

ПАРНЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО ТИПА ПРИ ТОЧНОМ СОХРАНЕНИИ ЧИСЛА ЧАСТИЦ

Н. К. Кузьменко

Радиовый институт им В. Г. Хлопина, Ленинград

В. М. Михайлов

Ленинградский государственный университет, Ленинград

Дан обзор работ по изучению парных корреляций сверхпроводящего типа в атомных ядрах на основе методов проектирования функций БКШ и ХФБ на определенное число частиц. Рассмотрены явления, связанные с переходом ядерной системы из сверхпроводящего состояния в нормальное.

A review of the FBCS-method, its development and application for the description of the pairing correlations is given.

Special attention is paid to the phenomena in nuclear system closed to the transition point from a superfluid to a normal state.

ВВЕДЕНИЕ

К концу пятидесятих годов, когда появилась ставшая уже классической теория сверхпроводимости, предложенная Бардиным, Купером, Шриффером [1], Н. Н. Боголюбовым [2] и Валатиным [3], в ядерной физике было накоплено достаточное количество экспериментальных фактов, указывавших на некоторую общность ядерных и макроскопических многочастичных систем в которых наблюдаются явления сверхпроводимости и сверхтекучести. Такими фактами, как известно, являются наличие энергетической щели в спектре четно-четных ядер, увеличение плотности уровней нечетных ядер по сравнению с ее значением в модели независимых частиц, отличие моментов инерции от твердотельных и др.

Поэтому практически сразу же после появления работ [1—3] были предложены формулировки теории ядерной сверхпроводимости или сверхтекучести, поскольку объединяющим моментом этих теорий является метод канонических преобразований Боголюбова, позволяющий описывать корреляции в движении частиц, между которыми действуют силы притяжения.

Изучение различных свойств ядер в широком диапазоне массовых чисел показало, что этот метод позволяет выявить главные особенности многих явлений и тем самым создает необходимые предпосылки

для получения количественного согласия теории с экспериментом. Построение ядерного варианта метода канонического преобразования оказалось важным этапом в развитии теории ядра, основываясь на котором можно было продвинуться дальше в понимании вибрационных, ротационных и других мод ядерного движения.

Особенность структуры ядра проявляется в существовании довольно больших энергетических интервалов между уровнями среднего поля, по которым распределены нуклоны. В результате в процесс ядерной сверхтекучести оказывается вовлеченным иногда настолько небольшое число пар нуклонов n , что оно сравнимо с флуктуациями Δn , возникающими в методе канонического преобразования, так как число частиц в этом методе сохраняется только в среднем. В таких случаях нарушается критерий применимости метода $\Delta n/n \sim n^{-1/2} \ll 1$ [4].

Несохранение числа частиц в рамках этого метода не приводит к существенным погрешностям при расчете величин, плавно изменяющихся от ядра к ядру, так как в методе канонического преобразования производится некоторое усреднение по соседним ядрам. Однако описание индивидуальности ядра, проявляющейся, в частности, в энергиях слабо коллективизированных состояний или в вероятностях различных переходов между ними и основными состояниями ядер, требует исключения флуктуаций в числе частиц. Это уточнение метода не обязательно дает улучшение согласия теории с экспериментом, однако без него труднее установить причины возможных расхождений.

Напомним также, что нарушение закона сохранения числа частиц приводит к появлению голдстоуниона или, как его иначе называют, духового состояния, которое не соответствует внутреннему возбуждению ядра, и поэтому должно полностью отделяться от других состояний, что, конечно, требует специального контроля.

В силу этих причин практически сразу после применения метода Боголюбова к ядру начал изучаться вопрос о его точности. На этом пути были найдены точные решения некоторых модельных задач, развивались модификации метода, уменьшающие флуктуации числа частиц, а также были развиты проекционные методы, получившие наибольшее распространение в практике ядерных расчетов.

1. МЕТОД КАНОНИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Метод канонического преобразования (МКП) фермионных операторов используется для установления системы уравнений Хартри, Фока и Боголюбова (ХФБ), которая является одним из наиболее распространенных инструментов в теории ядра. Применение канонического преобразования к ядерному эффективному гамильтониану и усреднение его по вакууму квазичастиц — функции основного состояния дает функционал, варьирование которого по u , v — элементам матриц канонического преобразования с учетом их ортонор-

мированности и сохранения числа частиц в среднем, приводит к уравнениям ХФБ [5]:

$$\begin{pmatrix} \hat{\varepsilon} - \lambda & \hat{\Delta} \\ \hat{\Delta} & -\hat{\varepsilon} + \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\Delta}$ — соответственно матрицы одночастичной энергии и энергетической щели; λ — химический потенциал, который фиксируется условием

$$\langle \tilde{0} | \hat{N} | \tilde{0} \rangle = N; \quad (1a)$$

\hat{N} — оператор числа частиц; N — число частиц в рассматриваемой системе; $|\tilde{0}\rangle$ — функция квазичастичного вакуума; e имеют смысл энергий квазичастиц.

Модельный подход к решению уравнений (1), который часто называют сверхтекучей моделью ядра [6] и который имеет свои истоки в теории сверхтекучести и сверхпроводимости, заключается в предположении о том, что матрица одночастичной энергии диагональна, а матрица $\Delta_{i\bar{k}}$ — не равна нулю только для состояний, сопряженных во времени (k, \bar{k}), и не зависит от состояния

$$\varepsilon_{i\bar{k}} = \varepsilon_i \delta_{i\bar{k}}, \quad \Delta_{i\bar{k}} = \Delta \delta_{i\bar{k}}.$$

Это приводит к диагонализации матриц u, v и к разбиению системы (1) на пары уравнений для каждого состояния, которые имеют хорошо известные решения

$$\frac{u_i^2}{v_i^2} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\varepsilon_i - \lambda}{e_i} \right), \quad e_i = \sqrt{(\varepsilon_i - \lambda)^2 + \Delta^2}, \quad (2)$$

где параметр щели Δ и химический потенциал λ находятся из уравнений

$$2G^{-1} = \sum_i [(\varepsilon_i - \lambda)^2 + \Delta^2]^{-1}, \quad N = \sum_i [1 - (\varepsilon_i - \lambda)/e_i]. \quad (2a)$$

Уравнения (2), (2a) могут быть получены независимо от (1), если теория строится с помощью модельного гамильтониана

$$H = \sum_s \varepsilon_s (a_s^+ a_s + a_s^- a_s^-) - G \sum_{s,t} a_s^+ a_s^+ a_t^- a_t^- \quad (3)$$

и применения к нему преобразования Боголюбова, которое в данном случае удобно представить через унитарный оператор \hat{U} :

$$\hat{U} = \exp \left\{ - \sum_k \theta_k (a_k^+ a_k^+ - a_{\bar{k}}^- a_{\bar{k}}^-) \right\}; \quad \cos \theta_k = u_k, \quad \sin \theta_k = v_{k\bar{k}}$$

связывающий вакуумы частиц ($|0\rangle$) и квазичастиц ($|\tilde{0}\rangle$). Функцию $|\tilde{0}\rangle$ часто называют функцией Бардина, Купера, Шриффера (БКШ) по имени авторов, впервые ее предложивших:

$$|\tilde{0}\rangle \equiv |\text{БКШ}\rangle = \hat{U}^{-1} |0\rangle = \prod_k (u_k + v_k a_k^+ a_k^+) |0\rangle. \quad (4)$$

Несохранение числа частиц в МКП является следствием некоммутативности операторов \hat{U} и \hat{N} и непосредственно проявляется в структуре $|\text{БКШ}\rangle$ (4), которая содержит компоненты с различным числом частиц:

$$|\text{БКШ}\rangle = \left\{ \prod_k u_k \left(1 + \sum_i \beta_i S_i^+ + \sum_{i_1, i_2} \beta_{i_1} \beta_{i_2} S_{i_1}^+ S_{i_2}^+ + \dots \right) |0\rangle; \right. \\ \left. \beta_i = \frac{v_i}{u_i}, S_i^+ = a_i^+ a_i^+, \right. \quad (5)$$

лагаемое в (5) с правильным числом частиц N будем обозначать $|N\rangle$:

$$|N\rangle = \sum_{i_1, \dots, i_n} \beta_{i_1} \beta_{i_2} \dots \beta_{i_n} S_{i_1}^+ S_{i_2}^+ \dots S_{i_n}^+ |0\rangle, n = N/2. \quad (6)$$

Суммирование в (6) ведется по всем возможным распределениям пар частиц по уровням, которые учитываются в задаче.

Сравнению результатов, полученных в рамках МКП и при точном решении задачи с гамильтонианом (3), посвящен цикл работ [7—16]. В частности, было показано [7], что интеграл перекрытия точной функции с $|\text{БКШ}\rangle$ в типичных случаях примерно равен 50 %, в то время как перекрытие ее с выделенным из $|\text{БКШ}\rangle$ и нормированным компонентом $|N\rangle$ (6) составляет более 98 %. В [11] сравнение результатов МКП и точного решения сделано для простых модельных систем в широкой области изменения G . Из рис. 1 видно, что погрешность в определении энергии основного состояния в МКП достигает максимума при $G \lesssim 2G_{\text{кр}}^*$ и затем уменьшается с увеличением G .

Рисунок 2 служит иллюстрацией того факта, что внезапное исчезновение спаривания при $G = G_{\text{кр}}$ является искусственной чертой теории, связанной с присутствием в $|\text{БКШ}\rangle$ компонент с неправильным числом частиц. Из теории возмущений очевидно, что как бы ни было мало значение G , всегда будет существовать некоторое конфигурационное смешивание.

Для систем, состоящих из $2n$ частиц, которые под действием спаривательного взаимодействия (3) распределяются по $2n$ двукратно вырожденным эквидистантным уровням, где n равно 4, 8, 12 и 16,

* Критическое значение константы $G_{\text{кр}}$, при которой Δ обращается в нуль, для спектра двукратно вырожденных уровней определяется как $2G_{\text{кр}}^{-1} = \sum |\epsilon_i - \lambda_{\text{кр}}|^{-1}$, где $\lambda_{\text{кр}}$ находится как решение уравнения $\sum \{(\epsilon_i - \lambda) \times \times |\epsilon_i - \lambda|^{-2}\} = 0$, обеспечивающего сохранение числа частиц и независимость $\lambda_{\text{кр}}$ от Δ при его малых значениях.

в работах Ричардсона и Шермана [14, 15] был проведен детальный анализ точности МКП в сравнении с точным решением (в [15] собственные функции гамильтониана (3) были получены в аналитической

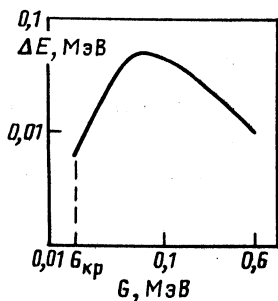


Рис. 1. Точность определения энергии основного состояния системы в МКП [$\Delta E = E(\text{МКП}) - E(\text{точн.})$] [11]. Расчет выполнен для модельной шестилевого системы с эквидистантно расположенными уровнями, $\Delta \epsilon = 0,1$ МэВ

форме). На рис. 3 представлены вероятности заполнения уровней для основного и возбужденного состояний, вычисленные точно [14] и в рамках МКП для $n = 16$ и $G = 0,375\Delta \epsilon$, где $\Delta \epsilon$ — энергетический интервал между эквидистантными уровнями. Из рис. 3 видно, что

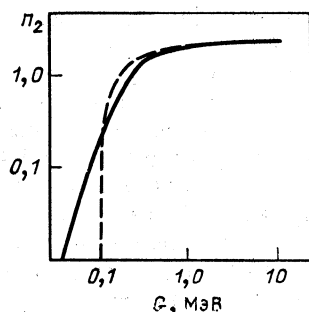


Рис. 2. Модельная двухуровневая система ($\Omega_1 = \Omega_2 = 5$, $N = 10$, $\Delta \epsilon = 1$ МэВ). Среднее число пар частиц на верхнем уровне в зависимости от G [11]:

сплошная линия — точное решение; пунктир — МКП

различие в распределениях, рассчитанных двумя методами, увеличивается по мере приближения к уровню Ферми, а форма распределения частиц по уровням в основном состоянии, соответствующая точному решению, ближе к прямоугольной, чем форма распределения, даваемая МКП. При этом точное значение парнокорреляционной энергии всегда больше, чем рассчитанное МКП или любым другим приближенным методом. В [15] было также показано, что точность МКП не улучшается при увеличении числа частиц от 8 до 32.

Результаты исследований, проведенных на простых модельных системах, позволили выяснить, что область применения МКП относится главным образом к случаю значительных парных корреляций ($G/G_{кр} \gg 1$), что не всегда осуществляется в реальных ядрах. Ошибки метода, связанные с несохранением числа частиц, становятся существенными при G , близких к $G_{кр}$. Подобные ситуации возникают, когда спектр одночастичных уровней является довольно разреженным, как

это наблюдается для легких ядер вблизи ^{58}Ni , где $G/G_{\text{кр}} \sim 1$ [17], или же когда в спектре одночастичных уровней вблизи уровня Ферми появляется энергетическая щель, заметно превышающая интервалы между уровнями в соседних областях. Требуется осторожности применение МКП к состояниям, содержащим несколько квазичастиц, так как за счет эффекта блокировки происходит увеличение $G_{\text{кр}}$

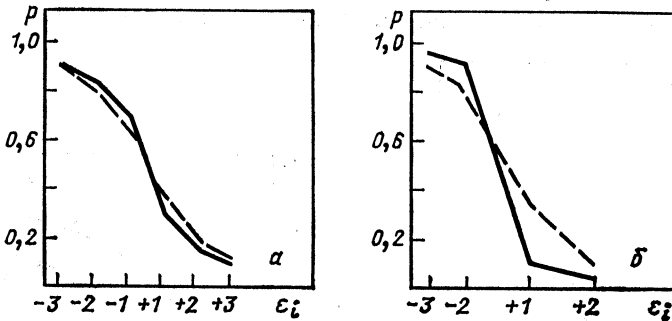


Рис. 3. Распределения пар по уровням в окрестности уровня Ферми в МКП (пунктир) и в точном методе (сплошная кривая) ($G/\Delta\varepsilon = 0,375$, $n = 16$) [14]:
 а—основное состояние; б—возбужденное состояние

и ее значение приближается к реальному значению G . Наиболее яркий пример эффективного уменьшения спаривания относится к ротационным спектрам. Во всех этих случаях (более подробно см. в следующих разделах) ядерная система приближается к точке фазового перехода от сверхтекучего состояния в нормальное, когда использование МКП не оправдано [18, 19] и его недостатки, связанные с несохранением числа частиц, должны быть устранены, например, с помощью проекционной техники.

2. ПРИБЛИЖЕННЫЕ И ТОЧНЫЕ МЕТОДЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПО ЧИСЛУ ЧАСТИЦ

Наиболее часто проекционный метод строится на основе функции Бардина, Купера, Шриффера (4), когда состояние с фиксированным числом частиц N выделяется из $| \text{БКШ} \rangle$ с помощью проектирования: $| N \rangle \sim P_N | \text{БКШ} \rangle$. Непосредственное использование в расчетах функции $| N \rangle$ требует достаточно больших вычислительных усилий, поэтому были развиты различные упрощенные варианты проекционного метода и модификации МКП, в которых авторы, стремясь сохранить простоту структуры волновой функции и уравнений МКП, производили лишь частичное восстановление нарушенной симметрии (метод частичного проектирования [20], метод Ногами [21], метод генераторной координаты [22, 23]).

В то же время развивался метод точного проектирования [7, 11—13, 24—30]. Существует две модификации метода точного проектирования по числу частиц: МПДВ (FBCS), в котором проектирование по числу частиц проводится до вариационной процедуры, и МППВ (PBCS), в котором проектирование проводится после варьирования.

Оба метода (МПДВ и МППВ) являются более точными, чем МКП, но МППВ дает плохое приближение к точному решению в случае

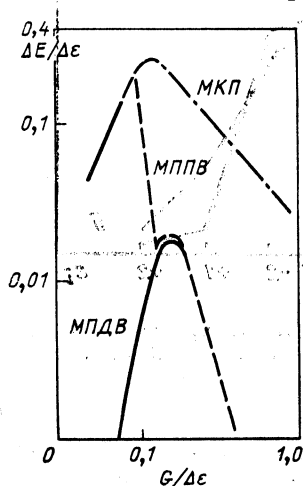


Рис. 4. Точность определения энергии основного состояния в зависимости от $G/\Delta\epsilon$ тремя методами (МПДВ, МППВ и МКП). Модельная система из двух уровней ($\Omega_1 = \Omega_2 = 5$; $N = 10$; $\Delta\epsilon = 1$ МэВ) [5]

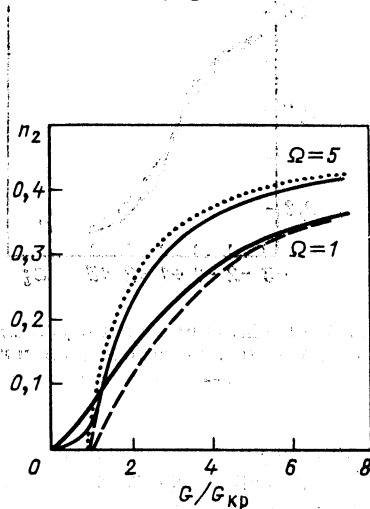


Рис. 5. Вероятность заполнения верхнего уровня для модельной двухуровневой системы в зависимости от $G/G_{кр}$, вычисленная в МПДВ (сплошные линии), МППВ (штриховая линия), МКП (пунктирная линия) [28]

слабых корреляций, в то время как МПДВ дает хорошее согласие с точным решением во всей области изменения G [11—13, 28] (рис. 4 и 5).

