

# АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПОТТСА

*А. Н. Ермилов*

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

Предметом рассмотрения являются стохастические  $n$ -компонентные решетки. Дана общая классификация систем статистической механики в их подразделении на расплавленные и замороженные. Подробно изложена модель Поттса, включая ее симплексное представление. Описан ряд приложений в физике конденсированных сред и к комбинаторным задачам оптимизации. Разработан метод исследования  $n$ -компонентных замороженных решеток с произвольными распределениями случайных интенсивностей взаимодействия и полей. Сделан обзор результатов, полученных на основе этого метода. Результаты показывают, что в отличие от преваляровавшей ранее точки зрения вид распределения замороженных параметров модели существенным образом влияет на ее термодинамические свойства и структуру фазовой диаграммы.

Stochastic  $n$ -component lattices are considered. A general classification of annealed and quenched systems of statistical mechanics is given. The Potts model including its simplex representation is exposed in detail. A number of its applications in condensed matter physics and to combinatorial optimization problems are considered. A method for studying  $n$ -component quenched lattices with arbitrary probability densities of random coupling parameters and fields is developed. The review of results obtained on the basis of this method is done. The results reveal that, unlike the prevailing before viewpoint, the form of the distribution of the quenched parameters effects essentially the thermodynamical properties of the lattices and the structure of the phase diagram.

## 1. ЗАМОРОЖЕННЫЕ СИСТЕМЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

В ряде статистических систем состояние характеризуется более чем одним типом переменных. В зависимости от того, каким образом эти переменные участвуют в вычислении термодинамических величин, они классифицируются как расплавленные и замороженные переменные, в соответствии с чем статистические системы также называются расплавленными и замороженными. Опишем данную классификацию для классических систем в рамках канонического ансамбля.

Итак, пусть имеется два типа переменных, описывающих состояние системы,  $S$  и  $J$ . Гамильтониан системы  $H$  является их функцией  $H = H(S, J)$ . Если переменные  $S$  и  $J$  равноправны, то полная плотность вероятности  $P(S, J)$  имеет вид

$$P(S, J) = Z^{-1} \exp[-\beta H(S, J)]. \quad (1)$$

Здесь  $Z$  — статистическая сумма системы,

$$Z = \int DSDJ \exp [-\beta H (S, J)], \quad (2)$$

где под  $\int DSDJ \dots$  подразумевается интегрирование по непрерывным переменным и суммирование по дискретным. Соотношения (1), (2) описывают ситуацию, когда объекты, характеризующиеся соответственно переменными  $S$  и  $J$ , находятся в состоянии термодинамического равновесия друг с другом. В связи с этим такие системы называются расплавленными. Их свободная энергия имеет вид

$$\mathcal{F} = -\beta^{-1} \ln Z. \quad (3)$$

Плотность вероятности переменных одного из двух типов, скажем  $J$ , можно получить, проинтегрировав (1) по переменным другого типа:

$$P_J (J) = \int DS Z^{-1} \exp [-\beta H (S, J)] = Z_J^{-1} \exp [-\beta H_J (J)], \quad (4)$$

где  $H_J (J)$  — эффективный гамильтониан,

$$\exp [-\beta H_J (J)] = \int DS \exp [-\beta H (S, J)], \quad (5)$$

а  $Z_J = Z$  — соответствующая ему статистическая сумма

$$Z_J = \int DJ \exp [-\beta H_J (J)] \quad (6)$$

или, соответственно, для  $S$

$$P_S (S) = \int DJ Z^{-1} \exp [-\beta H (S, J)] = Z_S^{-1} \exp [-\beta H_S (S)], \quad (7)$$

$$\exp [-\beta H_S (S)] = \int DJ \exp [-\beta H (S, J)], \quad (8)$$

$$Z_S = Z = \int DS \exp [-\beta H_S (S)]. \quad (9)$$

Резюмируя, можно сказать, что расплавленные системы — это обычные системы статистической механики, содержащие объекты нескольких различных видов.

Соотношение между переменными  $S$  и  $J$  может быть и другим. Существуют системы, в которых плотность вероятности переменных одного типа, скажем  $J$ , фиксирована и не зависит от состояния объектов, характеризующихся переменными другого типа — переменными  $S$ . Обозначим эту плотность вероятности

$$P_J (J). \quad (10)$$

Вероятность нахождения системы в состоянии  $S$  при заданных значениях  $J$ , т. е. условная вероятность, дается каноническим распределением

$$P_S(S | J) DSDJ = Z_S^{-1}(J) \exp[-\beta H(S | J)] DSDJ, \quad (11)$$

где  $Z_S(J)$ , являющуюся функцией  $J$ , можно назвать статистической суммой  $S$ -подсистемы для заданных переменных  $J$ ,

$$Z_S(J) = \int DS \exp[-\beta H(S, J)]. \quad (12)$$

В связи с тем, что плотность распределения переменных  $J$  (10) фиксирована, иными словами, объекты, описываемые этими переменными, находятся в некотором заданном состоянии, переменные  $J$  называются замороженными. Соответственно, рассматриваемая система классифицируется как замороженная.

Полная плотность вероятности имеет вид

$$P(S, J) = P_J(J) P_S(S | J) = P_J(J) Z_S^{-1}(J) \exp[-\beta H(S, J)]. \quad (13)$$

В соответствии с этим среднее (термодинамическое) значение  $\mathcal{A}$  некоторой динамической величины  $A(S, J)$  дается выражением

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int \int DJDSP_J(J) Z_S^{-1}(J) \exp[-\beta H(S, J)] A(S, J) = \\ &= \int DJP_J(J) \langle A \rangle_H(J), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\langle A \rangle_H(J)$  — среднее значение рассматриваемой динамической величины по условному распределению вероятности  $P_S(S | J)$ , т. е. ее гиббсовское среднее при заданных значениях переменных  $J$ ,

$$\langle A \rangle_H(J) = \int DS Z_S^{-1}(J) \exp[-\beta H(S, J)] A(S, J). \quad (15)$$

Или, если среднее по плотности вероятности переменных обозначить как  $\langle \dots \rangle$ ,

$$\langle \dots \rangle = \int DJP_J(J) (\dots), \quad (16)$$

то термодинамическое значение  $\mathcal{A}$  динамической величины  $A(S, J)$  можно записать как

$$\mathcal{A} = \langle \langle A \rangle_H \rangle. \quad (17)$$

Проинтегрировав полную плотность вероятности (13) по  $J$ , получим плотность вероятности одних лишь переменных  $S$

$$P_S(S) = \int DJP_J(J) Z_S^{-1}(J) \exp[-\beta H(S, J)]. \quad (18)$$

Рассмотрим далее величину

$$F(J) = -\beta^{-1} \ln Z_S(J), \quad (19)$$

которую можно назвать свободной энергией  $S$ -подсистемы при заданных значениях переменных  $J$ . Согласно соотношениям (12), (15), в которые переменные  $J$  входят как параметры, при любом значении  $J$  величины  $\langle A \rangle_H(J)$  и  $F(J)$  связаны между собой обычными термодинамическими соотношениями. Тогда если ввести в рассмотрение величину

$$\mathcal{F} = \langle F(J) \rangle = \int DJ P_J(J) F(J), \quad (20)$$

то поскольку термодинамические соотношения являются линейными, в частности дифференциальными, те же самые соотношения будут связывать термодинамические значения  $A$  динамических величин и величину  $\mathcal{F}$  (20). По этой причине  $\mathcal{F}$  с полным правом можно отождествить со свободной энергией замороженной системы. Величина  $\mathcal{F}$  (20) будет в точности выполнять ее функции. А именно, для замороженной системы исходя из свободной энергии

$$\mathcal{F} = -\beta^{-1} \langle \ln Z_S(J) \rangle = -\beta^{-1} \int DJ P_J(J) \ln Z_S(J) \quad (24)$$

методами обычной термодинамики можно рассчитать требуемые термодинамические характеристики.

Таким образом, замороженные системы отличаются от расплавленных, т. е. от обычных систем статистической механики, лишь тем, что гиббсовская плотность вероятности (1) заменяется на негиббсовскую (13) с заданной плотностью распределения переменных  $J$  (10). Как следствие этого (без привлечения каких-либо дополнительных физических аргументов) соотношение (3), дающее связь с термодинамикой, заменяется соотношением (20).

Практически замороженные системы могут быть получены, например, следующим образом. Нагреем образец до некоторой температуры  $\theta_j$ , при которой времена релаксации  $J$ - и  $S$ -объектов сравнимы между собой, и дадим им прийти в состояние термодинамического равновесия друг с другом (хотя это вовсе и не обязательно). Затем быстро охладим систему до некоторой температуры  $\theta_{ch}$ , при которой время релаксации  $J$ -объектов будет много больше времени релаксации  $S$ -объектов, причем это соотношение будет иметь место в некотором интервале температур, содержащим  $\theta_{ch}$ , и интервалах других термодинамических параметров системы. Если мы теперь будем работать в этих интервалах во временной шкале, много меньшей времени релаксации  $J$ -объектов, но много большей времени релаксации  $S$ -объектов, то состояние  $J$ -объектов можно считать фиксированным, а состояние  $S$ -объектов — равновесным, что и описывается плотностями (10) и (11). При этом плотность вероятности  $P_J(J)$  будет соответствовать равновесной плотности вероятности переменных  $J$  (4) при температуре  $\theta_i$ .

В настоящей работе замороженная модель Поттса исследуется на основе вариационного метода Боголюбова [1, 2].

## 2. МОДЕЛЬ ПОТТСА

Приведем здесь формулировку модели Поттса, используемую для описания широкого ряда объектов и явлений в статистической механике и физике конденсированных сред и имеющую также приложения к задачам оптимизации.

Модель Поттса представляет собой естественное обобщение модели Изинга. В модели Изинга имеется  $N$  дискретных объектов, называемых узлами решетки, каждый из которых может находиться в одном из двух состояний. Гамильтониан модели записывается в виде суммы по парам взаимодействующих соседей энергий парных взаимодействий узлов. Энергия парного взаимодействия принимает одно значение, если взаимодействующие узлы находятся в одинаковых состояниях, и другое значение, если они находятся в разных сочетаниях. В модели Поттса каждый узел может находиться уже в одном из  $q \geq 2$  состояний, а энергия парного взаимодействия принимает одно значение, если взаимодействующие узлы находятся в одинаковых состояниях (безразлично, в каких именно), и другое значение, если они находятся в разных состояниях (опять же, все равно в каких именно). (Гамильтонианы обеих моделей могут содержать также сумму индивидуальных энергий узлов.)

Итак, пусть имеется решетка, содержащая  $N$  узлов. Каждый узел решетки может находиться в одном из состояний  $P_1, \dots, P_q, q \geq 2$ . Состояние узла с номером  $i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) будем описывать переменной  $S_i: S_i = P_1, \dots, P_q$ . Гамильтониан модели Поттса имеет вид

$$H = \sum_{i < j} H_{ij}(S_i, S_j) + \sum_i H_{0i}(S_i), \quad (22)$$

где суммирование в первом слагаемом производится по парам различных узлов решетки.

Энергия парного взаимодействия  $H_{ij}(S_i, S_j)$  принимается равной  $E_{ij}^{(1)}$ , если узлы  $i$  и  $j$  находятся в одинаковых состояниях  $S_i = S_j$ , и равной  $E_{ij}^{(2)}$ , если узлы  $i$  и  $j$  находятся в разных состояниях  $S_i \neq S_j$ :

$$H_{ij}(S_i, S_j) = E_{ij}^{(1)} \delta(S_i, S_j) + E_{ij}^{(2)} [1 - \delta(S_i, S_j)], \quad (23)$$

где

$$\delta(S_i, S_j) = \begin{cases} 1, & S_i = S_j, \\ 0, & S_i \neq S_j. \end{cases} \quad (24)$$

Если отбросить в гамильтониане  $H$  несущественную постоянную  $\sum_{i < j} E_{ij}^{(2)}$  и обозначить  $E_{ij} = E_{ij}^{(1)} - E_{ij}^{(2)}$ , можно записать его в виде

$$H = \sum_{i < j} E_{ij} \delta(S_i, S_j) + \sum_i H_{0i}(S_i). \quad (25)$$

Пары узлов  $(i, j)$ , для которых  $E_{ij} = 0$ , называются парами взаимодействующих узлов (соседей).

Статистическая сумма рассматриваемой модели есть

$$Z = \sum_{S_1=P_1, \dots, P_q} \dots \sum_{S_N=P_1, \dots, P_q} \exp \left[ \sum_{i < j} E_{ij} \delta(S_i, S_j) + \sum_i H_{0i}(S_i) \right]. \quad (26)$$

Описанная модель была предложена в [3] и носит название модели Поттса (точнее, стандартной модели Поттса).

### 3. СИМПЛЕКСНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МОДЕЛИ ПОТТСА

Было бы удобно, если бы состояниям  $P_1, \dots, P_q$  можно было придать векторную интерпретацию, представив дельта-функцию  $\delta(S_i, S_j)$  через скалярное произведение векторов, описывающих состояния  $S_i$  и  $S_j$ . Для этого нужно найти систему векторов, скалярное произведение каждой пары (различных) векторов которой было бы одинаково.

Рассмотрим систему  $m + 1$  векторов

$$\{\mathbf{e}_p\} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{m+1}\} \quad (27)$$

в  $m$ -мерном евклидовом пространстве  $R^m$ , определяемую соотношением [4]

$$\mathbf{e}_p \mathbf{e}_q = (m + 1)^{-1} m \delta_{pq} - m^{-1}, \quad p, q = 1, \dots, m + 1. \quad (28)$$

В одномерном случае  $R^1$  система векторов  $\{\mathbf{e}_p\}$  имеет вид

$$\mathbf{e}_1 = 1, \quad \mathbf{e}_2 = -1. \quad (29)$$

Пример системы векторов  $\{\mathbf{e}_p\}$  в  $R^m$  при  $m > 1$  можно построить по индукции по размерности пространства  $m$ , отправляясь от  $R^1$ , т. е. от векторов (29).

Пусть система  $\{\mathbf{e}_p\} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$  в пространстве  $R^{m-1}$  размерности  $m - 1$  удовлетворяет определяющему свойству (28). А именно, пусть в пространстве  $R^{m-1}$  векторы  $\{\mathbf{e}_p\}$  удовлетворяют соотношению

$$\mathbf{e}_p \mathbf{e}_q = m^{-1} (m - 1) \delta_{pq} - (m - 1)^{-1}, \quad p, q = 1, \dots, m. \quad (30)$$

Тогда искомой системой  $\{\mathbf{e}_p\} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{m+1}\}$  в  $m$ -мерном пространстве  $R^m$  будет следующая:

$$\mathbf{e}_{pm} = \cos \vartheta_m, \quad p = 1, \dots, m, \quad (31)$$

$$\mathbf{e}_{px} = e_{px} \sin \vartheta_m, \quad p = 1, \dots, m, \quad x = 1, \dots, m - 1, \quad (32)$$

$$\mathbf{e}_{m+1x} = \delta_{mx}, \quad x = 1, \dots, m, \quad (33)$$

где

$$\cos \vartheta_m = -m^{-1} \quad (34)$$

Покажем теперь, что для векторов (31) — (33) выполняется равенство (28). Рассмотрим отдельно три случая: а)  $p, q \neq m + 1$ ; б)  $p = m + 1, q \neq m + 1$ ; в)  $p = q = m + 1$ . Если  $p, q \neq m + 1$ , то в соответствии с (31) — (33):

$$\varepsilon_p \varepsilon_q = \sum_{x=1}^{m-1} e_{px} e_{qx} \sin^2 \vartheta_m + \cos^2 \vartheta_m = e_p e_q (1 - m^{-2}) + m^{-2}, \quad (35)$$

а в силу (30)

$$\begin{aligned} \varepsilon_p \varepsilon_q &= [(m - 1)^{-1} m \delta_{pq} - (m - 1)^{-1}] m^{-2} (m - 1) (m + 1) + m^{-2} = \\ &= m^{-1} (m + 1) \delta_{pq} - m^{-1}. \end{aligned} \quad (36)$$

В случае, когда  $p = m + 1, q \neq m + 1$ , имеем

$$\varepsilon_p \varepsilon_q = \sum_{x=1}^{m+1} \delta_{mx} \varepsilon_{qx} = \cos \vartheta_m = -m^{-1} = m^{-1} (m + 1) \delta_{pq} - m^{-1}. \quad (37)$$

Если же  $p = q = m + 1$ , то

$$\varepsilon_p \varepsilon_q = 1 = m^{-1} (m + 1) \delta_{pq} - m^{-1}. \quad (38)$$

Соотношения (36) — (38) показывают, что (31) — (33) есть пример системы векторов в  $R^m$ , удовлетворяющей свойству (28). Ясно, что система векторов  $\{\varepsilon_p\}$  определена в  $R^m$  с точностью до вращения.

Векторы системы  $\{\varepsilon_p\}$  направлены в вершины правильного  $(m + 1)$ -вершинного многогранника в  $m$ -мерном пространстве ( $m$ -мерного симплекса) из его центра.

Векторы  $\{\varepsilon_p\}$  обладают рядом полезных свойств. Одно из них состоит в том, что [4]

$$\sum_{p=1}^{m+1} \varepsilon_p = 0. \quad (39)$$

Действительно, рассмотрим квадрат суммы  $\sum_{p=1}^{m+1} \varepsilon_p$ . В силу определения (28) векторов  $\{\varepsilon_p\}$  имеем

$$\begin{aligned} \left( \sum_{p=1}^{m+1} \varepsilon_p \right)^2 &= \sum_{p, q=1}^{m+1} \varepsilon_p \varepsilon_q = \sum_{p, q=1}^{m+1} [m^{-1} (m + 1) \delta_{pq} - m^{-1}] = \\ &= m^{-1} (m + 1) (m + 1) - m^{-1} (m + 1)^2 = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Убедимся теперь, что система векторов (31) — (33) является полной в  $R^m$ . Покажем, что любой орт  $i^{(m, y)}$  ( $i_x^{(m, y)} = \delta_{xy}$ ),  $x, y = 1, \dots, m$ , является линейной комбинацией векторов  $\varepsilon_1, \dots$

... ,  $\epsilon_{m+1}$ . В  $R^1$  это имеет место:  $i^{(1,1)} = \epsilon_1$ . Пусть также это имеет место в  $R^{m-1}$ :

$$i^{(m-1,y)} = \sum_{p=1}^m a_p^{(y)} \epsilon_p. \tag{41}$$

Заметим, что

$$i_x^{(m,y)} = i_x^{(m-1,y)}, \quad x, y = 1, \dots, m-1; \tag{42}$$

$$i_m^{(m,y)} = 0, \quad y = 1, \dots, m-1; \tag{43}$$

$$i_x^{(m,m)} = \delta_{mx}, \quad x = 1, \dots, m. \tag{44}$$

В силу (42) с учетом (32) и (33) получаем

$$i_x^{(m,y)} = \sum_{p=1}^m (\sin^{-1} \vartheta_m a_p^{(y)}) \epsilon_{px} - \left( \sum_{q=1}^m \text{ctg} \vartheta_m a_q^{(y)} \right) \epsilon_{m+1,x}, \tag{45}$$

$$x, y = 1, \dots, m-1.$$

Согласно (43), (31) и (33)

$$i_m^{(m,y)} = \sum_{p=1}^m (\sin^{-1} \vartheta_m a_p^{(y)}) \epsilon_{pm} - \left( \sum_{q=1}^m \text{ctg} \vartheta_m a_q^{(y)} \right) \epsilon_{m+1,m}, \tag{46}$$

$$y = 1, \dots, m-1.$$

Равенства (45) и (46) означают, что

$$i^{(m,y)} = \sum_{p=1}^{m+1} b_p^{(y)} \epsilon_p, \tag{47}$$

где

$$\left. \begin{aligned} b_p^{(y)} &= \sin^{-1} \vartheta_m a_p^{(y)}, \quad p = 1, \dots, m, \\ b_{m+1}^{(y)} &= \sum_{q=1}^m \text{ctg} \vartheta_m a_q^{(y)}, \end{aligned} \right\} \tag{48}$$

т. е. что орты  $i^{(m,1)}, \dots, i^{(m,m-1)}$  являются линейными комбинациями векторов  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{m+1}$ . Но то же справедливо и для последнего орта  $i^{(m,m)}$  (33), (44)

$$i^{(m,m)} = \epsilon_{m+1}. \tag{49}$$

Благодаря свойству (39) любые  $m$  векторов из системы  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{m+1}$  образуют полную систему векторов в  $R^m$ .

Еще одно полезное свойство векторов  $\{\epsilon_p\}$  состоит в том, что [4]

$$\sum_{p=1}^{m+1} \epsilon_{px} \epsilon_{py} = m^{-1} (m+1) \delta_{xy}, \quad x, y = 1, \dots, m. \tag{50}$$



Чтобы доказать его, возьмем произвольный вектор  $\mathbf{A}$  и разложим его по  $m$  первым векторам  $\{\mathbf{e}_p\}$ :

$$\mathbf{A} = \sum_{q=1}^m a_q \mathbf{e}_q \tag{51}$$

и рассмотрим свертку по  $y$  левой части (44) с  $A_y$ :

$$\begin{aligned} \sum_{y=1}^m \sum_{p=1}^{m+1} \varepsilon_{px} \varepsilon_{py} A_y &= \sum_{q=1}^m a_q \sum_{p=1}^{m+1} \varepsilon_{px} \sum_{y=1}^m \varepsilon_{py} \varepsilon_{qy} = \\ &= \sum_{q=1}^m a_q \sum_{p=1}^{m+1} \varepsilon_{px} [m^{-1}(m+1) \delta_{pq} - m^{-1}] = \\ &= m^{-1}(m+1) \sum_{q=1}^m a_q \varepsilon_{q,x} - m^{-1} \sum_{q=1}^m a_q \sum_{p=1}^{m+1} \varepsilon_{p,x}. \end{aligned} \tag{52}$$

Учитывая свойство (39), имеем

$$\sum_{y=1}^m \sum_{p=1}^{m+1} \varepsilon_{px} \varepsilon_{py} A_y = m^{-1}(m+1) A_x. \tag{53}$$

Принимая во внимание произвольность вектора  $\mathbf{A}$ , получаем свойство (50).

Свойство (50) позволяет, в частности, расписать скалярное произведение векторов в переполненном базисе

$$\mathbf{b} \mathbf{c} = (m+1)^{-1} m \sum_{p=1}^{m+1} \varepsilon_p \mathbf{b} \varepsilon_p \mathbf{c}, \tag{54}$$

поскольку

$$\mathbf{b} \mathbf{c} = \sum_{x,y=1}^m b_x c_y \delta_{xy} = (m+1)^{-1} m \sum_{p=1}^{m+1} \varepsilon_{px} b_x \varepsilon_{py} c_y. \tag{55}$$

Представление (54), в свою очередь, в частности, дает возможность восстановить произвольный вектор  $\mathbf{a}$  по его компонентам  $\varepsilon_p \mathbf{a}$  в базисе  $\{\mathbf{e}_p\}$ . Полагая в (54)  $\mathbf{b}$  равным  $\mathbf{i}^{(x)}$ -орту в направлении оси  $x$ , а  $\mathbf{c}$  — равным  $\mathbf{a}$ , имеем

$$a_x = (m+1)^{-1} m \sum_{p=1}^{m+1} \varepsilon_{px} \varepsilon_p \mathbf{a}. \tag{56}$$

После того как мы показали, что система векторов со свойствами (28) существует, переформулируем модель Поттса на языке векторов симплекса [4, 5]. Поставим в соответствие каждому состоянию  $P_1, \dots, P_q$  один из векторов  $\varepsilon_p$  системы (27) в пространстве  $R^m$  при  $m = q - 1$ :  $P_p \leftrightarrow \varepsilon_p, p = 1, \dots, m + 1$ . Состояние  $i$ -го узла тогда характеризуется вектором  $\mathbf{s}_i \in R^m$ , который может принимать одно из  $(m + 1)$  значений  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m+1}$ :

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{s}(S_i). \tag{57}$$

Дельта-функцию (24) тогда можно представить как

$$\delta(S_i, S_j) = (m + 1)^{-1} [1 + ms(S_i) s(S_j)]. \tag{58}$$

Для каждого узла  $i$  величину  $H_{0i}(S_i)$  можно записать в виде скалярного произведения вектора  $s(S_i)$  с некоторым вектором  $h_i$ :

$$H_{0i}(S_i) = h_i s(S_i). \tag{59}$$

Действительно, в соответствии с (56) таким вектором  $h_i$  является следующий:

$$h_{ix} = (m + 1)^{-1} m \sum_{i=1}^{m+1} s_x(S_i) H_{0i}(S_i). \tag{60}$$

Вектор  $h_i$  будем называть полем в узле  $i$ .

