,(H) = \sum_j \varepsilon_j^{\pm}; \tag{98а}$$

$$\alpha \downarrow \tau\,(H) \times C = \sum_k (\alpha_k,\ h_k). \tag{98б}$$

Здесь λ и τ — гомоморфизмы, определенные в разд. 1: $\lambda : H \to O\ (d)$, $\tau : H \to K$. Тогда

$$\begin{aligned} &\delta \downarrow SO\ (1,\ 3) \times \beta\,(H) \times C = \\ &= \sum_{j,\,k} (\Delta_4^+,\ \varepsilon_j^+ \otimes \alpha_k,\ h_k) + \sum_{j,\,k} (\Delta_4^-,\ \varepsilon_j^- \otimes \alpha_k,\ h_k), \end{aligned} \tag{99}$$

где $\beta\ (H) = \mathrm{diag}\ (\lambda\ (H) \times \tau\ (H))$. Так как $\bar{\delta}$ является подпредставлением в δ, тривиальным относительно $\beta\ (H)$ [см. (44)], и из леммы Шура следует, что тривиальное представление присутствует в $\varepsilon_j^{\pm} \otimes \alpha_k$, только если $\varepsilon_j^{\pm} = \alpha_k^*$ (и в этом случае одномерно), то мы получаем что

$$\bar{\delta} = \sum_{k^+} (\Delta_4^+,\ h_{k^+}) + \sum_{k^-} (\Delta_4^-,\ h_{k^-}). \tag{100}$$

Индекс k^+ (k^-), по которому ведется суммирование, определяется следующим образом: каждой паре ε_j^+, α_k (ε_j^-, α_k), такой, что $\varepsilon_j^+ = \alpha_k^*$ ($\varepsilon_j^- = \alpha_k^*$), сопоставляется представление $h_k^+ = h_k$ ($h_{k^-} = h_k$).

Если

$$h^{(L)} = \sum_{k^+} h_{k^+} \neq h^{(R)} = \sum_{k^-} h_{k^-}, \tag{101}$$

то редуцированная теория является киральной, т. е. имеет лево-правую асимметрию.

Как отмечено в [21], для того чтобы теория в E с симметричными вейлевскими спинорами редуцировалась к киральной модели в M^4, необходимо, чтобы $\mathrm{rank}\ G = \mathrm{rank}\ H$ и многомерная теория не была векторноподобной, т. е. представление α было несамосопряженным.

В теориях типа I для низкоэнергетической ($\leqslant 10^2$ ГэВ) физики существенны только те симметричные фермионы, которые не приобретают массу после размерной редукции и спонтанного нарушения группы C. Поэтому теории типа I будем называть киральными, если выполняется более сильное, чем (101), условие:

$$\Big(\sum_{l^+} r_{l^+}\Big)_{(0)} \neq \Big(\sum_{l^-} r_{l^-}\Big)_{(0)}, \tag{102}$$

где индекс (0) означает, что берутся лишь представления, отвечающие безмассовым фермионам, а $\sum_{l^+} r_{l+} = (\sum_{k^+} h_{k+}) \downarrow R$.

Киральность в теориях типа I определяется топологическим инвариантом [21], который связан с теоремой Атьи — Зингера об индексе оператора Дирака во внешнем поле $\hat{A}$ на пространстве дополнительных измерений G/H (см., например, [87]). Из этого топологического инварианта, названного в работе [21] G-индексом, в частности, следует, что если τ можно продолжить до гомоморфизма $G \to K$ (как и прежде, будем писать $H \subset G \subset K$), то

$$\Big(\sum_{k^+} h_{k^+}\Big)_{(0)} = \Big(\sum_{k^-} h_{k^-}\Big)_{(0)}; \tag{103а}$$

$$\Big(\sum_{l^+} r_{l^+}\Big)_{(0)} = \Big(\sum_{l^-} r_{l^-}\Big)_{(0)} \tag{103б}$$

и лево-правая асимметрия в редуцированной теории не возникает [21]. Напомним также, что случай $H \subset G \subset K$ плох еще и тем, что для него не удается построить решения уравнений спонтанной компактификации, отвечающие абсолютному минимуму потенциала редуцированной теории. Кроме того, как было показано в [65], если $H \subset G \subset K$, то равенство (103б) имеет место и без индекса (0). Итак, хотя в теориях типа II с $H \subset G \subset K$ может иметь место условие киральности (101), но после спонтанного нарушения симметрии теория перестает быть киральной. Данное обстоятельство могло бы быть в согласии с феноменологическими данными, если бы $R = SU(3)_c \times U(1)_{em}$. Однако, как показало исчерпывающее исследование в работе [69] (см. также [73]), в тех случаях, когда $H \subset G \subset K$ и $R = SU(3)_c \times U(1)_{em}$, не удается получить методом размерной редукции фермионный сектор с правильными квантовыми числами.

Долгое время теории, в которых $H \subset G \subset K$ [59, 68, 69, 72, 118], считались предпочтительными для исследования, так как в них калибровочная группа R и состав физических полей после спонтанного нарушения симметрии могут быть определены без явного вычисления скалярного потенциала редуцированной теории [49]. Из вышесказанного, однако, следует, что размерная редукция таких теорий не приводит к физически интересным моделям. Поэтому исследовались также случаи, когда гомоморфизм τ не может быть продолжен до гомоморфизма $G \to K$ [55, 69—71, 78]. При этом развивались как общие методы вычисления потенциала редуцированной теории [55], так и методы нахождения группы ненарушенной симметрии R без явного вычисления этого потенциала [70, 78].

Если размерность пространства-времени $D = 4n + 2$, то на фермионы можно наложить одновременно условия Вейля и Майорана [59]. В этом случае удается получить методом размерной редукции киральные теории в M^4, даже если исходная многомерная теория векторноподобная (т. е. $\alpha = \alpha^*$). Интерес к векторноподобным теориям обусловлен тем, что они часто возникают в суперсимметричных подходах и в супергравитации. Одновременное наложение условий Майорана и Вейля вдвое сокращает число степеней свободы по сравнению с тем, когда налагается лишь одно из условий, и приводит к тому, что второе слагаемое в разложении (100) описывает античастицы по отношению к первому слагаемому.

