

## СТРУКТУРА ВАКУУМА В КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ И БЕСЦВЕТНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

*А. Н. Тавхелидзе, В. Ф. Токарев*

Институт ядерных исследований АН СССР, Москва

Рассмотрены калибровочные модели в пространстве-времени  $d = 2, 3, 4$ , в которых вакуум имеет сложную структуру. Показано, что учет структуры вакуума приводит к описанию моделей в бесцветных переменных. Методом квазиклассики находятся эффективные лагранжианы, выраженные в этих переменных и учитывающие структуру вакуума явно.

We consider gauge models in  $d = 2, 3, 5$ , which have complex vacuum structure. It is shown that account for the vacuum structure leads to description of these models in terms of colourless variables. In the quasiclassical method frame work effective Lagrangians are formulated in terms of the colourless variables. The Lagrangians include effects of vacuum structure.

### ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что вакуум в некоторых калибровочных теориях имеет периодическую структуру [1, 2].

Это проявляется в том, что функционал энергии кроме тривиального минимума  $A = 0$  имеет бесконечное счетное число минимумов

$$A_1 = \frac{1}{i} U^{-1} \partial U(x), \dots, A_{(n)} = U^{-n} \partial U^n(x), \quad (1)$$

где  $U(x)$  — некоторый элемент из соответствующей калибровочной группы.

Может показаться, что это имеет место в любой калибровочной теории. Действительно, из минимума  $A = 0$  с помощью калибровочного преобразования, не меняющего энергии, можно получить бесконечный набор минимумов  $A_\alpha \neq 0$ . Оператор, выполняющий калибровочное преобразование с параметром  $\alpha(x)$ , имеет вид

$$V = \exp \left\{ i \int \alpha(x) L(x) dx \right\}, \quad L = \partial E - \rho(x), \quad \alpha(\infty) = 0.$$

Однако в калибровочных теориях существуют связи, которые нужно решить, чтобы иметь дело с физическим гамильтонианом и энергией. Уравнение связи имеет вид  $L = 0$  (закон Гаусса).

Но в таком случае мы лишены возможности делать калибровочные преобразования, так как в физическом пространстве генератор

$L \equiv 0$ . Это означает, что мы остаемся лишь с одним минимумом, например,  $A = 0$ .

Существование других минимумов [см. формулу (1)] можно понять, если предположить, что элементу  $U(x)$  соответствует параметр  $\alpha(x)$ , который не убывает на бесконечности  $\alpha(\infty) \neq 0$ . В этом случае условие  $L = 0$  не запрещает существования оператора калибровочного преобразования  $T$ , выполняющего преобразование  $U(x)$  с параметром  $\alpha(x)$ , не убывающим на бесконечности. Поэтому в некоторых теориях может существовать хорошо определенный оператор калибровочного преобразования  $T$ , а значит, и бесконечное количество минимумов (1).

Тогда вакуумное состояние равномерно рассредоточено вблизи минимумов (1). Но в таком случае в теории не может быть заряженных состояний.

Действительно, гамильтониан заряженной частицы есть функция переменной  $\mathbf{p} - e\mathbf{A}$ . Например, для нерелятивистской частицы  $H = (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2/2m$ . Тогда состояние с определенным импульсом  $\mathbf{p}$  не может быть собственным состоянием гамильтониана  $H(\mathbf{p} - e\mathbf{A})$ , поскольку величина  $e\mathbf{A}$  не имеет определенного значения [суперпозиция величин (1)]. Это утверждение можно сформулировать иначе, используя оператор  $T$ .

Поскольку гамильтониан калибровочно-инвариантен,

$$THT^+ = H,$$

а оператор  $T$  унитарен,  $T^+T = 1$ , то он коммутирует с гамильтонианом

$$[T, H] = 0.$$

Это означает, что можно одновременно диагонализировать операторы  $H$  и  $T$ . Обозначим  $e^{i\theta}$  собственное значение унитарного оператора  $T$ . Тогда для основного состояния системы имеем

$$T | \text{vac} \rangle = e^{i\theta} | \text{vac} \rangle. \quad (2)$$

Покажем, что над таким вакуумом не может существовать заряженных возбуждений.

Пусть  $\Phi(x)$  — заряженное поле, которое под действием калибровочного преобразования меняется по закону

$$\begin{aligned} T^+ \Phi(x) T &= U(x) \Phi(x), \\ T^+ \Phi^+(x) T &= \Phi^+(x) U^+(x). \end{aligned} \quad (3)$$

Для двухточечного коррелятора этого поля из формул (2), (3) следует цепочка тождеств

$$\begin{aligned} \langle \text{vac} | \Phi^+(y) \Phi(x) | \text{vac} \rangle &= \langle \text{vac} | T^+ \Phi^+(y) T T^+ \Phi(x) T | \text{vac} \rangle = \\ &= \langle \text{vac} | \Phi^+(y) \Phi(x) | \text{vac} \rangle U^+(y) U(x). \end{aligned} \quad (4)$$

Откуда следует, что этот коррелятор равен  $\text{const} \cdot \delta(x - y)$  либо неопределен. В любом случае это означает, что частица, описываемая

полем  $\Phi$ , не может двигаться. Это связано с тем, что импульс частицы над вакуумом (2) не имеет определенного значения.

Действительно, инвариантность вакуума (2) относительно сдвига оператором  $T$  означает, что вакуум равномерно распределен над всеми минимумами  $A_n$  (1). Если вблизи минимума  $A = 0$  частица описывается волновой функцией с определенным импульсом  $p$ :  $\psi_0(x) \sim \exp(ipx)$ , то вблизи минимума  $A_n$  она будет описываться волновой функцией  $\psi_n = U^n(x) \psi_0$ . Это состояние также имеет определенный импульс, так как фаза, связанная с импульсом, отделяется от фазы  $U^n(x)$ . Но для суперпозиции состояний  $\psi_n(x)$  такое разделение провести уже невозможно, и фаза импульса теряется на фоне флуктуирующей от минимума к минимуму фазы  $U^n(x)$ . Что и означает неопределенность импульса.

Имеются две возможности разрешения трудности, связанной с соотношением (4). Первая — это конфайнмент. В этом случае в спектре наблюдается лишь калибровочно-инвариантное связанное состояние  $\Phi$  и  $\Phi^+$ . Вторая — это «обесцвечивание». В этом случае заряженная переменная  $\Phi$  превращается в нейтральную, калибровочно-инвариантную переменную, которая уже «не чувствует» фазу  $U^n$  и поэтому может двигаться.

Какая из этих двух возможностей реализуется в действительности, определяет динамика.

Другой аспект, связанный со структурой вакуума, есть киральные свойства фермионов. Как правило, в теориях со сложной структурой вакуума фермионы имеют аномалию в киральном токе  $\partial_\mu j_\mu^5 = 2\partial_\mu K_\mu$ , где  $K_\mu$  — топологический ток, причем при переходе из минимума в минимум топологический заряд  $\int K_0 dx$  меняется на единицу. Это означает, что киральный заряд при этом меняется на  $\pm 2$ . Поэтому киральный заряд над  $\theta$ -вакуумом не определен, что может проявиться в появлении кваркового конденсата и массы у физических переменных, связанных с фермионами.

В разд. 1 рассмотрена точно решаемая модель Швингера, в которой имеется конфайнмент заряженных фермионов. На примере этой модели можно понять, как устроен оператор калибровочного преобразования  $T$ , найти лагранжиан модели, выраженный в терминах физических бесцветных переменных, установить операторные тождества, связывающие физические переменные с изначальными, а также проследить связь между киральной аномалией и появлением массы у физических переменных.

В разд. 2 рассмотрена двумерная скалярная электродинамика, в которой реализуется альтернатива конфайнменту — обесцвечивание. Методом квазиклассики проведен учет сложной структуры вакуума и найден эффективный низкоэнергетический лагранжиан, выраженный в терминах физических переменных. Установлены приближенные операторные тождества, связывающие физические переменные с изначальными.

Если модель Швингера по своим свойствам похожа на то, что ожидается в КХД, то скалярная электродинамика по своим свойствам схожа с моделью Вайнберга — Салама.

В разд. 3 рассмотрено объединение этих двух моделей. Результирующая модель имеет свойства как модели Швингера, так и скалярной электродинамики. С одной стороны, в ней имеет место обесцвечивание и эффективный лагранжиан содержит поле бесцветного фермиона, с другой — наличие киральной аномалии приводит к появлению у этого фермиона динамической массы.

В разд. 4 рассмотрена трехмерная модель Джорджа — Глэшоу, в которой, с одной стороны, имеет место конфайнмент и эффективный лагранжиан выражается в терминах бесцветных переменных, а в другой — спонтанно нарушена киральная симметрия и реализуется нелинейная  $\sigma$ -модель.

В разд. 5 рассмотрена квантовая хромодинамика с одним и двумя легкими кварками. Лагранжиан этой модели выражен в терминах бесцветных коллективных переменных, причем эффективный кварк имеет ненулевой хромомagnитный момент, а киральная аномалия проявляется в появлении у этого кварка динамической массы.

Все модели, за исключением модели Швингера, не являются точно решаемыми. В этом случае удобным инструментом для изучения вакуума и возбуждений над ним является метод функционального интегрирования.

Напомним основные положения этого метода на примере квантовой механики частицы в периодическом потенциале.

Гамильтониан частицы имеет вид

$$H = p^2/2 + U(x),$$

где  $U(x)$  — периодическая функция с периодом  $a$ :  $U(x+a) = U(x)$ . Пусть потенциал неотрицателен,  $U \geq 0$ , а его минимумы расположены в точках  $x_n = na$ ;  $U(x_n) = 0$ .

Импульс частицы в этой модели не является квантовым числом, поскольку оператор  $p$  не коммутирует с гамильтонианом. Однако гамильтониан коммутирует с унитарным оператором трансляций  $T = \exp(ipa)$ , поэтому их можно одновременно диагонализировать:

$$\left. \begin{aligned} T |n, \theta\rangle &= e^{-i\theta} |n, \theta\rangle, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \\ H |n, \theta\rangle &= \epsilon_n(\theta) |n, \theta\rangle, \\ \sum_n \int \frac{d\theta}{2\pi} |n, \theta\rangle \langle \theta, n| &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где угол  $\theta$  параметризует собственные состояния унитарного оператора  $T$ , а  $\epsilon_n(\theta)$  обозначен спектр гамильтониана. Состояние с наименьшей энергией называется  $\theta$ -вакуумом. Рассмотрим величину

$$Z = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \langle x_q | e^{-\hat{H}\tau} | x_0 \rangle e^{iq\theta}. \quad (6)$$

Используя свойство оператора трансляции

$$\langle x_0 | T^q = \langle x_q | = \langle qa | ,$$

а также соотношения (5), получаем

$$Z = \sum_q \sum_n \frac{d\alpha}{2\pi} e^{-iq(\alpha-\theta)} e^{-\varepsilon_n(\alpha)\tau} |\langle x_0 | n, \alpha \rangle|^2 = \sum_n e^{-\varepsilon_n(\theta)\tau} |\langle x_0 | n, \theta \rangle|^2.$$

Таким образом, величина  $Z$  непосредственно связана со спектром модели, построенным над  $\theta$ -вакуумом. При  $\tau \rightarrow \infty$  в сумме остается лишь вакуумный вклад:

$$Z \rightarrow e^{-\varepsilon_{\text{vac}}(\theta)\tau} |\langle 0 | \text{vac} \rangle|^2. \quad (7)$$

Удобно представить  $Z$  в виде функционального интеграла. Амплитуда туннелирования из минимума  $x_0 = 0$  в минимум  $x_q$  имеет представление в виде функционального интеграла по траекториям  $x(t)$ , соединяющим эти минимумы:

$$\langle x_q | e^{-H\tau} | x_0 \rangle = \int_{x_0}^{x_q} e^{-S(x)} D(x);$$

$$S = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt \left( \frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) \right).$$

При этом, по определению,

$$q = \frac{1}{a} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \dot{x} dt,$$

откуда с учетом (6) получаем представления для  $Z$ :

$$Z = \sum_q \int_0^{qa} \exp[-S(x) + i\theta q(x)] D(x). \quad (8)$$

Этот интеграл может быть оценен квазиклассическим методом. Для этого нужно найти траекторию, имеющую наименьшее действие:  $\delta S = 0$ .

Обозначим эту траекторию  $\bar{x}$ , а ее действие  $\bar{S}$ . Учитывая траектории, близкие к экстремальной,  $x = \bar{x} + \delta x$ , получаем их вклад в  $Z$ :

$$e^{-\bar{S}} \det^{-1/2} \left( \frac{\delta^2 \bar{S}}{\delta \bar{x} \delta \bar{x}} \right) e^{-iq\theta}. \quad (9)$$

Решение с  $q = 0$  имеет вид  $\bar{x} = 0$ ,  $\bar{S} = 0$ . Его вклад в (9) обозначим  $Z_{p.th} = \det^{-1/2} (-\partial_t^2 + U''(0))$ .

Решение  $\bar{x}_1(t)$ ,  $(-\bar{x}_1(t))$ , соединяющее соседние минимумы потенциала, имеет  $q = +1$  ( $-1$ ) и  $\bar{S}_1 \neq 0$ . Его вклад в  $Z$  дается соответствующей формулой (9).

Отметим, что если  $x_1(t)$  есть решение уравнений движения  $\delta S = 0$ , то функция  $\bar{x}_1(t + \varepsilon)$  также является решением уравнений движения. Это следует из трансляционной инвариантности. Поэтому эти функции также следует просуммировать в  $Z$ . В формуле (9) это проявляется в том, что детерминант содержит нулевую моду. Действительно, используя инвариантность уравнений движения  $\delta S / \delta \bar{x} = 0$  относительно трансляций во времени  $\bar{x}_1(t + \varepsilon) \simeq \bar{x}_1(t) + \varepsilon \bar{x}'_1(t)$ , получаем

$$\int \frac{\delta^2 S}{\delta \bar{x}_1(t) \delta \bar{x}_1(t')} \bar{x}'_1(t') dt' = 0,$$

что и означает существование нулевой моды. Учет нулевой моды следует провести с помощью метода коллективных координат [3, 4].

В результате одноинстантонные вклады можно представить в виде

$$Z_{\pm 1} = Z_{p.th} e^{\pm i\theta} k \int dt, \quad (10)$$

где  $\int dt = \tau$  представляет собой вклад нулевой моды, а константа  $k$  учитывает вклады остальных мод:

$$k = \det'{}^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{\delta^2 S}{\delta \bar{x}_1 \delta \bar{x}_1} \right) \frac{\sqrt{N_0}}{Z_{p.th}} e^{-\bar{S}_1}, \quad (11)$$

где  $N_0 = \int \dot{\bar{x}}_1^2 dt$  — нормировка нулевой моды, а  $\det'$  означает, что нулевая мода в детерминанте не учитывается.

Для учета конфигурации с  $q \neq 0, 1$  воспользуемся приближением разреженного инстантонного газа. Для этого рассмотрим композицию из  $N^+$  инстантонов и  $N^-$  антиинстантонов. Такая конфигурация несет топологическое число  $q = N^+ - N^-$ . Суммируя по  $N^+$ ,  $N^-$ , мы учтем все возможные топологические конфигурации. В результате получим

$$\begin{aligned} Z &= Z_{p.th} \sum_{N^+, N^-} \frac{k^{N^+ + N^-}}{N^+! N^-!} \exp[-i\theta(N^- - N^+)] \tau^{N^+ + N^-} = \\ &= Z_{p.th} \exp[2k \cos(\theta) \tau]. \end{aligned} \quad (12)$$

Сравнивая эту формулу с (7), получаем следующую формулу для энергии вакуума:

$$\varepsilon_{vac}(\theta) = \varepsilon_{p.th} - 2k \cos \theta.$$

В отличие от теории возмущений спектр модели является непрерывным. Это объясняется тем, что, несмотря на потенциальные

барьеры, частица может двигаться, просачиваясь под барьером. Поскольку вероятность туннелирования мала, то эффективная масса частицы будет большая. Действительно, при малых  $\theta$  имеем приближенные равенства:

$$\varepsilon(\theta) \approx \varepsilon_{p,th} + k\theta^2, \quad p \simeq -\theta/a,$$

откуда получаем  $m_{tun} \simeq 1/(2k\lambda^2)$ .

### 1. МОДЕЛЬ ШВИНГЕРА

**А. Операторное решение.** Лагранжиан модели Швингера имеет вид [5]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi, \quad (13)$$

где  $A_\mu$ ,  $\psi$  — электромагнитное и фермионное поля;  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ,  $\mu = 0, 1$ , а двумерные  $\gamma$ -матрицы выбраны в виде

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Уравнения движения, следующие из лагранжиана (1), имеют вид

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = -eJ_\nu, \quad (14)$$

$$i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi = 0. \quad (15)$$

Ток  $J_\mu$  определяется калибровочно-инвариантным образом [5]:

$$J_\mu(x) = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon^2 \neq 0} \{J_\mu(x|\varepsilon) + J_\mu(x|-\varepsilon)\}, \quad (16)$$

$$J_\mu(x|\varepsilon) = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu \exp\left(-ie \int_x^{x+\varepsilon} A_\nu d\xi^\nu\right)\psi(x+\varepsilon).$$

В работе используется поперечная калибровка

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (17)$$

В этой калибровке на поля  $\phi$  и  $A_\mu$  наложены одновременные коммутационные соотношения

$$\{\psi_i(x_1, t), \psi_j^\dagger(y_1, t)\} = +\delta_{ij}\delta(x_1 - y_1), \quad i, j = 1, 2;$$

$$[\partial_0 A_1(x_1, t), A_1(y_1, t)] = -i\delta(x_1 - y_1);$$

$$[\partial_0 A_0(x_1, t), \partial_0 A_1(y_1, t)] = i \frac{\partial}{\partial x^1} \delta(x^1 - y^1),$$

остальные коммутаторы равны нулю.

