

КВАЗИТОЧНОРЕШАЕМЫЕ МОДЕЛИ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

А. Г. Ушверидзе

Институт физики АН ГССР, Тбилиси

Предлагается общий подход к проблеме квазиточнорешаемости в квантовой механике. Построен широкий класс квазиточнорешаемых моделей, для которых спектральная задача может быть решена точно лишь для ограниченных участков спектра.

The general approach to the problem of quasi-exactly-solubility in quantum mechanics is proposed. A wide class of quasi-exactly-solvable models, for which the spectral problem only for the finite part of the spectrum can be solved exactly, is constructed.

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, сколь важную роль в квантовой теории играют точнорешаемые модели. Во-первых, они интересны сами по себе как модели реальных физических систем. Во-вторых, их можно использовать в качестве нулевых приближений при построении теории возмущений. К сожалению, количество известных в настоящее время точнорешаемых моделей весьма ограничено, и поэтому область применимости теории возмущений в квантовой физике все еще остается довольно узкой.

Естественные попытки найти новые точнорешаемые модели наталкиваются на серьезные трудности, поскольку требование точной решаемости, обычно понимаемое как возможность предъявления всего спектра гамильтониана в замкнутом виде, является слишком жестким. Это обстоятельство наводит на мысль попытаться понизить требования и поискать модели, для которых спектральная задача решалась бы точно, но не для всего спектра, а лишь для некоторого ограниченного его участка. Легко видеть, что такие модели оказались бы не менее полезными, чем точнорешаемые. Подобно последним их с успехом можно было бы использовать для моделирования различных физических ситуаций. Кроме того, они несомненно нашли бы применение и в теории возмущений, для построения которой, как известно, вовсе не нужно знать весь спектр невозмущенной задачи [1]. Наконец, они могли бы иметь также и самостоятельную ценность, если с их помощью удалось бы увидеть воочию возникновение различных «непертурбативных» эффектов, изучение которых, как правило, весьма затруднительно.

В дальнейшем подобные модели мы условимся называть квазиточнорешаемыми, а под их порядком будем понимать количество состояний, для которых спектральная задача может быть решена точно.

Заметим, что одномерные квазиточнорешаемые модели первого порядка известны уже давно [1,2]. Процедура их построения — тривиальна. Достаточно в уравнении Шредингера

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x) \quad (1a)$$

явно задать волновую функцию $\psi(x)$ и энергию E какого-нибудь состояния (порядковый номер которого фиксируется количеством узлов волновой функции), а затем из того же уравнения, переписанного в форме

$$V(x) = \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} \psi^{-1}(x) + E, \quad (1b)$$

восстановить потенциал, для которого $\psi(x)$ и E служат решениями. Разумеется, при выборе $\psi(x)$ нужно позаботиться о физической осмысленности получаемого по формуле (1b) потенциала. Однако все возникающие на этом пути трудности легкопреодолимы. Для основных и некоторых возбужденных состояний в моделях с полиномиальными потенциалами эта задача была решена в работах [3,4].

Пример бесконечной серии квазиточнорешаемых моделей произвольного порядка, приведенный в [5], наглядно продемонстрировал, что потенциалы этих моделей вовсе не обязаны быть какими-то экзотическими «монстрами», а могут иметь вполне простой и привычный вид. Например, потенциалы моделей, рассматривавшихся в [5], являются четными полиномами шестого порядка:

$$V(x) = a^2 x^6 + 2abx^4 + [b^2 + ap - 4aM] x^2, \quad a > 0. \quad (2)$$

Они содержат два вещественных параметра a и b , а также натуральное число M , показывающее, сколько уровней энергии четности p ($p = \pm 1$) может быть вычислено в этой модели точно. Например, если $M = 2$, явно выписываются два уровня системы:

$$E_{\pm} = (4-p)b \pm 2\sqrt{b^2 + 4a - 2pa}, \quad (3a)$$

$$\psi_{\pm}(x) = x^{(1-p)/2} (2ax^2 + b \mp 2\sqrt{b^2 + 4a - 2pa}) \exp\left(-\frac{ax^4}{4} - \frac{bx^2}{2}\right). \quad (3b)$$

С помощью осцилляционной теоремы (прямым подсчетом нулей волновой функции) легко установить, что при $p = +1$ формулы (3a) и (3b) описывают нулевой и второй уровни энергии, а при $p = -1$ — первый и третий. Аналогичные явные решения (в радикалах) можно выписать и в случаях $M = 3$ и $M = 4$. Однако начиная с $M = 5$ это не всегда возможно. Дело в том, что при заданном M уровни энергии в модели (2) возникают как корни алгебраиче-

ческого уравнения M -го порядка, явный вид которого легко получить, ища решения уравнения Шредингера в виде

$$\psi(x) = x^{(1-p)/2} P_{M-1}(x^2) \exp\left(-\frac{ax^4}{4} - \frac{bx^2}{2}\right), \quad (4)$$

где $P_{M-1}(t)$ — неизвестный полином $M - 1$ -го порядка. Приравняв члены при одинаковых степенях x^2 и исключая из возникшей системы коэффициенты полинома $P_{M-1}(t)$, мы приходим к одному алгебраическому уравнению M -й степени относительно E . Таким образом, дифференциальное уравнение Шредингера для модели (2) точнорешаемо в том смысле, что в результате выбора подходящего аналога (4) оно может быть сведено к задаче решения **числовых уравнений**.

Алгебраическое уравнение относительно E можно интерпретировать как обычное секулярное уравнение для конечномерной линейной задачи на собственные значения. Конечномерность объясняется удачным выбором базиса в гильбертовом пространстве функций, в котором гамильтониан модели (2) принимает блок-диагональный вид. Один из блоков гамильтоновой матрицы при этом конечен, а второй бесконечен. Поэтому шредингеровская задача распадается на две совершенно независимые линейные задачи, одна из которых конечномерна, и нам удастся ее решить, а вторая — бесконечномерна, и о ее решениях нам ничего не известно. Увидеть явно, как возникают подобные блоки, можно на примере модели с сингулярным потенциалом, рассмотренной в [6]. Эта модель обсуждается в приложении 1 настоящего обзора.

Нетрудно видеть, что модель (2) можно рассматривать как возмущенный гармонический осциллятор с потенциалом $V_0(x) = b^2 x^2$. Параметром возмущения служит при этом константа a . Поскольку теория возмущений по параметру a определена и строится без труда, можно поставить вопрос о сравнении теоретико-возмущенческих результатов с точными. Такое сравнение позволяет обнаружить существование целого ряда непертурбативных эффектов в модели (2), т. е. эффектов, не обнаруживаемых ни в каком конечном порядке теории возмущений.

Один из таких эффектов проявляется уже на точном решении (3). Он состоит в том, что уровни E_+ и E_- , рассматриваемые как аналитические функции параметров a и b , сплетаются, образуя единую двухлистную риманову поверхность. Это означает, что совершая аналитическое продолжение уровня E_- вдоль некоторого замкнутого контура, можно получить уровень E_+ , и наоборот. Точки сплетения (совпадения уровней) являются корневыми особенностями и лежат на параболе $b^2/a = 2p - 4$, т. е. вне области применимости теории возмущений. Заметим, что наличие подобного вырождения не противоречит известной теореме о невырожденности спектров одномерных квантовомеханических систем [7], поскольку в точках сплетения волновые функции $\psi_+(x)$ и $\psi_-(x)$ также совпадают, и геометриче-

ская кратность вырожденного собственного значения остается равной единице. Отметим также, что нормировочные интегралы для обеих волновых функций в точках сплетения тождественно обращаются в нуль.

Перечисленные выше свойства легко обобщаются на случай произвольного M : при любом заданном M сплетаются первые M уровней одинаковой четности. Эти свойства являются типичными для большинства точнонерешаемых задач. Впервые они были обнаружены Бендером и Ву [8], а также Саймоном [9] в точнонерешаемой модели ангармонического осциллятора с потенциалом

$$V(x) = x^2 + gx^4. \quad (5)$$

в котором, как оказалось, сплетаются все уровни одинаковой четности. Затем они были найдены и в других моделях [10—12].

Другой непертурбативный эффект, также присутствующий в точном решении (3), связан с поведением уровней энергии E_{\pm} как функций параметра b в случае, когда a мало. Этот эффект проявляется в том, что если посмотреть на графики двух функций $E_{\pm}(b)$ с плохим разрешением, то создается впечатление, что уровни пересекаются, обмениваясь при этом квантовыми числами. При лучшем разрешении становится видно, что никакого пересечения нет. Этот эффект известен в ядерной физике под названием явления квазипересечения уровней [13]. Увидеть его в теории возмущений невозможно. Наличие же точных решений позволяет не только увидеть его, но и дать ему простое объяснение: квазипересечение уровней есть проявление их истинного пересечения (сплетения) в точке, лежащей недалеко от вещественной оси (имеется в виду комплексная плоскость параметра задачи) [12].

Наконец, последний эффект, о котором стоит упомянуть, касается поведения далеких членов ряда теории возмущений. Из точного решения (3) видно, что точка $a = 0$ является для функций $E_{\pm}(a)$ регулярной, и, следовательно, ряд теории возмущений оказывается для этих уровней сходящимся! Радиус круга сходимости, определяющийся, как известно, расстоянием до ближайшей особенности, равен согласно (3) $b^2/(4 - 2\rho)$. Этот результат, на первый взгляд, кажется весьма странным, поскольку из наивных квазиклассических оценок следует, что для моделей рассматриваемого типа далекие члены ряда должны расти факториально, и поэтому ряд должен обладать нулевым радиусом сходимости. Этот же результат подтверждается численными расчетами (в рамках алгебраической теории возмущений [8]) для всех ненатуральных значений M . Однако, если M — натуральное число, происходит чудесное пересокращение всех растущих вкладов, и ряд перестает расходиться.

Квазитоочноерешаемые модели обладают еще одной, довольно любопытной особенностью. Их можно рассматривать как своеобразные приближения к точнонерешаемым моделям. Действительно, рассмотрим в качестве примера модель (2) и вспомним, что M — это

порядок секулярного уравнения, из которого находится спектр. Если $M = \infty$, то задача нахождения спектра перестает быть алгебраической, и уравнение становится точнонерешаемым. Следовательно, для получения точнонерешаемой модели необходимо M устремить к бесконечности. Для того чтобы потенциал в этом пределе остался конечным, мы обязаны сделать параметры a и b зависящими от M . Например, если определить эту зависимость из условий $b^2 - 4aM = 1$, $2ab = g$, то при $M \rightarrow \infty$ коэффициент перед шестилнейным членом в потенциале (2) исчезнет и мы приходим к точнонерешаемой модели ангармонического осциллятора с потенциалом (5).

Перечисленные выше свойства квазиточнорешаемых моделей показывают, что они являются весьма интересными объектами для изучения. В настоящем обзоре предпринимается попытка с единой точки зрения рассмотреть проблему квазиточнорешаемости в квантовой механике и сформулировать достаточно простые методы построения и исследования квазиточнорешаемых моделей, как одномерных, так и многомерных.

Несколько слов об истории вопроса. Первая нетривиальная модель с двумя точновычисляемыми уровнями энергии и с потенциалом, выражающимся через гиперболические функции, была получена эвристическим путем в работе [14]. Модель с аналогичными свойствами, но с полиномиальным потенциалом была найдена в [15]. Термин «квазиточнорешаемость» был введен в работе [16], в который были построены и исследовались двумерные квазиточнорешаемые модели с вырожденными спектрами. Первый пример бесконечной серии одномерных моделей с полиномиальными потенциалами и с любыми, сколь угодно большими точновычисляемыми участками спектра был приведен в уже упоминавшейся выше работе [5] [см. формулу (2)]. Затем в [17] были найдены отдельные бесконечные серии квазиточнорешаемых моделей с потенциалами, выражающимися через степенные экспоненциальные и гиперболические функции. В [18] список одномерных квазиточнорешаемых моделей был существенно расширен. Были найдены новые модели с тригонометрическими и гиперболическими потенциалами, а также ряд моделей с потенциалами, выражающимися через эллиптические функции. В этой же работе было отмечено существование конечных серий квазиточнорешаемых моделей.

Следующий этап в истории квазиточнорешаемости характеризуется попытками объяснить это явление и сформулировать общие принципы, позволившие бы строить и исследовать всевозможные квазиточнорешаемые модели. Эти попытки привели к созданию двух принципиально различных подходов, которые мы условно назовем алгебраическим и аналитическим.

В основе алгебраического подхода, сформулированного Турбининым в работе [19], лежит идея о возможности использования конечномерных представлений алгебры $SL(2)$. Как известно, конечномерные представления алгебры $SL(2)$ могут быть реализованы на пространстве полиномов [20]. При этом образующие этой алгебры имеют

вид дифференциальных операторов первого порядка [20]. По этой причине спектральное уравнение $h\varphi = e\varphi$, где $h = \sum_{i,k} a_{ik} S_i S_k + \sum_i b_i S_i$, а S_i — образующие алгебры $SL(2)$, является конечномерным и может быть решено точно в классе полиномов φ . С другой стороны, выписанное уравнение является дифференциальным уравнением второго порядка и может быть приведено к шредингеровскому виду. В результате получается одномерная квазиточнорешаемая модель, порядок которой равен размерности представления алгебры $SL(2)$. Обобщение на многомерный случай — очевидно. Для этого необходимо заменить алгебру $SL(2)$ на алгебры более высокого ранга, конечномерные представления которых реализуются на пространстве полиномов от нескольких переменных, а образующие имеют вид многомерных дифференциальных операторов первого порядка [21, 22].

Алгебраический подход привлекателен прежде всего простотой идеи, лежащей в его основе. (Отметим, что окончательной формулировке этого подхода [19] предшествовали отдельные публикации [23, 24], в которых высказывались аналогичные идеи). На сегодняшний день в рамках этого подхода детально рассмотрены лишь одномерный и двумерный случаи [19, 21, 22]. К сожалению, алгебраический подход, по-видимому, не универсален, поскольку с его помощью не удастся описать так называемые конечные серии квазиточнорешаемых моделей, количество которых, как было показано в работе [25], бесконечно.

В основе аналитического подхода, сформулированного автором в работах [18, 25] и излагающегося в настоящем обзоре, лежит наблюдение, что квазиточнорешаемые уравнения Шредингера можно рассматривать как уравнения с несколькими спектральными параметрами, часть которых включена в потенциал [например, параметр M в (2)], а один играет роль энергии. Если спектры «потенциальных» спектральных параметров вырождены по отношению к спектру «энергетического» параметра, то возникает квазиточнорешаемая модель, порядок которой равен кратности вырождения. Таким образом, построение квазиточнорешаемых моделей сводится к построению многопараметрических спектральных уравнений и к исследованию имеющихся в их спектрах вырождений. Оказывается, что математический аппарат, используемый в данном подходе, весьма похож на аппарат, используемый в классической многочастичной кулоновской задаче, а также в квантовой теории вполне интегрируемых моделей магнетиков на алгебрах Ли, что позволяет установить эквивалентность трех, на первый взгляд, никак не связанных областей классической и квантовой физики. Подчеркнем, что алгебры Ли естественно возникают как в алгебраическом, так и в аналитическом подходах, но совершенно по-разному. Так, представления этих алгебр, используемые в аналитическом подходе, являются не конечномерными, как в [19], а бесконечномерными.

Обзор организован следующим образом. В разд. 1—3 формулируется общий подход к проблеме и дается алгоритм, позволяющий строить точно- и квазиточнорешаемые уравнения Шредингера как в одномерном, так и в многомерных случаях. В разд. 4—9 подробно рассматривается один частный случай, достаточно богатый, охватывающий широкий класс как точно-, так и квазиточнорешаемых моделей. Заключительные разделы посвящены краткому обзору других квазиточнорешаемых систем и методов построения.

1. ФОРМУЛИРОВКА МЕТОДА

Как отмечалось во введении, центральную роль в предлагаемом нами подходе играют спектральные уравнения с несколькими спектральными параметрами. Наиболее общая форма таких уравнений следующая:

$$(X + eY) \varphi = 0, \quad \varphi \in \Omega. \tag{6}$$

Здесь X — линейный оператор из V в V , где V — бесконечномерное векторное пространство, а Y — линейный векторный оператор из V в $V \otimes V_n$, где V_n — n -мерное векторное пространство. Ставится задача: найти все векторы $e \in V_n$, для которых уравнение (6) имеет решение $\varphi \in \Omega$, где Ω — некоторое подмножество пространства V . Множество векторов e , для которых (6) имеет решения, мы будем называть спектром и обозначать через $S_n(\Omega)$. Расписывая в компонентах векторы $e = \{e_i\}_{i=1}^n$ и $Y = \{Y_i\}_{i=1}^n$, уравнение (6) можно привести к явному многопараметрическому виду. Это можно сделать многими способами, что связано с неоднозначностью выбора базиса в пространстве V_n . Переход от одной явной формы уравнения (6) к другой осуществляется преобразованием группы $GL(n)$.

Предположим, что множество Ω имеет вид $\Omega = \bigcup_{M=0}^{\infty} \Omega_M$, являясь объединением конечномерных (M -мерных) поверхностей Ω_M в V . Если уравнения этих поверхностей заданы явно, то решение спектральной задачи (6) сводится к решению различных конечных систем числовых уравнений. В этом случае уравнение (6) можно назвать точнорешаемым.

Сформулируем теперь теорему, устанавливающую связь между многопараметрическими и однопараметрическими точнорешаемыми спектральными уравнениями.

Теорема 1. Точнорешаемое в Ω уравнение типа (6) с n спектральными параметрами порождает n -параметрическое семейство точнорешаемых в $\Omega \otimes \Omega \otimes \dots \otimes \Omega$ (n раз) уравнений с одним спектральным параметром.

Доказательство. Пусть $V^n \equiv \bigotimes_{k=1}^n V$. Введем векторный оператор

$$X = \left\{ \left(\begin{array}{c} i-1 \\ \otimes \\ k=1 \end{array} I \right) \otimes X \otimes \left(\begin{array}{c} n \\ \otimes \\ k=i+1 \end{array} I \right) \right\}_{i=1}^n, \quad (7a)$$

действующий из V^n в $V^n \otimes V_n$, а также матричный оператор

$$\hat{Y} = \left\{ \left(\begin{array}{c} i-1 \\ \otimes \\ k=1 \end{array} I \right) \otimes Y \otimes \left(\begin{array}{c} n \\ \otimes \\ k=i+1 \end{array} I \right) \right\}_{i=1}^n, \quad (7b)$$

действующий из $V^n \otimes V_n$ в $V^n \otimes V_n$. Здесь I — единичный оператор. Заметим, что из (6) автоматически следуют равенства

$$(X + \hat{Y}e)\varphi = 0, \quad \varphi \in \Omega^n, \quad (8)$$

где $\varphi = \bigotimes_{i=1}^n \varphi$, а $\Omega^n = \bigotimes_{i=1}^n \Omega$. Предполагая оператор \hat{Y} неособым, введем новые вектор-операторы L , действующие из V^n в $V^n \otimes V_n$, определив их из соотношений

$$X + \hat{Y}L = 0 \quad \text{или} \quad L = \hat{Y}^{-1}X. \quad (9)$$

Подействовав на обе части (8) оператором \hat{Y}^{-1} и воспользовавшись (9), получим:

$$L\varphi = e\varphi, \quad \varphi \in \Omega^n. \quad (10)$$

Из (10) видно, что вектор e является собственным значением вектор-оператора L на Ω^n . Отсюда следует, что любое уравнение вида

$$(\gamma L - e)\varphi = 0, \quad \varphi \in \Omega^n, \quad (11)$$

где γ — произвольно фиксированный вектор, будет обычным уравнением с одним спектральным параметром e , допустимые значения которого имеют вид $e = \gamma e$ и, следовательно, вычисляются точно. Теорема доказана.

Спектр $S_1(\Omega^n)$ уравнения (11) находится, очевидно, в однозначном соответствии со спектром $S_n(\Omega)$ исходного уравнения (6).

Из формулы (10) видно, что все операторы L_i (компоненты оператора L) имеют один и тот же набор собственных функций. При этом они не обязательно коммутируют между собой.

Теорема 2. Для коммутативности операторов L_i достаточно, чтобы операторы Y_i (компоненты вектора Y) также коммутировали между собой.

Доказательство. Пусть $[Y_l, Y_m] = 0$ для всех $l \neq m$. Тогда справедливо равенство

$$\sum_{l,m} Y_{il} Y_{km} [L_l, L_m] = 0 \quad \text{для } i = k. \tag{12a}$$

Далее, из коммутационных соотношений $[X_i, X_k] = 0$, $[Y_{il}, Y_{km}] = 0$, $[X_i, Y_{km}] = 0$, справедливых для всех $i \neq k$ и вытекающих из определений (7), следует что

$$\sum_{l,m} Y_{il} Y_{km} [L_l, L_m] = 0 \quad \text{для } i \neq k. \tag{12б}$$

Объединяя (12а) и (12б) и учитывая невырожденность матрицы — оператора Y_{ik} , получаем:

$$[L_l, L_m] = 0 \quad \text{для всех } l \text{ и } m. \tag{13}$$

Теорема доказана.

Нетрудно видеть, что сформулированная в теореме 1 процедура перехода от одного «одномерного» уравнения с n спектральными параметрами к n -параметрическому семейству « n -мерных» уравнений с одним спектральным параметром решает, по существу, обратную задачу разделения переменных. Одномерное уравнение (6) интерпретируется при этом как уравнение, возникшее в результате разделения переменных (в обобщенном смысле) в n -мерном уравнении (11). Спектральные параметры e_i играют роль констант разделения, а операторы L_i , собственными значениями которых они являются, — роль операторов симметрии уравнения (11), т. е. операторов, коммутирующих с оператором γL .

Опишем теперь другой способ перехода от многопараметрических точнорешаемых спектральных уравнений к однопараметрическим. Этот способ реализуется, когда в спектре многопараметрического спектрального уравнения имеется специальное вырождение. Договоримся называть подмножество s_n спектра $S_n(\Omega)$ уравнения (6) n/m вырожденным, если для всех $e \in s_n$ справедливо разложение

$$e = e' \oplus e'', \quad e' \in V_m, \quad e'' \in V_{n-m}, \quad V_n = V_m \oplus V_{n-m}, \tag{14}$$

в котором $e'' \in V_{n-m}$ — вектор, одинаковый для всех $e \in s_n$. Групповой смысл этого вырождения становится понятным, если заметить, что векторы e' и e'' являются собственными значениями операторов L' и L'' , входящих в соответствующее (14) разложение $L = L' \oplus L''$. Вырожденность собственного значения e'' по отношению к собственному значению e' означает наличие (скрытой) группы симметрии G , относительно которой L'' инвариантен, а оператор L' — нет.