Спектр масс фермионов (т. е. спектр оператора Дирака в калибровочном поле) вычисляется, например, в работе [34], а для симметричных фермионных полей в [60, 73].

Реалистические модели. Выше обсуждались основные свойства моделей в M^4, полученных размерной редукцией из многомерных калибровочных теорий. Теперь мы приведем несколько характерных примеров моделей типа II (см. начало разд. 4), представляющих интерес с точки зрения физики взаимодействий частиц.

В ряде работ предпринимались попытки построения бозонного сектора модели Вайнберга — Салама методом размерной редукции из чисто калибровочной теории, заданной в многомерном пространстве $E = M^4 \times G/H$ [45, 54, 85]. Примеры получения модели Вайнберга — Салама, включающей фермионы с нужной киральностью, рассматривались в [21, 59] (задача построения модели электрослабых взаимодействий с помощью многообразий аффинной связности с кручением в рамках подхода Калуцы — Клейна обсуждалась в [119]). Так, в работе [45] изучались калибровочные теории в шестимерном пространстве $M^4 \times S^2$, где $S^2 = CP^1 = SU(2)/U(1)$ — двумерная сфера с калибровочными группами $K = SU(3)$, $SO(5)$ и G_2. Размерная редукция этих теорий приводит к четырехмерной модели с калибровочной группой $C = SU(2) \times U(1)$ и скалярными полями, преобразующимися по фундаментальному представлению неабелевой части группы C. Результаты работы [45] были существенно расширены в [54, 85]. А именно, были изучены случаи, когда G/H — симметрическое пространство, реализованное классическими группами G и H, а K — произвольная простая группа Ли, причем вложения $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ и $\tau(\mathfrak{H}) \subset \mathfrak{K}$ — регулярные. В результате размерной редукции мы получаем бозонный сектор модели Вайнберга — Салама, причем физические параметры этой модели определяются калибровочной константой многомерной теории g, обратным размером M и размерностью d внутреннего пространства. Потенциал скалярных полей редуцированной теории имеет вид (69). Приведя четырехмерное действие к каноническому виду путем домножения скалярного поля $f_s(x)$ $(s = 1, 2)$ на константу, нетрудно вычислить массы M_W, M_Z векторных бозонов и массу M_H бозона Хиггса после спонтанного нарушения симметрии. В табл. 1 приведены выражения для масс и для величины $\sin^2\theta_W$, где θ_W — угол Вайнберга, определяемый стандартным образом: $\cos^2\theta_W = M_W^2/M_Z^2$. В этой таблице $\mathbb{C}P^m$ обозначает комплексное проективное пространство, а $G_{2,\,m+2}(\mathbb{R})$ — вещественное грассманово многообразие.

Величина $\sin^2\theta_W$ определяется лишь целочисленным параметром d и принимает дискретный ряд значений. Таким образом, размерность внутреннего пространства может быть фиксирована из условия наилучшего согласия $\sin^2\theta_W$ с экспериментальным значением $(\sin^2\theta_W)^{\exp} = 0{,}233 \pm 0{,}009$ [120]. Исходя из этого возможными кандидатами на роль многомерной фундаментальной теории, редуцируемой к бозонному сектору модели Вайнберга — Салама, являются теории 2 (при $d = 6$ или $d = 8$), 3,4 из табл. 1, для них $\sin^2\theta_W = 0{,}25$ или $0{,}2$. Предполагают, что небольшое различие между $\sin^2\theta_W$ и $(\sin^2\theta_W)^{\exp}$ может быть объяснено квантовыми поправками (см. [85]). Соответствующим выбором параметров g^2 и M^2 можно получить правильные значения для постоянной тонкой структуры и, например, для M_Z^2. Тогда масса W-бозона $M_W = M_Z\cos\theta_W$ будет близка к экспериментальному значению, а для M_H мы получим предсказание. В большинстве случаев выполняется равенство $M_H = M_Z$ (см. табл. 1); для $K = F_4$ и $G/H = CP^3$ $M_H = \sqrt{5}M_Z$.

В качестве иллюстрирующего примера модели типа II с двумя размерными параметрами рассмотрим теорию с калибровочной группой $K = E_8$, заданную в пространстве $E = M^4 \times G/H$, где $G/H = SO(10)/SU(5)$ [58]. Эта модель интересна тем, что в ней из-за наличия двух массивных параметров шаг б в (94) можно разбить на два шага спонтанного нарушения симметрии при двух различных масштабах энергий. Калибровочная группа редуцированной теории есть $C = SU(5)$, а так как гомоморфизм τ можно продолжить до гомоморфизма $G = SO(10) \to K = E_8$, то группа ненарушенной симметрии $R = SU(4)$. Разложения (52а), (52б) представлений $\operatorname{ad}(\mathfrak{H})\,\mathfrak{M}$ и $\operatorname{ad}\mathfrak{K}$ на неприводимые представления алгебры $\mathfrak{H} = su(5)$ и $\tau(\mathfrak{H}) \oplus \mathfrak{C} = su(5) \oplus su(5)$ имеют вид

$$\operatorname{ad}(\mathfrak{H})\,\mathfrak{M} = \underline{1} + \underline{10} + \underline{10}^*;$$

$$\operatorname{ad}\mathfrak{K} = \underline{248} \to [\underline{5},\ \underline{10}^*] + [\underline{5}^*,\ \underline{10}] + [\underline{10},\ \underline{5}] + [\underline{10}^*,\ \underline{5}^*] + [\underline{24},\ 1] + [\underline{1},\ \underline{24}].$$