Операторное решение модели Швингера в поперечной калибровке имеет вид [6]:

$$A_\mu = \frac{\sqrt{\pi}}{e} \varepsilon_{\mu\nu} \partial^\nu (\Sigma + \eta), \quad (18)$$

$$\psi(x) = K : \exp \{ -i \sqrt{\pi} \gamma_5 (\Sigma(x) + \eta(x)) \} : \psi_0(x),$$

$\varepsilon_{01} = \varepsilon_{10} = 1$ , где  $\Sigma$  — свободное псевдоскалярное поле с массой  $m = e/\sqrt{\pi}$ ;  $\eta$  — свободное безмассовое поле, квантуемое с отрицательной метрикой, т. е.

$$[\eta(y^1, t), \partial_0 \eta(x^1, t)] = -i\delta(x^1 - y^1);$$

$\psi_0$  — свободное безмассовое фермионное поле (свободные скалярные и фермионные поля в двумерном пространстве-времени подробно описаны в работах [9]). Отрицательно-частотная часть перестановочной функции поля  $\eta$  равна

$$D^-(x) = -\frac{i}{4\pi} \ln(-\mu^2 x^2 + i\epsilon x_0),$$

где  $\mu$  — произвольный параметр размерности массы [9]. Коэффициент  $K$  в (18) выражается через этот параметр следующим образом:

$$K = (e\gamma/2\mu \sqrt{\pi})^{1/4},$$

где  $\gamma$  — постоянная Эйлера ( $\gamma \simeq 1,781$ ).

Вычисление  $J_\mu$  согласно (16) приводит [6, 10] к выражению

$$J_\mu = j_\mu + \frac{e}{\pi} A_\mu, \quad (19)$$

где  $j_\mu = : \bar{\psi}_0(x) \gamma_\mu \psi_0(x) :$  — ток свободных фермионов, удовлетворяющий уравнениям

$$\partial^\mu j_\mu = 0, \quad \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\mu j_\nu = 0, \quad \partial^2 j_\mu = 0. \quad (20)$$

Строго говоря, подстановка (18) является решением расширенной динамической системы, в которой вместо уравнения Максвелла (14) используется уравнение

$$\varepsilon^{\nu\alpha} \partial_\alpha (\partial^\mu F_{\mu\nu} + eJ_\nu) = 0.$$

Это позволяет исключить из рассмотрения [ см. (19), (20) ] ток свободных фермионов  $j_\mu$ .

Если теперь вернуться к изначальной системе (14), (15), (17), то подстановка (18) удовлетворяет уравнениям (15), (17) тождественно, а уравнение (14) сводится к операторному уравнению

$$L_\mu = 0, \quad (21)$$

где

$$L_\mu = j_\mu + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varepsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \eta. \quad (22)$$



Поскольку исходные операторы  $A_\mu, \psi$  выражаются соотношением (18) через свободные операторы  $\Sigma, \eta, \psi_0$ , то в нашем распоряжении имеется гильбертово пространство состояний

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Sigma) \otimes \mathcal{H}(\eta) \otimes \mathcal{H}(\psi_0).$$

Поскольку во всем этом пространстве поля  $\eta$  и  $\psi_0$  являются независимыми, то соотношение (21) в  $\mathcal{H}$  не выполнено, однако должно существовать подпространство  $\mathcal{H}_{\text{ph}} \subset \mathcal{H}$ , где условие (21) выполняется тождественно. Именно в этом подпространстве подстановка (18) является решением уравнений движения (14), (15).

**Б. Вакуум и наблюдаемые.** Перейдем к построению физического пространства состояний. Операторное уравнение (21) следует понимать в смысле равенства нулю в физическом пространстве всех матричных элементов оператора  $L_\mu$ , т.е.  $\langle \Phi | L_\mu | \Phi' \rangle = 0$  для любых состояний  $|\Phi\rangle$  и  $|\Phi'\rangle$  из физического пространства  $\mathcal{H}_{\text{ph}}$ . Таким образом, в пространстве  $\mathcal{H}$  то уравнение есть уравнение связи, которое накладывает определенные ограничения на векторы состояний.

Их следует [6] наложить в форме

$$L_\mu^- | \Phi \rangle = 0. \quad (23)$$

Здесь  $L_\mu^-$  — отрицательно-частотная часть оператора  $L_\mu$ . Для всех векторов  $|\Phi\rangle$ , удовлетворяющих условию (23), гарантируется выполнение уравнения (21):

$$\langle \Phi | L_\mu | \Phi' \rangle = 0.$$

Определим вакуум в пространстве  $\mathcal{H}$  по формуле

$$\Sigma^- | 0 \rangle = \eta^- | 0 \rangle = \psi_0^- | 0 \rangle = 0.$$

Тогда  $|0\rangle$  есть одно из решений уравнения (23). Остальные векторы  $|\Phi\rangle$  могут быть получены из  $|0\rangle$  действием на него таких операторов  $\hat{\mathcal{O}}$ , которые не выводят  $|0\rangle$  из физического пространства.

Для этого необходимо, чтобы они коммутировали с  $L_\mu^\pm$ :

$$[\hat{\mathcal{O}}, L_\mu^\pm] = 0. \quad (24)$$

Можно показать, что эти операторы строятся из операторов  $\Sigma, \sigma(x), Q_F, \tilde{Q}_5$ . Здесь

$$Q_F = - \int j_0 dx^1; \quad \tilde{Q}_5 = \int j_1 dx^1 \quad (25)$$

— операторы фермионного числа и киральности свободных безмассовых фермионов, а  $\sigma(x)$  определены как [7]:

$$\begin{aligned} \sigma_\pm(x) &= \left( \frac{2\pi}{\mu} \right)^{1/2} \frac{1 \pm \gamma_5}{2} : \exp \{ -i \sqrt{\pi} \gamma_5 \eta(x) - \\ &- i \sqrt{\pi} \tilde{\eta}(x) \} : \psi_0(x) \exp \left( i \frac{\pi}{2} \tilde{Q}_5 \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Непосредственным вычислением можно проверить [7] следующие свойства этих операторов:

$$\left. \begin{aligned} [\sigma_{\pm}(x), \sigma_{\pm}(y)] &= [\sigma_{\pm}(x), \sigma_{\mp}(y)] = 0; \\ [\sigma_{\pm}(x), \sigma_{\pm}^{\pm}(y)] &= [\sigma_{\pm}(x), \sigma_{\mp}^{\pm}(y)] = 0; \\ \sigma_{\pm}(x) \sigma_{\pm}^{\pm}(x) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Коммутативные соотношения унитарных операторов  $\sigma_{\pm}$  с операторами зарядов имеют вид

$$[\sigma_{\pm}, Q_F] = -\sigma_{\pm}, [\sigma_{\pm}, Q_5] = \mp \sigma_{\pm}, \quad (28)$$

откуда следует, что операторы  $\sigma_{\pm}$  несут фермионное число и киральность.

Кроме того,  $\sigma_{\pm}$  в физическом пространстве  $\mathcal{H}_{\text{ph}}$  коммутируют с генераторами трансляций и являются поэтому постоянными унитарными операторами.

Действительно, определяя  $P_{\mu}$  по формуле  $P_{\mu} = \int T_{\mu 0} dx^1$ ,  $T_{\mu\nu}(x) = T_{\mu\nu}(\Sigma) + T_{\mu\nu}(\psi_0) - T_{\mu\nu}(\eta)$ , получаем

$$[P_{\mu} \sigma_{\pm}(x)] = -\pi (L_{\mu} \mp \varepsilon_{\mu\nu} L^{\nu}(x)) \sigma_{\pm}(x).$$

Из условия  $L_{\mu} = 0$  получаем, что в  $\mathcal{H}_{\text{ph}}$ ,  $\sigma_{\pm}$  не зависят от  $x$ .

Отметим, что фермионное поле  $\psi(x)$  (18) не коммутирует с  $L_{\mu}$  и поэтому не принадлежит физическому пространству. Отсюда следует бессмысленность рассмотрения фермионного пропагатора в физическом пространстве.

Единственное, что осталось от фермионов, — это операторы  $\sigma_{\pm}$ , несущие (28) фермионное и киральное числа. Но эти операторы не могут «распространяться», так как в физическом пространстве не зависят от  $x$ . Ясно, что это явление тесно связано с конфайнментом, который имеется в данной модели. Действительно, единственное поле, которое может распространяться, — это нейтральное (бесцветное) поле  $\Sigma(x)$ .

Поскольку поле  $\Sigma$  коммутирует с  $\sigma_{\pm}$ ,  $Q_F$ ,  $\tilde{Q}_5$ , то физическое пространство есть произведение фоковского пространства поля  $\Sigma$  и пространства операторов  $\sigma_{\pm}$ ,  $Q_F$ ,  $\tilde{Q}_5$  с коммутационными соотношениями (27), (28):

$$\mathcal{H}_{\text{ph}} = \mathcal{H}(\Sigma) \otimes \mathcal{H}(\sigma_{\pm}, Q_F, \tilde{Q}_5).$$

Так как гамильтониан коммутирует с  $Q_F$ ,  $Q_5$ , то у этих операторов и гамильтониана существует общий набор собственных векторов. Один из них есть  $|0\rangle$ :

$$Q_F |0\rangle = \tilde{Q}_5 |0\rangle = 0.$$

Из коммутационных соотношений (28) следует, что операторы изменяют фермионное и киральное числа на  $\pm 1$ . Таким образом, базис в пространстве  $\mathcal{H}(\sigma, Q_F, \tilde{Q}_5)$  имеет вид

$$|n_+, n_-\rangle = (\sigma_+)^{n_+} (\sigma_-)^{n_-} |0\rangle.$$

Здесь  $n_{\pm}$  — любые целые числа. Векторы  $|n^+, n^-\rangle$  имеют определенное фермионное число и киральность:

$$\left. \begin{aligned} Q_F |n^+, n^-\rangle &= (n^+ + n^-) |n^+, n^-\rangle, \\ \tilde{Q}_5 |n^+, n^-\rangle &= (n^+ - n^-) |n^+, n^-\rangle. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Поскольку состояние  $|0, 0\rangle$  имеет нулевую энергию, а операторы  $\sigma_{\pm}$  коммутируют с гамильтонианом, то все векторы  $|n^+, n^-\rangle$  имеют нулевую энергию. Таким образом, основное состояние системы вырождено относительно фермионного числа и киральности.

В качестве основного состояния можно выбрать любую линейную суперпозицию состояний  $|n^+, n^-\rangle$ .

В частности, ее можно выбрать так, чтобы одновременно диагонализировать гамильтониан и операторы  $\sigma_{\pm}$ . Это возможно, поскольку гамильтониан коммутирует с  $\sigma_{\pm}$ .

Так как операторы  $\sigma_{\pm}$  унитарные, то уравнение на собственные значения есть

$$\sigma_{\pm}^{\theta_{\pm}} |\theta_+, \theta_-\rangle = \exp(-i\theta_{\pm}) |\theta_+, \theta_-\rangle, \quad (30)$$

$$0 \leq \theta_{\pm} < 2\pi.$$

Решением это уравнения является вектор

$$|\theta_+, \theta_-\rangle = \sum_{n^+, n^-} \exp(in^+\theta_+ + in^-\theta_-) |n^+, n^-\rangle$$

— так называемый  $\theta$ -вакуум [2, 6, 7].

Из соотношений (2.17) следует, что различные  $\theta$ -вакуумы связаны между собой унитарными операторами

$$U_F = \exp(i\alpha Q_F), \quad \tilde{U}_5(\tilde{\alpha}) = \exp(i\tilde{\alpha} \tilde{Q}_5) \quad (31)$$

по формуле

$$|\theta_+ + \alpha + \tilde{\alpha}_+, \theta_- + \alpha - \tilde{\alpha}_-\rangle = U_F(\alpha) \tilde{U}_5(\tilde{\alpha}) |\theta_+, \theta_-\rangle. \quad (32)$$

Поэтому все  $\theta$ -вакуумы эквивалентны, т.е. с помощью унитарных операторов могут быть получены из одного вакуума, например из  $|\theta_+, \theta_-\rangle|_{\theta_{\pm}=0}$ .

Из (32) следует, что после выбора конкретного  $\theta$ -вакуума симметрии (31), связанная с сохраняющимися зарядами  $Q_F, \tilde{Q}_5$ , нарушена, так как вакуум не инвариантен относительно этих преобразований.

Нарушение симметрии проявляется в том, что вакуумное среднее от  $\sigma_{\pm}$ , неинвариантного относительно фазовых преобразований (31)

$$U_F \sigma_{\pm} U_F^{\dagger} = \exp(i\alpha) \sigma_{\pm}; \quad \tilde{U}_5 \sigma_{\pm} \tilde{U}_5^{\dagger} = \exp(\pm i\tilde{\alpha}) \sigma_{\pm}, \quad (33)$$

отлично от нуля:

$$\langle \theta_+, \theta_- | \sigma_{\pm} | \theta_+, \theta_- \rangle = \exp(-i\theta_{\pm}). \quad (34)$$

Таким образом, симметрия спонтанно нарушена, однако голдстоуновские частицы, соответствующие нарушению этой симметрии, в физическом спектре отсутствуют. Это связано с тем, что условия теоремы Голдстоуна в данном случае не выполнены [8].

Действительно, для выполнения теоремы нужно, чтобы преобразованиям (31) соответствовали сохраняющиеся токи. Эти токи суть  $j_{\mu}$  и  $j_{\mu}^5 = \epsilon_{\mu\nu} j^{\nu}$  [(25)] — токи свободных фермионов, но они не коммутируют с  $L_{\mu}$  и поэтому не принадлежат физическому пространству. Именно в этом пункте условия теоремы Голдстоуна не выполнены, так как требуют существования матричных элементов от сохраняющихся токов.

Здесь имеется еще одно интересное обстоятельство, которое мы хотели бы подчеркнуть.

Существование унитарных операторов (31) связано с симметрией лагранжиана (13) относительно фазовых преобразований вида

$$\psi(x) \rightarrow \exp(i\alpha) \psi(x), \quad (35)$$

$$\psi(x) \rightarrow \exp(i\tilde{\alpha}\gamma_5) \psi(x). \quad (36)$$

Действительно, в пространстве  $\mathcal{H}$  операторы (31) как раз и осуществляют эти преобразования:

$$U_F \psi(x) U_F^{\dagger} = e^{i\alpha} \psi(x); \quad U_5 \psi(x) U_5^{\dagger} = e^{i\tilde{\alpha}\gamma_5} \psi(x). \quad (37)$$

По теореме Нётер группе фазовых преобразований (35) соответствует локально сохраняющийся ток  $J_{\mu} = \bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi$ , а группе киральных преобразований — ток  $J_{\mu}^5 = \bar{\psi}\gamma_{\mu}\gamma_5\psi$ .

Отметим, что эти токи связаны между собой:

$$J_{\mu}^5 = \epsilon_{\mu\nu} J^{\nu}. \quad (38)$$

Току  $J_{\mu}$  соответствует сохраняющийся заряд  $Q = - \int J_0 dx^1$ , который мы (по аналогии с КХД) называем цветом. Таким образом, преобразования (35) могут выполняться двумя зарядами  $Q_F$  (37) и  $Q$ .

Однако в физическом пространстве остается лишь один заряд  $Q_F$ . Действительно, из (18), (19) следует

$$J_{\mu} = L_{\mu} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \epsilon_{\mu\nu} \partial^{\nu} \Sigma.$$

Тогда в физическом пространстве, где  $L_\mu = 0$ , оператор цвета есть нулевой оператор:

$$Q = - \int J_0 dx^1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \partial_1 \Sigma dx^1 = 0.$$

Интеграл равен нулю, так как поле  $\Sigma$  массивно и поэтому экспоненциально убывает на больших расстояниях.

Суть полученного результата в том, что  $\mathcal{H}_{ph}$  является пространством бесцветных состояний, а это является необходимым свойством конфайнмента.

Что касается кирального тока  $J_\mu^5$ , то он сохраняется лишь на классическом уровне. На квантовом уровне имеется аномалия

$$\partial_\mu J_\mu^5 = \frac{e}{2\pi} \varepsilon_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (39)$$

Это тождество легко проверяется с помощью (19), (20), (38).

Таким образом, нетеровский заряд  $Q_5 = - \int J_0^5 dx^1$  не сохраняется. Тем не менее имеется сохраняющийся заряд  $\tilde{Q}_5$  (25), который выполняет  $\gamma_5$ -преобразования (33), (37). Как уже указывалось, над  $\theta$ -вакуумом эта симметрия нарушена спонтанным образом.

Из всего изложенного следует, что модель Швингера, будучи калибровочной моделью, сформулированной на языке калибровочных ( $A_\mu$ ) и фермионных ( $\psi$ ) полей, оказывается, в конце концов, эквивалентной теории свободного, массивного, псевдоскалярного поля  $\Sigma$ .

Свойства  $\Sigma$ -бозона тесно связаны с киральными свойствами модели. Из формулы (39) и операторного решения (18) следует тождество, устанавливающее прямую пропорциональность между дивергенцией аксиального тока и поля  $\Sigma$ :

$$\partial_\mu J_\mu^5 = -2f_\Sigma m^2 \Sigma(x), \quad f_\Sigma = 1/2 \sqrt{\pi}. \quad (40)$$

Это соотношение по формуле напоминает тождество частичного сохранения аксиального тока [11], которое имеется в теории сильных взаимодействий на уровне гипотезы.

Кроме того, из операторного решения (18) можно получить представление для составных фермионных операторов через оператор [12]:

$$J(x) = \bar{\psi}(x) \psi(x) = -A : \cos(\Sigma/f_\Sigma + \pi - \theta) :, \quad (41)$$

$$J_5(x) = -i\bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x) = A : \sin(\Sigma/f_\Sigma + \pi - \theta) :$$

Здесь  $A = m\gamma/2\pi$ , а  $\theta = \theta_+ - \theta_-$  связано с собственным значением оператора

$$T = \sigma_+^* \sigma_+ \quad (42)$$

формулой

$$T | \theta_{+}, \theta_{-} \rangle = e^{-i\theta} | \theta_{+}, \theta_{-} \rangle. \quad (43)$$

Из (41) следует, что вакуумные средние от операторов  $J$  и  $J_5$  отличны от нуля:

$$\langle J \rangle = A \cos \theta; \langle J_5 \rangle = A \sin \theta.$$

Сумма квадратов этих величин не зависит от параметра  $\theta$ :

$$\langle J \rangle^2 + \langle J_5 \rangle^2 = A^2.$$

Это соотношение отражает существование окружности равноправных вакуумов, свойства которых подробно были рассмотрены ранее.