Подставляя (58) и (59) в (26), для статистической суммы  $Z$  имеем

$$Z = \sum_{s_1=P_1, \dots, P_{m+1}} \dots \sum_{s_N=P_1, \dots, P_{m+1}} \times \\ \times \exp \left[ \sum_{i<j} (m+1)^{-1} m E_{ij} s(S_i) s(S_j) + \sum_i h_i s(S_i) + \sum_{i<j} (m+1)^{-1} E_{ij} \right]. \tag{61}$$

Поскольку соответствие

$$P_p \leftrightarrow \epsilon_p = s(P_p) \tag{62}$$

является взаимно однозначным, то в (61) от суммирования по  $S_1, \dots, S_N$  можно перейти к суммированию по  $s(S_1) = s_1, \dots, s(S_N) = s_N$ . Отбрасывая несущественную постоянную

$$\sum_{i<j} (m+1)^{-1} E_{ij} \tag{63}$$

и вводя обозначение

$$J_{ij} = -(m+1)^{-1} m E_{ij}, \tag{64}$$

получаем

$$Z = \sum_{s_1=\epsilon_1, \dots, \epsilon_{m+1}} \dots \sum_{s_N=\epsilon_1, \dots, \epsilon_N} \exp \left[ - \sum_{i<j} J_{ij} s_i s_j + \sum_i h_i s_i \right]. \tag{65}$$

Итак, модель Поттса можно сформулировать следующим образом. Имеется решетка, содержащая  $N$  узлов. В каждом узле  $i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) находится спин  $s_i \in R^m$ , который может принимать одно из  $m + 1$  различных значений  $\{\epsilon_p\} = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_{m+1}\}$ . Состояние всей системы характеризуется  $N$  векторами  $\{s_i\} = s_1, \dots, s_N$ . Определяющим свойством векторов  $\{\epsilon_p\}$  является равенство (28). Каждый узел  $i$  характеризуется также полем  $h_i \in R^m$ . Гамильтониан модели Поттса в симплексном представлении имеет вид

$$H = - \sum_{i<j} J_{ij} s_i s_j + \sum_i h_i s_i. \tag{66}$$

Здесь суммирование в первом слагаемом производится по парам взаимодействующих соседей  $\langle i, j \rangle$ . Суммирование во втором слагаемом производится по всем узлам решетки. Величины  $J_{ij} \in R$  называются интенсивностями взаимодействия.

Статистическая сумма

$$Z = \sum_{s_1} \dots \sum_{s_N} \exp(-\beta H) = \sum_{\{s_i\}} \exp(-\beta H), \quad (67)$$

где суммирование производится по  $m + 1$  векторам  $\{\epsilon_p\}$  спина в каждом узле решетки.

Данное представление модели Поттса (66), (67) называется симплексным. Оно имеет то преимущество, что векторы  $\{\epsilon_p\}$  обладают описанными выше свойствами, обусловленными симметрией симплекса, которые существенно облегчают вычисления.

Физика системы как в представлении (25), так и в представлении (66) одна и та же.

#### 4. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ МОДЕЛИ ПОТТСА

Модель Поттса служит основой теоретического описания ряда явлений, наблюдаемых в экспериментах. Ряд физических систем описывается гамильтонианами, имеющими те же свойства симметрии,

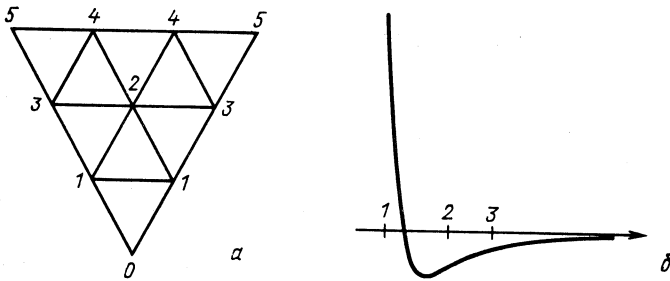


Рис. 1. Моделирование процесса адсорбции:

а — треугольная решетка центров адсорбции на базисной атомной плоскости графита, состоящая из двух подрешеток; б — потенциал Леннарда — Джонса между атомами

что и модель Поттса, и, следовательно, принадлежащими классу универсальности этой спиновой модели. Рассмотрим здесь некоторые из таких систем.

Адсорбция инертных газов на адсорбентах типа графита может описываться моделями решеточного газа Поттса (25). Такие физически адсорбированные пленки дают экспериментальную реализацию фазовых переходов в двухмерных системах. В работе [6] изучалась адсорбция криптона на графите. Центры адсорбции образуют треугольную решетку на базисной грани кристалла графита (рис. 1). Адсорбированные атомы (адатомы) криптона взаимодействуют по-

парно: потенциал взаимодействия положителен (неблагоприятен) и очень велик (в 350 раз больше глубины ямы  $E$ ) для ближайших соседей и отрицателен (благоприятен) для остальных (рис. 1, б); при этом потенциал существенно короткодействующий. Такие свойства потенциала приводят к исключению ближайших соседей. Поэтому монослой криптона завершается, когда заполняется одна из подрешеток. Различаются две фазы: синхронизованная, когда преимущественно заполняется одна из трех подрешеток на решетке центров адсорбции, и фаза неупорядоченной жидкости, когда все три подрешетки заполняются одинаково.

Задачу о криптонном решеточном газе авторы работы [6] аппроксимируют, используя свойство исключения ближайших соседей, моделью решеточного газа Поттса. К задаче в такой формулировке можно применять метод ренормализационной группы.

Рассмотрим элементарный треугольник, состоящий из трех узлов криптонного решеточного газа (треугольники  $i$  и  $j$  на рис. 2). Этот

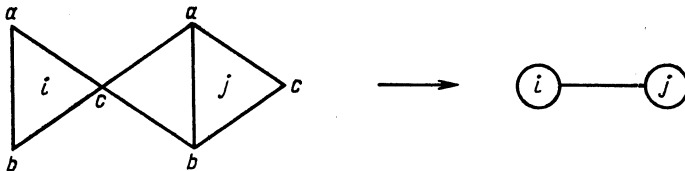


Рис. 2. К описанию адсорбции на основе модели Поттса

треугольник, рассматриваемый как целое, может находиться в одном из четырех состояний: он может не содержать ни одного атома криптона или содержать один атом в положении  $a$ ,  $b$  или  $c$ . Такой треугольник можно рассматривать как один узел решеточного газа Поттса. Его состояние описывается двумя переменными  $(t_i, s_i)$ . Если треугольник пуст, то  $t_i = 0$ , если он содержит один атом, то  $t_i = 1$ ; в последнем случае дополнительная переменная  $s_i$  описывает положение атома. Если атомом находится в положении  $a$ , то  $s_i = 1$  и т. д. Узлы решеточного газа Поттса также образуют треугольную решетку, которая полностью покрывает решетку криптонного решеточного газа. Гамильтониан решеточного газа Поттса имеет вид (25), где  $H_0$  теперь обозначает химический потенциал атомов.

Модель решеточного газа Поттса отражает основное свойство исключения ближайших соседей в криптонном решеточном газе, приводящее к существованию трех вырожденных состояний. Однако эта модель является приближенной: в то время как узлы  $(a, b)$  не могут быть заняты одновременно, узлы  $(j, a)$  и  $(i, b)$  могут, хотя вероятность этого подавлена. Описание криптонного решеточного газа с помощью решеточного газа Поттса можно систематически улучшать, вводя в гамильтониан (25) взаимодействие соседей, следующих за ближайшими.

Изучая (25) с помощью ренормгруппы, авторы работы [6] получили фазовую диаграмму, хорошо описывающую экспериментальные данные по адсорбции.

В работе [7] вводится обобщение трехкомпонентной модели Поттса, в которой спиновые состояния связываются с направлениями в решетке. Такая ситуация реализуется при адсорбции азота на графитной подложке, имеющей гексагональную структуру. Одна треть элементарных ячеек занята молекулами азота, которые образуют треугольную подрешетку. При этом молекулы приобретают ориентационное упорядочение, состоящее из чередующихся полос, в которых молекулы повернуты на углы  $\pm\pi/4$  по отношению к полосам (что внешне похоже на рыбный скелет). Такое же упорядочение имеет место в квантовых жидкостях при температурах, близких к нулевой, в смектических жидких кристаллах типа *E*, в системах больших молекул, адсорбированных на графите. В работе [7] исследуются границы между фазами в этой модели при помощи теории среднего поля и других методов.

Модель Поттса реализуется также в анизотропных ферромагнетиках кубической структуры [8]. В ферромагнитных кристаллах вектор намагниченности стремится ориентироваться вдоль определенных кристаллографических осей, называемых осями легкого намагничивания. Для того чтобы намагнитить кристалл в другом направлении, требуется совершить определенную работу [9]. Гамильтониан этой системы имеет вид [10]

$$H = -\frac{1}{2} r(\theta) M^2 + uM^4 - v(M_x^4 + M_y^4 + M_z^4) - \mathbf{h}M, \quad (68)$$

где  $\mathbf{M}$  — вектор намагниченности. Можно показать, что он имеет симметрию модели Поттса [8]. Действительно, в новых переменных

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= (M_x + M_y + M_z) / \sqrt{3}, & \tilde{\mathbf{h}}_1 &= (h_x + h_y + h_z) / \sqrt{3}; \\ \sigma_2 &= (M_x - M_y) / \sqrt{2}, & \tilde{\mathbf{h}}_2 &= (h_x - h_y) / \sqrt{2}; \\ \sigma_3 &= (M_x + M_y - 2M_z) / \sqrt{3}, & \tilde{\mathbf{h}}_3 &= (h_x + h_y - h_z) / \sqrt{3}, \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

связанных с  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{h}$  ортогональным преобразованием, гамильтониан (68) принимает вид

$$\begin{aligned} H &= -\tilde{\mathbf{h}}\boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{2} r\boldsymbol{\sigma}^2 + u\boldsymbol{\sigma}^4 - 2v\sigma_1^2(\sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \\ &- 2\sqrt{2/3}v\sigma_1^2(\sigma_2^2 - 3\sigma_2^2\sigma_3) + \frac{1}{2}v(\sigma_2^2 + \sigma_3^2)^2 + \frac{4}{3}\sigma_1^4. \end{aligned} \quad (70)$$

Наличие члена  $\sigma_2^2 - 3\sigma_2^2\sigma_3$  должно привести к фазовому переходу первого рода при изменении  $h$  и  $\theta$ . Зависимость компоненты намагниченности, параллельной внешнему полю  $M_{\parallel}$ , от этого поля для

системы, описываемой гамильтонианом (68), имеет вид, представленный на рис. 3. Когда поле направлено по главной диагонали кубического кристалла [ $h = (H, 0, 0)$ ], изменение сопровождается фазовым переходом первого рода [8] [вертикальный участок на кривой  $M_{||}/\mu_B(H)$ ]. Скачок, естественно, различен для разных материалов.

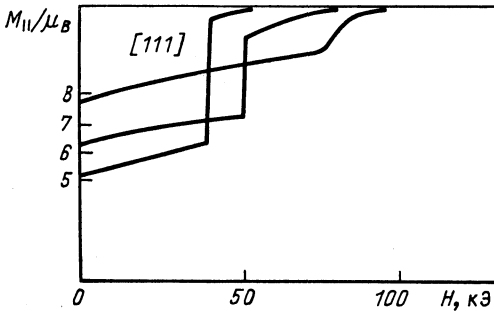


Рис. 3. Кривая намагниченности  $DyAl_2$  при  $\theta = 4,2$  К [11]

В [11] измерялась намагниченность редкоземельного композитного материала  $DyAl_2$  при температурах, меньших критической, в очень сильных магнитных полях. При низких температурах скачок намагниченности в этом материале составляет 25 % ее полного значения. По мере того как приложенное поле поворачивается от направления [111] к [110], скачок намагниченности уменьшается, а затем фазовый переход становится переходом второго рода. Этот эксперимент показывает, что для трехмерной модели Поттса предсказания теории среднего поля [5], по крайней мере качественно, верны.

Структурные фазовые переходы в некоторых материалах, таких, как  $SrTiO_3$  [12, 13],  $Pb_3(PO_4)_2$  [14], относятся к классу универсальности модели Поттса с  $q = 3$ . Композитные материалы кристаллографической структуры  $A15$ , такие, как  $Nb_3Sn$ , являются сверхпроводниками, претерпевают структурный фазовый переход, при котором их кристаллографическая структура превращается из кубической в тетрагональную [15]. В континуальном пределе этот фазовый переход можно описывать при помощи функции свободной энергии, построенной из компонент тензора деформации  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$ ,  $\epsilon_{zz}$ , которая имеет симметрию модели Поттса [16]. Следовательно, фазовая диаграмма для  $Nb_3Sn$  в переменных  $(\theta, S_{xx}, S_{yy}, S_{zz})$ , где  $S_{jj}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — компоненты тензора напряжений, совпадает с фазовой диаграммой трехмерной модели Поттса с тремя состояниями (см. [16]). Этот факт можно привлечь для объяснения зависимости температурного фазового перехода (связанной с температурой перехода в сверхпроводящее состояние [15]) от давления [16].

Жидкая пятикомпонентная смесь этиленгликоль + лауриловый спирт + вода + нитроэтан + нитрометан описывается трехкомпонентной решетчатой системой [17, 18]. Интенсивно проверялось предсказание теории среднего поля о существовании фазового перехода первого рода в этой системе, и он действительно наблюдался [18].

В последнее время интенсивно обсуждаются фазовые переходы

на границах раздела различных фаз [19]. Экспериментально они реализуются в многокомпонентных жидких смесях и в адсорбционных системах, которые, как мы видели, связаны с моделью Поттса.

В терминах модели Поттса формулируется целый ряд полимерных задач [20, 21].

Методы статистической механики решеточных систем применимы к комбинаторным задачам оптимизации, особенно к так называемым НП-полным задачам [22]. Задача коммивояжера, задача о разбиении графа, задача о раскрашивании исследовались с помощью методов теории замороженных систем. В большинстве этих работ в качестве основного инструмента используется  $q$ -компонентная модель Поттса.

В [23] задача коммивояжера формулируется как решеточная задача статистической механики. Обсуждаются высоко- и низкотемпературные режимы в системе. Получено точное решение упрощенной модели и обнаружен фазовый переход типа спинового стекла. В [24] получено решение задачи коммивояжера в формулировке предыдущей работы при помощи метода копий без нарушения симметрии. Получены хорошие оценки длины кратчайшего пути. В ключевой работе [25] обсуждаются различные оценки целевой функции (свободной энергии) задачи коммивояжера, построена теория среднего поля, развит теоретико-полевой подход, обсуждается связь с замороженными системами.

Применение методов статистической механики замороженных систем к задаче о разбиении графа обсуждается в [26—29]. В [27, 28] использован чрезвычайно популярный в последнее время метод имитации отжига. Обнаружена низкотемпературная фаза типа спинового стекла, характеризующаяся множеством метастабильных локальных экстремумов и несамоусредняемостью, что проливает свет на структуру этой сложной вычислительной задачи.

В работе [29] обсуждается связь задачи о разбиении графа на  $q$  подграфов при минимизации связей между компонентами, а также задачи о разбиении случайного графа с теорией спинового стекла в модели Поттса. Получены оценки для целевой функции при помощи теории среднего поля для спинового стекла, а также некоторых численных методов.

Большой интерес представляет также задача о раскрашивании графа  $q$  красками. В [30] получена приближенная формула для числа раскрашивания гиперкубической решетки  $q$  красками в  $d$  пространстве измерений, в [31] выполнены расчеты методом Монте-Карло.

В [32] подробно исследуется связь задачи трех красок с восьмивершинной моделью. В работах [33, 34] эквивалентность задачи о раскрашивании и задачи об основном состоянии антиферромагнитной модели Поттса использована для вычисления хроматического полинома в комплексной плоскости. В [35] показано, что формулировка модели Поттса в терминах дихроматического полинома тесно связана с обобщенной задачей протекания.

В работе [36] построен ряд по степеням  $1/3$  для вычисления энтропии основного состояния шестивершинной модели, что сводится к задаче о раскрашивании. Позже было получено точное решение этой задачи [37].

Как уже отмечалось, термодинамические свойства слабоконденсированных сред описываются замороженными решетчатыми системами. Простейшими из них являются модели разбавленных магнетиков [38]. В частности, разбавленная модель Поттса описывается гамильтонианом [39]

$$H = -\frac{1}{2} J \sum_{(i, j)} \xi_i \xi_j \delta(S_i, S_j) - h \sum_i \xi_i \delta(S_i, q), \quad S_i = P_1, \dots, P_q, \quad (71)$$

где  $\xi_j$  — замороженные величины, которые могут принимать два значения 0 и 1. Среднее значение  $\langle \xi_j \rangle = p$  равно вероятности того, что узел  $i$  занят магнитным спином  $S_i$ .

Критическое поведение такой системы различно при разных  $p$ . Система может перейти в магнитоупорядоченную фазу при понижении температуры лишь в том случае, если  $p > p_c$ , где  $p_c$  — критическая концентрация задачи протекания по узлам (лишь в этом случае существует бесконечный связный кластер). Критическая температура перехода из парамагнитной в ферромагнитную фазу  $\theta_c(p)$  должна монотонно убывать с уменьшением концентрации магнитных атомов  $p$ . В [40] установлено, что для разбавленной ферромагнитной модели Поттса

$$\theta_c(p) \sim p - p_c.$$

В [41] изучалась разбавленная антиферромагнитная модель с  $q = 3$  на треугольной решетке. Были обнаружены состояния с частичным порядком, при котором нарушены лишь некоторые из имеющихся симметрий.

В [42] разбавленная модель Поттса в поперечном поле исследовалась методом ренормализационной группы теории среднего поля. Найдены критические поверхности в пространстве поле — температура — концентрация и некоторые критические показатели.

Более сложными моделями являются те, в которых интенсивность взаимодействия узлов  $i$  и  $j$  в отличие от (71) не факторизуется:

$$H = -\frac{1}{2} J \sum_{(i, j)} J_{ij} \delta(S_i, S_j) - \sum_i h_i \delta(S_i, q), \quad S_i = P_1, \dots, P_q,$$

интенсивности  $J_{ij}$  и поля  $h_i$  — замороженные величины.

Данные модели служат, в частности, основой описания слабоупорядоченных магнетиков, в которых атомы, обладающие магнитным моментом, случайным образом расположены среди немагнитных атомов решетки. В таких системах возникает фаза спинового стекла, где магнитные моменты примесей заморожены в фиксированных случайных направлениях, т. е. когда имеется ближний порядок при



отсутствии дальнего [43]. Согласно многочисленным экспериментальным данным (см. например, [44, 45]), фаза спинового стекла наблюдается при достаточно низких температурах в пределах от нескольких до десятков градусов и концентрациях магнитных примесей в пределах от долей процента до десятков процентов. Спины случайно распределенных магнитных атомов взаимодействуют между собой при помощи косвенного обменного взаимодействия через электроны проводимости, называемого взаимодействием РККИ [46—48], когда интенсивность взаимодействия изменяется с расстоянием по закону

$$J(r) \sim r^{-3} \cos(2k_F r).$$

Указанная концентрация примесей достаточно мала для того, чтобы исключить прямой обмен (когда спины находятся в соседних узлах), но достаточно велика для того, чтобы взаимодействие между спинами примесей не было пренебрежимым (в отличие от систем Кондо).

Впервые метод теоретического описания систем данного типа на основе модели Изинга ( $q = 2$ ) был разработан в [49]. В ней предложено рассматривать спины на регулярной решетке меньшего размера, в которой каждый узел занят магнитным атомом. Поскольку взаимодействие РККИ — дальнодействующее и осциллирующее, то считается, что на регулярной решетке интенсивности парного обменного взаимодействия  $J_{ij}$  являются независимыми случайными величинами с плотностями вероятности  $P_{ij}(J_{ij})$ . Очевидно, что эквивалентную систему следует считать замороженной.

подавляющее большинство исследователей ограничиваются гауссовой плотностью вероятности интенсивностей взаимодействия. В случае модели Изинга такую решетку обычно называют моделью Шеррингтона — Киркпатрика, поскольку решение для данной модельной задачи было получено ими в работе [50]. Распределение

$$P_{ij}(J) = c\delta(J - \bar{J}) + (1 - c)\delta(J + \bar{J})$$

соответствует так называемой фрустрационной модели [51]. Параметр  $c$  может описывать, например, концентрацию ферромагнитных связей.

Фаза спинового стекла обнаружена также в гауссовых моделях Гейзенберга [52] и Поттса [53, 54]. Квадрупольные спиновые стекла исследовались в работе [55].

В [56, 57] изучались стохастические модели Поттса, в которых число спиновых состояний различно в разных узлах. Обнаружено, что тип фазового перехода может меняться при изменении заселенности узлов. В [58] исследуются свойства дуальности замороженных моделей. Построена фазовая диаграмма замороженной случайной двухмерной векторной модели Поттса.

## 5. МНОГОМЕРНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В дальнейшем исследовании модели Поттса существенную роль будут играть многомерные обобщения гиперболических тригонометрических функций. Рассмотрим эти функции и их свойства [59].

Определим скалярную функцию  $R$  векторного аргумента из  $R^m$  соотношением

$$R(\mathbf{b}) = (m + 1)^{-1} m \sum_{p=1}^{m+1} \exp(\mathbf{b}\mathbf{e}_p). \quad (72)$$

В одномерном случае  $m = 1$  система векторов  $\{\mathbf{e}_p\}$  имеет вид (29), и функция  $R$  оказывается равной

$$R(\mathbf{b}) = \frac{1}{2} [\exp(b) + \exp(-b)], \quad m = 1, \quad (73)$$

т. е. совпадает с обычным гиперболическим косинусом

$$\operatorname{ch} b = \frac{1}{2} [\exp(b) + \exp(-b)]. \quad (74)$$

Таким образом, функция  $R(\mathbf{b})$  (72) является естественным обобщением гиперболического косинуса.

Помня, что производной гиперболического косинуса является гиперболический синус

$$\operatorname{sh} b = \frac{\partial}{\partial b} \operatorname{ch} b = \frac{1}{2} [\exp(b) - \exp(-b)], \quad (75)$$

рассмотрим производную функцию  $R(b)$  по  $x$ -й компоненте аргумента  $b_x$ :

$$Q_x(\mathbf{b}) = \frac{\partial}{\partial b_x} R(\mathbf{b}) = (m + 1)^{-1} m \sum_{p=1}^{m+1} \mathbf{e}_{px} \exp(\mathbf{b}\mathbf{e}_p), \quad x = 1, \dots, m \quad (76)$$

или в векторных обозначениях

$$\mathbf{Q}(\mathbf{b}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} R(\mathbf{b}) = (m + 1)^{-1} m \sum_{p=1}^{m+1} \mathbf{e}_p \exp(\mathbf{b}\mathbf{e}_p). \quad (77)$$

В одномерном случае, когда система векторов  $\{\mathbf{e}_p\}$  сводится к (29), функция  $\mathbf{Q}(\mathbf{b})$  принимает вид

$$\mathbf{Q}(\mathbf{b}) = \frac{1}{2} [\exp(b) - \exp(-b)], \quad m = 1, \quad (78)$$

и совпадает с гиперболическим синусом (75). Таким образом, функция  $\mathbf{Q}(\mathbf{b})$  является естественным обобщением синуса гиперболического.

Вторая производная гиперболического косинуса по своему аргументу совпадает с ним же:

$$\frac{\partial^2}{\partial b^2} \operatorname{ch} b = \operatorname{ch} b. \quad (79)$$

Посмотрим, как обобщается это свойство на многомерный случай. Определим функции  $Q_{xy}(b)$  как вторые производные  $R(b)$ :

$$Q_{xy}(b) = \frac{\partial^2}{\partial b_y \partial b_x} R(b) = (m+1)^{-1} m \sum_{p=1}^{m+1} \varepsilon_{p_x} \varepsilon_{p_y} \exp(\mathbf{b}\varepsilon_p), \quad (80)$$

$x, y = 1, \dots, m,$

в соответствии с чем

$$Q_{xy}(b) = Q_{yx}(b). \quad (81)$$

Возьмем след матрицы  $Q_{xy}(b)$ . Согласно определению (28) системы векторов  $\{\varepsilon_p\}$  имеем

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^m Q_{xx}(b) &= (m+1)^{-1} m \sum_{p=1}^{m+1} \exp(\mathbf{b}\varepsilon_p) \sum_{x=1}^m \varepsilon_{p_x}^2 = \\ &= (m+1)^{-1} m \sum_{p=1}^{m+1} \exp(\mathbf{b}\varepsilon_p) \end{aligned} \quad (82)$$

или, сравнивая с (72),

$$\sum_{x=1}^m Q_{xx}(b) = R(b). \quad (83)$$

Иными словами, лапласиан функции  $R(b)$  совпадает с самой  $R(b)$ :

$$\sum_{x=1}^m \frac{\partial^2}{\partial b_x^2} R(b) = R(b) \quad (84)$$

или

$$\nabla^2 R(b) = R(b). \quad (85)$$

Соотношения (84), (85) и есть обобщение свойства (79).