Таблица 1. **Значения параметров (массы W- и Z-бозонов и бозона Хиггса, величина $\sin^2 \theta_W$) бозонного сектора модели Вайнберга — Салама, полученного размерной редукцией чисто калибровочной теории с калибровочной группой K, заданной в многомерном пространстве $M^4 \times G/H$; $d = \dim G/H$**

Номер теории	G/H	d	K	M_W	M_Z	M_H	$\sin^2 \theta_W$
1	$CP^m = SU(m+1)/SU(m) \times U(1)$	$2m$	$SU(m+2)$	$M\sqrt{m}$	$M\sqrt{2(m+1)}$	$M\sqrt{2(m+1)}$	$\frac{m+2}{2(m+1)}$
2			$\mathrm{Sp}(m+1)$	$M\sqrt{2m}$	$M\sqrt{2(m+1)}$	$M\sqrt{2(m+1)}$	$\frac{1}{m+1}$
3			F_4 при $m=3$	$M\sqrt{6/5}$	$M\sqrt{8/5}$	$M\sqrt{8}$	0,25
4			G_2 при $m=1$	$M\sqrt{3}$	$2M$	$2M$	0,25
5	$G_{2,\,m+2}(\mathbf{R}) = SO(m+2)/SO(m) \times U(1)$	$2m$	$SO(m+2)$	$M\sqrt{m}$	$M\sqrt{2m}$	$M\sqrt{2m}$	0,5

В соответствии с общей теорией (см. разд. 2), разрешая уравнения связи (50), получаем, что скалярные поля преобразуются по представлениям $\underline{5}$ и $\underline{24}$ калибровочной группы $C = SU(5)$, т. е. мы получили набор скалярных полей стандартной минимальной $SU(5)$-модели великого объединения (см., например, [121]). Число векторных бозонов, приобретающих массу за счет механизма Хиггса, равно $\dim C - \dim R = 9$. Масса одного из этих бозонов, связанного с генератором $U(1)$ подгруппы $SU(4) \times U(1) \subset SU(5)$, равна $M_A = \sqrt{8}\, M_2$, а массы остальных — $M_B = \sqrt{25M_1^2/16 + 4M_2^2}$. В этих формулах M_1 и M_2 — параметры, задающие $SO(10)$-инвариантную метрику на $G/H = SO(10)/SU(5)$, причем M_1 отвечает инвариантному подпространству представления $\underline{10}$ алгебры $\mathfrak{H}$ [58]. Если $M_1 \gg M_2$, то могла бы возникнуть калибровочная иерархия с промежуточной калибровочной группой $SU(4) \times U(1)$. Однако в секторе скалярных полей имеются лишь бозоны с массами порядка M_2 и $M_2^2/M_1 \ll M_2$ и нет хиггсовских частиц с массами порядка массы тяжелого векторного бозона. Это не позволяет реализовать непосредственно стандартную схему иерархического нарушения симметрий и требует привлечения других механизмов (например, механизма Коулмена — Вайнберга).

Отметим еще раз, что в этом обзоре мы всегда считаем гомоморфизм $\tau : H \to K$ инъективным. Однако для непростой группы H это требование может быть ослаблено, что дает новые возможности для построения редуцированных моделей [122].

В работах [59, 68, 72—74] предпринимались попытки построения методом размерной редукции теорий великого объединения с фермионами, представляющих интерес для физики. В основном исследовался вопрос о составе полей редуцированной теории без вычисления четырехмерного действия и выяснения группы ненарушенной симметрии R. В качестве характерного примера рассмотрим минимальную суперсимметричную теорию с калибровочной группой $K = E_8$ в десятимерном пространстве $M^4 \times G/H$. Размерная редукция почти для всех таких теорий с $\mathrm{rank}\, G = \mathrm{rank}\, H$ (это необходимое условие киральности редуцированной теории) была изучена в работе [74]; не был рассмотрен лишь случай с внутренним пространством $G/H = SU(3)/U(1) \times U(1)$. Конкретно мы рассмотрим теорию с $G/H = \mathrm{Sp}(2)/SU(2) \times U(1)$, где вложение $H \subset G$ такое, что G/H — несимметрическое пространство [74]. В этом случае калибровочная группа редуцированной теории $C = SU(3) \times SU(5) \times U(1)$, а разложения (52) для $\mathrm{ad}\, \mathfrak{G} \downarrow \mathfrak{H}$ и $\mathrm{ad}\, \mathfrak{K} \downarrow \tau(\mathfrak{H}) \oplus \mathfrak{C}'$ имеют вид [102]:

$$\mathrm{ad}\, \mathfrak{G} = \underline{10} \to \underline{3}(0) + \underline{1}(0) + \underline{1}(2) + \underline{1}(-2) + \underline{2}(1) + \underline{2}^*(-1); \tag{104а}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}\, \mathfrak{K} = \underline{248} \to {} & [\underline{1}, \underline{1}, \underline{5}](6) + [\underline{1}, \underline{3}^*, \underline{5}](-4) + [\underline{2}, \underline{3}, \underline{5}](1) + \\ & + [\underline{2}, \underline{1}, \underline{10}](3) + [\underline{1}, \underline{3}, \underline{10}^*](-2) + [\underline{2}, \underline{3}, \underline{1}](-5) + \mathrm{h.c.} + \\ & + \mathrm{ad}\, \tau(\mathfrak{H}) + \mathrm{ad}\, \mathfrak{C}', \end{aligned} \tag{104б}$$

где в квадратных скобках указаны типы представлений относительно $\mathfrak{H}' = su\,(2)$ и $\mathfrak{C}' = su\,(3) \oplus su\,(5)$ — неабелевых частей алгебр $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{C}$ соответственно. В (104б) мы в явном виде выделили $\mathrm{ad}\,\tau\,(\mathfrak{H}) = [\underline{3}, \underline{1}, \underline{1}]\,(0) + [\underline{1}, \underline{1}, \underline{1})\,(0)$ и $\mathrm{ad}\,\mathfrak{C}' = [\underline{1}, \underline{8}, \underline{1}]\,(0) + [\underline{1}, \underline{1}, \underline{24}]\,(0)$. Сравнив разложения ($\overline{1}$04а) и (104б) и выделив в них эквивалентные представления, получим, что скалярные поля преобразуются по представлению $[\underline{3}, \underline{10}^*]\,(-2) + [\underline{3}, \underline{5}]\,(1)$ группы $C = SU\,(3) \times \times SU\,(5) \times U\,(\overline{1})$.