Поскольку от  $\theta$  ничего не зависит, то можно положить  $\theta = \pi$ . В этом случае имеется кварковый конденсат

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = -A, \text{ а } \langle \bar{\psi} \gamma_5 \psi \rangle = 0.$$

Рассмотрим теперь формулу (41) при  $\theta = \pi$  в пределе больших расстояний, где  $\Sigma(x)$  экспоненциально мало. Разлагая (41) в ряд по  $\Sigma$ , имеем

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x) \psi(x) &\simeq \langle \bar{\psi} \psi \rangle = \Psi(0) f_{\Sigma}, \\ -i \bar{\psi} \gamma_5 \psi(x) &\simeq \Psi(0) \Sigma(x). \end{aligned} \quad (44)$$

Здесь  $\Psi(0) = -A/f_{\Sigma}$ .

Из (44) видно, что  $\Sigma$ -бозон может рассматриваться как фермион-антифермионное состояние с волновой функцией, в нуле равной  $\Psi(0)$ .

Из сравнения (39), (40) следует, что  $\Sigma$ -бозон может рассматриваться и как псевдоскалярный «глюоний»:

$$\frac{e}{4\pi} \varepsilon_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -f_{\Sigma} m^2 \Sigma(x). \quad (45)$$

**В. Калибровочные преобразования.** В этой части мы прослеживаем связь между уравнением связи  $L_{\mu} = 0$  (22) и требованием калибровочной инвариантности теории. В этом ключе выясняется также смысл операторов  $\sigma_{\pm}$ ,  $T$ .

Рассмотрим в  $\mathcal{H}$  калибровочное преобразование  $U[\alpha(x)]$ :

$$\begin{aligned} U\psi(x)U^+ &= \exp(i\alpha(x))\psi(x), \\ UA_{\mu}U^+ &= A_{\mu}(x) + \frac{1}{e}\partial_{\mu}\alpha(x), \end{aligned} \quad (46)$$

которое оставляет инвариантным условие Лоренца (17). Легко видеть, что для этого необходимо выполнение следующего условия:

$$\partial^2\alpha(x) = 0. \quad (47)$$

Все калибровочные преобразования с калибровочной функцией  $\alpha(x)$ , удовлетворяющей условию (47), поддаются классификации в зависимости от поведения функции  $\alpha(x)$  на бесконечности. Функции  $\alpha(x)$  можно разбить на классы, каждый из которых характеризуется

двумя числами [7]:

$$n_{\pm}[\alpha] = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx^1 [\partial_0 \alpha \mp \partial_1 \alpha]. \quad (48)$$

Смысл этих чисел можно прояснить, заметив, что  $\alpha(x)$  всегда может быть представлена в виде

$$\alpha(x) = \alpha_-(x_-) + \alpha_+(x_+), \\ x_{\pm} = x_0 \pm x^1.$$

Тогда  $n_{\pm}[\alpha]$  определяются асимптотиками этих функций на бесконечности:

$$n_{\pm}[\alpha] = -\frac{1}{\pi} [\alpha_{\mp}(\infty) - \alpha_{\mp}(-\infty)].$$

Докажем, что  $n_{\pm}[\alpha]$  могут быть только целыми.

Из калибровочной инвариантности тока  $J_{\mu}$  (19) и (46) следует закон преобразования для тока  $j_{\mu}$ :

$$U j_{\mu} U^+ = j_{\mu} - \frac{1}{\pi} \partial_{\mu} \alpha,$$

откуда

$$U Q_{\pm} U^+ = Q_{\pm} - n_{\pm}[\alpha], \quad (49)$$

где  $Q_{\pm} = (Q_F \pm \tilde{Q}_3)/2$ .

Из целочисленности спектра операторов  $Q_{\pm}$  и соотношения (49) следует, что  $n_{\pm}[\alpha]$  — целые числа.

Таким образом, на квантовом уровне существуют только такие операторы  $U[\alpha]$ , для которых  $n_{\pm}[\alpha]$  — целые числа.

Из (49) видно также, что оператор  $U[\alpha]$  несет заряды  $Q_{\pm}$ , равные  $n_{\pm}[\alpha]$ , т.е. при  $n_{\pm} \neq 0$  он построен из фермионных полей.

Для  $\alpha(x)$  убывающих на бесконечности ( $n_{\pm}[\alpha] = 0$ ) оператор  $U[\alpha]$  имеет вид [7]:

$$U[\alpha_{\pm}] = \exp \left\{ -i \int dx^1 \alpha_{\pm}(x) [L^0(x) \pm L_1(x)] \right\}, \quad (50)$$

где  $L_{\mu}$  задано формулой (22).

Условие (24) на физические операторы  $\mathcal{O}$  может быть записано в виде

$$U \mathcal{O} U^+ = \mathcal{O}. \quad (51)$$

Это означает, что оператор  $\mathcal{O}$  из  $\mathcal{H}$  может быть переведен в физическое пространство  $\mathcal{H}_{\text{ph}}$ , если в  $\mathcal{H}$  он инвариантен относительно топологически тривиальных ( $n_{\pm}[\alpha] = 0$ ) калибровочных преобразований.

Отметим, что инвариантности относительно калибровочных преобразований с неубывающими  $\alpha(x)$  ( $n[\alpha] \neq 0$ ) не требуется.

Вычисляя коммутатор

$$\left[ \int dx^4 \alpha_{\pm}(x) (L^0 + L_1), \eta^{\pm}(y) \right] = \frac{1}{2\pi} \int \frac{dx^+ \alpha_{\pm}(x_+)}{x_+ - y_+ - i\epsilon},$$

убеждаемся, что оператор  $U[\alpha]$  (50) определен, только если  $\alpha_{\pm} \rightarrow 0$  при  $x^+ \rightarrow \infty$ . Поэтому для  $n_{\pm}[\alpha] \neq 0$  он не определен.

Выясним смысл унитарных (в одной точке) операторов  $\sigma(y)$  (26). Из коммутационных соотношений (28) следует

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\pm}(y) Q_F \sigma_{\pm}^{\pm}(y) &= Q_F - 1, \\ \sigma_{\pm}(y) \tilde{Q}_5 \sigma_{\pm}(y) &= \tilde{Q}_5 \mp 1. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Сравнение этой формулы с (49) указывает на то, что  $\sigma_{\pm}$  суть операторы калибровочного преобразования. Причем топологические числа оператора  $\sigma_{+}(y)$  равны  $n_{+} = 1$ ,  $n_{-} = 0$ , а оператора  $\sigma_{-}(y)$  —  $n_{+} = 0$ ,  $n_{-} = 1$ .

Имея на руках операторное представление (18) и (26), можно [7] вычислить закон преобразования

$$\begin{aligned} \sigma_{\pm}(y) A_{\mu}(x) \sigma_{\pm}^{\pm}(y) &= A_{\mu}(x) + \frac{1}{e} \partial_{\mu} F_{\pm}(x/y); \\ \sigma_{\pm}(y) \psi(x) \sigma_{\pm}^{\pm}(y) &= \exp(iF_{\pm}(x/y)) \psi(x); \\ F_{\pm}(x/y) &= -\pi\theta(x_{\mp} + y_{\mp}) \end{aligned}$$

и убедиться, что это действительно калибровочное преобразование с нужными топологическими числами.

Отметим, что унитарный оператор  $T$  (42) меняет лишь киральность:

$$T \tilde{Q}_5 T^{\dagger} = \tilde{Q}_5 - 2. \quad (53)$$

В заключение нам хотелось бы отметить следующее:

1. Топологически тривиальные калибровочные преобразования (50) в физическое пространство  $\mathcal{H}_{\text{ph}}$ , где  $L_{\mu} = 0$ , не переводятся:

$$U[\alpha] \equiv 1.$$

2. Топологически нетривиальные калибровочные преобразования  $\sigma_{\pm}$ ,  $T$  реализуют симметрию в физическом пространстве.

3. Имеются пары зарядов  $(Q_F, Q)$ ,  $(\tilde{Q}_5, Q_5)$  (25).

4. Физическое пространство есть пространство бесцветных ( $Q \equiv 0$ ) переменных  $\Sigma$ ,  $\sigma_{\pm}$ ,  $Q_F$ ,  $\tilde{Q}_5$ .

5. Аномалия (39) (несохранение  $Q_5$ ) в теории (13) в бесцветных переменных учитывается явно, как появление массы у  $\Sigma$ -бозона [см. (40)].

6. Киральное число  $Q_5$  над  $\theta$ -вакуумом не определено [ср. (43, (53)]. Это приводит к выпадению кваркового конденсата (44).



## 2. ДВУМЕРНАЯ СКАЛЯРНАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Перейдем теперь к рассмотрению скалярного варианта модели Швингера. В этой модели реализуется альтернатива конфинменту — экранирование заряда (обесцвечивание), кроме того, в ней отсутствует вырождение по отношению к параметру  $\theta$ .

Традиционно принято считать, что спонтанное нарушение симметрии играет определяющую роль в механизме появления массы у векторных бозонов. Однако идея о ненарушенности калибровочной симметрии также имеет своих сторонников [13,14].

К данной проблеме имеется несколько различных подходов, мы развиваем подход, основанный на учете эффектов сложной структуры вакуума. На примере скалярной электродинамики в двумерном пространстве-времени показывается, что учет эффектов туннелирования между минимумами, отличающимися друг от друга на калибровочное преобразование, дает возможность перехода к эффективному лагранжиану, содержащему лишь нейтральные поля. Таким образом, показано, что рассмотрение  $\theta$ -вакуума и возбуждений над ним приводит к описанию модели в терминах бесцветных переменных.

Найден спектр масс частиц и показано, что если туннелирование мало, то он оказывается практически таким же, как в фазе Хиггса.

**А. Описание модели.** Лагранжиан скалярной электродинамики в двумерном евклидовом пространстве имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + |D_\mu\varphi|^2 + \frac{\lambda}{2} \left( \varphi^\dagger\varphi - \frac{c^2}{2} \right)^2; \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu; \\ x &= (x_0, x^1), \quad \varphi = (\varphi_1 + i\varphi_2)/\sqrt{2}. \end{aligned} \quad (54)$$

Если сделать стандартное предположение о том, что система сосредоточена вблизи минимума

$$\varphi = c/\sqrt{2}, \quad A_1 = 0, \quad (55)$$

то поле  $A_\mu$  приобретает массу  $m_v = ec$ , а скалярное поле — массу  $m_s = \sqrt{\lambda}c$ .

Однако кроме минимума (55) существует дискретный набор калибровочно-повернутых минимумов

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \exp(i\alpha(x^1)) c/\sqrt{2}, \\ A_1(x) &= \frac{1}{e} \partial_1 \alpha(x^1), \end{aligned} \quad (56)$$

которые характеризуются [3, 15] топологическим числом

$$n[A_1] = \frac{e}{2\pi} \int A_1 dx_1. \quad (57)$$

Требую однозначности поля  $\varphi(x)$  на пространственной бесконечности, получаем ограничение на функцию  $\alpha(x_1)$ :

$$\alpha(\infty) - \alpha(-\infty) = 2\pi m,$$

где  $m$  — целое число.

Из этой формулы и формул (56), (57) получаем, что число  $n[A_1]$  есть целое число, которое является номером минимума.

Обозначим  $T$  оператор калибровочного преобразования, который осуществляет «трансляцию» из минимума (55) с номером  $n[A] = 0$  в минимум (56) с номером  $n[A] = 1$ .

Повторяя рассуждения, проделанные ранее для периодического потенциала, приходим к конструкции  $\theta$ -вакуума.

Для того чтобы написать функциональный интеграл [аналог (8)], нужно описать евклидовские конфигурации  $A_\mu$ , которые соединяют различные минимумы.

Из (57) видно, что число  $n[A]$  можно рассматривать как заряд, построенный из нулевой компоненты тока

$$K_\mu = \frac{e}{2\pi} \varepsilon_{\mu\nu} A_\nu. \quad (58)$$

Изменение числа  $n[A]$  при переходе из  $n = 0$  в  $n = q$  можно вычислить через дивергенцию тока:

$$q = \int \partial_\mu K_\mu d^2x = \frac{e}{4\pi} \int \varepsilon_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^2x = \frac{e}{2\pi} \oint A_\mu dx_\mu. \quad (59)$$

Эта формула есть аналог формулы (14). Отметим, что топологическое число  $q$  выражено через  $A_\mu$  (59) калибровочно-инвариантным образом. В дальнейшем мы будем использовать калибровку Лоренца:

$$\partial_\mu A_\mu = 0. \quad (60)$$

Аналогом формулы (8) будет

$$Z = \int dA d\varphi^+ d\varphi \exp\{-S(A, \varphi) + i\theta q(A)\}, \quad (61)$$

где евклидово действие  $S$  связано с лагранжианом (54) стандартным образом ( $S = \int \mathcal{L} d^2x$ ), а  $q(A)$  дается формулой (59). В интеграле (61) предполагается наличие члена, фиксирующего калибровку (60), а интегрирование проводится по полям, обладающим всеми возможными значениями  $q$ .

Максимальный вклад в  $Z$  дают конфигурации с минимальным действием  $S$ , т.е. удовлетворяющие классическим уравнениям движения  $\delta S = 0$ .

Решение с  $q = 0$  имеет вид  $A_\mu = 0$ ,  $\varphi = c/\sqrt{2}$ ,  $S = 0$ .

Учитывая малые флуктуации вблизи этого решения, получаем хорошо известный ответ:

$$Z_{p.th} = \det^{-1/2}(-\partial^2 + m_s^2) \det^{-1/2}(-\partial^2 + m_s^2). \quad (62)$$

Решения с  $q = \pm 1$  известны [16] как струны Нильсена — Олесе-на.

Основная конфигурация с  $q = 1$  (инстантон) имеет вид

$$A_\mu = \frac{2\pi}{e} \varepsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \Phi(x), \quad (63)$$

$$\varphi(x) = \frac{c}{\sqrt{2}} \exp(i\alpha(x)) (1 - \Psi(x)).$$

Здесь  $\operatorname{tg} \alpha = x_1/x_0$ , а функции  $\Phi$ ,  $\Psi$  удовлетворяют условию  $\Psi(0) = 1$ ,  $\partial_\nu \Phi(0) = 0$ .

Явный вид функций  $\Phi$ ,  $\Psi$  неизвестен, однако асимптотики при  $|x| \gg 1/m_s, 1/m_v$  следуют из уравнений движения:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x) &\simeq D(x) - \beta_v \Delta_v(x), \\ \Psi(x) &\simeq \beta_s \Delta_s(x). \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Здесь  $\beta_{s,v}$  — некоторые константы,

$$D(x) = -\ln(x^2 \mu^2) / 4\pi, \quad \Delta_{v,s} = K_0(m_{s,v} |x|) / 2\pi, \quad (65)$$

$K_0$  — функция Макдональда нулевого порядка,  $\mu$  — некоторая константа размерности массы. Отметим, что  $\mu$ ,  $\beta_{v,s}$  в принципе вычислимы.

Функции  $D$  и  $\Delta_{v,s}$  являются пропагаторами безмассовой и массивной частиц в евклидовом пространстве и удовлетворяют уравнениям

$$-\partial^2 D = \delta(x), \quad (-\partial^2 + m_{v,s}) \Delta_{v,s} = \delta(x). \quad (66)$$

Решение с  $q = -1$  (антиинстантон) получается из (63) заменой  $A \rightarrow -A$ ,  $\varphi \rightarrow \varphi^+$ .

В качестве приближенных решений может быть взята суперпозиция  $N$  далеко разнесенных инстантонов с  $q_i = \pm 1$ :

$$\left. \begin{aligned} A_\mu(x) &= \sum_{i=1}^N \frac{2\pi}{e} \varepsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \Phi(x - x_i) q_i, \\ \varphi(x) &= \frac{c}{\sqrt{2}} \exp\left(i \sum_{i=1}^N \alpha(x - x_i) q_i\right) \prod_{i=1}^N (1 - \Psi(x - x_i)). \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Топологическое число этой конфигурации равно  $q = N^+ - N^-$ , где  $N^+$  ( $N^-$ ) — количество инстантонов с  $q_i = +1$  ( $-1$ ).

Обозначим  $\bar{S}$  действие одноинстантонной конфигурации (63). По порядку величины  $\bar{S} = \mathcal{O}(c^2)$ . Будем считать  $c$  достаточно большим числом. В этом случае применение метода квазиклассики оправдано.

По аналогии с (10) представим одноинстантонный вклад в (61) в виде

$$Z_1 = Z_{p.th} e^{i\theta k} \int d^2 x_1. \quad (68)$$

Здесь  $k = \exp(-\bar{S}) \text{const}$ , а  $\text{const}$  представляет собой отношение соответствующих детерминантов [см. (11)], из которых исключена нулевая мода, связанная с трансляционной инвариантностью. Нулевая мода выделена в (68) явно в виде интеграла по положению центра инстантона  $x_1$ .

Для учета вклада конфигураций (67) в функциональный интеграл (61) необходимо оценить действие  $S(A, \varphi)$  этих конфигураций. Для этого нужно подставить поля (67) в формулу (54) и вычислить интеграл.

Ответ представим в виде

$$S_N = \bar{S}N + U_N(x_i - x_j), \quad (69)$$

где первый член — сумма действий отдельных инстантонов, а второй описывает отклонение от этого закона. Если инстантоны расположены далеко друг от друга ( $|x_i - x_j| \rightarrow \infty$ ), то потенциал взаимодействия  $U_N$  стремится к нулю.

