

## СИСТЕМЫ ФОРМИРОВАНИЯ ПРОТОННЫХ ПУЧКОВ МИКРОННЫХ РАЗМЕРОВ

А. Д. Дымников, Г. М. Осетинский

Ленинградский государственный университет, Ленинград

Рассматриваются получение и применение ядерного микрозонда с энергией протонного пучка в несколько мегаэлектрон-вольт. Значительное внимание уделено матричным аналитическим и численным методам расчета квадрупольных систем формирования пучков. Проведено сравнение квадрупольных и осесимметричных фокусирующих систем. Рассматривается возможность создания высокочастотного микрозонда. Исследуется влияние собственного поля пучка на эволюцию его в микрозонде.

The production and application of a nuclear microprobe of protons at MeV energies is considered. Considerable attention is devoted to the matrix analytical and computer methods for the design of quadrupole probe-forming systems. Comparison of quadrupole and axisymmetric systems is described. A possibility is considered of designing a high frequency microprobe. The influence of space-charge distribution of the beam on its evolution in microprobe optics is investigated.

### ВВЕДЕНИЕ

В последнее время интенсивно развиваются мгновенные методы ядерного микроанализа — методы определения элементарного состава веществ, основывающиеся на детектировании вторичного излучения, образующегося при бомбардировке исследуемых образцов пучками электронов, протонов, а также легких и тяжелых ядер. Это излучение может быть характеристическим рентгеновским излучением, упругим и неупругим рассеянием, излучением, связанным с переходами Оже, продуктами ядерных реакций, вызванных первичными частицами, и т. д. Из указанных методов наибольшее развитие получил метод детектирования характеристического рентгеновского излучения на пучке протонов (или тяжелых ионов), поскольку эти же измерения при возбуждении образца пучком электронов, полученных с помощью электронного микрозонда, приводят к большому фону (в  $10^3$  —  $10^4$  раз больше, чем на пучке протонов), резко снижающему чувствительность метода. При элементном анализе с использованием характеристического излучения на пучке протонов или ядер существенно возрос интерес к пучкам, имеющим на мишени сечение микронных размеров, поскольку открываются возможности исследования микроструктуры твердых тел и биологических объек-

тов как на поверхности, так и в глубину. Этот интерес был стимулирован рядом экспериментальных и теоретических работ [1—6], показавших возможность создания микропучков таких размеров с током 0,1 нА. Систему, дающую на выходе пучок микронного сечения, называют протонным или ядерным (ионным) микрозондом. Источником заряженных частиц в таком микрозонде служит обычно электростатический ускоритель Ван-де-Граафа, а в последние годы также и циклотрон [7—11].

Ядерный микрозонд дополняет набор приборов для микроанализа поверхности, таких, как анализатор вторичных ионов, электронный сканирующий микроскоп, электронный микрозонд, оже-спектрометр и т. д. Он открывает целый ряд новых существенных возможностей анализа, которые не могут быть получены другими методами. Речь идет о следующих преимуществах ядерного микрозонда [12]: теоретически определяемы все элементы, включая водород; метод можно применять направленно, особенно для легких элементов, подбирая ядерную реакцию и энергию ускоряемых частиц; не влияет химический состав, в результате чего упрощается эталонирование и нет необходимости в эталонных образцах, химический состав которых идентичен с анализируемым материалом; возможно исследование микрообразцов (например, биопсий) в среде гелия или на воздухе; можно определить легкие элементы (получить изображение поверхностного распределения или диффузионного профиля) в радиоактивных материалах.

Из-за своей большой магнитной жесткости (на три порядка больше, чем у электронов в электронных микроскопах) ионы с энергией в несколько мегаэлектрон-вольт на нуклон требуют сильных линз для своей фокусировки для того, чтобы приборы получились не слишком громоздкими. Для формирования таких пучков обычно используют системы из квадрупольных линз, хотя есть случаи применения для подобных целей осесимметричной сверхпроводящей магнитной линзы [13] и плазменной линзы [14].

Первые теоретические работы по определению целого класса систем из квадрупольных линз, пригодных для использования в микрозонде в качестве эквивалента осесимметричной линзы, с подробным анализом зависимости их фокусирующих свойств от градиентов полей в линзах были выполнены в СССР [15, 16]. В этих работах было показано, что система из четырех квадрупольных линз с определенной симметрией в расположении линз и их питании, названная квадруплетом вращения, может служить аналогом собирающей осесимметричной линзы по своим параксиальным (гауссовым) характеристикам. В зарубежной литературе такую систему получили наименование «русского» квадруплета. Используя такую квадруплет, Д. Куксон с сотрудниками в лаборатории Харуэлла (Великобритания) создал первую установку протонного микрозонда [1, 2], положившую начало развитию нового метода количественного микроанализа.

К настоящему времени уже в нескольких десятках зарубежных ускорительных лабораторий работают ионные микрозонды, по созданию и применению которых написаны обстоятельные обзоры [17—23]. В СССР первый и пока единственный протонный микрозонд построен А. Г. Пузыревичем в НИИЯФ при Томском политехническом институте [24]. Диаметры пучков на мишени в существующих протонных микрозондах колеблются от 0,5 мкм до нескольких десятков микрон.

Система, создающая микропучок, является сложной прецизионной установкой, для достижения наилучших параметров которой требуются оптимизационные расчеты. Первая работа в этом направлении была выполнена в ОИЯИ, за которой последовал ряд других работ [25—31], направленных на создание оптимального микрозонда и исследование его характеристик. Эти работы проводились в ОИЯИ совместно с ЛГУ.

Малый размер пятна на мишени — самый важный фактор среди многих противоречивых требований к пучку. Вторым важным фактором служит ток (или эмиттанс) пучка. Значения этих факторов зависят от того, какая выбрана ионно-оптическая схема микрозонда.

Расчет оптимальной ионно-оптической системы для получения микронных и особенно субмикронных пучков состоит в решении нелинейной обратной многопараметрической задачи, при котором следует учитывать все виды aberrаций вплоть до пятого порядка включительно. Поэтому представляется важным проследить весь процесс решения задачи, включающий в себя: выбор системы координат, в общем случае криволинейной, связанной с осевой частицей; запись уравнений движения и уравнений электромагнитного поля в выбранной системе координат с учетом неэлектромагнитных сил, например силы тяжести; разложение уравнений движения и поля в ряд Тейлора по степеням отклонений от осевой частицы; метод решения нелинейной задачи в конфигурационном пространстве путем переформулировки ее в виде линейной задачи для пространства фазовых моментов; анализ структуры матрицы коэффициентов, возникающей в линейной задаче, и выбор определенной ее симметрии с целью оптимизации системы; компактный консервативный метод интегрирования уравнений движения, в процессе которого на каждом шаге численного интегрирования строго сохраняется фазовый объем пучка; теоретический анализ задачи и получение приближенных формул для предварительного расчета; применение неградиентного метода скользящего допущения для численной оптимизации системы; сравнение различных ионно-оптических схем микрозонда.

Все вышеперечисленное составляет содержание настоящего обзора, который в большой степени основан на работах, выполненных авторами в ОИЯИ в 1977—1985 гг.

В обзоре используются координаты 4-пространства-времени. Все величины в уравнениях движения и поля либо безразмерны, либо выражаются через единицы длины или обратной длины.

## 1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

При расчетах прецизионных ионно-оптических устройств удобно рассматривать движение всех частиц пучка относительно одной — осевой (или реперной) частицы. Траектория последней является в общем случае криволинейной, на которую могут влиять также неэлектромагнитные силы, например сила тяжести. Используя метод подвижного репера Картана [32], запишем уравнения движения и уравнения Максвелла в криволинейной системе координат, связанной с осевой частицей. При этом используем запись вектора либо в виде одностолбцевых матриц  $Q, M, x, y, z$ , либо в виде однострочечных матриц  $\tilde{Q}, \tilde{M}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ . Знак «волна» обозначает транспонирование. Векторный дифференциальный оператор также записываем либо в виде одностолбцевых матриц  $\nabla(Q), \nabla(M), \nabla(x)$  и т. д., либо в виде однострочечных  $\tilde{\nabla}(Q), \tilde{\nabla}(M), \nabla(x)$ , где  $\nabla_i(Q) = \partial/\partial Q_i$ . Выражение  $Q\tilde{\nabla}(z)$  обозначает матрицу,  $ik$ -й элемент которой равен  $\partial Q_i/\partial z_k$ . Скалярный дифференциальный оператор  $d$  записывается в виде скалярного произведения  $d = \tilde{\nabla}(z) dz = \tilde{\nabla}(Q) dQ$  и может стоять как перед, так и после функции, на которую он действует. Функция, на которую действуют операторы  $d, \nabla(x)$  или  $\tilde{\nabla}(x)$ , если это требуется для ясности, указывается внизу стрелочкой, идущей от оператора к функции. Будем использовать абсолютные метрические пространства векторов  $Q, M$  и метрические пространства векторов  $x, y, z$ , связанные с конкретной выбранной метрикой. Осевую частицу будем характеризовать 4-вектором  $M$ , а произвольную — 4-вектором  $Q$ . Четвертые элементы этих векторов пропорциональны времени.

**Осевая частица.** Примем точку  $M$  за начало 4-репера  $e$ , где матрица  $e$  имеет вид:

$$e = \nabla(z_m)\tilde{M},$$

$(z_m)$  — локальная галилеева система координат. Будем рассматривать эволюцию вектора  $M$  в псевдоевклидовом 4-пространстве  $(y)$  с ортонормированным неподвижным репером, задаваемым матрицей  $e_0$ , где

$$e_0 = \nabla(y)\tilde{M} \quad \tilde{e}\tilde{e} = e_0\tilde{e}_0 = G = \left\| \begin{array}{cc} -I_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\|.$$

Здесь  $I_3$  —  $(3 \times 3)$ -единичная матрица.

С подвижным репером  $e$  связываются локальная система координат  $(x)$ , в которой движение произвольной частицы (точки)  $Q$  определяется вектором  $L = \tilde{e}x$ , так что  $dQ = dM + dL$ . Используются обозначения дифференциалов длин дуг в 4-пространстве-времени  $dt$

и  $d\tau_m$ , где

$$d\tau = \sqrt{d\tilde{Q} dQ}, \quad d\tau_m = \sqrt{d\tilde{M} dM},$$

дифференциала длины дуги  $ds$  в 3-пространстве:

$$ds = \sqrt{dz_{m1}^2 + dz_{m2}^2 + dz_{m3}^2}$$

и обозначения 4-скоростей:

$$u = dQ/d\tau, \quad u_m = dM/d\tau_m, \quad u(z) = dz/d\tau, \quad u_m(z_m) = dz_m/d\tau_m.$$

Система координат  $z_m$  выбирается таким образом, что

$$z_{m1} = z_{m2} = 0, \quad z_{m3} = s, \quad z_{m4} = ct_m,$$

$$u_{m1}(z_m) = u_{m2}(z_m) = 0, \quad u_{m3}(z_m) = p, \quad u_{m4}(z_m) = \gamma,$$

$$e_1|_{t_m=0} = e_0, \quad \gamma^2 - p^2 = 1.$$

Здесь  $p$  — безразмерный импульс осевой частицы,  $\gamma$  — ее безразмерная относительная полная энергия.

**Реперы Дарбу и Френе.** Движение репера определяется уравнением

$$\frac{de}{ds} = e' = P(k, l)e, \quad P(k, l) = \begin{vmatrix} 0 & k_3 & -k_2 & l_1 \\ -k_3 & 0 & k_1 & l_2 \\ k_2 & -k_1 & 0 & l_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 & 0 \end{vmatrix},$$

где 3-векторы  $k$  и  $l = -F/p$  есть функции от  $s$ ,  $F$  — 3-вектор силы тяжести.

Для 4-репера Дарбу  $k_1$  — нормальная кривизна,  $k_2$  — геодезическая кривизна,  $k_3$  — геодезическое кручение,  $l = 0$ .

Для 4-репера Френе  $k_1 = 0$ ,  $l = 0$ ,  $k_2$  и  $k_3$  — соответственно кривизна и кручение кривой, по которой движется частица  $M$ .

Репер  $e$  можно выразить через  $e_0$  с помощью матрицанта  $R$ :

$$e = R(P(k, l), s/0)e_0 = Re_0,$$

удовлетворяющего уравнениям

$$\frac{dR}{ds} = R' = P(k, l)R, \quad R(0/0) = I_4,$$

$$RGR \approx G.$$

**Уравнения движения.** Уравнения движения в вакууме для осевой частицы  $M$  и произвольной частицы  $Q$  записываются следующим

образом:

$$\begin{aligned}\frac{dM}{d\tau_m} &= \tilde{e}u_m(z_m) = \tilde{e}_0u_m(y_m); \\ \frac{du_m}{d\tau_m} &= \tilde{e}P(B_m, E_m)u_m(z_m) = \tilde{e}P(B_m^0, E_m^0)u_m(y_m); \\ \frac{dQ}{d\tau} &= \frac{dM + dL}{d\tau} = \tilde{e}u(z) = u; \\ \frac{du}{d\tau} &= \tilde{e}P(B, E)u(z).\end{aligned}$$

Здесь  $B$  — индукция магнитного поля;  $E$  — напряженность электрического поля. 3-Векторы  $B$ ,  $E$  и  $F$ , выраженные в единицах обратной длины, через размерные величины в системе СИ, помеченные звездочкой, определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}B &= \frac{q^*}{p_0^*} B^*, \quad E = \frac{q^*}{W_0^*} E^*, \quad F = \frac{F^*}{W_0^*}, \\ W_0^* &= m_0^* c^{*2}, \quad p_0^* = m_0^* c^*, \\ \gamma &= \frac{W^*}{W_0^*}, \quad p = \frac{p^*}{p_0^*}, \quad W^* = m^* c^{*2}.\end{aligned}$$

Обозначая, как и ранее, штрихом производную по  $s$ , уравнения движения перепишем в виде:

$$\begin{aligned}\left(\frac{z'}{\tau'}\right)' &= \check{P}z^t, \tag{1} \\ \check{P} &= P(\check{B}, \check{E}), \quad \tau' = \sqrt{\check{z}'Gz'}, \quad \check{B} = B + k/\tau', \quad \check{E} = E - l/\tau^t, \\ z' &= z'_m + x' + \check{P}(k, l)x,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z'_m &= i(3) + \frac{\gamma}{p} i(4), \quad i(3) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad i(4) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \\ z_{m4} &= \int_0^s \frac{\gamma}{p} ds + z_{m40}.\end{aligned}$$