Для установления функциональных свойств  $R$ ,  $Q_x$  и  $Q_{xy}$  рассмотрим функцию одного скалярного и двух векторных аргументов

$$\begin{aligned} T(a, b, c) &= \\ &= (m+1)^{-2} m^2 \sum_{p,q=1}^{m+1} \exp(a\varepsilon_p \varepsilon_q + \mathbf{b}\varepsilon_p + \mathbf{c}\varepsilon_q). \end{aligned} \quad (86)$$

Заметим, что при нулевом первом аргументе она сводится к произведению двух функций  $R$ :

$$T(0, b, c) = R(b) R(c). \quad (87)$$

Нетрудно также убедиться, что в одномерном случае

$$T(a, b, c) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c, \quad m = 1. \quad (88)$$

Рассмотрим теперь

$$\begin{aligned} V(a, b, c) &= \frac{\partial}{\partial a} T(a, b, c) = \\ &= (m+1)^{-2} m^2 \sum_{p, q=1}^{m+1} \varepsilon_p \varepsilon_q \exp(a\varepsilon_p \varepsilon_q + b\varepsilon_p + c\varepsilon_q). \end{aligned} \quad (89)$$

Отметим симметричность  $V$  по векторным аргументам, а также то обстоятельство, что при нулевом скалярном аргументе функция  $V$  сводится к скалярному произведению двух функций  $0$

$$V(0, b, c) = Q(b) Q(c). \quad (90)$$

В соответствии с определением (28) системы векторов  $\{\varepsilon_p\}$  имеем

$$\begin{aligned} V(a, b, c) &= (m+1)^{-1} m \exp a \sum_{p=1}^{m+1} \exp[(b+c)\varepsilon_p] - \\ &- m^{-1} (m+1)^{-2} m^2 \sum_{p, q=1}^{m+1} \exp(a\varepsilon_p \varepsilon_q + b\varepsilon_p + c\varepsilon_q) = \\ &= \exp aR(b+c) - m^{-1} T(a, b, c). \end{aligned} \quad (91)$$

Это соотношение позволяет получить формулу для функции  $R$  от суммы. Полагая в нем  $a = 0$  и сравнивая результат с (87), (90), находим

$$R(b+c) = Q(b) Q(c) + m^{-1} R(b) R(c) \quad (92)$$

или

$$R(b+c) = \sum_{x=1}^m Q_x(b) Q_x(c) + m^{-1} R(b) R(c). \quad (93)$$

Это есть обобщение теоремы сложения для гиперболического косинуса. Действительно, при  $m = 1$  имеем

$$\operatorname{ch}(b+c) = \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c + \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c, \quad (94)$$

т. е. обычную теорему сложения.

Для обобщения теоремы сложения для синуса рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} V_x(a, b, c) &= \frac{\partial}{\partial b_x} V(a, b, c) = \\ &= (m+1)^{-2} m^2 \sum_{p, q=1}^{m+1} \varepsilon_p \varepsilon_q \varepsilon_{p,c} \exp(a\varepsilon_p \varepsilon_q + b\varepsilon_p + c\varepsilon_q). \end{aligned} \quad (95)$$

При  $a = 0$  функция  $V_x$  принимает вид

$$V_x(0, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \sum_{y=1}^m Q_{xy}(\mathbf{b}) Q_y(\mathbf{c}). \quad (96)$$

С учетом (28) из (95) находим

$$V_x(a, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (m+1)^{-1} m \exp a \sum_{p=1}^{m+1} \epsilon_{px} \exp [(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \epsilon_p] - \\ - m^{-1} (m+1)^{-2} m^2 \sum_{p, q=1}^{m+1} \epsilon_{px} \exp (a \epsilon_p \epsilon_q + \mathbf{b} \epsilon_p + \mathbf{c} \epsilon_q). \quad (97)$$

Полагая здесь  $a = 0$ , с учетом (96) получаем

$$Q_x(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \sum_{y=1}^m Q_{xy}(\mathbf{b}) Q_y(\mathbf{c}) + m^{-1} Q_x(\mathbf{b}) R(\mathbf{c}). \quad (98)$$

Принимая во внимание, что при  $m = 1$  согласно (83)  $Q_{xx}(\mathbf{b}) = R(\mathbf{b})$ , видим, что в одномерном случае (97) дает

$$\text{sh}(b+c) = \text{ch } b \text{ sh } c + \text{sh } b \text{ ch } c, \quad (99)$$

так что соотношение (98) обобщает теорему сложения для гиперболического синуса.

Выясним, что представляет собой вторая производная функции  $T$  по первому аргументу:

$$W(a, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \frac{\partial^2}{\partial a^2} T(a, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \\ = (m+1)^{-2} m^2 \sum_{p, q=1}^{m+1} (\epsilon_p \epsilon_q)^2 \exp (a \epsilon_p \epsilon_q + \mathbf{b} \epsilon_p + \mathbf{c} \epsilon_q). \quad (100)$$

Согласно основному свойству векторов симплекса  $\epsilon_p$  (28):

$$(\epsilon_p \epsilon_q)^2 = [m^{-1} (m+1) \delta_{pq} - m^{-1}]^2 = \\ = m^{-2} (m-1) (m+1) \delta_{pq} + m^{-2}, \quad (101)$$

откуда

$$W(a, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \\ = \exp a m^{-1} (m-1) (m+1)^{-1} m \sum_{p=1}^{m+1} \exp [(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \epsilon_p] + \\ + m^{-2} (m+1)^{-2} m^2 \sum_{p, q=1}^{m+1} \exp (a \epsilon_p \epsilon_q + \mathbf{b} \epsilon_p + \mathbf{c} \epsilon_q) = \\ = \exp a m^{-1} (m-1) R(\mathbf{b} + \mathbf{c}) + m^{-2} T(a, \mathbf{b}, \mathbf{c}). \quad (102)$$

С учетом теоремы сложения (92)

$$W(a, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \exp a m^{-1} (m-1) Q(\mathbf{b}) Q(\mathbf{c}) + \\ + \exp a m^{-2} (m-1) R(\mathbf{b}) R(\mathbf{c}) + m^{-2} T(a, \mathbf{b}, \mathbf{c}), \quad (103)$$

так что функция  $W$  выражается через уже известные функции  $R$ ,  $Q$ ,  $T$ . При  $a = 0$  согласно (87) функция  $W$  принимает вид

$$W(0, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = m^{-1} (m-1) Q(\mathbf{b}) Q(\mathbf{c}) + m^{-1} R(\mathbf{b}) R(\mathbf{c}). \quad (104)$$

Рассмотрим теперь тензорную функцию

$$Q_{xyz}(\mathbf{b}) = (m+1)^{-1} m \sum_{p=1}^{m+1} \varepsilon_{px} \varepsilon_{py} \varepsilon_{pz} \exp(\mathbf{b} \varepsilon_p), \quad (105)$$

очевидным образом связанную с  $Q_{xy}(\mathbf{b})$  (80):

$$Q_{xyz}(\mathbf{b}) = \frac{\partial}{\partial b_z} Q_{xy}(\mathbf{b}), \quad (106)$$

и, очевидно, полностью симметричную по индексам  $x, y, z$ , а также векторную и тензорную функции

$$U_x(a, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (m+1)^{-2} m^2 \sum_{p, q=1}^{m+1} \varepsilon_{px} \exp(a \varepsilon_p \varepsilon_q + \mathbf{b} \varepsilon_p + \mathbf{c} \varepsilon_q); \quad (107)$$

$$U_{xy}(a, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (m+1)^{-2} m^2 \sum_{p, q=1}^{m+1} \varepsilon_{px} \varepsilon_{py} \exp(a \varepsilon_p \varepsilon_q + \mathbf{b} \varepsilon_p + \mathbf{c} \varepsilon_q) \quad (108)$$

— производные от функции  $T$  (86);

$$U_x(a, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \frac{\partial}{\partial b_x} T(a, \mathbf{b}, \mathbf{c}); \quad (109)$$

$$U_{xy}(a, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \frac{\partial}{\partial b_y} U_x(a, \mathbf{b}, \mathbf{c}), \quad (110)$$

причем  $U_{xy}$  симметрична по индексам  $x, y$ . Благодаря нормированности векторов  $\varepsilon_p$  мы имеем следующие свойства функций (106), (108):

$$\sum_{x=1}^m Q_{xxy}(\mathbf{b}) = (m+1)^{-1} m \sum_{p=1}^{m+1} \left[ \left( \sum_{x=1}^m \varepsilon_{px}^2 \right) \varepsilon_{py} \exp(\mathbf{b} \varepsilon_p) \right] = Q_y(\mathbf{b}); \quad (111)$$

$$\sum_{x=1}^m U_{xx}(a, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \\ = (m+1)^{-2} m^2 \sum_{p, q=1}^{m+1} \left[ \left( \sum_{x=1}^m \varepsilon_{px}^2 \right) \exp(a \varepsilon_p \varepsilon_q + \mathbf{b} \varepsilon_p + \mathbf{c} \varepsilon_q) \right] = T(a, \mathbf{b}, \mathbf{c}). \quad (112)$$

Определим также функцию

$$P_x(a, \mathbf{b}) = (m+1)^{-1} m \sum_{p=1}^{m+1} \exp(a \varepsilon_{px} + \mathbf{b} \varepsilon_p), \quad (113)$$

которая в одномерном случае имеет вид

$$P_x(a, b) = \text{ch}(a + b), \quad m = 1. \tag{114}$$

Выпишем ее производные по  $b_y$  и  $b_z$ :

$$S_{(x)y}(a, b) = (m + 1)^{-1} m \sum_{p=1}^{m+1} \varepsilon_{py} \exp(a\varepsilon_{px} + b\varepsilon_p); \tag{115}$$

$$S_{(x)yz}(a, b) = (m + 1)^{-1} m \sum_{p=1}^{m+1} \varepsilon_{py}\varepsilon_{pz} \exp(a\varepsilon_{px} + b\varepsilon_p). \tag{116}$$

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{x=1}^m S_{(y)xx}(a, b) = P_{(y)}(a, b). \tag{117}$$

Отметим, наконец, что

$$S_{(x)x}(a, b) = \frac{\partial}{\partial a} P_{(x)}(a, b), \quad S_{(x)xx}(a, b) = \frac{\partial^2}{\partial a^2} P_{(x)}(a, b) \tag{118}$$

и

$$P_{(x)}(0, b) = R(b), \tag{119}$$

$$S_{(x)x}(0, b) = Q_x(b), \quad S_{(x)xx}(0, b) = Q_{xx}(b). \tag{120}$$

### 6. ЭФФЕКТИВНЫЙ ГАМИЛЬТониАН ЗАМОРОЖЕННОЙ МОДЕЛИ ПОТТСА

Опишем, что такое замороженная модель Поттса. Мы будем рассматривать симплексное представление модели Поттса (см. разд. 3). Разбив поле  $h_i$  на два слагаемых, запишем гамильтониан в виде

$$H = - \sum_{i < j} J_{ij} s_i s_j + \sum_i h_i s_i + \sum_i v_i s_i. \tag{121}$$

В соответствии с разд. 1 рассматриваемая система характеризуется переменными различных типов:  $s_i$ ,  $J_{ij}$ , и  $h_i$ ,  $v_i$ . Переменные  $s_i$  — обычные переменные, переменные  $J_{ij}$  и  $h_i$  являются замороженными, а  $v_i$  — фиксированными, т. е. поля  $v_i$  являются заданными параметрами. Интенсивности взаимодействий  $J_{ij}$  и поля  $h_i$  являются взаимно независимыми случайными величинами. В данной работе их распределения  $P_{ij}(J_{ij})$  и  $p_{ix}(h_{ix})$  не конкретизируются. Распределения  $P_{ij}(J_{ij})$  могут быть различными для различных пар  $(i, j)$ , а  $p_{ix}(h_{ix})$  — различными для различных узлов  $i$  и компонент  $x$ .

Термодинамическое значение  $\mathcal{A}$  некоторой величины  $A$  для замороженной системы с гамильтонианом (121) в соответствии с (14) дается выражением

$$\mathcal{A} = \langle A(\{J_{ij}\}, \{h_{ix}\}) \rangle = \int \dots \int \prod_{i < j} [dJ_{ij} P_{ij}(J_{ij})] \prod_{i \ x=1}^m [dh_{ix} p_{ix}(h_{ix})] \langle A \rangle_H(\{J_{ij}\}, \{h_{ix}\}), \quad (122)$$

где  $\langle A \rangle_H(\{J_{ij}\}, \{h_{ix}\})$  — значение этой величины для заданных значений интенсивностей взаимодействий  $J_{ij}$  и полей  $h_i$ .

В частности, для свободной энергии  $\mathcal{F} = N\varphi$  имеем [см. (21)]:

$$\mathcal{F} = \langle F \rangle, \quad \varphi = \langle f \rangle, \quad (123)$$

где

$$Nf = F = -\beta^{-1} \ln Z, \quad (124)$$

$\beta$  — обратная температура,

$$\beta = \theta^{-1}, \quad (125)$$

а  $Z$  — статистическая сумма для заданных значений  $J_{ij}$  и  $h_i$ ,

$$Z = \sum_{s_1} \dots \sum_{s_N} \exp(-\beta H) = \sum_{\{s_i\}} \exp[-\beta H(\{s_i\})] = \text{tr} \exp(-\beta H). \quad (126)$$

В (126) суммирование производится по  $m + 1$  векторам  $\{\epsilon_p\}$  (28) спина в каждом узле решетки.

Для вычисления свободной энергии (123) воспользуемся методом копий [49]. Приведем здесь одно элементарное соотношение. Если предел при  $n \rightarrow 0$  некоторой функции  $a_n$  равен единице

$$\lim_{n \rightarrow 0} a_n = 1, \quad (127)$$

то

$$\lim_{n \rightarrow 0} (n^{-1} \ln a_n) = \lim_{n \rightarrow 0} [n^{-1} (a_n - 1)]. \quad (128)$$

Полагая в (128)  $a_n = a^n$ , имеем

$$\ln a = \lim_{n \rightarrow 0} [n^{-1} (a^n - 1)]. \quad (129)$$

Теперь в соответствии с (124) можно записать

$$-\beta F = \ln Z = \lim_{n \rightarrow 0} [n^{-1} (Z^n - 1)], \quad (130)$$

так что свободная энергия (123) представима в виде

$$-\beta \mathcal{F} = \lim_{n \rightarrow 0} [n^{-1} (\langle Z^n \rangle - 1)]. \quad (131)$$



В силу равенства (128) это выражение для  $\mathcal{F}$  можно переписать следующим образом:

$$-\beta \mathcal{F} = \lim_{n \rightarrow 0} [n^{-1} \ln \langle Z^n \rangle]. \quad (132)$$

Соотношение (132), в отличие от работы [49] и многих других работ, следующих ей в применении метода копий к исследованию слабоупорядоченных спиновых систем (см., например, [50, 60, 61]), и является нашей отправной точкой [59, 62—64].

Отметим, что его также можно представить в виде

$$\langle \ln Z \rangle = \lim_{n \rightarrow 0} \ln \langle Z^n \rangle^{1/n}. \quad (133)$$

Для краткости введем обозначение

$$\mathcal{F}_n = -n^{-1} \beta^{-1} \ln \langle Z^n \rangle, \quad (134)$$

в котором искомая величина — свободная энергия  $\mathcal{F}$  есть

$$\mathcal{F} = \lim_{n \rightarrow 0} \mathcal{F}_n. \quad (135)$$

$n$ -ю степень статистической суммы  $Z$  можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} Z^n &= \sum_{\{s_1^1\}} \dots \sum_{\{s_1^n\}} \exp \left[ -\beta \sum_{\alpha=1}^n H(\{s_i^\alpha\}) \right] = \\ &= \sum_{\{s_1^\alpha\}} \dots \sum_{\{s_N^\alpha\}} \exp \left[ -\beta \sum_{\alpha=1}^n H(\{s_i^\alpha\}) \right], \end{aligned} \quad (136)$$

что мы условимся обозначать как

$$Z^n = \text{tr}_n \exp \left[ -\beta \sum_{\alpha=1}^n H(\{s_i^\alpha\}) \right]. \quad (137)$$

Введем в рассмотрение гамильтониан  $H_n$  системы, содержащей  $nN$  узлов, состояние которых описывается переменными  $s_i^\alpha$  ( $i = 1, \dots, N; \alpha = 1, \dots, N$ ) [63, 65, 69]:

$$H_n(\{s_i^\alpha\}) = \ln \left\langle \exp \left[ -\beta \sum_{\alpha=1}^n H(\{s_i^\alpha\}) \right] \right\rangle. \quad (138)$$

Здесь  $\alpha$  — номер копии, усреднение  $\langle \dots \rangle$ , напомним, выполняется в соответствии с (122). Гамильтониан (138) хорош тем, что его след дает среднее значение  $Z^n$  (137); действительно,

$$\begin{aligned} \text{tr}_n \exp H_n &= \text{tr}_n \langle \exp [-\beta \sum_{\alpha=1}^n H(\{s_i^\alpha\})] \rangle = \\ &= \langle \text{tr}_n \exp [ \dots ] \rangle = \langle Z^n \rangle. \end{aligned} \quad (139)$$

В соответствии с (134) для  $\mathcal{F}_n$  получаем

$$-n\beta\mathcal{F}_n = \ln \operatorname{tr}_n \exp H_n. \quad (140)$$

Вычислим теперь гамильтониан  $H_n$ . Согласно (138) имеем

$$H_n = \sum_{i < j} \ln \int dJ P_{ij}(J) \exp \left( \beta J \sum_{\alpha=1}^n s_i^\alpha s_j^\alpha \right) + \\ + \sum_i \sum_{x=1}^m \ln \int dh p_{ix}(h) \exp \left( \beta h \sum_{\alpha=1}^n s_{ix}^\alpha \right) + \beta \sum_{\alpha=1}^n \sum_i v_i s_i^\alpha. \quad (141)$$

Воспользуемся степенным разложением

$$g(ay) = \exp(aD) g(y\tau) |_{\tau=0}, \quad D = \partial/\partial\tau. \quad (142)$$

Полагая в (142)

$$a = \sum_{\alpha=1}^n s_i^\alpha s_j^\alpha, \quad y = \beta, \quad (143)$$

а затем

$$a = \sum_{\alpha=1}^n s_{ix}^\alpha, \quad y = \beta, \quad (144)$$

находим

$$H_n = \sum_{i < j} \exp \left( D \sum_{\alpha=1}^n s_i^\alpha s_j^\alpha \right) \ln \int dJ P_{ij}(J) \exp(\beta J \tau) |_{\tau=0} + \\ + \sum_i \sum_{x=1}^m \exp \left( D \sum_{\alpha=1}^n s_{ix}^\alpha \right) \ln \int dh p_{ix}(h) \exp(\beta h \tau) |_{\tau=0} + \beta \sum_{\alpha=1}^n \sum_i v_i s_i^\alpha. \quad (145)$$

Вводя обозначения

$$\Psi_{ij}(\tau) = \ln \int dJ P_{ij}(J) \exp(\beta J \tau) = \ln \langle \exp(\beta J_{ij} \tau) \rangle, \quad (146)$$

$$\Phi_{ix}(\tau) = \ln \int dh p_{ix}(h) \exp(\beta h \tau) = \ln \langle \exp(\beta h_{ix} \tau) \rangle, \quad (147)$$

получаем

$$H_n = \sum_{i < j} \left( D \sum_{\alpha=1}^n s_i^\alpha s_j^\alpha \right) \Psi_{ij} \tau |_{\tau=0} + \\ + \sum_i \sum_{x=1}^m \exp \left( D \sum_{\alpha=1}^n s_{ix}^\alpha \right) \Phi_{ix}(\tau) |_{\tau=0} + \beta \sum_{\alpha=1}^n \sum_i v_i s_i^\alpha. \quad (148)$$

Итак, построен эффективный гамильтониан  $H_n$  для случайной замороженной модели Поттса (121), (122) [59]. Свободная энергия (123) выражается через  $H_n$  следующим образом:

$$\mathcal{F} = \lim_{n \rightarrow 0} \mathcal{F}_n, \tag{149}$$

$$-n\beta\mathcal{F}_n = \ln \text{tr}_n \exp H_n. \tag{150}$$

Данный эффективный гамильтониан  $H_n$  не содержит случайных величин. Его можно рассматривать как усредненный по интенсивностям взаимодействий  $J_{ij}$  и полям  $h_i$ . Вид гамильтониана (148) и его связь со статистической суммой исходной системы (149), (150) не зависят от конкретного вида функций распределения  $P_{ij}(J_{ij})$  и  $p_{ix}(h_{ix})$ . Вся информация о распределениях  $P_{ij}$  и  $p_{ix}$  содержится лишь в функциях  $\Psi_{ij}$  (146) и  $\Phi_{ix}$  (147).

### 7. СВОБОДНАЯ ЭНЕРГИЯ

Правую часть (150) вычислим, исходя из вариационного принципа Боголюбова [1, 2]

$$\ln \text{tr} \exp \mathcal{H} - \ln \text{tr} \exp \tilde{\mathcal{H}} \geq \langle \mathcal{H} - \tilde{\mathcal{H}} \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}}. \tag{151}$$

В применении к рассматриваемому случаю запишем его в виде [59, 66]

$$-n\beta\mathcal{F}_n = \ln \text{tr}_n \exp H_n \geq \ln \text{tr}_n \exp \tilde{H}_n + \text{tr}_n^{-1} \exp \tilde{H}_n \text{tr}_n [(H_n - \tilde{H}_n) \exp \tilde{H}_n] = -n\beta\tilde{\mathcal{F}}_n, \tag{152}$$

где  $\tilde{H}_n$  — произвольный гамильтониан, играющий роль пробного, а величина  $\tilde{\mathcal{F}}_n$  введена для сокращения обозначений.

Пробный гамильтониан  $H_n$  возьмем в виде [59]

$$\tilde{H}_n = \tilde{H}_n(\{\eta_i\}; \{\zeta_i\}; \{s_i^\alpha\}) = \sum_i \left[ \eta_i \sum_{\alpha=1}^n s_i^\alpha + \frac{1}{2} \zeta_i \left( \sum_{\alpha=1}^n s_i^\alpha \right)^2 \right], \tag{153}$$

где  $\eta_i$  и  $\zeta_i$  — вариационные параметры. Согласно соотношениям (149), (150), (152) свободную энергию  $\mathcal{F}$  можно вычислить как  $\mathcal{F}(\{\bar{\eta}_i\}, \{\bar{\zeta}_i\})$ , где

$$\tilde{\mathcal{F}}(\{\eta_i\}, \{\zeta_i\}) = \lim_{n \rightarrow 0} \tilde{\mathcal{F}}_n(\{\eta_i\}, \{\zeta_i\}), \tag{154}$$

а величины  $\eta_i = \bar{\eta}_i$ ,  $\zeta_i = \bar{\zeta}_i$  определяются из уравнений

$$\frac{\partial}{\partial \eta_i} [-\beta\tilde{\mathcal{F}}(\{\eta_i\}, \{\zeta_i\})] = 0, \tag{155}$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_i} [-\beta\tilde{\mathcal{F}}(\{\eta_i\}, \{\zeta_i\})] = 0. \tag{156}$$

Вычислим правую часть неравенства (152), т. е.  $\tilde{\mathcal{F}}_n$  с пробным гамильтонианом  $\tilde{H}_n$  в виде (153). При этом будет использовано соотношение

$$\exp\left(\frac{1}{2}\mathbf{b}^2\right) = \int dG_{\mathbf{u}} \exp(\mathbf{b}\mathbf{u}), \quad (157)$$

где  $\mathbf{b}$  — произвольный вектор из  $R^m$ ;  $dG_{\mathbf{u}}$  — нормированная гауссова мера

$$dG_{\mathbf{u}} = (2\pi)^{-m/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{u}^2\right), \quad \mathbf{u} \in R^m, \quad (158)$$

$$\int dG_{\mathbf{u}} = 1. \quad (159)$$

Рассмотрим величину

$$\exp(\omega\tilde{H}_n) = \prod_i \exp\left(\omega\eta_i \sum_{\alpha=1}^n s_i^\alpha\right) \exp\left[\frac{1}{2}\left(V\bar{\omega} \zeta_i \sum_{\alpha=1}^n s_i^\alpha\right)^2\right]. \quad (160)$$

Исходя из соотношения (157), имеем

$$\begin{aligned} \exp(\omega\tilde{H}_n) &= \prod_i \left[ \exp\left(\omega\eta_i \sum_{\alpha=1}^n s_i^\alpha\right) \int dG_{\mathbf{u}} \exp\left(V\bar{\omega} \zeta_i \mathbf{u} \sum_{\alpha=1}^n s_i^\alpha\right) \right] = \\ &= \prod_i \int dG_{\mathbf{u}} \exp\left[\left(\omega\eta_i + V\bar{\omega} \zeta_i \mathbf{u}\right) \sum_{\alpha=1}^n s_i^\alpha\right] = \prod_i f_i(s_i^\alpha), \end{aligned} \quad (161)$$

т. е. каждый множитель в произведении по  $i$  является функцией  $s_i^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, n$ ) с одним единственным значением  $i$ . В таком случае для следа  $\text{tr}_n$  можно получить

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\omega) &= \text{tr}_n \exp(\omega\tilde{H}_n) = \sum_{\{s_1^\alpha\}} \dots \sum_{\{s_N^\alpha\}} \prod_i f_i(s_i^\alpha) = \\ &= \prod_i \sum_{\{s_i^\alpha\}} f_i(s_i^\alpha) = \prod_i \sum_{\{s_i^\alpha\}} \int dG_{\mathbf{u}} \exp\left[\left(\omega\eta_i + V\bar{\omega} \zeta_i \mathbf{u}\right) \sum_{\alpha=1}^n s_i^\alpha\right]. \end{aligned} \quad (162)$$