Найдем теперь состав фермионных полей. Вейлевско-майорановские спиноры преобразуются по присоединенному представлению $\alpha = \mathrm{ad}\,\mathfrak{K} = \underline{248}$ калибровочной группы K (для E_8 это представление наименьшей размерности). Разложение (98а) для спинорного представления левой киральности $\Delta_6^+ = \underline{4}$ группы $SO\,(6)$, ограниченного на подгруппу $\lambda\,(H)$, имеет вид

$$\Delta_6^+ = \underline{4} \to \underline{1}\,(2) + \underline{1}\,(0) + \underline{2}\,(-1), \tag{105}$$

а разложение типа (98б) совпадает с (104б). В соответствии с результатами, изложенными выше в этом разделе, из (105) и (104б) следует, что левые фермионы редуцированной теории преобразуются по несамосопряженному (и, следовательно, киральному) представлению $[\underline{3}, \underline{10}^*]\,(-2) + [\underline{3}, \underline{5}]\,(1) + [\underline{1}, \underline{1}]\,(0) + [\underline{8}, \underline{1}]\,(0) + [\underline{1}, \underline{24}]\,(0)$ группы C. Мы видим, что состав бозонных и фермионных полей и их представления отвечают $N = 1$ суперсимметрии редуцированной теории. При этом фермионный сектор включает в себя фермионный сектор минимальной $SU\,(5)$-модели с тремя поколениями, если отождествить подгруппу $SU\,(3) \subset C$ с симметрией ароматов. Однако скалярный сектор содержит лишь поля, отвечающие электрослабому нарушению, и не содержит полей в присоединенном представлении группы $SU\,(5)$, ответственных за первый этап нарушения $SU\,(5) \to \to SU\,(3) \times SU\,(2) \times U\,(1)$ стандартной схемы [121]. Другие варианты многомерных теорий, рассмотренные в [74], также не дают удовлетворительных со всех точек зрения четырехмерных моделей. Возможно, что ситуацию удастся улучшить, если учесть «первичные» хиггсовские частицы в многомерном пространстве, присутствующие в $N = 1$ суперсимметричной E_8-теории. Можно также попытаться использовать другие геометрические механизмы спонтанного нарушения (например, «вильсоновские петли» [123]) параллельно с размерной редукцией.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развитие теорий Калуцы — Клейна идет сейчас по многим направлениям, причем каждое из них исследует, как правило, какой-либо один аспект этого подхода. Поэтому многочисленные результаты, полученные в разных областях, часто могут быть связаны между собой только предположениями, догадками, а иногда и просто вольным полетом фантазии. Однако в этой пестрой мозаике уже заметны контуры образований, состоящих из достаточно строгих в математическом отношении результатов, которые тесно переплетаются между собой и выстраиваются в четкие логические цепочки, несмотря на то, что они относятся к разным аспектам теорий Калуцы — Клейна. По нашему мнению, одно из таких образований составляют результаты, относящиеся к размерной редукции симметричных калибровочных полей.

Действительно, первоначально возникшие в задаче о физической интерпретации многомерных теорий в терминах четырехмерных полей, т. е. в задаче размерной редукции, эти поля, как выяснилось впоследствии, играют важную роль и в теории спонтанной компактификации, что позволяет дать естественную физическую интерпретацию решениям этой теории и логически связать эти два важнейших аспекта теорий Калуцы — Клейна.

Сектор симметричных полей представляет также физический интерес: именно с полями этого сектора связаны практически все попытки построения реалистических моделей, являющихся низкоэнергетическим пределом многомерных теорий и естественно приводящих к объединению различных типов взаимодействий. Важным моментом является согласованность в этом секторе четырехмерных и многомерных теорий в том смысле, что между решениями их уравнений движения существует взаимно однозначное соответствие. Особо следует подчеркнуть, что такие четырехмерные теории оказываются перенормируемыми, т. е. могут быть исследованы с помощью существующих теоретических методов.

Разумеется, в секторе симметричных полей есть еще не решенные проблемы. Наиболее важной из них нам представляется проблема квантования. Конечно, она является частью общей проблемы квантования многомерных теорий, и ее решение позволит глубже понять связь симметричного и несимметричного секторов, а также, возможно, прольет свет на происхождение иерархии энергий нарушения симметрии. Очень вероятно, что решение этой проблемы возможно только в рамках конечных суперсимметричных теорий.

Во всяком случае, сектор симметричных полей представляет собой интересное и целостное образование, которое естественно возникает в теориях Калуцы — Клейна с однородными внутренними пространствами, и его существование обязательно должно приниматься во внимание при дальнейшем развитии этого направления.

Прояснению многих вопросов, затронутых в обзоре, способствовало обсуждение их с Л. Бенту, Г. Ю. Богословским, В. Г. Кадышевским, Н. Г. Козимировым, В. А. Рубаковым, И. И. Ткачевым, А. Ульманом и Д. В. Ширковым. Всем им авторы выражают искреннюю признательность. Авторы также благодарны В. Е. Троицкому за внимание к работе и поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Матинян С. Г.**//УФН. 1980. Т. 130. Вып. 1. С. 3—38; **Гелл-Ман М., Рамон П., Сланский Р.**//УФН. 1980. Т. 130. Вып. 3. С. 459—505; Rev. Mod. Phys. 1978. Vol. 50, N° 4. P. 721—744; **Langacker P.**//Phys. Rept. C., 1981. Vol. 72, N° 4. P. 185—385.