Матрицы  $P(B, E)$  для репера  $e$  и  $P(B_0, E_0)$  для репера  $e_0$  связаны между собой через матрицант:

$$\begin{aligned}P(B, E) &= \check{R}^{-1}P(B_0, E_0)\check{R} = GRGP(B_0, E_0)\check{R}, \\ \nabla(z) &= R\nabla(y).\end{aligned}$$

Заметим, что для частного случая  $l = 0$  имеем:

$$P(k, 0) = \begin{vmatrix} P(k) & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad P(k) = \begin{vmatrix} 0 & k_3 & -k_2 \\ -k_3 & 0 & k_1 \\ k_2 & -k_1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$R = \begin{vmatrix} \bar{R} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \bar{R}\tilde{R} = \tilde{R}\bar{R} = I_3,$$

$$B = \bar{R}B_0, \quad E = \bar{R}E_0.$$

Будем считать, что наблюдатель находится в плоскости  $x_3 = 0$ , т. е. регистрируются все частицы  $Q$ , приходящие в разное время в эту плоскость. Тогда получим следующие операторные равенства:

$$\nabla(z) = R\nabla(y) = \frac{1}{\alpha} Z\nabla(x),$$

где

$$\nabla_3(x) = \nabla(s) = \frac{\partial}{\partial s} = \nabla_3(z);$$

$$Z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ Z_{31} & Z_{32} & 1 & Z_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad Z^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -Z_{31} & -Z_{32} & 1 & -Z_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$Z_{31} = k_3x_2 - l_1x_4; \quad Z_{32} = -k_3x_2 - l_2x_4;$$

$$Z_{34} = -\gamma/p - x_1l_1 - x_2l_2; \quad \alpha = 1 - k_2x_1 + k_1x_2 + l_3x_4.$$

Уравнения Максвелла в матричном виде записываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} -\Delta(Q)A &= \rho u; & \tilde{\nabla}(Q)A &= 0; \\ \Delta(Q) &= \tilde{\nabla}(Q)\nabla(Q); & \nabla(Q) &= e^{-1}\nabla(z); & A &= \tilde{e}A(z); \\ \rho &= \tilde{u}\Delta(Q)u; \\ GP(B, E) &= \nabla(z)\tilde{A}\tilde{e} - eA\tilde{\nabla}(z). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

В системе координат  $(y)$  с неподвижным репером  $e_0$  уравнения электромагнитного поля имеют вид

$$P(B_0, E_0)G\nabla(y) = \rho^0 \frac{dy}{dy_4}, \quad \rho^0 = \rho \frac{dy_4}{d\tau};$$

$$P(-E_0, B_0)G\nabla(y) = 0.$$

Из уравнений [2] в качестве частного случая репера Френе ( $k_1 = 0, l = 0$ ) получаются уравнения Максвелла, приведенные в [33].

## 2. МЕТОД ПОГРУЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВО ФАЗОВЫХ МОМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Анализ и расчет нелинейных систем формирования пучков существенно облегчается путем перехода от нелинейных дифференциальных уравнений движения в фазовом пространстве  $(x, x')$  к системе линейных уравнений в расширенном фазовом пространстве — пространстве фазовых моментов, что составляет содержание метода погружения в пространство фазовых моментов.

**Моменты вектора.** Определим рекуррентным образом  $r$ -ю степень вектора  $x$ ,

$$x^r = x^{(r)}(1) = \left\| \begin{array}{cc} x_1 & x^{r-1} (1) \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ x_n & x^{r-1} (n) \end{array} \right\|,$$

и назовем ее  $r$  — моментом вектора  $x$  или моментом  $r$ -го порядка вектора  $x$ , где вспомогательный вектор  $x^l(j)$  определяется с помощью рекуррентного соотношения:

$$x^l(j) = \left\| \begin{array}{cc} x_j & x^{l-1}(j) \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ x_n & x^{l-1}(n) \end{array} \right\|, \quad j = 1, \dots, n.$$

Вектор  $x^r$  имеет  $C_{n-1+r}^{n-1}$  скалярных элементов, где

$$C_{n-1+r}^{n-1} = \frac{(n-1+r)!}{(n-1)!r!}$$

— число сочетаний с повторением из  $n$  элементов по  $r$ . Например, для  $n = 2$  имеем:

$$x = \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right\|, \quad x^1(1) = x, \quad x^1(2) = x_2,$$

$$x^2 = \left\| \begin{array}{cc} x_1 & x \\ x_2 & x_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} x_1^2 & \\ x_1 & x_2 \\ x_2^2 & \end{array} \right\|,$$

$$x^2(1) = x^2, \quad x^2(2) = x_2 x^1(2) = x_2^2,$$

$$x^3 = \left\| \begin{array}{cc} x_1 & x^2(1) \\ x_2 & x^2(2) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} x_1^3 & \\ x_1^2 & x_2 \\ x_1 & x_2^2 \\ x_2^3 & \end{array} \right\|.$$

Аналогично степень оператора  $\nabla^r(x)$  является дифференциальным  $r$ -моментом-оператором.



Разложение уравнений движения. Матричную функцию  $F(\hat{x})$  представим в виде многочлена  $m$ -го порядка:

$$F(\hat{x}) = \sum_{j=0}^m F^{(j)},$$

где  $F^{(j)}$  — однородный многочлен степени  $j$  по  $\hat{x}$ ,

$$F^{(j)} = \frac{1}{j!} [\tilde{x}\nabla(\hat{x})]^j F(\hat{x}), \quad \hat{x} = \left\| \begin{matrix} x \\ x' \end{matrix} \right\|.$$

Значения частных производных по  $\hat{x}$  от  $F(\hat{x})$  берутся при  $x = 0$ .

Используя приведенные выше обозначения, уравнения движения представим в виде

$$\begin{aligned} (\Phi^{(0)} + \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)}) \sum_0^m z^{(j)r} = \\ = (\varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)}) \left[ \sum_0^m \hat{\mathbf{P}}^{(j)} z'_m + \sum_0^{m-1} \hat{\mathbf{P}}^{(j)} z'^{(1)} \right]. \quad (3) \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varphi &= \tilde{z}'\mathbf{G}z', \quad \Phi = \varphi I_4 - z'\tilde{z}'\mathbf{G}, \\ \hat{\mathbf{P}} &= \mathbf{P}(\hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{E}}), \quad \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B}\sqrt{\varphi} + k, \quad \hat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}\sqrt{\varphi} - l, \\ z'^{(0)} &= z'_m, \quad z'^{(j)} = \mathbf{0}, \quad j = 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Для  $m = 0, 1$ , уравнения движения записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} 1. \quad \Phi^{(0)} z''_m &= \varphi^{(0)} \hat{\mathbf{P}}^{(0)} z'_m, \\ \varphi^{(0)} &= \frac{1}{p^2}, \quad \Phi = \frac{1}{p^2} I_4 - z'_m \tilde{z}'_m \mathbf{G}, \\ \hat{\mathbf{P}}^{(0)} &= \mathbf{P}(\hat{\mathbf{B}}^{(0)}, \hat{\mathbf{E}}^{(0)}) = \hat{\mathbf{P}}_m, \\ \hat{\mathbf{B}}^{(0)} &= \frac{\mathbf{B}_m}{p} + k, \quad \hat{\mathbf{E}} = \frac{\mathbf{E}_m}{p} - l. \\ 2. \quad \Phi^{(0)} \cdot z''^{(1)} &= \frac{1}{p^2} \hat{\mathbf{P}}_m z'^{(1)} + \frac{1}{p^2} \hat{\mathbf{P}}^{(1)} \cdot z'_m + \varphi^{(1)} \hat{\mathbf{P}}_m \cdot z'_m - \Phi^{(1)} \cdot z''_m. \end{aligned}$$

Последнее уравнение является линейным и обычно именуется параксиальным или гауссовым.

Частицы пучка регистрируются либо в один и тот же момент времени, либо в некоторой определенной плоскости, например в плоскости  $x_3 = 0$ . Поэтому уравнения (3) необходимо дополнить уравнением наблюдателя, с учетом которого они становятся системой трех уравнений второго порядка:

$$x''_i = \tilde{f}^{(ir)} \hat{x}^r, \quad r = 1, \dots, m, \quad i = 1, 2, 4, \quad (4)$$

где  $f^{(ir)}$  — вектор-строка размерности, равной числу сочетаний с повторением из 6 элементов по  $r$ ;

$$\tilde{x} = \|x_1 x_2 x_4 x'_1 x'_2 x'_4\|.$$

**Уравнение для фазовых моментов.** Нелинейному уравнению (4) можно сопоставить линейное уравнение для фазовых моментов:

$$\frac{d \langle \hat{x} \rangle^{(m)}}{ds} = \mathbf{P}^{(m)} \langle \hat{x} \rangle^{(m)}, \quad \langle \hat{x} \rangle^{(m)} = \left\| \begin{array}{c} \hat{x} \\ \hat{x}^2 \\ \vdots \\ \hat{x}^m \end{array} \right\|. \quad (5)$$

Здесь матричная функция  $\mathbf{P}^{(m)}$  имеет верхний треугольный блочный вид:

$$\mathbf{P}^{(m)} = \left\| \begin{array}{cccc} P^{11} & P^{12} & \dots & P^{1m} \\ 0 & P^{22} & \dots & P^{2m} \\ 0 & 0 & \dots & P^{mm} \end{array} \right\|.$$

Решение линейного уравнения (5) для  $\hat{x}$  совпадает с решением уравнения (4), полученным методом последовательных приближений. Метод решения уравнения (4) путем сведения его к виду (5) именуется методом погружения в пространство фазовых моментов.

Запись нелинейного уравнения в линеаризованной форме позволяет строить его решение через матрицант, не зависящий от начального вектора  $\hat{x}_0$ , в то время как решение нелинейного уравнения ищется для каждого значения  $\hat{x}_0$ . Заметим, что первые предложения по применению матриц в нелинейных задачах содержатся в работах Брауна [34, 35].

Решение уравнения (5) записывается через матрицант в виде

$$\hat{x} = \mathbf{X}(\mathbf{P}^{(m)}, s/s_0) \hat{x}_0, \quad \mathbf{X}(s_0/s_0) = \mathbf{I},$$

где матрицант имеет, как и матрица коэффициентов  $\mathbf{P}^{(m)}$ , верхнюю треугольную блочную структуру

$$\mathbf{X}(\mathbf{P}^{(m)}, s/s_0) = \left\| \begin{array}{cccc} X^{11} & X^{12} & \dots & X^{1m} \\ 0 & X^{22} & \dots & X^{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & X^{mm} \end{array} \right\|$$

и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\mathbf{X}'(\mathbf{P}^{(m)}, s/s_0) = \mathbf{P}^{(m)} \cdot \mathbf{X}(\mathbf{P}^{(m)}, s/s_0).$$

Блочная матрица  $X^{11}$  является матрицантом линейного уравнения в фазовом пространстве  $\hat{x}$ :

$$\hat{x}' = P^{11}\hat{x}, \quad \hat{x} = X^{11}\hat{x}_0.$$

Матрица-функция  $X^{ik}$ , как и  $P^{ik}$  ( $k \geq i$ ), является прямоугольной матрицей, состоящей из  $C_{n-1+i}^{n-1}$  строк и  $C_{n-1+k}^{n-1}$  столбцов.

Матрица-функция  $X^{rr}$  определяется из уравнения

$$(X^{11}\hat{x}_0)^r = X^{rr}\hat{x}_0^r, \quad r = 1, \dots, m.$$

Внедиагональные блок-матрицы  $X^{ij}$  ( $j > i$ ) имеют вид

$$X^{ij}(s/0) = \sum_{l=i+1}^j \int_0^s X^{il}(s/\tau) P^{il}(\tau) X^{lj}(\tau/0) d\tau.$$

Вычисление  $X^{ij}(s/0)$  можно организовать следующим образом: сначала вычисляется  $X^{i,i+1}$ , затем  $X^{i,i+2}$  и т.д. до  $X^{ij}$  ( $i = 1, \dots, m$ ,  $j = i + 1, \dots, m$ ), но можно и одновременно вычислять весь матрицант  $X$  ( $P^{(m)}$ ,  $s/s_0$ ), о чем пойдет речь в разд. 5.

### 3. ПАРАКСИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ИОНОВ В РАЗЛИЧНЫХ ТИПАХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЛИНЗ

Параксиальные уравнения движения при  $l = 0$ ,  $x_3 = 0$ . Для этого случая получим:

$$\begin{aligned} x_1'' &= -\frac{\gamma}{p^2} E_{m3} x_1' + \left(2k_3 + \frac{1}{p} B_{m3}\right) x_2' + p \left(\gamma k_2 + \frac{1}{p^2} E_{m1}\right) x_4' + \\ &+ \left[-\frac{1}{p} \nabla_1 B_2 + \frac{\gamma}{p^2} \nabla_1 E_1 + p^2 k_2^2 + \left(\frac{1}{p} B_{m3} + k_3\right) k_3 + \frac{\gamma k_2}{p^2} E_{m1}\right] x_1 + \\ &+ \left[k_3' + \frac{\gamma}{p^2} E_{m3} k_3 - \frac{1}{p} \nabla_2 B_2 + \frac{\gamma}{p^2} \nabla_2 E_1 - p^2 k_1 k_2 - \frac{\gamma k_1}{p^2} E_{m1}\right] x_2 + \\ &+ \left[-\frac{1}{p} \nabla_4 B_2 + \frac{\gamma}{p^2} \nabla_4 E_1\right] x_4; \\ x_2'' &= -\left(2k_3 + \frac{B_{m3}}{p}\right) x_1' - \frac{\gamma}{p^2} E_{m3} x_2' + p \left(-\gamma k_1 + \frac{1}{p^2} E_{m2}\right) x_4' + \\ &+ \left[-k_3' - \frac{\gamma}{p^2} E_{m3} k_3 + \frac{1}{p} \nabla_1 B_1 + \frac{\gamma}{p^2} \nabla_1 E_2 - p^2 k_1 k_2 + \frac{\gamma k_2}{p^2} E_{m2}\right] x_1 + \\ &+ \left[\frac{1}{p} \nabla_2 B_1 + \frac{\gamma}{p^2} \nabla_2 E_2 + p^2 k_1^2 + \left(\frac{B_{m3}}{p} + k_3\right) k_3 - \frac{\gamma k_1}{p^2} E_{m2}\right] x_2 + \\ &+ \left[\frac{1}{p} \nabla_4 B_1 + \frac{\gamma}{p^2} \nabla_4 E_2\right] x_4; \\ x_4'' &= -\frac{1}{p} \left(\gamma k_2 + \frac{1}{p^2} E_{m1}\right) x_1' - \frac{1}{p} \left(-\gamma k_1 + \frac{E_{m2}}{p^2}\right) x_2' - \frac{3\gamma}{p^2} E_{m3} x_4' - \\ &- \frac{1}{p} \left[\gamma k_2' + k_2 \left(3 + \frac{1}{p^2}\right) E_{m3} + \frac{1}{p^2} \nabla_1 E_3 + \frac{1}{p^2} k_3 E_{m2}\right] x_1 - \\ &- \frac{1}{p} \left[-\gamma k_1' - k_1 \left(3 + \frac{1}{p^2}\right) E_{m3} + \frac{1}{p^2} \nabla_2 E_3 - \frac{k_3}{p^2} E_{m1}\right] x_2 - \frac{1}{p^3} \nabla_4 E_3 x_4. \end{aligned}$$