И аналогично, выполняя суммирование по  $s_i^1, \dots, s_i^n$ , находим

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\omega) &= \prod_i \int dG_{\mathbf{u}} \sum_{s_i^1} \dots \sum_{s_i^n} \prod_{\alpha=1}^n \exp\left[\left(\omega\eta_i + V\bar{\omega} \zeta_i \mathbf{u}\right) s_i^\alpha\right] = \\ &= \prod_i \int dG_{\mathbf{u}} \prod_{\alpha=1}^n \sum_{s_i^\alpha} \exp\left[\left(\omega\eta_i + V\bar{\omega} \zeta_i \mathbf{u}\right) s_i^\alpha\right]. \end{aligned} \quad (163)$$

Учитывая, что суммирование по  $s_i^\alpha$  здесь дает один и тот же результат при любом  $\alpha = 1, 2, \dots, n$ , получаем

$$\mathcal{A}(\omega) = \prod_i \int dG_u \left\{ \sum_{p=1}^{m+1} \exp [(\omega \eta_i + V \bar{\omega} \zeta_i \mathbf{u}) \varepsilon_p] \right\}^n. \quad (164)$$

Воспользовавшись определением (72) многомерного обобщения гиперболического косинуса  $R(\mathbf{b})$ , представим  $\text{tr}_n \exp(\omega \tilde{H} \sigma)$  в виде

$$\mathcal{A}(\omega) = \prod_i \int dG_u [m^{-1}(m+1) R(\omega \eta_i + V \bar{\omega} \zeta_i \mathbf{u})]^n. \quad (165)$$

В  $\tilde{\mathcal{F}}_n$  входит выражение  $\text{tr}_n \exp \tilde{H}_n$ , равное  $\mathcal{A}(1)$ , которое, стало быть, можно записать как

$$\text{tr}_n \exp \tilde{H}_n = \left( \frac{m+1}{m} \right)^{Nn} \prod_k \int dG_u R^n(\mathbf{b}_k), \quad (166)$$

где для краткости введено обозначение

$$\mathbf{b}_i = \eta_i + \zeta_i \mathbf{u}. \quad (167)$$

Вычислить также входящий в  $\tilde{\mathcal{F}}_n$  след  $\text{tr}_n (\tilde{H}_n \exp \tilde{H}_n)$  можно, представив его в виде

$$\text{tr}_n (\tilde{H}_n \exp \tilde{H}_n) = \frac{\partial}{\partial \omega} \text{tr}_n \exp(\omega \tilde{H}_n) |_{\omega=1} = \mathcal{A}'(1). \quad (168)$$

Тогда, замечая, что

$$\left( \prod_i g_i \right)' = \left( \prod_j g_j \right) \sum_i (g_i^{-1} g_i'), \quad (169)$$

а также что в соответствии с определением (77) функции  $Q(\mathbf{b})$

$$\frac{\partial}{\partial \omega} R(\omega \eta_i + V \bar{\omega} \zeta_i \mathbf{u}) = \left( \eta_i + \frac{1}{2} \omega^{-1/2} \mathbf{u} \right) Q(\omega \eta_i + V \bar{\omega} \zeta_i \mathbf{u}), \quad (170)$$

имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'(\omega) = \mathcal{A}(\omega) \sum_i \left\{ \left[ \int dG_u (m^{-1}(m+1) R(\omega \eta_i + V \bar{\omega} \zeta_i \mathbf{u}))^n \right]^{-1} \times \right. \\ \times n \int dG_u [m^{-1}(m+1) R(\omega \eta_i + V \bar{\omega} \zeta_i \mathbf{u})]^{n-1} m^{-1}(m+1) \times \\ \left. \times \left( \omega \eta_i + \frac{1}{2} \omega^{-1/2} \mathbf{u} \right) Q(\omega \eta_i + V \bar{\omega} \zeta_i \mathbf{u}) \right\}, \quad (171) \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}_n (\tilde{H}_n \exp \tilde{H}_n) &= n \operatorname{tr}_n \exp \tilde{H}_n \sum_i \left\{ \left[ \int dG_u R^n (\eta_i + \zeta_i \mathbf{u}) \right]^{-1} \times \right. \\ &\times \left. \int dG_u R^{n-1} (\eta_i + \zeta_i \mathbf{u}) \left( \eta_i + \frac{1}{2} \zeta_i \mathbf{u} \right) \mathbf{Q} (\eta_i + \zeta_i \mathbf{u}) \right\}. \end{aligned} \quad (172)$$

От множителя  $\mathbf{u}$  в подынтегральном выражении можно избавиться с помощью соотношения

$$\int dG_u u_x f(\mathbf{u}) = \int dG_u \frac{\partial}{\partial u_x} f(\mathbf{u}). \quad (173)$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_x} [R^{n-1}(\mathbf{b}_i) Q_x(\mathbf{b}_i)] &= (n-1) R^{n-2}(\mathbf{b}_i) Q_x(\mathbf{b}_i) \frac{\partial}{\partial u_x} R(\mathbf{b}_i) + \\ &+ R^{n-1}(\mathbf{b}_i) \frac{\partial}{\partial u_x} Q_x(\mathbf{b}_i), \end{aligned} \quad (174)$$

$$\frac{\partial}{\partial u_x} R(\mathbf{b}_i) = \zeta_i Q_x(\mathbf{b}_i), \quad (175)$$

$$\frac{\partial}{\partial u_x} Q_x(\mathbf{b}_i) = \zeta_i Q_{xx}(\mathbf{b}_i), \quad (176)$$

и пользуясь свойством (83) функций  $Q_{xx}$ , находим

$$\sum_{x=1}^m \frac{\partial}{\partial u_x} [R^{n-1}(\mathbf{b}_i) Q_x(\mathbf{b}_i)] = \zeta_i [(n-1) R^{n-2}(\mathbf{b}_i) \mathbf{Q}^2(\mathbf{b}_i) + R^n(\mathbf{b}_i)], \quad (177)$$

так что для следа  $\operatorname{tr}_n (\tilde{H}_n \exp \tilde{H}_n)$  имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}_n (\tilde{H}_n \exp \tilde{H}_n) &= n \operatorname{tr}_n \exp \tilde{H}_n \sum_i \left\{ \left[ \int dG_u R^n (\mathbf{b}_i) \right]^{-1} \times \right. \\ &\times \left. \int dG_u \left[ R^{n-1}(\mathbf{b}_i) \eta_i \mathbf{Q}(\mathbf{b}_i) + \frac{1}{2} \zeta_i^2 ((n-1) R^{n-2}(\mathbf{b}_i) \mathbf{Q}^2(\mathbf{b}_i) + R^n(\mathbf{b}_i)) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (178)$$

Рассмотрим теперь след  $\operatorname{tr}_n (s_{ix_1}^{\alpha_1} \dots s_{ix_l}^{\alpha_l} \exp \tilde{H}_n)$ , где среди  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$  нет ни одной пары одинаковых. Используя соотношение (157), запишем

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}_n (s_{ix_1}^{\alpha_1} \dots s_{ix_l}^{\alpha_l} \exp \tilde{H}_n) &= \sum_{\{s_1^{\alpha_1}\}} \dots \sum_{\{s_N^{\alpha_l}\}} \prod_{h(\neq i)} \int dG_u \times \\ &\times \exp \left( \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{b}_h s_h^{\alpha} \right) \int dG_u s_{ix_1}^{\alpha_1} \dots s_{ix_l}^{\alpha_l} \exp \left( \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{b}_i s_i^{\alpha} \right). \end{aligned} \quad (179)$$

Пользуясь тем, что здесь каждый сомножитель в суммируемых выражениях зависит лишь от  $s_{ix_h}^{\alpha_h}$  с одним единственным  $i$ , поменяем порядок выполнения операций умножения и суммирования

$$\begin{aligned} & \text{tr}_n (s_{ix_1}^{\alpha_1} \dots s_{ix_l}^{\alpha_l} \exp \tilde{H}_n) = \\ &= \prod_{h(\neq i)} \sum_{\{s_h^\alpha\}} \int dG_u \exp \left( \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{b}_h s_h^\alpha \right) \sum_{\{s_i^\alpha\}} \int dG_u s_{ix_1}^{\alpha_1} \dots s_{ix_l}^{\alpha_l} \exp \left( \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{b}_i s_i^\alpha \right) = \\ &= \prod_{h(\neq i)} \int dG_u \sum_{\{s_h^1\}} \dots \sum_{\{s_h^n\}} \prod_{\alpha=1}^n \exp (\mathbf{b}_h s_h^\alpha) \int dG_u \sum_{\{s_i^1\}} \dots \sum_{\{s_i^n\}} \prod_{\nu(\neq \alpha_1, \dots, \alpha_l)} \dots \times \\ & \quad \times \exp (\mathbf{b}_i s_i^\nu) \prod_{r=1}^l s_{ix_r}^{\alpha_r} \exp (\mathbf{b}_i s_i^{\alpha_r}). \end{aligned}$$

Меняя аналогичным образом порядок выполнения операций умножения по  $\alpha$  и соответствующего суммирования, получаем

$$\begin{aligned} \text{tr}_n (s_{ix_1}^{\alpha_1} \dots s_{ix_l}^{\alpha_l} \exp \tilde{H}_n) &= \prod_{h(\neq i)} \int dG_u \prod_{\alpha=1}^n \sum_{s_h^\alpha} \exp (\mathbf{b}_h s_h^\alpha) \times \\ & \times \int dG_u \prod_{\nu(\neq \alpha_1, \dots, \alpha_l)} \sum_{s_i^\nu} \exp (\mathbf{b}_i s_i^\nu) \prod_{r=1}^l \sum_{s_i^{\alpha_r}} s_{ix_r}^{\alpha_r} \exp (\mathbf{b}_i s_i^{\alpha_r}). \quad (180) \end{aligned}$$

Принимая во внимание определения (72), (74) функций  $R$  и  $Q$ , окончательно находим

$$\begin{aligned} \text{tr}_n (s_{ix_1}^{\alpha_1} \dots s_{ix_l}^{\alpha_l} \exp \tilde{H}_n) &= \prod_{h(\neq i)} \int dG_u \left[ \frac{m+1}{m} R (\mathbf{b}_h) \right]^n \times \\ & \times \int dG_u \left[ \frac{m+1}{m} R (\mathbf{b}_i) \right]^{n-l} \left( \frac{m+1}{m} \right)^l Q_{x_1} (\mathbf{b}_i) \dots Q_{x_l} (\mathbf{b}_i) = \\ &= \left[ \int dG_u R^n (\mathbf{b}_i) \right]^{-1} \text{tr}_n \exp \tilde{H}_n \int dG_u R^{n-l} (\mathbf{b}_i) Q_{x_1} (\mathbf{b}_i) \dots Q_{x_l} (\mathbf{b}_i). \quad (181) \end{aligned}$$

Чтобы вычислить фигурирующий в  $\mathcal{F}_n$  след  $\text{tr}_n (H_n \exp \tilde{H}_n)$ , представим его согласно (148) в виде

$$\begin{aligned} \text{tr}_n (H_n \exp \tilde{H}_n) &= \sum_{i < j} \mathcal{A}_{ij} \Psi_{ij} (\tau) |_{\tau=0} + \\ & + \sum_i \sum_{x=1}^m \mathcal{B}_{ix} \Phi_{ix} (\tau) |_{\tau=0} + \beta \sum_{\alpha=1}^n \sum_i \mathbf{v}_i \mathcal{C}_{i\alpha}, \quad (182) \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{A}_{ij} = \text{tr}_n \left[ \exp \left( D \sum_{\alpha=1}^n s_i^\alpha s_j^\alpha \right) \exp \tilde{H}_n \right]; \quad (183)$$

$$\mathcal{B}_{ix} = \text{tr}_n \left[ \exp \left( D \sum_{\alpha=1}^n s_{ix}^\alpha \right) \exp \tilde{H}_n \right]; \quad (184)$$

$$\mathcal{C}_{i\alpha} = \text{tr}_n (s_i^\alpha \exp \tilde{H}_n). \quad (185)$$

Представляя  $\exp \tilde{H}_n$  в соответствии с (157)

$$\exp \tilde{H}_n = \prod_k \int dG_{\mathbf{u}} \exp \left( \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{b}_k s_k^\alpha \right), \quad (186)$$

для  $\mathcal{A}_{ij}$  имеем

$$\mathcal{A}_{ij} = \text{tr}_n \left[ \exp \left( D \sum_{\alpha=1}^n s_i^\alpha s_j^\alpha \right) \prod_k \int dG_{\mathbf{u}} \exp \left( \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{b}_k s_k^\alpha \right) \right]. \quad (187)$$

Выделяя в произведении по  $k$  сомножители с  $k=i, j$  и объединяя их с  $\exp \left( D \sum_{\alpha=1}^n s_i^\alpha s_j^\alpha \right)$ , записываем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ij} &= \sum_{\{s_1^\alpha\}} \dots \sum_{\{s_N^\alpha\}} \prod_{k(\neq i, j)} \int dG_{\mathbf{u}} \exp \left( \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{b}_k s_k^\alpha \right) \times \\ &\times \int dG_{\mathbf{u}} dG_{\mathbf{v}} \exp \left[ \sum_{\alpha=1}^n (D s_i^\alpha s_j^\alpha + \mathbf{b}_i s_i^\alpha + \mathbf{c}_j s_j^\alpha) \right] = \\ &= \sum_{\{s_1^\alpha\}} \dots \sum_{\{s_N^\alpha\}} \prod_{k(\neq i, j)} f_k(s_k^\alpha) f_{ij}(s_i^\alpha, s_j^\alpha), \quad \mathbf{c}_j = \boldsymbol{\eta}_j + \boldsymbol{\zeta}_j \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (188)$$

т. е.  $\mathcal{A}_{ij}$  представляет собой сумму по  $\{s_1^\alpha\}, \dots, \{s_N^\alpha\}$  произведения  $N-2$  сомножителей, каждый из которых зависит лишь от  $s_k^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, n$ ) с одним единственным значением  $k$ , и одного сомножителя, зависящего от  $s_i^\alpha$  и  $s_j^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, n; i \neq j$ ). Меняя порядок операций произведения и суммирования, находим

$$\mathcal{A}_{ij} = \prod_{k(\neq i, j)} \sum_{\{s_k^\alpha\}} f_k(s_k^\alpha) \sum_{\{s_i^\alpha\}} \sum_{\{s_j^\alpha\}} f_{ij}(s_i^\alpha, s_j^\alpha). \quad (189)$$



Суммируя, в свою очередь,  $f_h(s_h^\alpha)$  по  $\{s_h^\alpha\}$ , получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\{s_h^\alpha\}} f_h(s_h^\alpha) &= \int dG_u \sum_{s_h^1} \dots \sum_{s_h^n} \prod_{\alpha=1}^n \exp(\mathbf{b}_h s_h^\alpha) = \\ &= \int dG_u \prod_{\alpha=1}^n \sum_{s_h^\alpha} \exp(\mathbf{b}_h s_h^\alpha) = \left(\frac{m+1}{m}\right)^n \int dG_u R^n(\mathbf{b}_h), \end{aligned} \quad (190)$$

а суммирование  $f_{ij}(s_i^\alpha, s_j^\alpha)$  по  $\{s_i^\alpha\}, \{s_j^\alpha\}$  дает

$$\begin{aligned} \sum_{\{s_i^\alpha\}, \{s_j^\alpha\}} f_{ij}(s_i^\alpha, s_j^\alpha) &= \int dG_u dG_v \sum_{s_i^1, s_j^1} \dots \sum_{s_i^n, s_j^n} \prod_{\alpha=1}^n \exp(Ds_i^\alpha s_j^\alpha + \mathbf{b}_i s_i^\alpha + \\ &+ \mathbf{c}_j s_j^\alpha) = \int dG_u dG_v \prod_{\alpha=1}^n \sum_{s_i^\alpha, s_j^\alpha} \exp(Ds_i^\alpha s_j^\alpha + \mathbf{b}_i s_i^\alpha + \mathbf{c}_j s_j^\alpha) = \\ &= \sum_{\{s_i^\alpha\}} \dots \sum_{\{s_N^\alpha\}} \prod_{h(\neq i, j)} f_h(s_h^\alpha) f_{ij}(s_i^\alpha, s_j^\alpha), \end{aligned} \quad (191)$$

где функция  $T$  определяется согласно (87), а

$$\mathbf{c}_j = \boldsymbol{\eta}_j + \boldsymbol{\zeta}_j \mathbf{v}. \quad (192)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ij} &= \left(\frac{m+1}{m}\right)^{Nn} \prod_{h(\neq i, j)} \int dG_u R^n(\mathbf{b}_h) \int dG_u dG_v T^n(D, \mathbf{b}_i, \mathbf{c}_j) = \\ &= \left(\frac{m+1}{m}\right)^{Nn} \prod_h \int dG_u R^n(\mathbf{b}_h) \left[ \int \int dG_u dG_v R^n(\mathbf{b}_i) R^n(\mathbf{c}_j) \right]^{-1} \times \\ &\quad \times \int \int dG_u dG_v T^n(D, \mathbf{b}_i, \mathbf{c}_j). \end{aligned} \quad (193)$$

Аналогично для  $\mathcal{R}_{ix}$  имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{ix} &= \sum_{\{s_1^\alpha\}} \dots \sum_{\{s_N^\alpha\}} \prod_{h(\neq i)} \int dG_u \exp\left(\sum_{\alpha=1}^n \mathbf{b}_h s_h^\alpha\right) \times \\ &\times \int dG_u \exp\left[\sum_{\alpha=1}^n (Ds_{ix}^\alpha + \mathbf{b}_i s_i^\alpha)\right] = \prod_{h(\neq i)} \int dG_u \prod_{\alpha=1}^n \sum_{s_h^\alpha} \exp\left(\sum_{\alpha} \mathbf{b}_h s_h^\alpha\right) \times \\ &\quad \times \int dG_u \prod_{\alpha=1}^n \sum_{s_i^\alpha} \exp(Ds_{ix}^\alpha + \mathbf{b}_i s_i^\alpha), \end{aligned} \quad (194)$$

или в соответствии с определениями (72), (113) функций  $R$  и  $P_{(x)}$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{ix} &= m^{-Nn} (m+1)^{Nn} \prod_k \int dG_{\mathbf{u}} R^n(\mathbf{b}_k) \times \\ &\times \left[ \int dG_{\mathbf{u}} R^n(\mathbf{b}_i) \right]^{-1} \int dG_{\mathbf{u}} P_{(x)}^n(D, \mathbf{b}_i). \end{aligned} \quad (195)$$

Для  $\mathcal{E}_{i\alpha}$  в соответствии с (181) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{i\alpha x} &= \left( \frac{m+1}{m} \right)^{Nn} \prod_k \int dG_{\mathbf{u}} R^n(\mathbf{b}_k) \times \\ &\times \left[ \int dG_{\mathbf{u}} R^n(\mathbf{b}_i) \right]^{-1} \int dG_{\mathbf{u}} R^{n-1}(\mathbf{b}_i) Q_x(\mathbf{b}_i). \end{aligned} \quad (196)$$

Таким образом, с учетом (182), (193), (195), (196) и принимая во внимание (166), для  $\text{tr}_n(H_n \exp \tilde{H}_n)$  окончательно находим

$$\begin{aligned} \text{tr}_n(H_n \exp \tilde{H}_n) &= \text{tr}_n \exp \tilde{H}_n \sum_{i < j} \left\{ \left[ \int dG_{\mathbf{u}} dG_{\mathbf{v}} R^n(\mathbf{b}_i) R^n(\mathbf{c}_j) \right]^{-1} \times \right. \\ &\times \int \int dG_{\mathbf{u}} dG_{\mathbf{v}} T^n(D, \mathbf{b}_i, \mathbf{c}_j) \Psi_{ij}(\tau)|_{\tau=0} \left. \right\} + \\ &+ \text{tr}_n \exp \tilde{H}_n \sum_i \sum_{x=1}^m \left\{ \left[ \int dG_{\mathbf{u}} R^n(\mathbf{b}_i) \right]^{-1} \int dG_{\mathbf{u}} P_{(x)}^n(D, \mathbf{b}_i) \Phi_{ix}(\tau)|_{\tau=0} \right\} + \\ &+ \beta \text{tr}_n \exp \tilde{H}_n \sum_{\alpha=1}^n \sum_i \left\{ \mathbf{v}_i \left[ \int dG_{\mathbf{u}} R^n(\mathbf{b}_i) \right]^{-1} \int dG_{\mathbf{u}} R^{n-1}(\mathbf{b}_i) Q(\mathbf{b}_i) \right\}. \end{aligned} \quad (197)$$

И наконец, объединяя (166), (178) и (197), для  $\mathcal{F}_n$  (152) получаем

$$\begin{aligned} -n\beta \tilde{\mathcal{F}}_n &= \sum_{i < j} \left\{ \left[ \int dG_{\mathbf{u}} dG_{\mathbf{v}} R^n(\mathbf{b}_i) R^n(\mathbf{c}_j) \right]^{-1} \times \right. \\ &\times \int \int dG_{\mathbf{u}} dG_{\mathbf{v}} T^n(D, \mathbf{b}_i, \mathbf{c}_j) \Psi_{ij}(\tau)|_{\tau=0} \left. \right\} + \\ &+ \sum_i \sum_{x=1}^m \left\{ \left[ \int dG_{\mathbf{u}} R^n(\mathbf{b}_i) \right]^{-1} \int dG_{\mathbf{u}} P_{(x)}^n(D, \mathbf{b}_i) \Phi_{ix}(\tau)|_{\tau=0} \right\} + \\ &+ n\beta \sum_i \left\{ \mathbf{v}_i \left[ \int dG_{\mathbf{u}} R^n(\mathbf{b}_i) \right]^{-1} \int dG_{\mathbf{u}} R^{n-1}(\mathbf{b}_i) Q(\mathbf{b}_i) \right\} - \\ &- n \sum_i \left\{ \left[ \int dG_{\mathbf{u}} R^n(\mathbf{b}_i) \right]^{-1} \int dG_{\mathbf{u}} \left[ \eta_i R^{n-1}(\mathbf{b}_i) Q(\mathbf{b}_i) + \frac{1}{2} \zeta_i^2 ((n-1) \times \right. \right. \\ &\times R^{n-2}(\mathbf{b}_i) Q^2(\mathbf{b}_i) + R^n(\mathbf{b}_i)) \left. \left. \right] \right\} + \sum_i \ln \int dG_{\mathbf{u}} R^n(\mathbf{b}_i) + Nn \ln \frac{m+1}{m}. \end{aligned} \quad (198)$$

Теперь в соответствии с вариационным принципом следует вычислить предел  $\lim_{n \rightarrow 0} \tilde{\mathcal{F}}_n = \tilde{\mathcal{F}}$  [59]. При этом будут использованы соотношения (128), (129), а также те обстоятельства, что согласно определениям (146), (147) функций  $\Psi_{ij}(\tau)$  и  $\Phi_{ix}(\tau)$  имеют место равенства

$$\Psi_{ij}(0) = 0, \tag{199}$$

$$\Phi_{ix}(0) = 0. \tag{200}$$

Так, в силу (199), (200) и (129)

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow 0} n^{-1} T^n \Psi_{ij}(\tau)|_{\tau=0} = \\ & = \lim_{n \rightarrow 0} n^{-1} (T^n - 1) \Psi_{ij}(\tau)|_{\tau=0} = \ln T \Psi_{ij}(\tau)|_{\tau=0}, \end{aligned} \tag{201}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow 0} n^{-1} P_{(x)}^n \Phi_{ix}(\tau)|_{\tau=0} = \\ & = \lim_{n \rightarrow 0} n^{-1} (P_{(x)}^n - 1) \Phi_{ix}(\tau)|_{\tau=0} = \ln P_{(x)} \Phi_{ix}(\tau)|_{\tau=0}. \end{aligned} \tag{202}$$

Далее принимая во внимание, что мера  $dG_u$  нормирована (159) и, стало быть,

$$\lim_{n \rightarrow 0} \int dG_u R^n = 1, \tag{203}$$

в соответствии с (128) можно записать

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow 0} n^{-1} \ln \int dG_u R^n &= \lim_{n \rightarrow 0} n^{-1} \left( \int dG_u R^n - 1 \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow 0} \int dG_u^n n^{-1} (R^n - 1), \end{aligned} \tag{204}$$

или, используя опять соотношение (129),

$$\lim_{n \rightarrow 0} n^{-1} \ln \int dG_u R^n = \int dG_u \ln R. \tag{205}$$

Исходя из (201), (202), (205) уже можно выписать предельное значение  $\tilde{\mathcal{F}}_n$ :

$$\begin{aligned} -\beta \tilde{\mathcal{F}} &= \lim_{n \rightarrow 0} (-\beta \mathcal{F}_n) = \sum_{i < j} \int \int dG_u dG_v \ln T(D, \mathbf{b}_i, \mathbf{c}_j) \Psi_{ij}(\tau)|_{\tau=0} + \\ &+ \sum_i \sum_{x=1}^m \int dG_u \ln P_{(x)}(D, \mathbf{b}_i) \Phi_{ix}(\tau)|_{\tau=0} + \\ &+ \sum_i \left[ (\beta v_i - \eta_i) \int dG_u R^{-1}(\mathbf{b}_i) Q(\mathbf{b}_i) \right] + \\ &+ \sum_i \left[ \frac{1}{2} \zeta_i^2 \int dG_u R^{-2}(\mathbf{b}_i) Q^2(\mathbf{b}_i) \right] - \sum_i \left( \frac{1}{2} \zeta_i^2 \right) + \\ &+ \sum_i \int dG_u \ln R(\mathbf{b}_i) + N \ln \frac{m+1}{m}. \end{aligned} \tag{206}$$

Заметим, что в выражении для свободной энергии  $\tilde{\mathcal{F}}_n$  в процессе предельного перехода  $n \rightarrow 0$  множитель  $(n - 1)$  перед  $R^{n-2}(\mathbf{b}_i) \times Q^2(\mathbf{b}_i)$  в слагаемом, пропорциональном  $\zeta_i^2$ , меняет знак. А именно слагаемое

$$-\frac{1}{2} \zeta_i^2 \int dG_{\mathbf{u}} [(n - 1) R^{n-2}(\mathbf{b}_i) Q^2(\mathbf{b}_i) + R^n(\mathbf{b}_i)] \quad (207)$$

переходит в

$$+\frac{1}{2} \zeta_i^2 \int dG_{\mathbf{u}} [R^{-2}(\mathbf{b}_i) Q^2(\mathbf{b}_i) - 1]. \quad (208)$$

В результате знак перед всем слагаемым, содержащим  $\zeta_i^2$ , меняется на противоположный. Это и обуславливает, что максимум по  $\zeta_i$  в  $-\beta\tilde{\mathcal{F}}_n$  переходит в минимум по  $\zeta_i$  в  $-\beta\tilde{\mathcal{F}}$ . Таким образом, если  $(\eta_i, \zeta_i) = (\bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i)$  является точкой, в которой  $-\beta\tilde{\mathcal{F}}_n$  достигает своего максимума, то для  $-\beta\tilde{\mathcal{F}}$  точка  $(\eta_i, \zeta_i) = (\bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i)$  будет уже седловой (максимум по  $\eta_i$  и минимум по  $\zeta_i$ ).