2. **Огиевецкий В. И., Мезинческу Л.**//УФН. 1975. Т. 117. Вып. 4. С. 637—683; **Fayet P., Ferrara S.**//Phys. Rept. C. 1977. Vol. 32, N°5. P. 249; **Славнов А. А.**//УФН. 1978. Т. 124. Вып. 3. С. 487—508.

3. **van Nieuwenhuizen P.**//Phys. Rept. C. 1981. Vol. 68, N°4. P. 189; **Весс Ю., Беггер Дж.** Суперсимметрия и супергравитация. Пер. с англ. М.: Мир, 1986.

4. **Kaluza Th.**//Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Math. Phys. 1921. Bd. K1, S. 966; **Калуца Т.** К проблеме единства физики//Альберт Эйнштейн и теория гравитации: Пер. с англ. М.: Мир, 1979. С. 529—534.

5. **Klein O.**//Z. Phys. 1927. Bd 46, N° 1. S. 188—203.

6. **Duff M. J., Nilsson B. E. W., Pope C. N.**//Phys. Rept. C. 1986. Vol. 130, N° 1, 2. P. 1—142.

7. **Schwarz J.**//Phys. Rept C. 1982. Vol. 89. N° 3. P. 223—322.

8. **Salam A., Strathdee J.**//Ann. Phys. 1982. Vol. 141, N° 2. P. 316—352.

9. **Mecklenburg W.**//Forts. der Phys. 1982. Vol. 32, N° 5. P. 207—260.

10. **Арефьева И. Я., Волович И. В.**//УФН. 1985. Т. 146. Вып. 4. С. 655—681.

11. **Сорокин Д. П., Ткач В. И.**//ЭЧАЯ. 1987. Т. 18. Вып. 5. С. 1035—1079.

12. **Einstein A., Bergmann P.**//Ann. Math. 1938. Vol. 39. P. 683—701; **Эйнштейн А., Бергманн П.** Обобщение теории электричества Калуцы//А. Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. 2. М.: Наука, 1966. С. 492—513.

13. **Fock V.**//Zeits. Phys. 1926. Bd 38. S. 242—250; Bd 39. S. 226; **Mandel H.**//Z. Phys. 1926. Bd 39. S. 136; **Бергманн П. Г.** Введение в теорию относительности: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1947; **Румер Ю. Б.** Исследование по 5-оптике. М.: Гостехиздат, 1956.

14. **De Witt B. S.**//Relativity, Groups and Topology/Eds. C. De Witt and B. S. De Witt. N. Y.; Gordon and Breach, 1964; **Rayski J.**//Acta Phys. Polon. 1965. Vol. 27. Fasc. 6. P. 947—953; 1965. Vol. 28. Fasc. 1. P. 87—93; **Kerner R.**//Ann. Inst. Henri Poincaré. A. 1968. Vol. 9, N°2, P. 143—152.

15. **Trautman A.**//Rep. Math. Phys. 1970. Vol. 1, N 1. P. 29—62.

16. **Cho Y. M.**//J. Math. Phys. 1975. Vol. 16, N 10. P. 2029—2035; **Cho Y. M., Freund P. G. O.**//Phys. Rev. D., 1975. Vol. 12. N 6, P. 1711—1720; **Cho Y. M., Jang P. S.**//Phys. Rev. D. 1975. Vol. 12, N 12. P. 3789—3792.

17. **Cremmer E., Scherk J.**//Nucl. Phys. B. 1977. Vol. 118, N 1/2. P. 61—75.

18. **Horvath Z., Palla L., Cremmer E., Scherk J.**//Nucl. Phys. B. 1977. Vol. 127, N 1, P. 57—65.

19. **Luciani I. F.**//Nucl. Phys. B. 1978. Vol. 135, N 1, P. 111—130.

20. **Horvath Z., Palla L.**//Nucl. Phys. B. 1978. Vol. 142, N 3, P. 327—343.

21. **Manton N. S.**//Nucl. Phys. B. 1981. Vol. 193, N 2, P. 502—516.

22. **Randjbar-Daemi S., Salam A., Strathdee J.**//Phys. Lett. B. 1983. Vol. 132, N 1,2, 3. P. 56—60; **Frampton P. H., Yamamoto K.**//Nucl. Phys. B. 1985. Vol. 254, N 2. P. 349—366.

23. **Witten E.**//Nucl. Phys. B. 1981. Vol. 186. N 3. P. 412—428.

24. **Candelas P., Horowitz G., Strominger A., Witten E.**//Nucl. Phys. B. 1985. Vol. 258. N 1. P. 46—74; **Strominger A., Witten E.**//Commun. Math. Phys. 1985. Vol. 101, N 3. P. 341—362; **Dixon L., Harvey J., Vafa C., Witten E.**//Nucl. Phys. B. 1986. Vol. 261. P. 678; Vol. 274. P. 285.

25. **Govindarajan T. R., Joshipura A. S., Rindani S. D., Sarkar U.** Coset space as alternatives to Calabi-Yau spaces in the presence of gaugino condensation. Preprint ICTP IC/86/170. Triest, 1986.

26. **Freund P. G. O., Rubin M. A.**//Phys. Lett. B. 1980. Vol. 97, N 2. P. 233—235.

27. **Вольф Дж.** Пространства постоянной кривизны: Пер. с англ. М.: Наука, 1982; **Хелгассон С.** Дифференциальная геометрия и симметрические пространства: Пер. с англ. М.: Мир, 1964.