Теорема 3. При наличии n/m -вырождения в спектре точнорешаемое в Ω уравнение (6) с n спектральными параметрами порождает m -параметрическое семейство точнорешаемых в $\Omega \otimes \Omega \otimes \dots \otimes \Omega$ (m — раз) уравнений с одним спектральным параметром.

Доказательство. Разложив в соответствии с (14) оператор Y : $Y = Y' \oplus Y''$, перепишем уравнение (6) в виде

$$(X' + e'Y') \varphi = 0, \quad \varphi \in \Omega, \quad (15)$$

введя оператор $X' \equiv X + e''Y''$. Поскольку уравнение (15) является уравнением типа (6) с m спектральными параметрами, то с помощью теоремы 1 его можно свести к m -параметрическому семейству уравнений

$$(\gamma'L' - e') \varphi = 0, \quad \varphi \in \Omega^m \quad (16)$$

с одним спектральным параметром $e' = \gamma'e'$. Теорема доказана.

Спектр $S_1(\Omega^m)$ уравнения (16), очевидно, находится в однозначном соответствии с множеством s_n , которое уже, чем $S_n(\Omega)$. Поэтому спектр $S_1(\Omega^m)$ уже спектра $S_n(\Omega)$ исходного уравнения (6). Заметим, что в случае, когда $m = 1$, мы получаем «одномерные» точно-решаемые уравнения с одним спектральным параметром.

Точнорешаемые уравнения (14) и (16), вообще говоря, не являются уравнениями Шредингеровского типа. Они становятся таковыми лишь в одном случае, а именно когда множества точных решений (11) или (16) имеют ненулевые пересечения с множествами всех решений уравнений

$$(\gamma L - e) \varphi = 0, \quad \varphi \in W,$$

или

$$(\gamma'L' - e') \varphi' = 0, \quad \varphi' \in W', \quad (11')$$

в которых W и W' — векторные пространства со скалярными произведениями, обеспечивающими эрмитовость операторов γL и $\gamma'L'$ (гамильтонианов). Шредингеровские уравнения типа (11), (16) мы будем называть точнорешаемыми (квазиточнорешаемыми), если все (не все) решения этих уравнений содержатся во множестве точных решений уравнений (11), (16).

Итак, мы в общих чертах сформулировали метод конструирования точно- и квазиточнорешаемых моделей, который можно разбить на три этапа: 1) построение уравнений с n спектральными параметрами, точнорешаемых в Ω ; 2) переход от этих уравнений к уравнениям с одним спектральным параметром, точнорешаемым в Ω^n (или в Ω^m , при наличии вырождения типа n/m); 3) выяснение возможности интерпретации полученного точнорешаемого уравнения как точно- или квазиточнорешаемого уравнения Шредингера. Этот метод впервые был сформулирован в работе [25], а в окончательной форме — в [26].

2. СЛУЧАЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим случай, когда пространство V является пространством функций одной переменной λ , $X = \partial^2/\partial\lambda^2 + U(\lambda)$, $Y = U(\lambda)$. Расписанное в компонентах уравнение (6) в этом случае имеет вид

$$(\partial^2/\partial\lambda^2 + U(\lambda) + e_1U_1(\lambda) + \dots + e_nU_n(\lambda)) \varphi(\lambda) = 0. \quad (17)$$

Предположим, что в системе спектральных параметров имеется n/m -вырождение, причем вырожденными являются параметры e_{m+1}, \dots, e_n . Согласно теореме 3, из уравнения (17) можно построить m -мерное уравнение (т. е. дифференциальное уравнение в m -мерном пространстве) с одним спектральным параметром e . В качестве e можно выбрать любую линейную комбинацию параметров e_1, \dots, e_m . Опуская элементарные выкладки, выпишем явный вид получающегося уравнения для случая, когда $e = e_\alpha$:

$$\left\{ - \sum_{ih=1}^m V g_\alpha^{-} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left(\frac{g_\alpha^{ih}}{V g_\alpha} \frac{\partial}{\partial \lambda_h} \right) + V_\alpha \right\} \psi = e \psi. \quad (18)$$

Здесь $g_\alpha \equiv \det \| g_\alpha^{ih} \|$; $g_\alpha^{ii} \equiv h^{-1} f_\alpha^i$, $i = 1, \dots, m$; $g_\alpha^{ih} = 0$, $i \neq h$; $h \equiv \det \| U_i(\lambda_h) \|$, а f_α^i — алгебраическое дополнение элемента $U_i(\lambda_\alpha)$ в матрице $\| U_i(\lambda_h) \|$. Функция V_α имеет вид:

$$V_\alpha = - \sum_{i=1}^m h^{-1} f_\alpha^i \left[U(\lambda_i) + \sum_{h=m+1}^n e_h U_h(\lambda_i) \right] - \sum_{i=1}^m g_\alpha^{ii} (g_\alpha h^2)^{1/4} \times \\ \times \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i^2} (g_\alpha h^2)^{-1/4} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{h} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda_i} (g_\alpha^{ii} h) \right] (g_\alpha h^2)^{1/4} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} (g_\alpha h^2)^{-1/4}, \quad (19)$$

а решения уравнения (18) связаны с решениями уравнения (17) формулами

$$\psi = (g_\alpha h^2)^{1/4} \prod_{i=1}^m \varphi(\lambda_i), \quad e = e_\alpha. \quad (20)$$

Нетрудно видеть, что уравнение (18) по форме совпадает с уравнением Шредингера на m -мерном, вообще говоря, кривом многообразии, определяемом метрическим тензором $g_{ih} = (g^{ih})^{-1}$. Недиagonальные компоненты этого тензора равны нулю, поэтому система координат, параметризующая это многообразие, является ортогональной. Уравнение (18) допускает разделение переменных в координатах λ_i (по построению). Для того чтобы это уравнение действительно являлось уравнением Шредингера на кривом многообразии (в гравитационном поле), оператор L_α , играющий роль гамильтониана, должен быть эрмитовым на пространстве функций, нормированных согласно

$$\int \frac{1}{V g_\alpha} \psi^2(\lambda) d^m \lambda < \infty. \quad (21)$$

Из того факта, что вместо наборов спектральных параметров e_1, \dots, e_m и весовых функций $U_1(\lambda), \dots, U_m(\lambda)$ можно взять любые $GL(m)$ -преобразованные наборы, следует, что любая линейная комбинация гамильтонианов L_α может быть приведена к виду (18).

Отметим также, что из-за коммутативности весовых функций все гамильтонианы L_α коммутируют между собой (следствие теоремы 2).

В многомерном случае ($m > 1$) выбор системы координат не имеет принципиального значения и диктуется лишь соображениями простоты. В одномерном же случае ($m = 1$) удобно, совершив дополнительное преобразование координат $\lambda = \lambda(x)$:

$$x = \int^{\lambda(x)} \frac{d\lambda}{Vg(\lambda)}, \quad (22)$$

привести уравнение (18) к привычному шредингеровскому виду

$$\left\{ -\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + V(\lambda(x)) \right\} \psi(\lambda(x)) = e\psi(\lambda(x)). \quad (23)$$

В этом случае $g^{11} = g$, $h = g^{-1}$, $f_1 = 1$ и выражение (19) для потенциала упрощается:

$$V = -g \left[U + \sum_{k=2}^n e_k U_k \right] - g^{3/4} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} g^{1/4}. \quad (24)$$

При изложении этого раздела мы следовали работе [27].

3. ПОСТРОЕНИЕ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ТОЧНОРЕШАЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этом разделе мы сформулируем аналитический метод, позволяющий строить точнорешаемые дифференциальные спектральные уравнения с несколькими спектральными параметрами. Центральное место в этом методе занимает функциональное уравнение вида

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda_1) \Delta(\lambda_2) + \Delta(\lambda_2) \Delta(\lambda_3) + \Delta(\lambda_3) \Delta(\lambda_1) + \rho^2 &= 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0, \end{aligned} \quad (25)$$

дополненное условием:

$$\Delta(\lambda_1) + \Delta(\lambda_2) = 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 0. \quad (26)$$

Уравнение (25) мы будем называть скалярным уравнением треугольников, а уравнение (26) — скалярным соотношением унитарности. Смысл этих названий станет ясным позднее. Оказывается, что решения уравнений (25) и (26) являются элементарными «кирпичиками», из которых могут быть построены как сами многопараметрические спектральные уравнения, так и их решения.

Нетрудно показать [28], что любое решение системы (25), (26) можно отнормировать так, чтобы оно удовлетворяло специальному уравнению Риккати:

$$\Delta'(\lambda) + \Delta^2(\lambda) = \rho^2. \quad (27)$$

Это утверждение следует из легкодоказуемого факта, что любое решение системы обязано иметь простой полюс в нуле [28]. Отнор-

мировав функцию $\Delta(\lambda)$ так, чтобы вычет в полюсе стал равным единице, перепишем уравнение (25) в виде: $\Delta(\lambda)\Delta(\lambda + \varepsilon) + \Delta(\varepsilon) \times [\Delta(\lambda + \varepsilon) - \Delta(\lambda)] = \rho^2$. Устремив ε к нулю и учтя, что $\Delta(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-1}$, получим (27).

Сформулируем теперь основную теорему метода [25, 26].

Теорема 4. Уравнение с $n = 2N + 1$ спектральными параметрами

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \sum_{\alpha=1}^N e_{\alpha}^{(2)} \Delta'(\lambda - a_{\alpha}) + \sum_{\alpha=1}^N e_{\alpha}^{(1)} \Delta(\lambda - a_{\alpha}) + e^{(0)} \right\} \varphi(\lambda) = 0 \quad (28)$$

имеет решения в классе функций вида:

$$\varphi(\lambda) = \prod_{\alpha=1}^N \exp \left\{ \eta_{\alpha} \int \Delta(\lambda - a_{\alpha}) d\lambda \right\} \prod_{i=1}^M \exp \left\{ \int \Delta(\lambda - \xi_i) d\lambda \right\}, \quad (29)$$

где $\xi_i, i = 1, \dots, M$, и $\eta_{\alpha}, \alpha = 1, \dots, N$, — неизвестные числовые параметры. Система числовых уравнений для определения спектральных параметров $e_{\alpha}^{(2)}, e_{\alpha}^{(1)}, e^{(0)}$, а также параметров ξ_i и η_{α} имеет вид:

$$\sum_{k=1}^M \Delta'(\xi_i - \xi_k) + \sum_{\alpha=1}^N \eta_{\alpha} \Delta(\xi_i - a_{\alpha}) = 0, \quad i = 1, \dots, M; \quad (30)$$

$$e_{\alpha}^{(2)} = \eta_{\alpha}(\eta_{\alpha} - 1); \quad (31a)$$

$$e_{\alpha}^{(1)} = -2 \left\{ \sum_{\beta=1}^N \eta_{\alpha} \eta_{\beta} \Delta(a_{\alpha} - a_{\beta}) + \sum_{i=1}^M \eta_{\alpha} \Delta(a_{\alpha} - \xi_i) \right\}; \quad (31b)$$

$$e^{(0)} = 3 \left(\sum_{\alpha=1}^N \eta_{\alpha} + M \right). \quad (31b)$$

Доказательство. Подействовав на функцию (29) оператором $\partial^2/\partial \lambda^2$ и воспользовавшись формулами (25) — (27), убедимся в том, что в ответе возникает функция (29), умноженная на сумму членов четырех типов: 1) констант, 2) членов, пропорциональных $\Delta(\lambda - a_{\alpha})$, 3) членов, пропорциональных $\Delta'(\lambda - a_{\alpha})$ и 4) членов, пропорциональных $\Delta(\lambda - \xi_i)$. Приравнявая коэффициенты перед M членами четвертого типа к нулю, получаем уравнение (30). Коэффициенты же перед остальными членами определяют спектральные параметры $e_{\alpha}^{(2)}, e_{\alpha}^{(1)}$ и $e^{(0)}$. Теорема доказана.

Легко видеть, что спектр уравнения (28) непрерывен, так как на $3N + 1 + M$ неизвестных величин накладывается $2N + 1 + M$ условий. Дискретность спектра обеспечивается наложением дополнительных N условий на параметры системы. Это можно сделать многими способами. Например, можно зафиксировать N произвольно выбранных линейных комбинаций спектральных параметров $e_{\alpha}^{(2)}, e_{\alpha}^{(1)}$ и $e^{(0)}$. Тогда уравнение (28) становится уравнением с $N + 1$ спектральными параметрами. Чтобы окончательно завершить по-

строение этого уравнения, остается найти явный вид функции $\Delta(\lambda)$. Решая уравнение (27), находим:

$$\Delta(\lambda) = \rho \operatorname{ctg} \rho \lambda. \quad (32)$$

Поскольку число ρ — произвольно, то мы можем брать его вещественным, мнимым или равным нулю. Соответственно будем иметь тригонометрические: $\Delta(\lambda) = |\rho| \operatorname{ctg} |\rho| \lambda$, гиперболические: $\Delta(\lambda) = |\rho| \operatorname{cth} |\rho| \lambda$ и рациональные: $\Delta(\lambda) = \lambda^{-1}$ решения [25, 28].

В следующих разделах мы детально рассмотрим квазиточнорешаемые модели, связанные с рациональными решениями скалярного уравнения треугольников. Для обеспечения дискретности спектра многопараметрического спектрального уравнения (28) потребуем, чтобы спектральные параметры $e_{\alpha}^{(2)}$ были фиксированы условиями $e_{\alpha}^{(2)} = b_{\alpha}(b_{\alpha} - 1)$, где b_{α} , так же как и a_{α} — параметры, задаваемые извне. Ниже мы убедимся, что множество возникающих при таком способе фиксации квазиточнорешаемых моделей оказывается довольно широким и включает в себя разнообразные как одномерные, так и многомерные модели. Другие способы фиксации спектральных параметров, также приводящие к разного рода квазиточнорешаемым моделям, будут обсуждаться позднее, в разд. 10.

4. РАЦИОНАЛЬНЫЕ КВАЗИТОЧНОРЕШАЕМЫЕ МОДЕЛИ (ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ)

В рациональном случае уравнение (28), являющееся (в силу $\rho = 0$) уравнением всего с N спектральными параметрами, имеет вид [25, 27]:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} - \sum_{\alpha=1}^N \frac{b_{\alpha}(b_{\alpha}-1)}{(\lambda-a_{\alpha})^2} + \sum_{\alpha=1}^N \frac{e_{\alpha}}{\lambda-a_{\alpha}} \right\} \varphi(\lambda) = 0. \quad (33)$$

Решение (33), в соответствии с (29), ищется в виде

$$\varphi(\lambda) = \prod_{\alpha=1}^N (\lambda - a_{\alpha})^{b_{\alpha}} \prod_{i=1}^M (\lambda - \xi_i). \quad (34)$$

Подстановка (34) в (33) приводит к следующей системе спектральных уравнений*:

$$\sum_{k=1}^M \frac{1}{\xi_i - \xi_k} + \sum_{\alpha=1}^N \frac{b_{\alpha}}{\xi_i - a_{\alpha}} = 0, \quad i = 1, \dots, M; \quad (35)$$

$$e_{\alpha} = 2 \sum_{i=1}^M \frac{b_{\alpha}}{\xi_i - a_{\alpha}} - 2 \sum_{\beta=1}^N \frac{b_{\alpha} b_{\beta}}{a_{\alpha} - a_{\beta}}, \quad \alpha = 1, \dots, N. \quad (36)$$

* Аналогичные уравнения с b_{α} , равным $1/2$, $1/4$, возникают при решении так называемой проблемы исключения в теории функций Ламэ [29].

В соответствии с общими предписаниями, сформулированными в разд. 1, попытаемся установить наличие вырождений в системе спектральных параметров. Для этого, вместо системы спектральных параметров e_1, \dots, e_N , удобно рассмотреть другую систему спектральных параметров r_0, \dots, r_{N-1} , связанную с первой формулой

$$\sum_{\alpha=1}^N \left[e_\alpha + 2 \sum_{\beta=1}^N \frac{b_\alpha b_\beta}{a_\alpha - a_\beta} \right] \frac{1}{\lambda - a_\alpha} = \left[\omega \prod_{\alpha=1}^N (\lambda - a_\alpha) \right]^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} r_n \lambda^n. \quad (37)$$

Здесь ω — произвольный пока числовой множитель. Используя формулы (35) — (37), нетрудно показать, что

$$r_{N-1} = 0; \quad (38a)$$

$$r_{N-2} = -2\omega M \left[\sum_{\alpha=1}^N b_\alpha + \frac{M-1}{2} \right]; \quad (38b)$$

$$r_{N-3} = -2\omega M \left[\sum_{\alpha=1}^N b_\alpha a_\alpha - \sigma_1(a) \left(\sum_{\alpha=1}^N b_\alpha + \frac{M-1}{2} \right) \right] - 2\omega \left(\sum_{\alpha=1}^N b_\alpha + M - 1 \right) \sigma_1(\xi), \quad (38в)$$

и т. д. (σ_n — симметрические полиномы n -го порядка). Мы видим, что преобразование группы $GL(N)$ позволяет выявить скрытое вырождение в системе спектральных параметров. Как следует из (38a), параметр r_{N-1} имеет бесконечную кратность вырождения: для всех решений он равен нулю и может быть просто опущен. Параметр r_{N-2} , выражаясь через число M , имеет конечную кратность вырождения, равную числу различных неэквивалентных решений уравнений (35) при данном M . Наконец, параметр r_{N-3} , в общем случае не вырожденный из-за наличия в нем члена, пропорционального $\sigma_1(\xi)$, тоже может допускать вырождение, если коэффициент перед этим членом обратить в нуль:

$$\sum_{\alpha=1}^N b_\alpha + M - 1 = 0. \quad (39)$$

Наличие вырождений в системе параметров r_0, \dots, r_{N-1} позволяет строить из (33) одномерные уравнения шредингеровского типа. Один из наиболее интересных случаев реализуется, если в качестве энергетического спектрального параметра взять параметр r_0 . При

таким выборе потенциал, входящий в уравнение Шредингера, равен

$$V(x) = \omega \prod_{\alpha=1}^N (\lambda - a_\alpha) \sum_{\alpha=1}^N \left\{ \frac{\left(b_\alpha - \frac{1}{4}\right) \left(b_\alpha - \frac{3}{4}\right)}{(\lambda - a_\alpha)^2} + \right. \\ \left. + 2 \left(\sum_{\beta=1}^N \frac{b_\alpha b_\beta - \frac{1}{16}}{a_\alpha - a_\beta} \right) \frac{1}{\lambda - a_\alpha} \right\} - \sum_{n=1}^{N-1} r_n \lambda^n, \quad (40)$$

а решения уравнения Шредингера с этим потенциалом имеют вид

$$\psi(x) = \prod_{\alpha=1}^N (\lambda - \alpha_\alpha)^{b_\alpha - \frac{1}{4}} \prod_{i=1}^M (\lambda - \xi_i), \quad E = r_0. \quad (41)$$

Из (41) видно, что числа ξ_i определяют нули волновых функций. Функция $\lambda = \lambda(x)$ согласно (22) определяется формулой

$$x = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda'}{\sqrt{\omega \prod_{\alpha=1}^N (\lambda' - a_\alpha)}}. \quad (42)$$

Рассмотрим конкретные примеры.

1) $N = 2$. Потенциал содержит бесконечно-вырожденный спектральный параметр r_1 , и мы приходим к уравнениям с бесконечным числом точных решений.

2) $N = 3$. Потенциал содержит бесконечно-вырожденный спектральный параметр r_2 , а также параметр r_1 , имеющий конечную кратность вырождения. Мы приходим к уравнениям с конечным числом точных решений.

3) $N = 4$. Теперь потенциал содержит три спектральных параметра: r_3 , r_2 и r_1 . Рассмотрим три случая: 1) выполнено условие (39); 2) условие (39) не выполнено, но уравнение обладает Z_2 -симметрией: $b_\alpha = b_{5-\alpha}$, $a_\alpha = -a_{5-\alpha}$, $\alpha = 1, 2$; 3) условие (39) не выполнено и никакой Z_2 -симметрии в уравнении нет. Нетрудно видеть, что в первых двух случаях кратность вырождения потенциальных спектральных параметров в целом конечна, и мы снова получаем уравнения с конечным числом точных решений. Что касается третьего случая, то в силу явной зависимости потенциала от ξ_1, \dots, ξ_M получить уравнение с K точными решениями можно, лишь наложив на K каких-нибудь решений $\{\xi_i^{(1)}\}, \dots, \{\xi_i^{(K)}\}$ уравнения (35) $K - 1$ ограничений: $\sigma_1(\xi^{(1)}) = \sigma_1(\xi^{(2)}) = \dots = \sigma_1(\xi^{(K)})$. Хотя каждое решение является функцией восьми параметров a_α и b_α , из-за наличия двухпараметрической группы преобразований $a_\alpha \rightarrow Aa_\alpha + B$, не нарушающих приведенных равенств, независимых параметров имеется всего шесть. Из очевидного ограничения $K - 1 \leq 6$ следует, что максимальное число точных решений спек-

трального уравнения в этом случае не может превышать семи: $K_{\max} = 7$ [18].

4) $N \geq 5$. В этом случае потенциал содержит $N - 3$ независимых спектральных параметров, явно выражающихся через величины

$$\sigma_1(\xi), \sigma_2(\xi), \dots, \sigma_{N-3}(\xi).$$

Повторяя предыдущие рассуждения, можно показать, что для получения уравнений с K точными решениями необходимо наложить на $2N - 2$ существенных параметров системы $(K - 1)(N - 3)$ ограничений. Отсюда следует, что максимальный порядок квази-точнорешаемой модели в общем случае (при произвольном N) определяется формулой

$$K_{\max} = 3 + \left[\frac{4}{N-3} \right] \tag{43}$$

(см. работу [25]).