Для того чтобы представить (206) в более удобной форме, воспользуемся соотношением

$$\mathcal{A}(D) \mathcal{B}(\tau)|_{\tau=0} = \mathcal{B}(D) \mathcal{A}(\tau)|_{\tau=0}. \quad (209)$$

Итак, в соответствии с (206), (209) для свободной энергии имеем выражение

$$\begin{aligned} -\beta\tilde{\mathcal{F}} &= \sum_{i < j} \int \int dG_{\mathbf{u}} dG_{\mathbf{v}} \Psi_{ij}(D) \ln T(\tau, \mathbf{b}_i, \mathbf{c}_j)|_{\tau=0} + \\ &+ \sum_i \sum_{x=1}^m \int dG_{\mathbf{u}} \Phi_{ix}(D) \ln P_{(x)}(\tau, \mathbf{b}_i)|_{\tau=0} + \\ &+ \sum_i (\beta\mathbf{v}_i - \eta_i) \int dG_{\mathbf{u}} R^{-1}(\mathbf{b}_i) Q(\mathbf{b}_i) + \\ &+ \sum_i \left[ \frac{1}{2} \zeta_i^2 \int dG_{\mathbf{u}} R^{-2}(\mathbf{b}_i) Q^2(\mathbf{b}_i) \right] - \sum_i \left( \frac{1}{2} \zeta_i^2 \right) + \\ &+ \sum_i \int dG_{\mathbf{u}} \ln R(\mathbf{b}_i) + N \ln \frac{m+1}{m}. \end{aligned} \quad (210)$$

Рассмотрим, как в нашей схеме описывается замороженная модель Изинга. Модель Изинга получим, положив размерность спинового пространства  $m$  равной единице,  $m = 1$ .

Учитывая, что при  $m = 1$  функция  $R(\mathbf{b})$  является гиперболическим косинусом  $\text{ch } b$ , а  $Q(\mathbf{b})$  — гиперболическим синусом  $\text{sh } b$ ,

а также принимая во внимание равенства (88), (114), для свободной энергии замороженной модели Изинга получаем

$$\begin{aligned}
 -\beta \tilde{\mathcal{F}} = & \sum_{i < j} \int \int dG_u dG_v \Psi_{ij}(D) \ln (\operatorname{ch} \tau \operatorname{ch} b_i \operatorname{ch} c_j + \operatorname{sh} \tau \operatorname{sh} b_i \operatorname{sh} c_j) |_{\tau=0} + \\
 & + \sum_i \int dG_u \Phi_i(D) \ln \operatorname{ch} (\tau + b_i) |_{\tau=0} + \sum_i [(\beta v_i - \eta_i) \int dG_u \operatorname{th} b_i] + \\
 & + \sum_i \left[ \frac{1}{2} \zeta_i^2 \int dG_u \operatorname{th}^2 b_i \right] - \\
 & - \sum_i \left( \frac{1}{2} \zeta_i^2 \right) + \sum_i \int dG_u \ln \operatorname{ch} b_i + N \ln 2, \quad m=1, \quad (211)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 dG_w &= (2\pi)^{-1/2} \exp \left( -\frac{1}{2} w^2 \right) dw; \\
 b_i &= \eta_i + \zeta_i u; \quad c_j = \eta_j + \zeta_j v; \quad (212)
 \end{aligned}$$

$$\Psi_{ij}(\xi) = \ln \int dJ P_{ij}(J) \exp(\beta J \xi); \quad \Phi_i(\xi) = \ln \int dh p_i(h) \exp(\beta J \xi);$$

$\eta_i, \zeta_i$  — скалярные вариационные параметры;  $P_{ij}$  и  $p_i$  — плотности распределений интенсивностей взаимодействия изинговских спинов в узлах  $i$  и  $j$  поля в узле  $i$  соответственно.

Получим теперь в явном виде уравнения для вариационных параметров  $\bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i$  (155), (156).

Дифференцирование (206) по  $\eta_{ix}$  дает  $Nm$  уравнений:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j(\neq i)} \int \int dG_u dG_v T^{-1}(D, \mathbf{b}_i, \mathbf{c}_j) U_x(D, \mathbf{b}_i, \mathbf{c}_j) \Psi_{ij}(\tau) |_{\tau=0} + \\
 + \int dG_u \sum_{y=1}^m [P_{(y)}^{-1}(D, \mathbf{b}_i) S_{(y)x}(D, \mathbf{b}_i) \Phi_{iy}(\tau) |_{\tau=0}] + \\
 + \int dG_u \left\{ \sum_{y=1}^m [(\beta v_{iy} - \eta_{iy}) (-R^{-2} Q_x Q_y + R^{-1} Q_{xy})] + \right. \\
 \left. + \zeta_i^2 \left[ -R^{-3} Q^2 Q_x + \sum_{y=1}^m (R^{-2} Q_y Q_{xy}) \right] \right\} (\mathbf{b}_i) = 0, \quad (213)
 \end{aligned}$$

где функции  $U_x$  и  $S_{(y)x}$  определены соотношениями (107), (115). Дифференцируя (206) по  $\zeta_i$  и удаляя множитель  $u$  из подынтеграль-

ного выражения с помощью равенства (173), находим остальные  $N$  уравнений:

$$\begin{aligned}
 & \zeta_i \sum_{j \neq (i)} \int \int dG_u dG_v \sum_{x=1}^m [-T^{-2}(D, \mathbf{b}_i, \mathbf{c}_j) U_x^2(D, \mathbf{b}_i, \mathbf{c}_j) + \\
 & \quad + T^{-1}(D, \mathbf{b}_i, \mathbf{c}_j) U_{xx}(D, \mathbf{b}_i, \mathbf{c}_j)] \Psi_{ij}(\tau)|_{\tau=0} + \\
 & + \zeta_i \int dG_u \sum_{x, y=1}^m [-P_{(y)}^{-2}(D, \mathbf{b}_i) S_{(y)x}^2(D, \mathbf{b}_i) + P_{(y)}^{-1}(D, \mathbf{b}_i) S_{(y)xx} \times \\
 & \quad \times (D, \mathbf{b}_i)] \Phi_{iy}(\tau)|_{\tau=0} + \zeta_i \int dG_u \left\{ \sum_{x, y=1}^m [(\beta v_{iy} - \eta_{iy})(2R^{-3}Q_x^2 Q_y - \right. \\
 & \quad \left. - R^{-2}Q_{xx} Q_y - 2R^{-2}Q_x Q_{xy} + R^{-1}Q_{xxy})] + \zeta_i^2 \left[ 3R^{-4}(Q^2)^2 - \sum_{x=1}^m (R^{-3}Q_{xx} Q^2) + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \sum_{x, y=1}^m (-4R^{-3}Q_x Q_y Q_{xy} + R^{-2}Q_{xy}^2 + R^{-2}Q_y Q_{xxy}) \right] + \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{x=1}^m (R^{-1}Q_{xx}) \right\} (\mathbf{b}_i) - \zeta_i = 0, \tag{214}
 \end{aligned}$$

где  $Q_{xyz}$ ,  $S_{(x)yz}$ ,  $U_{xy}$  определены согласно (105), (116), (109). Свойства (83), (111), (117), (112) функций  $Q_{xy}$ ,  $Q_{xyz}$ ,  $S_{(x)yz}$ ,  $U_{xy}$  позволяют переписать уравнение (214) в виде

$$\begin{aligned}
 & -\zeta_i \sum_{j \neq (i)} \int \int dG_u dG_v T^{-2}(D, \mathbf{b}_i, \mathbf{c}_j) U^2(D, \mathbf{b}_i, \mathbf{c}_j) \Psi_{ij}(\tau)|_{\tau=0} - \\
 & \quad - \zeta_i \int dG_u \sum_{x=1}^m P_{(x)}^{-2}(D, \mathbf{b}_i) S_{(x)}^2(D, \mathbf{b}_i) \Phi_{ix}(\tau)|_{\tau=0} + \\
 & + \zeta_i \int dG_u \left\{ 2 \sum_{y=1}^m [(\beta v_{iy} - \eta_{iy}) (R^{-3}Q^2 Q_y - \sum_{x=1}^m R^{-2}Q_x Q_{xy})] + \right. \\
 & \quad \left. + \zeta_i^2 \left[ 3R^{-4}(Q^2)^2 - 4 \sum_{x, y=1}^m (R^{-3}Q_x Q_y Q_{xy} + R^{-2}Q_{xy}^2) \right] \right\} (\mathbf{b}_i) = 0. \tag{215}
 \end{aligned}$$

Рассмотрим, как выглядят уравнения для вариационных параметров для модели Изинга. Принимая во внимание, что в одномерном случае (см. разд. 5)

$$U_x(a, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \text{ch } a \text{ sh } b \text{ ch } c + \text{sh } a \text{ ch } b \text{ sh } c, \quad m = 1; \tag{216}$$

$$S_{(y)x}(a, \mathbf{b}) = \text{sh}(a + b), \quad m = 1; \tag{217}$$

$$Q_{xy}(\mathbf{b}) = \text{ch } b, \quad m = 1, \tag{218}$$

имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{j(\neq i)} \int \int dG_u dG_v (1 + \text{th } D \text{ th } b_i \text{ th } c_j)^{-1} (\text{th } b_i + \text{th } D \text{ th } c_j) \Psi_{ij}(\tau)|_{\tau=0} + \\ & + \int dG_u \text{th } (D + b_i) \Phi_i(\tau)|_{\tau=0} + \int dG_u \times \\ & \times \{(\beta v_i - \eta_i) (-\text{th}^2 b_i + 1) + \zeta_i (-\text{th}^3 b_i + \text{th } b_i)\} = 0, \quad m = 1; \quad (219) \\ & - \zeta_i \sum_{j(\neq i)} \int \int dG_u dG_v (1 + \text{th } D \text{ th } b_i \text{ th } c_j)^{-2} (\text{th } b_i + \\ & + \text{th } D \text{ th } c_j)^2 \Psi_{ij}(\tau)|_{\tau=0} - \zeta_i \int dG_u \text{th}^2 (D + b_i) \Phi_i(\tau)|_{\tau=0} + \\ & + \zeta_i \int dG_u \{2(\beta v_i - \eta_i) (\text{th}^3 b_i - \text{th } b_i) + \\ & + \zeta_i^2 (3 \text{th}^4 b_i - 4 \text{th}^2 b_i + 4)\} = 0, \quad m = 1. \quad (220) \end{aligned}$$

### 8. ПАРАМЕТРЫ ПОРЯДКА

Прежде чем перейти к рассмотрению параметров порядка, сделаем некоторые замечания.

Для следа произведения  $s_{ix_1}^{\alpha_1} \dots s_{ix_l}^{\alpha_l} \exp \tilde{H}_n$ , в котором все индексы  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$  различны, имеем выражение (181), где след  $\text{tr}_n \exp \tilde{H}_n$  представим в виде (166). В таком случае

$$\lim_{n \rightarrow 0} \langle s_{ix_1}^{\alpha_1} \dots s_{ix_l}^{\alpha_l} \rangle_{\tilde{H}_n} = \int dG_u R^{-l}(\mathbf{b}_i) Q_{x_1}(\mathbf{b}_i) \dots Q_{x_l}(\mathbf{b}_i). \quad (221)$$

С другой стороны, в рамках вариационного принципа

$$\langle s_{ix_1}^{\alpha_1} \dots s_{ix_l}^{\alpha_l} \rangle_{\tilde{H}_n(\bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i)} = \langle s_{ix_1}^{\alpha_1} \dots s_{ix_l}^{\alpha_l} \rangle_{H_n}, \quad (222)$$

так что

$$\lim_{n \rightarrow 0} \langle s_{ix_1}^{\alpha_1} \dots s_{ix_l}^{\alpha_l} \rangle_{H_n} = \int dG_u R^{-l}(\bar{\mathbf{b}}_i) Q_{x_1}(\bar{\mathbf{b}}_i) \dots Q_{x_l}(\bar{\mathbf{b}}_i), \quad (223)$$

где

$$\bar{\mathbf{b}}_i = \bar{\eta}_i + \bar{\zeta}_i \mathbf{u}, \quad (224)$$

а параметры  $\bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i$  определяются из уравнений (213), (215).

Рассмотрим теперь величины  $\langle s_{ix} \rangle_H$  и  $\langle s_{ix} \rangle_H \langle s_{iy} \rangle_H$ . Поскольку

$$\langle s_{ix} \rangle_H = - \frac{\partial F}{\partial v_{ix}}, \quad (225)$$

где  $F$  — свободная энергия при заданных значениях интенсивностей взаимодействия  $J_{ij}$  и полей  $\mathbf{h}_i$  (124), то согласно (129), принимая во внимание выражение (137) для  $Z^n$ , можем записать

$$\langle s_{ix} \rangle_H = \lim_{n \rightarrow 0} \left\{ n^{-1} \operatorname{tr}_n \sum_{\alpha=1}^n \left\{ s_{ix}^\alpha \exp \left[ -\beta \sum_{\delta=1}^n H(\{s_i^\delta\}) \right] \right\} \right\}, \quad (226)$$

откуда

$$\langle s_{ix} \rangle_H = \lim_{n \rightarrow 0} \operatorname{tr}_n \left\{ s_{ix}^\alpha \exp \left[ -\beta \sum_{\delta=1}^n H(\{s_i^\delta\}) \right] \right\}. \quad (227)$$

Из (226) получаем

$$\begin{aligned} \langle s_{ix} \rangle_H \langle s_{iy} \rangle_H &= \lim_{\substack{n \rightarrow 0 \\ l \rightarrow 0}} \left\{ n^{-1} l^{-1} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\gamma=n+1}^{n+l} \operatorname{tr}_{n+l} \left\{ s_{ix}^\alpha s_{iy}^\gamma \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \exp \left[ -\beta \sum_{\delta=1}^{n+l} H(\{s_i^\delta\}) \right] \right\} \right\} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \operatorname{tr}_h \left\{ s_{ix}^\alpha s_{iy}^\gamma \exp \left[ -\beta \sum_{\delta=1}^h H(\{s_i^\delta\}) \right] \right\} \right\}, \quad \alpha \neq \gamma. \end{aligned} \quad (228)$$

В соответствии с (227) и (228), используя определение (138), находим

$$\begin{aligned} \langle \langle s_{ix} \rangle_H \rangle &= \lim_{n \rightarrow 0} \operatorname{tr}_n (s_{ix}^\alpha \exp H_n) = \lim_{n \rightarrow 0} [\langle Z_n \rangle^{-1} \operatorname{tr}_n (s_{ix}^\alpha H_n)] = \\ &= \lim_{n \rightarrow 0} [\operatorname{tr}_n^{-1} \exp H_n \operatorname{tr}_n (s_{ix}^\alpha \exp H_n)] = \lim_{n \rightarrow 0} \langle s_{ix}^\alpha \rangle_{H_n}; \end{aligned} \quad (229)$$

$$\begin{aligned} \langle \langle s_{ix} \rangle_H \langle s_{iy} \rangle_H \rangle &= \lim_{n \rightarrow 0} \operatorname{tr}_n (s_{ix}^\alpha s_{iy}^\gamma \exp H_n) = \lim_{n \rightarrow 0} [\langle Z_n \rangle^{-1} \operatorname{tr}_n (s_{ix}^\alpha s_{iy}^\gamma \exp H_n)] = \\ &= \lim_{n \rightarrow 0} [\operatorname{tr}_n^{-1} \exp H_n \operatorname{tr}_n (s_{ix}^\alpha s_{iy}^\gamma \exp H_n)] = \lim_{n \rightarrow 0} \langle s_{ix}^\alpha s_{iy}^\gamma \rangle_{H_n}, \quad \alpha \neq \gamma. \end{aligned} \quad (230)$$

Таким образом, в силу (221)

$$\langle \langle s_{ix} \rangle_H \rangle = \int dG_u R^{-1}(\bar{\mathbf{b}}_i) Q_x(\bar{\mathbf{b}}_i), \quad (231)$$

$$\langle \langle s_{ix} \rangle_H \langle s_{iy} \rangle_H \rangle = \int dG_u R^{-2}(\bar{\mathbf{b}}_i) Q_x(\bar{\mathbf{b}}_i) Q_y(\bar{\mathbf{b}}_i). \quad (232)$$

Теперь у нас есть все необходимое, чтобы говорить о параметрах порядка. В соответствии с (122) магнитный момент  $i$ -го узла есть

$$\mathbf{m}_i = \langle \langle s_i \rangle_H \rangle, \quad (233)$$

а согласно (231) для него имеем

$$\mathbf{m}_i = \int dG_u R^{-1}(\bar{\boldsymbol{\eta}}_i + \bar{\boldsymbol{\xi}}_i \mathbf{u}) \mathbf{Q}(\bar{\boldsymbol{\eta}}_i + \bar{\boldsymbol{\xi}}_i \mathbf{u}). \quad (234)$$



Для описания состояния спинового стекла в модели Поттса нам требуются следующие величины:

$$q_i^{(p)} = \langle \langle s_i \epsilon_p \rangle_H^2 \rangle, \tag{235}$$

которые представляют собой средние значения квадратов статистических средних проекций спина в  $i$ -м узле на направление векторов  $\epsilon_p$ . Здесь в отличие от модели Изинга мы имеем вместо одного  $m + 1$  параметров. Очевидно, что это обусловлено тем обстоятельством, что в модели Поттса мы имеем дело с многокомпонентным спином, а именно число его возможных ориентаций равно  $m + 1$ .

Поскольку

$$\langle \langle s_i \epsilon_p \rangle_H^2 \rangle = \sum_{x,y=1}^m \langle \langle s_{ix} \rangle_H \langle s_{iy} \rangle_H \rangle \epsilon_{px} \epsilon_{py}, \tag{236}$$

то в силу (232) мы получаем

$$q_i^{(p)} = \int dG_u R^{-2} (\bar{\eta}_i + \bar{\zeta}_i \mathbf{u}) [\epsilon_p \mathbf{Q} (\bar{\eta}_i + \bar{\zeta}_i \mathbf{u})]^2. \tag{237}$$

Таким образом, значения  $m_i$  и  $q_i^{(p)}$  в  $i$ -м узле выражаются только через значения вариационных параметров  $\bar{\eta}_i$  и  $\bar{\zeta}_i$  в том же узле.

Рассмотрим наряду с  $q_i^{(p)}$  величину

$$q_i = (m + 1)^{-1} m \sum_{p=1}^{m+1} q_i^{(p)}. \tag{238}$$

Заметим, что для произвольного вектора  $\mathbf{a}$  согласно (54) имеем

$$\sum_{p=1}^{m+1} (\mathbf{a} \epsilon_p)^2 = m^{-1} (m + 1) \mathbf{a}^2. \tag{239}$$

В таком случае для

$$q_j = \langle (m + 1)^{-1} m \sum_{p=1}^{m+1} (\langle s_i \rangle_H \epsilon_p)^2 \rangle \tag{240}$$

получаем

$$q_i = \langle \langle s_i \rangle_H^2 \rangle. \tag{241}$$

Этот параметр порядка совпадает по форме с обычным параметром спинового стекла для модели Изинга.

Используя (239), вследствие представления (237) для  $q_i$  находим

$$q_i = \int dG_u R^{-2} (\bar{\eta}_i + \bar{\zeta}_i \mathbf{u}) \mathbf{Q}^2 (\bar{\eta}_i + \bar{\zeta}_i \mathbf{u}). \tag{242}$$

Сейчас нам понадобится свойство (39) системы векторов  $\{\epsilon_p\}$

$$\sum_{p=1}^{m+1} \epsilon_p = 0. \tag{243}$$

Рассмотрим возможные состояния  $i$ -го спина в зависимости от значений параметров  $\bar{\eta}_i$  и  $\bar{\zeta}_i$ , определенных из уравнений (213), (215).

**Случай 1:**  $\bar{\eta}_i = 0$ ;  $\bar{\zeta}_i = 0$ . По определению (77) функции  $Q$

$$Q(0) = 0. \quad (244)$$

Таким образом, если  $\bar{\eta}_i = 0$ ,  $\bar{\zeta}_i = 0$ , то в силу (234), (237) и (244)

$$\mathbf{m}_i = 0, \quad q_i^{(p)} = 0, \quad (245)$$

и мы будем говорить, что  $i$ -й спин находится в  $N$ -состоянии.

**Случай 2:**  $\bar{\eta}_i = 0$ ;  $\bar{\zeta}_i \neq 0$ . Из (72), (77), (234) следует

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_i &= \sum_{p=1}^{m+1} \varepsilon_p \int dG_u \left[ \sum_{q=1}^{m+1} \exp(\bar{\zeta}_i \varepsilon_p \mathbf{u}) \right]^{-1} \exp(\zeta_i \varepsilon_p \mathbf{u}) = \\ &= \sum_{p=1}^{m+1} [\varepsilon_p V(\bar{\zeta}_i)], \end{aligned} \quad (246)$$

где  $V(\zeta_i)$  не зависит от  $p$ , так что свойство (243) системы векторов  $\{\varepsilon_p\}$  дает

$$\mathbf{m}_i = 0. \quad (247)$$

Кроме того, параметры  $q_i^{(p)}$  имеют вид

$$q_i^{(p)} = \int dG_u R^{-2}(\bar{\zeta}_i \mathbf{u}) [\varepsilon_p Q(\bar{\zeta}_i \mathbf{u})]^2 \quad (248)$$

и, стало быть, принимают одно и то же значение при всех  $p$  и отличны от нуля:

$$q_i^{(p)} = \int dG_u R^{-2}(\bar{\zeta}_i \mathbf{u}) [\varepsilon_p Q(\bar{\zeta}_i \mathbf{u})]^2. \quad (249)$$

В этом случае, т. е. если  $\mathbf{m}_i = 0$  и  $q_i^{(p)} \neq 0$ , мы будем говорить, что  $i$ -й спин находится в  $SG$ -состоянии.