Здесь  $\nabla = \nabla(x)$ , под  $\nabla_i B_k$  и  $\nabla_i E_k$  понимаются значения производных вдоль траектории осевой частицы, которые являются функциями от  $s$ , а кривизны  $k_1$  и  $k_2$  определяются из уравнений движения осевой частицы:

$$k_1 = -\frac{B_{m1}}{p} - \frac{\gamma}{p^2} E_{m2}, \quad k_2 = -\frac{B_{m2}}{p} + \frac{\gamma}{p^2} E_{m1},$$

где

$$\gamma = \int_0^s E_{m3} ds + \gamma_0.$$

**О фазовом объеме пучка.** Фазовый объем пучка  $V$  определяется выражением

$$V = V_0 \exp - \int_0^s 5 \frac{\gamma}{p^2} E_{m3} ds.$$

Если выбрать фазовые переменные в виде элементов вектора  $h$ , где

$$\begin{aligned} h_1 &= x_1, & h_2 &= x_2, & h_3 &= x_4, \\ h_4 &= \frac{p}{p_0} x'_1, & h_5 &= \frac{p}{p_0} x'_2, & h_6 &= \frac{p^3}{p_0^3} x'_4, \end{aligned}$$

то в таком фазовом пространстве фазовый объем в течение движения останется постоянным.

**Магнитоэстатическая линза с прямолинейной осью.** Для случая  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 0$ ,  $l = 0$  получим:

$$\begin{aligned} x_1'' &= \left( \frac{k_3}{p} B_{m3} + k_3^2 - \frac{1}{p} \nabla_1 B_2 \right) x_1 + \left( k_3' - \frac{1}{p} \nabla_2 B_2 \right) x_2 + \left( 2k_3 + \frac{B_{m3}}{p} \right) x_2'; \\ x_2'' &= \left( -k_3' + \frac{1}{p} \nabla_1 B_1 \right) x_1 + \left( \frac{k_3}{p} B_{m3} + k_3^2 + \frac{1}{p} \nabla_2 B_1 \right) x_2 - \\ &\quad - \left( 2k_3 + \frac{B_{m3}}{p} \right) x_1'. \end{aligned}$$

Выбирая  $k_3$  в виде

$$k_3 = -\frac{1}{2p} B_{m3}$$

и учитывая в параксиальном приближении уравнения Максвелла без учета собственного объемного заряда:

$$\nabla_2 B_1 = \nabla_1 B_2 = B_{12}, \quad \nabla_1 B_1 + \nabla_2 B_2 = -B'_{m3},$$

найдем уравнения движения для магнитоэстатической линзы с прямолинейной осью:

$$\left. \begin{aligned} x_1'' &= -\frac{1}{p} \left( B_{12} + \frac{B_{m3}^2}{4p} \right) x_1 + \frac{1}{2p} (\nabla_1 B_1 - \nabla_2 B_2) x_2; \\ x_2'' &= \frac{1}{2p} (\nabla_1 B_1 - \nabla_2 B_2) x_1 + \frac{1}{p} \left( B_{12} - \frac{B_{m3}^2}{4p} \right) x_2. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Вводя обозначения:

$$k_{11} = -\frac{1}{p} \left( B_{12} + \frac{B_{m3}^2}{4p} \right),$$

$$k_{12} = \frac{1}{2p} (\nabla_1 B_1 - \nabla_2 B_2), \quad \hat{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x'_1 \\ x_2 \\ x'_2 \end{Bmatrix},$$

$$k_{22} = \frac{1}{p} \left( B_{12} - \frac{B_{m3}^2}{4p} \right),$$

уравнения (6) перепишем в матричном виде:

$$\hat{x}' = \mathbf{P} \hat{x}, \quad \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ k_{11} & 0 & k_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_{12} & 0 & k_{22} & 0 \end{Bmatrix}.$$

Частными случаями магнитостатической линзы с прямолинейной осью являются магнитные осесимметричная ( $\nabla_1 B_1 = \nabla_2 B_2$ ,  $B_{12} = 0$ ) и квадрупольная ( $\nabla_1 B_1 = \nabla_2 B_2 = 0$ ,  $B_{m3} = 0$ ) линзы.

**Матрицант осесимметричной линзы.** Для осесимметричной линзы обычно пользуются моделью колоколообразного поля [36]:

$$B_{m3} = \frac{B_3^0}{1 + \left( \frac{s - s_c}{d} \right)^2},$$

где  $B_3^0$  — максимальное значение  $B_{m3}$  в середине поля  $s = s_c$ , а  $d$  — полуширина поля.

Вводя обозначения:

$$\beta_0 = B_3^0 / 2p, \quad \beta_0 d = k_0, \quad \omega = \sqrt{1 + k_0^2},$$

$$\frac{s - s_c}{d} = \text{ctg } \vartheta, \quad \frac{s_0 - s_c}{d} = \text{ctg } \vartheta_0, \quad \alpha = \omega (\vartheta - \vartheta_0),$$

запишем выражения для элементов матрицанта  $\mathbf{R}$ :

$$\hat{x} = \mathbf{R} \hat{x}_0, \quad \mathbf{R} = \begin{Bmatrix} \mathbf{T} & 0 \\ 0 & \mathbf{T} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{Bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{Bmatrix},$$

где

$$T_{11} = \frac{1}{\sin \vartheta} \left[ \cos \alpha \sin \vartheta_0 + \frac{\cos \vartheta_0}{\omega} \sin \alpha \right];$$

$$T_{12} = -\frac{d}{\omega} \frac{\sin \alpha}{\sin \vartheta_0 \sin \vartheta};$$

$$T_{21} = \frac{1}{d} \left[ \cos \alpha \sin (\vartheta_0 - \vartheta) + \sin \alpha \frac{\cos \vartheta \cos \vartheta_0}{\omega} + \omega \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \right];$$

$$T_{22} = \frac{1}{\sin \vartheta_0} \left[ \cos \alpha \sin \vartheta - \frac{\cos \vartheta}{\omega} \sin \alpha \right].$$

**Матрицант квадрупольной линзы.** Для квадрупольной линзы будем использовать обычно применяемую в расчетах прямоугольную модель поля, в которой используются следующие обозначения:

$$k = \frac{1}{p} B_{12}, \quad k_c = \frac{1}{p} B_{12}^0, \quad B_{12} = \nabla_2 B_1 = \nabla_1 B_2,$$

$$L = \frac{1}{k_c} \int_{-\infty}^{+\infty} k(s) ds, \quad \beta^2 = |k_c|, \quad \kappa = \beta L,$$

где  $B_{12}^0$  — максимальное значение  $\nabla_1 B_2$  на оси линзы;  $L$  — эффективная длина линзы;  $\beta$  — возбуждение линзы;  $\kappa$  — безразмерное возбуждение.

Матрицант квадрупольной линзы при этих обозначениях записывается следующим образом (для  $B_{12} > 0$ ):

$$\mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{F} & 0 \\ 0 & \mathbf{D} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{vmatrix},$$

где

$$F_{11} = F_{22} = \cos \kappa; \quad F_{12} = \frac{1}{\beta} \sin \kappa; \quad F_{21} = -\beta \sin \kappa;$$

$$D_{11} = D_{22} = \text{ch } \kappa; \quad D_{12} = -\frac{1}{\beta} \text{sh } \kappa; \quad D_{21} = \beta \text{sh } \kappa.$$

**Уравнения движения в отклоняющих магнитах.** Будем считать, что отклоняющий магнит с неоднородным полем, границы которого на входе и выходе прямолинейны и перпендикулярны осевой траектории, имеет кривизну  $k_2$ , т.е. отклоняет частицы в плоскости  $(x_1 s)$ . Для статического случая при  $k_1 = k_3 = 0$ ,  $l = 0$  параксиальные уравнения движения в таком магните записываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x_1'' &= \left( -\frac{1}{p} \nabla_1 B_2 + p^2 k_2^2 \right) x_1 + p \gamma k_2 x_4'; \\ x_2'' &= \frac{1}{p} \nabla_2 B_1 x_2; \\ x_4'' &= -\frac{\gamma}{p} (k_2' x_1 + k_2 x_1') = -\frac{\gamma}{p} (k_2 x_1)', \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где  $k_2 = -B_{m2}/p = 1/\rho$ .

Вводя матрицант в пространстве переменных  $(x_1, x_1', x_4')$ ,

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_1' \\ x_4' \end{vmatrix} = \mathbf{R} \cdot \begin{vmatrix} x_{10} \\ x_{10}' \\ x_{40}' \end{vmatrix},$$

определим элементы матрицанта для прямоугольной модели поля, полагая величины  $k_2$  и  $\nabla_1 B_2$  постоянными вдоль осевой траектории длиной  $L$ ,

$$L = \rho\alpha = \alpha/k_2,$$

где  $\alpha$  — угол отклонения осевой частицы. Вводя показатель спада поля  $n$ :

$$n = \nabla_1 B_2 \frac{\rho}{B_{m2}} = -\frac{\nabla_1 B_2}{pk_2^2},$$

и безразмерное возбуждение  $\varphi$ :

$$\varphi = \alpha \sqrt{1-n},$$

получаем для  $n < 1$ :

$$R_{11} = \cos \varphi + \frac{\gamma^2}{1-n} (1 - \cos \varphi); \quad R_{21} = \frac{\sqrt{1-n}}{\rho} \left( \frac{\gamma^2}{1-n} - 1 \right) \sin \varphi;$$

$$R_{31} = -\frac{\gamma}{p\rho} \left( \frac{\gamma^2}{1-n} - 1 \right) (1 - \cos \varphi); \quad R_{12} = \frac{\rho}{\sqrt{1-n}} \sin \varphi;$$

$$R_{22} = \cos \varphi; \quad R_{32} = -\frac{\gamma}{p} \frac{1}{\sqrt{1-n}} \sin \varphi; \quad R_{13} = \frac{p\gamma\rho}{1-n} (1 - \cos \varphi);$$

$$R_{23} = \frac{p\gamma}{\sqrt{1-n}} \sin \varphi; \quad R_{33} = 1 - \frac{\gamma^2}{1-n} (1 - \cos \varphi).$$

Соответствующие формулы для случая  $n > 1$  получаются из вышеприведенных формул заменами:

$$\begin{aligned} \sqrt{1-n} &= i \sqrt{n-1}, \quad \varphi = i\varphi^*, \quad \varphi^* = \alpha \sqrt{n-1}, \\ \cos i\varphi^* &= \operatorname{ch} \varphi^*, \quad \sin i\varphi^* = i \operatorname{sh} \varphi^*. \end{aligned}$$

Заметим, что относительный продольный импульсный разброс частиц, обычно используемый в работах по отклоняющим системам, связан с переменной  $x'_4$  следующим образом:

$$\delta = \Delta p/p = p\gamma x'_{40} + \gamma^2 x'_{10}.$$

Второе уравнение в (7) аналогично уравнению квадрупольной линзы, и его решение для прямоугольной модели поля записывается в виде

$$\begin{vmatrix} x_2 \\ x'_2 \end{vmatrix} = \mathbf{F} \cdot \begin{vmatrix} x_{20} \\ x'_{20} \end{vmatrix}, \quad n > 0;$$

$$\begin{vmatrix} x_2 \\ x''_2 \end{vmatrix} = \mathbf{D} \cdot \begin{vmatrix} x_{20} \\ x'_{20} \end{vmatrix}, \quad n < 0,$$

где

$$F_{11} = F_{22} = \cos(\sqrt{|n|} \alpha); \quad F_{12} = \frac{\rho}{\sqrt{|n|}} \sin(\sqrt{|n|} \alpha);$$

$$F_{21} = -\frac{\sqrt{|n|}}{\rho} \sin(\sqrt{|n|} \alpha);$$

$$D_{11} = D_{22} = \operatorname{ch}(\sqrt{|n|} \alpha); \quad D_{12} = \frac{\rho}{\sqrt{|n|}} \operatorname{sh}(\sqrt{|n|} \alpha);$$

$$D_{21} = \frac{\sqrt{|n|}}{\rho} \operatorname{sh}(\sqrt{|n|} \alpha).$$

#### 4. КАНОНИЧЕСКИЕ И СИММЕТРИЧНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПУЧКАМИ

Системы фокусировки, формирования и отклонения пучков будем называть системами управления пучками.

**G-каноническая и T-симметричная матричные функции.** В уравнении для матрицанта

$$\mathbf{R}' = \mathbf{P}(s) \mathbf{R}, \quad \mathbf{R}(s_0/s_0) = \mathbf{I}$$

матричная функция  $\mathbf{P}(s)$  является G-канонической, если она удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{P}(s) \mathbf{G} + \mathbf{G} \tilde{\mathbf{P}}(s) = 0,$$

и T-симметричной на промежутке  $[0, L]$ , если

$$\mathbf{P}(L/2 + s) \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{P}(L/2 - s) = 0.$$

В обоих случаях под матрицами  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{T}$  понимаются вещественные квадратные постоянные неособенные матрицы.