28. **Wolf J. A.**//Acta Math. 1968. Vol. 120. P. 59—148.
29. **Волков Д. В., Ткач В. И.**//Письма ЖЭТФ. 1980. Т. 32. Вып. 11. С. 681—684.
30. **Волков Д. В., Ткач В. И.**//ТМФ. 1982. Т. 51, N 2. С. 171—180.
31. **Волков Д. В., Сорокин Д. П., Ткач В. И.**//Письма ЖЭТФ. 1983. Т. 38. Вып. 8. С. 397—399; **Волков Д. В., Сорокин Д. П., Ткач В. И.**//ТМФ. 1984. Т. 61, N 2. С. 241—253.
32. **Randjbar-Daemi S., Percacci R.**//Phys. Lett. B. 1982. Vol. 117, N 1, 2. P. 41—44.
33. **Randjbar-Daemi S., Salam A., Strathdee J.**//Nucl. Phys. B. 1983. Vol. 214, N 3. P. 491—512; Phys. Lett. B. 1983. Vol. 124, N 5. P. 345—348.
34. **Schellekens A. N.**//Nucl. Phys. B. 1984. Vol. 248, N 3. P. 706—726; Phys. Lett. B. 1984. Vol. 143, N 1, 2, 3. P. 121—124.
35. **Pilch K., Schellekens A. N.**//Nucl. Phys. B., 1985. Vol. 256, N 1, P. 109—129.
36. **Forgacs P., Horvath Z., Palla L.**//Zeit. Phys. C. 1986. Vol. 30, N 2. P. 261—266.
37. **Aref'eva I. Ya., Volovich I. V.**//Phys. Lett. B. 1985. Vol. 164, N 4, 5, 6. P. 287—292.
38. **Wetterich C.**//Nucl. Phys. B. 1984. Vol. 244, N 2. P. 359—380; Nucl. Phys. B. 1985. Vol. 252, N 2. P. 366—374.
39. **Rubakov V. A., Shaposhnikov M. E.**//Phys. Lett. B. 1983. Vol. 125. N 2, 3. P. 139—143.
40. **Schwarz A. S.**//Commun. Math. Phys. 1977. Vol. 56, N 1. P. 79—86.
41. **Palla L.**//Z. Phys. C. 1984. Vol. 24, N 2. P. 195—204.
42. **Duff M. J., Pope C. N.**//Nucl. Phys. B. 1985. Vol. 255, N 2. P. 355—364.
43. **Witten E.**//Phys. Rev. Lett. 1977. Vol. 38, N 3. P. 121—124.
44. **Romanov V., Schwarz A., Tyupkin Yu.**//Nucl. Phys. B. 1977. Vol. 130, N 2. P. 209—220.
45. **Manton N. S.**//Nucl. Phys. B. 1979. Vol. 158, N 1. P. 141—153.
46. **Forgacs P., Manton N. S.**//Commun. Math. Phys. 1980. Vol. 72, N 1. P. 15—35.
47. **Coquereaux R.**//Acta Phys. Pol. B. 1984. Vol. 15, N 9. P. 821—846.
48. **Harnad J., Shnider S., Vinet L.**//J. Math. Phys. 1980. Vol. 21, N 12. P. 2719—2724.
49. **Harnad J., Shnider S., Tafel J.**//Lett. Math. Phys. 1980. Vol. 4, N 2. P. 107—113.
50. **Rudolph G., Volobujev I.** Geometry of symmetric gauge fields. Preprint KMU-QFT 05/81. Leipzig: Karl-Marx Universität, 1981; **Rudolph G., Volobujev I.** Dimensional reduction of gauge field theories in terms of fiber bundle reduction// Geometrical methods is physics. Proc. of the conf. on differential geometry and its application. Nove Mêsto, 1983. Brno, 1984. P. 239—245.
51. **Jadczyk A., Pilch K.**//Lett. Math. Phys. 1984. Vol. 8, N 2. P. 97—104.
52. **Волобуев И. П., Рудольф Г.**//ТМФ. 1985. Т. 62. № 3. С. 388—399.
53. **Волобуев И. П., Кубышин Ю. А.**//ТМФ. 1986. Т. 68. № 2, С. 225—235.
54. **Волобуев И. П., Кубышин Ю. А.**//ТМФ. 1986. Т. 68. № 3. С. 368—380.
55. **Kubyshin Yu. A., Mourão J. M., Volobujev I. P.**//Intern. J. Mod. Phys. A. 1989. Vol. 4, № 1. P. 151—171.
56. **Coquereaux R., Jadczyk A.**//Commun. Math. Phys. 1983. Vol. 90, N 1. P. 79—100.
57. **Rudolph G.** Classification of G-invariant configurations of Einstein-Cartan theory on a multidimensional Universe. Preprint KWU-III-18-155L1447/86. Leipzig: Karl-Marx Universität, 1986.
58. **Chapline G., Manton N. S.**//Nucl. Phys. B. 1981. Vol. 184, N 3. P. 391—405.
59. **Chapline G., Slansky R.**//Nucl. Phys. B. 1982. Vol. 209, N 2. P. 461—483.
60. **Olive D., West P.**//Nucl. Phys. B. 1983. Vol. 217, N 1. P. 248—284.
61. **Wetterich C.**//Nucl. Phys. B., 1984. Vol. 242, N 2. P. 473—502.

62. Chapline G., Grossman B.//Phys. Lett. B. 1984. Vol. 135, N 1, 2, 3. P. 109—112.

63. Coquereaux R., Jadczyk A.//Class. Quant. Grav. 1986. Vol. 3, N 1. P. 29—42.

64. Manton N. S.//Ann. Phys. 1986. Vol. 167, N 2. P. 328—353.

65. Barnes K. J., King R. C., Surridge M.//Nucl. Phys. B. 1987. Vol. 281, N° 1, 2. P. 253—268.

66. Chapline C., Slansky R.//Phys. Lett. B. 1984. Vol. 141, N°3/4. P. 187—190; Креммер Е. Размерная редукция в теории поля и скрытые симметрии в расширенной супергравитации//Введение в супергравитацию; Под ред. С. Феррары и Дж. Тейлора: Пер. с англ. М.: Мир, 1985. С. 235—297; Castellani L.//Nucl. Phys. B. 1985. Vol. 254, N° 2. P. 266—298; Dolan L., Slansky R. The physical spectrum of compactified strings. Preprint LA-UR-85-324. Los-Alamos, 1985; Lüst D.//Nucl. Phys. B. 1986. Vol. 276, N 1. P. 220—240; Lüst D. Compactification of the O (16) × O (16) heterotic string theory. Preprint CALT-68-1345. Pasadena, 1986; Castellani L., Lüst D. Superstring compactification on homogeneous coset spaces with torsion. Preprint CALT-68-1353. Pasadena, 1986; Dolan B. P., Dunbar D., Moorhouse R. G., Henriques A. B. Torsion in modified ten dimensional supergravity. Glasgow University preprint. Glasgow, 1986; Dolan B. P., Dunbar D. Compactified solutions to an extended Chapline-Manton Lagrangian. Glasgow University preprint. Glasgow, 1986.