До сих пор речь шла лишь о формальных решениях уравнений шредингеровского типа с потенциалами (40). Нигде не обсуждался вопрос о физической осмысленности этих уравнений и их решений. Мы попытаемся сейчас восполнить этот пробел и вывести условия, при которых потенциал (40) является потенциалом устойчивой квантовомеханической системы, а волновые функции (41) нормируемы и удовлетворяют нулевым граничным условиям на концах интервала, где формулируется шредингеровская задача.

Первое требование, которому должен удовлетворять потенциал, это его вещественность. Из формулы (40) видно, что для этого параметры a_α и b_α , $\alpha = 1, \dots, N$, должны быть вещественными или образовывать (одновременно) пары комплексно-сопряженных чисел. Вещественные числа a_α делят ось λ на некоторое количество интервалов, которые мы условимся называть фундаментальными и которые могут быть конечными, полубесконечными или бесконечными. Пусть $[\lambda_-, \lambda_+]$ — фундаментальный интервал. Подберем знак ω в формуле (37) так, чтобы подкоренное выражение в (42) было в этом интервале положительным. Тогда при условии, что $\lambda_0 \in [\lambda_-, \lambda_+]$, формула (42) описывает непрерывное и взаимно однозначное отображение интервала $[\lambda_-, \lambda_+]$ оси λ на некий интервал $[x_-, x_+]$ оси x . Отсюда следует, что и потенциал $V(x)$, и решение $\psi(x)$ формального уравнения Шредингера являются регулярными функциями внутри интервала $[x_-, x_+]$ и могут иметь особенности лишь на его концах. Характер этих особенностей не может быть произвольным, а должен быть согласован с требованием эрмитовости гамильтониана на рассматриваемых решениях в интервале $[x_-, x_+]$. Это требование, эквивалентное условию обращения в нуль поверхностного интеграла, возникающего при эрмитовом сопряжении, можно записать в виде

$$\left\{ \prod_{\alpha=1}^N (\lambda - a_\alpha) \right\}^{1/2} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \prod_{\alpha=1}^N (\lambda - a_\alpha)^{b_\alpha - (1/4)} \prod_{i=1}^M (\lambda - \xi_i) \right\}^2 \Big|_{\lambda=\lambda_\Gamma} = 0, \tag{44}$$

где $\lambda_{\Gamma} = \lambda_{+}$ или λ_{-} — конечная точка фундаментального интервала. В случае, когда точка λ_{Γ} — конечна ($\lambda_{\Gamma} = a_{\alpha}$), условие (44) приводит к ограничению:

$$b_{\alpha} > 1/2. \quad (45)$$

А если точка λ_{Γ} бесконечна ($\lambda_{\Gamma} = \pm \infty$), то ограничение принимает вид

$$\sum_{\alpha=1}^N b_{\alpha} + M < 1/2. \quad (46)$$

Используя явное выражение для потенциала (40), а также формулу (42), можно показать, что если конечная точка λ_{Γ} фундаментального интервала конечна ($\lambda_{\Gamma} = a_{\alpha}$), то соответствующая ей конечная точка x_{Γ} также конечна, и потенциал в ее окрестности ведет себя как

$$V(x) \approx \frac{(2b_{\alpha} - 1/2)(2b_{\alpha} - 3/2)}{(x - x_{\Gamma})^2}, \quad x \rightarrow x_{\Gamma}. \quad (47)$$

Если же точка λ_{Γ} бесконечна ($\lambda_{\Gamma} = \pm \infty$), то точка x_{Γ} может быть и конечной, и бесконечной, в зависимости от того, какой случай рассматривается: $N > 2$ или $N = 2$. В первом случае потенциал в окрестности x_{Γ} ведет себя как

$$V(x) \approx \left\{ -\frac{1}{4} + \left(\frac{2}{N-2} \right)^2 \left[\sum_{\alpha=1}^N b_{\alpha} + M - \frac{1}{2} \right] \right\} \frac{1}{(x - x_{\Gamma})^2}, \quad x \rightarrow x_{\Gamma}, \quad (48)$$

а во втором — выходит на константу. Мы видим, что в случаях, описываемых формулами (47) и (48), потенциалы не всегда являются растущими вблизи границ. Однако из-за того, что коэффициент перед сингулярностью вида $(x - x_{\Gamma})^{-2}$ всегда больше $-1/4$, падения на центр не происходит и система остается устойчивой.

Итак, сформулируем окончательное утверждение. Для того чтобы фундаментальному интервалу можно было бы сопоставить устойчивую квантовомеханическую систему, необходимо и достаточно, чтобы в его конечных точках выполнялись условия (45) или (46). Интервалы, в которых эти условия выполняются, мы будем называть квантовомеханически устойчивыми. Таких интервалов может быть несколько. Интервал, отображаемый в участок оси x , где формулируется шредингеровская краевая задача, будем называть физическим. Выбирая по-разному физический интервал и обеспечивая его устойчивость, мы будем получать различные точно- и квазиточно-решаемые модели. Заметим, что числа ξ_i , попавшие в физический интервал, определяют физические нули, т. е. узлы волновых функций.

Все многообразие потенциалов точно- или квазиточнорешаемых моделей, соответствующих заданному N , может быть получено при вырождении функции $b(\lambda)$, содержащей всю информацию о системе. В невырожденном случае эта функция, описываемая формулой

$$b(\lambda) = \sum_{\alpha=1}^N \frac{b_{\alpha}}{\lambda - a_{\alpha}}, \quad (49)$$

имеет N простых полюсов в конечной области. При вырождении простые полюсы могут сливаться или уходить на бесконечность, в результате чего возникают новые функции $b(\lambda)$. Все результаты этого раздела, данные для невырожденного случая, могут быть обобщены и на вырожденный. В частности, уравнение для параметров ξ_i сохраняет свой прежний вид:

$$\sum_{k=1}^M \frac{1}{\xi_i - \xi_k} + b(\xi_i) = 0, \quad i = 1, \dots, M \quad (50)$$

[вся информация о вырождении сосредоточена в функции $b(\lambda)$]. Остальные формулы, описывающие вырожденный случай, слишком громоздки, и мы их здесь не проводим, отсылая интересующегося читателя к работе [30].

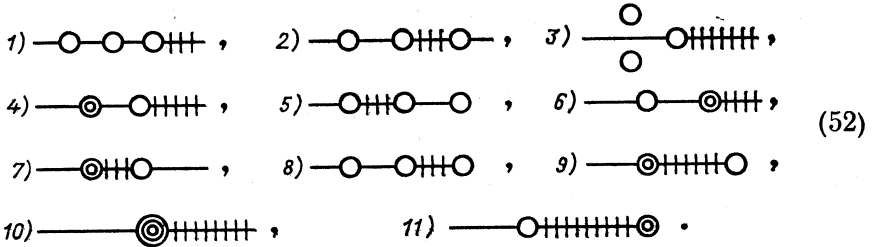
Для классификации получаемых таким способом точно- и квазиточнорешаемых моделей можно использовать графический метод. Вещественную ось λ изобразим отрезком, концевые точки которого отождествим с бесконечно удаленными точками. Точки a_{α} будем изображать кружочками, а точки, образованные слиянием нескольких точек a_{α} , — несколькими концентрическими кружочками. Это относится как к конечным точкам, так и к бесконечным. Физический интервал при этом будем помечать штриховкой.

Легко видеть, что в случае $N = 2$ имеется шесть различных типов диаграмм:

$$\begin{array}{lll}
 1) \text{---} \bigcirc \text{||||} \bigcirc \text{---} , & 2) \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{||||} , & 3) \text{||||} \text{||||} \text{||||} \text{||||} , \\
 & & \bigcirc \\
 & & \bigcirc \\
 4) \text{---} \bigcirc \text{||||} , & 5) \text{---} \bigcirc \text{||||} \bigcirc , & 6) \text{||||} \text{||||} \text{||||} \bigcirc , \\
 & & \bigcirc
 \end{array} \quad (51)$$

которым соответствует шесть известных типов точнорешаемых моделей. Для экономии места мы не будем выписывать потенциалы этих моделей, перечисленные в работах [30, 31]. Отметим только, что диаграмма 1) описывает тригонометрический потенциал Пешля — Теллера, диаграммы 2) и 3) — гиперболические потенциалы Пешля — Теллера, 4) — потенциал Морза, 5) — гармонический осциллятор с центробежным барьером и 6) — простой гармонический осциллятор.

Рассмотрим теперь более подробно случай $N = 3$. Этому случаю соответствует 11 различных типов диаграмм:



Не выписанные в этой таблице диаграммы не удовлетворяют критерию устойчивости [30]. Диаграммы (52) описывают одиннадцать различных типов квазиточнорешаемых моделей. Выпишем потенциалы этих моделей вместе с волновыми функциями и энергиями точночисляемых состояний. Приведем также вид функций $b(\lambda)$, физических интервалов и условий устойчивости.

1. Эллиптический потенциал первого типа:

$$V(x) = 4 \left(\delta - \frac{1}{4} \right) \left(\delta - \frac{3}{4} \right) \text{cs}^2 x - 4 \left(\gamma - \frac{1}{4} \right) \left(\gamma - \frac{3}{4} \right) m \text{cn}^2 x + 4 \left(\beta - \frac{1}{4} \right) \left(\beta - \frac{3}{4} \right) m \text{cd}^2 x + 4(1-m) \left(\beta + \gamma + \delta + M - \frac{1}{4} \right) \times \left(\beta + \gamma + \delta + M - \frac{3}{4} \right) \text{sc}^2 x,$$

$$\psi(x) \propto [\text{sc}^2 x]^{\delta - \frac{1}{4}} [\text{nc}^2 x]^{\gamma - \frac{1}{4}} [\text{dc}^2 x]^{\beta - \frac{1}{4}} \prod_{i=1}^M [\text{sc}^2 x - \xi_i].$$

$$m = \frac{\alpha - 1}{\alpha}, \quad \alpha > 1, \quad x \in [0, K(m)],$$

$$E = -\frac{\alpha + 1}{4\alpha} - \frac{4}{\alpha} (\beta + \gamma + \delta + M - 1) \{ (\alpha + 1)(M + \delta) + (\alpha - 1)(\gamma - \beta) + 2\sigma_1(\xi) \},$$

$$b(\lambda) = \frac{\beta}{\lambda + \alpha} + \frac{\gamma}{\lambda + 1} + \frac{\delta}{\lambda}, \quad \lambda \in [0, \infty],$$

$$\delta > \frac{1}{2}, \quad \beta + \gamma + \delta + M < \frac{1}{2}.$$

2. Эллиптический потенциал второго типа:

$$V(x) = 4 \left(\delta - \frac{1}{4} \right) \left(\delta - \frac{3}{4} \right) \text{dc}^2 x + 4 \left(\gamma - \frac{1}{4} \right) \left(\gamma - \frac{3}{4} \right) \text{ds}^2 x - 4 \left(\beta - \frac{1}{4} \right) \left(\beta - \frac{3}{4} \right) \text{dn}^2 x + 4m(m-1) \left(\beta + \gamma + \delta + M - \frac{1}{4} \right) \times \left(\beta + \gamma + \delta + M - \frac{3}{4} \right) \text{sd}^2 x,$$

$$\psi(x) \propto (\operatorname{sd}^2 x)^{\gamma - \frac{1}{4}} (\operatorname{nd}^2 x)^{\beta - \frac{1}{4}} (\operatorname{cd}^2 x)^{\delta - \frac{1}{4}} \prod_{i=1}^M [\operatorname{sd}^2 x - \xi_i],$$

$$m = (1 + \alpha)^{-1}, \quad \alpha > 0, \quad x \in [0, K(m)],$$

$$E = \frac{1}{4} \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} + \frac{4}{\alpha + 1} (\beta + \gamma + \delta + M - 1) \times \\ \times \{(\alpha - 1)(M + \gamma) + (\alpha + 1)(\delta - \beta) + 2\sigma_1(\xi)\},$$

$$b(\lambda) = \frac{\beta}{\lambda + \alpha} + \frac{\gamma}{\lambda} + \frac{\delta}{\lambda - 1}, \quad \lambda \in [0, 1],$$

$$\gamma > \frac{1}{2}, \quad \delta > \frac{1}{2}.$$

3. Эллиптический потенциал третьего типа:

$$V(x) = \frac{4 \left(\gamma - \frac{1}{4}\right) \left(\gamma - \frac{3}{4}\right) (\alpha^2 - 1)}{\operatorname{sc}^2 x \operatorname{dn}^2 x - \alpha} + \\ + \frac{4 \left(\gamma^* - \frac{1}{4}\right) \left(\gamma^* - \frac{3}{4}\right) (\alpha^{*2} - 1)}{\operatorname{sc}^2 x \operatorname{dn}^2 x - \alpha^*} + \frac{4 \left(\beta - \frac{1}{4}\right) \left(\beta - \frac{3}{4}\right)}{\operatorname{sc}^2 x \operatorname{dn}^2 x} + \\ + 4 \left(\beta + \gamma + \gamma^* + M - \frac{1}{4}\right) \left(\beta + \gamma + \gamma^* + M - \frac{3}{4}\right) \operatorname{sc}^2 x \operatorname{dn}^2 x,$$

$$\psi(x) \propto (\operatorname{sc}^2 x \operatorname{dn}^2 x - \alpha)^{\gamma - \frac{1}{4}} (\operatorname{sc}^2 x \operatorname{dn}^2 x - \alpha^*)^{\gamma^* - \frac{1}{4}} \times \\ \times (\operatorname{sc}^2 x \operatorname{dn}^2 x)^{\beta - \frac{1}{4}} \prod_{i=1}^M (\operatorname{sc}^2 x \operatorname{dn}^2 x - \xi_i),$$

$$m = \frac{1}{4} (\alpha + \alpha^* + 2), \quad |\alpha| = 1, \quad x \in [0, K(m)],$$

$$E = \frac{1}{4} (\alpha + \alpha^*) - 4 (\beta + \gamma + \gamma^* + M - 1) \times \\ \times \{-(\alpha + \alpha^*)(\beta + M) + (\alpha - \alpha^*)(\gamma - \gamma^*) + 2\sigma_1(\xi)\},$$

$$b(\lambda) = \frac{\beta}{\lambda} + \frac{\gamma}{\lambda - \alpha} + \frac{\gamma^*}{\lambda - \alpha^*}, \quad \lambda \in [0, \infty),$$

$$\beta > \frac{1}{2}, \quad \beta + \gamma + \gamma^* + M < \frac{1}{2}.$$

(Во всех приведенных формулах m — это модуль эллиптических функций, а $K(m)$ — полный эллиптический интеграл [32]).

4. Тригонометрический потенциал первого типа:

$$V(x) = -4\gamma^2 \cos^4 x + [4\gamma^2 - 8\gamma(\beta - 1)] \cos^2 x + \\ + 4 \left(\delta - \frac{1}{4}\right) \left(\delta - \frac{3}{4}\right) \operatorname{ctg}^2 x + 4 \left(\beta + \delta + M - \frac{1}{4}\right) \times \\ \times \left(\beta + \delta + M - \frac{3}{4}\right) \operatorname{tg}^2 x,$$

$$\Psi(x) \propto (\operatorname{tg}^2 x)^{\delta - \frac{1}{4}} (\cos^2 x)^{-\beta + \frac{1}{4}} e^{-\gamma \cos^2 x} \prod_{i=1}^M (\operatorname{tg}^2 x - \xi_i),$$

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$E = -8 \left(\delta - \frac{1}{4}\right) \left(\delta - \frac{3}{4}\right) - 8\gamma(\beta - 1) - 8\delta(\gamma + \beta) + 1 - \\ - 8M(M - 1 + \beta + \gamma + 2\delta) - 8(M - 1 + \beta + \delta) \sigma_1(\xi),$$

$$b(\lambda) = \frac{\beta}{\lambda + 1} + \frac{\gamma}{(\lambda + 1)^2} + \frac{\delta}{\lambda}, \quad \lambda \in [0, \infty),$$

$$\delta > \frac{1}{2}, \quad \beta + \delta + M < \frac{1}{2}.$$

5. Тригонометрический потенциал второго типа:

$$V(x) = 4 \left(\gamma - \frac{1}{4}\right) \left(\gamma - \frac{3}{4}\right) \frac{1}{\sin^2 x} + 4 \left(\delta - \frac{1}{4}\right) \left(\delta - \frac{3}{4}\right) \frac{1}{\cos^2 x} + \\ + 4\beta[2(\gamma + \delta + M) + \beta] \sin^2 x - 4\beta^2 \sin^4 x,$$

$$\Psi(x) \propto (\sin^2 x)^{\gamma - \frac{1}{4}} (\cos^2 x)^{\delta - \frac{1}{4}} e^{-\beta \sin^2 x} \prod_{i=1}^M (\sin^2 x - \xi_i),$$

$$x \in [0, \pi/2],$$

$$E = 4 \left(\gamma - \frac{1}{4}\right) \left(\gamma - \frac{3}{4}\right) + 4 \left(\delta - \frac{1}{4}\right) \left(\delta - \frac{3}{4}\right) + 8\gamma(\beta + \delta) - \\ - \frac{1}{2} + 4M(M - 1) + 8M(\gamma + \delta + \beta) - 8\beta\sigma_1(\xi),$$

$$b(\lambda) = -\beta + \frac{\gamma}{\lambda} + \frac{\delta}{\lambda - 1}, \quad \lambda \in [0, 1],$$

$$\gamma > \frac{1}{2}, \quad \delta > \frac{1}{2}.$$

6. Гиперболический потенциал первого типа:

$$V(x) = 4 \left(\beta - \frac{1}{4}\right) \left(\beta - \frac{3}{4}\right) \operatorname{th}^2 x + 4[\delta^2 + 2\delta(\gamma - 1)] \operatorname{sh}^2 x + \\ + 4\delta^2 \operatorname{sh}^4 x + 4 \left(\beta + \gamma + M - \frac{1}{4}\right) \left(\beta + \gamma + M - \frac{3}{4}\right) \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x},$$

$$\Psi(x) \propto (\operatorname{cth}^2 x)^{\beta - \frac{1}{4}} (\operatorname{sh}^2 x)^{-\gamma + \frac{1}{2}} e^{-\delta \operatorname{sh}^2 x} \prod_{i=1}^M \left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} - \xi_i\right),$$

$$x \in [0, \infty),$$

$$E = 4 \left(\beta - \frac{1}{4}\right) \left(\beta - \frac{3}{4}\right) - 4 \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)^2 - 8\delta(\gamma - 1) - 8\beta\delta - \\ - 8(\delta + \gamma)M - 4M(M - 1) - 8(M - 1 + \beta + \gamma) \sigma_1(\xi),$$

$$b(\lambda) = \frac{\beta}{\lambda+1} + \frac{\gamma}{\lambda} + \frac{\delta}{\lambda^2}, \quad \lambda \in [0, \infty],$$

$$\delta > 0, \quad \beta + \gamma + M < \frac{1}{2}.$$

7. Гиперболический потенциал второго типа:

$$V(x) = 4 \left(\beta - \frac{1}{4} \right) \left(\beta - \frac{3}{4} \right) \operatorname{cth}^2 x - 4 [\delta^2 + 2\delta(\gamma - 1)] \operatorname{ch}^2 x + \\ + 4\delta^2 \operatorname{ch}^4 x + 4 \left(\beta + \gamma + M - \frac{1}{4} \right) \left(\beta + \gamma + M - \frac{3}{4} \right) \operatorname{th}^2 x,$$

$$\psi(x) \propto (\operatorname{th}^2 x)^{\beta - \frac{1}{4}} (\operatorname{ch}^2 x)^{-\gamma + \frac{1}{2}} e^{\delta \operatorname{ch}^2 x} \prod_{i=1}^M (\operatorname{th}^2 x - \xi_i),$$

$$x \in [0, \infty],$$

$$E = 8 \left(\beta - \frac{1}{4} \right) \left(\beta - \frac{3}{4} \right) - 8\delta(\gamma - 1) + 8\beta(\gamma - \delta) - 1 + 8M(M - 1) + \\ + 8M(2\beta + \gamma - \delta) - 8(M - 1 + \beta + \gamma) \sigma_1(\xi),$$

$$b(\lambda) = \frac{\beta}{\lambda} + \frac{\gamma}{\lambda - 1} + \frac{\delta}{(\lambda - 1)^2}, \quad \lambda \in [0, 1],$$

$$\beta > \frac{1}{2}, \quad \delta < 0.$$

8. Гиперболический потенциал третьего типа:

$$V(x) = 4 \left(\delta - \frac{1}{4} \right) \left(\delta - \frac{3}{4} \right) \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} - 4 \left(\gamma - \frac{1}{4} \right) \left(\gamma - \frac{3}{4} \right) \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} + \\ + 4\beta^2 \operatorname{sh}^4 x + 4 [\beta^2 - 2\beta(\gamma + \delta) - 2\beta M] \operatorname{sh}^2 x,$$

$$\psi(x) \propto (\operatorname{sh}^2 x)^{\delta - \frac{1}{4}} (\operatorname{ch}^2 x)^{\gamma - \frac{1}{4}} e^{-\beta \operatorname{sh}^2 x} \prod_{i=1}^M (\operatorname{sh}^2 x - \xi_i),$$

$$x \in [0, \infty],$$

$$E = -4 \left(\gamma - \frac{1}{4} \right) \left(\gamma - \frac{3}{4} \right) - 4 \left(\delta - \frac{1}{4} \right) \left(\delta - \frac{3}{4} \right) + 8\delta(\beta - \gamma) + 1 + \\ + 8M(\beta - \gamma - \delta) - 4M(M - 1) + 8\beta \sigma_1(\xi),$$

$$b(\lambda) = -\beta + \frac{\gamma}{\lambda+1} + \frac{\delta}{\lambda}, \quad \lambda \in [0, \infty],$$

$$\beta > 0, \quad \delta > \frac{1}{2}.$$

9. Экспоненциальный потенциал:

$$V(x) = \delta^2 e^{-2x} + 2\delta(\gamma - 1) e^{-x} - 2\beta(\gamma + M) e^x + \beta^2 e^{2x},$$

$$\psi(x) \propto \exp \left\{ \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) x - \beta e^x - \delta e^{-x} \right\} \prod_{i=1}^N (e^x - \xi_i),$$

$$x \in [-\infty, \infty],$$

$$E = -\left(\gamma - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\beta\delta - 2\gamma M - M(M-1) + 2\beta\sigma_1(\xi),$$

$$b(\lambda) = -\beta + \frac{\gamma}{\lambda} + \frac{\delta}{\lambda^2}, \quad \lambda \in [0, \infty], \quad \delta > 0, \quad M - \beta < 0.$$

10. Рациональный потенциал первого типа:

$$V(x) = 4\delta^2 x^6 + 8\gamma\delta x^4 + 4(\gamma^2 + 2\delta\beta - 3\delta)x^2 + \\ + 4\left(\beta + M - \frac{1}{4}\right)\left(\beta + M - \frac{3}{4}\right)\frac{1}{x^2},$$

$$\psi(x) \propto (x^2)^{-\beta + \frac{3}{4}} e^{-\gamma x^2 - \frac{1}{2}x^4} \prod_{i=1}^M \left(\frac{1}{x^2} - \xi_i\right),$$

$$x \in (0, \infty],$$

$$E = -8(\beta + M - 1)[\gamma + \sigma_1(\xi)],$$

$$b(\lambda) = \frac{\beta}{\lambda} + \frac{\gamma}{\lambda^2} + \frac{\delta}{\lambda^3}, \quad \lambda \in [0, \infty], \quad \delta > 0, \quad \beta + M < \frac{1}{2}.$$

11. Рациональный потенциал второго типа:

$$V(x) = 4\gamma^2 x^6 + 8\beta\gamma x^4 + 4(\beta^2 - \gamma - 2\gamma\delta - 2\gamma M)x^2 + \\ + 4\left(\delta - \frac{1}{4}\right)\left(\delta - \frac{3}{4}\right)\frac{1}{x^2},$$

$$\psi(x) \propto (x^2)^{\delta - \frac{1}{4}} e^{-\beta x^2 - \frac{\gamma x^4}{2}} \prod_{i=1}^M (x^2 - \xi_i),$$

$$x \in [0, \infty],$$

$$E = 8\beta(\delta + M) + 8\gamma\sigma_1(\xi),$$

$$b(\lambda) = -\beta - \gamma\lambda + \frac{\delta}{\lambda}, \quad \lambda \in [0, \infty], \quad \delta > \frac{1}{2}, \quad \gamma > 0.$$

Перечисленные модели были выписаны в работе [18]. Отметим, что некоторые из них, а именно модели 9, 11, а также частные случаи моделей 5, 7 (без сингулярного члена в потенциале) были найдены ранее [17].