Так, если для квадратной  $(2k \times 2k)$ -матрицы  $\mathbf{P}$  справедливы блочные уравнения:

$$P_{11} = -\tilde{P}_{22}, \quad P_{12} = \tilde{P}_{12}, \quad P_{21} = \tilde{P}_{21},$$

то она является J-канонической, где

$$\mathbf{J}_{2k} = \left\| \begin{array}{cc} 0 & -I_k \\ I_k & 0 \end{array} \right\|, \quad k = 1, 2, \dots$$

Если для  $(4 \times 4)$ -матрицы  $\mathbf{P}$  матрица  $\mathbf{T} = \mathbf{S}$ , где

$$\mathbf{S} = \left\| \begin{array}{cc} \mathbf{U} & 0 \\ 0 & \mathbf{U} \end{array} \right\|, \quad \mathbf{U} = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right\|,$$

то матрицу  $\mathbf{P}$  именуем симметричной, а если  $\mathbf{T} = \mathbf{A}$ , где

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{array}{cc} 0 & \mathbf{U} \\ \mathbf{U} & 0 \end{array} \right\|,$$

то антисимметричной на промежутке  $[0, L]$ .



**G-канонические и T-симметричные системы управления.** Систему управления, линейное уравнение движения частиц в которой описывается G-канонической матрицей коэффициентов  $P(s)$ ,

$$\hat{x}' = P(s) \hat{x},$$

именуем G-канонической, а систему управления, для которой  $P$  является T-симметричной матрицей, назовем T-симметричной.

Для G-канонической системы матрицант  $R$  является G-инвариантным:

$$RGR \sim G.$$

Например, матрица  $P$ , описывающая квадрупольную или осесимметричную линзу для вектора  $\tilde{x}_1 = \|x_1 x_1'\|$  или  $\tilde{x}_2 = \|x_2 x_2'\|$ , является  $J_2$ -канонической и матрицант  $R$  такой системы удовлетворяет условию  $J_2$ -инвариантности:

$$\left\| \begin{array}{cc} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} R_{11} & R_{21} \\ R_{12} & R_{22} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\|.$$

Матрицант для T-симметричной системы удовлетворяет уравнению

$$T \cdot R(P, s/0) = R(P, L - s/L) \cdot T.$$

При  $s = L$  и  $s = L/2$  получим:

$$\begin{aligned} R(L/0) \cdot T \cdot \tilde{R}(L/0) &= T; \\ R(L/L/2) \cdot T \cdot R(L/2/0) &= T. \end{aligned}$$

Для G-канонической системы, которая одновременно является и T-симметричной, справедливы следующие уравнения для матрицанта:

$$\begin{aligned} G \cdot T \cdot R(L/0) &= \tilde{R}(L/0) \cdot G \cdot T; \\ G \cdot T \cdot R(L/2/0) &= \tilde{R}(L/L/2) \cdot G \cdot T. \end{aligned}$$

**Симметричная и антисимметричная магнитостатические системы.** Система парааксиальных уравнений движения в магнитостатической линзе имеет вид

$$\hat{x}' = P\hat{x}, \quad \hat{x} = \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_1' \\ x_2 \\ x_2' \end{array} \right\|, \quad P = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ k_{11} & 0 & k_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_{12} & 0 & k_{22} & 0 \end{array} \right\|. \quad (8)$$

Как легко видеть, матрица  $P$  является G-канонической, где

$$G = \left\| \begin{array}{cc} J_2 & 0 \\ 0 & J_2 \end{array} \right\|.$$

Она будет симметричной при выполнении условий:

$$\left. \begin{aligned} k_{11} \left( \frac{L}{2} + s \right) &= k_{11} \left( \frac{L}{2} - s \right); \\ k_{22} \left( \frac{L}{2} + s \right) &= k_{22} \left( \frac{L}{2} - s \right); \\ k_{12} \left( \frac{L}{2} + s \right) &= k_{12} \left( \frac{L}{2} - s \right), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где  $L$  — длина системы, и антисимметричной в случае

$$\left. \begin{aligned} k_{11} \left( \frac{L}{2} + s \right) &= k_{22} \left( \frac{L}{2} - s \right); \\ k_{22} \left( \frac{L}{2} + s \right) &= k_{11} \left( \frac{L}{2} - s \right); \\ k_{12} \left( \frac{L}{2} + s \right) &= -k_{12} \left( \frac{L}{2} - s \right). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Из условий антисимметрии и G-каноничности следует, что матрицант антисимметричной системы должен иметь следующую структуру:

$$\mathbf{R} = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & 0 \\ R_{21} & R_{22} & 0 & -R_{13} \\ R_{13} & 0 & R_{22} & R_{12} \\ 0 & -R_{13} & R_{21} & R_{11} \end{vmatrix}. \quad (11)$$

**Магнитостатическая система — аналог осесимметричной линзы.**  
Назовем аналогом осесимметричной линзы такую систему, в которой матрицант  $\mathbf{R}$  на длине системы  $L$  имеет вид

$$\mathbf{R} = \begin{vmatrix} R^{11} & 0 \\ 0 & R^{11} \end{vmatrix}, \quad R^{11} = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}.$$

Из структуры матрицанта (11) следует, что система (8), описываемая уравнениями (10), будет на выходе вести себя как аналог осесимметричной при выполнении условий:

$$\begin{aligned} R_{11}(L/0) &= R_{22}(L/0), \\ R_{13}(L/0) &= 0. \end{aligned}$$

Для случая  $k_{12} = 0$  второе условие тождественно выполняется, и единственным условием превращения системы в аналог осесимметричной является первое условие.

В частности, система из квадрупольных линз ( $k_{22} = k_{11} = k$ ,  $\varepsilon = 0$ ) будет аналогом осесимметричной линзы при выполнении условий:

$$\left. \begin{aligned} k \left( \frac{L}{2} + s \right) &= -k \left( \frac{L}{2} - s \right), \\ R_{11}(L/0) &= R_{22}(L/0). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

**Квадруplet вращения.** Простейшей фокусирующей квадрупольной системой, выполняющей функцию аналога осесимметричной линзы, является система из четырех квадрупольных линз — квадруplet вращения (или «русский» квадруplet) [15]. Его свойства подробно описаны в [16]. Уравнение (12) задает в неявном виде связь между  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  для выбранной геометрии квадруплета вращения. Получаемая кривая на плоскости  $(\kappa_1, \kappa_2)$  именуется нагрузочной кривой.

**Матрицант антисимметричного квадруплета в приближении тонких линз.** Для системы из  $n$  квадрупольных линз будем использовать следующие обозначения. Длину  $j$ -й линзы обозначим  $L_j$ ;  $s_j$  — расстояние между  $j$ -й и  $(j + 1)$ -й линзами;  $s_0$  — расстояние между положением начального фазового портрета и первой линзой;  $s_{2n+1}$  — расстояние между последней линзой и положением конечного фазового портрета (расстояние между последней линзой и мишенью),

$$\frac{1}{p} |\nabla_1 B_2(j)| = \beta_j^3, \quad \kappa_j = \beta_j L_j.$$

В антисимметричном квадруплете  $n = 4$ ,  $s_1 = s_3$ ,  $L_1 = L_4$ ,  $L_2 = L_3$ ,  $\kappa_1 = \kappa_4$ ,  $\kappa_2 = \kappa_3$ . Для удобства записи формул будем использовать дополнительные обозначения:

$$t_1 = s_0 + \frac{1}{2} L_1, \quad t_2 = t_4 = s_1 + \frac{1}{2} (L_1 + L_2),$$

$$t_2 = s_2 + L_2, \quad t_3 = s_4 + \frac{1}{2} L_1,$$

$$c_1 = -c_4 = -\frac{\kappa_1^2}{L_1}, \quad c_2 = -c_3 = \frac{\kappa_2^2}{L_2},$$

$$\alpha = (c_1 + c_2) t_3 + 2c_1 t_2 - c_1 c_2^2 t_3^2, \quad \bar{L} = s_0 + 2s_1 + s_2 + s_4 + 2L_1 + 2L_2.$$

Матрицант в плоскости  $(x_1 s) = (xs)$  обозначим  $X$ , а в плоскости  $(x_2 s) = (ys) — Y$ .

В приближении тонких линз элементы матрицанта для антисимметричного квадруплета записываются следующим образом:

$$X_{11} = Y_{22} = 1 + \alpha - c_1^2 t_2 t_3 + t_5 X_{21};$$

$$X_{12} = Y_{12} = \bar{L} + \alpha (t_1 - t_5) + t_1 t_5 X_{21} - c_2^2 t_2 t_3 (t_1 + t_2 + t_5);$$

$$X_{21} = Y_{21} = t_3 [c_1^2 c_2^2 t_2^2 - (c_1 + c_2)^2] - 2c_1^2 t_2;$$

$$X_{22} = Y_{11} = 1 - \alpha - c_1^2 t_2 t_3 + t_1 X_{21}.$$

**Квадруplet вращения в приближении тонких линз.** Условие  $\alpha = 0$  определяет квадруplet вращения и является уравнением нагрузочной кривой в приближении тонких линз.

Кардинальные элементы квадруплета вращения определяются выражениями

$$H'F' = HF = f = \frac{t_2(2-\varphi) + t_3}{\varphi(2-\varphi)}, \quad \varphi = c_2^2 t_2 t_3,$$

$$S'F' = SF = f(1-\varphi) - \frac{1}{2} L_1.$$

Приближение тонких линз даже для достаточно больших возбуждений ( $\kappa \cong 1$ ) дает с приемлемой точностью параметры квадруплета вращения: 5—10 % для  $HF$  и  $SF$  и 20 % для величин градиентов поля.

**Матрица фокусирующей линзы, матрица Твиса, эквивалентная длина системы.** Будем использовать двухпараметрическую матрицу фокусирующей линзы  $F(\mu, \nu)$  и трехпараметрическую матрицу Твиса  $T(\mu, \nu, \varepsilon)$ , где

$$F(\mu, \nu) = \left\| \begin{array}{cc} \cos \mu & \frac{\sin \mu}{\nu} \\ -\nu \sin \mu & \cos \mu \end{array} \right\|; \quad T(\mu, \nu, \varepsilon) = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\cos(\mu - \varepsilon)}{\cos \varepsilon} & \frac{\sin \mu}{\nu \cos \varepsilon} \\ -\frac{\nu \sin \mu}{\cos \varepsilon} & \frac{\cos(\mu + \varepsilon)}{\cos \varepsilon} \end{array} \right\|.$$

Матрица фокусирующей линзы является частным случаем матрицы Твиса при  $\varepsilon = 0$ .

Введем понятие эквивалентной длины фокусирующей линзы  $L_{\text{eq}}$ , определив ее следующим образом:

$$L_{\text{eq}} = \mu/\nu.$$

**Представление антисимметричного квадруплета в виде эквивалентной фокусирующей линзы.** Для антисимметричного квадруплета длиной  $L_h$ , где

$$L_h = 2(L_1 + L_2 + s_1) + s_2,$$

в каждой из плоскостей  $(x_1s) = (xs)$  и  $(x_2s) = (ys)$  найдем параметры эквивалентной фокусирующей линзы:

$$\cos \mu_x = \cos \mu_y = \cos \mu = \frac{1}{2}(H_{11} + H_{22}) = \frac{1}{2}(V_{11} + V_{22});$$

$$\nu_x = \nu_y = \sqrt{-\frac{H_{21}}{H_{12}}} = \sqrt{-\frac{V_{21}}{V_{12}}};$$

$$\sin \varepsilon_x = \frac{H_{11} - H_{22}}{2\sqrt{-H_{12}H_{21}}}; \quad \sin \varepsilon_y = -\sin \varepsilon_x.$$

Здесь через матрицанты  $H$  и  $V$  обозначены значения матрицантов  $X$  и  $Y$  для  $s_0 = s_4 = 0$ .

Определим коэффициент эквивалентности  $\alpha_{\text{eq}}$  в виде:

$$\alpha_{\text{eq}} = L_{\text{eq}}/L_h.$$

Квадруплет вращения можно представить в виде эквивалентной фокусирующей линзы длиной  $L_{eq}$ , матрицант  $M = M(8/1)$  которой есть матрица фокусирующей линзы:

$$M = X(8/1) = Y(8/1) = F(\mu, \nu),$$

где

$$\cos \mu = M_{11} + M_{22}; \quad \alpha_{eq} = \mu / (\nu L_k).$$

Из анализа результатов численных расчетов следует, что  $\alpha_{eq} \cong 1$  и очень слабо зависит от  $\mu$ , т.е. длина эквивалентной фокусирующей линзы приблизительно равна длине квадруплета вращения.

**Связь параметров квадруплета вращения и осесимметричной линзы.** Обозначим  $z_F$  ( $z_{F'}$ ) положение фокальной точки в пространстве предметов (изображений),  $z_c$  — положение центра квадруплета вращения или центра линзы,  $f$  — фокусное расстояние. Тогда можно записать для квадруплета вращения:

$$f = -\frac{1}{M_{21}} = \frac{1}{\nu \sin \mu},$$

$$z_c - z_F = SF + \frac{1}{2} L_k = \frac{1}{\nu} \operatorname{ctg} \mu + \frac{1}{2} L_k,$$

и для осесимметричной линзы:

$$f = \frac{d}{\sin \frac{\pi}{\omega}}, \quad z_c - z_F = -d \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega},$$

откуда следует:

$$d = \sqrt{f^2 - \left(SF + \frac{1}{2} L_k\right)^2},$$

$$k_0^2 = \frac{\pi^2}{a^2} - 1, \quad \bar{a} = \arccos \frac{-SF + \frac{1}{2} L_k}{f}.$$

Последние дают возможность по известному значению  $\mu$  для квадруплета вращения, а следовательно, и по известным  $f/L_k$  и  $SF/L_k$  вычислить значения  $L_k/d$  и  $k_0^2$  для колоколообразной модели линзы с равновеликими  $f$  и  $z_c - z$ .

**Сравнение магнитных полей квадрупольных линз в квадруплете вращения и осесимметричной линзы.** Обозначим магнитную индукцию на полюсе  $j$ -й квадрупольной линзы  $B_{kj}$ , максимальное значение магнитной индукции на оси осесимметричной линзы  $B_0$ , радиус апертуры квадрупольной линзы  $a_j$ , длину квадрупольной линзы  $L_j$ , безразмерное возбуждение  $\kappa_j$ . Тогда отношение полей запишется в виде

$$\frac{B_0}{B_{kj}} = \frac{w_j L_j}{a_j},$$

где

$$w_j = \frac{2k_0}{\kappa_j^2} \frac{L_k}{d} \frac{L_j}{L_k}.$$

Результаты расчетов показывают, что квадрупольные линзы дают выигрыш по магнитной индукции на полюсе приблизительно в 3—9 раз по сравнению с осесимметричным соленоидом при  $L_j/a_j \cong 3$ .