**Случай 3:**  $\eta_i \neq 0$ . В этом случае опять же в силу (234), (237)

$$\mathbf{m}_i \neq 0, \quad q_i^{(p)} \neq 0, \quad (250)$$

и мы будем говорить, что  $i$ -й спин находится в  $M$ -состоянии. Пусть для определенности  $\eta_i \parallel \varepsilon_r$ , т. е.

$$\bar{\eta}_i = \bar{\eta}_i \varepsilon_r. \quad (251)$$

Для магнитного момента  $i$ -го узла, принимая во внимание определение (39) системы векторов  $\{\epsilon_p\}$ , имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_i = & \sum_{p=1}^{m+1} \left\{ \epsilon_p \exp(\bar{\eta}_i \epsilon_r \epsilon_p) \int dG_u \left[ \sum_{q=1}^{m+1} \exp(\bar{\eta}_i \epsilon_r \epsilon_q) \exp(\bar{\zeta}_i \mathbf{u} \epsilon_p) \right]^{-1} \times \right. \\ & \times \left. \exp(\bar{\zeta}_i \mathbf{u} \epsilon_p) \right\} = \sum_{p=1}^{m+1} \left\{ \epsilon_p \exp\left(\bar{\eta}_i \frac{m+1}{m} \delta_{rp}\right) \int dG_u \times \right. \\ & \times \left. \left[ \sum_{q=1}^{m+1} \exp\left(\bar{\eta}_i \frac{m+1}{m} \delta_{qr}\right) \exp(\bar{\zeta}_i \mathbf{u} \epsilon_q) \right]^{-1} \exp(\bar{\zeta}_i \mathbf{u} \epsilon_p) \right\}, \quad (252) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\mathbf{m}_i = \sum_{\substack{p=1 \\ (p \neq r)}}^{m+1} [\epsilon_p U(\bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i)] + \epsilon_r W(\bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i), \quad (253)$$

де функция  $U$  не зависит от  $p$ . Тогда в силу свойства (39)

$$\mathbf{m}_i = [W(\bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i) - U(\bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i)] \epsilon_r \quad (254)$$

и, стало быть,

$$\mathbf{m}_i \parallel \bar{\eta}_i. \quad (255)$$

Заметим также, что величины  $q_i^{(p)}$  для  $p \neq r$  равны между собой:

$$q_i^{(p)} = \int dG_u R^{-2} (\bar{\eta}_i \epsilon_r + \bar{\zeta}_i \mathbf{u}) [\epsilon_p Q(\bar{\eta}_i \epsilon_i + \bar{\zeta}_i \mathbf{u})]^2 = \begin{cases} q_{ir}, & p = r, \\ q_{i0}, & p \neq r. \end{cases} \quad (256)$$

Таким образом, число различных параметров  $q_i^{(p)}$  вовсе не равно  $m + 1$ . В  $N$ - и  $SG$ -состояниях все параметры равны между собой. В  $M$ -состоянии все они одинаковы, кроме одного — среднего квадрата статистического среднего значения проекции спина на направление намагниченности.

### 9. ПРОСТРАНСТВЕННО ОДНОРОДНЫЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим теперь частный случай, когда регулярное поле  $\mathbf{v}_i$  однородно и направлено по одному из векторов  $\epsilon_p$  плотности распределений интенсивностей взаимодействия  $J_{ij}$  одинаковы для любой пары  $\langle i, j \rangle$  взаимодействующих соседей, а для остальных пар интенсивности взаимодействия равны нулю, плотности распределений случайных полей  $\mathbf{h}_i$  одинаковы для всех узлов и компонент [59, 67, 68]. А именно пусть

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v} \parallel \epsilon_r. \quad (257a)$$

Для определенности положим  $r = m + 1$ :

$$\mathbf{v}_j = v\mathbf{e}_{m+1}. \tag{2576}$$

Пусть плотность распределения интенсивностей взаимодействия имеет вид

$$P_{ij}(J_{ij}) = \begin{cases} P(J_{ij}), & \text{для пар взаимодействующих соседей } (i, j) \in \{\langle i, j \rangle\}, \\ \delta(J_{ij} - \bar{J}_{ij}), \bar{J}_{ij} = 0, & \text{для остальных пар } (i, j) \notin \{\langle i, j \rangle\}, \end{cases} \tag{258}$$

причем число взаимодействующих соседей каждого спина равно  $z$ . Предполагается также, что

$$p_{ix}(h_{ix}) = p(h_{ix}). \tag{259}$$

Из предположения (258) следует, что

$$\Psi_{ij}(\tau) = \begin{cases} \Psi(\tau) = \ln \int dJ P(J) \exp(\beta J \tau), & (i, j) \in \{\langle i, j \rangle\}; \\ \beta J_{ij} \tau = 0, & (i, j) \notin \{\langle i, j \rangle\}, \end{cases} \tag{260}$$

а из предположения (259), что

$$\Phi_{ix}(\tau) = \Phi(\tau) = \ln \int dh p(h) \exp(\beta h \tau). \tag{261}$$

При условиях (257) — (259), принимая во внимание соображения симметрии, решение уравнений (213), (215) можно искать среди вариационных параметров вида  $\eta_i = \eta \mathbf{e}_{m+1}$ ,  $\zeta_i = \zeta \mathbf{v}$ . В таком случае вместо  $Nm + N$  параметров  $\eta_{ix}$ ,  $\zeta_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ;  $x = 1, \dots, m$ ) имеем только два —  $\eta$  и  $\zeta$ . Свободная энергия (3) в соответствии с (210), (260), (261) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} -N^{-1} \beta \tilde{\mathcal{F}}(\eta, \zeta) = & \frac{1}{2} z \int \int dG_u dG_v \Psi(D) \ln T(\tau, \mathbf{B}, \mathbf{C})|_{\tau=0} + \\ & + \int dG_u \Phi(D) \sum_{x=1}^m \ln P_{(x)}(\tau, \mathbf{B})|_{\tau=0} + \int dG_u \times \\ \times & \left\{ (\beta v - \eta) R^{-1} Q_m + \frac{1}{2} \zeta^2 R^{-2} Q^2 + \ln R \right\} (\mathbf{B}) - \frac{1}{2} \zeta^2 + \ln \frac{m+1}{m}, \end{aligned} \tag{262}$$

где введены обозначения

$$\mathbf{B} = \bar{\eta} \mathbf{e}_{m+1} + \bar{\zeta} \mathbf{u}; \quad \mathbf{C} = \bar{\eta} \mathbf{e}_{m+1} + \bar{\zeta} \mathbf{v}. \tag{263}$$

Вместо  $N$  уравнений (215) имеем одно

$$\begin{aligned} & \xi \left\{ -z \iint dG_u dG_v \Psi(D) T^{-2}(\tau, \mathbf{B}, \mathbf{C}) U^2(\tau, \mathbf{B}, \mathbf{C})|_{\tau=0} - \right. \\ & \quad \left. - \int dG_u \Phi(D) \sum_{x=1}^m P_{(x)}^{-2}(\tau, \mathbf{B}) S_{(x)}(\tau, \mathbf{B})|_{\tau=0} + \right. \\ & \quad \left. + \int dG_u \left\{ 2(\beta v - \eta) \left( R^{-3} Q^2 Q_m - \sum_{x=1}^m R^{-2} Q_x Q_{mx} \right) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \xi^2 \left[ 3R^{-4} (Q^2)^2 - 4 \sum_{x, y=1}^m Q_x Q_y Q_{xy} \right] \right\} (\mathbf{B}) = 0, \right. \end{aligned} \quad (264)$$

а  $Nm$  уравнений (213) дают  $m$  уравнений

$$\begin{aligned} & z \iint dG_u dG_v \Psi(D) T^{-1}(\tau, \mathbf{B}, \mathbf{C}) U_x(\tau, \mathbf{B}, \mathbf{C})|_{\tau=0} + \\ & \quad + \int dG_u \Phi(D) \sum_{y=1}^m P_{(y)}^{-1}(\tau, \mathbf{B}) S_{y(x)}(\tau, \mathbf{B})|_{\tau=0} + \\ & \quad + \int dG_u \left[ (\beta v - \eta) (-R^2 Q_m Q_x + R^{-1} Q_{mx}) + \right. \\ & \quad \left. + \xi^2 \left( -R^{-3} Q^2 Q_x + R^{-2} \sum_{y=1}^m Q_y Q_{xy} \right) \right] (\mathbf{B}) = 0. \end{aligned} \quad (265)$$

Однако левые части этих уравнений для всех компонент  $x$ , кроме  $x = m$ , тождественно равны нулю. В этом можно убедиться точно таким же путем, каким было показано, что  $\eta_i \parallel \varepsilon_r$  [см. (252) — (255)]. Действительно, переписывая (265) в векторной форме, так же как и в (252) — (255), находим, что каждое интегрирование в левой части дает вектор, параллельный  $\varepsilon_{m+1}$ . Таким образом, вместо  $m$  уравнений (265) имеем одно уравнение

$$\begin{aligned} & z \iint dG_u dG_v \Psi(D) T^{-1}(\tau, \mathbf{B}, \mathbf{C}) U_m(\tau, \mathbf{B}, \mathbf{C})|_{\tau=0} + \\ & \quad + \int dG_u \Phi(D) \sum_{x=1}^m P_{(x)}^{-1}(\tau, \mathbf{B}) S_{(x)m}(\tau, \mathbf{B})|_{\tau=0} + \\ & \quad + \int dG_u \left[ (\beta v - \eta) (-R^2 Q_m^2 + R^{-1} Q_{mm}) + \right. \\ & \quad \left. + \xi^2 \left( -R^{-3} Q^2 Q_m + R^{-2} \sum_{x=1}^m Q_x Q_{mx} \right) \right] (\mathbf{B}) = 0. \end{aligned} \quad (266)$$

Уравнения (264), (266) образуют систему двух уравнений для двух неизвестных  $\bar{\eta}$  и  $\bar{\zeta}$ .

В соответствии с представлением (231) для намагниченности

$$\mathbf{m} = \left\langle \left\langle \frac{1}{N} \sum_i \mathbf{s}_i \right\rangle_{\mathbf{H}} \right\rangle \quad (267)$$

получаем

$$\mathbf{m} = \int dG_{\mathbf{u}} R^{-1} (\bar{\eta} \boldsymbol{\varepsilon}_{m+1} + \bar{\zeta} \mathbf{u}) \mathbf{Q} (\bar{\eta} \boldsymbol{\varepsilon}_{m+1} + \bar{\zeta} \mathbf{u}), \quad (268)$$

или

$$\mathbf{m} = \int dG_{\mathbf{u}} R^{-1} (\mathbf{B}) \mathbf{Q} (\mathbf{B}). \quad (269)$$

Параметры порядка спинового стекла  $q^{(p)}$  (235) и  $q$  (241) не зависят от номера узла  $i$ :

$$q^{(p)} = \langle \langle \mathbf{s}_i \boldsymbol{\varepsilon}_p \rangle_{\mathbf{H}}^2 \rangle, \quad (270)$$

$$q = \langle \langle \mathbf{s}_i \rangle_{\mathbf{H}}^2 \rangle \quad (271)$$

и имеют вид

$$q^{(p)} = \int dG_{\mathbf{u}} R^{-2} (\bar{\eta} \boldsymbol{\varepsilon}_{m+1} + \bar{\zeta} \mathbf{u}) [\boldsymbol{\varepsilon}_p \mathbf{Q} (\bar{\eta} \boldsymbol{\varepsilon}_{m+1} + \bar{\zeta} \mathbf{u})]^2, \quad (272)$$

$$q = \int dG_{\mathbf{u}} R^{-2} (\bar{\eta} \boldsymbol{\varepsilon}_{m+1} + \bar{\zeta} \mathbf{u}) \mathbf{Q}^2 (\bar{\eta} \boldsymbol{\varepsilon}_{m+1} + \bar{\zeta} \mathbf{u}), \quad (273)$$

или

$$q^{(p)} = \int dG_{\mathbf{u}} R^{-2} (\mathbf{B}) [\boldsymbol{\varepsilon}_p \mathbf{Q} (\mathbf{B})]^2, \quad (274)$$

$$q = \int dG_{\mathbf{u}} R^{-2} (\mathbf{B}) \mathbf{Q}^2 (\mathbf{B}). \quad (275)$$

В соответствии с (256) все  $q^{(p)}$  с  $p \neq m + 1$  равны между собой:

$$q^{(p)} = \tilde{q}, \quad p = 1, \dots, m, \\ q^{(m+1)} = q_0. \quad (276)$$

При  $\bar{\eta} = 0$ , т. е. в отсутствие магнитного упорядочения, все  $q^{(p)}$ , ( $p = 1, \dots, m, m + 1$ ) одинаковы:

$$q^{(p)} = \tilde{q}, \quad p = 1, \dots, m + 1, \quad \mathbf{m} = \mathbf{0}. \quad (277)$$

В условиях (257) — (259) имея в виду исследования антиферромагнитного упорядочения, фазы спинового стекла или парамагнитной фазы (при  $\bar{J} < 0$ ), решение вариационной задачи можно искать среди вариационных параметров вида [69, 67, 68]

$$\boldsymbol{\eta}_{2k-1} = \boldsymbol{\eta}_{m+1}, \quad \boldsymbol{\eta}_{2k} = \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{m}}.$$

Таким образом, как и в ферромагнитном случае мы имеем только два скалярных параметра  $\eta$  и  $\zeta$ .

Свободная энергия принимает вид

$$\begin{aligned}
 -N^{-1}\beta\mathcal{F}(\eta, \zeta) = & \frac{1}{2} z \int \int dG_u dG_v \Psi(D) \ln T(\tau, \mathbf{B}, \mathbf{E})|_{\tau=0} + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{x=1}^m dG_u \Phi(D) \ln P_{(x)}(\tau, \mathbf{B})|_{\tau=0} + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{x=1}^m dG_u \Phi(D) \ln P_{(x)}(\tau, \mathbf{E})|_{\tau=0} - \\
 -\frac{1}{2} \eta \int & dG_u R^{-1}(\mathbf{B}) \varepsilon_{m+1} \mathbf{Q}(\mathbf{B}) - \frac{1}{2} \sum_{x=1}^m \int dG_u R^{-1}(\mathbf{E}) \varepsilon_m \mathbf{Q}(\mathbf{E}) + \\
 + \frac{1}{4} \zeta^2 \int & dG_u R^{-2}(\mathbf{B}) \mathbf{Q}^2(\mathbf{B}) + \frac{1}{4} \zeta^2 \int dG_v R^{-2}(\mathbf{E}) \mathbf{Q}^2(\mathbf{E}) - \frac{1}{2} \zeta^2 + \\
 & + \frac{1}{2} \int dG_u \ln R(\mathbf{B}) + \frac{1}{2} \int dG_v \ln R(\mathbf{E}) + \ln \frac{m+1}{m}, \quad (278)
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{B} = \eta \varepsilon_{m+1} + \zeta \mathbf{u}, \quad \mathbf{E} = \eta \varepsilon_m + \zeta \mathbf{v}. \quad (279)$$

Если воспользоваться симметрией векторов симплекса, можно записать

$$\begin{aligned}
 -N^{-1}\beta\mathcal{F}(\eta, \zeta) = & \frac{1}{2} z \int \int dG_u dG_v \Psi(D) \ln T(\tau, \mathbf{B}, \mathbf{E})|_{\tau=0} + \\
 & + \sum_{x=1}^m \int dG_u \Phi(D) \ln P_{(x)}(\tau, \mathbf{B})|_{\tau=0} - \eta \int dG_u R^{-1}(\mathbf{B}) \varepsilon_{m+1} \mathbf{Q}(\mathbf{B}) + \\
 + \frac{1}{2} \zeta^2 \int & dG_v R^{-2}(\mathbf{E}) \mathbf{Q}^2(\mathbf{E}) - \frac{1}{2} \zeta^2 + \int dG_u \ln R(\mathbf{B}) + \ln \frac{m+1}{m}. \quad (280)
 \end{aligned}$$

Вектор намагниченности первой подрешетки

$$\mathbf{m}^{(1)} = \left\langle \left\langle \frac{1}{N/2} \sum_k \mathbf{s}_{2k-1} \right\rangle_H \right\rangle = \mathbf{m}_{2k-1} = \langle \langle \mathbf{s}_{2k-1} \rangle_H \rangle \quad (281)$$

в силу представления (231) имеет вид

$$\mathbf{m}^{(1)} = \int dG_u R^{-1}(\bar{\eta} \varepsilon_{m+1} + \bar{\zeta} \mathbf{u}) \mathbf{Q}(\bar{\eta} \varepsilon_{m+1} + \bar{\zeta} \mathbf{u}), \quad (282)$$

или

$$\mathbf{m}^{(1)} = \int dG_u R^{-1}(\mathbf{B}) \mathbf{Q}(\mathbf{B}). \quad (283)$$

Согласно (255) он направлен по вектору симплекса  $\varepsilon_{m+1}$

$$\mathbf{m}^{(1)} \parallel \varepsilon_{m+1}. \quad (284)$$

По тем же причинам вектор намагниченности второй подрешетки

$$\mathbf{m}^{(2)} = \left\langle \left\langle \frac{1}{N/2} \sum_k \mathbf{s}_{2k} \right\rangle_H \right\rangle = \mathbf{m}_{2k} = \langle \langle \mathbf{s}_{2k} \rangle_H \rangle \quad (285)$$

имеет вид

$$\mathbf{m}^{(2)} = \int dG_{\mathbf{u}} R^{-1} (\bar{\eta} \boldsymbol{\varepsilon}_m + \bar{\zeta} \mathbf{u}) \mathbf{Q} (\bar{\eta} \boldsymbol{\varepsilon}_m + \bar{\zeta} \mathbf{u}), \quad (286)$$

или

$$\mathbf{m}^{(2)} = \int dG_{\mathbf{u}} R^{-1} (\mathbf{E}) \mathbf{Q} (\mathbf{E}), \quad (287)$$

направлен по вектору симплекса  $\boldsymbol{\varepsilon}_m$

$$\mathbf{m}^{(2)} \parallel \boldsymbol{\varepsilon}_m \quad (288)$$

и равен по модулю вектору намагниченности первой подрешетки

$$\mathbf{m}^{(1)} = \mathbf{m}^{(2)} \equiv \mathbf{m}^{(a)}. \quad (289)$$

На первой подрешетке параметры порядка спинового стекла  $q^{(p)}$  (235) и (238) в соответствии с (237), (242) имеют вид

$$q^{(p, 1)} = \int dG_{\mathbf{u}} R^{-2} (\bar{\eta} \boldsymbol{\varepsilon}_{m+1} + \bar{\zeta} \mathbf{u}) [\boldsymbol{\varepsilon}_p \mathbf{Q} (\bar{\eta} \boldsymbol{\varepsilon}_{m+1} + \bar{\zeta} \mathbf{u})]^2, \quad (290)$$

$$q^{(1)} = \int dG_{\mathbf{u}} R^{-2} (\bar{\eta} \boldsymbol{\varepsilon}_{m+1} + \bar{\zeta} \mathbf{u}) \mathbf{Q}^2 (\bar{\eta} \boldsymbol{\varepsilon}_{m+1} + \bar{\zeta} \mathbf{u}), \quad (291)$$

или

$$q^{(p, 1)} = \int dG_{\mathbf{u}} R^{-2} (\mathbf{B}) [\boldsymbol{\varepsilon}_p \mathbf{Q} (\mathbf{B})]^2, \quad (292)$$

$$q^{(1)} = \int dG_{\mathbf{u}} R^{-2} (\mathbf{B}) \mathbf{Q}^2 (\mathbf{B}). \quad (293)$$

Согласно (256) все  $q^{(p, 1)}$  с  $p \neq m + 1$  равны между собой:

$$\begin{aligned} q^{(p, 1)} &= \tilde{q}^{(1)}, \quad p = 1, \dots, m, \\ q^{(m+1, 1)} &= q_0^{(1)}. \end{aligned} \quad (294)$$

На второй подрешетке для параметров спинового стекла находим

$$q^{(p, 2)} = \int dG_{\mathbf{u}} R^{-2} (\bar{\eta} \boldsymbol{\varepsilon}_m + \bar{\zeta} \mathbf{u}) [\boldsymbol{\varepsilon}_p \mathbf{Q} (\bar{\eta} \boldsymbol{\varepsilon}_m + \bar{\zeta} \mathbf{u})]^2, \quad (295)$$

$$q^{(2)} = \int dG_{\mathbf{u}} R^{-2} (\bar{\eta} \boldsymbol{\varepsilon}_m + \bar{\zeta} \mathbf{u}) \mathbf{Q}^2 (\bar{\eta} \boldsymbol{\varepsilon}_m + \bar{\zeta} \mathbf{u}), \quad (296)$$

или

$$q^{(p, 2)} = \int dG_{\mathbf{u}} R^{-2} (\mathbf{E}) [\boldsymbol{\varepsilon}_p \mathbf{Q} (\mathbf{E})]^2, \quad (297)$$

$$q^{(2)} = \int dG_{\mathbf{u}} R^{-2} (\mathbf{E}) \mathbf{Q}^2 (\mathbf{E}). \quad (298)$$



В силу (256) все  $q^{(p, 2)}$  с  $p \neq m$  равны между собой:

$$\begin{aligned} q^{(p, 2)} &= \tilde{q}^{(2)}, \quad p = 1, \dots, m - 1, m + 1, \\ q^{(m, 2)} &= q_0^{(2)}, \end{aligned} \quad (299)$$

при этом

$$\left. \begin{aligned} \tilde{q}^{(1)} &= \tilde{q}^{(2)} \equiv \tilde{q}, \\ q_0^{(1)} &= q_0^{(2)} \equiv q_0. \end{aligned} \right\} \quad (300)$$

Как следует из (294), (299), параметры (238) на первой  $q^{(1)}$  (291) и второй  $q^{(2)}$  (298) подрешетках совпадают:

$$q^{(1)} = q^{(2)} \equiv q. \quad (301)$$

При  $\bar{\eta} = 0$ , т. е. в отсутствие магнитного упорядочения, все  $q^{(p)}$  ( $p = 1, \dots, m, m + 1$ ) одинаковы:

$$q^{(p, 1)} = q^{(p, 2)} = \tilde{q}, \quad p = 1, \dots, m + 1, \quad m = 0. \quad (302)$$

Таким образом, в соответствии с (276), (277), (299), (300), (302) в парамагнитной фазе и фазе спинового стекла все параметры спинового стекла  $q_i^{(p)}$  равны между собой. В магнитоупорядоченных фазах для каждого узла  $i$  имеется два различных параметра  $q_i^{(p)}$ , а именно средний квадрат статистического среднего значения проекции спина на направление намагниченности узла и на любое другое направление остальных векторов симплекса.

### 10. ГАУССОВО РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

При рассмотрении конкретных распределений  $P_{ij}$  и  $p_{ix}$  удобно использовать разложения по семинвариантам  $\chi_w^{(h)}$

$$\ln \chi_w(t) = \sum_{h=1}^{\infty} (k!)^{-1} (it)^h \chi_w^{(h)}, \quad (303)$$

где  $\chi_w(t)$  — характеристическая функция распределения  $w(z)$  случайной величины  $z$ :

$$\chi_w(t) = \int dz w(z) \exp(itz).$$

В соответствии с определениями (140), (147) функций  $\Psi_{ij}$  и  $\Phi_{ix}$

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{ij}(\tau) &= \ln \chi_{P_{ij}}(-i\beta\tau), \\ \Phi_{ix}(\tau) &= \ln \chi_{p_{ix}}(-i\beta\tau), \end{aligned} \right\} \quad (304)$$

так что

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{ij}(\tau) &= \sum_{k=1}^{\infty} (k!)^{-1} (\beta\tau)^k \chi_{P_{ij}}^{(k)}, \\ \Phi_{ix}(\tau) &= \sum_{k=1}^{\infty} (k!)^{-1} (\beta\tau)^k \chi_{P_{ix}}^{(k)}. \end{aligned} \right\} \quad (305)$$

Для гауссова распределения

$$w(z) = (2\pi\sigma)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma^{-1}(z-\bar{z})^2\right] \quad (306)$$

со средним значением  $\bar{z}$  и дисперсией  $\sigma$  имеем

$$\chi_w(t) = \exp\left(izt - \frac{1}{2}\sigma t^2\right), \quad (307)$$

так что

$$\chi_w^{(k)} = \begin{cases} \bar{z}, & k=1, \\ \sigma, & k=2, \\ 0, & k=3, 4 \dots \end{cases} \quad (308)$$

Когда распределения  $P_{ij}$  и  $p_{ix}$  — гауссовы со средними значениями  $\bar{J}_{ij}$  и  $\bar{h}_{ix}$  и дисперсиями  $\sigma_{ij}$  и  $\rho_{ix}$  соответственно,

$$\left. \begin{aligned} P_{ij}(J) &= (2\pi\sigma_{ij})^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma_{ij}^{-1}(J-\bar{J}_{ij})^2\right], \\ p_{ix}(h) &= (2\pi\rho_{ix})^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\rho_{ix}^{-1}(h-\bar{h}_{ix})^2\right], \end{aligned} \right\} \quad (309)$$

функции  $\Psi_{ij}$  и  $\Phi_{ix}$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{ij}(\xi) &= \beta\bar{J}_{ij}\xi + \frac{1}{2}\beta^2\sigma_{ij}\xi^2, \\ \Phi_{ix}(\xi) &= \beta\bar{h}_{ix}\xi + \frac{1}{2}\beta^2\rho_{ix}\xi^2. \end{aligned} \right\} \quad (310)$$

Рассмотрим трансляционно-инвариантный гауссов случай, когда

$$\bar{J}_{ij} = \begin{cases} \bar{J}, & (i, j) \in \{\{i, j\}\}, \\ 0, & (i, j) \notin \{\{i, j\}\}, \end{cases} \quad \sigma_{ij} = \begin{cases} \sigma, & (i, j) \in \{\{i, j\}\}, \\ 0, & (i, j) \notin \{\{i, j\}\}, \end{cases} \quad (311)$$

$$\bar{h}_{ix} = 0, \quad \rho_{ix} = \rho. \quad (312)$$

Заметим, что равенство  $\bar{h}_{ix} = 0$  не умаляет общности, поскольку среднее значение случайного поля  $\mathbf{h}_i$  можно учесть в регулярном поле  $\mathbf{v}_i$ , а равенство  $\rho_{ix} = \rho$  означает, что флуктуации случайного поля являются изотропными.