Метод проектирования по числу частиц до варьирования существенно отличается от всех приближенных методов, включая МППВ, большим числом вариационных параметров, равным размерности используемого конфигурационного пространства. Во всех остальных методах число вариационных параметров немного больше или равно их числу в МКП.

Явный вид функции основного состояния в МПДВ. В качестве пробной функции основного состояния в МПДВ используется функция, с точностью до нормировки совпадающая с $|N\rangle$ (6), где параметры u, v или $\beta = v/u$ подлежат вариационному определению. Можно показать, что функция (6) пропорциональна функции Мот-

тельсона [31], которая записывается в виде степени парного оператора (S -пары):

$$|N\rangle = \frac{1}{n!} (S^+)^n |0\rangle = \frac{1}{n!} \left(\sum_k \beta_k a_k^+ a_k^+ \right)^n |0\rangle, \quad n = N/2. \quad (7)$$

Как видно из (6) и (7), предельные значения $|N\rangle$ имеют хорошо известные выражения: при $G \rightarrow \infty$ все β_k становятся равными между собой и $|N\rangle$ переходит в функцию с максимальным квазиспином [32], являющуюся точным решением гамильтониана (3) в этом пределе. При $G \rightarrow 0$ $\beta_k = 1$ для всех состояний k внутри поверхности Ферми и $\beta_k = 0$ для всех внешних к ней состояний, т. е. $|N\rangle$ переходит в обычную функцию модели независимых частиц и характеризуется нулевым значением числа сеньорити. Последнее обстоятельство дало основание Талми [33] назвать $|N\rangle$ функцией обобщенного нулевого сеньорити, хотя, по-видимому, ее можно было бы назвать также функцией обобщенного максимального квазиспина.

При описании деформированных ядер, где в основных состояниях пары частиц распределяются по двукратно вырожденным уровням, для проектирования по числу частиц удобно представить $|BKШ\rangle$ через операторы рождения частиц и дырок α^+ , действующих на вакуум Хартри — Фока ($|XФ\rangle$), который соответствует заполнению n двукратно вырожденных уровней ($n = N/2$) вплоть до уровня Ферми (F):

$$|BKШ\rangle = \left(\prod_{s' \leq F} v_{s'} \right) \left(\prod_{t' > F} u_{t'} \right) \exp \left\{ \sum_{s \leq F} \frac{u_s}{v_s} \alpha_s^+ \alpha_s^+ + \sum_{t > F} \frac{v_t}{u_t} \alpha_t^+ \alpha_t^+ \right\} |XФ\rangle. \quad (8)$$

В этом представлении оператор числа частиц выражается через разность операторов чисел частиц и дырок ($\hat{N} = N + \sum_{t > F} \alpha_t^+ \alpha_t - \sum_{s \leq F} \alpha_s^+ \alpha_s$), что позволяет довольно просто получить из (8) проектированную по числу частиц функцию $|\tilde{N}\rangle$:

$$\begin{aligned} |\tilde{N}\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i\varphi(\hat{N}-N)} |BKШ\rangle = \left(\prod_k u_k \right) |N\rangle = \\ &= \left(\prod_{s' \leq F} v_{s'} \right) \left(\prod_{t' > F} u_{t'} \right) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \exp \left\{ \sum_{s \leq F} \frac{u_s}{v_s} \alpha_s^+ \alpha_s^+ e^{-2i\varphi} + \right. \\ &+ \left. \sum_{t > F} \frac{v_t}{u_t} \alpha_t^+ \alpha_t^+ e^{2i\varphi} \right\} |XФ\rangle = \left(\prod_{s' \leq F} v_{s'} \right) \left(\prod_{t' > F} u_{t'} \right) \sum_{K=0}^n \left(\frac{1}{K!} \right)^2 \times \\ &\times \left(\sum_{s \leq F} \frac{u_s}{v_s} \alpha_s^+ \alpha_s^+ \right)^K \left(\sum_{t > F} \frac{v_t}{u_t} \alpha_t^+ \alpha_t^+ \right)^K |XФ\rangle. \end{aligned} \quad (9)$$

Каждый член ряда (9) имеет простую интерпретацию: член с $K = 0$ соответствует функции ХФ, член с $K = 1$ описывает набор состояний, когда пара частиц с s -уровня ($s \leq F$) переводится на любой уровень выше F , член с $K = 2$ соответствует переводу двух пар и т. д.

Для сферически-симметричного базиса индекс k в (7) заменим jm , подразумевая при этом также и другие необходимые квантовые числа. Для такого базиса амплитуды β , так же как и параметры u, v в (6), не зависят от магнитного квантового числа m , и поэтому (7) описывает состояние с нулевым моментом. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, представим ее для сферического ядра в виде

$$|N\rangle = \frac{1}{n!} \left(\sum_j \beta_j S_j^{\pm} \right)^n |0\rangle = \sum_{n_{j_1}, n_{j_2}, \dots} \left[\prod_{n_j} \frac{(\beta_j)^{n_j}}{n_j!} (S_j^{\pm})^{n_j} \right] |0\rangle, \quad (10)$$

где $S_j^{\pm} = \sum_{m>0} a_{jm}^{\dagger} a_{jm}^{\pm}$ и n_j принимают значения от нуля до $j + 1/2$,

при этом их сумма ограничена числом $n = N/2$; $\sum n_j = n$.

Для функций сферических ядер также может быть использовано представление типа (9): без изменений, когда в модели независимых частиц последний уровень целиком заполнен, и в достаточно очевидном видоизменении, если он заполнен только частично. Например, если число частиц на последнем уровне j равно $2n_j \leq j + 1/2$, то в качестве уровня F в функции ХФ можно взять предыдущий заполненный уровень, тогда

$$\begin{aligned} |\tilde{N}\rangle = & \left(\prod_{s' \leq F} v_{s'} \right) \left(\prod_{t' > F} u_{t'} \right) \sum_{K=0}^{n-n_j} \frac{1}{K! (K+n_j)!} \left(\sum_{s \leq F} \frac{u_s}{v_s} \alpha_s^{\dagger} \alpha_s^{\pm} \right)^K \times \\ & \times \left(\sum_{t > F} \frac{v_t}{u_t} \alpha_t^{\dagger} \alpha_t^{\pm} \right)^{K+n_j} |X\Phi\rangle. \end{aligned} \quad (9a)$$

Вариационное определение параметров проектированной функции. Параметры волновой функции основного состояния β или u, v могут быть получены на основе двух эквивалентных подходов, т. е. либо из вариационного принципа

$$\delta (\langle N | H | N \rangle - E_0 \langle N | N \rangle) = 0,$$

где лагранжев множитель E_0 имеет смысл энергии основного состояния, либо из условия стационарности функции $|N\rangle$ [30, 34], которое является обобщением соответствующих условий ХФ и ХФБ.

В теории ХФ эта стационарность заключается в том, что любые примеси функций частично-дырочных состояний — $|\Psi^*\rangle$ к функции основного — $|\Psi\rangle$ не могут понизить энергию системы, или, иначе говоря, уравнения ХФ могут быть получены из требования, чтобы гамильтониан не связывал функции $|\Psi\rangle$ и $|\Psi^*\rangle$. Аналогич-

ная ситуация имеет место и в теории ХФБ. В ней известное условие Боголюбова компенсации опасных диаграмм выражает отсутствие примесей двухквазичастичных возбуждений к вакууму квазичастиц.

Подобным же образом может быть сформулировано свойство стационарности волновой функции МПДВ: энергию системы не могут понизить примеси волновых функций возбужденных состояний — $|N_k\rangle$:

$$\langle N | H | N_k \rangle = 0. \quad (11)$$

Вариация $|N\rangle$, например, по параметру β_k показывает, что в $|N_k\rangle$ должен содержаться элемент вида $a_k^+ a_k^+ |N - 2 \sim (a_k^+ a_k + a_k^+ a_{\bar{k}}) |N\rangle$. Поэтому функции возбужденных состояний с учетом условия ортогональности $\langle N | N_k \rangle = 0$ могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} |N_k\rangle &= (a_k^+ a_k + a_{\bar{k}}^+ a_{\bar{k}} - c_k) |N\rangle; \\ c_k &= \langle N | a_k^+ a_k + a_{\bar{k}}^+ a_{\bar{k}} |N\rangle (\langle N | N \rangle)^{-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Существуют также и другие формы для $|N_k\rangle$ [30], однако все они приводятся к (12).

Для сферических ядер необходимо перейти от $|N_k\rangle$ (12) к функциям с нулевым полным моментом $|N_j\rangle$:

$$|N_j\rangle = (\hat{N}_j - c_j) |N\rangle; \quad N_j = \sum_m a_m^+ a_{jm}; \quad c_j = \langle N | \hat{N}_j | N \rangle (\langle N | N \rangle)^{-1}. \quad (13)$$

Из (12), (13) следует, что функции, примеси которых в силу (11) не могут понизить энергию основного состояния, имеют характер парновибрационных, т. е. в описываемых ими состояниях происходит изменение распределения пар частиц по уровням по сравнению с тем, которое имеется в основном состоянии.

Результат вычислений матричного элемента (11) может быть представлен в виде уравнения, аналогичного тому, которое в МКП является следствием компенсации опасных диаграмм:

$$\begin{aligned} 2u_k v_k \tilde{\epsilon}_k - \tilde{\Delta}_k (u_k^2 - v_k^2) &= 0; \\ u_k^2 + v_k^2 &= 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (14) следует что параметры u , v могут быть представлены в обычном виде (2а), где необходимо произвести замены $\epsilon_k - \lambda \rightarrow \tilde{\epsilon}_k$, $\Delta \rightarrow \tilde{\Delta}_k$. Явный вид $\tilde{\epsilon}_k$ и $\tilde{\Delta}_k$ — нелинейных функций параметров u , v зависит от используемого гамильтониана. При описании сферических ядер в рамках МПДВ с использованием гамильтониана, включающего среднее поле и эффективное взаимодействие общего типа, выражения для этих функций оказываются довольно громозд-

кими [34]. В случае деформированных ядер и гамильтониана (3) $\tilde{\varepsilon}_k$ и $\tilde{\Delta}_k$ можно представить в несколько более простом виде [30]:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_k = & (\varepsilon_k - Gv_k^2) p_k^{(n-1)} p_k^{(n)} + \sum_{1 \neq k} (\varepsilon_1 - G/2) v_1^2 [p_{1k}^{(n-2)} - p_{1k}^{(n-1)} - \\ & - (p_k^{(n-1)} - p_k^{(n)}) p_1^{(n-1)}] - \frac{G}{2} \sum_{1 \neq 2} u_1 v_1 u_2 v_2 (1 - \delta_{1k}) (1 - \delta_{2k}) \times \\ & \times [p_{12k}^{(n-2)} - p_{12k}^{(n-1)} - (p_k^{(n-1)} - p_k^{(n)}) p_{12}^{(n-1)}] + \\ & + G u_k v_k (p_k^{(n-1)} - p_k^{(n)}) \sum_{1 \neq k} u_1 v_1 p_{1k}^{(n-1)}; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\tilde{\Delta}_k = G \left[\left(\sum_{1 \neq k} u_1 v_1 p_{1k}^{(n-1)} \right) + u_k v_k p_k^{(n-1)} p_k^{(n)} \right]. \quad (16)$$

Величины $p_{12\dots l}^{(n-s)}$, состоящие в (15), (16), которые будем называть корректирующими факторами, являются отношением нормировок проектированных функций типа (10) с $N - 2s$ и N частицами:

$$p_{12\dots l}^{(n-s)} = {}_{12\dots l} \langle N - 2s | N - 2s \rangle_{12\dots l} (\tilde{N} | \tilde{N})^{-1}, \quad 2n = N, \quad (17)$$

где нижние индексы, стоящие у функции ($| N \simeq 2s \rangle_{12\dots l}$), отмечают заблокированные одночастичные уровни, на которых в данном состоянии не могут быть размещены пары частиц. Корректирующие факторы возникают при вычислении матриц плотности, например:

$$\langle \tilde{N} | a_k^\dagger a_l | \tilde{N} \rangle (\langle \tilde{N} | \tilde{N} \rangle)^{-1} = \delta_{kl} v_k^2 p_k^{(n-1)}; \quad (18)$$

$$\sum_{k, l} \langle \tilde{N} | a_k^\dagger a_l^\dagger a_l a_k | \tilde{N} \rangle (1 - \delta_{kl}) (\langle \tilde{N} | \tilde{N} \rangle)^{-1} = \sum_{k, l} u_k v_k u_l v_l p_{kl}^{(n-1)} (1 - \delta_{kl}). \quad (19)$$

Свойства и метод вычислений p -факторов рассмотрены в следующем разделе.

Уравнение (14) для определения параметров u, v является нелинейным, поэтому оно решается с помощью итерационных методов

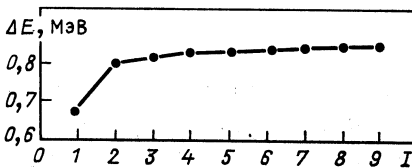


Рис. 6. Сходимость итерационного процесса при вычислении энергии основного состояния системы в МПДВ: $\Delta E = E(\text{МКП}) - E(\text{МПДВ})$, I — номер итерации (нейтронная система ^{132}Yb) [30]

(рис. 6). После определения параметров могут быть рассчитаны различные физические величины, такие, как распределение частиц

по уровням (18), эффективное спаривание, мерой которого может служить (19), полная энергия системы E_0 :

$$E_0 = \langle \tilde{N} | H | \tilde{N} \rangle (\langle \tilde{N} | \tilde{N} \rangle)^{-1} = 2 \sum_k \left(\varepsilon_k - \frac{1}{2} G \right) v_k^2 p_k^{(n-1)} - G \sum_{k \neq l} u_k v_k u_l v_l p_{kl}^{(n-1)}. \quad (20)$$

Если в качестве функции основного состояния использовать функцию Моттельсона (7), которая отличается от (10) множителем $(\prod_k u_k)$, то уравнение (14) для случая спаривательных сил трансформируется в следующее:

$$\begin{aligned} \beta_k \tilde{\varepsilon}_k(\beta) - \frac{1}{2} \tilde{\Delta}_k(\beta) &= 0; \\ \tilde{\varepsilon}_k(\beta) &= (\varepsilon_k - G/2) p_k^{(n-1)}(\beta) + \sum_{1 \neq k} (\varepsilon_1 - G/2) (p_{1k}^{(n-2)}(\beta) - \\ &- p_1^{(n-1)}(\beta) p_k^{(n-1)}(\beta)) - G/2 \sum_{1; 2} \beta_1 \beta_2 (1 - \delta_{1,2}) [p_{12k}^{(n-2)}(\beta) - \\ &- p_{12}^{(n-1)}(\beta) p_k^{(n-1)}(\beta)]; \\ \tilde{\Delta}_k(\beta) &= G \sum_{1 \neq k} \beta_1 p_{1k}^{(n-1)}(\beta), \end{aligned} \quad (21)$$

где корректирующие функции $p(\beta)$ определены теми же соотношениями (17), где вместо функций $|N\rangle$ (10) теперь необходимо поставить функции $|N\rangle$ (7).

При расчетах свойств сферических ядер с использованием относительно узкого базиса, например, уровней одной оболочки вместо параметров u, v предпочтительнее использовать в качестве параметров амплитуды β в операторе S -пары (7), так как они относительно слабо зависят от изменения числа нуклонов в оболочке. На это обстоятельство было обращено внимание в работах Талми [33]. Строгое постоянство амплитуд может быть обеспечено только при специальном выборе эффективного взаимодействия. Однако использование гауссовых, обычных и поверхностных δ -сил также приводит к малым вариациям амплитуд [35] по мере заполнения оболочки. Характер изменения величин β можно проследить в табл. 1, где представлены нейтронные амплитуды для изотопов ксенона, рассчитанные с δ -силами в [34]. При использовании широкого базиса более удобны функции (9), (9а), так как амплитуды, с которыми входят в них операторы дырок ($u_s/v_s, s \leq F$) и частиц ($v_t/u_t, t > F$), быстро убывают по мере отхода от уровня Ферми.

Корректирующие факторы. В литературе описаны разные возможности для подсчета корректирующих факторов или их аналогов (см., например, [29]). Предложенный в [30, 36] способ их расчета

Таблица 1. Амплитуды β в операторе S -пары (7) для изотопов ксенона [35]

l_j	A					
	124	126	128	130	132	134
$g_{7/2}$	0,61	0,60	0,60	0,60	0,59	0,59
$d_{5/2}$	0,73	0,72	0,72	0,72	0,71	0,71
$h_{11/2}$	0,16	0,17	0,18	0,19	0,19	0,19
$s_{1/2}$	0,21	0,22	0,23	0,24	0,25	0,26
$d_{3/2}$	0,17	0,18	0,19	0,20	0,21	0,22

является весьма рациональным по затратам времени, и поэтому здесь мы его рассмотрим несколько подробнее.