Из последних выражений вытекает, что чем больше отношение длины квадрупольной линзы к ее апертуре, тем больший выигрыш по полю достигается в квадруплете вращения по сравнению с соленоидом.

## 5. РЕКУРСИВНЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ МАТРИЦАНТА

**Скобки Гаусса.** На заре развития геометрической оптики, когда не существовало еще матричного аппарата, Гаусс получал свои результаты по световой оптике, используя рекурсивный аппарат, получивший впоследствии название скобок Гаусса [37, 38]. Аппарат скобок Гаусса используется для двумерных фазовых преобразований. С ним неразрывно связано представление тонких линз. С помощью скобок Гаусса удобно записывать основные выражения лучевой оптики и оптики фазовых эллипсов [39, 40]. Использование непрерывного обобщенного аналога скобок Гаусса [41] дает возможность вычислять матрицант для произвольной матрицы коэффициентов при строгом сохранении фазового объема пучка на каждом шаге вычислений. На основе этого метода написаны эффективные программы для ЭВМ, предназначенные для исследования динамики пучка при произвольном осевом распределении поля вплоть до пятого порядка нелинейностей.

**Мультипликативная форма матрицанта.** Квадратную  $\beta \times \beta$ -матрицу  $a \langle j \rangle$ ,

$$a \langle j \rangle = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{j\beta} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right\| = I - I(j) + I(j) a, \quad j = 1, \dots, \beta, \quad I(j) = i(j) \tilde{i}(j),$$

отличающуюся от единичной своей  $j$ -й строкой (образующей строкой), называют  $\langle j \rangle$ -элементарной матрицей  $a$ . Элементарные матрицы обладают следующими свойствами:

1.  $a \langle j \rangle b \langle j \rangle = (a + b) \langle j \rangle$ , если  $a_{jj} = b_{jj} = 1$ .
2.  $a^{-1} \langle j \rangle = a^* \langle j \rangle = I - I(j) a^{-1} I(j) a + I(j) a^{-1} I(j)$ .
3.  $\text{Det } a \langle j \rangle = |a \langle j \rangle| = a_{jj}$ ,  $j = 1, \dots, \beta$ .

Квадратную  $\beta \times \beta$ -матрицу  $A$  можно представить либо в виде произведения  $\beta$  элементарных матриц ( $H_1$ -разложение):

$$A = a \langle \beta \rangle a \langle \beta - 1 \rangle \dots a \langle 1 \rangle,$$

где

$$I(j) a \langle j \rangle = I(j) A(j); \quad A(1) = A, \quad A^{-1}(j) \neq 0;$$

$$A(j+1) = A(j) [I - I(j) A^{-1}(j) I(j) A(j) + I(j) A^{-1}(j) I(j)],$$

либо в виде произведения  $\beta + 1$ -элементарных матриц ( $H_2$ -разложение):

$$A = b \langle \beta + 1 \rangle b \langle \beta \rangle \dots b \langle 1 \rangle,$$

где

$$b \langle \beta + 1 \rangle = c \langle 1 \rangle = \begin{vmatrix} b_{\beta+1,1} & b_{\beta+1,2} & \dots & b_{\beta+1,\beta} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix};$$

$$b = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1\beta} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{\beta+1,1} & \dots & b_{\beta+1,\beta} \end{vmatrix};$$

$$b_{jr} = b_{jj} B_{jr}(j), \quad r \neq j, \quad j = 2 \dots \beta + 1, \quad r = 1, \dots, \beta,$$

$$b_{\beta+1,1} = B_{11}(\beta + 1), \quad B(1) = A;$$

$$b_{1j} = b_{j1}^{-1} (A_{jj} - b_{jj} - \sum_{i=2}^{j-1} b_{ji} A_{ij}), \quad b_{j1}^{-1} \neq 0, \quad j = 2, \dots, \beta;$$

$$B_{kr}(j+1) = B_{kr}(j) - B_{kj}(j+1) b_{jr}, \quad r \neq j, \quad k, j = 1, \dots, \beta;$$

$$B_{kj}(j+1) = B_{kj}(j) b_{jj}^{-1}, \quad k, j = 1, \dots, \beta.$$

**Обобщенный аналог скобок Гаусса.** Сумму элементов можно записать рекурсивным образом:

$$a_1 + \dots + a_k = \Sigma_{k1} = a_k + \Sigma_{k-1,1}, \quad \Sigma_{01} = 0.$$

Примером линейной рекурсивной операции порядка 2 служит операция

$$\Sigma_{m1} = a_m \Sigma_{m-1,1} + \Sigma_{m-2,1}, \quad \Sigma_{01} = 1, \quad \Sigma_{-1,1} = 0,$$

которая определяет скобки Гаусса. Обобщенным аналогом скобок Гаусса является линейная рекурсивная операция, применяемая к элементам прямоугольной  $n \times \beta$ -матрицы  $a$ :

$$S_{m,i} = \sum_{j=1}^{\beta} a_{m, m-j} \cdot S_{m-j,i}, \quad i = 1, \dots, \beta, \quad m = 1, \dots, n. \quad (13)$$

Здесь  $m - j$  обозначает такой остаток от деления числа  $m - j$  на  $\beta$ , который принимает значения от 1 до  $\beta$  включительно:

$$m - j = n\beta + \overline{m-j}, \quad \overline{m-j} = 1, \dots, \beta, \quad j = 1, \dots, \beta.$$

Матрица результатов предшествующих операций определяется в виде

$$\left\| \begin{array}{ccc} S_{-\beta+1, 1} & \dots & S_{-\beta+1, \beta} \\ S_{-\beta+2, 1} & \dots & S_{-\beta+2, \beta} \\ \dots & \dots & \dots \\ S_0 & \dots & S_{0\beta} \end{array} \right\| = I_{\beta}.$$

Результат операции (13) над матрицей (кортежем  $a$ ) называется также челнок-суммой  $S_{m,i}$  кортежа  $a$ . Скобки Гаусса являются частным случаем их обобщенного аналога при  $\beta=2$ ,  $a_{i+2j,i} = 1$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 0, 1 \dots$

Составим  $\beta \times \beta$ -матрицу отдельных челнок-сумм в виде матрицы  $S(j, a)$ :

$$S(j, a) = \left\| \begin{array}{ccc} S_{j-\beta+1, 1} & \dots & S_{j-\beta+1, \beta} \\ \dots & \dots & \dots \\ S_{j, 1} & \dots & S_{j, \beta} \end{array} \right\|,$$

где

$$S(0, a) = I_{\beta}.$$

Существует следующая связь между произведениями элементарных матриц и челнок-суммами:

$$S(j, a) = a \langle j \rangle \dots a \langle 1 \rangle.$$

При этом  $H_1$ - и  $H_2$ -разложения для матрицы  $A$  запишутся в виде

$$A = S(\beta, a) = S(\beta + 1, b).$$

**Непрерывный обобщенный аналог скобок Гаусса.** Аппроксимируя функцию  $P(s)$  в уравнении для матрицанта

$$R'(P, s/0) = P(s) R(P, s/0), \quad R(P, 0/0) = I_{\beta}$$

кусочно-постоянной (ступенчатой) функцией  $P(j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , где

$$\sum_{j=1}^n \Delta s_j = s,$$

запишем матрицант в виде произведения  $n$ -частичных матрицантов  $R(j)$ , каждый из которых вычисляется на своем участке непрерывности  $\Delta s_j$ :

$$R = R(n) R(n-1) \dots R(1).$$

Представляя каждый из частичных матрицантов в виде произведения элементарных матриц  $a^j \langle r \rangle$ ,  $r = 1, \dots, \beta + 1$ ,

$$R(j) = a^j \langle \beta + 1 \rangle \dots a^j \langle 1 \rangle = a^j \langle \beta + 1/1 \rangle,$$

получаем матрицант для  $H_1$ -разложения в виде произведения  $n\beta$ -элементарных матриц и для  $H_2$ -разложения —  $n(\beta + 1)$ -элементарных матриц.

Раскладывая кортеж частичного матрицанта  $R(P(j), \Delta s_j/0)$  в ряд по  $\Delta s_j$  и ограничиваясь линейным приближением, получаем следующую



щие выражения для элементов кортежа:

$$\left. \begin{aligned} \hat{a}_{(j-1)\beta+1, k} &= \delta(1, k) + \alpha P_{1k}(j) \Delta s_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, \beta; \\ \hat{a}_{(j-1)\beta+i, k} &= \delta(i, k) + P_{ik}(j) \Delta s_j, \quad i = 2, \dots, \beta, \quad k = 1, \dots, \beta; \\ \hat{a}_{j\beta+1, k} &= \delta(1, k) + (1 - \alpha) P_{1k}(j) \Delta s_j, \quad k = 1, \dots, \beta; \\ \delta(i, i) &= 1, \quad \delta(i, j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, \beta. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

При этом матрицант приближенно определяется матрицей челнок-сумм:

$$\begin{aligned} R_{1k} &\approx S_{n(\beta+1), k}(\beta n + 1, \hat{a}); \quad R_{ik} \approx S_{(n-1)(\beta+1)+i, k}(\beta n + 1, \hat{a}); \\ R &\approx S(\beta n + 1, \hat{a}). \end{aligned} \quad (15)$$

Предел матрицы челнок-сумм при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\max \Delta s_j \rightarrow 0$  является матрицей челнок-интегралов от функции  $\mathbf{P}(s)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(\beta n + 1, \hat{a}) = \left\langle \int_0^s (I + \mathbf{P}(s) ds) = \mathbf{R}(\mathbf{P}, s/0), \right. \\ \left. \max \Delta s_j \rightarrow 0, \right.$$

которая равна матрицанту  $\mathbf{R}(\mathbf{P}, s/0)$ .

Формулы (15) с элементами кортежа (14) определяют алгоритм приближенного вычисления матрицанта, который состоит в умножении кортежа на матрицу-единицу  $I_\beta$ . Умножение кортежа на матрицу  $\mathbf{C}$  производится следующим образом.

Берется первая строка кортежа и умножается на матрицу  $\mathbf{C} = \mathbf{C}(1)$ . Получается новая строка, которая помещается в матрицу  $\mathbf{C}(1)$  на место I строки, тем самым образуется новая матрица  $\mathbf{C}(2)$ . Затем берется II строка кортежа, умножается на матрицу  $\mathbf{C}(2)$ , и вставляется полученная строка в матрицу  $\mathbf{C}(2)$  на место ее II строки. Получается новая матрица  $\mathbf{C}(3)$  и т.д. В  $H_1$ -методе последняя  $\beta$ -я строка кортежа умножается на матрицу  $\mathbf{C}(\beta)$  и получившаяся новая строка записывается в матрицу  $\mathbf{C}(\beta)$  вместо ее последней строки. Получается матрица  $\mathbf{C}(\beta + 1) = \mathbf{RC}$ .

В  $H_2$ -методе последняя  $(\beta + 1)$ -я строка кортежа умножается на матрицу  $\mathbf{C}(\beta + 1)$  и полученная строка вставляется в матрицу  $\mathbf{C}(\beta + 1)$  на место ее I строки. Новая матрица  $\mathbf{C}(\beta + 2) = \mathbf{RC}$ . Эти правила действительны для каждого частичного матрицанта.

При  $P_{jj} = 0$  такой метод вычисления матрицанта является консервативным по отношению к определителю матрицанта. Следовательно, фазовый объем пучка строго сохраняется на каждом шаге вычислений, что отличает данный метод от таких методов, как вычислительные схемы Рунге — Кутты и Адамса.

Разностная схема  $H_1$ -метода является схемой I порядка, а разностная схема  $H_2$ -метода — схемой II порядка для I строки матрицанта и схемой I порядка для остальных строк.

Если функция  $P(s)$  является G-канонической, то можно построить такой вариант метода челнок-сумм для вычисления матрицанта, при котором G-инвариантность матрицанта будет строго сохраняться на каждом шаге вычислений.

## 6. ЗОНДОВЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПУЧКАМИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ — СИСТЕМЫ, УМЕНЬШАЮЩИЕ ФАЗОВЫЕ РАЗМЕРЫ ПУЧКА

**Ионный зонд.** Систему управления, уменьшающую один или несколько фазовых размеров пучка, именуем зондовой системой или ионным зондом.

Будем использовать фазовые переменные, в пространстве которых фазовый объем пучка во время его движения остается постоянным. В зависимости от того, какую фазовую переменную требуется уменьшить, можно определить различные виды зондов. В настоящей работе ограничимся рассмотрением четырехмерного фазового пространства  $(h)$ , где  $h_1 = x$ ,  $h_2 = y$ ,  $h_3 = x'$ ,  $h_4 = y'$ . Фазовые размеры на входе в систему ( $s = s_0$ ) и на выходе из нее ( $s = s_e$ ) обозначим  $h_{j0}$  и  $h_{je}$ ,  $j = 1, \dots, 4$ . Будем рассматривать поперечный зонд ( $x_e < x_0$ ,  $y_e < y_0$ ) и угловой зонд ( $x'_e < x'_0$ ,  $y'_e < y'_0$ ) с двумя диафрагмами перед первой линзой.

Зонд, на выходе из которого пучок имеет очень малые фазовые размеры, например микронные и субмикронные для поперечного зонда, именуем микрозондом.

Задачу синтеза оптимального микрозонда заданной длины можно сформулировать в виде двух вариантов как обратную нелинейную задачу определения количества линз, их параметров и взаимного расположения при ряде ограничений в виде неравенств (на максимальные поля на электродах или полюсах, на апертуры и длины линз).

В первом варианте дано начальное фазовое множество и ищется система, дающая минимальный фазовый размер на выходе. Во втором — даны фазовые размеры на выходе и ищется система, имеющая максимальный аксептанс. Будем придерживаться первой постановки задачи при параметрическом задании начального множества.

**Описание начального фазового множества.** Граница начального фазового множества, вырезаемого двумя диафрагмами, описывается уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} (x'_0 + x_0/l)^2 + (y'_0 + y_0/l)^2 &= (r_2/l)^2, \\ x_0^2 + y_0^2 &= r_1^2. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Здесь  $r_i$  ( $i = 1, 2$ ) — радиус  $i$ -й диафрагмы;  $l$  — расстояние между диафрагмами. Сечения контура (16) плоскостями  $(xx')$  и  $(yy')$  являются параллелограммами, при  $r_2 \gg r_1$  практически переходящими в прямоугольники. Площадь фазового параллелограмма равна  $S = 4r_1r_2/l$ .