67. Forgacs P., Zoupanos G//Phys. Lett. B. 1984. Vol. 148, N° 1, 2, 3. P. 99—103.

68. Barnes K. J., Surridge M.//Z. Phys. C. 1986. Vol. 33, N° 1. P. 89—97.

69. Bais F. A., Barnes K. J., Forgacs P., Zoupanos G.//Nucl. Phys. B. 1986. Vol. 263, N° 3, 4. P. 557—590.

70. Farakos K., Koutsoumbas G., Surridge M., Zoupanos G.//Nucl. Phys. B. Vol. 291, N° 1. P. 128—140.

71. Farakos K., Koutsoumbas G., Surridge M., Zoupanos G.//Phys. Lett. B. 1987. Vol. 191, N° 1, 2. P. 135—140.

72. Lüst D., Zoupanos G.//Phys. Lett. B. 1985. Vol. 165, N° 4. 5, 6. P. 309—314.

73. Barnes K. J., Forgacs P., Surridge M., Zoupanos G.//Zeit Phys. C. 1987. Vol. 33, N° 3. P. 427—431.

74. Kozimirov N. G., Tkachov I. I.//Z. Phys. C. 1987. Vol. 36, N° 1. P. 83—87.

75. Forgacs P., Horvath Z., Palla L.//Phys. Lett. B. 1984. Vol. 147, N° 4, 5. P. 311—316.

76. Волобуев И. П., Кубышин Ю. А.//Письма в ЖЭТФ. 1987. Т. 45. Вып. 10. С. 455—457; ТМФ. 1988. Т. 75, № 2. С. 255—266.

77. Kubyshin Yu. A., Mourão J. M., Volobujev I. P.//Phys. Lett. B. 1988. Vol. 203, N° 4. P. 349—352.

78. Surridge M.//Z. Phys. C. 1987. Vol. 37, N° 1. P. 77—84.

79. Sohnius M., West P.//Phys. Lett. B. 1981. Vol. 100, N° 3. P. 245—250; Brink L., Lindgren O., Nilsson B. E. W.//Nucl. Phys. B. 1983. Vol. 212, N° 3. P. 401—412; Mandelstam S.//Nucl. Phys. B. 1983. Vol. 213, N 1. P. 149—168; Howe P., Townsend P. K., Stelle K.//Nucl. Phys. B. 1983. Vol. 214, N 3. P. 519—531.

80. Ermushev A. V., Kazakov D. I., Tarasov O. V.//Nucl. Phys. B. 1987. Vol. 281, N° 1, 2. P. 72—84; Kazakov D. I.//Modern Physics Letters. A. 1987. Vol. 2, N° 9. P. 663—674.

81. Green M. B., Schwarz J. H.//Phys. Lett. B. 1985. Vol. 151, N° 1. P. 21—22.

82. Appelquist T., Chodos A.//Phys. Rev. D. 1983. Vol. 28, N° 4. P. 772—784.

83. Appelquist T., Chodos A.//Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 50, N° 3. P. 141—145.

84. Duff M. J., Toms D. J. Divergencies and anomalies in Kaluza-Klein theories. Preprint CERN TH. 3248-CERN. Geneve, 1982.

85. Волобуев И. П., Кубышин Ю. А. Модели Хиггса, порожденные симметрическими пространствами//Кварки-86. Материалы семинара. Тбилиси, 1986. М.: Изд-во ИЯИ, 1987. С. 165—172; Волобуев И. П., Кубышин Ю. А. Квантовые поправки в модели Вайнберга — Салама, полученной методом размерной редукции//Проблемы физики высоких энергий и теории поля. Тр. IX семинара

по физике высоких энергий и теории поля. Протвино, 1986. М.: Наука, 1987. С. 153—158.

86. **Горелик Г. Е.** Почему пространство трехмерно? М.: Наука, 1982; **Terazawa H.** Space-time dimensions. Preprint INS-Rep.-551. Tokyo, 1985; **Müller B., Schäfer A.** Improved bounds on the dimension of space-time. Preprint INS-Rep.-552. Tokyo, 1985.

87. **Equchi T., Gilkey P. B., Hanson A. J.**//Phys. Rept. 1980. Vol. 66, N°6. P. 213—393.

88. **Кобаяси Ш., Номидзу К.** Основы дифференциальной геометрии. В 2-х томах. Пер. с англ. М.: Наука, 1981.

89. **Rudolph G.**//Lett. Math. Phys. 1987. Vol. 14, N° 1. P. 2.

90. **Rudolph G.** Group-theoretical aspects of dimensional reduction. Preprint HU-TFT-87-42. University of Helsinki, 1987.

91. **Бредон Г.** Введение в теорию компактных групп преобразований: Пер. с англ. М.: Наука, 1980.

92. **Зуланке Р., Винтген П.** Дифференциальная геометрия и расслоения: Пер. с нем. М.: Мир, 1975.

93. **Cremmer E., Julia B.**//Nucl. Phys. B. 1979. Vol. 159, N° 1, 2. P. 141—212; **Креммер Е.** Размерная редукция в теории поля и скрытые симметрии в расширенной супергравитации//Введение в супергравитацию.; Под ред. С. Феррары и Дж. Тейлора: Пер. с англ. М.: Мир, 1985. С. 235—297.

94. **Geroch R.**//J. Math. Phys. 1968. Vol. 9, N° 11. P. 1739—1744.