Факторы p (β) определяются нормировками функций типа $|N\rangle$ (7), которые являются симметричными полиномами по β^2 . В частности, нормировка

$$\langle N|N\rangle = [n] = \sum_{(\Omega)} \prod_{i=1}^n \beta_{s_i}^2, \quad n = N/2, \quad (22)$$

содержит произведения n разных сомножителей β^2 — здесь мы отвлекаемся от вырождения по магнитным квантовым числам в сферических ядрах. Суммирование в (22) идет по всем возможным распределениям по уровням, полное число которых назовем Ω . $[n - s]_{ab\dots f}$ означает полином типа (22), но уже включающий $(n - s)$ сомножителей. Нижние индексы означают пропуск уровней a, b, \dots, f . Для симметричных полиномов типа (22) имеет место очевидное соотношение

$$[n - s]_{ab\dots f} = [n - s]_{kab\dots f} + \beta_k^2 [n - s - 1]_{kab\dots f}, \quad (23)$$

с помощью которого можно производить их расчет рекуррентным образом. Например:

$$[r] = \frac{1}{r} \sum_{s=1}^{\Omega} \beta_s^2 [r - 1]_s; \quad [r]_k = [r] - \beta_k^2 [r - 1]_k; \quad [0] = [0]_k = 1; \quad [1] = \sum_{s=1}^{\Omega} \beta_s^2. \quad (23a)$$

Для подсчета полиномов с двумя индексами, если соответствующие им амплитуды β не совпадают, из (23) получаются удобные соотношения [36]:

$$\begin{aligned} [n]_1 - [n]_2 &= (\beta_2^2 - \beta_1^2) [n - 1]_{12}; \\ \beta_1^2 [n]_1 - \beta_2^2 [n]_2 &= (\beta_1^2 - \beta_2^2) [n]_{12}, \end{aligned} \quad (24)$$

которые могут быть распространены на любое число индексов и из которых следуют аналогичные соотношения для p (β).

Так как все выражения для величин, усредняемых по основному состоянию, содержат одинаковое число амплитуд β в числителе и знаменателе, то β могут быть нормированы произвольным образом, например $\sum_{s=1}^{\Omega} \beta_s^2 = 1$, что представляет собой условие нормировки для двухчастичной задачи.

При расчете факторов p (17) соответствующие нормировки функций $|\tilde{N}\rangle$ (9) выражаются через полиномы от $\beta^2 = (v/u)^2$ и от $\beta^{-2} = (u/v)^2$. Последние в отличие от (22) будем отмечать чертой сверху:

$$\begin{aligned} \overline{[r]} &= \sum_i \prod_{i=1}^r \beta_{s_i}^{-2}; \\ \langle \tilde{N} | \tilde{N} \rangle &= \left(\prod_k u_k^2 \right) [n] = \prod_{s \leq F} v_s^2 \prod_{t > F} u_t^2 \sum_{r=0}^n \overline{[r]}^{(H)} [r]^{(B)}, \quad 2n = N, \quad (25) \end{aligned}$$

где в полиномах $[r]^{(B)}$ суммирование идет по уровням выше F и в $\overline{[r]}^{(H)}$ — по уровням ниже F . Для подсчета $\overline{[r]}^{(H)}$ могут быть использованы соотношения (23) с заменой β^2 на β^{-2} . При расчете нормировок состояний с заблокированными уровнями вида $|2r\rangle_{ab\dots f}$ необходимо фиксировать, где находятся исключенные уровни — выше или ниже уровня Ферми, так как в зависимости от этого индексы переходят либо на полином $[r]^{(B)}$, либо на $\overline{[r]}^{(H)}$.

Даже для деформированных ядер с развитой сверхтекучестью полиномы $[r]^{(B)}$ и $\overline{[r]}^{(H)}$ сильно убывают с ростом r , так как для самых верхних уровней $\beta^2 \simeq 0$, а для нижних $\beta^{-2} \simeq 0$. Как отмечалось в [30], с высокой степенью точности ($< 0,001\%$) оказалось возможным ограничиться $r = 5$. Это отражает тот факт, что эффективное число пар, вовлеченных в процесс ядерной сверхтекучести, является небольшим.

Из (23) можно получить связь между факторами $p_{ab\dots f}^{(r)}$:

$$p_{ab\dots f}^{(r)} = v_k^2 p_{kab\dots f}^{(r-1)} + u_k^2 p_{kab\dots f}^{(r)},$$

которая приводит к рекуррентным соотношениям [30, 37], позволяющим вычислять факторы с некоторым числом индексов через факторы с их меньшим числом. Так, при $v_1^2 \neq v_2^2$, например, имеем

$$\left. \begin{aligned} p_{12}^{(n)} &= [v_1^2 p_1^{(n)} - v_2^2 p_2^{(n)}] [v_1^2 - v_2^2]^{-1}, \\ p_{12}^{(n-1)} &= [u_1^2 p_1^{(n)} - u_2^2 p_2^{(n)}] [u_1^2 - u_2^2]^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

При вычислении любого среднего по функции $|\tilde{N}\rangle$ в числителе и знаменателе присутствует одинаковое число параметров u , v , отсюда следует, что имеется некоторый произвол в их определении, и с помощью преобразования

$$(v'_k)^2 = x^2 v_k^2 (u_k^2 + x^2 v_k^2)^{-1}; \quad (u'_k)^2 = u_k^2 (u_k^2 + x^2 v_k^2)^{-1}$$

от одного набора u, v можно перейти к другому. В частности, это преобразование позволяет на всех этапах итерационного процесса держать неизменными u, v для какого-то уровня, например для уровня Ферми.

3. ЭФФЕКТ БЛОКИРОВКИ В МПДВ

В этом разделе обсуждается влияние точного сохранения числа частиц на ослабление парных корреляций с ростом числа неспаренных частиц, расположенных на уровнях, близких к уровню Ферми, в деформированных ядрах редкоземельной области. Имеется множество факторов, влияющих на результаты расчетов энергий одно- и многоквaziчастичных состояний. Во-первых, часть из них связана с усложнением вида эффективного гамильтониана при включении в него других эффективных взаимодействий помимо спаривательного, сил Кориолиса, учета изменения среднего поля в зависимости от состояния и числа нуклонов в ядре. Во-вторых, при одном и том же гамильтониане улучшение результатов может быть получено при выборе более точного метода решения.

Расчеты с гамильтонианом (3), содержащим среднее поле, постоянное для групп ядер рассматриваемой области, и спаривательные силы не могут претендовать на количественное описание всех деталей в распределении энергий квазичастичных состояний. Однако эти расчеты позволяют установить общий характер улучшения описания, которое обусловлено учетом точного сохранения числа частиц по сравнению с МКП.

Расчеты энергий состояний, содержащих от одной до четырех квазичастиц одинакового сорта, были проведены в [38] в рамках МКП и МПДВ с использованием гамильтониана (3). В этой работе были рассмотрены состояния с несколькими квазичастицами, в которых велика проекция момента на ось симметрии ядра, так как в таких состояниях малосущественна роль эффективных действий помимо спаривательного.

Квазичастичные состояния в теории с точным сохранением числа частиц. В МПДВ состояния, содержащие M неспаренных частиц, описываются функциями:

$$\underbrace{a_1^+ a_2^+ \dots a_m^+}_{M} |N\rangle_{1, 2, \dots, m}, \quad (27)$$

которые соответствуют полному числу частиц $M + N$. Выражение для энергии системы в состоянии (27) имеет вид [38]:

$$E^{(m)} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_m + 2 \sum_{i \neq 1, 2, \dots, m} \left(\varepsilon_i - \frac{G}{2} \right) v_i^2 p_{i(m)}^{(n-1)} - \\ - G \sum_{s, t \neq 1, 2, \dots, m} u_s v_s u_t v_t (1 - \delta_{st}) p_{st(m)}^{(n-1)}, \quad n = N/2, \quad (28)$$

где входящие в (28) корректирующие функции определены подобно функциям (17):

$$P_{i(m)}^{(n-1)} \equiv P_{i, 1, 2, \dots, m}^{(n-1)}$$

Появление нескольких неспаренных частиц на уровнях с индексами $1, 2, \dots, m$ делает эти уровни недоступными для размещения на них пар нуклонов (эффект блокировки [6]). Это оказывает влияние на парнокорреляционную энергию

$$E_c^{(m)} = E^{(m)} (\text{МНЧ}) - E^{(m)},$$

где $E^{(m)}$ (МНЧ) — энергия состояния в модели независимых частиц, и на значения параметров u, v , которые находятся из минимума энергии (28). При этом процедура минимизации с учетом блокировки вполне аналогична определению u, v для основного состояния.

Как для четных, так и для нечетных систем МПДВ дает выигрыш в парнокорреляционной энергии:

$$E_c^{(m)} (\text{МПДВ}) > E_c^{(m)} (\text{МКП}).$$

С увеличением числа заблокированных уровней (с увеличением M) $E_c^{(m)}$ (МКП) всегда убывает, т. е. происходит ослабление спаривания. Однако в МПДВ с увеличением числа заблокированных уровней ниже уровня Ферми парнокорреляционная энергия иногда растет (рис. 7) [39]. Этот эффект обусловлен точным сохранением числа частиц в МПДВ и отсутствует в МКП. В силу сохранения числа частиц блокирование уровней ниже уровня Ферми приводит к переводу нескольких пар частиц выше уровня Ферми основного состояния, т. е. к перемещению ферми-поверхности. Если плотность одночастичных уровней в этой области больше, чем их плотность в окрестности уровня Ферми основного состояния, то $E_c^{(m)}$ растет с увеличением M . Это может привести к тому, что в некоторых случаях частота вращения, при которой происходит пересечение полос в нечетном ядре, может быть больше, чем в соседнем четно-четном ядре [39].

Квазичастичные состояния с одним и двумя заблокированными уровнями. Известно, что МКП несколько завышает плотность низколежащих одноквазичастичных состояний по сравнению с экспериментально наблюдаемой плотностью [6, 40]. Результаты расчетов [38, 41] энергий возбуждения (ω) одноквазичастичных состояний в ядрах редкоземельной области показывают, что

$$\omega (\text{МПДВ}) > \omega (\text{МКП}) \quad (29)$$

и МПДВ приводит к лучшему описанию плотности одноквазичастичных состояний, чем МКП. Качественным аргументом в пользу соотношения (29) может служить то обстоятельство, что в основном состоянии форма распределения пар по уровням при точном решении задач и в МПДВ [41] имеет меньшее размытие вблизи поверхности

Ферми, чем БКШ-распределение (рис. 8). Приближение формы распределения к прямоугольной (модель независимых частиц) означает уменьшение плотности низколежащих одноквазичастичных состояний.

Рассмотрение двухквазичастичных состояний с большими спинами в четно-четных ядрах редкоземельной области показывает в большинстве случаев ω (МКП) $<$ $\omega_{\text{эксп}}$.

Так как для двухквазичастичных состояний неравенство (29) также выполняется [38], то МПДВ в среднем приводит к несколько лучшему согласию с экспериментальными данными, чем МКП.

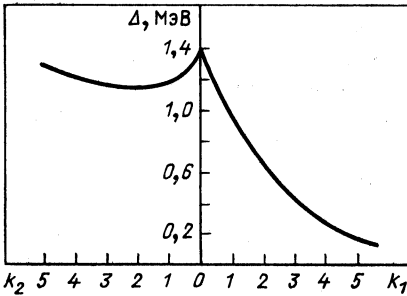


Рис. 7. Зависимость Δ от числа блокированных уровней выше (k_1) и ниже (k_2) уровня Ферми [39]

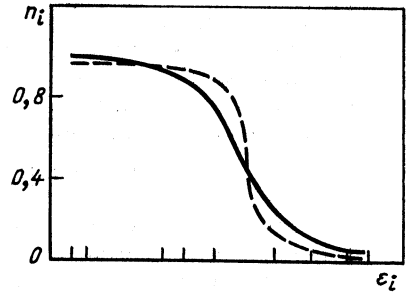


Рис. 8. Распределение пар нейтронов по одночастичным уровням для ^{174}Yb :
сплошная линия — МКП, штриховая — МПДВ [41]

Что касается парнокорреляционной энергии состояний, то блокирование одного уровня не приводит в МПДВ к столь заметному ослаблению спаривания, как в МКП (E_c [МПДВ] ≥ 1 МэВ, в то время как E_c (МКП) $\leq 0,5$ МэВ]. При блокировании же двух уровней E_c (МКП) практически исчезает ($\leq 0,1$ МэВ), в то время как в E_c (МПДВ) составляет заметное значение ($\geq 0,6$ МэВ).

Рассмотрение трех- и четырехквазичастичных состояний типа $(p, 2n)$, $(n, 2p)$ и $(2n, 2p)$, в которых число квазичастиц одного сорта не превышает двух, показывает [38], что ω (МПДВ) лучше согласуется с $\omega_{\text{эксп}}$, чем ω (МКП), особенно для $(2n, 2p)$ -состояний. Это обусловлено, во-первых, тем, что неопределенности, связанные с одночастичными энергиями, могут компенсироваться с увеличением числа квазичастиц, и, во-вторых, тем, что МПДВ обеспечивает более точную трактовку парнокорреляционной энергии, дающей вклад в ω . E_c слабо зависит от детального значения положения уровней среднего поля и в основном определяется плотностью одночастичных уровней в окрестности уровня Ферми. Дальнейшее рассмотрение многоквазичастичных состояний с числом квазичастиц одного сорта $M \geq 3$ может служить подтверждением этого заключения.

Многоквaziачастичные состояния. Расчет энергий пятиквaziачастичного состояния типа $(2p, 3n)$ с $\mathcal{K}^\pi = 37/2^-$ в ^{177}Hf и шестиквaziачастичных состояний типа $(2p, 4n)$ с $\mathcal{K}^\pi = 19^-, 20^-$ и 21^- в ^{176}Hf , найденных в [42, 43], показал, что МПДВ приводит к хорошему согласию с $\omega_{\text{экс}}$ (табл. 2). В отличие от предсказаний МКП о полном исчезновении спаривания в многоквaziачастичных состояниях, МПДВ показывает, что спаривание в них не исчезает и E_c (МПДВ) заметно отличается от нуля. В табл. 3 дана зависимость

Таблица 3. Зависимость корреляционной энергии E_c от числа квазичастиц M в нейтронной системе ^{176}Hf

M	0	2	4	6
E_c (МКП), МэВ	0,9	0,1	0	0
E_c (МПДВ), МэВ	1,7	0,8	0,4	0,3

E_c (МПДВ) и E_c (МКП) от числа квазичастиц (M) в нейтронной системе ^{176}Hf (случай $M=6$ соответствует гипотетическому состоянию из шести неспаренных нейтронных квазичастиц, расположенных на уровне Ферми и ближайших к нему уровнях). С увеличением числа квазичастиц E_c (МПДВ) убывает значительно медленнее, чем E_c (МКП), отлична от нуля даже при $M=6$.

Как уже отмечалось выше, для состояний с большим числом квазичастиц МПДВ существенно улучшает согласие с $\omega_{\text{экс}}$. Это связано также с тем, что неточности МКП при расчете ω и E_c тем заметнее, чем больше одночастичных уровней блокируется в непосредственной близости от уровня Ферми, т. е. для низколежащих многоквaziачастичных состояний.

4. НИЗКОЛЕЖАЩИЕ 0^+ -СОСТОЯНИЯ В ДЕФОРМИРОВАННЫХ ЯДРАХ

При изучении низкоэнергетических возбужденных состояний четно-четных ядер с относительно небольшими спинами, такими, как 0^+ , 2^+ , 3^- , в рамках квазичастичного метода установлено, что они могут быть описаны как однофононные состояния, представляющие собой суперпозиции пар квазичастиц, относительный вклад которых определяется их энергиями и эффективным взаимодействием. В теории с точным сохранением числа частиц аналогом такого описания является представление функций возбужденных состояний в виде произведения одной «разорванной» пары [26] на функцию осто-

ва, содержащего $(N - 2)/2$ S -пары (7). Для сферических ядер эту функцию можно представить в виде

$$\sum_{1;2} \psi_{12} [a_1^+ a_2^+]_M^{(I)} |N - 2\rangle. \quad (30)$$

В (30) предполагается, что операторы рождения a_1^+ , a_2^+ связаны в угловой момент I , M — его проекция. При $I = 0$ такие состояния должны быть ортогонализированы к основному $|N\rangle$. В деформированных ядрах используются функции с определенной проекцией на ось симметрии ядра. Вместо (30) может быть введено эквивалентное представление, когда функция с одной «разорванной» парой порождается частично-дырочным оператором $\sim \sum_{1;2} \psi'_{12} [a_1^+ a_2^+]_M^{(I)}$, действующим на $|N\rangle$. Значения амплитуд обычно находятся с помощью диагонализации гамильтониана в базисе этих состояний, т. е. используется аналог известного метода Тамма — Данкова.

В последнее время в связи с микроскопическим обоснованием модели взаимодействующих бозонов появилось большое число работ, где рассчитываются энергии и микроскопический состав квадрупольных пар, которые являются фермионными образами d -бозонов модели (см., например, обзор [45]).