В выражениях (262) и (263) для свободной энергии можно избавиться от двукратного интегрирования (по  $\mathbf{u}$  и по  $\mathbf{v}$ ) и от скаляр-

ного произведения — компонентных функций и записать его через функции

$$\mathcal{E}_0(\eta, \zeta) = \int dG_u R^{-1}(\mathbf{B}) \exp(\mathbf{B}\epsilon_{m+1}), \quad (313)$$

$$\mathcal{D}_2(\eta, \zeta) = \int dG_u R^{-2}(\mathbf{B}) \exp(2\mathbf{B}\epsilon_1), \quad (314)$$

$$\mathcal{D}_0(\eta, \zeta) = \int dG_u R^{-2}(\mathbf{B}) \exp(2\mathbf{B}\epsilon_{m+1}), \quad (315)$$

$$\mathcal{R}_0(\eta, \zeta) = \int dG_u \ln R(\mathbf{B}), \quad (316)$$

а при  $m = 1$  — только через функции  $\mathcal{E}_0$ ,  $\mathcal{D}_0$ ,  $\mathcal{R}_0$  [70, 67, 68]. А именно, при  $m > 1$  в случае фаз ферромагнитной, парамагнитной и спинового стекла свободная энергия имеет вид

$$\begin{aligned} -N^{-1}\beta\mathcal{F}(\eta, \zeta) = & -\frac{1}{4}z\sigma\beta^2\left(\frac{m}{m+1}\right)^2\{m^{-1}(m-1)^{-1}(m^2+m-1)\mathcal{D}_0^2+ \\ & +(m-1)^{-1}(m^2-m+1)\mathcal{D}_2^2+m^{-3}(m-1)^{-1}(10m^2+6m-1)\mathcal{E}_0^2- \\ & -2(m-1)^{-1}\mathcal{D}_0\mathcal{D}_2-4m^{-2}(m-1)^{-1}(m^2+5m-2)\mathcal{D}_0\mathcal{E}_0+ \\ & +4m^{-1}(m-1)^{-1}(3m-1)\mathcal{D}_2\mathcal{E}_0-2m^{-2}(m-1)^{-1}(m+1)^2\mathcal{D}_2+ \\ & +2m^{-3}(m-1)^{-1}(m+1)^2\mathcal{D}_0-2m^{-4}(m-1)^{-1}(3m^3+10m^2+m-4)\mathcal{E}_0- \\ & -m^{-5}(m-1)^{-1}(m+1)^2(3m-7)\} + \frac{1}{2}z\left(\beta\bar{J} + \frac{1}{2}\beta^2\sigma\frac{m-1}{m}\right) \times \\ & \times \frac{m}{m+1}(\mathcal{E}_0^2-2m^{-1}\mathcal{E}_0+m^{-2}) + \frac{1}{2}(\zeta^2-\beta^2\rho)\left[\frac{m}{m+1}(m\mathcal{D}_2+\mathcal{D}_0)-\frac{m+1}{m}\right]- \\ & -(\beta\nu-\eta)(\mathcal{E}_0-m^{-1}) + \mathcal{R}_0 + \frac{1}{4}z\beta^2\sigma m^{-1} + \ln\frac{m+1}{m}. \quad (317) \end{aligned}$$

Намагниченность  $m$  равна

$$m = \mathcal{E}_0(\bar{\eta}, \bar{\zeta}) - m^{-1}. \quad (318)$$

В случае фаз антиферромагнитной, парамагнитной и спинового стекла для свободной энергии имеем

$$\begin{aligned} -N^{-1}\beta\mathcal{F}(\eta, \zeta) = & -\frac{1}{4}z\sigma\beta^2\left(\frac{m}{m+1}\right)^2\{m^{-2}(m-1)^{-1}(3m-4)\mathcal{D}_0^2+ \\ & +(m-1)^{-1}(m^2-m-1)\mathcal{D}_2^2-2m^{-4}(m-1)^{-1}(7m^3-3m^2-11m-1)\mathcal{E}_0^2- \\ & -4m^{-2}\mathcal{D}_0\mathcal{E}_0-6m^{-3}(m+1)\mathcal{D}_2\mathcal{E}_0- \\ & -2m^{-4}(m-1)^{-1}(3m^3+5m^2-m-3)\mathcal{D}_0-2m^{-2}(m-1)^{-1}(m^2+1)\mathcal{D}_2- \\ & -2m^{-4}(m-1)^{-1}(3m^3+5m^2+m+3)\mathcal{E}_0+m^{-6}(m-1)^{-1}(m^4+ \\ & +4m^3-12m^2-9m-4)\} - \frac{1}{2}z\left(\beta\bar{J} + \frac{1}{2}\beta^2\sigma\frac{m-1}{m}\right)\frac{m}{m+1} \times \\ & \times \{m^{-2}(m+1)\mathcal{E}_0^2+2m^{-3}(m-1)\mathcal{E}_0+m^{-4}(m+1)\} + \\ & + \frac{1}{2}(\zeta^2-\beta^2\rho)\left[\frac{m}{m+1}(m\mathcal{D}_2+\mathcal{D}_0)-\frac{m+1}{m}\right] + (\beta\nu-\eta)(\mathcal{E}_0-m^{-1}) + \mathcal{R}_0 + \\ & + \frac{1}{4}z\beta^2\sigma m^{-1} + \ln\frac{m+1}{m}. \quad (319) \end{aligned}$$

Намагниченность подрешеток  $m^{(a)}$  имеет вид

$$m^{(a)} = \mathcal{E}_0(\bar{\eta}, \bar{\xi}) - m^{-1}. \tag{320}$$

Вне зависимости от типа упорядочения параметры порядка спинового стекла  $\tilde{q}$ ,  $q_0$  и  $q$  выражаются через решение  $(\bar{\eta}, \bar{\xi})$  задачи на отыскание седловой точки функции свободной энергии (317), (319) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{q} &= \mathcal{D}_2(\bar{\eta}, \bar{\xi}) + 2m^{-1}\mathcal{E}_0(\bar{\eta}, \bar{\xi}) - m^{-3}(m+2), \\ q_0 &= \mathcal{D}_0(\bar{\eta}, \bar{\xi}) - 2m^{-1}\mathcal{E}_0(\bar{\eta}, \bar{\xi}) + m^{-2}, \\ q &= \frac{m}{m+1} [m\mathcal{D}_2(\bar{\eta}, \bar{\xi}) + \mathcal{D}_0(\bar{\eta}, \bar{\xi})] - m^{-1}. \end{aligned} \right\} \tag{321}$$

Функции  $\mathcal{E}_0$ ,  $\mathcal{D}_0$ ,  $\mathcal{D}_2$  и  $\mathcal{R}_0$  универсальны в том смысле, что они не зависят ни от температуры  $1/\beta$ , ни от числа взаимодействующих соседей  $z$ , ни от параметров распределений интенсивностей взаимодействия  $\bar{J}$  и  $\sigma$  и случайных полей  $\rho$ . Это обуславливает удобство представлений (317) — (321).

При заданных параметрах распределений  $\bar{J}$ ,  $\sigma$ ,  $\rho$ , числе взаимодействующих соседей  $z$  и температуре  $\theta = 1/\beta$  можно решить задачу на отыскание седловой точки свободной энергии (317) или (319). Ее решение дает значения параметров порядка намагниченностей (318) или (320), а также параметров порядка спинового стекла (321). Как показано в разд. 8, если  $\bar{\eta} = 0$ ,  $\bar{\xi} = 0$ , то решетка находится в парамагнитной фазе, если  $\bar{\eta} = 0$ ,  $\bar{\xi} \neq 0$  — в фазе спинового стекла, если  $\bar{\eta} \neq 0$  — в магнитоупорядоченной фазе.

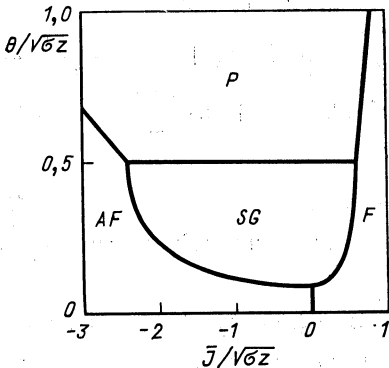


Рис. 4. Фазовая диаграмма трехкомпонентной гауссовой стохастической решетчатой системы

На нем буквами  $P$ ,  $F$ ,  $AF$  и  $SG$  отмечены соответственно парамагнитная, ферромагнитная, антиферромагнитная фазы и фаза спинового стекла.

При фиксированных среднем значении интенсивностей взаимодействия  $\bar{J}$  и их дисперсии  $\sigma$  при достаточно высоких температурах  $\theta$  система находится в парамагнитном состоянии. С понижением температуры, в том случае, если  $\bar{J}$  достаточно велико, система перейдет

Для трехкомпонентной модели задача отыскания седловой точки свободной энергии (317), (319) решена численно [67, 68]. В результате построена фазовая диаграмма, представленная на рис. 4.

в ферромагнитную фазу, а если  $\bar{J}$  достаточно мало — в антиферромагнитную фазу и будет оставаться в этих фазах вплоть до нулевой температуры. Если же модуль  $\bar{J}$  достаточно мал, то при  $\theta = \frac{1}{2} \sqrt{z\sigma}$  система перейдет в фазу спинового стекла, однако при еще более низких температурах вплоть до нулевой опять будет наблюдаться магнитоупорядоченная фаза: если  $\bar{J} > 0$  — ферромагнитная, если  $\bar{J} < 0$  — антиферромагнитная. В этом состоит кардинальное отличие стохастических многокомпонентных ( $q \geq 3$ ) решетчатых систем от стохастической модели Изинга.

Эта особенность связана с вырождением основного состояния и возможностью дальних корреляций в антиферромагнитной и фразированной системах.

Обращает на себя внимание также асимметричность фазовой диаграммы относительно оси температур.

### 11. О ХАРАКТЕРЕ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА ПАРАМАГНЕТИК — СПИНОВОЕ СТЕКЛО

В парамагнитной фазе ( $N$ -фаза) и фазе спинового стекла ( $SG$ -фаза) вариационный параметр  $\bar{\eta}$  равен нулю,  $\bar{\eta} = 0$ . В этом случае выражение для функции свободной энергии существенно упрощается. Для свободной энергии  $N^{-1}\mathcal{F}(\eta, \zeta)|_{\eta=0} \equiv f_s(\zeta)$  получено разложение [71]

$$-\beta f_s(\zeta) = \frac{1}{4} m^{-1} z \sigma \beta^2 + \ln(m+1) + \zeta^4 \frac{1}{4} m^{-1} (1 - m^{-2} z \sigma \beta^2) + \zeta^6 \frac{1}{2} m^{-2} (m-5) \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} m^{-2} z \sigma \beta^2 \right) + O(\zeta^8). \quad (322)$$

Если сделать замену  $x = \zeta^2$ , то разложение (322) примет вид

$$\left. \begin{aligned} -\beta f_s(x) &= C + Ax^2 + Bx^3 + \dots, \\ A &= \frac{1}{4} m^{-1} (1 - m^{-2} z \sigma \beta^2), \\ B &= \frac{1}{2} m^{-2} (m-5) \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} m^{-2} z \sigma \beta^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (323)$$

Отметим, что в отличие от регулярной модели оба коэффициента,  $A$  и  $B$ , зависят от температуры. Они обращаются в нуль при температурах  $\theta_A = m^{-1} \sqrt{z\sigma}$  и  $\theta_B = \sqrt{\frac{3}{2}} \theta_A > \theta_A$  соответственно. Вид функций  $A(\theta)$  и  $B(\theta)$  показан на рис. 5.

Рассмотрим сначала случай  $m < 5$ . При  $0 < \theta < \theta_A$  вид функции  $-f_s(\zeta)$  представлен на рис. 6, а. Минимум функции  $-f_s(\zeta)$  достигается при  $\bar{\zeta} \neq 0$ , и, следовательно, имеет место фаза спинового стекла. При  $\theta > \theta_A$  оба коэффициента,  $A(\theta)$  и  $B(\theta)$ , положительны, функция  $-f_s(\zeta)$  монотонно возрастает и  $\bar{\zeta} = 0$ , т. е. систе-

ма находится в парамагнитной фазе (рис. 6, б). При  $\theta = \theta_A$  выполняется соотношение

$$\frac{d^2}{d\xi^2} f_s(\xi) \Big|_{\xi=0} = 0,$$

т. е. при  $\theta = \theta_A$  имеет место фазовый переход второго рода.

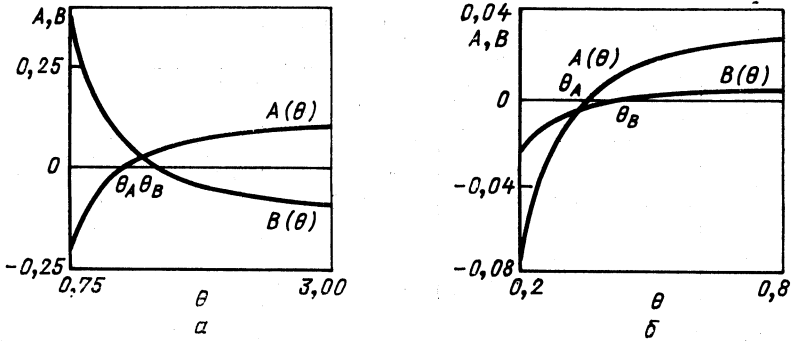


Рис. 5. Зависимость коэффициентов  $A$  и  $B$  в разложении свободной энергии (115) от температуры  $\theta$ :  
 а —  $m < 5$ ; б —  $m > 5$

Разложение (323) дает возможность найти критический показатель, связанный с параметром порядка спинового стекла. А именно,

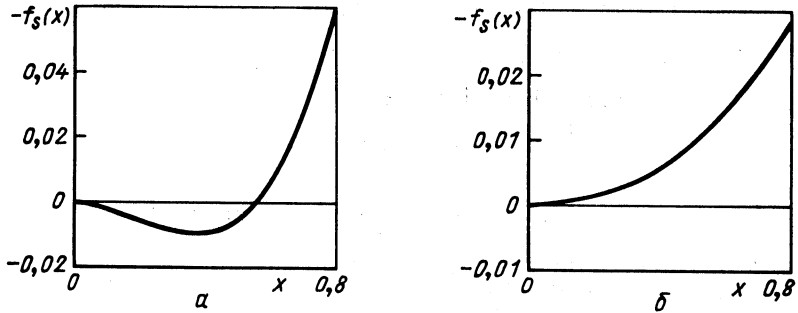


Рис. 6. Функция  $-f_s(x)$  при  $m < 5$ :  
 а —  $\theta < \theta_A$ ; б —  $\theta > \theta_A$

при  $m < 5$  и  $\theta \ll \theta_A$  значение  $\bar{\xi}$  определяется соотношением

$$\bar{\xi}^2 = -\frac{2A}{3B} = -\frac{2}{3} \frac{1}{4m} \frac{\theta^2 - \theta_A^2}{\theta^2 B} \sim \frac{\theta_A - \theta}{\theta_A},$$

и для параметра порядка спинового стекла имеем

$$q = m\mathcal{D}_1 - m^{-1} = m^{-1}\bar{\xi}^2 + \mathcal{O}(\bar{\xi}^4) \sim \frac{\theta_A - \theta}{\theta_A}, \quad (324)$$

т. е. критический показатель, связанный с параметром порядка спинового стекла, равен 1 при всех  $m < 5$ . В частном случае модели Изинга  $m = 1$  это соответствует результату работы [50].

При  $m > 5$  меняется знак коэффициента  $B(\theta)$ . В этом случае при  $\theta < \theta_A$  выполняются неравенства  $B < 0$ ,  $A < 0$ , и, следова-

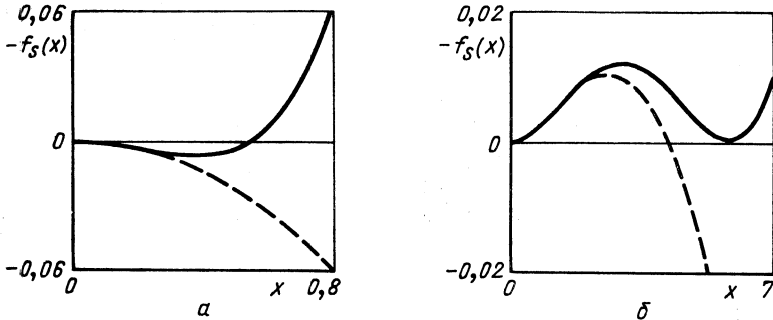


Рис. 7. Функция  $-f_s(x)$  при  $m > 5$ :

$a - \theta < \theta_A$ ;  $b - \theta_A < \theta_B$  [штриховая кривая — ряд (115); сплошная кривая — с учетом членов высших порядков]

тельно, функция  $-f_s(\xi)$  сначала убывает, но затем за счет членов высших порядков, не учтенных в (323), должна возрасти [функция  $f_s(\xi)$  ограничена снизу], и таким образом  $\bar{\xi} \neq 0$  (рис. 7, а). При  $\theta_A < \theta < \theta_B$  вид функции  $-f_s(\xi)$  показан на рис. 7, б. Таким образом, при  $m > 5$  в системе происходит фазовый переход первого рода при температуре  $\theta_{SG}$  в интервале  $\theta_{SG} \in [\theta_A, \theta_B]$  [71].

## 12. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТЕЙ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ДВУМЯ МАКСИМУМАМИ

В реальных спиновых и сегнетоэлектрических стеклах магнитные или дипольные моменты стохастическим образом расположены в регулярной решетке (так называемой матрице). Эти моменты взаимодействуют между собой посредством медленно убывающего с расстоянием сильно осциллирующего взаимодействия (РККИ-взаимодействия) [46—48]. Численное моделирование эффективной плотности вероятности интенсивностей взаимодействия в таких системах было выполнено в [72]. Было показано, что плотность вероятности имеет несколько (два или более — в зависимости от параметров РККИ-взаимодействия и параметра решетки) максимумов.

Таким образом, чтобы приблизиться к ситуации, имеющей место в реальных спиновых и сегнетоэлектрических стеклах, рассмотрим модель Поттса с плотностью вероятности интенсивностей взаимодействия  $P(J_{ij})$  в виде суммы двух гауссовых распределений, вообще говоря, с различными весами и расположенными произвольным образом относительно точки  $J_{ij} = 0$ :

$$P(J) = (2\pi\sigma)^{-1/2} (\kappa + \kappa^{-1})^{-1} \{ \kappa^{-1} \exp \{ -[J - J_0(1+a)]^2/2\sigma \} + \kappa \exp \{ -[J + J_0(1-a)]^2/2\sigma \} \}. \quad (325)$$

Данная плотность вероятности имеет достаточное число параметров, чтобы с хорошей степенью точности аппроксимировать распределения интенсивностей взаимодействия в реальных образцах. Распределение (325) мы будем называть фрустрационно-гауссовым.

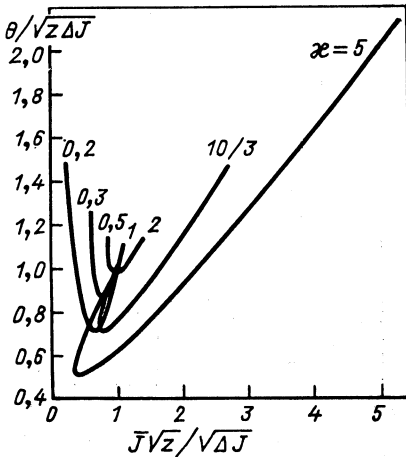


Рис. 8. Траектории тройной точки для различных значений  $\kappa = 0,2 \div 5$

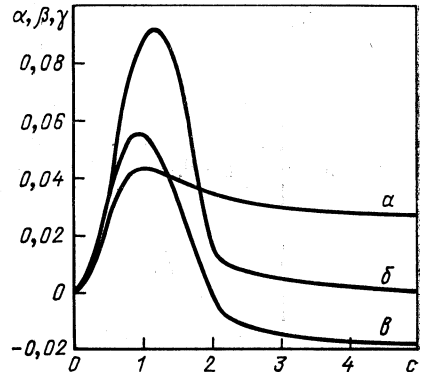


Рис. 9. Углы наклона кривых фазовых переходов:

$\alpha$  — угол наклона  $\pi - \beta$  кривой парамагнетик — спиновое стекло;  $\beta$  — угол наклона  $\frac{\pi}{4} - \alpha$  кривой парамагнетик — ферромагнетик;  $\gamma$  — угол наклона  $\frac{\pi}{2} + \gamma$  кривой спиновое стекло — ферромагнетик

Вычисления, выполненные для фрустрационно-гауссова распределения исходя из выражений (210), (234), (237), (242) для свободной энергии и параметров порядка, показали, что окрестность тройной точки и ее положение подвержены определенным изменениям при изменении параметров распределения (325). Так, на рис. 8 представлены траектории тройной точки парамагнетик — спиновое стекло — ферромагнетик при изменении параметра  $a$  для ряда значе-



ний  $\kappa$ .  $\Delta J$  обозначена дисперсия фрустрационно-гауссова распределения

$$\Delta J = \sigma + \frac{4J_0^2}{(\kappa^{-1} + \kappa)^2}. \quad (326)$$

Зависимости углов наклона кривых фазовых переходов парамагнетик — спиновое стекло, парамагнетик — ферромагнетик и спиновое стекло — ферромагнетик в тройной точке от параметра

$$C = 2 \sqrt{z} (\kappa + \kappa^{-1})^{-1} J_0 / \sqrt{z} \quad (327)$$

для  $a = 0$  приведены на рис. 9. При этом углы наклона кривых парамагнетик — спиновое стекло, парамагнетик — ферромагнетик и спиновое стекло — ферромагнетик обозначены как  $\pi - \beta$ ,  $\frac{\pi}{4} - \alpha$  и  $\frac{\pi}{2} + \gamma$  соответственно.

Фазовая диаграмма для фрустрационно-гауссовой модели построена в координатах

$$X = \sqrt{z} \bar{J} / \sqrt{\Delta J}, \quad Y = \theta / \sqrt{z \Delta J}, \quad (328)$$

где  $\bar{J}$  — среднее значение  $J$ , а  $\Delta J$  — дисперсия, или, что то же самое,

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{1}{2} \sqrt{z} \frac{C}{(1+C^2)^{1/2}} [\kappa^{-1}(1+a) - \kappa(1-a)], \\ Y &= [z\sigma\beta^2(1+C^2)]^{-1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (329)$$

Эти координаты являются естественными обобщениями координат для фазовых диаграмм гауссова распределения.

Для кривой фазового перехода парамагнетик — спиновое стекло получаем

$$Y = 1, \quad X \in (-1, 1),$$

кривая перехода из парамагнитной в ферромагнитную фазу имеет вид

$$X = Y, \quad X > 1,$$

и кривая перехода из парамагнитной в антиферромагнитную фазу — вид

$$X = -Y, \quad X < 1.$$

Для кривой фазового перехода из фазы спинового стекла в магнитоупорядоченные фазы (ферромагнитную и антиферромагнитную) в переменных  $G$  и  $S$

$$\left. \begin{aligned} G &= J_0 \beta / \zeta, \\ S &= \sigma \beta / \zeta \end{aligned} \right\} \quad (330)$$

получена система уравнений

$$G_a = \lambda/z + 1/\sqrt{2} \ln \kappa + 1/\sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}/k (\kappa^{-2k} - \kappa^{2k}) \times e^{-4k^2 G^2} \psi(4k^2 G^2), \quad (331)$$

$$S = 1/z - (2 - \sqrt{2}) \ln(\kappa + \kappa^{-1}) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}/k (\kappa^{-2k} + \kappa^{2k}) e^{-4k^2 G^2} [2\psi(2k^2 G^2) - \sqrt{2} \psi(4k^2 G^2)], \quad (332)$$

где

$$\psi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} du e^{-u} (u+x)^{1/2}, \quad (333)$$

а  $\lambda = 1$  для перехода ферромагнетик — спиновое стекло и  $\lambda = -1$  для перехода антиферромагнетик — спиновое стекло. Эта система

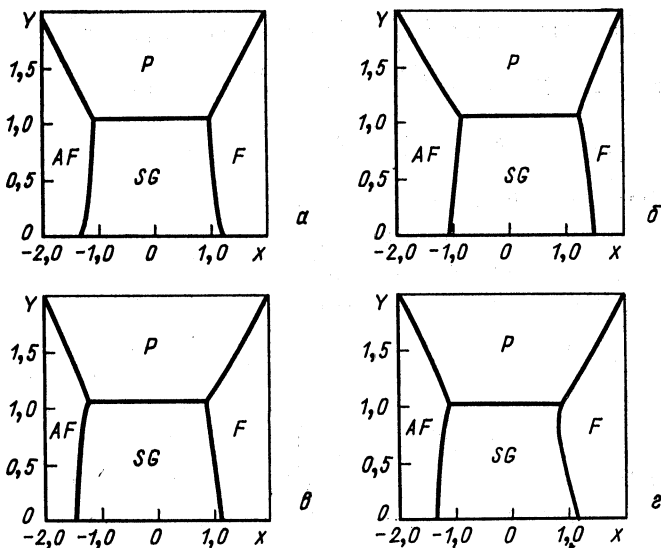


Рис. 10. Фазовые диаграммы фрустрационно-гауссовой модели Изинга:  
 а —  $\kappa = 1$ ;  $C = 1$ ; б —  $\kappa = 3$ ;  $C = 1,5$ ; в —  $\kappa = 1/3$ ;  $C = 1,5$ ; г —  $\kappa = 1/3$ ;  $C = 0,5$

уравнений была исследована численными методами. Полученные таким образом фазовые диаграммы фрустрационно-гауссовой модели Изинга приведены на рис. 10.

13. ФРУСТРАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим фрустрационную модель с распределением [51, 69, 73, 74]

$$P(J) = c\delta(J - J_0) + (1 - c)\delta(J + J_0), \quad (334)$$

где  $J_0$  — неотрицательный параметр — интенсивность связей;  $c$  — концентрация положительных связей, заключенная в пределах  $0 \leq c \leq 1$ .

В соответствии с результатами разд. 12 в обозначениях:

$$\mathcal{A}^{(\lambda)} = 1 - \lambda z \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \ln \left( \frac{1 + (1-c)^{-1} c e^{-4kJ_0\beta}}{1 + (1-c) c^{-1} e^{-4kJ_0\beta}} \right) - \frac{1}{2} \ln [(1-c)^{-1}c] \right\},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= 1 - 2z \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k \ln [(1 + (1-c)^{-1} c e^{-4kJ_0\beta}) \times \\ &\times (1 + (1-c) c^{-1} e^{-4kJ_0\beta})] - \frac{1}{2} z \ln (c - c^2) \end{aligned}$$

условия для фазового перехода из парамагнитной фазы в ферромагнитную ( $\lambda = 1$ ) или антиферромагнитную ( $\lambda = -1$ ) имеют вид [75]

$$\mathcal{A}^{(\lambda)} = 0, \quad \mathcal{B} > 0. \quad (335)$$

Кривая сосуществования парамагнетика и спинового стекла определяется условиями

$$\mathcal{B} = 0, \quad \mathcal{A}^{(\lambda)} > 0. \quad (336)$$

Фазовый переход из фазы спинового стекла в ферромагнитную ( $\lambda = 1$ ) или антиферромагнитную ( $\lambda = -1$ ) фазу описывается системой

$$\begin{aligned} \lambda \int dG_u [1 - \text{th}^2(\xi u)] + z \ln [(1-c) c^{-1}]^{1/2} \int dG_u [1 - \text{th}^2(\sqrt{2} \xi u)] + \\ + \frac{1}{4} z \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} / k \left[ \left( \frac{c}{1-c} \right)^k - \left( \frac{1-c}{c} \right)^k \right] \times \\ \times \xi^{-2} \int dG_u dG_v \ln \left[ 1 + e^{-4k\beta J} \frac{\text{ch}(\sqrt{2} \xi u)}{\text{ch}(\sqrt{2} \xi v)} \right] (u^2 - v^2) = 0; \quad (337) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi^2 \int dG_u \frac{1 - 3 \text{th}^2 \xi u}{\text{ch}^2 \xi u} - \frac{1}{2} z \ln (c - c^2) \int dG_u [\text{th}^2 \xi u - \text{th}^2(\sqrt{2} \xi u)] + \\ + \frac{1}{4} z \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} / k \left[ \left( \frac{c}{1-c} \right)^k + \left( \frac{1-c}{c} \right)^k \right] \xi^{-2} \times \\ \times \int dG_u dG_v \ln \left[ 1 + e^{-4k\beta J} \frac{\text{ch}(\sqrt{2} \xi u)}{\text{ch}(\sqrt{2} \xi v)} \right] (u^2 + v^2 - 2) = 0. \quad (338) \end{aligned}$$

Тройная точка определяется уравнениями

$$\mathcal{A}^{(\lambda)} = 0, \quad \mathcal{B} = 0, \quad (339)$$

где  $\lambda = 1$  для точки сосуществования парамагнитной, ферромагнитной и фазы спинового стекла и  $\lambda = -1$  для точки сосуществования парамагнитной, антиферромагнитной и фазы спинового стекла.

Системы (335), (336) и (337), (338) полностью определяют фазовую диаграмму.

Эти системы решались численными методами. Выяснилось, что прямое использование уравнений (337), (338) для практических численных расчетов возможно лишь при не очень малых и не очень больших значениях параметра  $\zeta$ . Поэтому пределы  $\zeta \rightarrow 0$  и  $\zeta \rightarrow \infty$  следует рассмотреть отдельно.

При  $\zeta \rightarrow 0$  система (337), (338) аналитически преобразуется к виду

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{B} &= 2\mathcal{A}^{(\lambda)}, \\ \mathcal{B} &< 0, \quad |\mathcal{A}^{(\lambda)}| < 1. \end{aligned} \right\} \quad (340)$$

Отметим, что (340) дает удовлетворительное приближение и в случае конечных (не малых) значений величины  $\mathcal{A}^{(\lambda)}$ .

При  $\zeta \rightarrow \infty$  система (337), (338) переходит в

$$\begin{aligned} &\lambda/z + 1/\sqrt{8} \ln \frac{1-c}{c} + \\ &+ 1/\sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}/k \left[ \left( \frac{c}{1-c} \right)^k - \left( \frac{1-c}{c} \right)^k \right] e^{-4k^2 G^2} \psi(4k^2 G^2) = 0; \quad (341) \\ &1/z + (1 - 1/\sqrt{2}) \ln(c - c^2) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}/k \left[ \left( \frac{c}{1-c} \right)^k - \left( \frac{1-c}{c} \right)^k \right] \times \\ &\times e^{-4k^2 G^2} [2\psi(2k^2 G^2) - \sqrt{2}\psi(4k^2 G^2)] = 0, \quad (342) \end{aligned}$$

где функция  $\psi(x)$  имеет вид (333). Здесь

$$G = \beta \lim_{\zeta \rightarrow \infty} (\tilde{J}/\zeta),$$

а  $\tilde{J}$  — решение системы (337), (338) относительно  $J_0$  при заданном значении  $\zeta$ .

Фазовая диаграмма построена в переменных

$$X = c, \quad Y = \frac{\theta}{J_0 z}.$$

На рис. 11 она приведена для значений числа взаимодействующих соседей  $z = 6$  (а) и  $z = 12$  (б) [75].

Получена зависимость координат характерных точек диаграммы от величины  $z$ . А именно, на рис. 12 представлены зависимость от  $z$

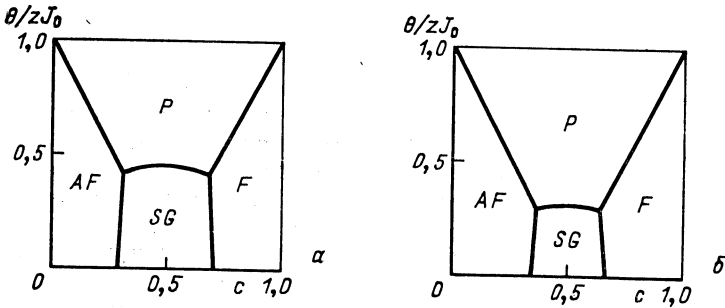


Рис. 11. Фазовые диаграммы стохастической фрустрационной модели Изинга:  $a - z = 6$ ;  $b - z = 12$

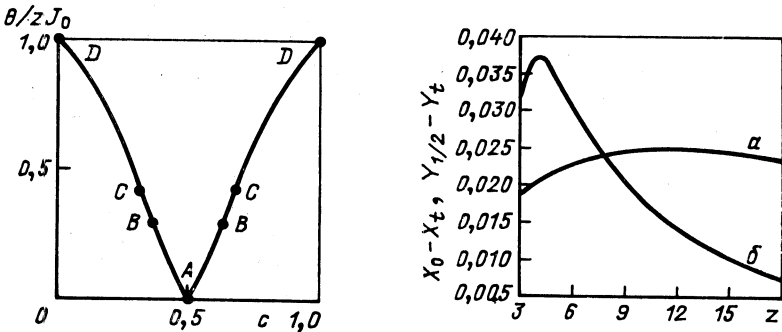


Рис. 12. Зависимость положения тройных точек от числа взаимодействующих соседей  $z$ ; при  $c > 1/2$  — точка соприкосновения фаз парамагнитной, ферромагнитной и спинового стекла, при  $c < 1/2$  — точка соприкосновения фаз парамагнитной, антиферромагнитной и спинового стекла; отмечены точки:  $A - z = 0$ ;  $B - z = 6$ ;  $C - z = 12$ ;  $D - z \rightarrow \infty$

Рис. 13. Зависимость положения характерных точек от  $z$ :

$a$  — координата  $X_0$  точки границы фаз ферромагнитной и спинового стекла при  $Y = 0$  относительно координаты  $X_t$  тройной точки;  $b$  — координаты  $Y_{1/2}$  точки границы фаз парамагнитной и спинового стекла при  $X = 1/2$  относительно координаты  $Y_t$  тройной точки

координат тройных точек. Координаты  $X$  концентрационных фазовых переходов спиновое стекло — магнитоупорядоченная фаза при нулевой температуре, координаты  $Y$  точки перехода парамагнетик — спиновое стекло при равных концентрациях положительных и отрицательных связей ( $c = 1/2$ ) представлены на рис. 13.

Показано, что для любых  $z$  при значениях концентраций положительных связей близких к единице конечной точкой кривой перехода парамагнетик — ферромагнетик является точка  $(X, Y) = (1, 1)$ , а при близких к нулю — точка  $(X, Y) = (0, 1)$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как видно из представленного в настоящей работе обзора приложений модели Поттса, интерес к ней обусловлен тем, что она служит основой теоретического описания широкого ряда разнообразных объектов и явлений в физике конденсированных сред. К их числу относятся сложные магнетики (например, анизотропные ферромагнетики кубической структуры), сегнетоэлектрики, спиновые стекла, многокомпонентные сплавы и жидкие смеси, адсорбция благородных газов на адсорбентах типа графита, фазовые переходы на границах раздела, структурные фазовые переходы, некоторые процессы в полимерных системах, перколяционные явления. На языке модели Поттса формулируются классическая задача о раскрашивании, имеющая, в свою очередь, приложения в физике, и ряд оптимизационных проблем. К ним, в частности, относится задача о коммивояжере и проблема о разбиении графа на  $n$  частей с минимальным числом связей между частями. Эта последняя проблема непосредственно связана с проектированием архитектуры электронно-вычислительной техники, с задачами структурного программирования и задачами по теории управления.

Модель Поттса вызывает теоретический интерес в качестве простой, но содержательной модели для изучения фазовых переходов первого рода и мультикритических явлений. Для этой цели они полностью отвечают основополагающему требованию, что модель должна быть достаточно простой для того, чтобы для нее можно было получить достоверное решение, но вместе с тем простота не должна означать тривиальность содержания.

В настоящей работе представлен метод исследования стохастических моделей Поттса, т. е. моделей, в которых интенсивности взаимодействия и поля являются случайными величинами. Разработанный аппарат применим к системам, в которых эти случайные величины могут иметь произвольные плотности вероятности, причем последние могут меняться от пары к паре и от узла к узлу соответственно. Изучены возможные структуры упорядочения.

На основе развитого метода исследованы конкретные модели с различными размерностями пространства состояний и распределениями случайных величин. Построены соответствующие фазовые диаграммы. В частности, изучена гауссова трехкомпонентная модель. Вычислена ее свободная энергия, получена фазовая диаграмма. Установлен характер перехода из неупорядоченной в слабоупорядоченную фазу в многокомпонентных гауссовых решетках. Если число возможных состояний узлов решетки меньше шести, имеет место

фазовый переход второго рода; если же число состояний больше шести, реализуется фазовый переход первого рода. Вычислен соответствующий критический показатель. Решена фрустрационная модель Изинга. Исследованы фрустрационно-гауссовы модели, т. е. модели, в которых плотность вероятности интенсивностей взаимодействия является суммой двух гауссовых распределений, вообще говоря, с различными весами и расположенными произвольным образом на оси интенсивностей. Такая плотность вероятности достаточно хорошо описывает распределения интенсивностей взаимодействия в реальных магнитных и сегнетоэлектрических системах. Получена фазовая диаграмма и установлена зависимость характеристик фазовой диаграммы от параметров распределения.

Результаты показывают, что в отличие от принятой ранее точки зрения вид распределения параметров решетки существенным образом влияет на ее термодинамические свойства и структуру фазовой диаграммы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголюбов Н. Н. Об одном вариационном принципе в задаче многих тел// Докл. АН СССР. 1958. Т. 119, № 2. С. 244—246.
2. Тябликов С. В. Методы квантовой теории магнетизма. М.: Наука, 1975.
3. Potts R. B. Some generalized order-disorder transformations// Proc. Camb. Phil. Soc. 1952. Vol. 48. Pt. 1. P. 106—109.
4. Wallace D. J., Zia R. K. P. Critical behaviour of the continuous  $n$ -component Potts model// J. Phys. A. 1975. Vol. 8, N 9. P. 1495—1507.
5. Wu F. Y. The Potts model// Rev. Mod. Phys. 1982. Vol. 54, N 1. P. 235—268.
6. Berker A. N., Ostlund S., Putnam F. A. Renormalisation-group treatment of a Potts lattice gas for krypton adsorbed into graphite// Phys. Rev. 1978. Vol. 17, N 9. P. 3650—3655.
7. Sluckin T. J. A Potts model for the herringbone transition// J. Phys. A. 1988. Vol. 21, N 6. P. 1415—1424.
8. Mukamel D., Fisher M. E., Domany E. Magnetisation of cubic ferromagnets and the three-component Potts model// Phys. Rev. Lett. 1976. Vol. 37, N 10. P. 565—568.
9. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. М.: Наука, 1978.
10. Ма Ш. Современная теория критических явлений: Пер. с англ. М.: Мир, 1980.
11. Barbara B., Rossignol M. F., Bak P. First-order transition and tricritical points in  $DyAl_2$ ; a realisation of the three-state Potts model// J. Phys. C. 1978. Vol. 11, N 5. P. L183—L187.
12. Aharony A., Muller K. A., Berlinger W. Trigonal to tetragonal transition in stressed  $SrTiO_3$ -realisation of 3-state Potts model// Phys. Rev. Lett. 1977. Vol. 38, N 1. P. 33—36.
13. Blankshtein D., Aharony A. Critical and tricritical points near the Potts model transition of uniaxially stressed  $SrTiO_3$ // J. Phys. C. 1981. Vol. 14, N 2. P. 1919—1944.
14. Salje E., Devarajan V. Potts model and phase transitions in lead phosphate  $Pb_3(SO_4)_2$ // J. Phys. C. 1981. Vol. 14, N 33. P. L1029—L1035.
15. Weger W., Goldberg I. B. Some lattice and electronic properties of the  $\beta$ -tungstens// Solid State Phys. 1973. Vol. 28. P. 1—77.
16. Szabo N. Comment on the structural phase transition in A15 compounds// J. Phys. C. 1975. Vol. 8, N 19. P. L397—L399.

17. **Krinsky S., Mukamel D.** Spin 3/2 Ising model for tricritical points in ternary fluid mixtures//Phys. Rev. B. 1975. Vol. 11, N 1. P. 399—410.
18. **Das B. K., Griffiths R. B.** A search for tricritical points in liquid mixtures; the shield region and the three-state Potts model//J. Chem. Phys. 1979. Vol. 70, N 7. P. 5555—5570.
19. **Abraham D. B.** Solvable model with a roughening transition for a planar Ising ferromagnet//Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 44, N 18. P. 1165—1168.
20. **Де Жен П.** Идеи скейлинга в физике полимеров: Пер. с англ. М.: Мир, 1981.
21. **Coniglio A.** Potts model formulation of branched polymers in a solvent//J. Phys. A. 1985. Vol. 16, N 6. P. L187—L191.
22. **Lai P.-Y., Goldshmidt Y. Y.** Application of a statistical mechanics to combinatorial optimization problems: the chromatic number problem and q-partitioning of a graph//J. Stat. Phys. 1987. Vol. 48, N 3/4. P. 513—529.
23. **Vannimenus J., Mezard M.** On the statistical mechanics of optimization problems of the travelling salesman type//J. de Physiq. Lett. (Paris). 1986. Vol. 45, N 24. P. L1145—L1153.
24. **Mezard M., Parisi G.** A replica analysis of the travelling salesman problem//J. de Physiq. (Paris). 1986. Vol. 47, N 8. P. 1285—1296.
25. **Baskaran G., Fu Y., Anderson P. W.** On the statistical mechanics of the travelling salesman problem//J. Stat. Phys. 1986. Vol. 45, N 1/2. P. 1—25.
26. **Fu Y., Anderson P. W.** Application of statistical mechanics to NP-complete problems in combinatorial optimisation//J. Phys. A. 1986. Vol. 19, N 9. P. 1605—1620.
27. **Banavar R. J., Sherrington D., Surlas N.** Graph bipartitioning and statistical mechanics//J. Phys. A. 1987. Vol. 20, N 1. P. L1—L8.
28. **Wiethege W., Sherrington D.** Bipartitioning of random graphs of fixed extensive valency//J. Phys. A. 1988. Vol. 21, N 1. P. L9—L11.
29. **Kanter I., Sompolinsky H.** Graph optimization and the Potts glass//J. Phys. A. 1988. Vol. 21, N 11. P. L673—L679.
30. **Mattis D.** The Q-colour problem on a lattice//Intern. J. Mod. Phys. B. 1987. Vol. 1, N 1. P. 103—110.
31. **Chen X., Pan C. Y.** Numerical study of the Q-colour problem on a lattice//Intern. J. Mod. Phys. B. 1987. Vol. 1, N 1. P. 111—120.
32. **Truong T. T., Schotte K. D.** The three-colouring problem as a special eight-vertex model//J. Phys. A. 1986. Vol. 19, N 8. P. 1477—1483.
33. **Baxter R. J.** Q colourings of the triangular lattice//J. Phys. A. 1986. Vol. 19, N 14. P. 2821—2840.
34. **Baxter R. J.** Chromatic polynomials of large triangular lattice//J. Phys. A. 1987. Vol. 20, N 15. P. 5241—5261.
35. **Owczarek A. L., Baxter R. J.** Generalized percolation probabilities for the self-dual Potts model//J. Phys. A. 1987. Vol. 20, N 15. P. 5263—5271.
36. **Nagle J. F.** Lattice statistics of hydrogen bonded crystals. I. The residual entropy of ice//J. Math. Phys. 1966. Vol. 7, N 8. P. 1484—1491.
37. **Lieb E. H.** Residual entropy of square ice//Phys. Rev. 1967. Vol. 162, N 1. P. 162—167.
38. **Займан Дж.** Модели беспорядка: Пер. с англ. М.: Мир, 1982.
39. **Glaus U.** Finite-size scaling study of two-dimensional dilute Potts model//J. Phys. A. 1987. Vol. 20, N 9. P. L595—L600.
40. **Aizenman M., Chayes T. T., Chayes L., Newman C. M.** The phase boundary in dilute and random Ising and Potts ferromagnets//J. Phys. A. 1985. Vol. 20, N 5. P. L313—L318.
41. **Adler J., Gefen Yuval, Schick M., Wei-Heng Shih.** Order propagation in dilute antiferromagnetic Potts models//J. Phys. A. 1987. Vol. 20, N 4. P. L227—L232.
42. **Marques M. C., Santos M. A.** Mean-field renormalization group for the Potts model in a transverse field//J. Phys. C. 1986. Vol. 19, N 22. P. L213—L221.



43. Fischer K. H. Spin glasses//Physica Status Solid. B. 1983. Vol. 116, N 2. P. 357—414.
44. Canella V., Mydosh J. A. Magnetic ordering in gold-ion alloys//Phys. Rev. B. 1972. Vol. 6, N 11. P. 4220—4237.
45. Fisher K. H. Spin glasses//Physica B & C. 1977. Vol. 86—88. Pt. 2. P. 813—819.
46. Ruderman M. A., Kittel C. Indirect exchange coupling of nuclear magnetic moments by conduction electrons//Phys. Rev. 1954. Vol. 96, N 1. P. 99—102.
47. Kasuda T. A theory of metallic ferro and antiferromagnetism on Zener's model//Progr. Theor. Phys. 1956. Vol. 16, N 1. P. 45—57.
48. Josida K. Magnetic properties of Cu-Mn alloys//Phys. Rev. 1957. Vol. 109, N 5. P. 893—898.
49. Edwards S. F., Anderson P. W. Theory of spin glasses//J. Phys. F. 1975. Vol. 5, N 5. P. 965—964.
50. Sherrington D., Kirkpatrick S. Solvable model of a spin glass//Phys. Rev. Lett. 1975. Vol. 35, N 26. P. 1792—1796.
51. Toulouse G. Theory of the frustration effect in spin glasses//Commun. Phys. 1977. Vol. 2, N 4. P. 115—119.
52. Sherrington D. The infinite-range  $m$ -vector spin glass//Lect. Notes in Physics. 1983. Vol. 192. P. 125—135.
53. Elderfield D., Sherrington D. Two curious case of the Potts spin glass//J. Phys. C. 1983. Vol. 16, N 15. P. L497—503.
54. Elderfield D., Sherrington D. Spin glass, ferromagnetic and mixed phases in the disordered Potts model//J. Phys. C. 1983. Vol. 16, N 27. P. L971—L977.
55. Лучинская Е. А., Рыжов В. Н., Тареева Е. Е. к теории квадрупольных стекол//Тр. IV Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1987.
56. Miyazima S. A random Potts model with different number of Potts spin states//Progr. Theor. Phys. 1984. Vol. 71, N 6. P. 1123—1128.
57. Marques M. C., Santos C. A. S. Tricritical point in random Potts model//J. Phys. A. 1987. Vol. 20, N 15. P. 5417—5419.
58. Erzan A. Phase transition in the gauge invariant random Potts model//J. Phys. A. 1985. Vol. 18, N 12. P. 2247—2257.
59. Боголюбов Н. Н., Ермилов А. Н., Курбатов А. М., Пронин П. И. Free energy and ordering in random quenched Potts model//Physica. 1985. Vol. 133A, N 5. P. 425—441.
60. Fisher K. H. Static properties of spin glasses//Phys. Rev. Lett. 1975. Vol. 34, N 23. P. 1438—1441.
61. Sherrington D., Southern B. W.//J. Phys. F. 1975. Vol. 5. P. L49.
62. Emery V. J. Critical properties of many-component systems//Phys. Rev. B. 1975. Vol. 11, N 1. P. 239—247.
63. Yasnov D., Fisher M. E.//Phys. Rev. B. 1976. Vol. 13. P. 1112.
64. Ермилов А. Н., Киреев А. Н., Курбатов А. М. Проблемы упорядочения в случайных спиновых системах. Препринт Института теоретической физики ИТФ-83-42Р. Киев, 1983.
65. Ермилов А. Н., Киреев А. Н., Курбатов А. М. Исследование моделей спинового стекла с произвольными распределениями констант связи//Теорет. и матем. физ. 1981. Т. 49, № 3. С. 344—352.
66. Ermilov A. N., Kireev A. N., Kurbatov A. M. Random spin systems with arbitrary distributions of coupling constants and external fields. Variational approach. Preprint of International Centre for Theoretical Physics, IC/82/102. Trieste, 1982.
67. Ермилов А. Н. Упорядочение и фазовые переходы в замороженной модели Поттса//Тр. IV Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1987.
68. Вакаев А. В., Ermilov A. N., Kurbatov A. M. Phase diagram of the three-component stochastic lattice system//Intern. J. Mod. Phys. B. 1988. Vol. 2, N 6. P. 1265—1276.

69. Ermilov A. N., Kireev A. N., Kurbatov A. M. Spin glasses with non-Gaussian distributions. Frustration model. Preprint of International Centre for Theoretical Physics, IC/80/66. Trieste, 1980.
70. Бакаев А. В., Ермилов А. Н., Курбатов А. М. Спиновое стекло в трех-компонентной модели Поттса//Теорет. и матем. физ. 1987. Т. 71, № 2. С. 308—312.
71. Бакаев А. В., Ермилов А. Н., Курбатов А. М. О характере фазового перехода в замороженной модели Поттса. Препринт НИИЯФ МГУ-87-021. М., 1987.
72. Биндер К. Методы Монте-Карло в статистической физике. М.: Мир, 1982.
73. Ермилов А. Н., Киреев А. Н., Курбатов А. М. Некоторые модели спиновых стекол//Теорет. и матем. физ. 1982. Т. 51, № 3. С. 403—406.
74. Ермилов А. Н., Киреев А. Н., Курбатов А. М. Новый метод исследования случайных спиновых систем при произвольных распределениях констант связи. Препринт Института теоретической физики ИТФ-83-13Р. Киев, 1983.
75. Ермилов А. Н., Кабанович В. И. Фазовая диаграмма стохастической фрустрационной модели Изинга. Препринт физического факультета МГУ № 35/1988. М., 1988.