95. **Nikolova L., Rizov V.**//J. Math. Phys. 1986. Vol. 27, N° 1. P. 132—142.

96. **Trautman A.**//Inst. Naz. di Alta Math. Simposia Mathematica. 1973. Vol. XII. P. 139—162.

97. **Duff M. J., Orzalesi C. A.**//Phys. Lett. B. 1983. Vol. 122. P. 37; **Wu Y. S., Zee A.**//J. Math. Phys. 1984. Vol. 25. P. 2696; **Wu X. Z.**//Phys. Rev. D. 1984. Vol. 29. P. 2796; **Muzinich I. J.**//J. Math. Phys. 1985. Vol. 26, N°8. P. 1942—1947.

98. **Neville D. E.**//Phys. Rev. D. 1986. Vol. 33, N° 3. P. 363—369.

99. **Волович И. В., Катанаев М. О.**//ТМФ. 1986. Т. 66. № 1. С. 79—89.

100. **Кириллов А. А.** Элементы теории представлений. М. Наука, 1978.

101. **Дынкин Е. Б.**//Матем. сб. 1952. Т. 30. № 2. С. 349—462.

102. **Slansky R.**//Phys. Rept. C. 1981. Vol. 79, N° 1. P. 1.

103. **McKay W., Patera J.** Tables of dimensions, indices and branching rules for representations of simple Lie algebras. New York; Dekker, 1981.

104. **Джекобсон Н.** Алгебры Ли: Пер. с англ. М.: Мир, 1964.

105. **Гото М., Гроссханс Ф.** Полупростые алгебры Ли: Пер. с англ. М.: Мир., 1981.

106. **Дынкин Е. Б.**//Труды Московского математического общества. 1952. Т. 1. С. 39—166.

107. **Попов А. Д.**//ТМФ. 1987. Т. 71, № 1. С. 67—77; ЯФ. 1987. Т. 46. Вып. 1. С. 289—295.

108. **Волков Д. В., Сорокин Д. П., Ткач В. И.**//Письма в ЖЭТФ. 1984. Т. 40. Вып. 8. С. 356—359; ЯФ. 1984. Т. 39. Вып. 5. С. 1306—1314; ЯФ. 1985. Т. 41. Вып. 5. С. 1373—1386; ЯФ. 1986. Т. 43. Вып. 1. С. 222—230; **Sorokin D. P., Tkach V. I., Volkov D. V.**//Phys. Lett. B. 1985. Vol. 161, N° 4—6. P. 301—306.

109. **Nilsson B. E. W., Pope C.N.**//Class. Quant. Grav. 1984. Vol. 1, N° 5, P. 499—516; **Dolan B.**//Phys. Lett. B. 1984. Vol. 140, N° 5, 6. P. 304—306.

110. **Reuter M., Wetterich C.**//Nucl. Phys. B. 1987. Vol. 289, N 3, 4. P. 757—786; **Shafi Q., Wetterich C.**//Nucl. Phys. B. 1987. Vol. 289, N° 3. 4. P. 787—809.

111. **Tchrakian D. H.**//Phys. Lett. B. 1985. Vol. 150. P. 360; **Chakrabarti A., Tchrakian D. H.**//Phys. Lett. B. 1986. Vol. 168, N° 3. P. 187—191.

112. **Castellani L., Romans L. J., Warner N. P.**//Ann. Phys. 1984. Vol. 157, N 2. P. 394—407.

113. **Jadczyk A.** Symmetry of Einstein-Yang-Mills systems and dimensional reduction. Preprint ITP-UWr—84/615. Wroclaw, Institute of Theoretical Physics, University of Wroclaw, 1984.

114. **Coleman S.** Classical lumps and their quantum descendants//New Phenomena in Subnuclear Physics. Proc. of the 1975 Intern. School of Subnuclear Physics.

Part A./Ed. by Zichichi. N. Y.— Lond.: Plenum Press, 1977. P. 297—421.

115. **Candelas P., Weinberg S.**//Nucl. Phys. B. 1984. Vol. 223, P. 433; **Chodos M., Myers E.**//Ann. Phys. 1984. Vol. 156, N° 2. P. 412—441; **Nguyen Van Hieu**//Forts. der Physik. 1986. Vol. 34, N° 7. P. 441—455; **Sarmadi M. H.**//Nucl. Phys. B. 1986. Vol. 263, N 1. P. 187—206.

116. **Nguyen Van Hieu.** Quantum fluctuations and spontaneuos compactification of eleven dimensional supergravity. Preprint JINR E2-85-134. Dubna, 1985.

117. **Freund P. G. O.**//Nucl. Phys. B. 1982. Vol. 209, N 1. P. 146—156; **Kolb E. W., Slansky R.**//Phys. Lett. B. 1984. Vol. 135, N 5, 6. P. 378—382; **Sokolowski L. M., Golda Z. A.**//Phys. Lett. B. 1987. Vol. 195, N 3. P. 349—350.

118. **Forgacs P., Lüst D., Zoupanos G.** Physics from multidimensional gauge theories?//Proc. of the 2nd Hellenic school in high Energy Physics. Corfu, 1985.

119. **Владимиров Ю. С.** Размерность физического пространства-времени и объединение взаимодействий. М.: Изд-во МГУ, 1987.

120. **CHARM** Collaboration. A precise determination of the electroweak mixing angle from semileptonic neutrino scattering. Preprint CERN-EP/86-171. Geneve, 1986.

121. **Ченг Т.-П., Ли Л.-Ф.** Калибровочные теории в физике элементарных частиц: Пер. с англ. М.: Мир, 1987.

122. **Rudolph G., Volobujev I.** Some remarks on dimensional reduction of gauge theories and model building. Preprint KMU-III-18-155 Lp 1368/87. Leipzig; Karl-Marx Universität, 1987.

123. **Witten E.**//Nucl. Phys. B. 1985. Vol. 258. P. 75—100.