Итак, мы получили 11 типов квазиточнорешаемых моделей и вывели условия их устойчивости. Для этих моделей можно сформулировать следующее правило: если в условие их устойчивости буква M явно не входит, то мы имеем дело с бесконечной серией квазиточнорешаемых моделей любых, сколь угодно высоких порядков (потенциалы 2, 5, 7, 8, 11); в противном случае возникает лишь конечная серия устойчивых квазиточнорешаемых моделей с ограниченным максимальным порядком (потенциалы 1, 3, 4, 6, 9, 10). Своеобразный аналог этого правила существует и для точнорешаемых моделей: если в условие устойчивости буква M явно не входит, то модель имеет бесконечный дискретный спектр (потенциалы 1, 5, 6); в противном случае точнорешаемая модель допускает лишь конечное

число связанных состояний, что соответствует потенциальным ямам конечной глубины (потенциалы 2, 3, 4).

Ранее мы отмечали, что в случае $N = 4$ тоже могут возникать бесконечные серии квазиточнорешаемых моделей, если параметры b_α удовлетворяют соотношению (39). Потенциалы этих моделей в невырожденном случае имеют вид

$$V(x) = \omega \sum_{\alpha=1}^4 \frac{\left(b_\alpha - \frac{1}{4}\right) \left(b_\alpha - \frac{3}{4}\right) \prod_{\beta=1}^4 (a_\alpha - a_\beta)'}{\lambda - a_\alpha}, \tag{53}$$

где $\lambda = \lambda(x)$ — функция, определяемая из уравнения (42). Однако любые попытки явно построить эти потенциалы убеждают нас в том, что никаких новых квазиточнорешаемых моделей, не сводимых к перечисленным выше 11 типам, на этом пути получить невозможно. Этот результат является частным случаем более общей теоремы, доказанной в работе [30] и утверждающей, что при условии (39) уравнение (33) с $N = n$ сводится к уравнению (33) с $N = n - 1$. Это утверждение доказывается дробно-линейной заменой переменной λ в уравнении (33).

Если в случае $N = 4$ параметры b_α не удовлетворяют соотношению (39), то к потенциалу (53) добавляются члены вида

$$\left(\sum_{\alpha=1}^4 b_\alpha + M - 1\right) \left\{ -\sum_{\alpha=1}^4 a_\alpha \left(\sum_{\alpha=1}^4 b_\alpha + M\right) + 2 \sum_{\alpha=1}^4 b_\alpha a_\alpha + 2\sigma_1(\xi) \right\} \lambda + \left(\sum_{\alpha=1}^4 b_\alpha + M - 1\right) \left(\sum_{\alpha=1}^4 b_\alpha + M\right) \lambda^2. \tag{54}$$

Именно такими, расширенными потенциалами описываются конечные серии квазиточнорешаемых моделей вплоть до седьмого порядка.

Если же в случае $N = 4$ параметры b_α не удовлетворяют соотношению (39), но в задаче имеется Z_2 -симметрия, то возникают некоторые новые серии квазиточнорешаемых моделей произвольного порядка, отсутствующие в приведенном выше списке (52). К этим моделям относится, например, обсуждавшаяся во Введении модель с шестилинейным потенциалом при значении $p = +1$.

5. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ КВАЗИТОЧНОРЕШАЕМЫЕ МОДЕЛИ И КУЛОНОВСКАЯ ЗАДАЧА

В предыдущем разделе мы построили целый ряд точно- и квазиточнорешаемых моделей и выписали соответствующие им решения. Однако из этих решений не видно, каким состояниям квантовых систем они соответствуют. Более того, нам неизвестны даже порядки полученных нами квазиточнорешаемых моделей, не говоря уже о номерах описываемых ими состояний.

Согласно осцилляционной теореме, номер состояния в одномерном случае определяется количеством вещественных нулей волновой функции внутри физического интервала, в котором формулируется краевая задача. На оси λ этому интервалу соответствует один из фундаментальных интервалов, а роль узлов волновой функции играют числа ξ_i . Поэтому решение классификационной задачи может быть сведено к простому подсчету вещественных чисел ξ_i , попадающих в физический интервал.

В невырожденном случае числа ξ_i удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^M \frac{1}{\xi_i - \xi_h} + \sum_{\alpha=1}^N \frac{b_\alpha}{\xi_i - a_\alpha} = 0, \quad i = 1, \dots, M, \quad (55)$$

в которых a_α и b_α — вообще говоря, комплексные числа:

$$a_\alpha = a_\alpha^{(1)} + ia_\alpha^{(2)}, \quad b_\alpha = b_\alpha^{(1)} + ib_\alpha^{(2)}. \quad (56)$$

Поэтому ξ_i тоже следует искать в комплексной форме:

$$\xi_i = \xi_i^{(1)} + i\xi_i^{(2)}. \quad (57)$$

Подстановка (56) и (57) в (55) приводит к системе вещественных уравнений, которые можно записать в виде

$$\sum_{h=1}^M \frac{\xi_i - \xi_h}{|\xi_i - \xi_h|^2} + \sum_{\alpha=1}^N b_\alpha^{(1)} \frac{\xi_i - a_\alpha}{|\xi_i - a_\alpha|^2} + \sum_{\alpha=1}^N b_\alpha^{(2)} \hat{\varepsilon} \frac{\xi_i - a_\alpha}{|\xi_i - a_\alpha|^2} = 0, \quad (58)$$

где $\xi_i = (\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)})$ и $a_\alpha = (a_\alpha^{(1)}, a_\alpha^{(2)})$ — вещественные двумерные векторы, а $\hat{\varepsilon}$ — матрица поворота векторов на 90° против часовой стрелки.

Уравнения (58) можно интерпретировать как условия экстремума функции

$$V(\xi_1, \dots, \xi_M) = - \sum_{i < h} q_i q_h \ln |\xi_i - \xi_h| - \sum_{i, \alpha} q_i b_\alpha^{(1)} \ln |\xi_i - a_\alpha| - \\ - \sum_{i, \alpha} q_i b_\alpha^{(2)} \phi(\xi_i - a_\alpha), \\ q_i \equiv 1, \quad i = 1, \dots, M, \quad (59)$$

в которой $\phi(x) \equiv \arctg(x^{(2)}/x^{(1)})$ — угловая координата вектора x , а $q_i = 1$ — единичные константы. Нетрудно видеть, что (59) есть не что иное, как потенциал двумерной (логарифмической) кулоновской системы, состоящей из M подвижных частиц с координатами ξ_i и зарядами q_i и N неподвижных частиц с координатами a_α и зарядами двух типов: обычными электрическими, $b_\alpha^{(1)}$, и магнитными, $b_\alpha^{(2)}$, создающими вихревое электростатическое поле. В том, что $b_\alpha^{(1)}$ и $b_\alpha^{(2)}$ действительно имеют смысл электрического и магнитного зарядов, можно убедиться, выписав потенциал, создаваемый одиночной

частицей, помещенной в начало координат:

$$\Phi = b^{(1)} \ln | \mathbf{x} | + b^{(2)} \phi(\mathbf{x}), \quad (60)$$

и заметив, что этот потенциал может быть получен из уравнений 2+1-мерной магнитоэлектродинамики

$$\begin{aligned} \partial_\mu F_{\mu\nu} &= j_\nu, \quad \partial_\mu \tilde{F}_\mu = g, \\ F_{\mu\nu} &\equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad \tilde{F}_\mu \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} F_{\nu\lambda} \end{aligned} \quad (61)$$

в статическом пределе. Действительно, полагая $g \sim b^{(2)}\delta(r)$, $j_0 \sim b^{(1)}\delta(r)$, $j_{1,2} = 0$ и находя статическое решение (61) в классе функций вида $A_0 = \Phi$, $A_{1,2} = 0$, получаем (60).

Итак, мы видим, что задача решения системы числовых уравнений (55) эквивалентна задаче нахождения положений равновесия системы подвижных кулоновских частиц в поле неподвижных дионов. В целом эта задача довольно сложна. Однако в частном случае, когда параметры a_α и b_α либо вещественны, либо образуют пары комплексносопряженных чисел (напомним, что это условие вещественности квантовомеханического потенциала), она существенно упрощается. Действительно, наличие Z_2 -симметрии в системе приводит к существованию прямой (совпадающей в данном случае с вещественной осью λ), на которой все кулоновские силы (со стороны неподвижных дионов) продольны. Тем самым задача о равновесии подвижных частиц на этой прямой становится одномерной, что позволяет нам искать решения уравнения (55) в классе вещественных чисел*.

Рассмотрим теперь более подробно структуру (вещественной) оси λ . Вещественные числа u_α , т. е. координаты лежащих на этой оси неподвижных частиц, делят ее на некоторое количество интервалов, названных нами ранее фундаментальными. Условимся называть фундаментальный интервал классически устойчивым, если заключенные в нем подвижные кулоновские частицы не могут подойти вплотную к его границам. Граница фундаментального интервала может быть конечной (совпадать с одной из вещественных точек u_α) или бесконечной. Очевидно, что условие классической устойчивости интервала вблизи его конечной границы можно записать в виде

$$b_\alpha > 0 \quad (62)$$

как условие одноименности зарядов подвижных и неподвижных частиц. Что касается условия устойчивости интервала вблизи бесконечной границы, то оно выражается как условие отрицательности полного заряда системы

$$\sum_{\alpha=1}^N b_\alpha + M < 0. \quad (63)$$

* Рассмотренная нами магнитоэлектростатическая аналогия является обобщением известной электростатической аналогии Стильгеса [48].

Отметим, что условия классической и квантовой устойчивости фундаментальных интервалов почти совпадают! Различие состоит лишь в том, что в квантовом случае [см. формулы (45) и (46)] в правых частях неравенств стоит не 0, а $1/2$.

Нетрудно убедиться в том, что максимальное количество устойчивых фундаментальных интервалов равно $N - 1$. Каждому распределению частиц по устойчивым интервалам отвечает некое положение их устойчивого равновесия. Таким образом, количество различных (неэквивалентных) решений уравнения (55) равно числу распределений M частиц по $N - 1$ интервалам. Из этих $N - 1$ интервалов один — физический. Поскольку количество подвижных частиц, попавших в физический интервал, определяет количество узлов волновых функций, т. е. номера состояний, то это дает нам возможность полностью решить классификационную задачу. Здесь уместно отметить, что известное явление отталкивания узлов волновых функций, состоящее в том, что всякое сближение узлов требует сильного изменения потенциала, на языке электростатической аналогии допускает простое объяснение: это есть не что иное, как обычное кулоновское отталкивание. Рассмотрим конкретные случаи.

1) $N = 2$. Имеется всего один устойчивый фундаментальный интервал, который должен быть отождествлен с физическим. Он может быть как конечным, так и бесконечным. Если интервал конечен, то в него может быть помещено любое количество подвижных частиц, и для каждого количества будет существовать положение устойчивого равновесия. Следовательно, мы приходим к задачам, в которых перечисляются все уровни системы. Если интервал бесконечен, то перечисляются все уровни вплоть до некоторого. Заметим, что при $N = 2$ уровни энергии выражаются непосредственно через число частиц M .

2) $N = 3$. В этом случае устойчивыми могут быть два интервала, лишь один из которых — физический. M частиц могут быть распределены по этим двум интервалам $M + 1$ способами. При этом в физический интервал попадает $0, 1, \dots, M$ частиц. Следовательно, каждому M соответствует квазиточнорешаемая модель $M + 1$ -го порядка, в которой точно вычисляются первые $M + 1$ уровней энергии, начиная с основного. Уровни энергии выражаются при этом через центры масс соответствующих конфигураций частиц σ_1 (ξ).

Случаи с большими N могут быть рассмотрены аналогично. Суммируя сказанное, можно сделать вывод, что рассмотренные в предыдущем разделе одномерные квантовые системы в точности эквивалентны двумерным классическим системам кулоновских частиц, обладающих электрическим и магнитным зарядами. Решая чисто классическую задачу о равновесии такой системы частиц, можно получить детальную информацию как о волновых функциях, так и об энергиях точно- и квазиточнорешаемых моделей.

Все сказанное выше может быть без труда распространено и на вырожденный случай. При вырождении, как мы уже отмечали,

происходит слияние точек или увод их на бесконечность. На языке кулоновской задачи слиянию точек a_α отвечает образование всевозможных диполей, мультиполей и т. д. Уводу точек a_α на бесконечность отвечает появление в системе внешнего однородного или неоднородного электростатического поля.

Электростатическая аналоговая задача позволяет легко строить траектории в комплексном пространстве параметров, переводящие одни уровни энергии в другие. Рассмотрим пример квазиточнорешаемой модели с $N = 3$, когда имеется шесть параметров a_α и b_α , $\alpha = 1, 2, 3$. Выберем в качестве нефизического и физического интервалов соответственно два конечных интервала $[a_1 a_2]$ и $[a_2 a_3]$. Обеспечим их устойчивость требованием $b_{1,2,3} > 0$. Пусть начальное положение ξ -частиц соответствует K -му уровню, т. е. K ξ -частиц находится в правом интервале, а $M - K$ — в левом. (Предполагается, что $M > K$.) Рассмотрим следующую траекторию: 1) a_2 -частица объявляется подвижной, «открепляется» от своего места и переводится в положение устойчивого равновесия: $a_2 \rightarrow a'_2$; 2) заряд ее уменьшается до нуля: $b_2 \rightarrow b'_2 \equiv 0$, при этом положение равновесия корректируется: $a'_2 \rightarrow a''_2$; 3) ставшая нейтральной a_2 -частица переносится через L ξ -частиц влево: $a''_2 \rightarrow a'''_2$; 4) заряд ее восстанавливается: $0 \equiv b'_2 \rightarrow b_2$; 5) восстанавливается ее первоначальное положение: $a'''_2 \rightarrow a_2$. Очевидно, что конечная конфигурация системы ξ -частиц соответствует $(K + L)$ -му уровню энергии. Такой же результат может быть получен путем изменения других параметров системы, например параметров a_1 , a_3 , b_2 , b_3 при постоянном a_2 [33].

С помощью электростатической аналогии можно исследовать и спектральные особенности в квазиточнорешаемых моделях. Это связано с тем, что особенности Бендера и Ву, возникающие при пересечении (сплетении) уровней энергии как функций параметров системы, можно интерпретировать как точки возникновения классической неустойчивости в системе частиц. Чтобы проиллюстрировать это, представим себе, что после первых двух шагов описанной выше процедуры заряд b_2 сделан малым и отрицательным. Это приведет к возникновению слабого притягивающего центра, который не нарушит существующего равновесия частиц. Если теперь начать перемещать частицу a_2 влево, то в некоторый момент устойчивое состояние ближайшей к ней ξ -частицы сменится неустойчивым, и она «упадет» на частицу a_2 . Можно показать, что 1) в точке возникновения неустойчивости происходит слияние двух положений равновесия — устойчивого и неустойчивого, 2) координаты всех ξ -частиц, а также уровень энергии имеют в этой точке корневую особенность, связанную со сплетением данного уровня со следующим. Электростатическая аналогия помогает вычислить положения всех таких особенностей. Легко видеть, что при малых b_2 они лежат в точках $\xi_i^{(0)} \pm c_i \sqrt{-b_2}$, где $\xi_i^{(0)}$ — положения устойчивого равновесия всех ξ_i -частиц в отсутствие a_2 -частицы, а c_i — легко вычисляемые по теории возмуще-

ний константы. Заметим, что при положительных b_2 особенности располагаются в комплексно-сопряженных точках [33].

Другой тип особенностей в квазиточнорешаемых моделях возникает при слиянии двух или нескольких узлов волновой функции. L сливающихся узлов ξ_i , $i = 1, \dots, L$, как функции параметров системы имеют в точках слияния корневые особенности L -й степени. При этом сами уровни энергии как симметрические функции координат узлов остаются в этих точках регулярными. Анализируя уравнение (55), нетрудно показать, что подобные узловые особенности могут возникать лишь, когда заряд одной из неподвижных частиц равен $b_\alpha = -(L - 1)$. При таком заряде на неподвижную частицу могут налипнуть L подвижных частиц с единичными зарядами, в результате чего возникнет составная частица с зарядом $+1$ и с энергией связи, равной нулю. Чтобы такая частица могла существовать не распадаясь, полная сила, действующая на нее со стороны всех остальных частиц, должна равняться нулю. Из этого условия находят ее всевозможные положения a_α [33].

В заключение этого раздела заметим, что если задача о нахождении узлов волновых функций одномерных квантовых систем связана с решением задачи о равновесии заряженных частиц во внешнем поле, то задача о нахождении узловых линий, поверхностей волновых функций для систем размерностей $D \geq 2$ оказалась связанной с задачей о равновесии классических заряженных струн, мембран во внешнем поле. При этом уравнение Шредингера не обязательно должно быть уравнением с разделяющимися переменными [34]. Действительно, рассмотрим задачу построения D -мерного уравнения Шредингера $[-\Delta + V(\mathbf{x})]\psi(\mathbf{x}) = E\psi(\mathbf{x})$, точнорешаемого для одного какого-нибудь состояния. Легко видеть, что при выборе

$$V(\mathbf{x}) = E + \Delta\psi(\mathbf{x})/\psi(\mathbf{x}), \quad (64)$$

где $\psi(\mathbf{x})$ — гладкая функция, уравнение Шредингера имеет формальным решением саму функцию $\psi(\mathbf{x})$. Требование гладкости потенциала $V(\mathbf{x})$ накладывает на допустимую форму узловых поверхностей $\psi(\mathbf{x})$ ряд ограничений. Для их вывода предположим, что M узловых поверхностей $\psi(\mathbf{x})$ описываются уравнениями $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(t)$, $\mathbf{x}_i \in R_D$, $t \in R_{D-1}$, $i = 1, \dots, M$. Тогда волновую функцию $\psi(\mathbf{x})$ (сточностью до знака) можно представить в виде

$$\psi(\mathbf{x}) = \exp \left\{ - \sum_{i=1}^M \int \frac{\sigma[\mathbf{x}_i(t)] d^{D-1}t}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i(t)|^{D-1}} \right\} \exp F(\mathbf{x}), \quad (65)$$

где $\sigma[\mathbf{x}_i(t)] d^{D-1}t$ — элемент узловой поверхности, а $F(\mathbf{x})$ — некоторая гладкая функция. Подстановка (65) в (64) и требование гладкости $V(\mathbf{x})$ приводят к следующей системе интегральных уравнений

относительно $x_i(t)$:

$$\begin{aligned}
 p[x_i(t)] \left\{ P \int \frac{[x_i(t) - x_i(t')] \sigma[x_i(t')] d^{D-1}t'}{|x_i(t) - x_i(t')|^{D+1}} + \right. \\
 \left. + \sum_{h=1}^M \int \frac{[x_i(t) - x_h(t')] \sigma[x_h(t')] d^{D-1}t'}{|x_i(t) - x_h(t')|^{D+1}} + b(x_i(t)) \right\} = 0, \quad (66)
 \end{aligned}$$

где $b(x) \equiv \nabla F(x)$. Легко видеть, что при $D = 1$ первый член в (66) исчезает, а оставшаяся часть уравнения вырождается в уравнение (50), описывающее равновесие кулоновских частиц с координатами x_i в поле внешних сил. При $D > 1$ полученную систему можно интерпретировать как условие равновесия M абсолютно неупругих безмассовых заряженных струн ($D = 2$) или мембран ($D \geq 3$), взаимодействующих по законам $D + 1$ -мерной электростатики в D -мерном подпространстве. Заряд распределен вдоль струн (по поверхностям мембран) равномерно с единичной плотностью. Уравнение (66) выражает условие равенства нулю нормальной компоненты силы, действующей на каждый элемент струны (или мембраны) со стороны остальных струн (или мембран), а также со стороны внешнего потенциала $F(x)$. Указанная электростатическая аналогия позволяет объяснить множество свойств узловых поверхностей и особенностей их взаимного расположения, а кроме того, проследить за изменением формы узловых поверхностей при изменении потенциала [34].

6. О КЛАССИЧЕСКОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ ЗАДАЧ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

В предыдущем разделе было показано, что квазиточнорешаемые модели допускают формулировку на языке электростатики. Поскольку предельным случаем квазиточнорешаемых моделей являются точнорешаемые модели (см. Введение), то для них классическая формулировка также оказывается возможной [33, 35, 36].

Рассмотрим в качестве примера последнюю, одиннадцатую модель в списке (52). Введя для удобства вместо ξ_i обратные им величины $v_i = \xi_i^{-1}$, легко показать, что спектр этой модели определяется формулой

$$E = 8\delta \left(\beta + \sum_{i=1}^M v_i \right), \quad (67)$$

где числа v_i удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{k=1}^M \frac{1}{v_i - v_k} + \frac{\beta}{v_i^2} + \frac{\gamma}{v_i^3} - \frac{M + \delta - 1}{v_i} = 0, \quad i = 1, \dots, M. \quad (68)$$

Эту систему можно рассматривать как условие равновесия M кулоновских частиц с единичными зарядами, движущимися во внешнем

потенциале, представляющем собой две ямы, разделенные сингулярным в нуле барьером. Как мы уже знаем, каждому распределению частиц по этим двум ямам (например, K частиц в правой яме, а $M - K$ — в левой) соответствует некое положение их устойчивого равновесия, описывающее k -й уровень энергии.

В пределе $M \rightarrow \infty$ уравнение (68) бесконечно усложняется, и возникает точнонерешаемая модель. Конечность потенциала этой модели обеспечивается зависимостью β и γ от M . Определив ее из условий: $4(\beta^2 - 2\gamma M) = g$, $8\beta\gamma = 1$, находим, что $\beta \sim M^{1/3}$, $\gamma \sim M^{-1/3/2}$. Поэтому потенциал предельной модели имеет вид

$$V(x) = \left(2\delta - \frac{1}{2}\right) \left(2\delta - \frac{3}{2}\right) \frac{1}{x^2} + gx^2 + \frac{1}{2}x^4. \quad (69)$$

Спектральная задача для точнонерешаемого потенциала (69) по-прежнему может быть сформулирована на классическом языке. Совершив в (67) и (68) замену $\beta = bM^{1/3}$, $\gamma = \frac{b^2}{2}M^{-1/3}$, $v_i = b\tau_i M^{-2/3}$, получим:

$$E = 4\delta b M^{1/3} \left[1 + \sum_{i=1}^M \frac{\tau_i}{M} \right]; \quad (70)$$

$$\sum_{h=1}^M \frac{1}{\tau_i - \tau_h} \frac{1}{M} + \frac{1}{\tau_i^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\tau_i^3} - \left(1 + \frac{\delta - 1}{M}\right) \frac{1}{\tau_i} = 0, \quad i = 1, \dots, M. \quad (71)$$

Введя плотность распределения частиц $\rho(\tau)$, получим в пределе $M \rightarrow \infty$ (в главном приближении):

$$E = 4\delta b M^{1/3} e, \quad e = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\tau) \tau d\tau, \quad (72)$$

где $\rho(\tau)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\tau')}{\tau - \tau'} d\tau' + \frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\tau^3} - \frac{1}{\tau} = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\tau) d\tau = 1. \quad (73)$$

Это уравнение, как нетрудно видеть, является уравнением равновесия заряженной «жидкости» (с полным зарядом 1), разлитой по двум разделенным ямам. Заряд $Q = K/M$ жидкости в правой яме определяет номер уровня энергии, а центр тяжести жидкости — его значение. Очевидно, что для любых возбуждений с конечным номером K в модели (69) заряд жидкости в правой яме (в главном приближении) равен нулю. Тогда решение уравнения (73) имеет вид

$$\rho(\tau) = \frac{2}{\pi} (-\tau)^{-3} (1 + 4\tau)^{1/2}, \quad -\infty < \tau < -\frac{1}{4}; \quad \rho(\tau) = 0, \quad \tau > -\frac{1}{4}. \quad (74)$$

Формула (74) позволяет найти распределение нефизических нулей волновой функции: $x_n \sim in^{1/3}$, согласующееся с квазиклассическим результатом. Подстановка (74) в (72) дает $e = 0$, что согласуется с конечностью уровней энергии в модели (69). Учет поправок к решению (74), получающихся при итерации уравнения (71) по малым (при $M \rightarrow \infty$) отклонениям этого уравнения от его предельного варианта (73), позволяет показать, что $e \sim M^{-1/3}$, что приводит к конечному выражению для уровней энергии, совпадающему при $K \gg 1$ с квазиклассическим ответом. При $K \geq 1$ поправки не образуют убывающего ряда [следствие точной нерешаемости модели (69)]. Можно показать, что среди квазиточнорешаемых моделей (52) только модели с рациональными и тригонометрическими потенциалами допускают сведение к устойчивым точнорешаемым моделям [36].

Описанная выше процедура сведения квазиточнорешаемых моделей к точнорешаемым возможна для моделей с произвольным N . В качестве примера рассмотрим рациональную модель, соответствующую случаю $N = 4$ и получающуюся в результате вырождения потенциалов, описываемых формулами (53) и (54):

$$\begin{aligned}
 V(x) = & \left(2\delta - \frac{1}{2}\right) \left(2\delta - \frac{3}{4}\right) \frac{1}{x^2} - \left[2\beta \left(M + \delta + \frac{1}{2}\right) - \right. \\
 & \left. - \alpha^2 + 2\gamma \sum_{i=1}^M \frac{1}{v_i}\right] x^2 + [\gamma(M + \delta + 1) - \alpha\beta] x^4 + \\
 & + \frac{1}{4} [\beta^2 + 2\alpha\gamma] x^6 + \frac{1}{4} \beta\gamma x^8 + \frac{1}{16} \gamma^2 x^{10}, \quad (75)
 \end{aligned}$$

имеющую решение

$$E = 4\delta \left(\alpha + \sum_{i=1}^M v_i \right),$$

где v_i — числа, удовлетворяющие системе уравнений

$$\sum_{k=1}^{M'} (v_i - v_k)^{-1} + \gamma v_i^{-4} + \beta v_i^{-3} + \alpha v_i^{-2} - (M + \delta - 1) v_i^{-1} = 0. \quad (76)$$

Отличие этой модели от рассмотренной выше состоит в том, что потенциал ее зависит от вида решения. Тем не менее зависимость параметров α , β , γ от M можно подобрать так, чтобы зависимость потенциала от вида решения стала исчезающе малой в пределе $M \rightarrow \infty$. Указанная зависимость находится из уравнений $\beta^2 + 2\alpha\gamma = 4$, $\gamma M - \alpha\beta = B$, $2\beta M - \alpha^2 + 2\gamma \sum_{i=1}^M v_i^{-1} = A$. Возникающая в пределе $M \rightarrow \infty$ точнорешаемая модель имеет вид

$$V(x) = Ax^2 + Bx^4 + x^6 + \left(2\delta - \frac{1}{2}\right) \left(2\delta - \frac{3}{2}\right) \frac{1}{x^2}. \quad (77)$$

Переходя к плотности распределения частиц $\rho(\tau)$, можно получить для нее систему уравнений, которая, как и в предыдущем случае, может быть решена явно. В случае $K \gg 1$ учет поправок к найденному решению позволяет получить как для уровней энергии, так и для распределения узлов волновых функций ответы, совпадающие с квазиклассическими. Аналогичным образом можно показать, что модели квантовой механики с четными полиномиальными потенциалами степени $2n$ могут быть получены как предельные случаи квазиточнорешаемых моделей с $N = n + 1$. Это означает, что спектральные задачи для любых точнорешаемых моделей одномерной квантовой механики могут быть сформулированы на чисто классическом языке, в терминах задачи о равновесии бесконечного количества заряженных кулоновских частиц во внешнем классическом потенциале [36].

7. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ КВАЗИТОЧНОРЕШАЕМЫЕ МОДЕЛИ И МАГНЕТИКИ НА АЛГЕБРЕ $SL(2)$

Вернемся снова к системе числовых уравнений (35), (36), описывающей спектры точно- и квазиточнорешаемых моделей. Оказывается, что эти уравнения в точности совпадают с уравнением анзацца Бете для нелокальных вполне интегрируемых спиновых систем на конечной одномерной решетке. В качестве гамильтонианов этих систем можно выбрать любую линейную комбинацию операторов

$$H_\alpha = \sum_{\beta=1}^N \frac{S_\alpha^+ S_\beta^- + S_\alpha^- S_\beta^+ - 2S_\alpha^0 S_\beta^0}{a_\alpha - a_\beta}, \quad (78)$$

действующих в прямом произведении $W = W_1 \otimes W_2 \otimes \dots \otimes W_N$ пространств представлений алгебры $SL(2)$. $S_\alpha^-, S_\alpha^+, S_\alpha^0$ — образующие этой алгебры, действующие в пространстве представлений W_α α -го узла. Нетрудно проверить, что все операторы (78) коммутируют между собой, $[H_\alpha, H_\beta] = 0$, и поэтому имеют общий спектр. Параметры a_α , как мы видим, явно входят в гамильтониан и играют роль констант связи, характеризующих интенсивность взаимодействия спинов, «сидящих» в разных узлах. Параметры b_α явно в гамильтониан не входят, а включены в определение образующих, характеризуя те представления, в которых они действуют. Они связаны со «спинами» бесконечномерных неприводимых представлений алгебры $SL(2)$, которые могут быть реализованы следующим образом:

$$S_\alpha^+ = t_\alpha, \quad S_\alpha^0 = t_\alpha \frac{\partial}{\partial t_\alpha} + b_\alpha, \quad S_\alpha^- = t_\alpha \frac{\partial^2}{\partial t_\alpha^2} + 2b_\alpha \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \quad (79)$$

на пространстве всех аналитических, регулярных в окрестности нуля функций. В этом пространстве существует старший вектор $|0\rangle_\alpha \equiv 1$, такой, что $S_\alpha^- |0\rangle_\alpha = 0$. Собственное значение оператора z -проекции спина S_α^0 на $|0\rangle$ есть $-b_\alpha$, поэтому b_α есть спин неприводимого представления.

водимого представления алгебры $SL(2)$ с обратным знаком. Это подтверждается тем, что собственное значение оператора Казимира S_α^2 на $|0\rangle_\alpha$ есть $(-b_\alpha)(-b_\alpha + 1)$. Бесконечномерность представления (79) следует из отсутствия младшего вектора, т. е. регулярной в окрестности нуля аналитической функции, действие на которую оператора S_α^+ давало бы нуль.

Спектры операторов (78) в случае, когда образующие алгебры $SL(2)$ действуют в конечномерном представлении, были вычислены Годеном в работе [37] методом анзаца Бете. Этот метод тривиально обобщается и на интересующий нас бесконечномерный случай. Следуя Годену, введем операторнозначные функции параметра λ :

$$S^\pm(\lambda) = \sum_{\alpha=1}^N \frac{S_\alpha^\pm}{\lambda - a_\alpha}, \quad S^0(\lambda) = \sum_{\alpha=1}^N \frac{S_\alpha^0}{\lambda - a_\alpha}, \quad (80)$$

которые, как нетрудно видеть, удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} [S^\pm(\lambda), S^0(\mu)] &= \pm \frac{1}{\lambda - \mu} [S^\pm(\lambda) - S^\pm(\mu)], \\ [S^+(\lambda), S^-(\mu)] &= \frac{2}{\lambda - \mu} [S^0(\lambda) - S^0(\mu)]. \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Из этих соотношений следует, что операторы

$$S^2(\lambda) \equiv \frac{1}{2} \{S^+(\lambda)S^-(\lambda) + S^-(\lambda)S^+(\lambda) - 2S^0(\lambda)S^0(\lambda)\} \quad (82)$$

коммутируют

$$[S^2(\lambda), S^2(\mu)] = 0 \quad (83)$$

для всех λ и μ . Поэтому $S^2(\lambda)$ можно рассматривать как производящую функцию интегралов движения. В частности, вычеты в простых полюсах функции $S^2(\lambda)$ дают операторы H_α . Если искать собственные функции операторов $S^2(\lambda)$ в бетевском виде:

$$|M\rangle = S^-(\xi_1) \times \dots \times S^-(\xi_M) |0\rangle, \quad |0\rangle \equiv \prod_{\alpha=1}^N |0\rangle_\alpha, \quad (84)$$

где ξ_1, \dots, ξ_M — неизвестные числовые параметры (квазимпульсы магнонов), то, используя коммутационные соотношения (81), можно получить условия разрешимости спектрального уравнения в классе функций вида (84), которые в точности совпадают с уравнениями (35), (36).

Рассматриваемые модели магнетиков не являются локальными спиновыми системами. В гамильтонианах этих магнетиков каждый спин взаимодействует со всеми остальными, т. е. имеется дальнее действие и налицо типичная квазиклассическая ситуация. Это подтверждается также и тем, что полная интегрируемость указанных моделей связана с решениями не обычного, квантового уравнения

Янга — Бакстера (уравнения треугольников), а так называемого классического уравнения треугольников [38], возникающего в пределе, когда $\hbar \rightarrow 0$. Квантовая S -матрица $S^{\alpha\beta}(\lambda)$ связана с классической $X^{\alpha\beta}(\lambda)$ соотношением: $S^{\alpha\beta}(\lambda) \approx 1 + \hbar X^{\alpha\beta}(\lambda)$ [38].

Классическое уравнение треугольников для матрицы $X^{\alpha\beta}(\lambda)$ имеет вид

$$[X^{\alpha\beta}(\lambda_1), X^{\beta\gamma}(\lambda_2)] + [X^{\beta\gamma}(\lambda_2), X^{\gamma\alpha}(\lambda_3)] + [X^{\gamma\alpha}(\lambda_3), X^{\alpha\beta}(\lambda_1)] = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \quad (85)$$

Если искать его решение в виде $X^{\alpha\beta}(\lambda) = S_\alpha S_\beta \Delta(\lambda)$, то для функции $\Delta(\lambda)$ возникает уравнение (25), решения которого были использованы для построения точно- и квазиточнорешаемых моделей. Таким образом, мы видим, что уравнение (25) играет в теории точно- и квазиточнорешаемых моделей ту же роль, что и уравнение треугольников в теории вполне интегрируемых систем.

Итак, нам удалось связать некоторые из рассматривавшихся в разд. 4 и характеризующиеся числами N точно- и квазиточнорешаемые модели с магнетиками на алгебрах вида $SL(2) \otimes \dots \otimes SL(2)$ (N раз). Мы видим, что, решая спектральную задачу для этих магнетиков, можно получить исчерпывающую информацию о спектрах связанных с ними точно- и квазиточнорешаемых систем. До сих пор речь шла лишь о невырожденном случае. Можно показать, что аналогичная связь сохраняется и при вырождении, однако при этом возникают магнетики на других (контрактированных) алгебрах Ли. Гамильтонианы вырожденных магнетиков по-прежнему могут быть получены из производящей операторной функции $S^2(\lambda)$, определенной формулой (82). Входящие в формулу (82) операторы $S^\pm(\lambda)$ и $S^0(\lambda)$ удовлетворяют тем же, что и (81), коммутационным соотношениям. Однако вид этих операторов в вырожденном случае отличен от (80). Напомним, что всякое вырождение сводится либо к слиянию полюсов $a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_K} \rightarrow a$, либо к уводу их на бесконечность $a_{\beta_1}, \dots, a_{\beta_L} \rightarrow \infty$. Для явного построения операторов $S^I(\lambda)$, $I = +, -, 0$, возникших в результате подобных вырождений, необходимо в (80) произвести замену:

$$\sum_{i=1}^K \frac{S^I_{\alpha_i}}{\lambda - a_{\alpha_i}} \rightarrow \frac{U^I_1}{\lambda - a} + \dots + \frac{U^I_K}{(\lambda - a)^K}, \quad (86)$$

или

$$\sum_{i=1}^L \frac{S^I_{\beta_i}}{\lambda - U_{\beta_i}} \rightarrow V^I_1 + \dots + \lambda^{L-1} V^I_L, \quad (87)$$

где U^I_n и V^I_n — новые операторы. Коммутационные соотношения для этих операторов находятся подстановкой разложений (86) и (87)

в коммутационные соотношения (81) [39]. (Классический аналог этого метода был сформулирован в работе [40], где использовался для исследования вырождений в классических гамильтоновых системах.)

8. РАЦИОНАЛЬНЫЕ КВАЗИТОЧНОРЕШАЕМЫЕ МОДЕЛИ (МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ)

В разд. 4 был построен класс одномерных точно- и квазиточно-решаемых моделей, связанных с линейными многопараметрическими уравнениями вида (33). Согласно результатам разд. 1 и 2, эти же уравнения могут быть использованы для построения многомерных точно- и квазиточнорешаемых уравнений шредингеровского типа на, вообще говоря, кривых многообразиях. Существует бесчисленное количество неэквивалентных способов перехода от (33) к D -мерному шредингеровскому уравнению. Вначале мы рассмотрим один из наиболее простых способов такого перехода [36], основанный на отождествлении спектрального параметра r_{D-1} с энергией, а параметров r_0, \dots, r_{D-2} — с константами разделения. С помощью явных формул, приведенных в разд. 2, нетрудно показать, что получающееся при этом уравнение имеет вид [31, 41]:

$$\left\{ -V\bar{g} \sum_{i=1}^D \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left[\frac{g^{ii}}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \right] + V(\lambda) \right\} \psi(\lambda) = E\psi(\lambda), \quad (88)$$

где

$$g^{ii} = \omega \prod_{\alpha=1}^N (\lambda_i - a_\alpha) \prod_{k=1}^{D'} (\lambda_i - \lambda_k)^{-1}, \quad g \equiv \prod_{i=1}^D g^{ii}, \quad (89)$$

а

$$V(\lambda) = \omega \sum_{i=1}^D \frac{\prod_{\alpha=1}^N (\lambda_i - a_\alpha)}{\prod_{k=1}^{D'} (\lambda_i - \lambda_k)} \left\{ \sum_{\alpha=1}^N \frac{(b_\alpha - \frac{1}{4})(b_\alpha - \frac{3}{4})}{(\lambda_i - a_\alpha)^2} + 2 \sum_{\alpha=1}^N \left(\sum_{\beta=1}^N \frac{b_\alpha b_\beta - \frac{1}{16}}{a_\alpha - a_\beta} \right) \frac{1}{\lambda_i - a_\alpha} \right\} - \sum_{n=D}^{N-1} r_n \left(\sum_{i=1}^D \frac{\lambda_i^{D-1+n}}{\prod_{k=1}^{D'} (\lambda_i - \lambda_k)} \right). \quad (90)$$

Решениями уравнения (88) являются:

$$\psi(\lambda) = \prod_{i=1}^D \prod_{\alpha=1}^N (\lambda_i - a_\alpha)^{b_\alpha - \frac{1}{4}} \prod_{i=1}^D \prod_{j=1}^M (\lambda_i - \xi_j); \quad (91)$$

$$E = r_{D-1}. \quad (92)$$

Числа ξ_i , $i = 1, \dots, M$, удовлетворяют системе алгебраических уравнений (35), а зависимость спектрального параметра r_{D-1} от этих чисел дается формулами (38).

Рассмотрим случай, когда все параметры a_α и b_α — вещественны, и выясним, каково условие положительной определенности метрики g_{ik} , т. е. сформулируем условие эллиптичности уравнения (88). Для этого заметим, что N точек a_α делят ось λ на $N + 1$ интервалов, которые были нами ранее названы фундаментальными. Знаком фундаментального интервала назовем знак выражения $(\lambda - a_1) \times \dots \times (\lambda - a_N)$. Очевидно, что знаки фундаментальных интервалов чередуются. Вспомним теперь, что в нашем распоряжении имеется D независимых переменных $\lambda_1, \dots, \lambda_D$. Распределим их по D интервалам так, чтобы знаки интервалов, занятых этими переменными, чередовались. Тогда, очевидно, знак g^{ii} не будет зависеть от i . Подбором знака ω можно обеспечить положительность всех диагональных элементов метрического тензора g_{ik} .

Сформулируем теперь условие эрмитовости гамильтониана модели (88) на решениях (91). Рассуждая так же, как и в разд. 4, можно показать, что для эрмитовости гамильтониана необходимо, чтобы все интервалы, занятые переменными λ_i , были квантовомеханически устойчивыми. Определение квантовомеханической устойчивости то же, что и в одномерном случае. Из формулы (91) следует, что устойчивость всех занятых переменными λ_i интервалов гарантирует обращение волновой функции в нуль на границах области D -мерного пространства, где формулируется спектральная задача. В дальнейшем фундаментальные интервалы, занятые переменными λ_i , по аналогии с одномерным случаем условимся называть физическими. Подчеркнем также, что число устойчивых интервалов не может превышать $N - 1$.

Все сказанное выше без труда обобщается и на вырожденный случай, возникающий при слиянии точек a_α или вводе их на бесконечность. Для классификации получающихся при таком вырождении моделей можно воспользоваться графическим методом, сформулированным в разд. 4 для одномерных задач. Единственное отличие от одномерного случая состоит в том, что количество отмечаемых на диаграммах физических интервалов теперь не 1, а D .

Перейдем к рассмотрению конкретных случаев.

1) $D = N$. Имеется единственная диаграмма вида

$$\text{|||||} \dots \text{|||||} \text{---} \quad (93)$$

Роль энергетического параметра играет параметр r_{N-1} , равный согласно (38а) нулю. Поэтому спектр модели бесконечно вырожден. Число физических интервалов, N , превышает число устойчивых, $N - 1$. Поэтому гамильтониан модели неэрмитов, а волновые функции — не нормируемы. Пространство, в котором формулируется

уравнение, является плоским, в чем легко убедиться, отождествив переменные λ_i с обобщенными N -мерными эллипсоидальными координатами [41].