Большой интерес представляет также изучение 0^+ -состояний в деформированных ядрах с использованием формализма, сохраняющего число частиц. В области редких земель подробное экспериментальное исследование свойств этих состояний (см. обзоры [46—49]) показало, что во многих ядрах имеется несколько 0^+ -состояний, энергии которых оказываются меньше удвоенной протонной или нейтронной щели (2Δ), в то время как традиционная модель спаривательных и квадрупольных сил дает в квазичастичном формализме только одно состояние с такой энергией — β -вибрационное.

Одна из возможностей понизить энергию нескольких 0^+ -состояний ниже 2Δ в рамках квазичастичного формализма состоит в усложнении эффективных сил как в частично-дырочном, так и в частично-частичном каналах [50—57]. Однако имеющиеся точные решения задачи со спаривательным гамильтонианом (3), например, для модельной системы с эквидистантными уровнями [15] показывают, что точные значения энергий возбужденных 0^+ -состояний, которые обычно называют парновибрационными [58], оказываются меньше 2Δ в широком интервале изменения константы спаривательного взаимодействия G , включающем ее реалистические значения. Это указывает на существование некоторых систематических неточностей в квазичастичном методе случайной фазы (КМСФ), в рамках которого энергия первого возбужденного 0^+ -состояния оказывается не меньше 2Δ . Таким образом, данные по энергиям 0^+ -состояний указывают на целесообразность применения МПДВ для расчета их свойств.

Вторая причина, заставляющая при трактовке 0^+ -состояний обратиться к МПДВ, следует из результатов реакций по двухнуклонной передаче. В некоторых деформированных ядрах переходы на возбужденные 0^+ -состояния составляют заметную долю от переходов на основные. Как указывалось в [59], такая ситуация может быть объяснена тем, что соответствующая нуклонная система (нейтроны или протоны) должна находиться в состоянии, близком к точке фазового перехода из сверхтекучего в нормальное состояние, т. е. при $G \sim G_{кр}$. Последнее, в свою очередь, может явиться следствием существования в спектре одночастичных уровней энергетической щели вблизи уровня Ферми, значительно превышающей среднее расстояние между уровнями.

Парные вибрации, сохраняющие число частиц. При построении волновых функций первых возбужденных состояний в МПДВ можно исходить из предположения, что такие состояния соответствуют вариациям параметров функции основного состояния $|N\rangle$. Если эти вариации не слишком велики, то достаточно ограничиться выражением, линейным по вариациям.

В разд. 2 было показано, что состояние, отвечающее вариации параметров основного состояния и ортогональное $|N\rangle$, порождается оператором $n_k - \langle n_k \rangle$, $n_k = a_k^+ a_k$. Поэтому волновую функцию парновибрационного состояния запишем в виде [36]:

$$B^+ |N\rangle = \sum_k z_k (n_k - \langle n_k \rangle) |N\rangle. \quad (31)$$

Энергия парных вибраций ω и амплитуды состояний z_k находятся из вариационного принципа, иначе говоря, из диагонализации гамильтониана (3) в пространстве функций (31).

Отметим некоторые асимптотические свойства (31). В пределе $G \rightarrow \infty$, когда $|N\rangle$ — функция с максимальным квазиспином $M/2$ (M — полное число уровней), каждый из компонентов (31) также является собственной функцией оператора квазиспина, и все они имеют квазиспин, равный $M/2 - 1$. Так как энергии состояний с квазиспином $M/2 - 1$ вырождены, то разность энергий состояний $B^+ |N\rangle$ и $|N\rangle$ равна GM . Известно, что в этом пределе $\Delta = GM/2$, т. е. при $G \rightarrow \infty$ $\omega = 2\Delta$.

В пределе $G \rightarrow 0$ среди нормированных компонентов $B^+ |N\rangle$ есть компоненты, обращающиеся в нуль, когда $k < F$, но также присутствуют компоненты, имеющие вид $a_k^+ a_k^- a_m^- a_m \Psi_N(0)$, где $\Psi_N(0)$ — волновая функция в модели независимых частиц, $k > F$, а $m < F$, т. е. в этом пределе (31) дает элементарные возбужденные состояния модели независимых частиц с $\omega = 2(\epsilon_k - \epsilon_m)$. Таким образом, функция (31) имеет правильные асимптотические значения.

Численные расчеты с использованием функций (31) для модельных систем, двухуровневых с многократным вырождением и многоуровневых с двукратным вырождением и эквидистантным расположением уровней, были проведены в [36]. Сравнение полученных значений энергий возбуждения 0^+ -состояний — ω (МПДВ) с точными

решениями [8, 14, 15, 60, 61] — ω (точн.) показывает, что в широком интервале изменения чисел частиц и константы взаимодействия ω (МПДВ) качественно правильно воспроизводит ω (точн.), т.е. ω (МПДВ) $< 2\Delta$, начиная с некоторого значения $G \sim G_{кр}$, где происходит пересечение ω (точн.) и 2Δ . При достаточно больших числах частиц, примерно соответствующих обычному числу валентных нуклонов в ядрах, достигается количественное согласие результатов. Так, для системы 32 частиц, распределяющихся по 32 двукратно вырожденным эквивалентным уровням, приближенное решение отличается от точного не более чем на 3 % (рис. 9).

В [36, 62] было проведено сравнение энергий, вычисленных в рамках КМСФ — ω (КМСФ) и ω (МПДВ) для нейтронной системы

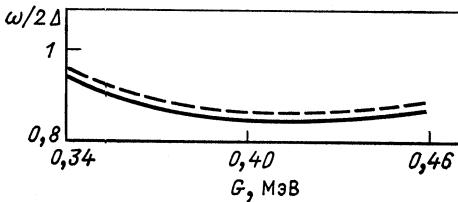


Рис. 9. Результаты вычислений ω_1 для модельной системы с 32 эквивалентно расположенными уровнями: сплошная кривая — точное решение; пунктир — МПДВ [36]

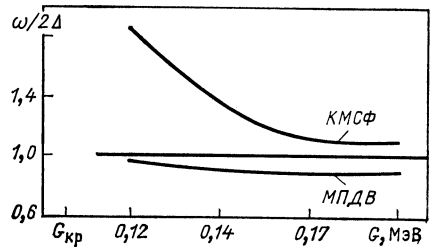


Рис. 10. Результаты вычислений ω_1 для нейтронной системы ^{176}Yb

$N = 106$ с 36 уровнями схемы Нильссона в широком интервале изменения G , который включал в себя значения, воспроизводящие экспериментальные парные энергии изотопов (рис. 10). На этом интервале изменения G выполняется соотношение (ω_1 — минимальная энергия)

$$\omega_1 (\text{МПДВ}) < 2\Delta < \omega_1 (\text{КМСФ}).$$

На рис. 11 приведены результаты вычислений $\omega_1^{(\tau)}$ (МПДВ) [36] в ядрах редкоземельной области [с G_τ ($\tau = p, n$). полученными из экспериментальных парных энергий] в зависимости от $G/G_{кр}$. В большинстве случаев ω (МПДВ) лежит ниже 2Δ . Исключения составляют случаи, когда $G/G_{кр}$ для данной нуклонной системы близко к единице. То, что при таких $G/G_{кр}$ ω_1 (МПДВ) становится больше 2Δ , может быть качественно объяснено, если обратиться к модельной двухуровневой задаче (рис. 12). Видно, что существует область таких значений $G/G_{кр}$ ($1 < G/G_{кр} \lesssim 1,5$), при которых ω_1 (МПДВ) $> 2\Delta$.

Изучение парных вибраций при точном сохранении числа частиц на простых модельных системах показывает, что этот метод правильно

воспроизводит как в количественном, так и в качественном отношении поведение ω_1 (МПДВ) в зависимости от G (минимум вблизи $G_{кр}$ и опускание ω_1 ниже 2Δ при $G \gtrsim 1,5 G_{кр}$), в отличие от резуль-

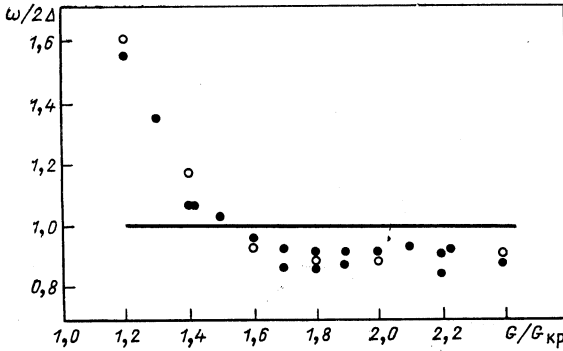


Рис. 11. Результаты вычислений $\omega_1^{(\tau)}$ ($\tau = n, p$) в ядрах редкоземельной области (●), представленные в зависимости от $G/G_{кр}$. Для качественного сравнения приведена зависимость ω_1 (точн.) от $G/G_{кр}$, полученная для модельной системы (○)

татов КМСФ. Это свидетельствует о том, что успех приближения заключается в использовании функции основного состояния — $|N\rangle$, явно включающей в себя корреляции, обусловленные сохранением числа частиц. Тем самым подтверждается общая идеология: чем точнее выбрана функция основного состояния, тем более

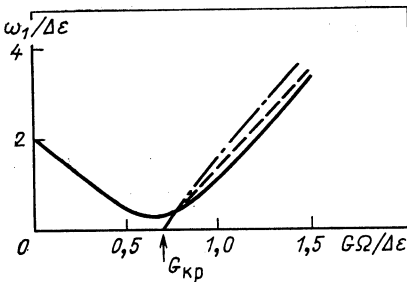


Рис. 12. Результаты вычислений $\omega_1/\Delta\varepsilon$ для модельной системы из двух уровней [36]: — — — — точное решение; — — — — КМСФ; — · — · — МПДВ.

оправдано приближение, связывающее функции возбужденных состояний с небольшой вариацией параметров функции основного состояния.

Совместный учет частично-частичных и частично-дырочных сил. Микроскопическая структура реальных 0^+ -возбуждений в деформированных ядрах должна включать помимо парновибрационных компонентов (31) также состояния, отличающиеся от них и от основного наличием двух частиц, находящихся в разных одночастичных состояниях, не связанных сопряжением по времени и имеющих равную нулю суммарную проекцию момента на ось симметрии \mathcal{K} :

$$B_{\beta}^+|A\rangle = \sum_{s \neq t; \eta=0, 1} z_{st}^{\eta} [a_s^+ a_t + (-1)^{\eta} a_t^+ a_s^-] |A\rangle;$$

$$\mathcal{K}_s = \mathcal{K}_t = 0; |A\rangle = |N\rangle |Z\rangle. \tag{32}$$

Такие компоненты, которые в [63] были названы «чистыми» β -вибрациями, могут возникнуть под действием различных эффективных сил, отличающихся от монополярного спаривания, в частности это могут быть частично-дырочные факторизованные силы. Помимо генерации (32) они могут оказать воздействие на парновибрационные компоненты (31). Однако в [63] показано, что при рассмотрении нуклонов только одного сорта влияние частично-дырочных сил на перераспределение пар типа $a_k^+ a_k^+$ сводится только к перенормировке одночастичных энергий. В то же время при совместном учете нейтронных и протонных парных вибраций квадрупольные силы приводят к взаимодействию фононов B_n^+ и B_p^+ , каждый из которых явно не зависит от квадрупольных сил и определяется только спаривательными.

Включение частично-дырочных сил обуславливает не только появление новой ветви возбужденных состояний (32), но также вносит дополнительные корреляции в основное. Их влияние на β -вибрации может быть учтено в соответствии с идеологией метода случайной фазы, если положить, что новая волновая функция основного состояния является вакуумом для β -вибрационных фононов (32). Для этой функции можно сохранить прежнее обозначение $|A\rangle = |N\rangle |Z\rangle$, имея в виду, что учет корреляций квадрупольного типа практически не изменяет свойств парных вибраций.

Так же как и в обычном методе случайной фазы, фонон B_β^+ содержит сумму по всем одночастичным состояниям, поскольку распределение протонных и нейтронных пар, описываемое $|A\rangle$, не имеет резкой границы. В этом приближении энергия и нормировка β -вибрационного фонона могут быть определены через среднее от коммутаторов:

$$\Phi_\beta = \langle A | [B_\beta, [H, B_\beta^+] - \omega_\beta B_\beta^+] | A \rangle.$$

Вариация функционала Φ_β по амплитудам z_{st}^n дает систему уравнений, которая при замене всех корректирующих факторов (17) на единицу, т.е. при переходе к обычному квазичастичному методу случайной фазы, приобретает известный вид, характерный, например, для γ - или октупольных вибраций.

После того как определены чистые β - и парновибрационные фононы, из них может быть составлена функция 0^+ -возбуждений

$$\Psi_{\text{возб}}(0^+) = \sum_{\nu} \{ \alpha_{\nu}^{(n)} B_n^+(\nu) + \alpha_{\nu}^{(p)} B_p^+(\nu) + \alpha_{\nu}^{(\beta)} B_{\beta}^+(\nu) \} |A\rangle. \quad (33)$$

где сумма распространена в принципе на все решения уравнений для фононов трех типов. Однако для определения энергий нижайших состояний достаточно взять не слишком большое их число — в [63] расчеты были проведены с семью фононами каждого типа. Для определения энергий и амплитуд α_{ν} необходимо выполнить диагонализацию гамильтониана в базе (33). Влияние взаимодействия пар-

ных и β -вибраций на положение невозмущенных уровней в основном незначительно — менее $\sim 0,1$ МэВ. Более заметно его влияние на спектроскопические характеристики, особенно в тех случаях, когда нижайшим оказывается уровень с преобладанием парновибрационной моды.

Так как в нижайшие возбужденные 0^+ -состояния главный вклад дают β - и парновибрационные фононы с минимальной энергией, то это приводит в соответствии с результатами по парным вибрациям к появлению в большинстве случаев дополнительных 0^+ -возбуждений, лежащих ниже 2Δ . Исключение составляют ядра, в которых протонная или нейтронная система находятся в непосредственной близости от точки фазового перехода.

5. ПАРНЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО ТИПА В ИРАСТ-ПОЛОСЕ

Самосогласованная крэкинг-модель. В 1960 г. Моттельсон и Валатин предсказали [64], что в атомных ядрах должен наблюдаться эффект, аналогичный эффекту Мейсснера в сверхпроводнике: под влиянием сильного кориолисова поля в быстровращающихся ядрах должен наблюдаться резкий фазовый переход из сверхтекучего состояния в нормальное — парный коллапс. По их оценкам, величина углового момента I , при котором исчезает спаривание ($\Delta = 0$), примерно равна $12 \hbar$ для $A = 180$ и примерно $18\hbar$ для $A = 238$.

Первые экспериментальные работы, в которых авторы стремились наблюдать этот фазовый переход во вращательном спектре хорошо деформированных ядер, были посвящены поиску аномалий в поведении момента инерции \mathcal{J} в зависимости от коллективной угловой скорости вращения ω . В [65—67] было обнаружено, что во многих ядрах происходит внезапное увеличение \mathcal{J} при некотором $I_c \sim (12 \div 16)\hbar$, причем это увеличение \mathcal{J} часто сопровождается локальным уменьшением ω . Это явление получило название эффекта бэкбендинга (backbending-effect).

Первоначально теоретическое описание бэкбендинга при высоких I проводилось в рамках двух конкурирующих моделей: модели кориолисова антиспаривания, вызывающего парный коллапс, и модели ротационного выстраивания угловых моментов одной пары нуклонов вдоль оси вращения [68—72]. В обеих моделях бэкбендинг обусловлен пересечением ротационной полосы основного состояния (g -полоса) и полосы возбужденного состояния (s -полоса). Если природа второй полосы в первой модели характеризуется отсутствием спаривания в нейтронной или протонной системах во вращательных состояниях, то в модели ротационного выстраивания вторая полоса построена на двухквaziчастичном состоянии двух нейтронов из $i_{13/2}$ -оболочки, угловые моменты которых выстроены вдоль оси вращения ядра. Обе модели описывают эффект бэкбендинга ка-

чественно и лишь в некоторых случаях количественно (см., например, [73—79]).

При малых I структура ферми-поверхности в основном определяется потенциалом среднего поля, однако при высоких I происходит существенное изменение характера одночастичного движения, обусловленное кориолисовым взаимодействием. Поэтому в [80] был сделан следующий шаг — объединение эффектов кориолисова антиспаривания и ротационного выстраивания в рамках самосогласованной крэнкинг-модели (СКМ).

В СКМ-модели используется рауссиан

$$R = H - \lambda N - \omega \mathcal{J}_x, \quad (34)$$

где H — гамильтониан, а $\omega \mathcal{J}_x$ — член, описывающий кориолисовы и центробежные силы, которые возникают при вращении ядра вокруг оси x с угловой скоростью ω , значение которой находится из дополнительного условия.

$$\langle \omega | \mathcal{J}_x | \omega \rangle = [I(I + 1)]^{1/2},$$

$|\omega\rangle$ — волновая функция типа ХФБ, теперь уже зависящая от ω , т.е. функция вращающегося вакуума квазичастиц.