Мы приведем метод вычисления  $U_N$ , в котором не требуется явно вычислять какие-либо интегралы. Это означает, что вид  $U_N$  на больших расстояниях полностью определяется структурой теории. Затем этот метод будет продемонстрирован на примере КХД.

Для вычисления действия удобно воспользоваться калибровкой, в которой поле  $\varphi$  в (67) — число действительное. Поскольку действие калибровочно-инвариантно, то это не повлияет на ответ. Нужно, правда, иметь в виду, что такая калибровка сингулярна из-за неопределенности фазы  $\alpha(x - x_i)$  в точке  $x = x_i$ . Поэтому, строго говоря, она не является калибровкой вообще. Но при вычислении  $S_N$  можно убедиться, что сингулярности не дают вклада и поэтому несущественны.

Несколько позже мы приведем пример, где использование такого «калибровочного» преобразования невозможно (см. разд. 3).

А пока, замечая, что при  $x \neq x_i$  имеет место тождество

$$\partial_\mu \alpha(x - x_i) = 2\pi \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\nu D(x - x_i),$$

приводим конфигурации (67) к виду

$$\left. \begin{aligned} A_\mu &= \sum_{i=1}^N \frac{2\pi}{e} \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\nu (\Phi(x - x_i) - D(x - x_i)) q_i, \\ \varphi &= \frac{c}{\sqrt{2}} \prod_{i=1}^N (1 - \Psi(x - x_i)). \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

В этой калибровке поле  $A_\mu$  экспоненциально мало на больших расстояниях.

Рассмотрим для простоты два инстантона ( $N = 2$ ) с зарядами  $q_1$  и  $q_2$ . Нам нужно выделить из интеграла член, зависящий от положения инстантонов  $x_1$  и  $x_2$ .

Разобьем плоскость интегрирования « $x$ » на три части (рис. 1). Область I ограничена окружностью  $S_1$ , концентричной с первым инстантоном. Радиус окружности заключен в интервале  $1/m_{v,s} \ll R \ll |x_1 - x_2|$ . Область II ограничена окружностью  $S_2$ , концентричной со вторым инстантоном. Область III — оставшаяся часть плоскости.

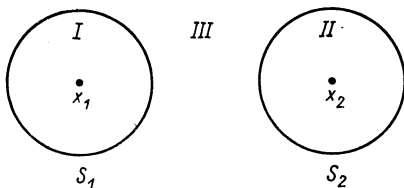


Рис. 1. Области интегрирования:  $S_1, S_2$  — окружности, ограничивающие области интегрирования I, II, III;  $x_1, x_2$  — положения центров инстантонов

Обозначим через  $\Delta S_I, \Delta S_{II}, \Delta S_{III}$  части энергии взаимодействия, набирающиеся соответственно в областях I, II, III. Вычислим  $\Delta S_I$ . В области I влияние второго инстантона сводится к малым до-

бавкам к полям  $A$  и  $\varphi$ , создаваемым первым инстантоном (70):

$$\left. \begin{aligned} \delta A_\mu^{(2)} &= q_2 \frac{2\pi}{e} \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\nu (-\beta_v \Delta_v (x - x_2)), \\ \delta \varphi^{(2)} &= \frac{c}{\sqrt{2}} (1 - \Psi(x - x_1)) (-\beta_s \Delta_s (x - x_2)). \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Влияние добавок на действие  $S$  в первом порядке определяется вариацией  $\delta S$  на фоне первого инстантона. Но в области I выполняются уравнения движения, поэтому там  $\delta S = 0$ . Однако остаются поверхностные члены, которые имеют вид

$$\Delta S_I = \delta S = \int_{S_1} d\sigma^h \left[ \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \varphi, h} \delta \varphi^{(2)} + \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial A_\mu, h} \delta A_\mu^{(2)} \right]. \quad (72)$$

Здесь  $d\sigma^h$  — элемент границы  $S_1$ , который направлен по внешней нормали  $S_1$ .

«Канонические импульсы» полей легко находятся из лагранжиана:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \varphi, h} &= 2\partial_h \varphi^{(1)} = -\sqrt{2} c\beta_s \partial_h \Delta_s (x - x_1), \\ \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial A_\mu, h} &= F_{h\mu}^{(1)} = -\varepsilon_{h\mu} \frac{2\pi}{e} \partial^2 \Phi = q_1 \frac{2\pi}{e} \beta_v m_v^2 \Delta_v (x - x_1). \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Мы здесь взяли асимптотики полей, поскольку нам нужно знать эти величины лишь на окружности  $S_1$ , где выход на асимптотику гарантирован ( $R \gg 1/m_v$ ).

По этой же причине функцию  $\Psi(x - x_1)$  в формуле  $\delta \varphi^{(2)}$  (71) нужно считать равной нулю.

Из требования симметрии получаем для области II выражение, аналогичное (72):

$$\Delta S_{II} = \delta S = \oint_{S_2} d\sigma^i \left[ \frac{\partial \mathcal{L}^{(2)}}{\partial \varphi, i} \delta \varphi^{(1)} + \frac{\partial \mathcal{L}^{(2)}}{\partial A_\mu, i} \delta A_\mu^{(1)} \right].$$

Здесь  $\delta\varphi^{(1)}$ ,  $\delta A^{(1)}$  — малые в области II поля первого инстантона даются формулами, аналогичными (71), а канонические импульсы второго инстантона даются формулами, аналогичными (73).

Что касается области III, то там оба инстантона выходят на асимптотику, поэтому любой из них может рассматриваться как возмущение. Будем рассматривать как возмущение поля первого инстантона  $\delta\varphi^{(1)}$   $\delta A^{(1)}$ .

Поскольку уравнения движения для отдельного инстантона (второго) в области III также выполняются, то, как и прежде, остаются лишь поверхностные члены. Единственное отличие состоит в том, что теперь граница области состоит из двух частей и нормами к ним направлены в другую сторону, чем в областях I и II. Поэтому

$$\Delta S_{III} = - \oint_{S_1} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}^{(2)}}{\partial \varphi; i} \delta\varphi^{(1)} + \frac{\partial \mathcal{L}^{(2)}}{\partial A_{\mu; i}} \delta A_{\mu}^{(1)} \right] d\sigma^i - \\ - \oint_S d\sigma^i \left[ \frac{\partial \mathcal{L}^{(2)}}{\partial \varphi; i} \delta\varphi^{(1)} + \frac{\partial \mathcal{L}^{(2)}}{\partial A_{\mu; i}} \delta A_{\mu}^{(1)} \right].$$

В результате получаем

$$\Delta S = \oint_{S_1} d\sigma_i \left[ \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \varphi; i} \delta\varphi^{(2)} + \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial A_{\mu; i}} \delta A_{\mu}^{(2)} - \frac{\partial \mathcal{L}^{(2)}}{\partial \varphi; i} \delta\varphi^{(1)} - \frac{\partial \mathcal{L}^{(2)}}{\partial A_{\mu; i}} \delta A_{\mu}^{(1)} \right]. \quad (74)$$

Таким образом, энергия взаимодействия выражена через асимптотики полей на больших расстояниях. Подставляя в эту формулу асимптотики (71), (73), получаем

$$\Delta S_1 = \left( \frac{2\pi}{e} \right)^2 \beta_s^2 m_v^2 q_1 q_2 (I_2^v - I_1^v) - c^2 \beta_s^2 (I_2^s - I_1^s),$$

где введены обозначения

$$I_1^{v, s} = \oint_{S_1} d\sigma_i \partial_i \Delta^{v, s}(x - x_1) \Delta^{v, s}(x - x_2);$$

$$I_2^{v, s} = \oint_{S_1} d\sigma_i \partial_i \Delta^{v, s}(x - x_2) \Delta^{v, s}(x - x_1).$$

Для нахождения  $I_2 - I_1$  рассмотрим следующий интеграл по области I:

$$\int_I \{ \partial_{\mu} \Delta^{v, s}(x - x_1) \partial_{\mu} \Delta^{v, s}(x_1 - x_2) + m_{v, s}^2 \Delta^{v, s}(x - x_1) \Delta^{v, s}(x - x_2) \} d^2x.$$

Будем интегрировать по частям двумя способами, по-разному перебрасывая производные в первом члене этого интеграла. Тогда, учитывая определение пропагатора  $(-\partial^2 + m_{v, s}^2) \Delta^{v, s} = \delta(x)$ , легко понять, что в одном случае сингулярность  $\delta(x - x_1)$  попадает в область интегрирования, а в другом  $\delta(x - x_2)$  не попадает. Сравнение этих

способов интегрирования приводит к тождеству

$$I_2^{v,s} - I_1^{v,s} = \Delta^{v,s} (x_1 - x_2).$$

Таким образом, энергия взаимодействия выражается через пропагаторы  $\Delta_{v,s}$ :

$$U_{q_i q_j} = q_i q_j (2\pi c \beta_v)^2 \Delta_v (x_i - x_j) - (c \beta_s)^2 \Delta_s (x_i - x_j). \quad (75)$$

Полная энергия взаимодействия будет

$$U_N = \sum_{i < j}^N U_{q_i q_j} (x_i - x_j). \quad (76)$$

Теперь мы готовы к тому, чтобы выписать вклад произвольной  $N$  — инстантонной конфигурации (67) в функциональный интеграл  $Z$  (64).

По аналогии с квантовомеханической моделью (12) с учетом (61), (68), (69) имеем

$$Z = Z_{p.th} \sum_{N^+, N^-} \frac{k^{N^+ + N^-} \exp[i\theta(N^+ - N^-)]}{N^+! N^-!} \int e^{-U_N} \prod_{i=1}^{N^+} d^2 x_i^+ \prod_{i=1}^{N^-} d^2 x_i^-, \quad (77)$$

где  $U_N$  задан формулами (75), (76).

Формально  $Z$  можно рассматривать как большую статистическую сумму газа классических частиц двух сортов (+, —), помещенных в двумерное евклидово пространство. Частицы взаимодействуют между собой посредством юкавских сил (75) и имеют химическую активность, равную  $k$ . Химический потенциал  $\mu$  связан с химической активностью формулой

$$k = \exp(\mu). \quad (78)$$

Систему (77) можно изучать стандартными методами классической статистической физики. Но, оказывается, имеется другой способ.

Докажем, что система (77) эквивалентна некоторой квантовой теории поля в двумерном евклидовом пространстве.

**Б. Эффективный лагранжиан.** Здесь мы найдем эффективный низкоэнергетический лагранжиан модели (54), который явно учитывает эффекты сложной структуры вакуума.

Эти эффекты приводят к тому, что лагранжиан выражается в терминах бесцветных переменных. А именно, он содержит скалярное поле  $\rho(x)$  и псевдоскалярное поле  $\Sigma(x)$ :

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \Sigma)^2 + \frac{m_\rho^2}{2} \Sigma^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \rho)^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho^2 + \mathcal{L}^+ + \mathcal{L}^-, \quad (79)$$

где лагранжиан взаимодействия имеет вид

$$\mathcal{L}^\pm = -k \exp(\pm i\Sigma/F_\Sigma + \rho/F_\rho \pm i\theta), \quad (80)$$

$$F_\rho = (c\beta_s)^{-1}, \quad F_\Sigma = (2\pi c\beta_v)^{-1}. \quad (81)$$

Докажем, что система с таким лагранжианом эквивалента системе (57). Для этого рассмотрим функциональный интеграл

$$Z_{\text{eff}} = \int d\Sigma d\rho \exp \left( - \int d^2x \mathcal{L}_{\text{eff}} \right). \quad (82)$$

Эффективное действие в формуле (82) можно представить в виде суммы свободного действия  $S_0(\Sigma, \rho)$  и членов взаимодействия:

$$S_{\text{eff}} = S_0 + \int \mathcal{L}^+ d^2x + \int \mathcal{L}^- d^2x.$$

Разложим экспоненту в формуле (82) в двойной ряд по степеням взаимодействия:

$$\begin{aligned} \exp(-S_{\text{eff}}) &= e^{-S_0} \sum_{N^+ N^-} \frac{1}{N^+! N^-!} \prod_{i=1}^{N^+} \left\{ - \int \mathcal{L}^+(x_i^+) d^2x_i^+ \right\} \times \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{N^-} \left\{ - \int \mathcal{L}^-(x_i^-) d^2x_i^- \right\}. \end{aligned}$$

Используя явный вид лагранжиана взаимодействия  $\mathcal{L}^\pm$  (80), это разложение можно привести к виду

$$\begin{aligned} e^{-S_{\text{eff}}} &= e^{-S_0} \sum_{N^+, N^-} \int \frac{k^{N^++N^-}}{N^+! N^-!} \times \\ &\quad \times e^{i\theta(N^+-N^-)} \prod_{i=1}^{N^+} \exp \left\{ \rho(x_i^+)/F_\rho + i\Sigma(x_i^+)/F_\Sigma \right\} d^2x_i^+ \times \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{N^-} \exp \left\{ \rho(x_i^-)/F_\rho - i\Sigma(x_i^-)/F_\Sigma \right\} d^2x_i^- = \\ &= e^{-S_0} \sum_{N^+ N^-} \frac{k^{N^++N^-}}{N^+! N^-!} e^{i\theta(N^+-N^-)} \times \\ &\quad \times \exp \left\{ \int \rho(x) J_\rho(x) d^2x + \int \Sigma(x) J_\Sigma(x) d^2x \right\} \times \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{N^+} d^2x_i^+ \prod_{i=1}^{N^-} d^2x_i^-. \end{aligned} \quad (83)$$

Здесь введены обозначения:

$$\left. \begin{aligned} J_\rho(x) &= \left( \sum_{i=1}^{N^+} \delta(x-x_i^+) + \sum_{i=1}^{N^-} \delta(x-x_i^-) \right) / F_\rho; \\ J_\Sigma(x) &= \left( \sum_{i=1}^{N^+} \delta(x-x_i^+) - \sum_{i=1}^{N^-} \delta(x-x_i^-) \right) \frac{i}{F_\Sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (84)$$



Из (83) следует, что интеграл по полям  $\Sigma$ ,  $\rho$  стал явно гауссовым и легко вычисляется по формуле

$$\int d\Sigma d\rho e^{-S_0} \exp \left\{ \int d^2x (\rho(x) J_\rho(x) + \Sigma(x) J_\Sigma(x)) \right\} = Z_{p. th} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d^2x d^2x' [J_\rho(x) \Delta^s(x-x') J_\rho(x') + J_\Sigma(x) \Delta^v(x-x') J_\Sigma(x')] \right\}, \quad (85)$$

где  $Z_{p. th}$  дается формулой (62), а  $\Delta^{v,s}$  — формулами (66). Из явного вида токов (84) следует, что формула (85) воспроизводит потенциал взаимодействия

$$Z_{p. th} e^{-U_N}, \quad (86)$$

где  $U_N$  определено формулами (75), (76). Собирая вместе формулы (82), (83), (85), (86), получаем, что  $Z_{eff}$  (82) совпадает со статистической суммой  $Z$  (77):

$$Z_{eff} = Z.$$

Таким образом, в приближении разреженного инстантонного газа (область больших расстояний или низкоэнергетический предел исследуемая модель (61) эквивалентна статистической системе (77), которая, в свою очередь, эквивалентна теории (79), (82).

Из лагранжиана (79) можно найти энергию  $\theta$ -вакуума и спектр возбуждений над ним. С этой целью исследуем на минимум потенциальную часть лагранжиана (79):

$$U_{eff} = \frac{1}{2} m_v^2 \Sigma^2 + \frac{1}{2} m_s^2 \rho^2 - 2k \cos \left( \frac{\Sigma}{F_\Sigma} + \theta \right) e^{\rho/F_\rho}. \quad (87)$$

Из этого выражения видно, что поле  $\rho$  всегда имеет ненулевой конденсат  $\rho_0$ , а поле  $\Sigma$  — ненулевой конденсат только при  $\theta \neq 0$ . Поскольку приближение разреженного инстантонного газа справедливо при  $k \ll m_{v,s}^2$ , то в этом случае конденсаты малы:

$$\rho_0 \simeq \frac{2k}{m_s^2 F_\rho} \cos \theta; \quad \Sigma_0 \simeq - \frac{2k}{m_s^2 F_\Sigma} \sin \theta. \quad (88)$$

Значение потенциала  $U_{eff}$  в минимуме дает плотность энергии вакуума:

$$\varepsilon_{vac} \simeq - 2k \cos \theta. \quad (89)$$

Вторые производные эффективного потенциала в минимуме дают массы полей  $\Sigma$  и  $\rho$ :

$$m_\Sigma^2 \simeq m_v^2 + \frac{2k}{F_\Sigma^2} \cos \theta, \quad m_\rho^2 \simeq m_s^2 - \frac{2k}{F_\rho^2} \cos \theta. \quad (90)$$

Формулы (89), (90) определяют спектр системы (54) над  $\theta$ -вакуумом. В дальнейшем для простоты мы ограничимся случаем  $\theta = 0$ , когда энергия вакуума (89) — минимальна.

Теперь нам нужно показать, что с помощью лагранжиана (79) можно вычислять функции Грина для калибровочно-инвариантных операторов, построенных из изначальных полей  $A_\mu$ ,  $\varphi$  (54), и убедиться, что положение полюсов в них определяется массами полей  $\Sigma$  и  $\rho$  (90).

Понятно, что функции Грина связаны с корреляционными функциями статистической системы (77). В дальнейшем мы убедимся, что  $s$ -частичная функция Грина непосредственно связана с  $s$ -частичной статистической функцией распределения.

Функции распределения определяются статистическими средними от операторов плотности инстантонов, которые имеют вид

$$\hat{n}^+(x) = \sum_{i=1}^{N^+} \delta(x - x_i^+), \quad \hat{n}^-(x) = \sum_{i=1}^{N^-} \delta(x - x_i^-), \quad (91)$$

$$\hat{n}(x) = \hat{n}^+(x) + \hat{n}^-(x).$$

Статистические средние операторов определяются путем введения этих операторов под знак статистической суммы (77).