Граница фазового множества есть фазовый портрет пучка. Граница в виде прямоугольника с гранями, параллельными  $x$  и  $x'$  (или  $y$  и  $y'$ ), — канонический фазовый портрет.

Параксиальная система (система, уравнения движения в которой рассматриваются в линейном приближении), переводящая фазовый параллелограмм в прямоугольник, в силу сохранения фазового объема множества  $\Omega(h)$  всегда является одним из видов зонда, так как часть выходных фазовых размеров пучка в такой системе всегда меньше (или равна) соответствующих начальных.

**Увеличение зонда.** В дальнейшем, если специально не оговаривается, рассматриваются преобразования фазового портрета в сечении  $(x, x')$ . Поскольку экстремальные значения  $x$  и  $x'$  связаны с каноническим фазовым портретом, то предполагается, что на мишени фазовый портрет является прямоугольником, для которого  $x_{\max} = r$ ,  $x'_{\max} = \alpha$ . При этом увеличение зонда

$$m = r/x_0 = x'_0/\alpha.$$

Для поперечного зонда  $m < 1$ , для углового —  $m > 1$ .

**Стигматичный и  $k$ -ступенчатый зонд.** Зонд именуется стигматичным, если на мишени фазовый портрет является прямоугольником в пространствах  $(x, x')$  и  $(y, y')$ . Зонд является  $k$ -ступенчатым стигматичным зондом, если его можно разбить на  $k$  подсистем, каждая из которых является стигматичным зондом. В двухступенчатом стигматичном зонде первую подсистему называем форсистемой, а вторую — основной системой.

**Обозначения параметров ионно-оптической системы (ИОС) зонда.** Систему линз зонда сокращенно именуем ИОС зонда. Используем следующие обозначения для расстояний в системе из квадрупольных линз при использовании прямоугольной модели осевого распределения поля:

- $\Delta l$  — расстояние между 2-й диафрагмой и входом в 1-ю линзу;
- $s_j$  — расстояние между  $j$ -й и  $(j + 1)$ -й линзами;
- $g$  — расстояние между последней линзой и мишенью;
- $L_i$  — длина  $i$ -й квадрупольной линзы;
- $\bar{L}$  — длина зонда (расстояние между  $I$  диафрагмой и мишенью);
- $L$  — длина ИОС (расстояние между входом в 1-ю линзу и выходом из последней);
- $F$  и  $F'$  — передняя и задняя фокальные точки;
- $H$  и  $H'$  — передняя и задняя главные плоскости;
- $S$  и  $S'$  — передний край 1-й линзы и задний край последней;
- $SF$  и  $S'F'$  — положения фокальных точек;
- фокусное расстояние ИОС;
- $r_1$  и  $r_2$  — радиусы  $I$  и  $II$  диафрагм.

В случае колоколообразной модели поля для расстояний между центрами объектов используются те же символы, но помеченные верхним индексом «звездочка».

Используем также следующие обозначения для матрицанта:

$$\left\| \begin{matrix} x_{2n} \\ z_{2n} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} M_{x11} & M_{x12} \\ M_{x21} & M_{x22} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x'_1 \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} x_e \\ x'_e \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} R_{x11} & R_{x12} \\ R_{x21} & R_{x22} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x_0 \\ x'_0 \end{matrix} \right\|,$$

где  $M$  — матрицант ИОС;  $R$  — матрицант зонда; индекс 1 относится к плоскости входа в 1-ю линзу, индекс «2» — к плоскости выхода из  $n$ -й линзы. Аналогичные соотношения записываются в плоскости ( $ys$ ).

Для осесимметричной линзы и квадруплета вращения имеем:

$$M_x = M_y = M, \quad R_x = R_y = R.$$

**Преобразование фазового портрета в параксиальном зонде.** Рассмотрим преобразования, при которых начальный фазовый параллелограмм  $ABCD$  (рис. 1) в плоскости 1-й диафрагмы переходит в прямоугольник в плоскости мишени. Возможны 4 варианта таких преобразований (рис. 2,  $a - e$ ). Можно показать, что варианты 1 и 3

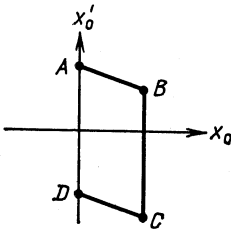


Рис. 1.

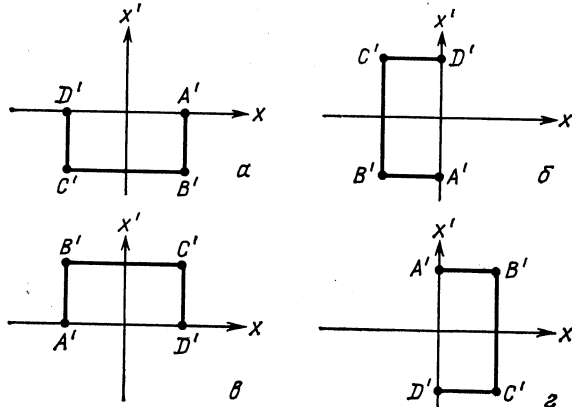


Рис. 2.

характерны для углового зонда, а варианты 2 и 4 — для поперечного. При получении выражений для матрицанта, осуществляющего такие преобразования, достаточно рассмотреть преобразования точек  $A$  и  $B$  в точки  $A'$  и  $B'$ .

**Преобразования фазового портрета в параксиальном угловом зонде.** Для преобразований 1 и 3 получим:

$$R_{11} = \pm r/r_2; \quad R_{12} = \pm rl/r_2; \quad R_{21} = \mp r_2/rl, \quad R_{22} = 0;$$

$$\alpha = r_1 r_2 / rl; \quad m = r/r_1 = \pm fr_2 / lr_1;$$

$$M_{11} = \pm \left( \frac{r}{r_2} + \frac{r_2 g}{rl} \right); \quad M_{12} = \pm \left[ \frac{r}{r_2} \Delta l + \frac{r_2 g}{r} \left( 1 + \frac{\Delta l}{l} \right) \right];$$

$$M_{21} = \mp \frac{r_2}{rl}; \quad M_{22} = \pm \frac{r_2}{r} \left( 1 + \frac{\Delta l}{l} \right);$$

$$SF = l + \Delta l; \quad S'F' = g + (r/r_2)^2 l; \quad f = \pm rl/r_2.$$

Здесь верхние знаки относятся к преобразованию 1, а нижние — к преобразованию 3.

Для одноступенчатого зонда  $M_{11} = M_{22}$ ,  $SF = S'F'$  и, следовательно,

$$g = l + \Delta l - l(r/r_2)^2.$$

Для двухступенчатого зонда, состоящего из двух расположенных на расстоянии  $\lambda$  друг от друга квадруплетов вращения или двух осесимметричных линз, расстояние между центрами которых  $\lambda^*$ , справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} f &= \frac{f_1 f_2}{SF_1 + SF_2 - \lambda} = \frac{f_1 f_2}{S^*F_1 + S^*F_2 - \lambda^*}; \\ S'F' &= SF_2 - \frac{f_2^2}{SF_1 + SF_2 - \lambda}; \quad S^*F' = S^*F_2 - \frac{f_2^2}{S^*F_1 + S^*F_2 - \lambda^*}; \\ SF &= SF_1 - \frac{f_1^2}{SF_1 + SF_2 - \lambda}; \quad S^*F = S^*F_1 - \frac{f_1^2}{S^*F_1 + S^*F_2 - \lambda^*}. \end{aligned}$$

Поэтому для преобразований 1 и 3 в двухступенчатом зонде получим:

$$\begin{aligned} SF_1 &= l + \Delta l + f \frac{f_1}{f_2}; \quad SF_2 = g + l \left( \frac{r}{r_2} \right)^2 + f \frac{f_2}{f_1}; \\ \frac{f_1 f_2}{SF_1 + SF_2 - \lambda} &= \pm \frac{rl}{r_2} = f. \end{aligned}$$

**Преобразования фазового портрета в параксиальном поперечном зонде.** Для преобразований 2 и 4 найдем:

$$\begin{aligned} R_{11} &= \mp r/r_1; \quad R_{12} = 0; \quad R_{21} = \mp r_1/rl; \quad R_{22} = \mp r_1/r; \\ M_{11} &= \pm \left( \frac{r_1}{rl} g - \frac{r}{r_1} \right); \quad M_{12} = \pm \left[ \frac{r}{r_1} (l + \Delta l) - g \frac{\Delta l}{l} \frac{r_1}{r} \right]; \\ M_{21} &= \mp r_1/rl, \quad M_{22} = \pm r_1 \Delta l/rl; \\ SF &= \Delta l; \quad S'F' = g - l(r/r_1)^2 = g - f^2/l; \\ m &= \pm f/l; \quad f = \pm rl/r_1. \end{aligned}$$

Для одноступенчатого поперечного зонда имеем:

$$g = \Delta l + (r/r_1)^2 l.$$

Для двухступенчатого поперечного зонда справедливы выражения:

$$\begin{aligned} SF_1 &= \Delta l + ff_1/f_2; \quad SF_2 = g - f^2/l + ff_2/f_1; \\ f &= \pm \frac{rl}{r_1} = \frac{f_1 f_2}{SF_1 + SF_2 - \lambda}. \end{aligned}$$

Здесь верхние знаки соответствуют преобразованию 2, а нижние — преобразованию 4.

Из выражения для фокусного расстояния следует, что ИОС микронзонда должна быть короткофокусной. Поэтому если минимальное

фокусное расстояние одной ИОС недостаточно для получения требуемого уменьшения диаметра пучка, то необходимо использовать вторую ИОС для создания составной ИОС с меньшим фокусным расстоянием при той же длине микрозонда.

## 7. КВАДРУПОЛЬНЫЙ МИКРОЗОНД

**Требования к ИОС микрозонда.** Для получения микрозонда с максимальным уменьшением следует выбирать ИОС с минимальным фокусным расстоянием. Нижняя граница фокусного расстояния для одноступенчатого микрозонда определяется нижней допустимой границей  $g$ , наименьшей возможной длиной линзы и длиной зонда. Нижняя граница длины линзы определяется максимально возможной магнитной индукцией на полюсе или напряжением на электроде и конструкцией линзы. В квадруплете вращения при наименьших возбуждениях для получения меньшего фокусного расстояния желательно свободные промежутки между линзами выбирать минимально возможными и использовать линзы равной длины.

**Примеры микрозондов.** Для квадруплета с нулевыми свободными промежутками (квадруплет  $A$ ) и  $\Delta l = 0,14 L_1$ , где  $L_1 = L_2$  — длина квадрупольной линзы, получим:

$$f = 2,53 L_1; \quad \kappa_1 = \beta_1 L_1 = 1,15; \quad \kappa_2 = \beta_2 L_2 = 0,75;$$

$$g = 0,14 L_1 + 6,40 L_1^2/l;$$

$$B_i = B_0 \kappa_i^2 a / L_i^2, \quad i = 1, 2; \quad m = 2,53 L_1/l.$$

Здесь  $B_0$  — магнитная жесткость частицы. Для протонов с энергией 3 МэВ  $B_0 = 0,25$  Тл·м.

Если свободные промежутки в квадруплете (квадруплет  $B$ ) выбрать равными  $s_1 = s_2 = s_3 = 0,20 L_1$ , то для  $\Delta l = 0,14 L_1$  получим:

$$f = 2,68 L_1; \quad \kappa_1 = 0,70; \quad \kappa_2 = 1,10;$$

$$g = 0,14 L_1 + 7,18 L_1^2/l; \quad m = 2,68 L_1/l.$$

При больших возбуждениях можно получить на порядок меньшее фокусное расстояние. Так, для квадруплета (квадруплет  $C$ ) с параметрами  $L_1 = L_2$ ,  $\Delta l = 0,056 L_1$ ,  $s_1 = s_3 = 0$ ,  $s_2 = 3 L_1$  имеем:

$$f = -0,27 L_1; \quad \kappa_1 = 2,24; \quad \kappa_2 = 1,27;$$

$$g = 0,056 L_1 + 0,073 L_1^2/l; \quad m = -0,27 L_1/l.$$

Если в первых двух случаях максимальный радиус пучка в системе несколько больше, чем  $r_2$ , то в третьем случае он на порядок больше.

**Оптимальный микрозонд.** С учетом хроматической и сферической aberrаций, считая, что  $r_2 \gg r_1$ , запишем приближенное выражение для радиуса пятна на мишени при  $y_0 = 0$ ,  $y'_0 = 0$ :

$$x_e = R_{11} r_1 + C_p \frac{\Delta p}{p} \frac{r_2}{l} + C_s \left( \frac{r_2}{l} \right)^3,$$

где

$$C_s = (M_{13} + gM_{23})(l + \Delta l)^3 + (M_{14} + gM_{24})(l + \Delta l)^2 + \\ + (M_{15} + gM_{25})(l + \Delta l) + M_{16} + gM_{26}.$$

Здесь  $M_{ik}$  — коэффициенты геометрических aberrаций ИОС зонда,  $C_p$  — коэффициент хроматической aberrации ИОС.

Выражение для  $|x_e|$  запишем через эмиттанс пучка  $\varepsilon$  и угол  $\vartheta = r_2/l$ :

$$|x_e| = \frac{b_1}{\vartheta} + b_2\vartheta + b_3\vartheta^3;$$

$$b_1 = |R_{11}\varepsilon|; \quad b_2 = \left| C_p \frac{\Delta p}{p} \right|; \quad b_3 = |C_s|; \quad \varepsilon = \frac{r_1 r_2}{l}.$$

Определим такое  $r_1$ , при котором выражение для  $|x_e|$  имеет минимум  $|x_e| = x_m$ . Значения  $r_1$  и  $\vartheta$  при  $|x_e| = x_m$  обозначим  $r_{1m}$  и  $\vartheta_m$ . Получим

$$\vartheta_m = \sqrt{\frac{d}{6b_3}}, \quad d = \sqrt{b_2^2 + 12b_1b_3} - b_2,$$

$$x_m = \frac{1}{\vartheta_m} \left( \frac{4}{3} b_1 + \frac{b_2 d}{9b_3} \right).$$

Микрозонд с  $\vartheta = \vartheta_m$  и  $|x_e| = x_m$  назовем оптимальным микрозондом для плоскости ( $xs$ ). Такой микрозонд при заданном радиусе пятна на мишени пропускает пучок с максимальным эмиттансом, т. е. с максимальным током.