Исследования ираст-полос в рамках СКМ показали, что этот метод позволяет выяснить роль различных эффектов, дающих вклад в поведение \mathcal{Z} при изменении ω , таких, как кориолисово антиспаривание, ротационное выстраивание, бесщелевая сверхпроводимость, изменение формы ядра при вращении.

Известно, что сохранение числа частиц в СКМ обеспечивается только в среднем, так как пробная волновая функция $|\omega\rangle$ является волновым пакетом в пространстве числа частиц, поэтому СКМ является приближением, обеспечивающим аккуратное описание лишь в пределе большого числа частиц. Поскольку (см. разд. 1) критичной величиной является не полное число частиц в ядре, а число валентных пар нуклонов одного сорта, число которых мало (примерно равно 5), то погрешности, связанные с несохранением числа частиц в СКМ, тем более при описании области бэкбендинга, т.е. в области фазового перехода, могут оказаться существенными. Отсюда также следует, что отличие моделей кориолисова антиспаривания и ротационного выстраивания с точки зрения изменения спаривания в области бэкбендинга невелико. В первой модели при $I > I_c$ спаривание исчезает полностью, во второй модели учитывается разрыв только одной пары нуклонов, находящихся на уровне, ближайшем к уровню Ферми, но разрыв такой пары приводит к значительному уменьшению спаривания, и это уменьшение тем больше, чем меньше плотность одночастичных уровней в окрестности уровня Ферми.

Таким образом, в рамках СКМ фактическая ситуация при описании ираст-полосы сводится к следующей промежуточной картине: частичный разрыв пар и ротационное выстраивание, что сопровож-

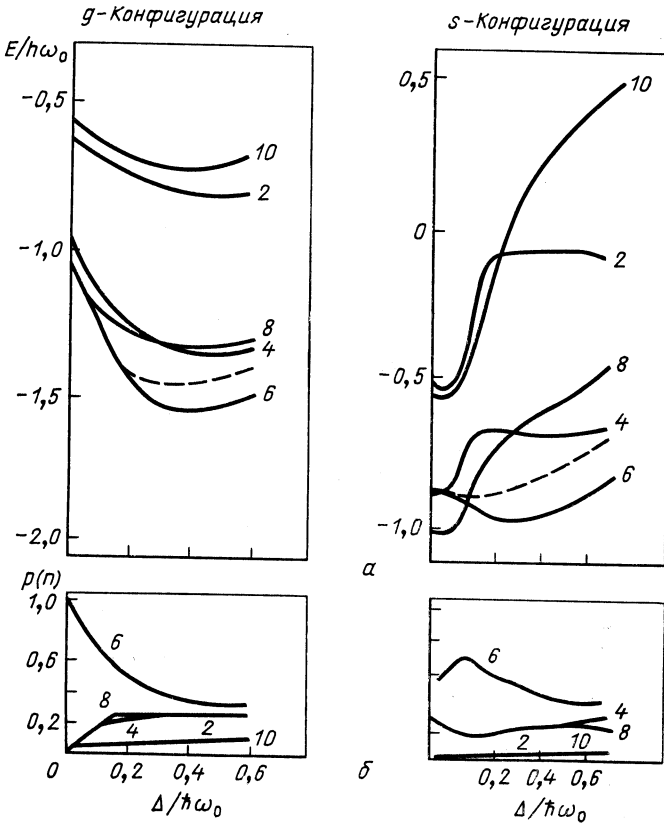


Рис. 13. Энергии состояний с фиксированным числом частиц (а) и вероятности обнаружения в неспроектированной волновой функции компонента с фиксированным числом частиц (б) в зависимости от $\Delta/h\omega_0$ ($\omega/\omega_0 = 0,01$): пунктир — энергия БКШ-состояния, цифры у кривых — число частиц [81]

дается значительным ослаблением спаривания. Чем ближе при движении по ираст-полосе мы приближаемся к области бэкбендинга (т.е. к области, где $G \rightarrow G_{кр}$), тем заметнее становятся погрешности теории, связанные с несохранением числа частиц.

Качественно такая чувствительность расчетов к примесям в $|\omega\rangle$ компонентов с неправильным числом частиц связана с тем, что энергия перехода ΔE ($\Delta E = E_{I+2} - E_I$) — это разность больших величин, и изменение ΔE в области $I \sim I_c$ приблизительно на 50 кэВ уже является критичным для возникновения бэкбендинга, в то время как погрешность вычисления энергии ираст-уровня (E_I), связанная с несохранением числа частиц, значительно больше (около 0,5 МэВ).

На примере модельной системы, состоящей из одной $i_{13/2}$ -оболочки с $N = 6$, в [81] было рассмотрено влияние проектирования по числу частиц на Δ и ω_c — частоту вращения, при которой происходит пересечение g - и s -полос. На рис. 13 приведены энергии g - и s -состояний, вычисленные в рамках СКМ и в рамках СКМ с проектированием по числу частиц (СКМ + ПДВ) в зависимости от Δ (ω — фиксирована). Из результатов этой работы (см. также [82]) следует,

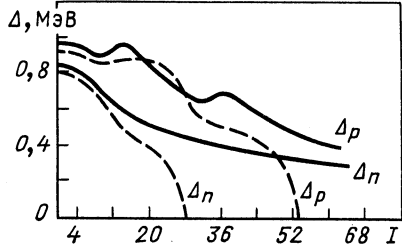


Рис. 14. Результаты вычислений Δ_τ ($\tau = n, p$) в ^{164}Er : сплошные линии — (СКМ + МПДВ); пунктир — СКМ [83]

что в СКМ + ПДВ по сравнению с результатами СКМ происходит увеличение самосогласованной парной щели (Δ^c) как для g -конфигурации, так и для s -конфигурации, причем Δ_s^c лишь ненамного меньше Δ_g^c .

Поскольку изменение самосогласованной нейтронной и протонной парной щели (Δ_n^c и Δ_p^c) с ростом I в значительной степени определяет свойства ираст-полосы, то выяснение зависимости Δ_n^c и Δ_p^c от I представляет не только методический интерес. Этот вопрос рассматривался во многих работах, но наиболее полное рассмотрение было проведено в [83—85].

Происходит ли парный коллапс в быстровращающихся ядрах? Самосогласованная крэнкинг-модель предсказывает, что в области аномального поведения момента инерции происходит парный коллапс, т.е. нейтронная или протонная щели становятся равными нулю. В нейтронных системах ядер редкоземельной области он происходит при $I = (20 \div 30) \hbar$, а в протонных системах при $I = (40 \div 50) \hbar$ (см., например, [86, 87]). Парный коллапс является искусственной чертой СКМ, связанной с несохранением числа частиц. Это подтверждается результатами работ, выполненных в рамках СКМ + ПДВ (см., например, [83 — 85]), где в качестве меры спаривания принята величина

$$\Delta_\tau = G_\tau (\langle A_\tau^+ A_\tau \rangle)^{1/2}, \quad A_\tau^+ = \left(\sum_k a_k^+ a_k^+ \right)_\tau, \quad \tau = p, n,$$

и ее рассчитанные значения для ^{164}Er вдоль ираст-линии до $I = 70 \hbar$ приведены на рис. 14. Рисунок показывает, что при точном сохранении числа частиц парный коллапс не возникает ни в нейтронной, ни в протонной системах: в области аномального поведения момента инерции Δ_p и Δ_n только немного уменьшаются в ростом I , и даже при очень высоких I они составляют заметную величину.

Таким образом, изучение быстровращающихся ядер подтверждает, что плотность одночастичных уровней вблизи уровня Ферми и частично-частичные силы в реалистических вычислениях не настолько велики, чтобы можно было пренебречь нарушением закона сохранения числа частиц. Ядро как система конечного числа частиц слишком мала для того, чтобы воспроизвести фазовый переход из сверхтекучего в нормальное состояние, подобный тому, который осуществляется в сверхпроводниках.

В [83—85] учитывалось только монополюсное спаривание. Как показано в [88], учет квадрупольного спаривания приводит к дополнительному увеличению значений Δ_p и Δ_n , причем уменьшение их происходит еще медленнее, чем на рис. 14*.

Экспериментальное подтверждение существования спаривания при высоких I трудно получить только из спектра уровней над иррациональной полосой. Только при $I = 0$, где энергия квазичастицы больше Δ существует реальная щель в спектре возбуждений, которая вызывает уменьшение ψ в 2—3 раза по сравнению с твердотельным значением. При высоких I квазичастичные энергии могут стать много меньше или даже исчезнуть — явление беспечевой сверхпроводимости [80, 89, 90], в то время как Δ претерпевает только небольшие изменения. В этом случае увеличение ψ и стремление его к твердотельному связано с тем, что при высокой угловой скорости вращения квазичастичные энергии статистически распределены вокруг ферми-поверхности [91].

В основных состояниях сверхтекучих ядер матричные элементы двухнуклонной передачи

$$P_I = \left\langle A + 2, I \left| \sum_k a_k^+ a_k^+ \right| A, I \right\rangle$$

усилены за счет парных корреляций и поэтому обеспечивают прямую информацию о степени сверхтекучести ядра в основном состоянии ($P_0 \sim \Delta/G$). Однако величина P_I в области бэкбендинга не может служить прямым экспериментальным подтверждением отсутствия парного коллапса при этих значениях момента. Теоретическое изучение поведения P_I в рамках СКМ и СКМ + ПДВ в зависимости от I [92—94] привело к неожиданному результату. Как видно из рис. 15, P_I с увеличением I уменьшается значительно быстрее Δ и даже меняет знак при частотах вращения, значительно меньших той, при которой происходит парный коллапс в СКМ. Как показано в [92—94], P_I является осциллирующей функцией момента, причем амплитуда осцилляций пропорциональна Δ и, следовательно, значительно больше в СКМ + ПДВ, чем в обычной СКМ.

* В [84] изучалось не только поведение Δ вдоль иррациональной полосы, что соответствует изменению ω при $T = 0$, где T — температура системы, но и зависимость Δ от T при $\omega = 0$. Рассматривалась простая модельная система, для которой можно получить точное решение. Как и в первом случае с $T = 0$, $\omega \neq 0$, парный коллапс при $\omega = 0$ с увеличением T происходит только в СКМ, в то время как точное решение приводит к плавному уменьшению Δ с ростом T .

Сравнение методов решения с точным на простой модельной системе. Крумлинд и Шиманский [78] предложили простую модель, в которой можно получить точное решение рауссиана (34) для описания поведения \mathcal{Y} в зависимости от ω^2 . В этой модели 2Ω идентичных фермионов, взаимодействующих посредством спаривательных сил,

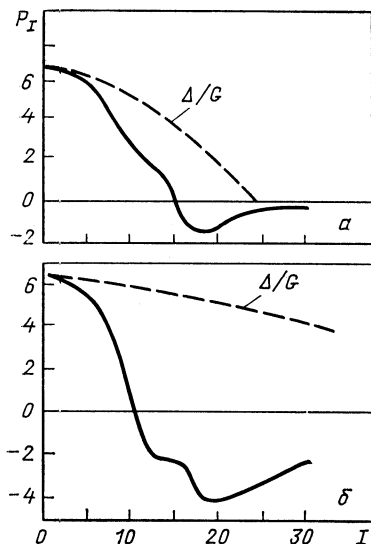


Рис. 15. Матричный элемент двухнуклонной передачи $P_I = \langle A + 2, I | \sum_k a_k^+ a_k^+ | A, I \rangle$ в зависимости от I (сплошная линия) [92]:

a — результаты вычислений в СКМ; b — результаты вычислений в (СКМ + МПДВ)

распределяются по двум уровням, каждый из которых имеет кратность вырождения, равную 2Ω . Эта система фермионов связана с внешним ротатором, символизирующим ядерный остов и имеющим момент инерции \hbar^2/a . Характерным безразмерным параметром модели, определяющим степень аномальности в зависимости \mathcal{Y} от ω^2 , является $\eta = \varepsilon/G\Omega$, где 2ε — расстояние между уровнями. Критический угловой момент I_c , при котором начинает проявляться аномалия, в этой модели определяется выражением

$$I_c = \Omega - \frac{1}{2} + (\Omega + 1) G/2a,$$

при этом G/a фиксируется так, чтобы I_c соответствовал экспериментальным значениям в реальных ядрах.

Для этой модели в [86] было проведено тщательное сравнение точного и приближенных решений, полученных с помощью трех методов: самосогласованной крэнкинг-модели (СКМ), той же модели в

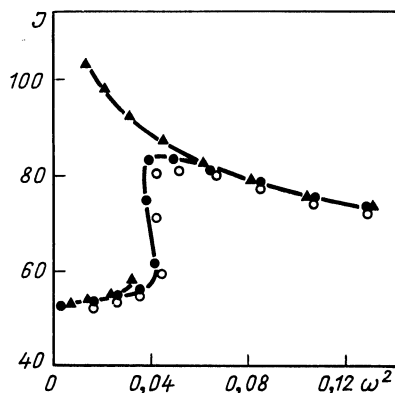


Рис. 16. Результаты вычислений момента инерции $\mathcal{Y}(\omega^2)$ в модели Крумлинда и Шиманского [86]:

▲ — (СКМ + КМСФ); ● — точное решение; ○ — (СКМ + МПДВ)

сочетании с квазичастичным методом случайной фазы (СКМ + КМСФ) и СКМ с проектированием по числу частиц до варьирования по боголюбовским амплитудам (СКМ + ПДВ). Сравнение решений показывает, что вне области бэкбендинга все три приближенные решения довольно близки к точному (рис. 16). В области бэкбендинга только СКМ + ПДВ обеспечивает согласие с точным решением, в то время как остальные два приближенных метода фактически терпят неудачу. Причем, чем больше η , тем лучше согласие (СКМ + ПДВ)-решения с точным. В этой работе также отмечено, что появление бэкбендинга коррелирует с возникновением беспрецедельной сверхпроводимости, однако они разделены некоторым интервалом частот, так что бэкбендинг начинается при меньшей ω , и поэтому ему сопутствуют положительные значения энергий квазичастиц.

Расчеты свойств ирраст-состояний с реалистическим самосогласованным одночастичным полем и эффективным взаимодействием довольно общего типа с проектированием как по числу частиц, так и по угловому моменту были выполнены Феслером с сотрудниками в работах, обзор которых дан в [95].

6. ОПИСАНИЕ ИЗОТОПИЧЕСКИ-ИНВАРИАНТНЫХ ПАРНЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ

Проекция по числу частиц и изоспину. Расчеты свойств ядер в области Ca и Ni [17, 96] показали, что сила эффективного спаривательного взаимодействия в этой области недостаточна, чтобы иметь возможность рассматривать эти ядра как находящиеся в сверхтекучей фазе. Скорее, нужно считать, что ситуация близка к точке фазового перехода. В связи с этим описание таких систем с помощью БКШ-функции может содержать погрешности, связанные со значительными флуктуациями числа частиц. Кроме того, в этой области существен точный учет изотопического спина.

Как известно, при малых значениях параметра щели хорошее описание сверхтекучих свойств дает БКШ-функция, спроектированная на определенное число частиц. Эта функция совпадает с функцией, имеющей вид степени некоторого парного оператора (см. разд. 2), которая была предложена Моттельсоном [31].

Как было показано выше, результаты, полученные с использованием этой функции, весьма близки к результатам точных решений. Поэтому можно надеяться, что обобщение функции Моттельсона для учета изотопического спина может дать удовлетворительное описание корреляций в области $A = 40 \div 60$.

Для описания систем, состоящих из четного числа одинаковых частиц, выше использовалась функция, которую представим здесь, например, для четного числа нейтронов, равного $2T$, в виде

$$|2T\rangle \sim (S_1^+)^T |0\rangle,$$

где S_1^+ составлен из пар операторов рождения частиц:

$$S_1^+ = \sum_c \beta_c a_{nc}^+ a_{nc}^- = \sum_c S_{1c}^+, \quad [\hat{T}_0, S_1^+] = S_1^+,$$

T_ν , $\nu = 0, \pm 1$ — оператор изоспина; a_{nc}^+ — оператор рождения нейтрона в состоянии c ; индекс c — набор квантовых чисел некоторого одночастичного базиса. Например, при сферической симметрии $c \equiv (nlm)$. Амплитуды β_c характеризуют распределение пар по одночастичным уровням. Для сферически-симметричного базиса β_c не зависит от магнитных квантовых чисел.

Переходя к системам из протонов и нейтронов, определим операторы S_0^+ , S_{-1}^+ :

$$S_0^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{T}_{-1}, S_1^+]; \quad S_{-1}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{T}_-, S_0^+].$$

Заметим, что при $\beta_c = 1$ операторы S_1^+ , S_{-1}^+ , \hat{T}_ν и оператор числа частиц составляют алгебру пятимерного квазиспина [97].

Три оператора S_i^+ являются теперь теми элементами, из которых строится волновая функция системы, состоящей из $2n$ протонов и $2(n+T)$ нейтронов, т.е. имеющей в основном состоянии изоспин и его проекцию, равные T [98]:

$$\left. \begin{aligned} |n, T\rangle &= (R^+)^n (S_1^+)^T |0\rangle; \\ R^+ &= 2S_{+1}^+ S_{-1}^+ - (S_0^+)^2. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Легко видеть, что оператор R^+ обладает нулевым изоспином. Волновая функция (35) может быть использована не только для описания основных состояний ядер с изоспином T , но и для возбужденных состояний, изоспин которых равен $T+2$, $T+4$ и т.д.