2) $D = N - 1$. В этом случае для каждого N имеются две невырожденные диаграммы:

$$\text{|||||O|||||O|||} \cdots \text{|||||O|||||O} \text{---} \text{O} \text{---} , \tag{94a}$$

$$\text{---} \text{O} \text{---} \text{|||||O|||||} \cdots \text{|||||O|||||O} \text{---} \text{O} \text{---} . \tag{94b}$$

Роль энергетического параметра играет параметр r_{N-2} , выражающийся через число M . Мы получаем точнорешаемые модели. В каждой из диаграмм все физические интервалы могут быть сделаны устойчивыми. Поэтому гамильтонианы этих моделей эрмитовы, а волновые функции нормируемы. В невырожденном случае пространство, в котором формируется уравнение, не является плоским. Однако оно может стать плоским при вырождении. Имеются следующие вырожденные диаграммы:

$$\text{|||||O|||||O|||} \cdots \text{|||||O|||||O|||||} \text{⊙} \text{---} , \tag{95a}$$

$$\text{|||||O|||||O|||} \cdots \text{|||||O|||||} \text{---} \text{O} \text{---} \text{O} , \tag{95b}$$

$$\text{|||||O|||||O|||} \cdots \text{|||||O|||||O|||||} \text{⊙} . \tag{95b}$$

Диаграмма (95a) по-прежнему описывает кривое пространство. Однако диаграммы (95b) и (95b) описывают уже плоское пространство, в чем легко убедиться, отождествляя переменные λ_i с $N - 1$ -мерными эллипсоидальными и параболоидальными координатами соответственно. В плоском пространстве мы получаем модели $N - 1$ -мерного сферически-несимметричного ангармонического осциллятора с центробежными барьерами.

3) $D = N - 2$. В этом случае каждому N соответствует $N - 1$ невырожденных диаграмм. Например, для $N = 4$ имеем три диаграммы вида:

$$\text{|||||O|||||} \text{---} \text{O} \text{---} \text{O} \text{---} , \tag{96a}$$

$$\text{|||||} \text{---} \text{O} \text{---} \text{O} \text{---} \text{O} \text{---} \text{|||||} , \tag{96b}$$

$$\text{---} \text{O} \text{---} \text{|||||O|||||} \text{---} \text{O} \text{---} . \tag{96b}$$

Роль энергетического параметра играет параметр r_{N-3} , зависящий явно от $\xi_i, i = 1, \dots, M$. Входящий в потенциал параметр r_{N-2}

зависит только от M . Поэтому мы получаем квазиточнорешаемую модель, порядок которой равен $K = (M + N - 2)! [(N - 2)! M!]^{-1}$, т. е. числу способов размещения M чисел ξ_i по $N - 1$ интервалам. Все физические интервалы могут быть сделаны устойчивыми, поэтому гамильтонианы этих моделей эрмитовы, а волновые функции — нормируемы. Координатное пространство, не являющееся плоским в невырожденном случае, может стать плоским при вырождении. Например, диаграммы

$$\text{|||||O|||||O|||||} \cdots \text{|||||O|||||O} \text{---} \odot \tag{97}$$

описывают многомерные квазиточнорешаемые модели в плоском пространстве, что проверяется отождествлением переменных λ_i с $N - 3$ -мерными эллипсоидальными координатами. Потенциалы этих моделей имеют вид

$$V(x) = \alpha^2 r^6 + 2\alpha r^2 \sum_{i=1}^D \beta_i x_i^2 + \sum_{i=1}^D \beta_i^2 x_i^2 + \sum_{i=1}^D \frac{\gamma_i (\gamma_i - 1)}{x_i^2} - \alpha \left\{ \sum_{i=1}^D (2\gamma_i + 1) + 2 + 4M \right\} r^2, \quad r^2 = \sum_{i=1}^D x_i^2. \tag{98}$$

Они содержат $2D + 1$ независимых параметров $\alpha, \beta_i, \gamma_i, i = 1, \dots, D$, которые могут быть явно выражены через исходные параметры задачи u_α и $b_\alpha, \alpha = 1, \dots, N$. Модель определена в области, задаваемой неравенствами $x_i \geq 0, i = 1, \dots, D$. Условие ее устойчивости можно записать в виде неравенств: $\gamma_i > 1/2, i = 1, \dots, D, \alpha > 0$. Рассмотрим в качестве примера случай с $M = 1$. Нетрудно показать, что уравнение Шредингера для потенциала (98) имеет в этом случае решения:

$$\psi(x) = \prod_{i=1}^D x_i^{\gamma_i} \left(1 - \sum_{i=1}^D \frac{4\alpha x_i^2}{\xi - 4\beta_i} \right) \exp \left\{ -\frac{\alpha r^4}{4} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^D \beta_i x_i^2 \right\}; \tag{99}$$

$$E = \xi + \sum_{i=1}^D \beta_i (2\gamma_i + 1), \tag{100}$$

где число ξ удовлетворяет уравнению

$$\xi = 8\alpha \sum_{i=1}^D \frac{2\gamma_i + 1}{\xi - 4\beta_i}, \tag{101}$$

эквивалентному алгебраическому уравнению $M + 1$ -го порядка. Нетрудно видеть, что если условия устойчивости выполнены, то волновые функции на границах области определения модели обращаются в нуль.

Отметим, что если $\gamma_i = 0$, то потенциал становится полиномиальным, что позволяет в силу $Z_2 \times Z_2 \times \dots \times Z_2$ -симметрии модели сформулировать ее на всем пространстве. Модель такого типа интересна тем, что в результате предельного перехода $D \rightarrow \infty$ ее можно превратить в нелокальную нерелятивистскую квазиточнорешаемую «теорию поля» с возбуждениями бесщелевого типа.

Многомерные квазиточнорешаемые модели существуют и при $D < N - 2$. Так, например, в случае $D = N - 3$ имеются бесконечные серии квазиточнорешаемых моделей, если выполнено условие (39). Однако, как и в одномерном случае, никаких новых моделей при этом построить не удастся. Все они сводятся к ранее рассмотренным моделям с $D = N' - 2$, где $N' = N - 1$. Если же условие (39) не выполнено, то можно получить конечные серии квазиточнорешаемых моделей с ограниченным максимальным порядком

$$K_{\max} = 3 + \left[\frac{2D+2}{N-D-2} \right]. \tag{102}$$

Это же относится и к общему случаю $D < N - 3$.

Все получающиеся описанным выше способом модели определены на, вообще говоря, кривых многообразиях. Чтобы многообразие стало плоским при заданных D и N , необходимо произвести специальное вырождение, уведя $N - D$ точек a_α на бесконечность.

D -мерные многообразия, о которых идет речь, вложены в N -мерное плоское пространство и могут быть описаны системой $N - D$ уравнений:

$$\sum_{\alpha=1}^N \sigma_\alpha x_\alpha^2 a_\alpha^{N-D-j} = -\delta_{1j}, \quad j = 1, \dots, N - D, \tag{103}$$

где σ_α — знаки выражений $\prod_{i=1}^D (\lambda_i - a_\alpha) \prod_{\beta=1}^{N'} (a_\beta - a_\alpha)^{-1}$.

Рассмотрим теперь более общий способ построения многомерных точно- и квазиточнорешаемых моделей. Включив спектральные параметры r_D, \dots, r_{N-1} в потенциал, выберем в качестве энергетического спектрального параметра произвольную линейную комбинацию параметров r_0, \dots, r_{D-1} , а оставшиеся $D - 1$ линейных комбинаций этих же параметров отождествим с константами разделения. В результате мы снова получим уравнение Шредингера вида (88), но в котором

$$g^{ii} = \prod_{\alpha=1}^N (\lambda_i - a_\alpha) \prod_{k=1}^D (\lambda_i - \lambda_k)^{-1} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \sum_{n=1}^D c_n \sigma_n (\lambda - \alpha); \tag{104}$$

$$V = - \sum_{i=1}^D g^{ii} \left\{ \sum_{n=D}^{N-1} r_n \lambda^{n-D} \prod_{\alpha=D+1}^N (\lambda_i - a_\alpha)^{-1} + (h^2 g)^{1/4} \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i^2} (h^2 g)^{-1/4} \right\} - \sum_{i=1}^D \left[\frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} (h g^{ii}) \right] (h^2 g)^{1/4} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} (h^2 g)^{-1/4}, \tag{105}$$

где

$$h \sim \prod_{i < k}^D (\lambda_i - \lambda_k) \prod_{i=1}^D \prod_{\alpha=1}^N (\lambda_i - a_\alpha)^{2b_\alpha - 1}. \quad (106)$$

Здесь $\sigma_n(\lambda - a)$ — симметрические полиномы n -го порядка от D переменных $\lambda_i - a$, $i = 1, \dots, D$, где $a = \min \{a_\alpha\}$, а c_n — произвольные константы. Для эллиптичности уравнения Шредингера необходимо, чтобы 1) знаки физических интервалов чередовались; 2) все константы c_n были неотрицательными и 3) интервал $[-\infty, a]$ не был физическим. Эрмитовость гамильтониана на решениях, а также нормируемость волновых функций обеспечиваются требованием квантовомеханической устойчивости всех физических интервалов. Нетрудно показать, что при $D = N - 1$ возникают точнорешаемые модели. Отличие этих моделей от рассмотренных выше состоит в том, что энергетический спектральный параметр зависит теперь не только от M , но и от ξ_i . Поэтому мы получаем точнорешаемые уравнения со сплетающимися энергетическими уровнями. При этом сплетаются лишь уровни, относящиеся к разным значениям M (следствие многомерности задачи). При $c_n = \delta_{n1}$ все уровни расплетаются, и мы возвращаемся к случаю моделей, описываемых формулами (89), (90). Бесконечные серии квазиточнорешаемых моделей возникают при $D = N - 2$ и при $c_n = \delta_{n1}$ сводятся к моделям (89), (90). Случай $D = N - 3$ по-прежнему не приносит ничего нового, если выполнено условие (39). Если же это условие не выполнено, то при $D \leq N - 3$ возникают конечные серии квазиточнорешаемых моделей с максимальным порядком

$$K_{\max} = 3 + \left[\frac{2D+2}{N-D-2} \right]. \quad (107)$$

Гамильтонианы точно- и квазиточнорешаемых моделей, описываемые формулами (88), (104) — (106) при $D = N - 1$ и $D = N - 2$ в результате замены переменных $t_\alpha = \prod_{i=1}^D (\lambda_i - a_\alpha) \prod_{\beta=1}^D (a_\beta - a_\alpha)^{-1}$ и преобразования подобия могут быть представлены в виде комбинаций образующих S_α^+ , S_α^- , S_α^0 алгебры $SL(2)$, определенных формулой (79). Так, например, гамильтонианы точнорешаемых моделей сводятся к линейным комбинациям операторов

$$h_\alpha = \sum_{\beta=1}^D \frac{S_\alpha^+ S_\beta^-}{a_\alpha - a_\beta} - \frac{S_\alpha^+ S_\alpha^- + 2b_{D+1} S_\alpha^0}{a_\alpha - a_{D+1}} - S_\alpha^-, \quad \alpha = 1, \dots, D, \quad (108)$$

а гамильтонианы квазиточнорешаемых моделей ($D = N - 2$) — к линейным комбинациям операторов

$$h_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^D \frac{S_{\alpha} S_{\beta}}{a_{\alpha} - a_{\beta}} - \frac{S_{\alpha}^+ S_{\alpha}^- + 2b_{D+1} S_{\alpha}^0}{a_{\alpha} - a_{D+1}} - \frac{S_{\alpha}^+ S_{\alpha}^- + 2b_{D+2} S_{\alpha}^0}{a_{\alpha} - a_{D+2}} - S_{\alpha}^- - \frac{S_{\alpha}^+ \left\{ \left(\sum_{\alpha=1}^D S_{\alpha}^0 \right)^2 - \left(\sum_{\alpha=1}^D b_{\alpha} \right)^2 - M^2 + (2b_{D+1} + 2b_{D+2} - 1) \left(\sum_{\alpha=1}^D S_{\alpha}^0 - \sum_{\alpha=1}^D b_{\alpha} - M \right) \right\}}{(a_{\alpha} - a_{D+1})(a_{\alpha} - a_{D+2})} \quad (109)$$

Мы видим, что выражения (108) билинейны по образующим, а выражения (109) — **трилинейны**. Кроме того, подчеркнем, что операторы S_{α} являются образующими **бесконечномерных** представлений алгебры $SL(2)$. Отмеченные моменты существенно отличают представления типа (109) от представлений, используемых в алгебраическом подходе [19, 21] для гамильтонианов квазиточнорешаемых систем.

Гамильтонианы всех рассматривавшихся в этой работе бесконечных серий квазиточнорешаемых моделей можно представить в виде бесконечных блочных матриц $H = \| H_{\alpha\beta} \|$ специального вида, действующих на блочные векторы $\varphi = \{\varphi_{\alpha}\}$. (Индексы нумеруют блоки матриц H размером $K_{\alpha} \times K_{\alpha}$, а также блок-компоненты векторов φ длиной K_{α} .) Матрицы H строятся следующим образом:

$$H = H^+ (H^d - e) + H^0. \quad (110)$$

Здесь H^d — блок-диагональная матрица: $H_{\alpha\beta}^d = \delta_{\alpha\beta} H_{\alpha\beta}^d$; H^+ — матрица, все блоки которой, расположенные над первой блок-наддиагональю, равны нулю: $H_{\alpha\beta}^+ = 0$, если $\alpha > \beta + 1$, а H^0 — матрица, для которой равны нулю все блоки, расположенные над главной блок-диагональю: $H_{\alpha\beta}^0 = 0$, если $\alpha > \beta$. Мы видим, что матрица H^+ действует как «повышающий» оператор, превращая n -компонентные блок-векторы φ в $n + 1$ -компонентные, в то время как действие матриц H^d и H^0 на векторы φ не приводит к увеличению числа их блок-компонент. По этой причине оператор H можно в целом рассматривать как повышающий оператор, для которого спектральная задача, очевидно, является бесконечномерной. Однако если спектр M -го диагонального блока H_{MM}^d матрицы H является K_M -кратно вырожденным, а значение параметра e совпадает с собственным значением H_{MM}^d , то для M -компонентных блок-векторов φ оператор H перестает быть повышающим, и соответствующая спектральная задача для φ становится конечномерной. В результате мы приходим к квазиточнорешаемым моделям порядка $K_1 + K_2 + \dots + K_M$ [26].

Легко видеть, что все операторы h_{α} , описываемые формулой (109), а также их линейные комбинации допускают представление в виде (110). Роль пространства векторов φ играет здесь пространство полиномов от D -переменных, блоки образованы однородными полино-

мами одинаковых степеней, а роль операторов H играют операторы $\left(\sum_{\alpha=1}^D S_{\alpha}^0\right)^2 + \left(2b_{D+1} + 2b_{D+2} - 1\right) \sum_{\alpha=1}^D S_{\alpha}^0$. Легко видеть, что наиболее общий вид оператора H на пространстве полиномов, согласованный с требованием того, что H был дифференциальным оператором второго порядка, следующий:

$$H = (c_n t_n + f) [a (t_i \partial_i)^2 + b (t_i \partial_i) - e] + P_{ik}^{(2)}(t) \partial_i \partial_k + Q_i^{(1)}(t) \partial_i \tag{111a}$$

или

$$H = (c_n t_n + d_{nmk} t_n t_m \partial_k + f + g_{mk} t_m \partial_k + h_k \partial_k) \times \\ \times (a t_i \partial_i - e) + P_{ik}^{(2)}(t) \partial_i \partial_k + Q_i^{(1)}(t) \partial_i \tag{111b}$$

(по повторяющимся индексам ведется суммирование). Здесь $a, b, f, c_n, d_{nmk}, g_{mk}, h_k$ — произвольные параметры, а $P_{ik}^{(2)}(t)$ и $Q_i^{(1)}(t)$ — произвольные полиномы соответственно второго и первого порядков. Допустимые значения параметра e , при которых задача становится конечномерной, равны соответственно $e = aM^2 + bM$ для (111a) и $e = aM$ для (111b). Здесь M — степень полиномов, в классе которых ищется решение.

Квазиточнорешаемые спектральные уравнения для операторов (111) являются уравнениями с двумя спектральными параметрами. Один из параметров «энергетический», а второй — «потенциальный». Нетрудно видеть, что описанная выше схема может быть использована и для построения уравнений со многими спектральными параметрами. Действительно, пусть $w_{n_1, \dots, n_R}, n_r \geq 0, r = 1, \dots, R$ — последовательность конечномерных линейных пространств. Каждому набору m_1, \dots, m_R поставим в соответствие пространство W_{m_1, \dots, m_R} , являющееся линейной оболочкой пространств w_{n_1, \dots, n_R} с $n_r \leq m_r, r = 1, \dots, R$. Очевидно, что для всех конечных m_1, \dots, m_R пространства W_{m_1, \dots, m_R} — конечномерны. Бесконечномерное пространство $W_{\infty, \dots, \infty}$ обозначим через W . Рассмотрим в W следующие операторы:

- 1) $H_r^{+N}, r = 1, \dots, R$, действующие из $W_{n_1, \dots, n_r, \dots, n_R}$ в $W_{n_1, \dots, n_r+N, \dots, n_R}$;
- 2) $H_r^d, r = 1, \dots, R$, диагональные в каждом из пространств $w_{n_1, \dots, n_r, \dots, n_R}$ и обладающие свойством $H_r^d \varphi = f_r(n_r) \varphi$, если $\varphi \in w_{n_1, \dots, n_r, \dots, n_R}$ (собственные значения H_r^d определяются только числом n_r);
- 3) H^0 , переводящие пространства W_{n_1, \dots, n_R} в себя.

Сконструируем теперь новый оператор:

$$H = H^0 + \sum_{r=1}^R H_r^{+1} (H_r^d - e_r^1) + \sum_{r=1}^R H_r^{+2} (H_r^d - e_r^2) (H_r^d - e_r^1) + \dots,$$

действующий из W в W . Нетрудно видеть, что спектральная задача для этого оператора является, в общем случае, бесконечномерной. Однако если $e_r^+ = f_r(N_r)$, $e_r^- = f_r(N_r - 1)$ и т. д., то оператор H оказывается действующим внутри пространства W_{N_1, \dots, N_R} , и спектральная задача для него становится конечномерной. Мы получаем квазиточнорешаемое спектральное уравнение. Числа e_r^+ , $e_r^- \dots$ играют роль «потенциальных» спектральных параметров. Операторы H_r^{+N} , H_r^d и H^0 можно конструировать из образующих алгебр Ли. Действительно, рассмотрим в качестве примера случай полупростой алгебры Ли G ранга R с образующими e_r^0 , e_r^\pm , $r = 1, \dots, R$, удовлетворяющими коммутационным соотношениям:

$$[e_i^0, e_j^0] = 0, [e_i^0, e_j^\pm] = \pm A_{ij} e_j^\pm, [e_i^\pm, e_j^\mp] = \delta_{ij} e_i^0$$

(здесь выписаны коммутационные соотношения только для образующих, связанных с простыми корнями алгебры G ; A_{ij} — матрица Картана). Пусть w_0, \dots, w_0 — младший вектор бесконечномерного представления алгебры G :

$$e_i^- w_0, \dots, w_0 = 0, e_i^0 w_0, \dots, w_0 = E_i w_0, \dots, w_0, i = 1, \dots, R.$$

Определим w_{n_1, \dots, n_R} как линейное пространство, натянутое на векторы, получаемые из вектора

$$(e_1^+)^{n_1} (e_2^+)^{n_2} \dots (e_R^+)^{n_R} w_0, \dots, w_0$$

в результате всевозможных перестановок $n_1 + n_2 + \dots + n_R$ операторов e_r^\pm . Нетрудно видеть, что

$$e_i^0 w_{n_1, \dots, n_R} = \left(E_i + \sum_{j=1}^R A_{ij} n_j \right) w_{n_1, \dots, n_R}.$$

Умножив обе части этого соотношения на матрицу B_{rj} , обратную матрице Картана, получим

$$\left(\sum_{j=1}^R B_{rj} e_j^0 \right) w_{n_1, \dots, n_R} = \left(\sum_{j=1}^R B_{rj} E_j + n_r \right) w_{n_1, \dots, n_R},$$

откуда следует, что операторы H_r^d можно определить формулой

$$H_r^d \equiv \sum_{j=1}^R B_{rj} e_j^0.$$

Что касается операторов H^0 и H_r^{+N} , то они могут быть представлены в виде полиномов от образующих e_r^\pm , e_r^0 .

В качестве примера рассмотрим случай алгебры $SL(3)$. Образующие $e_{1,2}^\pm$ и $e_{1,2}^0$ можно реализовать в виде дифференциальных опе-

раторов первого порядка:

$$\begin{aligned} e_1^0 &= \alpha - 2x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}; \\ e_2^0 &= \beta + x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} - 2z \frac{\partial}{\partial z}; \\ e_1^+ &= \alpha x - x^2 \frac{\partial}{\partial x} - xy \frac{\partial}{\partial y} + (xz - y) \frac{\partial}{\partial z}; \\ e_2^+ &= \beta z + y \frac{\partial}{\partial x} - z^2 \frac{\partial}{\partial z}; \\ e_1^- &= \frac{\partial}{\partial x}; \\ e_2^- &= x \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

Параметры α и β характеризуют бесконечномерное представление алгебры $SL(3)$. Роль младшего вектора играет константа. Из общих формул следует, что

$$H_1^d = \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad H_2^d = \left(y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Требую, чтобы оператор H был дифференциальным оператором не более чем второго порядка, находим, что

$$H = H_1^{+1} (H_1^d - e_1) + H_2^{+1} (H_2^d - e_2) + H^0,$$

где

$$\begin{aligned} H_1^{+1} &= A^1 e_1^+ + \sum_i B_i^1 e_i^0 + \sum_i C_i^1 e_i^-; \\ H_2^{+1} &= A^2 e_2^+ + \sum_i B_i^2 e_i^0 + \sum_i C_i^2 e_i^-, \end{aligned}$$

а H^0 является суммой членов вида

$$e_i^+ e_i^-, e_i^0 e_k^0, e_i^0 e_k^-, e_i^- e_k^-, e_i^0, e_i^-.$$

Заметим, что спектральные уравнения для операторов (111) путем очевидных манипуляций иногда могут быть сведены к квазиточнорешаемым уравнениям типа Шредингера или Паули на, вообще говоря, кривых многообразиях. Вопрос об эрмитовости гамильтонианов, входящих в получаемые таким способом уравнения, требует, очевидно, специального рассмотрения (см. заключение).