Для единообразного описания этих средних введем в статистическую систему (77) добавочный неоднородный химический потенциал  $\mu^\pm(x)$  по формуле

$$Z(\mu^\pm) = Z_{p.th} \sum_{N^+N^-} \int \frac{k^{N^++N^-} e^{-U_N}}{N^+! N^-!} \prod_{i=1}^{N^+} e^{\mu^+(x_i^+)} d^2x_i^+ \prod_{i=1}^{N^-} e^{\mu^-(x_i^-)} d^2x_i^-. \quad (92)$$

Мы здесь положили  $\theta = 0$ , хотя это не принципиально.

Из явного вида (92) функционала  $Z(\mu^+, \mu^-)$  следует, что он является производящим функционалом для статистических средних операторов плотности  $\hat{n}^\pm(y)$ :

$$\langle\langle \hat{n}^+(y_1) \hat{n}^+(y_2) \dots \hat{n}^-(y_m) \rangle\rangle = \frac{1}{Z} \frac{\delta^m Z[\mu^+, \mu^-]}{\delta\mu^+(y_1) \delta\mu^+(y_2) \dots \delta\mu^-(y_m)} \Big|_{\mu^\pm=0}. \quad (93)$$

Корреляции операторов плотности (93) можно изучать методами статфизики, например методом цепочек Боголюбова. Однако более простой способ основывается на том, что функционал  $Z(\mu^+, \mu^-)$  (92) может быть представлен в виде функционального интеграла (82)  $Z_{eff}(\mu^+, \mu^-)$ . Единственное отличие от (82) состоит в том, что теперь лагранжиан взаимодействия будет зависеть от  $\mu^\pm$ :

$$\mathcal{L}^\pm(\mu^\pm) = -k \exp\{\rho(x)/F_\rho \pm i\Sigma(x)/F_\Sigma + \mu^\pm(x)\}. \quad (94)$$

Это легко понять, сравнивая формулу (77) с (92): последняя получается из предыдущей заменой

$$k \rightarrow k \exp(\mu^\pm(x)).$$

Осуществляя такую замену в формуле (80), приходим к формуле (94).

Поскольку  $Z(\mu^+, \mu^-)$  представлен в виде функционального интеграла (82)  $Z_{\text{eff}}(\mu^+, \mu^-)$ , то на основании формулы (93) все сводится к теории поля (79), (94) с источниками  $\mu^\pm(x)$ .

Продемонстрируем это на примере одно- и двухчастичного корреляторов (93).

Одночастичный коррелятор, определяющий среднюю плотность инстантонов, получается из формул (79), (82), (93), (94) в виде

$$\langle \hat{n}^\pm(x) \rangle = k \langle \exp(\rho(x)/F_\rho \pm i\Sigma(x)/F_\Sigma) \rangle, \quad (95)$$

где среднее  $\langle \quad \rangle$  понимается как усреднение по полям  $\Sigma$  и  $\rho$  под знаком функционального интеграла (82).

Развивая теорию возмущений для эффективного лагранжиана вблизи минимума (88) при  $\theta = 0$ , получаем из (95) плотность инстантонов

$$\left. \begin{aligned} n^\pm &= \langle \hat{n}^\pm \rangle = k \exp(\rho_0/F_\rho) \approx k; \\ n &= \langle \hat{n} \rangle = 2n^+ = 2k. \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

Найдем теперь двухчастичные корреляторы. Из (93), (94) получаем

$$\langle \hat{n}^\pm(x) \hat{n}^\pm(y) \rangle = \delta(x-y) \langle \hat{n}^\pm \rangle + k^2 \langle \exp\{\rho(x)/F_\rho \pm i\Sigma(x)/F_\Sigma\} \times \exp\{\rho(y)/F_\rho \pm i\Sigma(y)/F_\Sigma\} \rangle.$$

В главном порядке по взаимодействию это сводится к усреднению по свободным полям с массами  $m_\Sigma, m_\rho$  (90) и приводит к ответу

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}^\pm(x) \hat{n}^\pm(y) \rangle &= \delta(x-y) \frac{n}{2} + \\ &+ \left(\frac{n}{2}\right)^2 \exp\{\Delta_\rho(x-y)/F_\rho^2 - \Delta_\Sigma(x-y)/F_\Sigma^2\}, \end{aligned} \quad (97)$$

где  $n$  определено формулой (96), а  $\Delta_{\Sigma, \rho}$  — суть пропагаторы частиц  $\Sigma, \rho$ , удовлетворяющие уравнениям (66) с массами  $m_{\Sigma, \rho}$  (90) соответственно.

Аналогично получаем

$$\langle \hat{n}^+(x) \hat{n}^-(y) \rangle = \left(\frac{n}{2}\right)^2 \exp\left\{\frac{\Delta_\rho(x-y)}{F_\rho^2} + \frac{\Delta_\Sigma(x-y)}{F_\Sigma^2}\right\}. \quad (98)$$

Легко проверить, что в области больших расстояний, где функции  $\Delta_{\Sigma, \rho}$  малы, найденные корреляторы удовлетворяют принципу ослабления корреляций.

**В. Функции Грина.** Здесь мы вычислим двухточечные функции Грина для калибровочно-инвариантных операторов

$$q(x) = \frac{e}{4\pi} \varepsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x), \quad \varphi^+(x) \varphi(x)$$

и убедимся, что частицы  $\Sigma$  и  $\rho$  проявляются в них как полюсы.

Для оператора плотности топологического числа в приближении разреженного газа (67) имеем

$$q(x) = - \int \partial^2 \Phi(x-z) (\hat{n}^+(z) - \hat{n}^-(z)) d^2z, \quad (99)$$

где  $\hat{n}^\pm$  определены формулой (91).

Из формул (96) легко получаем  $\langle q(x) \rangle = 0$ . Отметим, что нулевой конденсат  $q$  получается лишь при  $\theta = 0$ .

Для двухточечной функции Грина получаем из (99)

$$\begin{aligned} \langle q(x) q(y) \rangle &= \int \partial^2 \Phi(x-u) \partial^2 \Phi(y-v) d^2u d^2v \times \\ &\times \langle \langle (\hat{n}^+(u) - \hat{n}^-(u)) (\hat{n}^+(v) - \hat{n}^-(v)) \rangle \rangle \simeq \\ &\simeq \int \partial^2 \Phi(x-u) \partial^2 \Phi(y-v) d^2u d^2v \times \\ &\times \left\{ n \delta(u-v) - \left( \frac{n}{F_\Sigma} \right)^2 \Delta_\Sigma(u-v) \right\}. \end{aligned} \quad (100)$$

При получении этой формулы мы воспользовались формулами для средних (97), (98), предварительно разложив их в ряд по степеням  $\Delta_{\Sigma, \rho}$ . Такое разложение позволяет выделить полюсный вклад в корреляторе (100), и оно законно при больших  $|x - y|$ , где  $\Delta_{\Sigma, \rho}(x - y)$  малы.

Удобно записать (100) в виде равенства соответствующих компонент Фурье с импульсом  $p$ :

$$\langle q(p) q(-p) \rangle = (\partial^2 \Phi(p))^2 n \frac{m_v^2 + p^2}{p^2 + m_\Sigma^2}. \quad (101)$$

Здесь использовалась формула для массы  $m_\Sigma$  (90), которую с учетом (96) можно записать в виде

$$m_\Sigma^2 = m_v^2 + n/F_\Sigma^2.$$

Учитывая асимптотику  $\Phi(x)$  на больших расстояниях (64), получаем  $\partial^2 \Phi(x) \simeq -\beta_v m_v^2 \Delta_v(x)$ , или в  $p$ -пространстве

$$\partial^2 \Phi(p) \simeq -\beta_v \frac{m_v^2}{p^2 + m_v^2}.$$

В результате имеем

$$\langle q(p) q(-p) \rangle \simeq (\beta_v m_v^2 F_\Sigma)^2 \frac{m_\Sigma^2 - m_v^2}{(p^2 + m_\Sigma^2)(p^2 + m_v^2)}. \quad (102)$$

Откуда видно, что имеется два полюса в близких точках. Вычеты в этих полюсах равны по модулю, но противоположны по знаку, поэтому один из полюсов не является физическим.

Покажем, что физическим является полюс  $m_\Sigma^2$ . При вычислении функции Грина (100) мы ограничились по существу лишь классическими вкладами (99) и пренебрегли флуктуациями вокруг них.

В первом приближении этот вклад можно учесть, развивая теорию возмущения вблизи минимума (55):

$$\langle q(p) q(-p) \rangle_{p, \text{th}} = \left( \frac{e}{2\pi} \right)^2 \frac{p^2}{p^2 + m_v^2} = \frac{(\beta_v m_v^2 F_\Sigma)^2 p^2}{m_v^2 (p^2 + m_v^2)}.$$

Прибавляя этот вклад к (102), получаем окончательный ответ:

$$\langle q(p) q(-p) \rangle = (\beta_v m_v^2 F_\Sigma)^2 \frac{p^2 + m_\Sigma^2 - m_v^2}{(p^2 + m_\Sigma^2) m_v^2}. \quad (103)$$

Вычет в полюсе равен  $(-\beta_v^2 m_v^4 F_\Sigma^2)$ . Отрицательный знак вычета не противоречит условию положительности спектральной функции для коррелятора (103), поскольку при переводе (103) в пространство Минковского нужно учесть, что псевдоскалярный оператор  $q$  связан с соответствующим оператором  $q_M$  в пространстве Минковского формулой  $q_M = iq$ . Мнимая единица в этой формуле объясняет «неправильный» знак вычета в пространстве Евклида.

Вблизи полюса формулу (103) можно воспроизвести с помощью приближенного операторного равенства

$$q_M(x) = \frac{e}{4\pi} \varepsilon_{\mu\nu} F^{\mu\nu}(x) \simeq \beta_v m_v^2 F_\Sigma \Sigma(x). \quad (104)$$

Интересно сравнить это равенство с соответствующим тождеством в модели Швингера (45).

Перейдем в обсуждению оператора  $\varphi^+\varphi$ . В рамках используемого приближения (67), (70) этот оператор имеет вид

$$\varphi^2(x) = \varphi^+\varphi(x) = \frac{c^2}{2} \prod_i (1 - \Psi(x - x_i))^2.$$

Считая газ разреженным, его можно приблизительно аппроксимировать формулой

$$\begin{aligned} \varphi^2(x) &\simeq \frac{c^2}{2} \left\{ 1 - \sum_{i=1}^N (2\Psi(x - x_i) - \Psi^2(x - x_i)) \right\} = \\ &= \frac{c^2}{2} \left\{ 1 - \int (2\Psi(x - x_1) - \Psi^2(x - x_1)) \hat{n}(x_1) d^2x_1 \right\}, \end{aligned} \quad (105)$$

где оператор  $\hat{n}$  определен формулой (91). Усредняя это соотношение с помощью (96), получаем величину скалярного конденсата

$$\langle \varphi^2(x) \rangle \simeq \frac{c^2}{2} \left\{ 1 - n \int (2\Psi(x) - \Psi^2(x)) d^2x \right\}. \quad (106)$$

С помощью представления (105) и формул усреднения (97), (98) легко вычислить и двухточечную функцию

$$\begin{aligned} \langle \varphi^2(x) \varphi^2(y) \rangle &= \langle \varphi^2 \rangle^2 + \int \{ 2\Psi(x - u) - \Psi^2(x - u) \} \{ n\delta(u - v) + \\ &+ \frac{n^2}{F_\rho^2} \Delta_\rho(u - v) \} \{ 2\Psi(y - v) - \Psi^2(y - v) \} d^2u d^2v. \end{aligned} \quad (107)$$

Здесь, как и в случае коррелятора оператора  $q(100)$ , мы оставили лишь полюсный вклад.

Удобно перейти к импульсному пространству. Обозначим  $\Psi(p)$ ,  $\Psi^2(p)$  компоненты Фурье функций  $\Psi(x)$  и  $\Psi^2(x)$  соответственно. Причем из (64) следует

$$\Psi(p) \simeq \beta_s \frac{1}{p^2 + m_s^2}.$$

С учетом этого приводим (107) к виду

$$\langle \varphi^2(p) \varphi^2(-p) \rangle = (2\pi)^2 \langle \varphi^2 \rangle \delta(p) + \frac{c^2}{p^2 + m_\rho^2} \left\{ \frac{m_s^2 - m_\rho^2}{p^2 + m_s^2} - c^2 n \beta_s \Psi^2(p) + c^2 n (p^2 + m_s^2) \Psi^2(p) \Psi^2(p) \right\}. \quad (108)$$

Если прибавить к этому выражению вклад теории возмущений

$$\langle \varphi^2(p) \varphi^2(-p) \rangle_{p.th} = \frac{c^2}{p^2 + m_s^2},$$

то ложный полюс в точке  $p^2 = -m_s^2$  исчезнет и останется полюс в точке  $p^2 = -m_\rho^2$ . Соответствующий вычет в этой точке равен  $c^2 \left( 1 - \frac{n}{2} c^2 \beta_s \Psi^2(p) \Big|_{p^2 = -m_\rho^2} \right)^2$ , поэтому вблизи полюса справедливо приближенное операторное равенство

$$\varphi^2(x) \approx \langle \varphi^2 \rangle + c \left( 1 - \frac{nc^2}{2} \beta_s \Psi^2(-m_\rho^2) \right) \rho(x). \quad (109)$$

Таким образом, рассмотрение функционального интеграла (61) привело к описанию модели в терминах бесцветных переменных (79) и позволило определить спектр (89), (90). Затем было продемонстрировано, что найденный спектр проявляется в виде полюсов (103), (108) в функциях Грина для калибровочно-инвариантных операторов. Вблизи полюсов выполняются приближенные операторные равенства (104), (109), связывающие изначальные поля  $A_\mu$ ,  $\varphi(x)$  с бесцветными  $\Sigma$ ,  $\rho$ .

### 3. ПОДКЛЮЧЕНИЕ БЕЗМАССОВЫХ ФЕРМИОНОВ

Здесь рассматривается двумерная электродинамика фермионных и скалярных полей. Как и в скалярной электродинамике, в этой модели имеет место обесцвечивание, а спектр содержит бесцветные скалярные, псевдоскалярные и фермионные частицы.

Присутствие безмассовых фермионов приводит, как и в модели Швингера, к вырожденности вакуума относительно кирального числа. В результате  $\theta$ -вакуум не имеет определенного кирального числа, что означает нарушение киральной симметрии. Как и в модели Швингера, это приводит к появлению динамической массы у бесцветных переменных (в данном случае у фермионов). Отметим, что вопрос о появ-

влении динамической массы у двумерных фермионов рассматривался ранее в работе [17].

Добавим к скалярной электродинамике (54) фермионные поля, взаимодействующие с калибровочным полем стандартным образом:

$$\mathcal{L}_\psi = i\bar{\psi}\gamma_\mu(\partial^\mu - ieA_\mu)\psi. \quad (110)$$

Такая добавка существенно изменяет свойства изначальной модели (54). Поскольку фермионные поля — безмассовые, то следует ожидать, что в области больших расстояний будут проявляться степени свободы, построенные именно из фермионных полей.

Исследование модели упрощается тем, что фермионный сектор (110) в некотором смысле является точно решаемым. Действительно, функция Грина фермионов во внешнем поле

$$A_\mu = \frac{2\pi}{e} \varepsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \Phi \quad (111)$$

имеет [5] следующий вид:

$$G(x, y | A) = G_0(x - y) \exp\{2\pi\gamma_5(\Phi(x) - \Phi(y))\}. \quad (112)$$

Здесь  $G_0$  — функция Грина свободных безмассовых фермионов

$$G_0(x) = -\gamma_\mu x_\mu / (2\pi^2 x^2). \quad (113)$$

Формула (112) позволяет точно вычислить фермионный детерминант во внешнем поле [5]:

$$\frac{\det(\gamma_\mu(\partial_\mu - ieA_\mu))}{\det(\gamma_\mu\partial_\mu)} = \exp\left\{-2\pi \int (\partial_\mu\Phi)^2 d^2x\right\}. \quad (114)$$

Кроме того, с помощью этой формулы вычисляется [5] аксиальная аномалия, которая имеет такой же вид, как и в модели Швингера (39):

$$\partial_\mu J_\mu^5 = \frac{e}{2\pi} \varepsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2q(x). \quad (115)$$

Здесь  $J_\mu^5 = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$ , а  $q(x)$  есть плотность топологического числа (59).

Из (115) следует, что калибровочно-инвариантный ток не сохраняется, однако сохраняющимся является ток

$$j_\mu^5 = J_\mu^5 - \frac{e}{\pi} \varepsilon^{\mu\nu} A_\nu.$$

Заряд, построенный из нулевой компоненты этого тока, имеет вид

$$\tilde{Q}_5 = - \int j_0^5 dx^1 = Q_5 - 2n[A_1], \quad (116)$$

где  $n[A_1]$  задано формулой (57). Под действием топологически нетривиального калибровочного преобразования  $T$  число  $n[A_1]$  меняется на единицу, а  $Q_5$  остается постоянным, поэтому  $\tilde{Q}_5$  изменяется на два:

$$T^+\tilde{Q}_5T = \tilde{Q}_5 - 2. \quad (117)$$

С другой стороны,  $\tilde{Q}_5$  сохраняется во времени, поэтому (117) означает, что в системе имеется вырождение по отношению к числу  $\tilde{Q}_5$ . Действительно, из состояния  $|0\rangle$  с нулевым значением  $\tilde{Q}_5$ , калибровочным преобразованием, не изменяющим энергии, можно построить состояния

$$|n\rangle = (T^+)^n |0\rangle, \quad (118)$$

которые несут ненулевое киральное число  $\tilde{Q}_5 = 2n$ . В качестве основного состояния можно взять любое состояние  $|n\rangle$  или их суперпозицию. Таким образом, для системы с вырождением для  $\theta$ -вакуума справедливо представление

$$|\theta\rangle = \sum_n \exp(i n \theta) |n\rangle. \quad (119)$$

Откуда следует, что энергия  $\theta$ -вакуума не зависит от параметра  $\theta$ . Состояние  $|\theta\rangle$ , в отличие от состояний (118), не обладает определенным значением кирального числа  $\tilde{Q}_5$ . Поэтому фермион, распространяющийся над  $\theta$ -вакуумом, также не имеет определенной киральности. В дальнейшем мы убедимся, что это объясняется появлением у бесцветного фермиона динамической массы.