Для удобства вычислений запишем явный вид функции (35) через операторы рождения нуклонных пар на одночастичных уровнях:

$$|n, T\rangle = \sum_{q+r+s=n} K(qrs, nT) |q, r, T+r, 2s\rangle. \quad (36)$$

Волновая функция (36) не нормирована, и в ней использовано обозначение

$$|q, r, T+r, 2s\rangle = \sum \left(\prod_q^q S_{1c_q}^+ S_{-1c_q}^- \right) \left(\prod_r^r S_{-1c_r}^- \right) \left(\prod_{1c_r'}^{T+r} S_{1c_r'}^+ \right) \left(\prod_{0c_s}^{2s} S_{0c_s}^+ \right) |0\rangle. \quad (37)$$

Сумма в (37) распространяется по всем перестановкам индексов, т.е. по всем одночастичным состояниям без повторений. Таким образом, функция (37) является суперпозицией компонентов, причем каждый из них соответствует ситуации, когда часть уровней занята четверками частиц (таких четверок q), другие уровни заполнены парами протонов (r штук), следующие парами нейтронов ($T+r$) и, наконец, имеются уровни, не совпадающие с предыду-

щими, на которых находятся протон-нейтронные пары (2 s). Амплитуда, с которой (37) входит в (36), определяется численным коэффициентом $k(qrs, nT)$:

$$k(qrs, nT) = (-1)^s 2^{r-q} \frac{n! (2n+2T+1)! (T+r)! (n+T-q)! (2s)!}{(n+T)! (2n+2T-2q+1)! s!}.$$

В [99] показано, что функция (36) может быть выделена из $(S_{-1}^{\pm})^n (S_{+1}^{\pm})^{n+T} |0\rangle$ с помощью проекции по изоспину. В свою очередь, каждая из функций $(S_{-1}^{\pm})^n |0\rangle$ или $(S_{+1}^{\pm})^{n+T} |0\rangle$ может быть получена из протонной или соответственно нейтронной БКШ-функции с помощью проекции на определенное число частиц. Поэтому $|n, T\rangle$ (36) является проекцией на состояние с определенным числом частиц и определенным изоспином произведения протонных и нейтронных БКШ-функций.

Прямое произведение $(S_{-1}^{\pm})^n (S_{+1}^{\pm})^{n+T} |0\rangle$ разлагается в ряд по функциям, имеющим изоспин $T+2n, T+2n-2, \dots, T$. Поскольку эти функции являются симметричными при перестановках пар $[a_c^{\pm} a_c^{\pm}]^{T=1}$, то они могут рассматриваться как элементы базиса симметричного представления некоторой алгебры. Можно показать, что такой алгеброй является $SU(3)$ [99], для построения которой воспользуемся операторами $b_v^{\pm}(c), b_{\bar{v}}(c)$:

$$b_v^{\pm}(c) = [a_c^{\pm} a_c^{\pm}]_{T_0=v}^{T=1} = \sum_{t_1, t_2} (1/2 \ 1/2 \ t_1 t_2 | 1 v) a_{t_1}^{\pm} a_{t_2}^{\pm}$$

и с их помощью введем генераторы I, Q :

$$I_{\pm} = \sqrt{2} \sum_c \{b_{\pm 1}^{\pm}(c) b_0(c) + b_0^{\pm}(c) b_{\mp 1}(c)\};$$

$$I_0 = \sum_{c, v} v b_v^{\pm}(c) b_v(c),$$

которые при действии на $|q, r, s, t\rangle$ (37) эквивалентны действию операторов изоспина,

$$Q_{\mu} = \sum_{c, v_1, v_2} (11 v_1 v_2 | 2 \mu) (-1)^{1+v_2} b_{v_1}^{\pm}(c) b_{-v_2}(c).$$

Алгебра операторов I, Q формально совпадает с алгеброй $SU(3)$ Эллиота, где операторы строятся из истинно бозонных операторов рождения и уничтожения осцилляторных квантов. Однако алгебра операторов I, Q реализуется только в применении к функциям базиса $|q, r, s, t\rangle$, которые являются собственными функциями операторов Q_0, I_0 : $Q_0 |q, r, s, t\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (r - 3s) |q, r, s, t\rangle$; $I_0 |q, r, s, t\rangle = (s - r) |q, r, s, t\rangle$. Таким образом, коэффициенты k в (36) можно рассматривать как элементы матрицы перехода от базиса с определенным значением оператора Q_0 к базису с определенным значением T^2 .

Из свойств представлений $SU(3)$ [100] следует, что функции типа (37), состоящие из $A/2$ операторов $b^+(c)$, могут иметь изоспины от $A/2$ и через две единицы до 0 или 1 в зависимости от четности числа $A/2$. При фиксировании значения T из этого набора выделяются состояния с $T, T+2, \dots, A/2$ (четность T совпадает с четностью $A/2$). Состояние с изоспином T есть основное, состояния с большими изоспинами — возбужденные, однако все они принадлежат одному и тому же представлению $SU(3)$, характеризующему симметричной схемой Юнга. В пределе очень больших констант спаривания они образуют «ротационную полосу основного состояния» с разностями энергий, пропорциональными $T(T+1)$.

Амплитуды β_c могут быть найдены из минимума функционала

$$\Phi = \langle n, T | H | n, T \rangle - E_0 \langle n, T | n, T \rangle; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_c} = 0. \quad (38)$$

Так как результат действия \hat{N}_c — оператора числа протонов и нейтронов на уровне c сведется к дифференцированию

$$\hat{N}_c | n, T \rangle = 2\beta_c \frac{\partial}{\partial \beta_c} | n, T \rangle,$$

то соотношение (38) может быть представлено в форме условия стационарности:

$$\langle n, T | H \{ \hat{N}_c - \langle \hat{N}_c \rangle \langle \cdot | \cdot \rangle^{-1} | n, T \rangle = 0, \quad (39)$$

где $\langle \cdot | \cdot \rangle$ и $\langle \hat{N}_c \rangle$ — соответственно нормировка и среднее от \hat{N}_c по $| n, T \rangle$ (36). Из (39) следует, что энергию основного состояния невозможно понизить, примешивая к функции (36) компоненты типа $\{ \hat{N}_c - \langle \hat{N}_c \rangle \langle \cdot | \cdot \rangle^{-1} | n, T \rangle$. Конкретный вид уравнений, следующих из (38), (39), зависит от используемого гамильтониана, в качестве которого ниже взят модельный гамильтониан, содержащий среднее поле и изоинвариантное спаривание, при этом среднее поле положено одинаковым для протонов и нейтронов:

$$\begin{aligned} H &= \sum_c \varepsilon_c \hat{N}_c - G \sum_t A_t^\dagger A_t; \\ A_t^\dagger &= S_t^\dagger | \beta_c = 1; \quad A_t = \sum_c a_{nc}^+ a_{nc}^- \end{aligned} \quad (40)$$

Вычисление среднего значения гамильтониана (40) приводит к выражению [98]:

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_c \left(\varepsilon_c \beta_c \frac{\partial}{\partial \beta_c} \langle \cdot | \cdot \rangle \right) - E_0 \langle \cdot | \cdot \rangle - \\ &- G \sum_q u(q, nT) \{ (T+2n+q) [q | 0 | T+2(n-q) | 0] + \\ &+ 2(2[q-1 | 1 | T+2(n-q) | 1] + [q-1 | 2 | T+2(n-q)-1 | 0] + \\ &+ [q | 0 | T+2(n-q)-1 | 2]); \end{aligned} \quad (41)$$

$$\langle | \rangle \equiv \langle n, T | nT \rangle = \sum_q u(q, nT) [q | 0 | T + 2(n - q) | 0];$$

$$u(q, nT) = \frac{(2n - 2q + T)! (n - q + T)!}{(2n - 2q + 2T + 1)! (n - q)! 4^q}.$$

Квадратные скобки вида $[a | b | c | d]$ в (41) представляют собой краткое обозначение симметричных полиномов относительно β :

$$[a | b | c | d] = \sum \prod^a \beta_{s_a}^4 \prod^b \beta_{s_b}^3 \prod^c \beta_{s_c}^2 \prod^d \beta_{s_d}, \quad (42)$$

суммирование в (42) производится по всем перестановкам неповторяющихся индексов, т. е. по всем уровням. С вычислительной точки зрения удобнее перейти к суммам полиномов, содержащих только квадраты и первые степени β :

$$[c | d] = \sum \prod^c \beta_{s_c}^2 \prod^d \beta_{s_d}. \quad (43)$$

Левая часть (43), но с одним или несколькими индексами $[c | d]_{f, \dots, h}$ означает, что в сумме по состояниям пропускаются уровни f, \dots, h . Выразим теперь Φ через полиномы (43):

$$\begin{aligned} \Phi = 2 \sum_t g_t^{(T)} \left\{ \sum_c \epsilon_c \beta_c^2 ([n + T + t | 0] [n - t - 1 | 0]_c + \right. \\ \left. + [n - t | 0] [n + T + t - 1 | 0]_c) - \frac{1}{2} (G [T + 3n + 2t(T + t)] + \right. \\ \left. + E_0) [n + T + t | 0] [n - t | 0] - G ([n + T + t - 1 | 2] [n - t | 0] + \right. \\ \left. + [n + T + t | 0] [n - t - 1 | 2]) \right\}; \quad (44) \end{aligned}$$

$$\langle | \rangle = \sum_t g_t^{(T)} [n + T + t | 0] [n - t | 0];$$

$$g_t^{(T)} = \delta_{t,0} - 2(1 - \delta_{t,0}) \frac{(T + 2t)(T + t)!(T + t - 1)!(2t - 2)!(2T + 1)!}{(T!)^2 t! (t - 1)! (2T + 2t + 1)!}. \quad (44a)$$

Результат варьирования (44) по β_c приведен в [98].

Уравнения (39) могут быть использованы для определения амплитуд β для основного состояния с изоспином T , а также для возбужденных с изоспином $T + 2\nu$. В этом случае удобнее находить β для состояний с $T_0 = T + 2\nu$, а затем, совершая сдвиг в изопространстве, переходить к исходному ядру с $T_0 = T$.

Если ввести операторы \tilde{S}_t^+ той же природы, что и S_t^+ , но с амплитудами, отличающимися от β :

$$\tilde{S}_t^+ = \sum_c \gamma_c S_{tc}^+, \quad \gamma_c \neq 1,$$

то при замене одного из S_t^+ в функции (35) на \tilde{S}_t^+ может быть построена функция простейшего возбужденного состояния с тем же изо-

спином, полным моментом $I^\pi = 0^+$ и нулевым сеньорити, поскольку нуклоны распределяются по уровням только парами. Такая функция для $T = 0$ может быть построена с помощью оператора $\hat{N}_c - \langle \hat{N}_c \rangle (\langle | \rangle)^{-1}$, что автоматически обеспечивает ортогональность функций основного (35) и возбужденного $|n, T\rangle^*$ состояний [98]:

$$|n, T\rangle^* = \sum_c \gamma_c [\hat{N}_c - \langle \hat{N}_c \rangle (\langle | \rangle)^{-1}] |n, T\rangle. \quad (45)$$

Из определения (45) следует, что эта функция может быть интерпретирована как парновибрационная, т. е. соответствующая малой вариации параметров β , характеризующих распределение пар по уровням в основном состоянии. Если $T \neq 0$, то вклад в функцию могут дать состояния, образованные векторной связью \hat{T}_{vc} (оператора изоспина в состоянии «с») и функции $|n, T\rangle$.

Если обозначить ω энергию возбужденного состояния, отсчитанную от основного, то уравнение для определения ω и амплитуд γ_c имеет вид

$$\sum_d \langle n, T | [\hat{N}_c - \langle \hat{N}_c \rangle (\langle | \rangle)^{-1}] (H - E_0 - \omega) [\hat{N}_d - \langle \hat{N}_d \rangle (\langle | \rangle)^{-1}] |n, T\rangle \gamma_d = 0.$$

Условие стационарности (39) позволяет упростить это уравнение:

$$\sum_d \{ \langle n, T | \hat{N}_c (H - E_0 - \omega) \hat{N}_d |n, T\rangle - \omega \langle \hat{N}_c \rangle \langle \hat{N}_d \rangle (\langle | \rangle)^{-1} \} \gamma_d = 0. \quad (46)$$

Среди решений уравнения (46) можно выделить «духовое», которое имеет $\omega = 0$ и все γ_c , равные некоторой константе. В методе случайной фазы это решение является следствием сохранения числа частиц, однако при выборе волновой функции возбужденных состояний в виде (45) и при $\gamma_c = \text{const}$ функция тождественно обращается в нуль.

При добавлении нейтрона в состояние m четно-четной системы с нулевым полным моментом, имеющей изоспин T и его проекцию $T_0 = T$, возникает состояние с полным моментом, равным моменту нечетного нуклона, и изоспином $T + 1/2$. Волновую функцию такого состояния можно записать в виде

$$\Psi_m(A + 1, T + 1/2) = a_{nm}^+ |n, T\rangle; \quad (47)$$

$$\left. \begin{aligned} & \langle \Psi_m(A + 1, T + 1/2) | \Psi_m(A + 1, T + 1/2) \rangle = \\ & = \sum_t g_t^{(T)} [n + T + t | 0]_m [n - t | 0]_m + \\ & + \beta_m^2 v_t^{(T+1/2)} [n - t - 1 | 0]_m; \\ & v_t^{(T+1/2)} = 2(T + 2t + 1)(T + t) [2T + \\ & + 2t + 3](T + 2t)^{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (47a)$$

коэффициент $g_t^{(T)}$ определен выше — см (44a).

При добавлении нечетного протона в состояние m четной системы с изоспином $T > 0$ изоспин основного и нижайших возбужденных одноквазичастичных состояний имеет минимально возможное значение $T - 1/2$:

$$\Psi_m(A+1, T-1/2) = \sum_t (1/2TtT_0 | T-1/2T-1/2) a_{tm}^+ | n, T \rangle_{T_0}; \quad (48)$$

$$\left. \begin{aligned} & \langle \Psi_m(A+1, T-1/2) | \Psi_m(A+1, T-1/2) \rangle = \\ & = \sum_t g_t^{(T)} [n-t | 0]_m ([n+T+t | 0]_m + \beta_m^2 v_t^{(T-1/2)} \times \\ & \times [n+T+t-1 | 0]_m); \\ & v_t^{(T-1/2)} = (2T+2t+1)(T+2t-1)[2(T+ \\ & + 2t)(T+t-1)]^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (48a)$$

В (48) предполагается, что $T > 0$, если же изоспин остова равен 0, то изоспин нечетной системы равен $1/2$, и волновая функция такой системы имеет вид (47). За счет присоединения нечетного нуклона должны несколько измениться амплитуды β по сравнению с амплитудами четного остова (эффект блокировки), однако для сферических ядер это изменение незначительно из-за в среднем достаточно больших вырождений одночастичных уровней $(j+1/2)$. Поэтому для сферических ядер можно не учитывать изменения амплитуд β и считать, что они определены из решения вариационных уравнений для соответствующей четной системы. Это означает, что учет эффекта блокировки производится только «геометрически» путем исключения во всех суммах уровня, занятого нечетной частицей.

Для получения энергий нечетных систем необходимо выполнить усреднение гамильтониана H по волновым функциям (47), (48). Окончательные выражения для энергий даны в [99].

В пределе $G \rightarrow \infty$ все амплитуды β равны некоторой константе, что приводит к выражению для полиномов в виде чисел сочетаний. Вычисление энергий дает тогда известные формулы пятимерной квазиспиновой модели [97]:

$$E(A, T) = -G \{(T+2n)(M+1-T-2n) + n(2T+2n+1)\}$$

$$(A = 4n + 2T; M - \text{полное число уровней});$$

$$E(A+1, T+1/2) = -G \{(T+2n)(M-T-2n) + 2n(T+n+1)\};$$

$$E(A+1, T-1/2) = -G \{(T+2n)(M-T-2n) + (2n+1)(T+n+0,5)\}.$$

Приведем здесь также еще один простой случай, а именно предел $G/\epsilon \rightarrow 0$ в двухуровневой модели, где ϵ — расстояние между уров-

ными и 2Ω -вырождение каждого уровня ($v = T + n - \Omega$, $4n = A - 2T$):

$$E(A, T) = 2v\epsilon - G [T + 3n - \Omega (n - v) - n^2 - v^2 - \Omega (\Omega - v - n) \beta].$$

Амплитуды в этой модели определяются следующим образом: для нижнего уровня $\beta^u = 1$, а для верхнего $\beta^v = \beta$. Аналитические выражения для β и энергии нечетных систем даны в [99].

Сравнение точных и приближенных собственных значений инвариантного гамильтониана. Чтобы получить представление о точности рассматриваемого метода, в [98] были вычислены энергии состояний с $T = 0, 2, 4$ и $I^\pi = 0^+$. При этом был использован модельный гамильтониан со спаривательными силами (40), действующими между нуклонами, которые распределяются по двум 2Ω -вырожденным уровням ($\Omega = j + 1/2$), разделенным интервалом ϵ .