9. КВАЗИТОЧНОРЕШАЕМОСТЬ И ПОЛНАЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ

В разд. 7 шла речь о связи точно- и квазиточнорешаемых моделей, порожденных многопараметрическим спектральным уравнением (33) с квантовыми вполне интегрируемыми моделями магнетиков на алгебре $SL(2)$. Было замечено совпадение уравнений (35), (36),

определяющих спектры квазиточнорешаемых моделей с уравнениями анзаца Бете для спиновых моделей с гамильтонианами (78). Однако никакого объяснения, почему это так, дано не было. В этом разделе мы попытаемся ответить на этот вопрос, воспользовавшись утверждением разд. 1, согласно которому каждому точнорешаемому спектральному уравнению с N спектральными параметрами и с коммутирующими весовыми функциями можно сопоставить систему из N коммутирующих операторов с точновычисляемыми спектрами. Нетрудно показать, что операторы L_α имеют вид дифференциальных операторов второго порядка от переменных λ_i . Перейдя к новым переменным

$$t_\alpha = \prod_{i=1}^N (\lambda_i - a_\alpha) \prod_{\beta=1}^N (a_\beta - a_\alpha)^{-1}, \text{ получим [25, 42, 43]:}$$

$$L_\alpha = \sum_{\beta=1}^N \frac{S_\alpha^- S_\beta^+ + S_\alpha^+ S_\beta^- - 2S_\alpha^0 S_\beta^0}{a_\alpha - a_\beta} - S_\alpha^-, \tag{112}$$

где операторы S_α^\pm и S_α^0 выражаются через переменные t_α формулами (79) и поэтому являются образующими бесконечномерных представлений алгебры $SL(2)$. Таким образом, коммутирующие операторы L_α можно рассматривать как интегралы движения вполне интегрируемой модели магнетика на алгебре $SL(2)$. Мы видим, что операторы L_α отличаются от рассмотренных в разд. 7 гамильтонианов H_α только членами вида S_α^- , действующими как понижающие операторы. Поэтому спектры операторов L_α и H_α совпадают (совпадают также уравнения для этих спектров), что, собственно, и было отмечено в разд. 7. Здесь полезно учесть, что операторы L_α могут быть получены из производящей функции — оператора вида

$$\tilde{S}^2(\lambda) = S^2(\lambda) - S^-(\lambda).$$

Введя новые операторные функции:

$$\tilde{S}^-(\lambda) \equiv S^-(\lambda), \quad \tilde{S}^0(\lambda) \equiv S^0(\lambda), \quad \tilde{S}^+(\lambda) = S^+(\lambda) - 1,$$

легко проверить, что они удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, что и $S^-(\lambda)$, $S^0(\lambda)$, $S^+(\lambda)$, и позволяют представить производящую функцию $\tilde{S}^2(\lambda)$ в виде

$$\tilde{S}^2(\lambda) = \frac{1}{2} [\tilde{S}^+(\lambda) \tilde{S}^-(\lambda) + \tilde{S}^-(\lambda) \tilde{S}^+(\lambda) - 2 \tilde{S}^0(\lambda) \tilde{S}^0(\lambda)],$$

полностью аналогичном (82) [43].

Мы уже отмечали в разд. 1, что за явление квазиточнорешаемости ответственно наличие вырождения в системе спектральных параметров. Так, вырожденность спектрального параметра r_{N-2} [см. формулу (38б)] по отношению к другим спектральным параметрам приводит к существованию квазиточнорешаемых моделей порядка,

равного кратности вырождения. Параметр r_{N-2} является собственным значением оператора $R_{N-2} = \sum_{\alpha} a_{\alpha} H_{\alpha}$, поэтому для ответа на вопрос, с какой симметрией связано это вырождение, следует искать операторы, коммутирующие с R_{N-2} , но не коммутирующие с каждым из H_{α} в отдельности. Для нахождения таких операторов заметим, что R_{N-2} коммутирует со всеми операторами $H_{\alpha} = H_{\alpha}(a_1, \dots, a_N)$. С другой стороны, в силу (78), этот оператор имеет вид $R_{N-2} = (\sum_{\alpha} S_{\alpha})^2$ и, следовательно, не зависит от величин a_1, \dots, a_N .

Поэтому он будет коммутировать и со всеми операторами вида $H_{\alpha}(x_1, \dots, x_N)$, где x_1, \dots, x_N — произвольные параметры. При этом если $N \geq 3$, то наборы операторов $H_{\alpha}(a_1, \dots, a_N)$ и $H_{\alpha}(x_1, \dots, x_N)$, вообще говоря, не коммутируют между собой. Поэтому операторы $H_{\alpha}(x_1, \dots, x_N)$ можно рассматривать как производящие функции для образующих алгебры скрытой симметрии, ответственной за вырождение. Попытки замкнуть эту алгебру убеждают нас в том, что она бесконечномерна [26].

Связь между квазиточнорешаемыми моделями и вполне интегрируемыми системами можно использовать и для построения квазиточнорешаемых уравнений. Действительно, если $\bar{R}_0, \dots, \bar{R}_{N-1}$ — любой набор коммутирующих операторов с точновычисляемыми спектрами, то оператор вида

$$H = R_0 + U_1(R_1 - e_1) + \dots + U_{N-1}(R_{N-1} - e_{N-1}), \quad (113)$$

где U_1, \dots, U_{N-1} — произвольные операторы, будет оператором квазиточнорешаемого уравнения при условии, что спектры операторов R_1, \dots, R_{N-1} вырождены по отношению к спектру оператора R_0 . В качестве R_{α} можно взять, например, линейные комбинации операторов

$$H_{\alpha} \equiv \sum_{\beta=1}^N \frac{K_{i\hbar} S_{\alpha}^i S_{\beta}^{\hbar}}{a_{\alpha} - a_{\beta}} \quad (114)$$

имеющих смысл гамильтонианов магнетиков на алгебре Ли с образующими S_{α}^i ($K_{i\hbar}$ — тензор Киллинга — Картана) [20]. Поскольку образующие, вообще говоря, бесконечномерных представлений алгебр Ли могут быть реализованы в виде дифференциальных операторов первого порядка, оператору H можно придать вид многомерного дифференциального оператора второго порядка, выбрав в качестве операторов U_1, \dots, U_{N-1} какие-нибудь функции. потребовав, чтобы для некоторых α операторы S_{α}^i являлись образующими конечномерных матричных представлений алгебры Ли и беря в качестве U_{α} матричные функции, можно получить H в виде матрично-дифференциального оператора второго порядка. Наконец, беря в качестве S_{α}^i образующие градуированных алгебр Ли, можно строить суперсимметричные обобщения квазиточнорешаемых уравнений [39].

Заметим, что для построения коммутирующих операторов R_α вовсе нет необходимости использовать операторы типа (114). В качестве R_α можно брать, например, очевидным образом коммутирующие между собой дифференциальные операторы второго порядка от разных переменных λ_α . Если спектральные задачи для каждого из этих операторов являются точно- или квазиточнорешаемыми, то мы придем к конечным или бесконечным сериям квазиточнорешаемых уравнений конечного или бесконечного порядка. Нетрудно показать, что такие уравнения всегда можно привести к шредингеровскому виду на некоторых кривых многообразиях, если функции $U_1(\lambda), \dots, U_{N-1}(\lambda)$ искать в факторизованном виде: $U_\alpha(\lambda) = u_{\alpha 1}(\lambda_1) \times \dots \times u_{\alpha N-1}(\lambda_{N-1})$, $\alpha = 1, \dots, N-1$ [27].

10. О ДРУГИХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ТОЧНО- И КВАЗИТОЧНОРЕШАЕМЫХ МОДЕЛЯХ

До сих пор мы пользовались лишь одним, весьма специальным способом дискретизации спектра $2N$ — параметрического спектрального уравнения (28), имеющего в рациональном случае вид

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} - \sum_{\alpha=1}^N \frac{e_\alpha^{(2)}}{(\lambda - a_\alpha)^2} + \sum_{\alpha=1}^N \frac{e_\alpha^{(1)}}{\lambda - a_\alpha} \right\} \varphi(\lambda) = 0. \quad (115)$$

Способ этот состоял в фиксации параметров $e_\alpha^{(2)}$ и в объявлении остальных параметров $e_\alpha^{(1)}$ спектральными. Он позволил получить множество точно- и квазиточнорешаемых моделей, которые были детально рассмотрены в разд. 4—9. Однако, как отмечалось в разд. 3, этот способ отнюдь не является единственным, поскольку фиксированными могут быть любые N линейно-независимых комбинаций параметров $e_\alpha^{(2)}$ и $e_\alpha^{(1)}$. Это существенно расширяет множество точно- и квазиточнорешаемых моделей, связанных с уравнением (115). Отметим, что поскольку переход от одной системы параметров $e_\alpha^{(2)}$, $e_\alpha^{(1)}$ к другой $\tilde{e}_\alpha^{(2)}$, $\tilde{e}_\alpha^{(1)}$ осуществляется преобразованием группы $GL(2N)$, то каждый способ фиксации N параметров $\tilde{e}_\alpha^{(2)}$ и объявления остальных N параметров $\tilde{e}_\alpha^{(1)}$ спектральными может быть однозначно охарактеризован элементами этой группы g .

Нетрудно видеть, что в силу тождества: $e_1^{(1)} + \dots + e_N^{(1)} = 0$ все решения уравнения (115) при любом выборе g являются $N/(N-1)$ -вырожденными. Согласно теореме 3 разд. 1, это приводит нас к множеству $N-1$ -мерных точнорешаемых уравнений шредингеровского типа, которые легко могут быть построены с помощью явных формул разд. 2. В частности, при $N=2$ возникает семейство одномерных точнорешаемых моделей, включающее в себя как модели, перечисленные в разд. 4, так и модели более общего вида, связанные с гипергеометрическим уравнением. Частными случаями этих моделей являются потенциалы Кулона, Кратцера, Эккарта и многие другие,

найденные в работе [44]. Специальный выбор элемента g может приводить и к более сильному вырождению в системе параметров. Так, например, фиксация всех $e_\alpha^{(2)}$ обеспечивает, как мы знаем, $N/(N-2)$ -вырождение для $(M+N-2)! \{M!(N-2)!\}^{-1}$ решений при каждом M . Это приводит к широкому классу $N-2$ -мерных квазиточнорешаемых моделей любого порядка, описанных в разд. 4 ($N=3$) и 8 ($N>3$). Другой выбор g , основанный на фиксации $e_\alpha^{(2)}$, $\alpha = 1, \dots, N-1$, и занулении $\sum_{\alpha=1}^N (a_\alpha e_\alpha^{(1)} + e_\alpha^{(2)})$ обеспечивает

$N/(N-2)$ -вырождение для всех решений уравнения (115). Это приводит к $N-2$ -мерным точнорешаемым моделям. В частности, при $N=3$ возникают одномерные точнорешаемые модели, ошибочно отнесенные в работе [19] к классу квазиточнорешаемых моделей с конечным числом расплетенных уравнений. В действительности же все уровни в этих моделях расплетены и могут быть получены в явном виде. Однако этот факт не может быть легко установлен в рамках алгебраического подхода работы [19]. Далее нетрудно показать, что зануление выражения $\sum_{\alpha=1}^N (a_\alpha e_\alpha^{(1)} + e_\alpha^{(2)})$ эквивалентно наложению на параметры задачи условия, аналогичного (39). Это сводит все возникающие при $N=3$ точнорешаемые модели к упомянутым выше точнорешаемым моделям, соответствующим случаю $N=2$ и полностью описанным в работе [44].

Перейдем теперь к рассмотрению конечных серий квазиточнорешаемых моделей с ограниченным максимальным порядком. Напомним, что ранее для получения квазиточнорешаемых моделей K -го порядка при $N>3$ мы выбирали какую-нибудь комбинацию параметров r_0, \dots, r_{D-1} в качестве энергетического спектрального параметра и требовали совпадения $N-D-2$ потенциальных параметров r_D, \dots, r_{N-3} для K решений, налагая тем самым $(K-1) \times (N-D-2)$ условий на $2N-2$ параметра системы. Воспользуемся теперь возможностью переходить от одной системы параметров к другой, путем смешивания их друг с другом преобразованиями группы $GL(N)$. Очевидно, смешивать параметры r_D, \dots, r_{N-3} не имеет смысла, так как это не приводит к изменению потенциала. Однако мы можем смешать каждый из потенциальных параметров со всеми энергетическими. В результате число свободных параметров системы возрастет с $2N-2$ до $2N-2+D(N-2-D)$. Отсюда уже нетрудно получить, что

$$K_{\max} = D + 3 + \left[\frac{2D+2}{N-D-2} \right]. \quad (116)$$

К обсуждению полученной формулы мы вернемся позднее.

11. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ
КВАЗИТОЧНОРЕШАЕМЫЕ МОДЕЛИ

До сих пор речь шла исключительно о моделях, связанных с рациональными решениями скалярного уравнения треугольников (25). Однако, как было показано в разд. 3, это уравнение имеет еще и тригонометрические, и гиперболические решения, из которых, как и в рациональном случае, можно конструировать многопараметрические спектральные уравнения типа (115). Спектры таких уравнений становятся дискретными при фиксации N любых линейных комбинаций параметров $e_{\alpha}^{(2)}$, $e_{\alpha}^{(1)}$ и $e^{(0)}$. Если зафиксировать (как и в рациональном случае) параметры $e_{\alpha}^{(2)}$, то система спектральных уравнений примет вид:

$$\sum_{k=1}^{M'} \rho \operatorname{ctg} \rho (\xi_i - \xi_k) + \sum_{\alpha=1}^N b_{\alpha} \rho \operatorname{ctg} \rho (\xi_i - \alpha_{\alpha}) = 0, \quad i = 1, \dots, M; \quad (117)$$

$$e_{\alpha}^{(1)} = \sum_{i=1}^M b_{\alpha} \rho \operatorname{ctg} \rho (\xi_i - a_{\alpha}), \quad \alpha = 1, \dots, N; \quad (118a)$$

$$e^{(0)} = 3 \left(\sum_{\alpha=1}^N \eta_{\alpha} + M \right). \quad (118b)$$

Из общих теорем разд. 1 и 2 следует, что каждому точнорешаемому многопараметрическому спектральному уравнению можно сопоставить различные семейства точно- и квазиточнорешаемых уравнений шредингеровского типа. Эти семейства тем богаче, чем сильнее вырождение в системе спектральных параметров. Поэтому, имея в распоряжении тригонометрическое многопараметрическое спектральное уравнение с достаточно вырожденным спектром [см. формулу (118б), а также тождество $e_1^{(1)} + \dots + e_N^{(1)} = 0$], естественно поставить вопрос о том, какие новые точно- и квазиточнорешаемые модели возникают из этого уравнения. Ответ: никаких! Это связано с тем, что тригонометрическое спектральное уравнение с $N = n$ в результате замены переменной легко может быть сведено к рациональному уравнению того же типа с $N = n + 1$. Обратный переход от рационального уравнения к тригонометрическому возможен лишь в том случае, если параметры b_{α} рационального уравнения удовлетворяют любому из N условий:

$$\sum_{\alpha=1}^N b_{\alpha} + M - 1 = -b_{\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, N. \quad (119)$$

Из эквивалентности тригонометрических моделей рациональным не следует, что они не заслуживают детального изучения. Действительно, из тригонометрической формы (117), (118) спектральных уравнений для этих моделей следует, что они обладают целым рядом специфических свойств, не характерных для рациональных моделей общего вида. Например:

1. Для тригонометрических моделей существует одновременно два типа кулоновских аналоговых задач. Так, задача о спектре тригонометрической модели N -го рода эквивалентна, с одной стороны, задаче о равновесии M частиц с единичными зарядами в поле, создаваемом $N + 1$ неподвижными частицами с зарядами b_1, \dots, b_N и $b_{N+1} = -\frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha=1}^N b_\alpha + M - 1 \right)$. С другой, эта же задача оказывается эквивалентной задаче о равновесии бесконечных одномерных периодических решеток с единичными зарядами в узлах, помещенных в поле N таких же неподвижных решеток, в узлах которых находятся частицы с зарядами b_1, b_2, \dots, b_N .

2. Тригонометрические модели допускают также две различные формулировки на языке спиновых систем. Так, тригонометрическая модель N -го рода эквивалентна, с одной стороны, модели магнетика на алгебре $SU(2) \otimes \dots \otimes SU(2)$ ($N + 1$ раз), характеризующейся «спинами» $-b_1, \dots, -b_N$ и $-b_{N+1} = \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha=1}^N b_\alpha + M - 1 \right)$. С другой стороны, эта же модель оказывается эквивалентной модели магнетика на алгебре $SU(2) \otimes \dots \otimes SU(2)$ (N раз), характеризующейся «спинами» $-b_1, \dots, -b_N$. При этом первый $N + 1$ -узловой магнетик является изотропным и обладает глобальной $SU(2)$ -симметрией, сохраняющей как полный спин, так и его z -проекцию. Что касается второго магнетика, то он анизотропен, и остаточная глобальная группа симметрии $U(1)$ сохраняет лишь z -проекцию полного спина. Заметим, что анизотропный магнетик, так же как и изотропный, вполне интегрируем, а уравнения анзаца Бете для него совпадают с системой (117), (118). Все сказанное выше по поводу одномерных задач сохраняет свою силу и в многомерном случае [25, 43].

В заключение отметим, что аналогичным образом могут быть исследованы и эллиптические модели, связанные с эллиптическими решениями обобщенного скалярного уравнения треугольников [28]. Можно показать, что эти модели допускают последовательную редукцию к тригонометрическому и рациональному случаю, однако имеют при этом и свои, специфические для эллиптического случая особенности. Например, они оказываются эквивалентными кулоновским системам, описывающим взаимодействия двумерных заряженных в узлах решеток. Кроме того, гамильтонианы этих моделей можно переписать в терминах гамильтонианов полностью анизотропных магнетиков, не имеющих глобальных групп непрерывной симметрии.

12. О КОЛИЧЕСТВЕ КВАЗИТОЧНОРЕШАЕМЫХ МОДЕЛЕЙ

В разд. 10 была выведена формула (116), из которой следует, что существует бесконечное множество D -мерных квазиточнорешаемых моделей порядка $D + 3$. Этот факт допускает простое объяснение.

Рассмотрим уравнение Риккати самого общего вида:

$$y'(\lambda) + a(\lambda)y^2(\lambda) + b(\lambda)y(\lambda) + c(\lambda) + e_1d_1(\lambda) + \dots + e_Dd_D(\lambda) = 0, \tag{120}$$

в котором $a(\lambda)$, $b(\lambda)$, $c(\lambda)$ и $d_\alpha(\lambda)$, $\alpha = 1, \dots, D$, — некоторые функции, а e_α , $\alpha = 1, \dots, D$, — числовые параметры. Зададим произвольным образом $D + 3$ наборов:

$$y^{(i)}(\lambda), e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \dots, e_D^{(i)}, i = 1, \dots, D + 3 \tag{121}$$

и потребуем, чтобы каждый из них удовлетворял уравнению (120). Подставив (121) в (120), заметим, что полученные равенства можно интерпретировать как систему $D + 3$ линейных уравнений относительно $D + 3$ неизвестных функций $a(\lambda)$, $b(\lambda)$, $c(\lambda)$ и $d_\alpha(\lambda)$, $\alpha = 1, \dots, D$. Решив эту систему и найдя указанные функции, мы тем самым получаем уравнение Риккати с D спектральными параметрами, имеющее $D + 3$ точных (явных) решений. Заменой $y = \frac{1}{a} \left(\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{1}{2} \left(\frac{a'}{a} - b \right) \right)$ это уравнение приводится к линейному D -параметрическому спектральному уравнению с $D + 3$ точными решениями. Согласно результатам разд. 1, такое уравнение эквивалентно D -мерной квазиточнорешаемой модели $D + 3$ -го порядка. Из этого рассуждения следует, что мы получили даже больше того, что хотели. Действительно, из произвольности функций, принадлежащих задаваемым наборам (121), следует, что квазиточнорешаемых моделей порядка $D + 3$ не просто бесконечно много, а **функционально много**. Отсюда, в частности, следует, что в одномерном случае существует функционально много квазиточнорешаемых моделей четвертого порядка [27, 34].

Любопытно отметить, что в одномерном случае для построения квазиточнорешаемых моделей третьего порядка достаточно задать всего одну производящую функцию. Действительно, предположим, что уравнение Шредингера $-\psi'' + V\psi = E\psi$ имеет три выписываемых в явном виде решения (ψ_i, E_i) , $i = 1, 2, 3$. Перейдя к логарифмическим производным волновых функций $y_i = \psi_i'/\psi_i$, перепишем уравнения для трех решений в виде

$$y_i' + y_i^2 + E_i = V, \quad i = 1, 2, 3. \tag{122}$$

Вычтем первое уравнение из последних двух:

$$(y_i - y_1)' + (y_i - y_1)(y_i + y_1) + E_i - E_1 = 0, \quad i = 2, 3 \tag{123}$$

и введем функции

$$z_i = y_i - y_1, \quad g_i = y_i + y_1, \quad i = 2, 3. \tag{124}$$

Подставляя (124) в (123), находим соотношения:

$$g_i = -\frac{z_i' + E_i - E_1}{z_i}, \quad i = 2, 3, \tag{125}$$

из которых с помощью (124) получаем:

$$y_i = \frac{1}{2} \left[z_i - \frac{z'_i + E_i - E_1}{z_i} \right], \quad i = 1, 2; \quad (126a)$$

$$y_1 = -\frac{1}{2} \left[z_2 + \frac{z'_2 + E_2 - E_1}{z_2} \right] = -\frac{1}{2} \left[z_3 + \frac{z'_3 + E_3 - E_1}{z_3} \right]. \quad (126b)$$

Введя функцию

$$t = z_3/z_2, \quad (127)$$

перепишем (126b) в виде

$$(t-1)z_2^2 + \frac{t'}{t}z_2 + \frac{(E_3 - E_1)}{t} - (E_2 - E_1) = 0, \quad (128)$$

откуда находим

$$z_2 = \frac{-\frac{t'}{t} \pm \sqrt{\left(\frac{t'}{t}\right)^2 - 4(t-1)\left(\frac{E_3 - E_1}{t} - (E_2 - E_1)\right)}}{2(t-1)}. \quad (129)$$

Мы видим, что заданием одной функции t достигается формальное решение задачи. Действительно, зная t , можно из (129) найти z_2 , затем из (127) восстановить z_3 , после чего, определив из уравнений (124) и (125) функции y_i , построить решения (ψ_i, E_i) уравнения Шредингера с потенциалом, восстанавливаемым по формуле (122). Ограничения на функцию t , позволяющие строить устойчивые квантовомеханические модели с тремя точно вычисляемыми состояниями с заранее задаваемыми номерами, были выведены в [45].