Перейдем теперь непосредственно к построению приближения разреженного инстантонного газа в этой модели. Здесь мы будем следовать работе [48], в которой был получен эффективный низкоэнергетический лагранжиан, описывающий эффективные фермионные поля.

Затем мы установим приближенные операторные тождества, связывающие эти поля с калибровочно-инвариантными операторами, построенными из начальных полей  $\psi$ ,  $\phi$ ,  $A_\mu$ . Тем самым показывается бесцветность эффективных фермионных полей.

Для вычисления величины  $Z$  (64) в этой модели заметим, что она отличается от соответствующей величины в скалярной электродинамике (77) лишь фермионным детерминантом, который известен точно (114).

В качестве  $\Phi$  в этой формуле нужно взять многоинстантонную конфигурацию (67). Отметим, что в данном случае нельзя использовать сингулярную калибровку (70), поскольку формула (114) очень чувствительна к сингулярностям. На больших расстояниях величина  $(\partial_\mu \bar{\Phi})$  имеет асимптотику (120)  $(N^+ - N^-) \mathcal{O}(1/r)$ . Поэтому детерминант (114) отличен от нуля только при  $N^+ = N^-$ , т.е. когда число инстантонов равно числу антиинстантонов. Для вычисления потенциала взаимодействия инстантонов возникшего из фермионного детерминанта

$$U^F = 2\pi \int (\partial_\mu \bar{\Phi})^2 d^2x, \quad (120)$$



воспользуемся асимптотикой

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^N q_i D(x - x_i). \tag{121}$$

Такое приближение соответствует приближению точечных инстантонов. В этом случае из (120), (121) следует [18]:

$$\begin{aligned} U_N^F &= -2\pi \int \Phi \partial^2 \Phi \partial^2 x = 4\pi \sum_{i < j} D(x_i - x_j) q_i q_j = \\ &= - \sum_{i < j}^N q_i q_j \ln [(x_i - x_j)^2 \mu^2]. \end{aligned} \tag{122}$$

Выражение (122) дает лишь главную асимптотику потенциала на больших расстояниях. Следующие члены асимптотики потенциала имеют порядок  $\mathcal{O}(\exp(-m_s, v r))$ . В принципе, они могут быть вычислены с помощью (120), но для этого недостаточно знания асимптотики инстантонного решения (64), а нужно иметь точное решение, которое отсутствует.

Приближение точечных инстантонов соответствует пренебрежению поправками порядка  $\mathcal{O}(\exp(-m_v, s r))$ . Это означает, что в рамках заданной точности мы должны пренебречь потенциалом взаимодействия (76), вычисленным ранее в разд. 2.

Таким образом, используемое приближение соответствует пренебрежению вкладом тяжелых частиц с массами  $\mathcal{O}(m_{v,s})$ . Это оправдано, поскольку в области больших расстояний проявляются лишь легкие частицы.

Величина  $Z$  в данном приближении имеет вид

$$Z = \sum_{N^+, N^-} \int \delta_{N^+, N^-} \frac{k^{N^+ + N^-} e^{i\theta(N^+ - N^-)} e^{-U_N^F}}{N^+! N^-!} \det(\gamma_\mu \partial_\mu) \prod_{i=1}^{N^+} d^2 x_i^+ \prod_{i=1}^{N^-} d^2 x_i^-, \tag{123}$$

где  $U_N^F$  задан формулой (122).

Из (123) видно, что  $Z$  не зависит от  $\theta$ , что находится в полном согласии с формулой (119).

Можно проверить [18], что статистическая сумма (123) эквивалентна фермионной модели, а именно:

$$\begin{aligned} Z &= \int d\sigma^+ d\sigma \exp \left\{ \int \sigma^+(x) \hat{\partial} \sigma(x) d^2 x \right\} \times \\ &\times \sum_{N^+, N^-} \frac{1}{N^+! N^-!} \prod_{i=1}^{N^+} \left\{ \frac{2\pi}{\mu} k e^{i\theta \sigma^+(x_i^+)} \times \right. \\ &\times \left. \frac{1 - \gamma_5}{2} \sigma(x_i^+) d^2 x_i^+ \right\} \prod_{i=1}^{N^-} \left\{ \frac{2\pi}{\mu} k e^{-i\theta \sigma^+(x_i^-)} \frac{1 + \gamma_5}{2} \sigma(x_i^-) \right\} d^2 x_i^-. \end{aligned} \tag{124}$$

Доказательство эквивалентности (123) и (124) легко провести для членов ряда с  $N^+ = N^- = 1$ . В общем же случае проще всего воспользоваться представлением бозонизации [19] для двумерных фермионов  $\sigma(x)$ .

Из (124) следует, что от параметра  $\theta$  можно избавиться путем переопределения полей  $\sigma(x)$  с помощью  $\gamma_5$ -поворота. Поскольку от  $\theta$  ничего не зависит, мы выберем  $\theta = \pi$ . Суммируя ряд (124) по  $N^\pm$ , получаем эффективный лагранжиан фермионной модели

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \sigma^+ \hat{\partial} \sigma + \mathcal{L}^+ + \mathcal{L}^-; \quad (125)$$

$$\mathcal{L}^\pm = -\frac{2\pi k}{\mu} \sigma^+ \frac{1 \mp \gamma_5}{2} \sigma. \quad (126)$$

Из (125), (126) видно, что модель эквивалентна теории свободного фермионного поля с массой

$$m = -2\pi k/\mu. \quad (127)$$

Таким образом, наличие  $\gamma_5$ -аномалии в модели приводит к появлению у бесцветного кварка динамической массы. В результате этого сохраняющийся заряд  $\tilde{Q}_5$  (116) у такого фермиона не определен. Отметим, однако, что если бы мы строили теорию не над  $\theta$ -вакуумом, а, скажем, над вакуумом  $|n\rangle$  (118), то число было бы определено для всего спектра.

Можно проверить, что введение неоднородного химического потенциала  $\mu^\pm(x)$  (92) приводит к модификации лагранжиана взаимодействия (126):

$$\mathcal{L}^\pm = -m\sigma^+(x) \frac{1 \mp \gamma_5}{2} \sigma(x) \exp(\mu^\pm(x)). \quad (128)$$

Установим теперь приближенные операторные тождества между полем  $\sigma(x)$  и полями  $\psi$ ,  $\varphi$ ,  $A_\mu$ . Рассмотрим сначала плотность топологического заряда (59).

В приближении точечных инстантонов (121) имеем

$$q(x) = \frac{e}{4\pi} \varepsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^N q_i \delta(x - x_i) = \hat{n}^+(x) - \hat{n}^-(x), \quad (129)$$

где операторы  $\hat{n}^\pm$  даются формулами (91). С помощью формул (93) и (128) получаем

$$\langle q(x) \rangle = \langle \mathcal{L}^+ - \mathcal{L}^- \rangle = m \langle \sigma^+ \gamma_5 \sigma \rangle = 0. \quad (130)$$

Аналогично для двухточечного коррелятора получаем

$$\langle q(x) q(y) \rangle = \delta(x - y) \langle m\sigma^+ \sigma \rangle + \langle m\sigma^+(x) \gamma_5 \sigma(m) m\sigma^+(y) \gamma_5 \sigma(y) \rangle. \quad (131)$$

Из (130), (131) следует, что в области больших расстояний имеет место приближенное равенство

$$q(x) \simeq m\sigma^+(x) \gamma_5 \sigma(x). \quad (132)$$

В пространстве Минковского оно имеет вид

$$q_M(x) = im\bar{\sigma}(x)\gamma_5\sigma(x).$$

Тождество для аномалии аксиального тока (115) в терминах новых степеней свободы приобретает простой вид:

$$\partial_\mu J_\mu^5 \simeq 2im\bar{\sigma}\gamma_5\sigma, \quad (133)$$

смысл которого заключается в появлении динамической массы у эффективного фермиона [аналог (40)].

Рассмотрим теперь операторы

$$J^+(z^+) = \bar{\psi}(z^+) \frac{1-\gamma_5}{2} \psi(z^+),$$

$$J^-(z^-) = \bar{\psi}(z^-) \frac{1+\gamma_5}{2} \psi(z^-), \quad z^\pm = (z_0^\pm, z_1^\pm),$$

составленные из левых и правых фермионов соответственно.

Двухточечный коррелятор этих операторов в пространстве Евклида имеет вид

$$\langle J^+(z^+) J^-(z^-) \rangle = \left\langle \psi^+(z^+) \frac{1-\gamma_5}{2} \psi(z^+) \psi^+(z^-) \frac{1+\gamma_5}{2} \psi(z^-) \right\rangle.$$

Используя явное выражение для функции Грина фермионов во внешнем поле (112), получаем

$$\langle J^+(z^+) J^-(z^-) \rangle = \exp \left\{ -4\pi (\Phi(z^+) - \Phi(z^-)) \right\} \frac{1}{4\pi^2 (z^+ - z^-)^2}.$$

Для того чтобы погрузить этот коррелятор в инстантонный газ, нужно выбрать в качестве  $\Phi$  в этой формуле выражение (121). В результате получим

$$\begin{aligned} & \langle J^+(z^+) J^-(z^-) \rangle = \\ & = \frac{\mu^2}{4\pi^2} \exp \left\{ 4\pi D(z^+ - z^-) - 4\pi \sum_i q_i D(z^+ - x_i) + 4\pi \sum_i q_i D(z^- - x_i) \right\}. \end{aligned} \quad (134)$$

Сравнивая это выражение с выражением (122) для потенциала взаимодействия, мы убеждаемся, что введение в статистическую сумму (123) коррелятора (134) равносильно добавлению в систему (123) двух пробных частиц. Как это видно из (134), частица, расположенная в точке  $z^+$ , имеет положительный заряд, а частица, расположенная в точке  $z^-$ , — отрицательный.

Используя представление статистической суммы (123) через фермионные поля (124), получаем искомое представление через поля  $\sigma$ :

$$\langle J^+(z^+) J^-(z^-) \rangle = \left\langle \sigma^+(z^+) \frac{1-\gamma_5}{2} \sigma(z^+) \sigma^+(z^-) \frac{1+\gamma_5}{2} \sigma(z^-) \right\rangle.$$

Таким образом, калибровочно-инвариантные операторы  $J^\pm$  связаны с оператором  $\sigma$ :

$$\psi^+ \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \psi \simeq \sigma^+ \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \sigma. \quad (135)$$

Отметим, что в соотношения (132), (135) поле  $\sigma$  входит билинейно. Найдем теперь приближенное равенство, в которое  $\sigma$  входит линейно. Для этого рассмотрим калибровочно-инвариантный оператор, интерполирующий поле «белого кварка» [13, 14]:

$$\left. \begin{aligned} F(X_-) &= \varphi^*(X_-) \Pi^+ \psi(X_-) = \varphi^+(X_-) \psi_R(X_-), \\ \bar{F}(X_+) &= \varphi(X_+) \bar{\psi} \Pi^- = \varphi(X_+) \bar{\psi}_R(X_+), \\ \Pi^\pm &= (1 \pm \gamma_5)/2. \end{aligned} \right\} \quad (136)$$

С учетом формулы (112) двухточечный коррелятор в евклидовом пространстве имеет вид

$$\langle F(X_-) \bar{F}(X_+) \rangle = \varphi^+(X_-) \varphi(X_+) \times \times \exp \{2\pi (\Phi(X_-) - \Phi(X_+))\} \Pi^+ G_0'(X_- - X_+) \Pi^-. \quad (137)$$

В приближении точечных инстантонов (67), (121) получаем

$$\begin{aligned} \langle F(X_-) \bar{F}(X_+) \rangle &= \frac{c^2}{2} \sum_{i=1}^N \exp \{ -iq_i \alpha (X_- - x_i) \} \sum_{i=1}^N \exp \{ iq_i \alpha (X_+ - x_i) \} \times \\ &\times \exp \left\{ 2\pi \sum_{i=1}^N q_i D(X_- - x_i) - 2\pi \sum_{i=1}^N D(X_+ - x_i) \right\} \Pi^+ G_0(X_- - X_+) \Pi^-. \end{aligned} \quad (138)$$

Вводя обозначение  $z(x) = x_0 + ix_1$ ,  $z^* = (x_0 - ix_1)$  и подставляя явные выражения для  $D$  и  $G_0$  (65), (113) в формулу (138), получаем следующее выражение для коррелятора в приближении разреженного инстантонного газа:

$$\langle F(X_-) \bar{F}(X_+) \rangle = \frac{c^2}{2} \prod_{i=1}^{N^+} \frac{z(X_+ - x_i^+)}{z(X_- - x_i^+)} \prod_{i=1}^{N^-} \frac{z(X_- - x_i^-)}{z(X_+ - x_i^-)} \left( \frac{-1}{2\pi z(X_- - X_+)} \right). \quad (139)$$

После довольно длинных, но простых вычислений можно убедиться, что на языке фермионных полей  $\sigma$  (124) выражение (139) эквивалентно введению в систему (124) фермионных полей в точках  $X_\pm$ , а именно:

$$\langle F(X_-) \bar{F}(X_+) \rangle = \frac{c^2}{2} \langle \Pi^+ \sigma(X_-) \sigma^+(X_+) \Pi^- \rangle. \quad (140)$$

Усреднение в правой части (140) проводится с помощью лагранжиана (125). Продемонстрируем эквивалентность (139) и (140) во втором порядке теории возмущений по массе фермиона  $m$  (127). Для этого в формулах (124), (139) нужно положить  $N^+ = N^- = 1$ . В этом случае

из формулы (124) следует, что правая часть (140) имеет вид

$$\frac{c^2}{2} \left( \frac{2\pi k}{\mu} \right)^2 \int \exp \left\{ \int \sigma^+ \hat{\partial} \sigma d^2 x \right\} d\sigma^+ d\sigma \{ \Pi^+ \sigma (X_-) \sigma^+ (x^+) \Pi^- \sigma (x^+) \times \\ \times \sigma^+ (x^-) \Pi^+ \sigma (x^-) \sigma^+ (X_+) \Pi^- \} d^2 x^+ d^2 x^-.$$

Усреднение по безмассовым фермионам легко выполняется с помощью функции Грина (113), в результате чего верхняя формула принимает вид

$$\int \frac{c^2}{2} \left( \frac{2\pi k}{\mu} \right)^2 d^2 x^+ d^2 x^- \times \\ \times \left\{ - \frac{1}{2\pi z (X_- - X_+)} \frac{1}{|2\pi z (x^+ - x^-)|^2} - \frac{1}{2\pi z (X_- + x^+) 2\pi z^* (x^+ - x^-) 2\pi z (x^- - X_+)} \right\}.$$

После простых алгебраических преобразований эта формула приводится к виду

$$\int k^2 \exp (-U_2^F (x^+ - x^-)) d^2 x^+ d^2 x^- \times \\ \times \left[ - \frac{c^2 z (X_+ - x^+) z (X_- - x^-)}{2z (X_- - x^+) z (X_+ - x^-) 2\pi z (X_- - X_+)} \right], \quad (141)$$

где  $U_2^F (x^+ - x^-)$  дается формулой (122). Выражение в квадратных скобках в формуле (141) в точности совпадает с правой частью формулы (139) при  $N^+ = N^- = 1$ , что и требовалось доказать.

Аналогично проводится доказательство эквивалентности (139), (140) при  $N^\pm > 1$ .

Таким образом, мы показали, что бесцветный калибровочно-инвариантный оператор  $F$  (136) выражается (140) через массивное фермионное поле  $\sigma (x)$ :

$$\varphi^* (x) \Pi^+ \psi (x) \approx \Pi^+ \sigma (x) \frac{c}{\sqrt{2}}. \quad (142)$$

Таким образом, мы показали, как калибровочно-инвариантные операторы (132), (133), (135), (142) выражаются через поле эффективного фермиона  $\sigma$ .

Остановимся теперь на эффектах тяжелых частиц. В третьей части было показано, что в отсутствие безмассовых фермионов спектр скалярной электродинамики состоит из тяжелых скалярной и псевдоскалярной частиц  $\rho$  и  $\Sigma$  (79). Включение безмассовых фермионов приводит к появлению легкого фермиона  $\sigma$  (125).

Поле  $\sigma$  является основной степенью свободы в области больших расстояний. Для того чтобы учесть тяжелые степени свободы  $\Sigma$  и  $\rho$ , нужно к потенциалу  $U_N^F$  (122) добавить потенциал  $U_N$  (76), вычисленный ранее.

Тогда, объединяя формулы (77) и (123), можно прийти к выводу [см. (83) и (124)], что система описывается полями  $\sigma$ ,  $\rho$ ,  $\Sigma$ , причем ла-

гранжиан взаимодействия (80), (125) имеет вид

$$\mathcal{L}^{\pm} = -m\sigma^{\pm} \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \sigma \exp\{\pm i\Sigma/F_{\Sigma} + \rho/F_{\rho}\}, \quad (143)$$

где  $m$  дается формулой (127), а константы  $F_{\Sigma, \rho}$  — формулами (81).