В этой модели амплитуда для нижнего уровня положена равной единице, тогда каждому значению β для верхнего уровня из интервала $0 - 1$ с помощью уравнений (39) ставится в соответствие значение G . При таком способе не приходится решать систему нелинейных уравнений для нахождения β . Полученная функциональная зависимость G от β используется затем для определения E_0 при каждом значении изоспина.

При $G \rightarrow 0$ амплитуда β также стремится к нулю, и в этом пределе разности энергий соответствуют значениям модели независимых частиц: $E_0^{(T=4)} - E_0^{(T=0)} = 4\epsilon$, $E_0^{(T=2)} - E_0^{(T=0)} = 2\epsilon$. Как уже отмечалось, при $\beta \rightarrow 1$, т.е. при $(G/\epsilon) \rightarrow \infty$, двухуровневая модель точно переходит в модель квазиспина [97], и поэтому при больших G модель имеет ротационный предел.

Внутри этого интервала изменения константы G значения энергии были найдены с помощью диагонализации гамильтониана в [101]. Расчеты при $\Omega = 5$, $\Omega = 10$ и при полном числе частиц, равном 4Ω , когда при $G = 0$ нуклоны целиком заполняют нижний уровень, дают результаты, очень близкие к результатам точных расчетов, что показано на рис. 17. При этом для $G \gtrsim G_{кр} = \epsilon/2\Omega$ различие между β для разных значений изоспина очень невелико (рис. 18), что позволяет приближенно оценить энергию состояний с произвольными T , зная β для $T = 0$.

Энергия возбужденного парновибрационного состояния с $T = 0$, $I^\pi = 0^+$ в двухуровневой модели также может быть найдена без решения системы уравнений (46), так как достаточно положить амплитуду γ для нижнего уровня равной нулю, а для верхнего — единице. Результаты расчетов показывают удовлетворительное согласие с точным решением.

Расчеты для модельных систем, соответствующих ^{40}Ca и ^{52}Fe , были выполнены в [102] на основе гамильтониана (40) с набором четырех одночастичных уровней и константой $G = 24/A$ МэВ, т.е.

при тех же условиях, как и в работе [103], где для этих систем было найдено точное решение. В табл. 4 приведены значения корреляционных энергий E_c , вычисленных вышеизложенным проекционным методом в [102], и точные значения из [103].

Таблица 4. Корреляционные энергии при $G=24/A$ МэВ

T	E_c , МэВ					
	A = 48			A = 52		
	Точный расчет [103]	Проекционный метод [102]	Погрешность, %	Точный расчет [103]	Проекционный метод [102]	Погрешность, %
0	9,20	9,19	0,1	9,49	9,41	0,8
2	7,40	7,25	2,0	7,76	7,30	6,0

Из таблицы видно, что при $T = 0$ имеется почти полное согласие с точными расчетами, в то время как при $T = 2$ расхождение составляет 2 — 6 %. Это может свидетельствовать о том, что при $T > 0$

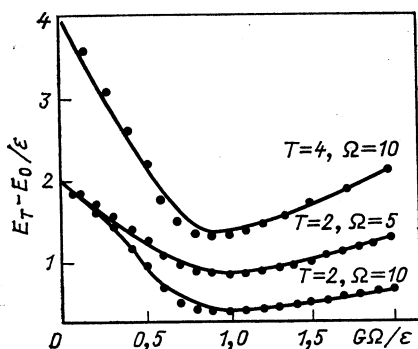


Рис. 17. Энергии уровней, отсчитанные от энергии основного состояния [98]: точное решение — сплошная линия; МПДВ — точки

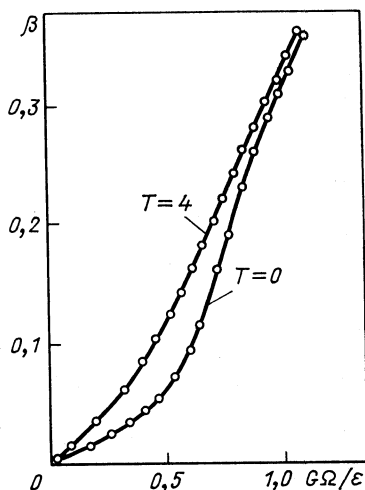


Рис. 18. Зависимость β от $G\Omega/\varepsilon$ ($\Omega = 10$) [98]

излагаемый метод, возможно, нужно уточнить введением дополнительной степени свободы для избыточных нейтронов.

Удовлетворительное согласие результатов точного расчета и проекционного метода, основанного на использовании обобщения функции Моттлессона, показывает, что и в данном случае этот метод достаточно точен, во всяком случае для изоинвариантного спаривания с $T = 1$.

Таблица 5. Использованные в расчетах энергии одночастичных уровней [104]

Уровень	$1d_{5/2}$	$2s_{1/2}$	$1d_{3/2}$	$1f_{7/2}$	$2p_{3/2}$	$1f_{5/2}$	$2p_{1/2}$	$1g_{9/2}$
$E, \text{ МэВ}$	-5,9	-5,7	-4,9	-2,4	2,4	4,15	4,3	7,35

Улучшение описания системы, которое дает проекционные методы по сравнению со сверхтекучей моделью, проявляется при сравнении корреляционных энергий (E_c), вычисленных этими двумя методами. На рис. 19 приведено значение E_c [102] в зависимости от G .

Расчеты выполнены для ^{48}Cr и ^{56}Ni с использованием восьми уровней, энергии которых взяты из [104] и приведены в табл. 5, т.е. в качестве инертного остова было взято ядро ^{16}O . Из рис. 19 видно, что учет сохранения числа частиц и изотопического спина заметно увеличивает E_c , что особенно ярко проявляется при $G < G_{\text{кр}}$, когда в сверхтекучей модели $E_c = 0$ ($G_{\text{кр}} = 0,401 \text{ МэВ}$ для ^{56}Ni).

Парные энергии ядер. Изложенный выше изотопически-инвариантный формализм может быть использован для расчета протонных (P_Z) и нейтронных (P_N) парных энергий в достаточно легких ядрах. Для их эмпирического определения служит известная формула, включающая энергии связи B четырех ядер, которая, например, для нейтронов имеет вид

$$P_N(N, Z) = \frac{1}{4} \{3B(N, T) - 3B(N-1, Z) + B(N-2, Z) - B(N+1, Z)\}. \quad (49)$$

Обычно протонное и нейтронное спаривательные взаимодействия считаются независимыми, поэтому из P_Z и P_N определяют две константы G_Z и G_N . Большой материал, накопленный за годы изучения парных корреляций в ядрах, привел к выводу, что в ядрах с $T_0 \gg 0$ протонная константа G_Z больше нейтронной G_N . Часто это различие констант выражают формулами [104—107]:

$$G_Z = \frac{g_0}{A} \left\{ 1 + g_1 \frac{N-Z}{A} \right\}; \quad (50)$$

$$G_N = \frac{g_0}{A} \left\{ 1 - g_1 \frac{N-Z}{A} \right\}, \quad (50a)$$

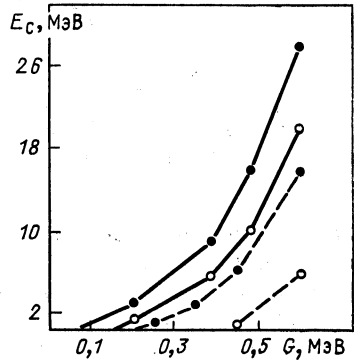


Рис. 19. Зависимость корреляционной энергии E_c от G [102]: ● — МПДВ; ○ — сверхтекучая модель; — — — ^{48}Cr ; — — — ^{56}Ni

где $g \simeq 0,75$ для ядер $A \sim 60$ [104] и $g_1 \simeq 0,3$ для ядер $A > 150$ [107]. Результаты анализа парных энергий, приведенные в [6], показывают, что для средних и тяжелых ядер $G_Z/G_N \simeq 1,15$. На рис. 20 приведены результаты анализа парных энергий в области ядер вблизи Ni. Экспериментальные данные о массах ядер [108] и одночастичная схема уровней (табл. 5) были использованы для поиска таких значений G_Z и G_N , при которых теоретические значения P_Z и P_N совпадают с экспериментальными. На рисунке приведена величина g , T , которая согласно (50) является мерой различия констант.

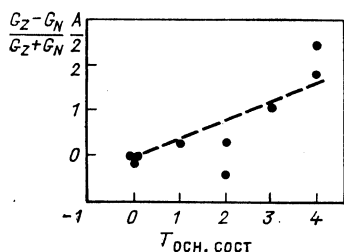


Рис. 20. Зависимость $(A/2)(G_Z - G_N)/(G_Z + G_N)$ от изоспина [99]:

точки соответствуют ^{52}Fe , ^{58}Ni , ^{60}Zn ($T = 0$); ^{58}Ni ($T = 1$); ^{52}Cr , ^{56}Fe ($T = 2$); ^{56}Fe ($T = 3$); ^{86}Cr , ^{80}Fe ($T = 4$); пунктир соответствует прямой $g_1 T$, $g_1 = 0,44$

Видно, что при изоспинах $T = 0 \div 2$ различие констант несущественно, однако уже при $T = 4$ различие их заметно.

Эмпирическая закономерность $G_Z > G_N$ может быть интерпретирована как отражение относительно большего размытия протонного распределения около уровня Ферми по сравнению с нейтронным, т.е. можно считать, что при обычном описании парных корреляций увеличение сверхтекучести протонов достигается благодаря увеличению G_Z . По-видимому, альтернативным способом описания этого явления был бы явный учет остаточных протон-нейтронных взаимодействий. Если мы ограничиваемся моделью, включающей среднее поле и частично-частичное монополярное взаимодействие, то протон-нейтронная часть этого взаимодействия дает нам в случае $T > 0$ добавочное взаимодействие протонов с нейтронным избытком, обеспечивая «вытягивание» протонов на уровни нейтронного избытка, т.е. добавочную размытость протонного распределения.

Можно получить оценки этого эффекта в упомянутой выше двухуровневой модели, которая отражает некоторые свойства реальных ядер, когда группа уровней вблизи уровня Ферми разделена энергетическим интервалом, большим по сравнению с расстояниями между другими уровнями. Для этой модели в [99] были проведены расчеты P_Z и P_N с изоинвариантным спариванием (40) и с использованием описанного выше проекционного метода для четных и нечетных систем. Расчеты в [99] выполнены для интервала изменения спаривательной константы от $G_{\text{кр}} = \varepsilon/2\Omega$ до $4G_{\text{кр}}$ (ε — интервал между уровнями, 2Ω — кратность вырождения). В [99] было положено $\Omega = 10$.

Отношения P_Z/P_N в зависимости от G даны в табл. 6. Из таблицы видно, что в достаточно широком интервале изменения константы с

Таблица 6. Отношение протонных и нейтронных парных энергий в зависимости от G/ϵ [99]. A — число валентных нуклонов в двухуровневой модели

A	T	G/ϵ			
		0,06	0,10	0,15	0,20
46	7	1,20	1,13	1,08	1,06
44	6	1,15	1,09	1,06	1,04
42	5	1,08	1,04	1,02	1,01

ростом изоспина происходит увеличение P_Z по сравнению с P_N . При анализе парных корреляций, не учитывающем изотопическую инвариантность, обычно делается предположение, что P_Z (P_N) не зависят от числа нейтронов (протонов). Как видно из табл. 7,

Таблица 7. Зависимость протонных (нейтронных) парных энергий P и разностей энергий квазичастичных уровней $\Delta E_{Z, N}$ от изоспина при фиксированном Z (N) [99]

A	T	P_Z	ΔE_Z	A	T	P_N	ΔE_N
48	8	0,906	0,226	40	8	0,835	0,598
46	7	0,903	0,230	42	7	0,831	0,604
44	6	0,899	0,235	44	6	0,827	0,610
42	5	0,894	0,241	46	5	0,822	0,615

модельные расчеты в [99] подтверждают это предположение; при изменении числа нейтронов (протонов) на 6 единиц P_Z (P_N) изменяются не более чем на 2 %. В этой же таблице даны разности энергий одночастичных уровней, которые при фиксированном Z или N оказываются почти постоянными.

Для проверки предположения о дополнительном размытии протонных распределений необходимо проанализировать полученные в результате изотопически-инвариантного расчета P_Z и P_N с точки зрения обычной сверхтекучей модели, а именно принять теоретические значения за наблюдаемые и искать такие G_Z и G_N , которые воспроизвели бы эти «наблюдаемые» значения в рамках сверхтекучей модели. Для расчета использован интервал $G = (2 \div 4) G_{кр}$, который примерно соответствует интервалу изменения G в сверхтекучих ядрах. Найденные абсолютные значения констант близки к значению G , причем при $T > 0$ протонная константа G_Z превышает нейтронную G_N ($G_Z > G > G_N$). Этот факт подтверждает предположение о влиянии нейтронного избытка на протонное распределение.

Значения G_Z и G_N растут вместе с G , но их отношение остается практически постоянным, поэтому в табл. 8 приведены G_Z/G_N при

Таблица 8. Значения отношений G_Z/G_N , воспроизводящих парные энергии P_Z , P_N в рамках сверхтекучей модели [99]

A	46		44		42	
T	7	5	8	6	7	5
$\frac{G_Z}{G_N}$	1,08	1,05	1,08	1,05	1,06	1,05

Примечание. Парные энергии получены при $G = (2 \div 4) G_{кр}$ (см. текст).

$G = 4G_{кр}$. Эти расчеты имеют, конечно, модельный характер, однако демонстрируемое в таблице увеличение G_Z/G_N с ростом T (примерно 1 % на единицу ΔT) свидетельствует о том, что определенный вклад в наблюдаемое различие G_Z и G_N могут дать протон-нейтронные корреляции, которые не учитываются при обычном рассмотрении парных сил.

Расчеты P_Z и P_N в более реалистической многоуровневой модели были выполнены в [102]. В этой работе исследовался вопрос о том, может ли объяснить изоинвариантное спаривание эмпирические парные энергии реальных ядер с $Z = 24 \div 32$, т.е. изотопов хрома, железа, никеля, цинка и германия. Расчеты проводились с гамилтонианом (40) и функциями (35), (47), (48), при этом для протонов и нейтронов во всех ядрах была принята одна и та же схема одночастичных уровней, приведенная в табл. 5.

Эмпирические значения парных энергий определялись в основном с помощью стандартного выражения (49) и его аналога для протонов. Как известно, в (49) исключаются плавные зависимости от Z и N , однако могут содержаться оболочечные эффекты. Действительно, если в модели независимых частиц N -й и $(N-1)$ -й нейтроны находятся в одной j -оболочке, а $(N+1)$ -й в следующей j' , то (49) даст значение $1/4 (\epsilon_{j'} - \epsilon_j)$. Поэтому в тех случаях, когда в модели независимых частиц $P_N(N, Z) \neq 0$, теоретическое значение $P_N(N, Z)$ будет существенно зависеть от разности энергий между оболочками, которые определены недостаточно точно. В таких случаях, чтобы исключить этот эффект, используется другое определение:

$$P_N^*(N, Z) = \frac{1}{4} \{3B(N-2, Z) - 3B(N-1, Z) + \\ + B(N, Z) - B(N-3, Z)\}.$$

Это выражение также исключает плавные зависимости от N , Z , как и (62), но дает нулевой результат в модели независимых частиц, если $(N - 3)$ -й и N -й нейтроны находятся в одной оболочке.

Проведенные в [102] расчеты показали, что эмпирические значения P_Z и P_N в одном и том же ядре могут быть одновременно воспроизведены с достаточной точностью с помощью одной константы G в рамках принятого гамильтониана. Качество описания парных энергий демонстрирует рис. 21, где даны P_Z , P_N в зависимости от T

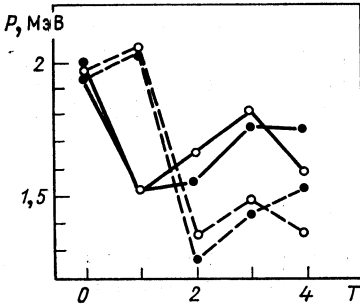


Рис. 21. Изоспиновая зависимость парных энергий изотопов железа [102]:

сплошные линии — P_Z ; пунктирные — P_N ; ● — экспериментальные значения; ○ — теоретические

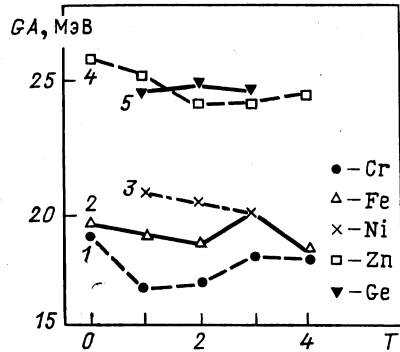


Рис. 22. Значения GA [102] для различных изотопов

для изотопов железа. Согласие эксперимента с теорией в указанных выше ядрах достигнуто в [102] при значениях G , которые изменяются от ядра к ядру, что, по-видимому, отражает схематичность используемого гамильтониана.