В заключение этого раздела опишем простой метод, позволяющий каждому квазиточнорешаемому уравнению заданного порядка ставить в соответствие другое квазиточнорешаемое уравнение того же порядка. Метод основан на использовании форминвариантности уравнения Риккати относительно дробнолинейной замены неизвестной функции. Рассмотрим уравнение Риккати

$$y' + ay^2 + 2by + c + Ed = 0,$$

имеющее некоторое количество точных решений. Пусть y_0, E_0 — одно из этих решений. Перейдя к новой функции \tilde{y} по формуле $\tilde{y} = -(E - E_0)/(y - y_0)$, получаем новое уравнение Риккати вида

$$\tilde{y}' + \tilde{a}\tilde{y}^2 + 2\tilde{b}\tilde{y} + \tilde{c} + \tilde{E}\tilde{d} = 0,$$

в котором $\tilde{a} = d, \tilde{b} = b + ay_0, \tilde{c} = -E_0a, \tilde{d} = a$. Если $y = y_i, E = E_i, i = 0, \dots, K$ — точные решения старого уравнения, то $\tilde{y} = 0, \tilde{E} = E_0, \tilde{y} = -(E_i - E_0)/(y_i - y_0), \tilde{E}_i = E_i, i = 1, \dots, K$ будут точными решениями нового уравнения. Очевидно, что линейные квазиточнорешаемые уравнения, связанные со старым и новым уравнениями Риккати не сводятся друг к другу в результате однородной замены функции и независимой переменной [26]. Вопрос о нормируемости решений этих уравнений требует, очевидно, специального рассмотрения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, мы завершили изложение нашего подхода к проблеме квазиточнорешаемости в квантовой механике. Отметим ряд его основных моментов.

В основе подхода лежит интерпретация квазиточнорешаемых уравнений Шредингера как точнорешаемых уравнений с несколькими спектральными параметрами, один из которых отождествляется с энергией, а остальные включаются в потенциал. Для построения нетривиальных квазиточнорешаемых моделей более чем первого порядка необходимо, чтобы в системе параметров имелось вырождение, т. е. чтобы одному и тому же набору «потенциальных» спектральных параметров соответствовало несколько значений «энергетического». Допустимые значения указанных параметров можно интерпретировать как собственные значения коммутирующих между собой операторов с точновычисляемыми спектрами. Причиной вырождения, ответственного за явление квазиточнорешаемости, служит наличие в задаче скрытой группы симметрии, относительно действия которой «потенциальные» операторы инвариантны, а «энергетический» оператор — нет. Полному набору «потенциальных» и «энергетических» операторов можно придать смысл интегралов движения некоторой, вполне интегрируемой системы. В этом смысле почти все рассматривавшиеся здесь квазиточнорешаемые модели оказываются эквивалентными вполне интегрируемым моделям магнетиков на алгебре $SL(2)$. Уравнения анзаца Бете для этих магнетиков в точности совпадают с уравнениями, определяющими спектры квазиточнорешаемых систем. Эти же уравнения оказываются совпадающими с уравнениями равновесия системы кулоновских частиц во внешнем электростатическом поле, что позволяет перевести задачу о спектре квазиточнорешаемых моделей на чисто классический язык. Если порядок квазиточнорешаемой модели устремить к бесконечности, то возникает точнонерешаемая модель. Поэтому замеченная на примере квазиточнорешаемых моделей эквивалентность между задачами нерелятивистской квантовой механики, теорией квантовых вполне интегрируемых спиновых систем, а также многочастичными кулоновскими задачами классической физики сохраняется и в точнонерешаемом случае.

В рамках предлагаемого подхода одинаково просто выглядят задачи построения как одномерных, так и многомерных квазиточнорешаемых моделей. Поэтому если говорить о перспективах, то они, по нашему мнению, связаны, в первую очередь, с обобщениями данного подхода на случай систем с бесконечным числом степеней свободы, в идеале — на случай теорий поля.

В настоящем обзоре мы лишь слегка коснулись других методов построения точно- и квазиточнорешаемых моделей. К этим интенсивно развиваемым в настоящее время методам относятся: а) метод Турбинера — Шифмана, описанный во введении (см. также [21, 22]),

основанный на использовании дифференциальных реализаций конечномерных представлений алгебр Ли; б) метод, описанный в конце разд. 8, использующий дифференциальные реализации бесконечномерных представлений алгебр Ли, и в) метод, сформулированный в конце разд. 9 (см. также [39, 43]), в котором в качестве строительного материала используются наборы коммутирующих операторов — интегралов движения вполне интегрируемых моделей магнетиков на алгебрах Ли. Каждый из перечисленных методов естественным образом делится на два этапа. На первом (конструктивном) этапе предьявляется четкий алгоритм, позволяющий строить N -мерные спектральные дифференциальные уравнения второго порядка

$$\left\{ \sum_{i, k=1}^N P_{ik}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^N Q_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + R(x) \right\} \varphi(x) = E\varphi(x), \quad (130)$$

имеющие конечное или бесконечное число точных решений в некотором классе функций. На втором (неконструктивном) этапе предпринимаются попытки свести уравнение (130) к точно- или квазиточнорешаемым уравнениям шредингеровского типа

$$\left\{ \sqrt{P(x)} \sum_{i, k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{P_{ik}(x)}{\sqrt{P(x)}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + V(x) \right\} \psi(x) = E\psi(x) \quad (131)$$

на N -мерных многообразиях с метрикой $\|g_{ik}\| = \|P_{ik}\|^{-1}$ ($P(x) \equiv \det \|P_{ik}(x)\|$). К сожалению, не всякое уравнение типа (130) может быть сведено к уравнению типа (131). Действительно, для того, чтобы в результате замены $\varphi(x) = \{P(x)\}^{-\frac{1}{4}} \{U(x)\}^{-\frac{1}{2}} \psi(x)$ в (130) возникло уравнение (131), функция $U(x)$ должна удовлетворять уравнениям

$$\sum_{k=1}^N P_{ik}(x) \frac{\partial U(x)}{U(x) \partial x_k} + \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_k} P_{ik}(x) = Q_i(x), \quad i = 1, \dots, N. \quad (132)$$

Очевидно, что основные трудности связаны с решением именно этой, переопределенной системы, требование совместности которой накладывает довольно жесткие ограничения на допустимый вид функций $P_{ik}(x)$, $Q_i(x)$ и $U(x)$ (см. [21, 22]).

Замечательно, однако, что всех этих трудностей можно легко избежать, отказавшись от требования того, чтобы размерности пространств, в которых формулируются уравнения (130) и (131) — совпадали. Можно сформулировать простую процедуру, позволяющую каждому N -мерному уравнению типа (130) поставить в соответствие $(N + 1)$ -мерное уравнение типа (131). Действительно, сохраняя все решения N -мерного уравнения (130) перепишем его в $(N + 1)$ -

мерной форме

$$\sum_{i, k=0}^N P_{ik}(x, x_0) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=0}^N Q_i(x, x_0) \frac{\partial}{\partial x_i} + R(x, x_0) \} \varphi(x) = E\varphi(x). \tag{133}$$

Здесь $P_{ik}(x, x_0) \equiv P_{ik}(x)$, $Q_i(x, x_0) \equiv Q_i(x)$, для всех $i, k = 1, \dots, N$, $R(x, x_0) \equiv R(x)$, а $P_{i0}(x, x_0)$ и $Q_0(x, x_0)$ — произвольные функции от $x = (x_1, \dots, x_N)$ и от новой, дополнительно введенной переменной x_0 . Поскольку уравнение (133) имеет тот же вид, что и (130), но формулируется в $N + 1$ -мерном пространстве, оно может быть сведено к $N + 1$ -мерному уравнению Шредингера, если найдется функция $U(x, x_0)$, для которой выполнены $N + 1$ -мерные аналоги уравнений (132)

$$\sum_{k=0}^N P_{ik}(x, x_0) \frac{\partial U(x, x_0)}{U(x, x_0) \partial x_k} + \sum_{k=0}^N \frac{\partial}{\partial x_k} P_{ik}(x, x_0) = Q_i(x, x_0), \tag{134}$$

$i = 0, 1, \dots, N$

В отличие от уравнений (132), уравнения (134) всегда могут быть решены из-за произвольности компонент $P_{i0}(x, x_0)$ и $Q_0(x, x_0)$. Решения зависят от двух произвольных функций, в качестве которых удобно выбрать функцию $U(x, x_0)$, заранее обеспечив нормируемость волновых функций, а также функцию $P_{00}(x, x_0)$. В этом случае остальные неизвестные функции $P_{i0}(x, x_0)$, $i = 1, \dots, N$ и $Q_0(x, x_0)$ находятся явно.

Итак, мы видим, что каждое уравнение типа (130) приводимо к шредингеровскому виду. Это позволяет использовать любые точно- и квазиточнорешаемые дифференциальные уравнения второго порядка, получаемые с помощью трех перечисленных выше методов, для генерации точно- и квазиточнорешаемых моделей квантовой механики.

В заключение мне хотелось бы выразить особую признательность В. Г. Кадышевскому за интерес к данной работе. Пользуюсь случаем поблагодарить Т. И. Маглаперидзе и А. В. Турбинера за интересное и плодотворное сотрудничество, а также П. Б. Вигмана, Н. М. Гельфанда, В. И. Манько, А. А. Нерсеяна, В. М. Савельева, Л. А. Слепченко, В. Я. Файнберга, Е. С. Фрадкина, Г. А. Харадзе и М. А. Шифмана за полезные дискуссии и ценные замечания.

П Р И Л О Ж Е Н И Е 1. ЯВНО ТРИДИАГОНАЛИЗИРУЕМЫЕ ГАМИЛЬТониАНЫ И КВАЗИТОЧНОРЕШАЕМОСТЬ

В этом приложении мы рассмотрим модели с гамильтонианами вида

$$\hat{H} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\alpha}{x^2} + \beta x^2 + \gamma x^6, \quad (\text{П1})$$

которые обладают уникальным свойством: квадраты этих гамильтонианов допускают явную тридиагонализацию для всех значений параметров α , β , γ . Для простоты мы продемонстрируем это на частном случае модели (П1) с гамильтонианом:

$$\hat{H} = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} (r^4 - g)^2 - 4vr^2, \quad (\text{П2})$$

который можно интерпретировать как оператор радиального уравнения Шредингера для двумерного сферически-симметричного ангармонического осциллятора с центробежным барьером.

Рассмотрим пробную функцию $\psi_0(r) = r^g e^{-r^4/4}$, а также порожденную ею и оператором $\hat{S} = \hat{H}^2$ последовательность

$$\Psi_n(r) = \hat{S}^n \psi_0(r). \quad (\text{П3})$$

Ортогонализуем члены этой последовательности с помощью стандартной процедуры Грамма — Шмидта. Полученные ортонормированные функции $\varphi_n(r)$ имеют вид

$$\varphi_n(r) = Q_n \left(\frac{r^4}{2} \right) r^g e^{-r^4/4}, \quad (\text{П4})$$

где $Q_n(t)$ — некоторые полиномы n -го порядка. Поскольку эти полиномы (по построению) ортогональны с весом

$$\omega(t) = t^{\frac{g-1}{2}} e^{-t}, \quad (\text{П5})$$

то они являются полиномами Лагерра. Тем самым устанавливается явный вид функций $\varphi_n(r)$. Согласно известной теореме Ланцоша [40] (см. также [41]), оператор \hat{S} в базисе (П4) имеет тридиагональный вид. Ненулевые матричные элементы оператора \hat{S} легко вычисляются с помощью хорошо известных свойств полиномов Лагерра. Результат имеет вид:

$$S_{nn} = 32 \left[(2n+1-v)^2 \left(n + \frac{g+1}{2} \right) + (2n-v)^2 n \right]; \quad (\text{П5а})$$

$$S_{n, n+1} = -32 (2n+1-v) (2n+2-v) \sqrt{(n+1) \left(n + \frac{g-1}{2} \right)}. \quad (\text{П5б})$$

Очевидно, что если v — натуральное число,

$$v = \left[\frac{n-1}{2} \right], \quad (\text{П6})$$

то матрица S_{nm} принимает блок-диагональный вид. Один из блоков — конечен, и поэтому мы приходим к квазиточнорешаемой задаче конечного порядка. Переход от оператора \hat{S} к исходному оператору \hat{H} осуществляется отбрасыванием лишних решений, не удовлетворяющих условию эрмитовости \hat{H} . Детали вычислений, а также явный вид получающихся решений см. в работе [6].

**П Р И Л О Ж Е Н И Е 2. КВАЗИТОЧНОРЕШАЕМЫЕ МОДЕЛИ
ОГРАНИЧЕННОГО ПОРЯДКА**

Для явного построения квазиточнорешаемых моделей K -го порядка с потенциалами, описываемыми формулами (53) и (54) в случае, когда условие (39) не выполнено, необходимо добиться того, чтобы для K решений $\{\xi_i^{(k)}\}_{i=1}^M$ ($k = 1, \dots, K$) значения входящих в потенциал симметрических полиномов $s_n(\xi^{(k)}) \equiv \sum_{i=1}^M (\xi_i^{(k)})^n$ порядков $n = 1, \dots, N - 3$ не зависели от k , а вся зависимость от k была сосредоточена в полиноме s_{N-2} , определяющем энергию системы. Для реализации такой ситуации умножим уравнение (35) на $\prod_{\alpha=1}^N (\xi_i - \alpha)$, просуммируем по i и воспользуемся формулой

$$\sum_{i, k=1}^M \xi_i^{n+1} (\xi_i - \xi_k)^{-1} = -\frac{n+1}{2} s_n + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^n s_{n-l} s_l.$$

В результате мы получим систему соотношений, выражающих s_n с $n > N - 2$ через s_n с $n \leq N - 2$. Другую систему условий на полиномы s_n можно получить, заметив, что s_n с $n > M$ выражаются через s_n с $n \leq M$. Предполагая, что $M > N - 2$ и объединяя эти две системы, приходим к $N - 2$ алгебраическим уравнениям вида

$$s_{N-2}^{K_i} + f_{1i} s_{N-2}^{K_i-1} + \dots + f_{K_i i} = 0, \quad i = 1, \dots, N - 2,$$

где $K_i = \left\lfloor \frac{M+i}{N-2} \right\rfloor$. Коэффициенты этих уравнений явно зависят от $3N - 5$ величин $a_1, \dots, a_{N-2}, b_1, \dots, b_N$ и s_1, \dots, s_{N-3} . Для того чтобы при фиксированном наборе этих величин каждое уравнение имело по крайней мере K различных решений, необходимо, чтобы неравенство $\left\lfloor \frac{M+i}{N-2} \right\rfloor \geq K$ выполнялось для всех $i = 1, \dots, N - 2$. Отсюда вытекает ограничение на $M : M \geq K(N - 2) - 1$. Если $M = K(N - 2) - 1$, то степень всех уравнений одна и та же и равна K . Для совместности всех $N - 2$ уравнений необходимо потребовать, чтобы коэффициенты при одинаковых степенях s_{N-2} совпадали. Это возможно при наложении $K(N - 3)$ условий на $3N - 5$ величин. Отсюда находим ограничение $K \leq 3 + \left\lfloor \frac{4}{N-3} \right\rfloor$ на порядок КТР модели.

Построим в качестве примера квазиточнорешаемую модель второго порядка ($K = 2$), характеризующуюся вырожденной функцией (49) вида $B(\lambda) = \alpha\lambda^{-1} - \beta - \gamma\lambda - \lambda^2$. В данном случае $N = 4$, поэтому $M = 3$ и, следовательно, мы приходим к системе двух квадратных уравнений относительно s_2 . Коэффициенты этих уравнений зависят от α , β , γ и s_1 . В нашем распоряжении имеется достаточное количество параметров, поэтому мы можем для определенности положить $s_1 = 0$, приведя эту систему к виду:

$$s_2^2 - 2(\gamma^2 - \beta)s_2 + 3\gamma(\alpha + 1) = 0,$$

$$s_2^2 + \frac{6}{5\gamma} \left[2\beta\gamma - \gamma^3 - \frac{3\alpha}{2} - 1 \right] s_2 + \frac{18}{5\gamma} (\gamma^2 - \beta)(\alpha + 1) = 0.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях s_1 , находим, что $\alpha = \frac{8}{27}\gamma^3 - \frac{2}{3}$, $\beta = -\frac{2}{3}\gamma^2$. Потенциал соответствующей модели имеет вид

$$V(x) = 4x^{10} + 8\gamma x^8 - \frac{4}{3}\gamma^2 x^6 - \left(\frac{208}{27}\gamma^3 + \frac{80}{3} \right) x^4 -$$

$$- \left(\frac{16}{27}\gamma^4 + \frac{68}{3}\gamma \right) x^2 + \left(\frac{16}{27}\gamma^3 - \frac{11}{6} \right) \left(\frac{11}{27}\gamma^3 - \frac{17}{6} \right) \frac{1}{x^2},$$

а решения даются формулами

$$E_{\pm} = -\frac{32}{81}\gamma^5 + \frac{80}{9}\gamma^2 \pm 8\sqrt{\gamma^4 - 2\gamma}.$$

Используя электростатическую аналоговую задачу, нетрудно показать, что найденные уровни описывают первое и второе возбужденные состояния. Легко также убедиться в том, что полученная модель не сводится к моделям, получаемым в рамках алгебраического подхода работы [19].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Турбинер А. В. // УФН. 1984. Т. 144. С. 36—85.
2. Турбинер А. В. // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 30. С. 379—381.
3. Гершензон М. Е., Турбинер А. В. // ЯФ. 1982. Т. 35. С. 1437—1485.
4. Rampal A., Datta K. // J. Math. Phys. 1984. Vol. 24. P. 860—869.
5. Turbiner A.V., Ushveridze A.G. // Preprint ITP-55.M., 1987.
6. Ushveridze A.G. // Phys. Scripta. 1989. Vol. 39. P. 30—36.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. // Квантовая механика. М.: Наука, 1974.
8. Bender C., Wu T.T. // Phys. Rev. 1969. Vol. 184. P. 1231—1252.
9. Simon B. // Ann. Phys. 1970. Vol. 58. P. 76—101.
10. Bender C., Hupp J.J., Svetitsky B. // Phys. Rev. D. 1974. Vol. 9. P. 2324—2335.
11. Овчинников С. Ю., Соловьев Е. А. // ЖЭТФ. 1986. Т. 91 С. 477—486.
12. Ushveridze A.G. // J. Phys. A. 1988. Vol. 21. P. 955—970.
13. Соловьев Е. А. // ЖЭТФ. 1981. Т. 81. С. 1681—1689.
14. Razavy M. // Phys. Lett. 1981. Vol. 82A. P. 7—9.
15. Leach P.G.L. // J. Math. Phys. 1984. Vol. 25. P. 974—983.
16. Turbiner A.V., Ushveridze A.G. Preprint ITP-169. M., 1986.
17. Турбинер А. В. // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. С. 33—44.
18. Ушверидзе А. Г. // КСФ. 1988. Т. 2. С. 37—39.
19. Turbiner A.V. // Commun. Math. Phys. 1988. Vol. 118. P. 467—474.
20. Желобенко Д.П. // Лекции по теории групп Ли. Дубна, 1965.
21. Shifman M.A., Turbiner A.V. // Preprint ITP-174. M., 1988.

22. Shifman M.A.//Preprint CERN CH-1211. Geneva, 1988.
23. Заславский О. В., Ульянов В. В.//ЖЭТФ. 1984. Т. 87. С. 1724.
24. Багров В. Г., Вшивцев А. С. Препринт СОАН-31. Томск, 1986.
25. Ушверидзе А. Г.//КСФ. 1988. Т. 2. С. 40—43.
26. Ушверидзе А. Г.//КСФ. 1989. Т. 4. С. 14—16.
27. Ушверидзе А. Г.//КСФ. 1989. Т. 3. С. 23—25.
28. Ушверидзе А. Г.//Препринт ФИАН 118. М., 1988.
29. Уиттекер Э., Ватсон Дж. Курс современного анализа. Ч. 2. Трансцендентные функции: Пер. с англ. М.: Физматгиз, 1963.
30. Ушверидзе А. Г. Препринт ФИАН-134. М., 1988.
31. Ушверидзе А. Г.//КСФ. 1988. Т. 9. С. 47—50.
32. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям: Пер. с англ. М.: Наука, 1979.
33. Ушверидзе А. Г.//КСФ. 1988. Т. 8. С. 25—27.
34. Ушверидзе А. Г. Препринт ИФАН ГССР ФТТ-12. Тбилиси, 1988.
35. Ушверидзе А. Г. Препринт ФИАН-96. М., 1988.
36. Маглаперидзе Т. И., Ушверидзе А. Г.//КСФ. 1988. Т. 12. С. 34—36.
37. Годен М. Волновая функция Бете: Пер. с франц. М.: Мир, 1987.
38. Белавин А. А., Дринфельд В. Г. Препринт ИТФ-18. Черноголовка, 1982.
39. Ушверидзе А. Г.//КСФ. 1988. Т. 7. С. 12—14.
40. Решетихин Н. Ю., Фадеев Л. Д.//ТМФ. 1983. Т. 56. С. 323—343.
41. Ушверидзе А. Г. Препринт ФИАН-158. М., 1988.
42. Ушверидзе А. Г.//Препринт ФИАН-33. М., 1988.
43. Ушверидзе А. Г.//Препринт ФИАН-190. М., 1988.
44. Натанзон Г. А.//Вестник ЛГУ. 1971. Т. 10. С. 22; ТМФ. 1979. Т. 38. С. 219—226.
45. Ушверидзе А. Г. Препринт ИФАН ГССР ФТТ-11. Тбилиси, 1988.
46. Lanczos S.//J. Res. NBS. 1950. Vol. 45. P. 255—265.
47. Ushveridze A.G.//J. Phys. A. 1987. Vol. 20. P. 5145—5155.
48. Cere G. Ортогональные многочлены: Пер. с англ. М.: Физматгиз, 1962.