В области больших расстояний тяжелые степени свободы и  $\Sigma$ ,  $\rho$  экспоненциально малы. Если разложить экспоненту в формуле (143) в ряд по  $\Sigma$ ,  $\rho$ , то первый член разложения воспроизводит результат (126), а следующие члены описывают взаимодействие легких и тяжелых частиц:

$$\mathcal{L}^{+} + \mathcal{L}^{-} \simeq -m\sigma^{+}\sigma - \frac{m}{F_{\rho}}\rho\sigma^{+}\sigma + i\frac{m}{F_{\Sigma}}\Sigma\sigma^{+}\gamma_5\sigma.$$

Здесь нужно отметить следующее: потенциал  $U_N$  (76) на больших расстояниях имеет порядок  $\mathcal{O}(\exp(-m_v, s r))$ . С другой стороны, в потенциале  $U_N^F$  (122) мы пренебрегли подобными членами. Следует ожидать, что их учет приведет к перенормировке констант  $\beta_{v, s}$  в формуле (76) для  $U_N$ . Это означает, что константы  $F_{\Sigma, \rho}$  в формуле (143) должны рассматриваться как некоторые перенормированные эффективные константы связи.

#### 4. ТРЕХМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ДЖОРДЖИ — ГЛЭШОУ

Эта модель основана на калибровочной группе  $SU(2)$  и содержит триплет калибровочных  $A_{\mu}^a$  и триплет скалярных полей  $\varphi^a$ . В трехмерном евклидовом пространстве-времени она описывается лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4g^2} (G_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{1}{2} (D_{\mu}\varphi_a)^2 + \frac{\lambda}{4} (\varphi_a^2 - c^2)^2. \quad (144)$$

Если предположить, что спонтанное нарушение симметрии сосредоточило поле  $\varphi_a$  вблизи

$$\varphi_a = c\delta_a^3,$$

то скалярное поле приобретает массу  $m_H = \sqrt{2\lambda}c$ , поля  $A_{\mu}^{(1, 2)}$  приобретают массу  $m_v = gc$ , а поле  $A_{\mu}^{(3)}$  остается безмассовым.

Однако в работе [20] было показано, что благодаря эффектам туннелирования симметрия восстанавливается ( $\langle\varphi_a\rangle = 0$ ), поле  $A_{\mu}^{(3)}$  приобретает маленькую массу и в модели имеет место конфайнмент.

Это означает, что эффективный лагранжиан модели может быть записан в бесцветных переменных.

В области больших расстояний остается [20] самая легкая степень свободы, связанная с  $A_{\mu}^{(3)}$ . Если  $m_H \ll m_v$ , то будет проявляться также легкая степень свободы, связанная со скалярным полем  $\varphi_a$  [21].

Если модель (144) дополнить фермионными полями, то она приобретает нетривиальные киральные свойства, проявляющиеся в спонтанном нарушении киральной инвариантности [22], причем роль голдстоуновской частицы выполняет степень свободы, связанная с  $A_{\mu}^{(3)}$ .

**А. Эффективный низкоэнергетический лагранжиан.** Туннелирование описывается решениями классических уравнений движения, следующих из лагранжиана (144). В этой модели они совпадают [20] с монополями [23]:

$$\left. \begin{aligned} \varphi^a &= n^a c (1 + h(r)), \quad A_\mu^a = \varepsilon_{\alpha\mu\nu} \frac{n^\nu}{r} (1 + a(r)), \\ h^{\nu} &= r^\nu / r, \quad h(0) = a(0) = -1, \quad a(\infty) = h(\infty) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (145)$$

Решения монопольного типа характеризуются топологическим числом [3]:

$$\left. \begin{aligned} q &= \int dx q(x), \quad q(x) = \partial_\mu H_\mu; \\ H_\mu &= \frac{g}{8\pi} \varepsilon_{\mu\nu\alpha} \hat{\phi}^a \left( G_{\nu\alpha}^a - \frac{1}{g} \varepsilon^{abc} D_\nu \hat{\phi}^b D_\alpha \hat{\phi}^c \right), \\ \hat{\phi}^a &= \varphi^a / c. \end{aligned} \right\} \quad (146)$$

Монополь (антимонополь) имеет топологическое число  $q$ , равное  $+1$  ( $-1$ ). Классическое действие монополя дается [3] формулой

$$S_0 = \frac{m_\nu}{g^2} \varepsilon \left( \frac{\lambda}{g^2} \right),$$

где  $\varepsilon$  — некоторая слабоменяющаяся функция, удовлетворяющая [24] условию  $\varepsilon(0) = 4\pi$ .

Суперпозиция далеко раздвинутых  $N^+$ -монопольей и  $N^-$ -антимонполей имеет действие

$$S = (N^+ + N^-) S_0 + U_N \frac{4\pi}{g^2}, \quad (147)$$

где потенциал взаимодействия  $U_N$  имеет кулоновский вид [20]:

$$U_N = \sum_{i < j} U_{ij} (|x_i - x_j|), \quad (148)$$

$$U_{ij} = q_i q_j / r. \quad (149)$$

Здесь  $q_i = +1$  ( $-1$ ) суть топологические числа монополей (антимонполей).

Появление кулоновского дальнего действия (149) связано с тем, что компонента  $A_\mu^{\text{a}}$  является безмассовой.

В работе [21] было показано, что при малых  $\lambda$  (малая масса  $m_H$ ) потенциал (149) приобретает юкавскую добавку:

$$U_{ij} = \frac{1}{r} (q_i q_j - e^{-m_H r}). \quad (150)$$

Приближение разреженного инстантонного газа для функционального интеграла

$$Z = \int \exp \{-S(A, \varphi)\} dA d\varphi$$

было построено в работе [20], где было показано, что в приближении взаимодействующего инстантонного газа функциональный интеграл имеет вид

$$Z = \sum_{N^+, N^-} \int \frac{k_0^{N^+ + N^-}}{N^+! N^-!} \exp\left(-\frac{4\pi}{g^2} U_N\right) \prod_{i=1}^{N^+} d^2 x_i^+ \prod_{i=1}^{N^-} d^2 x_i^-, \quad (151)$$

где  $U_N$  дается формулой (148), а

$$k_0 = m_v^3 \left(\frac{m_v}{g^2}\right)^{3/2} \alpha \left(\frac{\lambda}{g^2}\right) \exp(-S_0),$$

$\alpha$  — некоторая вычислимая функция.

Таким образом,  $Z$  представляет собой большую статистическую сумму кулоновского газа с юкавским притяжением [см. (150)].

Можно показать [20 — 22], что она представима в виде функционального интеграла по вспомогательным полям:

$$Z = \int d\Sigma d\rho \exp\left\{\int \mathcal{L}_{\text{eff}}(\Sigma, \rho) d^3x\right\}, \quad (152)$$

где эффективный лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{2} (\partial\Sigma)^2 + \frac{1}{2} (\partial\rho)^2 + \frac{m_H^2 \rho^2}{2} + \mathcal{L}^+ + \mathcal{L}^-, \quad (153)$$

$$\mathcal{L}^\pm = -k_0 \exp\left\{\pm i \frac{\Sigma}{f_\Sigma} + \frac{\rho}{f_\Sigma}\right\}, \quad (154)$$

$$f_\Sigma = r g / 4\pi.$$

Из (153), (154) следует, что потенциальная часть лагранжиана

$$U_{\text{eff}} = \frac{1}{2} m_H^2 \rho^2 - 2k_0 \cos \frac{\Sigma}{f_\Sigma} \exp\left(\frac{\rho}{f_\Sigma}\right)$$

имеет минимум при

$$\Sigma = 0, \quad \rho \simeq 2k_0 / m_H^2 f_\Sigma.$$

Разлагая потенциал в ряд по  $\Sigma$  и  $\rho$  вблизи этого минимума, получаем массы частиц:

$$\left. \begin{aligned} m_\Sigma^2 &\simeq 2k_0 / f_\Sigma^2, \\ m_\rho^2 &\simeq m_H^2 - 2k_0 / f_\Sigma^2. \end{aligned} \right\} \quad (155)$$

Появление массы у поля  $\Sigma$  есть [20] следствие дебаевского экранирования, которое имеет место в кулоновской плазме.

Если ввести в рассмотрение фермионы, то лагранжиан (144) следует дополнить фермионным лагранжианом, который мы выберем в форме (см. [25]).

$$\mathcal{L}_F = -\psi^+ \left\{ \gamma_\mu \left( \partial_\mu + i g \frac{\tau^a}{2} A_\mu^a \right) + i G \varphi^a \tau^{ab} - m_q \right\} \psi \quad (156)$$



Здесь  $\psi$  — четырехкомпонентный спинор в  $x$ -пространстве и дублет в цветовом. Матрицы Дирака имеют вид

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \tau_\mu \\ \tau_\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mu = 1, 2, 3.$$

Константа юкавского взаимодействия  $G^2$  считается большой по сравнению с  $\lambda$  и  $g^2$ .

В кирально-инвариантном пределе ( $m_q \rightarrow 0$ ) лагранжиан (156) в пространстве Минковского обладает симметрией

$$\psi \rightarrow \exp(i\alpha\gamma_5)\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} \exp(i\alpha\gamma_5).$$

Наличие маленькой массы  $m_q$  снимает вырождение, соответствующее этой симметрии:

$$\partial_\mu j_\mu^5 = -2im_q \bar{\psi} \gamma_5 \psi. \quad (157)$$

Влияние фермионов на величину  $Z$  (151) в приближении разреженного газа сводится к замене

$$k_0 \rightarrow k = k_0 \det(-\hat{D}_c - i\beta G \varphi_c^a \tau^a + m_q) / \det(-\hat{\partial} + m_q). \quad (158)$$

Индекс «с» здесь означает, что при вычислении детерминанта в качестве полей  $\varphi^a$  и  $A_\mu^a$  нужно взять одноинстантонные поля (145).

Фермионы существенно влияют на эффекты туннелирования, поскольку в поле инстантона (антиинстантона) они имеют нулевую моду положительной (отрицательной) киральности [26]:

$$(\hat{D}_c + i\beta \varphi_c^a \tau^a) \psi_0 = 0.$$

Для инстантона  $\psi_0$  имеет нулевые нижние компоненты, а верхние —

$$\begin{aligned} \psi^{\alpha i} &= \text{const} \exp \left\{ -cGr - \int_0^r \left( cGh(r') + \frac{1+a(r')}{r'} \right) dr' \right\} \varepsilon^{\alpha i} \equiv (159) \\ &\equiv \varepsilon^{\alpha i} (f(r)/\Lambda^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

где функция  $f(r)$  нормирована на единицу:

$$\int f dr^3 = 1, \quad (160)$$

так что  $\|\psi_0\|^2 = 1/\Lambda$ ,  $\Lambda$  есть некоторая константа размерности массы, которая может быть вычислена непосредственным определением детерминанта (158).

При малых  $m_q$  из (158) следует

$$k = k_0 m_q \|\psi_0\|^2 \det'(D_c - i\beta G \varphi_c^a \tau^a) / \det(-\hat{\partial}), \quad (161)$$

где  $\det'$  означает произведение всех собственных значений оператора, исключая нулевую моду.

Введем в рассмотрение операторы

$$j(x) = \psi(x) \psi(x), \quad j_5(x) = i\bar{\psi} \gamma_5 \psi(x).$$

Для нахождения функций Грина этих операторов воспользуемся методом функциональных производных. Для этого введем в лагранжиан модели (156) добавочный член

$$\{\psi^+(x) m(x) \psi(x) + i\psi^+(x) \gamma_5 m_5(x) \psi(x)\}. \quad (162)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle j(x_1), \dots, j(x_n) j_5(y_1), \dots, j_5(y_m) \rangle = \\ = (-1)^{n+m} Z^{-1} \delta^{n+m} Z / \delta m(x_1), \dots \\ \dots, \delta m(x_n) \delta m_5(y_1), \dots, \delta m_5(y_m). \end{aligned} \quad (163)$$

При малых  $m$  и  $m_5$  влияние члена (162) на функционал  $Z$  (как и при учете массового члена  $m_q \psi^+ \psi$ ) сведется к вычислению матричного элемента  $\langle \psi_0 | m(x) + i\gamma_5 m_5(x) | \psi_0 \rangle$ .

Из (159) видно, что при больших  $G$  функция  $\psi_0(x)$  быстро убывает на больших расстояниях. Поэтому функция  $f(x)$  (160) может быть аппроксимирована  $\delta(x)$ -функцией.

В результате весь эффект сведется к следующей замене в формуле (151):

$$\left. \begin{aligned} k_0^{N^+} &\rightarrow k^{N^+} \prod_{i=1}^{N^+} \left\{ 1 + \frac{m(x_i^+) + im_5(x_i^+)}{m_q} \right\}, \\ k_0^{N^-} &\rightarrow k^{N^-} \prod_{i=1}^{N^-} \left\{ 1 + \frac{m(x_i^-) - im_5(x_i^-)}{m_q} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (164)$$

Введем, кроме того, в статистическую сумму (151) добавочный неоднородный химический потенциал  $\mu^+(x)$ ,  $\mu^-(x)$  для частиц сорта  $+$  ( $-$ ) соответственно.

Из формул (151), (164) следует, что функционал  $Z(m, m_5, \mu^\pm)$  может быть представлен в виде функционального интеграла (152), где эффективный лагранжиан  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  дается формулой (153). Изменение претерпевает лишь лагранжиан взаимодействия:

$$\mathcal{L}^\pm = -k \left( 1 + \frac{m(x) \pm im_5(x)}{m_q} \right) \exp \{ \pm i \Sigma(x) / f_\Sigma + \rho(x) / f_\Sigma + \mu^\pm(x) \}. \quad (165)$$

Из формул (152), (163), (165) следует, что в области больших расстояний имеют место приближенные операторные тождества

$$\left. \begin{aligned} j(x) &\simeq -\frac{2k}{m_q} \cos \frac{\Sigma(x)}{f_\Sigma} \exp(\rho(x)/f_\Sigma), \\ j_5(x) &\simeq \frac{2k}{m_q} \sin \frac{\Sigma(x)}{f_\Sigma} \exp(\rho(x)/f_\Sigma). \end{aligned} \right\} \quad (166)$$

Из первой формулы (166) следует, что в системе произошло спонтанное нарушение  $\gamma_5$ -инвариантности, что проявляется в появлении кваркового конденсата:

$$\langle j \rangle = \langle \bar{\psi} \psi \rangle = -\frac{2k}{m_q} = -\frac{m_\Sigma^2 f_\Sigma^2}{m_q}. \quad (167)$$

Отметим, что формула (167) есть хорошо известный результат в методе алгебры токов [11]. Она является прямым следствием спонтанного нарушения  $\gamma_5$ -симметрии и голдстоуновской природы  $\Sigma$ -бозона. Действительно, масса  $\Sigma$ -бозона (155)  $m_\Sigma^2 = 2kf_\Sigma^2$  в киральном пределе ( $m_q \rightarrow 0$ ) стремится к нулю, поскольку параметр  $k$  пропорционален массе кварка. Это означает, что  $\Sigma$ -бозон является голдстоуновской частицей.

Отметим, что именно кирально-неинвариантный массовый член в лагранжиане (156) снимает вырождение, соответствующее  $\gamma_5$ -симметрии, и тем самым фиксирует знак конденсата  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle < 0$  при  $m_q > 0$ .

Если  $m_q < 0$ , то  $k$  сменит знак и минимум эффективного потенциала будет реализовываться уже не при  $\Sigma = 0$ , а при  $\Sigma = \pi f_\Sigma$ . Из (166) видно, что в этом случае  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  сменит знак.

Поскольку поля  $\sigma$  и  $\Sigma$  массивны, то они экспоненциально малы на больших расстояниях. В этом пределе формулы (166), (157) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\psi}(x)\psi(x) &\simeq \frac{\langle \bar{\psi}\psi \rangle}{f_\Sigma} (f_\Sigma + \rho(x)); \\ -i\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x) &\simeq \frac{\langle \bar{\psi}\psi \rangle}{f_\Sigma} \Sigma(x); \\ \partial_\mu j_\mu^5(x) &\simeq -2f_\Sigma m_\Sigma^2 \Sigma(x). \end{aligned} \right\} \quad (168)$$

Из этих формул видно, что  $\rho$ -частица может рассматриваться как скалярный мезон (связанное состояние кварка и антикварка), а  $\Sigma$ -частица есть псевдоскалярный мезон.

Последняя из формул (168) есть тождество частичного сохранения аксиального тока [аналог (40)].

Таким образом, сложная структура вакуума в этой модели приводит к спонтанному нарушению киральной инвариантности, причем динамически реализуются операторные соотношения (166) — (168), которые в методе алгебры токов являются гипотетическими.

Отметим, что кроме соотношений (166) имеются и другие операторные тождества, связывающие калибровочно-инвариантные операторы, построенные из изначальных полей  $A, \varphi, \psi$  с полями  $\Sigma$  и  $\rho$ , которые полностью определяют систему в области больших расстояний.

Рассмотрим операторы  $G^2(x) = (G_{\mu\nu}^a)^2$ ,  $\varphi^2(x) = (\varphi_a(x))^2$  и  $q(x)$  [см. (146)]. В приближении разреженного инстантонного газа они представимы в виде

$$\left. \begin{aligned} q(x) &\simeq \int q_c(x-y) (\hat{n}^+(y) - \hat{n}^-(y)) dy; \\ G^2(x) &\simeq \int G_c^2(x-y) (\hat{n}^+(y) + \hat{n}^-(y)) dy; \\ \varphi^2(x) &\simeq c^2 \left\{ 1 + 2 \int h(x-y) (\hat{n}^+(y) + \hat{n}^-(y)) dy \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (169)$$

где операторы плотности (анти) инстантонов имеют вид

$$\hat{n}^{\pm}(y) = \sum_{i=1}^{N^{\pm}} \delta(y - x_i^{\pm}). \quad (170)$$

Статистические средние от этих операторов можно найти, варьируя функционал (151) по неоднородным химическим потенциалам  $\mu^{\pm}(x)$ .