Найденные из сравнения эмпирических и теоретических парных энергий константы G , домноженные на массовое число, представлены на рис. 22 в виде зависимости $GA = g$ от изоспина для разных Z . Значения констант, полученные в [102], оказываются в среднем меньшими, чем найденное в [17] значение $g \approx 30$ МэВ. Это сокращение связано с расширением числа уровней в вычислениях [102] по сравнению с [17], где использовали только три уровня $1f_{7/2}$, $2p_{3/2}$, $1f_{5/2}$. Рис. 22 показывает также, что имеется небольшое уменьшение g с ростом изоспина (2 % на единицу изменения T). Этот факт может свидетельствовать о роли изоскалярных протон-нейтронных корреляций, не учитываемых в модельном гамильтониане (40).

Сравнение полученных значений G с критическими значениями в сверхтекучей модели [$G_{кр}(N = 28) = 0,401$ МэВ и $G_{кр}(N = 32) = 0,285$ МэВ] показывает, что в рассматриваемых ядрах имеет ме-

сто случай слабых парных корреляций, когда описание в рамках сверхтекучей модели может содержать большие погрешности.

Используя найденные значения констант, в [102] были рассчитаны числа заполнения оболочечных уровней протонами и нейтронами n_j . С ростом изоспина обнаруживается отмеченная выше тенденция «вытягивания» протонов на уровни, занятые избыточными нейтронами. Сравнение n_j с числами заполнения, которые дает сверхтекучая модель при тех же значениях констант, n_j (БКШ) показывает, что для ядер с незаполненными при $T = 0$ оболочками (^{48}Cr , ^{52}Fe , ^{60}Zn), для которых $G_{\text{кр}} = 0$, n_j (БКШ) практически совпадает с n_j . В ^{64}Ge ($G = 0,35 \text{ МэВ} \simeq 1,5 G_{\text{кр}}$) сверхтекучая модель дает большее размытие границы Ферми, чем теория с точным сохранением числа частиц и изоспина. Однако даже в тех случаях, когда сверхтекучая модель дает n_j (БКШ) $\simeq n_j$, в рассмотренных ядрах она приводит к значительным флуктуациям числа частиц $\Delta A \simeq 4$ и изоспина $\Delta T^2 \simeq 9$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В последние годы метод точного проектирования по числу частиц получает все более широкое применение. Это связано с разработкой простого способа вычисления корректирующих функций, использующего рекуррентные соотношения. Таким образом, удается довольно легко восстановить симметрию, нарушенную в методе канонического преобразования, что приводит во многих случаях не только к количественным, но и к качественным изменениям в интерпретации экспериментальных результатов.

Эффекты точного сохранения числа частиц наиболее ярко проявляются при изучении явлений, в которых спаривание между нуклонами по тем или иным причинам ослаблено, поэтому распространение проекционных методов на более широкий класс таких явлений, включая α -распад из низколежащих многоквaziчастичных состояний, ядерный эффект Джозефсона, реакции двухнуклонных передач в парновибрационные состояния, представляет несомненный интерес для дальнейшего изучения роли спаривания между нуклонами в атомных ядрах.

Авторы искренне благодарны И. Н. Михайлову, В. И. Исакову, И. А. Митропольскому за полезные обсуждения и Ю. П. Суслову, В. О. Нестеренко, Р. Б. Панину, А. К. Власникову за плодотворное сотрудничество.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bardeen J., Cooper L. N., Schriffer J. R. // Phys. Rev. 1957. Vol. 10. P. 1173—1178.
2. Боголюбов Н. Н. // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 58—64; Bogolubov N. N. // Nuovo cimento. 1958. Vol. 7. P. 794—801.
3. Valatin J. G. // Nuovo cimento. 1958. Vol. 7. P. 843—848.

4. **Baymann V. F.**//Nucl. Phys. 1960. Vol. 15. P. 33—39.
5. **Боголюбов Н. Н.**//ДАН СССР. 1958. Т. 119. С. 244—246.
6. **Соловьев В. Г.** Теория сложных ядер. М.: Наука, 1971.
7. **Kerman A. K., Lawson R. D., Macfarlane M. H.**//Phys. Rev. 1961. Vol. 124. P. 162—173.
8. **Hogaasen-Feldman L.**//Nucl. Phys. 1961. Vol. 28. P. 258—262.
9. **Павликовский А., Рыбарска В.**//ЖЭТФ. 1962. Т. 43. С. 543—548.
10. **Nilsson S. G.**//Nucl. Phys. 1964. Vol. 55. P. 97—103.
11. **Rho M., Rasmussen J.**//Phys. Rev. 1964. Vol. B135. P. 1295—1302.
12. **Mang H. J., Poggenburg J. K., Rasmussen J. O.**//Nucl. Phys. 1965. Vol. 64. P. 353—378.
13. **Mang H., Rasmussen J., Rho M.**//Phys. Rev. 1966. Vol. B141. P. 941—948.
14. **Richardson R. W., Sherman N.**//Nucl. Phys. 1964. Vol. 52. P. 221—238; Phys. Lett. 1965. Vol. 14. P. 325—329.
15. **Richardson R. W.**//Phys. Rev. 1966. Vol. B141. P. 949—956.
16. **Hara K.**//Nucl. Phys. 1967. Vol. A95. P. 385—389.
17. **Bes D. R., Maqueda E. E., Perazzo R. P. J.**//Nucl. Phys. 1973. Vol. A199. P. 193—201.
18. **Siegal C. D., Sorensen R. A.**//Nucl. Phys. 1972. Vol. A184. P. 81—89.
19. **Dalafi H. R.**//Phys. Lett. 1973. Vol. 44B. P. 327—331.
20. **Mikhailov I. N.**//Acta Phys. Polon. 1963. Vol. 24. P. 419—424; **Михайлов И. Н.**//ЖЭТФ. 1961. Т. 45. С. 1103—1107.
21. **Nogami Y.**//Phys. Rev. 1963. Vol. 134. P. 313—317.
22. **Sorensen R. A.**//Phys. Lett. 1972. Vol. 38B. P. 376—380.
23. **Gozdz A., Pomorski K.**//Nucl. Phys. 1986. Vol. A451. P. 1—11.
24. **Dietrich K., Mang H. J., Pradal J. H.**//Phys. Rev. 1964. Vol. B135. P. 22—34.
25. **Ottaviani L., Savoia M.**//Phys. Rev. 1969. Vol. 178. P. 1594—1596; Nuovo cimento. 1970. Vol. A67. P. 630—640.
26. **Gambhir Y. K., Rimini A., Weber T.**//Phys. Rev. 1969. Vol. 188. P. 1573—1582.
27. **Lorazo B.**//Phys. Lett. 1969. Vol. 29B. P. 150—154; Nucl. Phys. 1970. Vol. A153. P. 255—276; Ann. Phys. 1975. Vol. 92. P. 95—141.
28. **Allaart K., Boeker E.**//Nucl. Phys. 1971. Vol. A168. P. 630—662; Nucl. Phys. 1972. Vol. A198. P. 33—66.
29. **Allaart K., Gunsteren W. F. van**//Nucl. Phys. 1974. Vol. A234. P. 53—60.
30. **Кузьменко Н. К., Михайлов В. М.**//Изв. АН СССР. Сер. физ. 1973. Т. 37. С. 1911—1919.
31. **Mottelson B. R.** The Many Body Problem. Lond.—NY—Paris. 1959. P. 283—315.
32. **Kerman A. K.**//Ann. Phys. 1961. Vol. 12. P. 300—309.
33. **Talmi I.**//Nucl. Phys. 1971. Vol. A172. P. 1—9. **Shlomo S., Talmi I.**//Nucl. Phys. 1972. Vol. A198. P. 81—108.
34. **Egmond A. van, Allaart K.**//Progr. in Part. and Nucl. Physics. 1983. Vol. 9. P. 405—430.
35. **Allaart K.** Interacting Bose-Fermi Systems in Nuclei. N.Y. and Lond. 1979. P. 201—208.
36. **Кузьменко Н. К., Михайлов В. И., Суслов Ю. П.**//Изв. АН СССР. Сер. физ. 1976. Т. 40. С. 690—701.
37. **Chin W. M., Rasmussen J. O.**//Phys. Rev. 1977. Vol. C16. P. 1179—1184.
38. **Кузьменко Н. К., Михайлов В. М., Нестеренко В. О.**//Изв. АН СССР. 1986. Т. 50. С. 1914—1920; **Kuzmenko N. K., Mikhailov V. M., Nesterenko V. O.** Preprint JINR E4-86-288. Dubna, 1986.
39. **Zeng J. Y., Cheng T. S.**//Nucl. Phys. 1983. Vol. A405. P. 1—28. **Zeng J. Y., Cheng T. S., Cheng L., Wu C. S.**//Nucl. Phys. 1983. Vol. A411. P. 49—64.

40. Бор О., Моттelson Б. Структура атомного ядра: Пер. с англ. М.: Мир, 1977. Т. 2.
41. Кузьменко Н. К., Михайлов В. М.//Изв. АН СССР. Сер. физ. 1980. Т. 44. С. 942—948.
42. Ward T. E., Haustein P. E.//Phys. Rev. Lett. 1971. Vol. 27. P. 685—692.
43. Chu Y. Y., Haustein P. E., Ward T. E.//Phys. Rev. 1972. Vol. C6. P. 2259—2263.
44. Khoo T. L., Berntal F. M., Robertson R. G. H. e.a.//Phys. Rev. Lett. 1976. Vol. 37. P. 823—828.
45. Iachello F., Talmi I.//Revs. Mod. Phys. 1987. Vol. 59. P. 339—361.
46. Dzhelapov B. S., Shestopalova S. A.//Proc. Dubna Symposium Nucl. Structure. Vienna: IAEA 1968. P. 39—57.
47. Пятов Н. И.//Проблемы современной ядерной физики. М.: Наука, 1972. С. 141—157.
48. Войнова Н. А.//Изв. АН СССР. Сер. физ. 1977. Т. 41. С. 1558—1564.
49. Войнова-Елисеева Н. А., Митропольский И. А.//ЭЧАЯ. 1986. Т. 17. Вып. 6. С. 1173—1230.
50. Ragnarsson I., Broglia R. A.//Nucl. Phys. 1976. Vol. A263. P. 315—322.
51. Железнова К. М., Пятов Н. И., Черней М. И.//Изв. АН СССР. Сер. физ. 1967. Т. 31. С. 550—567.
52. Abdulvagabova S. K., Ivanova S. P., Pyatov N. I.//Phys. Lett. 1972. Vol. B38. P. 215—219.
53. Birbrair B. L., Voinova N. A., Smirnova N. S.//Nucl. Phys. 1975. Vol. A251. P. 169—174.
54. Chasman B. R.//Phys. Rev. Lett. 1979. Vol. 42. P. 630—639.
55. Belyaev S. T., Rumiantsev B. A.//Phys. Lett. 1969. Vol. B30. P. 444—445.
56. Абдулвагабова С. К., Телицын В. Б., Шульц Г.//Изв. АН СССР. Сер. физ. 1975. Т. 39. С. 1701—1708.
57. Беляев С. Т.//ЯФ. 1966. Т. 4. С. 936—952.
58. Bohr A.//Nuclear Structure Dubna Symposium. Vienna: IAEA; 1968. P. 179.
59. Bes D. R., Broglia R. A.//Nucl. Phys. 1966. Vol. 80. P. 289—313.
60. Bes D. R., Broglia R. A., Perazzo R. P. J., Kumar K.//Nucl. Phys. 1970. Vol. A143. P. 1—11.
61. Krieger S. J., Goeke K.//Nucl. Phys. 1974. Vol. A234. P. 269—275.
62. Кузьменко Н. К., Михайлов В. М.//14 Сопещение по ядерной спектроскопии и теории ядра. Дубна: Изд ОИЯИ, 1975. С. 23.
63. Кузьменко Н. К., Михайлов В. М.//Изв. АН СССР. Сер. физ. 1979. Т. 43. С. 2082—2090.
64. Mottelson B. R., Valatin J. G.//Phys. Rev. Lett. 1960. Vol. 5. P. 511—519.
65. Johnson A., Ryde H., Sztarkier J.//Phys. Lett. 1971. Vol. 34B. P. 605—611.
66. Johnson A., Ryde H., Hjorth S. A.//Nucl. Phys. 1972. Vol. A179. P. 753—772.
67. Beusher H., Davidson W. F., Lieder R. M. e.a.//Phys. Lett. 1972. Vol. 40B. P. 449—453.
68. Thierberger P., Synar A. W., Roger P. C. e.a.//Phys. Rev. Lett. 1972. Vol. 28. P. 1972—1975.
69. Stephens F. S., Simon R. S.//Nucl. Phys. 1972. Vol. A183. P. 257—284.
70. Sorensen R. A.//Revs. Mod. Phys. 1973. Vol. 45. P. 352—377.
71. Johnson A., Szymanski Z.//Phys. Rep. 1973. Vol. C7. P. 181—222.
72. Faessler A.//Nukleonika. 1975. Vol. 20. P. 57—84.
73. Faessler A.//Rep. Progr. Phys. 1982. Vol. 45. P. 653—725.
74. Stephens F. S., Kleinheinz P., Sheline B. K. e.a.//Nucl. Phys. 1974. Vol. A222. P. 235—246.
75. Faessler A., Lin L., Wittman F.//Phys. Lett. 1973. Vol. 44B. P. 127—131.

75. Faessler A., Grummer F., Lin L. e.a.//Phys. Lett. 1974. Vol. 48B. P. 87—91.
76. Damgaard J., Faessler A.//Nucl. Phys. 1975. Vol. A243. P. 492—450.
77. Grummer F., Schmid K. W., Faessler A.//Nucl. Phys. 1975. Vol. A239. P. 289—301.
78. Krumlinde J., Szchymanski Z.//Ann. Phys. 1973. Vol. 79. P. 201—217.
79. Damgaard J., Faessler A.//Phys. Lett. 1973. Vol. 43B. P. 157—161.
80. Banarjee B., Mang H. J., Ring P.//Nucl. Phys. 1973. Vol. A215. P. 366—375.
81. Bengtsson R., Hakansson H. B.//Nucl. Phys. 1981. Vol. A357. P. 61—83.
82. Frauendorf S.//Nucl. Phys. 1976. Vol. A230. P. 150—161.
83. Edigo J. L., Ring P.//Nucl. Phys. 1982. Vol. A388. P. 19—36.
84. Edigo J. L., Ring P., Iwasaki K. S. e.a.//Phys. Lett. 1985. Vol. 154B. P. 1—11.
85. Canto L. F., Ring P., Rasmussen J. O.//Phys. Lett. 1985. Vol. 161B. P. 21—28.
86. Chu S. Y., Krumlinde J., Marshslek E. R. e.a.//Phys. Rev. 1975. Vol. C12. P. 1017—1034.
87. Chan K. Y., Valatin J. G.//Nucl. Phys. 1966. Vol. 82. P. 222—234.
88. Edigo J. L., Ring P.//Nucl. Phys. 1984. Vol. A423. P. 93—99.
89. Goswami A., Lin L., Struble G.//Phys. Lett. 1967. Vol. 25B. P. 451—454.
90. Ring P., Beck R., Mang H. J.//Z. Phys. 1970. Vol. A231. P. 10—25.
91. Bohr A.//Varenn Lectures. 1976. Vol. 69. P. 1.
92. Nikam R. S., Ring P., Canto L. F.//Z. Phys. 1986. Vol. A324. P. 241—242.
93. Nikam R. S., Ring P., Canto L. F.//Phys. Lett. 1987. Vol. 185B. P. 269—274.
94. Canto L. F., Donangelo R., Nikam R. S., Ring P.//Phys. Lett. 1987. Vol. B192. P. 4—8.
95. Schmid K. W., Grummer F.//Rep. Progr. Phys. 1987. Vol. 50. P. 731—781.
96. Джолос Р. В., Картавенко В. Г.//ЯФ. 1974. Т. 19. С. 965—976.
97. Ichimura M.//Progr. Nucl. Phys. 1968. Vol. 10. P. 309.
98. Михайлов В. М., Шемаев Ю. П.//Изв. АН СССР. Сер. физ. 1977. Т. 41. С. 1596—1602.
99. Михайлов В. М., Суслов Ю. П., Кузьменко Н. К.//Изв. АН СССР. Сер. физ. 1979. Т. 42. С. 2305—2314.
100. Хамермеш М. Теория групп: Пер. с англ. М.: Мир, 1966.
101. Dussel G. G., Maqueda E. E., Perazzo R. P. J.//Nucl. Phys. 1970. Vol. A153. P. 469—477.
102. Власников А. К., Михайлов В. М.//Изв. АН СССР. Сер. физ. 1981. Т. 45. С. 18—22.
103. Chen H. T., Muther H., Faessler A.//Nucl. Phys. 1978. Vol. A297. P. 445—454.
104. Sorensen B.//Nucl. Phys. 1969. Vol. A134. P. 1—31.
105. Nilsson S. G., Tsang C. F., Sobiczewski A. e.a.//Nucl. Phys. 1969. Vol. A131. P. 1—66.
106. Вдовин А. И., Комов А. Л., Малов Л. А.//Препринт ОИЯИ Р4-5125. Дубна, 1970.
107. Kumar K., Remaud B., Auger P. e.a.//Phys. Rev. 1977. Vol. C16. P. 1235—1248.
108. Wapstra A. H., Bos K.//ADNDT.1977. Vol. 19. P. 177.