Для квадруплета  $A$  коэффициенты геометрических aberrаций равны:

$$M_{x13} = -10,7; \quad M_{x14} = -20,8; \quad M_{x15} = -22,1; \quad M_{x16} = -8,7; \\ M_{x23} = -22,3; \quad M_{x24} = -63,7; \quad M_{x25} = -73,7; \quad M_{x26} = -26,5; \\ M_{y13} = -84,4; \quad M_{y14} = -67,0; \quad M_{y15} = -20,4; \quad M_{y16} = -2,6; \\ M_{y23} = -67,3; \quad M_{y24} = -58,8; \quad M_{y25} = -19,9; \quad M_{y26} = -3,8.$$

Здесь длина ИОС принята за единицу,  $L_1 = L_2 = 0,25$ .

**Сравнение квадрупольных ИОС микрозонда.** В квадрупольных ИОС микрозонда наиболее часто используются дублет и квадруплет вращения. Обычно сравнение таких ИОС проводится не совсем корректно, так как сравниваются системы с разными геометриями. Представляется полезным сравнить различные ИОС при одних и тех же длине микрозонда, расстоянии между I диафрагмой и 1-й линзой, длине ИОС.

Рассмотрим три протонных микрозонда с  $\bar{L} = 2,0$ ,  $l + \Delta l = 1,76$ , имеющих разные ИОС с длиной  $L$ . Для первой ИОС, дублета, имеем:  $L_1 = L_2 = L_0 = 0,04$ ;  $s_1 = 0,04$ ;  $g = 0,12$ ;  $L = 0,12$ . Для второй, квадруплета I:  $L = 0,12$ ;  $g = 0,12$ ;  $L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = L_0 = 0,03$ ;  $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ . Третья ИОС, квадруплет II, имеет

несколько большую длину  $L$  и поэтому меньшее расстояние  $g$ :  $L = 0,16$ ;  $L_0 = 0,04$ ;  $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ ;  $g = 0,08$ . Энергия частиц пучка  $W = 3$  МэВ. Радиус апертуры линз  $a = 3 \cdot 10^{-4}$ . Все длины даны в метрах.

Сравнение показывает (табл. 1), что получение одинаковых увеличений в двух плоскостях ( $x$ s) и ( $y$ s) в квадруплете по сравнению с разными увеличениями в дублете достигается за счет большего

Таблица 1. Параметры квадрупольных ионно-оптических систем с одинаковыми увеличением, длиной и апертурой

Параметр	Дублет	Квадруплет I	Квадруплет II
$\kappa_1$	0,6056	0,544	0,617
$\kappa_2$	0,7486	0,902	1,000
$f_x$	0,262	0,167	0,155
$f_y$	0,077	0,167	0,155
$SF_x$	0,562	0,103	0,072
$SF_y$	-0,021	0,103	0,072
$R_{x22}$	-4,6	-9,94	-10,2
$R_{y22}$	-23,1	-9,94	-10,2
$R_{x22}R_{y22}$	106	99	104
$C_{sx} = \langle x   x_0^{(3)} \rangle$	$-1,5 \cdot 10^4$	$-1,4 \cdot 10^4$	$-0,67 \cdot 10^4$
$C_{sy} = \langle y   y_0^{(3)} \rangle$	$-2,4 \cdot 10^4$	$-2,1 \cdot 10^4$	$-1,40 \cdot 10^4$
$\langle x   x_0 y_0^2 \rangle$	$-7,0 \cdot 10^4$	$-4,5 \cdot 10^4$	$-2,3 \cdot 10^4$
$\langle y   y_0 x_0^2 \rangle$	$-4,2 \cdot 10^4$	$-4,5 \cdot 10^4$	$-2,3 \cdot 10^4$
$C_{px}$	-4	-3,3	-3,2
$C_{py}$	-4	-3,9	-3,8
$B_1$ , Тл	0,17	0,25	0,18
$B_2$ , Тл	0,26	0,68	0,47
$V_1$ , кВ	11,0	8,9	6,4
$V_2$ , кВ	16,5	24,4	16,9

количества линз и больших полей. Произведение уменьшений, определяющее эмиттанс пучка, приблизительно одинаково для всех трех ИОС и зависит только от геометрической структуры микронзонда. Квадруплет I, а тем более и квадруплет II обладают меньшей сферической абберацией, чем дублет, но это достигается в первом случае за счет больших полей, во второй — за счет более близкого расположения к ИОС мишени. Коэффициенты хроматической абберации в квадруплете несколько меньше, чем в дублете. Заметим, что коэффициенты хроматической и сферической аббераций вычислены здесь только для магнитных квадруполов.

Используя результаты, приведенные в табл. 1, рассчитаем начальные параметры пучка, имеющего на мишени диаметр 1 мкм. Вычисления сделаем для двух  $\delta = \Delta p/p$ :  $\delta = 10^{-3}$  и  $\delta = 10^{-4}$ . Результаты вычислений даны в табл. 2. Из сравнения результатов вычислений видно, что все сравниваемые магнитные микронзонды для одного и того же импульсного разброса имеют близкие четырех-



Таблица 2. Эмиттансы и фазовые размеры пучка на мишени для систем из табл. 1 при  $\delta = \Delta p/p = 10^{-3}$  и  $\delta = 10^{-4}$ 

Выходной параметр	Дублет		Квадруплет I		Квадруплет II	
	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
$10^6 r_{1x}$	1,2	1,5	2,6	3,8	2,5	3,3
$10^6 r_{1y}$	5,8	7,9	2,5	3,4	2,5	3,4
$10^3 \theta_{mx}$	6,1	18	7,4	19	7,7	23,4
$10^3 \theta_{my}$	5,9	16	6,3	16	6,3	18,6
$10^{10} \epsilon_x$	0,7	2,8	1,9	6,6	1,95	7,8
$10^{10} \epsilon_y$	3,5	12,5	1,6	5,6	1,6	6,3
$10^{20} \epsilon_x \epsilon_y$	2,5	34,4	3,0	37	3,1	49

мерные эмиттансы, т.е. близкие токи. Несколько больший эмиттанс имеет квадруплет вращения. При использовании дублета для получения максимального эмиттанса необходимо использовать прямоугольные диафрагмы, при использовании квадруплета — круглые. При этом для получения пучка с микронным диаметром ширина I диафрагмы в микронзонде с дублетом должна быть весьма малой: 2,4 мкм. В квадруплете  $2r_1 = 5$  мкм. Начальные угловые расходимости для одного и того же  $\delta$  приблизительно одинаковы для всех трех систем и в обеих плоскостях близки, что дает возможность II диафрагму делать круглой во всех трех системах.

С изменением  $\delta$  от  $10^{-3}$  до  $10^{-4}$  эмиттансы  $\epsilon_x \epsilon_y$  увеличивается в 13—16 раз. Поэтому очень важно иметь импульсный разброс ближе к  $10^{-4}$ .

Для получения больших уменьшений следует выбирать ИОС с минимальной возможной длиной при максимальной возможной длине микронзонда. Однако в системах длиной 3—5 м проблемы механической стабильности и рассеяния на остаточном газе в вакуумной камере ставят под вопрос функционирование их в качестве микронного микронзонда. В микронзонде длиной 4 м с ИОС длиной 12 см при наименьших полях уменьшение в линейном приближении в каждой плоскости приблизительно равно 30. При уменьшении  $>30$  следует использовать в квадруплете вращения область больших полей либо переходить к двухступенчатому ИОС. Для получения пучка диаметром в доли микрона необходимо тщательно оптимизировать ИОС, уменьшать хроматическую и сферическую абберации путем использования октуполей, других мультипольных элементов и ахроматических линз. Кроме того, субмикронный микронзонд следует располагать вертикально, по крайней мере его последнюю ступень, как это делается в электронных микроскопах.

**Сравнение параметров квадрупольного и осесимметричного микронзондов.** Сравним параметры микронзондов с ИОС в виде квадруплета вращения и соленоида. Для квадруплета вращения, как и

ранее, используется прямоугольная модель распределения осевого поля. Для соленоида — колоколообразная глазеровская модель.

Рассмотрим квадрупольный зонд с параметрами:  $L_1 = L_2 = L_0$ ,  $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ ,  $\kappa_1 = 0,617$ ,  $\kappa_2 = 1,00$ ,  $l + \Delta l = 17,5 L_0$ ,  $g = 0,66 L_0$ ,  $m = 0,24$ ,  $L = 0,2$  м. Для соленоида соответственно получим:  $k_0^2 = 0,23$ ,  $d = 1,2 L_0$ . Для протонов с энергией 3 мэВ имеем:  $B\rho = 2,5$  Тл·м,  $B_0 = 10$  Тл,  $B_1/a = 0,625$  Тл/см,  $B_2/a = 0,238$  Тл/см,  $d = 0,24$  м.

Сравнение хроматических aberrаций обоих типов ИОС показывает, что они приблизительно равны. Распирение пятна на мишени, вызванное импульсным разбросом частиц в пучке, для соленоида  $\Delta r = 44 L_0 \delta \alpha_0$ , для квадруплета вращения  $\Delta r_x = \Delta r_y = 48 L_0 \delta \alpha_0$ , где  $\alpha_0$  — начальный угол расходимости пучка.

Размытие пятна на мишени за счет геометрических aberrаций при  $r \ll r_2$  в основном определяется сферической aberrацией и для квадруплета вращения равно  $\Delta r = 4 C_s L_0 \alpha_0^3$ , а для соленоида  $\Delta r = 4 C_0 L_0 \alpha_0^3$ . Для приведенного примера микрозонда  $C_s \cong 7200$ ,  $C_0 = 4700$ .

Расчеты для колоколообразной модели осевого поля в квадрупольной системе указывают на то, что отличие в значениях  $C$  и  $C_0$  вызвано не различием типов полей, а различием вида осевого распределения поля. Для колоколообразного распределения поля  $C \cong 4300$ .

Таким образом, квадруплет вращения и соленоид в указанном примере микрозонда практически совпадают по всем основным оптическим характеристикам, как линейным, так и нелинейным. Основное различие состоит в значениях магнитной индукции на оси соленоида и на полюсах квадрупольных линз.

**Расчет допусков на юстировку.** На практике при монтаже и юстировке расчетные параметры системы отличаются от реальных. Поэтому важно знать те допуски, которых нужно придерживаться для получения расчетного диаметра пучка на мишени. Предполагая малость отклонений параметров от оптимальных, разложим  $r$  в ряд Тейлора:

$$\Delta r = \frac{r - r^*}{r^*} \approx \sum_1^m \frac{\partial (r - r^*)}{\partial \alpha_k} \Delta \alpha_k = (r - r^*) \tilde{\nabla}(\alpha) \Delta \alpha,$$

где  $r^*$  — радиус пучка для расчетной оптимальной модели.

Здесь  $m$  — число параметров, изменение которых влияет на характеристики пучка,  $\Delta \alpha_k$  — значение отклонения 1-го параметра от оптимального.

В табл. 3 приведены значения  $\partial (r - r^*) / \partial \alpha_k$  для микрозонда в плоскости мишени, где  $\alpha_x$  и  $\alpha_y$  — углы поворота линз вокруг поперечной оси в плоскостях  $x$  и  $y$ ;  $d_x$  и  $d_y$  — сдвиги осей линз относительно оси системы;  $\alpha_0$  — угол поворота линзы вокруг ее продольной оси. Эти значения получены для одного из рассчитанных вариантов микро-

Т а б л и ц а 3. Значения допусков для квадруплета вращения

Тип отклонений		Номер линзы			
		1	2	3	4
$\alpha_x$		41 003	143 302	67 661	19 778
$\alpha_y$		34 625	64 849	96 397	19 083
$d_x$		70 966	101 599	193 346	40 497
$d_y$		115 453	154 129	134 126	22 695
$\alpha_0$	$x$	1130	2970	2034	275
	$y$	1043	2871	2239	117

зонда с параметрами:  $r_1 = 24$  мкм,  $r_2 = 0,22$  см,  $l = 3,35$  м,  $l + \Delta l = 3,53$  м,  $L_0 = 20$  см,  $g = 0,32$  м,  $\kappa_1 = 0,631$ ,  $\kappa_2 = 1,023$ ,  $r = 4,8$  мкм,  $s_1 = s_2 = s_3 = 4$  см. Заметим, что при  $\alpha_x \neq 0$ ,  $d_x \neq 0$  ( $\alpha_y \neq 0$ ,  $d_y \neq 0$ ) пучок испытывает отклонение в плоскости ( $xs$ ) (или в плоскости ( $ys$ )). При  $\alpha_0 \neq 0$  он изменяет свои характеристики в обеих плоскостях одновременно. Этим и объясняется, что в табл. 3 для  $\alpha_0$  приведены два значения производных для ( $xs$ )- и ( $ys$ )-плоскостей. Как видно из этой таблицы, на характеристики пучка наиболее сильно влияют 2-я и 3-я линзы, меньше всего — 4-я.

**Влияние объемного заряда при различных эмиттансах параксиального пучка на размеры кроссовера в протонном квадрупольном микронде.** Для движения частиц бесконечно длинного пучка с эллиптическим сечением в квадрупольном магнитном поле справедливы следующие параксиальные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} x'' + \left[ k - \frac{1}{p^3} \frac{I}{\pi r_x (r_x + r_y)} \right] x &= 0; \\ y'' - \left[ k + \frac{1}{p^3} \frac{I}{\pi r_y (r_x + r_y)} \right] y &= 0; \\ k = \frac{\nabla_1 B_2}{p}, \quad I = \frac{I^*}{I_0^*}, \quad I_0^* = \frac{m_0^* c^*}{\mu_0^* q^*}, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где  $I^*$  — ток в амперах на оси пучка.

Для решения задачи об определении радиуса пучка на мишени интервал  $[0, \bar{L}]$  разбивается на достаточно малые частичные интервалы  $[s^j, s^{j+1}]$ , на каждом из которых коэффициенты уравнения (17) можно считать постоянными.

Рассматривается пучок эллиптического сечения. В качестве исходного фазового портрета выбирается эллипс, вписанный в начальный параллелограмм. Используется матрица огибающих  $\sigma = R \sigma_0 \bar{R}$ , где  $R$  — матрицант,  $\sigma_0$  — матрица, характеризующая фор-

му исходного фазового эллипса. Заметим, что  $\sigma_{11} = r_x^2$ ,  $\sigma_{22} = x_m'^2$ , где  $r_x$  и  $x_m'$  — максимальные значения  $x$  и  $x'$  по фазовому множеству с эллиптической границей.

Рассмотрим некоторый частичный интервал длиной  $h_j = s^{j+1} - s^j$  ( $h_j \ll \bar{L}$ ). Предполагая величины  $r_x = r_x^*$  и  $r_y = r_y^*$ , входящие в уравнение (17), на интервале  $h_j$  постоянными, запишем выражение для  $\sigma$ -матрицы на выходе из этого интервала:

$$\sigma^*(j) = R(j+1/j) \sigma(j) \tilde{R}(j+1/j).$$

Здесь  $R(j+1/j)$  — матрицант  $R$  на интервале  $h_j$  при  $r = r(j)$ ,  $\sigma(j)$  — матрица огибающих в точке  $s^j$ .

Подставив  $r^*(j) = \sigma_{11}^*(j)$  в уравнение (17), найдем матрицант  $R^*(j+1/j)$  при  $r = r^*(j)$ , после чего определим матрицу  $\sigma^{**}(j)$ :

$$\sigma^{**}(j) = R^*(j+1/j) \sigma^*(j) \tilde{R}^*(j+1/j)$$

и матрицу  $\sigma(j+1)$ :

$$\sigma(j+1) = \frac{1}{2} (\sigma^*(j) + \sigma^{**}(j)).$$

Для решения этой задачи был составлен пакет программ *DENS*. Результаты расчетов на ЭВМ для микронзонда с параметрами:

$L_0 = 0,2$  м,  $s_1 = s_3 = 0,024$  м,  $s_2 = 0,5$  см,  $l + \Delta l = 3,5$  м,  $g = 0,3$  м,  $l = 3,35$  м,  $r_1 = 20$  мкм,  $r_2 = 0,23$  см,  $\kappa_1 = 0,63$ ,  $\kappa_2 = 1,023$  приведены в табл. 4, где указаны значения тока в пучке, приводящие к указанным увеличениям размеров пучка (в единицах

Таблица 4. Значения тока (в мкА) в пучке для квадруплета вращения, приводящие к разным увеличениям размеров пучка на мишени

$r_2, 10^{-4}$ м	$r_x/r_m$				
	1,05	1,10	1,50	2,00	3,00
1	1	1	2,5	3,5	5,0
22	8	13	21	54	69
50	19	30	70	101	225
100	40	60	140	200	324
200	96	128	270	385	640

$r_m$ , где  $r_m$  — радиус пучка на мишени в линейном приближении без учета собственного поля) при различных значениях радиуса  $\Pi$  диафрагмы  $r_2$ .

## 8. ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ИОННО-ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ МИКРОЗОНДА

Известно, что изменяющиеся во времени поля могут быть использованы для поперечной фокусировки частиц [27]. В ряде случаев система ВЧ-фокусировки может оказаться конструктивно проще и дешевле, чем, например, система жесткой фокусировки.

В настоящем изложении ограничимся исследованием фокусировки первого порядка в ВЧ-микронзонде с прямолинейной траекторией осевой частицы.

Для случая прямолинейной реперной траектории имеем:

$$z = x + z_m, \quad k = l = 0, \quad z_{m1} = z_{m2} = 0, \quad z_{m3} = s, \quad x_3 = 0, \\ z_3 = z_{m3} = s, \quad \nabla_1(z) = \nabla_1(x), \quad \nabla_2(z) = \nabla_2(x), \quad \nabla(s) = \frac{\partial}{\partial s}, \\ \nabla_3(z) = \nabla(s) - \frac{\gamma}{p} \nabla_4(x).$$

Рассмотрим такую ИОС, в которой продольное электрическое поле  $E_3$  имеет вид бегущей волны:

$$E_3 = E(s) \sin\left(\frac{\omega}{c} z_4 - \bar{k} z_3\right),$$

а уравнение траектории осевой частицы определяется выражением

$$z_{m4} = \frac{c}{\omega} \bar{k} s.$$

Из последнего выражения вытекает:

$$\frac{\gamma}{p} = \frac{c}{\omega} \bar{k}; \\ E_3 = E(s) \sin \frac{\omega}{c} x_4.$$

Будем считать, что

$$\frac{\omega}{c} x_4 < 1, \quad \sin \frac{\omega}{c} x_4 \cong \frac{\omega}{c} x_4.$$

Записав уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} \nabla(s) B_2 - \frac{\gamma}{p} \nabla_4 B_2 - \nabla_2 B_3 + \nabla_4 E_1 &= 0; \\ \nabla_1 B_3 - \nabla(s) B_1 + \frac{\gamma}{p} \nabla_4 B_1 + \nabla_4 E_2 &= 0; \\ \nabla_2 B_1 - \nabla_1 B_2 + \nabla_4 E_3 &= 0; \\ \nabla_1 E_1 + \nabla_2 E_2 + \nabla(s) E_3 - \frac{\gamma}{p} \nabla_4 E_3 &= 0; \\ -\nabla(s) E_2 + \frac{\gamma}{p} \nabla_4 E_2 + \nabla_2 B_3 + \nabla_4 E_1 &= 0; \end{aligned}$$

$$-\nabla_1 E_3 + \nabla(s) E_1 - \frac{\gamma}{p} \nabla_4 E_1 + \nabla_4 B_2 = 0;$$

$$-\nabla_2 E_1 + \nabla_1 E_2 + \nabla_4 B_3 = 0;$$

$$\nabla_1 B_1 + \nabla_2 B_2 + \nabla(s) B_3 - \frac{\gamma}{p} \nabla_4 B_3 = 0$$

в первом приближении, получим, что рассматриваемое электромагнитное поле в линейном приближении имеет вид:

$$E_1 = \frac{1}{2} \frac{\omega}{c} E(s) \frac{\gamma}{p} x_1; \quad B_1 = -\frac{1}{2} E(s) \frac{\omega}{c} x_2;$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \frac{\omega}{c} E(s) \frac{\gamma}{p} x_2; \quad B_2 = \frac{1}{2} E(s) \frac{\omega}{c} x_1;$$

$$E_3 = E(s) \frac{\omega}{c} x_4; \quad B_3 = 0.$$

Гауссовы уравнения движения для такого поля записываются следующим образом:

$$x_1'' = \frac{1}{2} \psi x_1; \quad x_2'' = \frac{1}{2} \psi x_2; \quad \psi = \frac{E(s)}{p^3} \frac{\omega}{c}; \quad x_4'' = -\psi x_4.$$

При  $E(s) < 0$  имеем  $\psi < 0$ . В этом случае ВЧ-линза в поперечных направлениях ведет себя как осесимметричная собирающая линза, в которой

$$k_0^2 = \frac{1}{2} |\psi| d^2.$$

В такой линзе одновременно с поперечной фокусировкой происходит увеличение разброса частиц по фазам и энергиям.

В предыдущем разделе сравнивались квадрупольная и осесимметричная ИОС с параметрами:

$$L_1 = L_2 = L_0, \quad s_1 = s_2 = s_3 = 0, \quad \kappa_1 = 0,617, \quad \kappa_2 = 1,00, \\ l + \Delta l = 17,5L_0, \quad g = 0,66L_0, \quad m = 0,24, \quad L_0 = 0,2 \text{ м}, \quad k_0^2 = 0,23, \\ d = 1,2L_0.$$

Произведение  $E_m \omega$  для высокочастотной ИОС, эквивалентной таким линзам, с колоколообразной функцией  $E(s)$  будет иметь следующее значение:

$$E_m \omega = 2p^3 c \frac{k_0^2}{d^2} = 8p^3 c.$$

Здесь  $E_m$  — максимальное значение  $E(s)$ . Для частиц с энергией 3 МэВ имеем  $p = 0,3$ ,  $E_m \omega = 6,47 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ .

Высокочастотная ИОС может состоять как из структуры с бегущей волной (волновод), так и из структуры со стоячей волной (резонатор). В простейшем случае — это зазор между трубками дрейфа с продольной компонентой ВЧ-поля на оси зазора. Поперечная фоку-

сировка в таком поле реализуется во время фазовой (продольной) дефокусировки.

Дальнейшее исследование возможности использования ВЧ-поля в протонном микронзонде требует рассмотрения aberrаций.

## 9. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СКОЛЬЗЯЩЕГО ДОПУСКА ДЛЯ ЧИСЛЕННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ИОС

Задачу численной оптимизации ИОС можно сформулировать как задачу нелинейного программирования, содержанием которой является минимизация функции переменных при выполнении ограничений как в виде равенств, так и в виде неравенств. В качестве метода минимизации функционала использовался метод скользящего допуска (МСД), при реализации которого применялся метод деформируемого многогранника (МДМ) [42] — один из прямых методов, не использующих вычисление производных.

При численной оптимизации зондовых систем в качестве начальных значений параметров использовались результаты аналитической оптимизации. В ряде рассмотренных случаев численная оптимизация лучших результатов не дала. Применение МСД для оптимизации квадрупольных систем рассмотрено в работе [43]. На основе метода погружения в ПФМ для первых, третьих и пятых фазовых моментов в колоколообразной и прямоугольной моделях осевого поля квадрупольных линз при использовании обобщенного аналога скобок Гаусса для интегрирования уравнений движения построен пакет программ для расчета зондовых систем [26, 31].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cookson S. A., Ferguson A. T. G., Pilling F. D. // J. Radioanal. Chem. 1972. Vol. 12. P. 39—52.
2. Cookson J. A., Pilling F. D. // Thin Solid Films. 1973. Vol. 14. P. 381—392.
3. Nobiling R. e. a. // Nucl. Instrum. and Methods. 1975. Vol. 130. P. 325—334.
4. Nobiling R., Traxel K. // Ibid. 1977. Vol. 142. P. 49—50.
5. Horowitz P., Grodzins L. // Science. 1975. Vol. 189. P. 795—797.
6. Wilde H. P. e. a. // Nucl. Instrum. and Methods. 1978. Vol. 149. P. 675—678.
7. Ito A., Koyama-Ito H. // Nucl. Instrum. and Methods in Phys. Res. 1984. Vol. B3. P. 584—588.
8. Den Ouden J. C., Bos A. J. J., Vis R. D., Verheul H. // Nucl. Instrum. and Methods. 1982. Vol. 181. P. 131—133.
9. Prins M., Hoffman L. J. B., Van Lieshout F. A. M. // Nucl. Instrum. and Methods. 1982. Vol. 197. P. 165—169.
10. Legge C. J. F. // Nucl. Instrum. and Methods. 1982. Vol. 197. P. 243—253.
11. Al-Chazi M. S., McKee J. S. C., Ramsay W. D. // IEEE Trans. Nucl. Sci. 1979. Vol. NS-26. P. 2241—2243.
12. Энгельман К. Микроанализ и растровая электронная микроскопия. М.: Металлургия, 1985. С. 376—379.
13. Maggiore C. J. // Nucl. Instrum. and Methods. 1981. Vol. 191. P. 199—203.
14. Booth R., Lefevre H. W. // Ibid. 1978. Vol. 151. P. 143—147.
15. Дымников А. Д., Явор С. Я. // ЖТФ. 1963. Т. 33. С. 851—858.
16. Дымников А. Д., Фишкова Т. Я., Явор С. Я. // ЖТФ. 1965. Т. 35. С. 431—440.

17. Cookson J. A.//Nucl. Instrum. and Methods. 1979. Vol. 165. P. 477—508.
18. Cookson J. A., McMillan J. W., Pierce T. B.//J. of Radioanal. Chem. 1979. Vol. 48. P. 337—357.
19. Cookson J. A.//Nucl. Instrum. and Methods. 1981. Vol. 181. P. 115—124.
20. Legge G. J. F.//Nucl. Instrum. and Methods in Phys. Res. 1984. Vol. B3. P. 561—571.
21. Prakash R., McKee J. S. C.//Nucl. Instrum. and Methods in Phys. Res. 1985. Vol. B10/11. P. 679—682.
22. Nobiling R.//Nucl. Instrum. and Methods in Phys. Res. 1986. Vol. B14. P. 142—147.
23. Nens V., Trocellier P., Engelmann Ch.//Nucl. Instrum. and Methods in Phys. Res. 1986. Vol. B14. P. 148—151.
24. Пузыревич А. Г., Кузнецов Б. И. Ускорители ионов низких и средних энергий. Киев: Наукова думка, 1982. С. 148—151.
25. Андрианов С. Н., Дымников А. Д., Осетинский Г. М. Депонированное сообщение ОИЯИ Б-1-9-12851. Дубна, 1979.
26. Андрианов С. Н., Дымников А. Д., Осетинский Г. М. Препринт ОИЯИ Р9-12873. Дубна, 1979.
27. Дымников А. Д., Осетинский Г. М. Препринт ОИЯИ Р13-82-780. Дубна, 1982.
28. Дымников А. Д., Осетинский Г. М. Депонированное сообщение ОИЯИ Б-1-9-84-209. Дубна, 1984.
29. Дымников А. Д., Осетинский Г. М. Препринт ОИЯИ 9-84-844. Дубна, 1984.
30. Андрианов С. Н., Дымников А. Д., Осетинский Г. М. Препринт ОИЯИ 9-85-848. Дубна, 1985.
31. Галочкина М. Ф., Дымников А. Д., Осетинский Г. М. Препринт ОИЯИ 9-85-847. Дубна, 1985.
32. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы: Пер. с англ. М.: Мир, 1971.
33. Коломенский А. А., Лебедев А. Н. Теория циклических ускорителей М.: Физматгиз, 1963.
34. Brown K. L., Belbeoch R., Bounin P.//Rev. Sci. Instrum. 1964. Vol. 35. P. 481—485.
35. Brown K. L.//Advances in Particle Physics. 1967. Vol. 1. P. 71—134.
36. Глазер В. Основы электронной оптики. М.: ГИТЛ, 1957.
37. Герцбергер М. Современная геометрическая оптика: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
38. Дымников А. Д. Депонированное сообщение ОИЯИ Б1-10427. Дубна, 1977.
39. Дымников А. Д.//ЖТФ. 1968. Т. 38. С. 1120—1123.
40. Дымников А. Д.//Труды II Всесоюз. совещ. по ускорителям. М.: Наука, 1972. Т. 2. С. 35—36.
41. Дымников А. Д. Вопросы механики и процессов управления. Вып. 2. Управление динамическими системами. Л.: ЛГУ, 1978. С. 64—73.
42. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование: Пер. с англ. М.: Мир, 1975.
43. Андрианов С. Н., Дымников А. Д., Кулакова Е. М. и др.//Программирование и математические методы решения физических задач. Дубна, 1978. С. 295—299.