Используя представление функционала  $Z$  в виде (152), (153), (165), получаем

$$\langle n^{\pm}(x) \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\delta Z}{\delta \mu^{\pm}(x)} = -\langle \mathcal{L}^{\pm}(x) \rangle \simeq k, \quad (171)$$

откуда легко находим величины конденсатов (169):

$$\left. \begin{aligned} \langle q \rangle &= 0, \quad \langle G^2 \rangle \simeq 2k \int G_c^2(x) dx; \\ \langle \varphi^2 \rangle &\simeq c^2 \left( 1 + 4k \int h(x) dx \right). \end{aligned} \right\} \quad (172)$$

Аналогично находим корреляционные функции

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}^{\pm}(x) \hat{n}^{\pm}(x') \rangle &= -\delta(x - x') \langle \mathcal{L}^{\pm} \rangle + \langle \mathcal{L}^{\pm}(x) \mathcal{L}^{\pm}(x') \rangle, \quad \langle \hat{n}^{+}(x) \hat{n}^{-}(x') \rangle = \\ &= \langle \mathcal{L}^{+}(x) \mathcal{L}^{-}(x') \rangle. \end{aligned} \quad (173)$$

В области больших расстояний выражение (165) для  $\mathcal{L}^{\pm}$ , в отсутствие источников  $m = m_5 = \mu^{\pm} = 0$ , можно разложить в ряд по  $\Sigma$  и  $\rho$ . В этом приближении (173) имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}^{\pm}(x) \hat{n}^{\pm}(x') \rangle &\simeq k\delta(x - x') + \\ &+ k^2 \{ 1 - \langle \Sigma(x) \Sigma(x') \rangle / f_{\Sigma}^2 + \langle \rho(x) \rho(x') \rangle / f_{\Sigma}^2 \}; \\ \langle n^{+}(x) n^{-}(x') \rangle &\approx k^2 \{ 1 + \langle \Sigma(x) \Sigma(x') \rangle / f_{\Sigma}^2 + \langle \rho(x) \rho(x') \rangle / f_{\Sigma}^2 \}. \end{aligned} \quad (174)$$

Пропагаторы  $\Sigma$ - и  $\rho$ -частиц, входящие в эти формулы, могут быть вычислены по теории возмущений. В первом приближении можно считать их пропагаторами свободных частиц с массами  $m_{\Sigma}$  и  $m_{\rho}$  соответственно.

Теперь можно легко вычислить функции Грина операторов (169). Например, из первой формулы (169) и (174) можно получить двухточечный коррелятор плотности топологического заряда в импульсном пространстве:

$$\langle q(p) q(-p) \rangle = f_{\Sigma}^2 m_{\Sigma}^2 \tilde{q}_c^2(p^2) \frac{p^2}{p^2 + m_{\Sigma}^2}.$$

Откуда видно, что  $\Sigma$ -мезон проявляется в этом корреляторе как полюс. Вычет в полюсе равен

$$\langle 0 | q(0) | \Sigma \rangle = f_{\Sigma} m_{\Sigma}^2 \tilde{q}_c(-m_{\Sigma}^2). \quad (175)$$

Поскольку масса  $m_\Sigma$  мала, то на основании очевидного тождества  $\tilde{q}_c(0) = 1$  последний сомножитель в (175) можно положить равным единице.

Из (175) следует, что вблизи полюса справедливо приближенное операторное равенство

$$q(x) \simeq f_\Sigma m_\Sigma^2 \Sigma(x). \quad (176)$$

Это означает, что  $\Sigma$ -частица может рассматриваться как хиггс-глюонное (146) состояние. Отметим сходство формулы (175) с соответствующей точной формулой в модели Швингера (45).

Таким образом, на основе учета эффектов туннелирования данную модель в области больших расстояний удается сформулировать в терминах бесцветных переменных (152). Эффекты сложной структуры вакуума приводят также к спонтанному нарушению киральной инвариантности, в результате чего динамически реализуется хорошо известная нелинейная  $\sigma$ -модель, причем параметры  $\sigma$ -модели вычисляются точно. Удастся установить также приближенные операторные равенства, связывающие бесцветные переменные с изначальными (166), (176).

## 5. СЛОЖНАЯ СТРУКТУРА ВАКУУМА И ЭФФЕКТИВНЫЙ ЛАГРАНЖИАН КХД

В моделях, рассмотренных выше, калибровочные поля на больших расстояниях падают по экспоненциальному закону. Это означает, что калибровочный заряд заэкранирован полностью симметричным образом.

Однако не исключена возможность несимметричного экранирования, когда у частицы может остаться дипольный или магнитный момент. В этом случае поля будут падать по степенному закону, поэтому, несмотря на экранирование заряда, в системе останется глобальная группа симметрии, связанная с поворотами дипольного или магнитного моментов.

Покажем, что такая возможность реализуется в КХД. Известно, что вакуум в КХД имеет сложную структуру [1, 2], которая проявляется в том, что кроме тривиального минимума энергии  $A = 0$  имеются другие минимумы:

$$A_{(n)} = \frac{1}{i} U^n(x) dU^{-n}(x),$$

где  $n$  — целое число, а  $U(x)$  — некоторая цветовая матрица [1, 2].

Существование инстантонов-конфигураций, соединяющих различные минимумы, означает, что система не может остаться вблизи одного из минимумов ( $A = 0$ ), но равномерно рассредоточена над всеми минимумами сразу. В таком случае заряженный кварк не может двигаться, поскольку его волновая функция, являющаяся суперпозицией состояний  $U^n(x) q(x)$ , не имеет определенной фазы, а значит, и импульса. Если же кварк обесцветится, то он перестает

чувствовать фазу матрицы  $U^n(x)$ , и такое состояние может иметь определенный импульс.

Рассмотрим процесс туннелирования их минимума  $n = 0$  в минимум  $n = 1$  подробнее. Инстантон, соединяющий эти минимумы, имеет под потенциальным барьером ненулевые классические поля  $A, E, H$ .

Поскольку глюоны заряжены, то это означает, что под барьером существует классическая плотность цветового заряда глюонов  $\rho_G^a = \epsilon^{abc} A^b E^c$ . В результате этого изменяется плотность цветового заряда, туннелирующего фермион.

Если при входе под барьер плотность заряда фермиона была  $\rho^a(x)$ , то при выходе из под барьера она будет  $V^{ab}(x) \rho^b(x)$ , где цветовая матрица  $V_{ab}$  связана с матрицей  $U$  формулой

$$V_{ab} = \frac{1}{2} \text{Tr} (\tau^a U \tau^b U^+).$$

Таким образом, вектор плотности  $\rho^a(x)$  испытывает поворот в цветовом пространстве. Если теперь усреднить  $\rho^a$  по всем минимумам сразу, то ответ будет «нуль». Это связано с тем, что вклады от разных инстантонов, ответственных за повороты вектора  $\rho^a$ , будут складываться хаотически и скомпенсируют друг друга.

Таким образом, в системе должны остаться лишь коллективные возбуждения, соответствующие незаряженным фермионам.

Для формализации вышеизложенного рассмотрим приближение инстантонного газа.

**А. Приближение разреженного инстантонного газа.** Рассмотрим для простоты  $SU(2)$ -калибровочную теорию с одним сортом кварков. В евклидовом пространстве она описывается следующим действием:

$$S = \int dx \left\{ \frac{1}{2} \text{Tr} G_{\mu\nu}^2 - q^+ (\hat{D} - m_q) q - i\theta q_T \right\}. \quad (177)$$

Здесь

$$\hat{D} = \gamma_\mu (\partial_\mu - ig A_\mu), \quad A_\mu = \frac{\tau^a}{2} A_\mu^a,$$

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_\mu^- \\ \alpha_\mu^+ & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_\mu^\pm = (\pm i\tau, 1),$$

а  $q_T(x) = g^2 \text{Tr} G_{\mu\nu} G_{\mu\nu}^* / 16\pi^2$  — плотность топологического числа.

Амплитуда вакуум-вакуумного перехода представима в виде функционального интеграла

$$Z = \int \exp(-S_A) \det(\hat{D}(A) - m_q) dA. \quad (178)$$

В этом выражении  $S_A$  есть чисто глюонная часть действия (177).

Интеграл (178) может быть оценен методом квазиклассики. В качестве основных конфигураций, обладающих ненулевым значением

топологического числа, можно взять композицию инстантонов и антиинстантонов [27].

Наиболее просто эта композиция выглядит в сингулярной калибровке [28]:

$$A_\mu(N^+, N^-) = - \sum_+^{N^+} \frac{m_{\mu\nu}^+(x-x_+)^{\nu}}{((x-x_+)^2 + \rho_\pm^2)(x-x_+)^2} - \sum_-^{N^-} \frac{m_{\mu\nu}^-(x-x_-)^{\nu}}{((x-x_-)^2 + p^2)(x-x_-)^2}. \quad (179)$$

Здесь  $x_\pm$ ,  $\rho_\pm$ ,  $m_{\mu\nu}^\pm$  суть положение, размеры и четырехмерные магнитные моменты инстантонов:

$$\left. \begin{aligned} m_{\mu\nu}^\pm &= -\frac{2}{g} S(\omega_\pm) \alpha_{\mu\nu}^\mp S^+(\omega_\pm) \rho_\pm^2; \\ \alpha_{\mu\nu}^\pm &= \frac{1}{4i} (\alpha_\mu^\pm \alpha_\nu^\mp - \alpha_\nu^\pm \alpha_\mu^\mp); \\ S(\omega_\pm) &= \exp\left(i \frac{\tau^a}{2} \omega_\pm^a\right). \end{aligned} \right\} \quad (180)$$

Когда инстантоны друг от друга достаточно далеко, конфигурация (179) имеет действие

$$S_A = \frac{8\pi^2}{g^2} (N^+ + N^-) - i\theta (N^+ - N^-) + U_N^G, \quad (181)$$

где диполь-дипольный потенциал взаимодействия может быть получен с помощью формулы (74) и имеет вид [28, 29]:

$$U_N^G \simeq \sum_{+-}^{N^+N^-} 8\pi^4 \text{Tr} (m_{\mu\nu}^* m_{\mu\alpha}^-) \partial_\nu \partial_\alpha D(x^+ - x^-). \quad (182)$$

Функция  $D$  совпадает с пропагатором безмассовой скалярной частицы в евклидовом пространстве:

$$D(x) = 1/4\pi^2 x^2. \quad (183)$$

В литературе имеются разногласия относительно знака потенциала  $U_N^G$ . Здесь используется (182) — результат работы [29]. Можно думать, что знак потенциала неважен, так как его можно изменить, меняя знак, например, у магнитного момента  $m_{\mu\nu}^-$ . Однако в этом случае реакция системы на внешнее поле  $H_{\mu\nu}$  будет пропорциональна  $H_{\mu\nu}^* = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} H^{\alpha\beta}/2$ , а не  $H_{\mu\nu}$ , что необходимо для интерпретации системы как парамагнитной среды в четырех измерениях.

Потенциал (182) формально совпадает с энергией взаимодействия магнитных моментов ( $m_{\mu\nu}^{\pm}$ ) частиц, помещенных в четырехмерное пространство. Однако если в парамагнитной среде выстроить ближайших соседей в направлении собственной ориентации (рис. 2), а дальних соседей в противоположном, то в рассматриваемом случае ситуация обратная. Знак потенциала [29]  $U_N^G$  таков, что магнитный момент старается выстроить дальних соседей в направлении собственной ориентации. Из-за дальнего действия ( $U_N^G \sim 1/R^4$ ) это может привести к неустойчивости, если взаимодействие достаточно сильное. В дальнейшем мы найдем условие, при котором это может произойти.

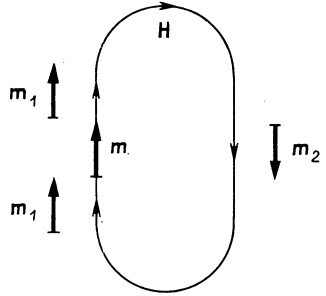


Рис. 2. Парамагнетик:  $m$  — магнитный момент;  $H$  — магнитное поле;  $m_1$  — ближний сосед;  $m_2$  — дальний сосед

После подстановки (179), (181) в (178) и вычисления квантовых флуктуаций вокруг классической конфигурации (179) амплитуда  $Z$  принимает вид

$$Z = Z_{p.th} \sum_{N^+ N^-} \int \exp \{ -U_N^G + i\theta (N^+ - N^-) \} \det B \frac{1}{N^+! N^-!} \times \prod_{+}^{N^+} d\Gamma_0^+ \prod_{-}^{N^-} d\Gamma_0^- \quad (184)$$

Здесь  $d\Gamma_0^{\pm} = d^4 x_{\pm} d\omega \pm dn_0$  ( $\rho^{\pm}$ ),  $d\omega$  — инвариантная мера на группе  $SU(2)$ , а  $dn_0$  — функция распределения инстантонов по размеру. Для группы  $SU(N)$  с  $N_f$  кварками, в однопетлевом приближении, в предположении  $m_{q\rho} \ll 1$  она имеет следующий вид [30]:

$$dn_0(\rho) \simeq \frac{4,6 \exp(-1,68N)}{\pi^2 (N-1)! (N-2)!} \left( \frac{8\pi^2}{g^2} \right)^{2N} \exp \left( -\frac{8\pi^2}{g^2(\rho)} \right) \times \prod_{i=1}^{N_f} (1,34\rho) \frac{d\rho}{\rho^5}.$$

Появление матрицы  $B$  в формуле (184) связано с вычислением фермионного детерминанта (178) во многоинстантонном поле (179). Эти вычисления были проведены в работе [31]. Мы приведем ответ:

$$B_{ij} = -m_q \delta_{ij} - ia_{ji}. \quad (185)$$

Индексы  $i, j$  принимают значения от 1 до  $N^+ + N^-$ , а матрица  $a_{ij}$  имеет ненулевые матричные элементы между состояниями инстан-



тона и антиинстантона

$$a_{+-}^* = a_{-+} = 4\pi^2 i \rho_+ \rho_- \times \times \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}^-} D(x_+ - x_-) \text{Tr}(\alpha_{\alpha}^+ S^+( \omega_+ ) S( \omega_- )). \tag{186}$$

Область применимости этой формулы

$$\rho \ll |x_+ - x_-| \ll 1/m_q.$$

Покажем, что статистическая сумма (184) может быть представлена в виде функционального интеграла по коллективным переменным  $X_{\mu}$  и  $\sigma$ , где  $X_{\mu}$  — триплет векторных полей, а  $\sigma$  — дублет фермионных. Имеет место следующее представление для потенциала  $U_N^G$ :

$$e^{-U_N^G} = \det^{-1/2}(\partial^2) \int dX_{\mu} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int (\text{Tr} X_{\mu\nu}^2 + + 2 \text{Tr}(\partial_{\mu} X_{\mu})^2 dx) \prod_{+}^{N^+} \exp \{ 2\pi^2 \text{Tr}(m_{\mu\nu}^+ X_{\mu\nu}(x_+)) \} \times \times \prod_{-}^{N^-} \exp \{ 2\pi^2 \text{Tr}(m_{\mu\nu}^- X_{\mu\nu}(x_-)) \}, \tag{187}$$

$$X_{\mu\nu} = \partial_{\mu} X_{\nu} - \partial_{\nu} X_{\mu}.$$

Здесь  $X_{\mu} = X_{\mu}^i \tau^{i/2}$  — триплетное векторное поле. Эту формулу легко проверить, если заметить, что участвующие в ней произведения  $(\prod_{+} \prod_{-})$  могут быть переписаны в виде

$$\exp \left\{ 2 \int \text{Tr}(X_{\mu} J_{\mu}) dx \right\}, J_{\mu} = - \sum_{+} 2\pi^2 m_{\mu\nu}^+ \frac{\partial}{\partial x_{\nu}^+} \delta(x - x^+) - - \sum_{-} 2\pi^2 m_{\mu\nu}^- \frac{\partial}{\partial x_{\nu}^-} \delta(x - x^-).$$

После этого интеграл в правой части (187) становится явно гауссовым и вычисляется. Прямое вычисление показывает справедливость (187).

Второй источник взаимодействия в статистической сумме (184) — детерминант матрицы  $B$  может быть представлен в виде функционального интеграла по некоторому фермионному полю  $\sigma(x)$ .

Действительно, введем  $N^+ + N^-$  грассмановских переменных

$$\Omega = (u_1, \dots, u_{N^+}, v_1, \dots, v_{N^-}).$$

Тогда имеет место тождество

$$\det B = \int d\Omega^+ d\Omega^- \exp \left\{ - \sum_{+} m_q u_{+}^+ u_{+} - - m_q \sum_{-} v_{-}^+ v_{-} - i \sum_{+-} (u_{+}^+ v_{-} a_{-+} + v_{-}^+ u_{+} a_{+-}) \right\}. \tag{188}$$

Введем далее в рассмотрение безмассовое фермионное поле  $\sigma_a(x)$ , являющееся дублетом ( $a = 1, 2$ ). Удобно выделить из него правые ( $\sigma_+$ ) и левые ( $\sigma_-$ ) компоненты

$$\sigma^a = \begin{pmatrix} \sigma_+^{a\alpha} \\ \sigma_-^{a\alpha} \end{pmatrix}.$$

Лоренцевский индекс  $\alpha$  принимает значения от 1 до 2.

Имеет место следующее тождество:

$$\begin{aligned} \exp \left\{ -i \sum_{+-} (u_+^\dagger v_- a_{-+} + v_-^\dagger u_+ a_{+-}) \right\} = \det^{-1}(\hat{\partial}) \int d\sigma^+ d\sigma \exp \left\{ \int dx \sigma^+ \hat{\partial} \sigma + \right. \\ \left. + \sum_+ 2\pi\rho_+ [u_+^\dagger (S^T(\omega_+) \tau_2)_{\beta\alpha} \sigma_{+\alpha\beta}(x_+) - u_+ \sigma_+^\dagger{}_{\beta\alpha}(x_+) (\tau_2 S^*(\omega_+))_{\alpha\beta}] + \right. \\ \left. + \sum_- 2\pi\rho_- [v_-^\dagger (S^T(\omega_-) \tau_2)_{\beta\alpha} \sigma_{-\alpha\beta}(x_-) - v_- \sigma_-^\dagger{}_{\beta\alpha}(x_-) (\tau_2 S^*(\omega_-))_{\alpha\beta}] \right\}. \quad (189) \end{aligned}$$

Это тождество легко проверяется прямым вычислением гауссова интеграла по фермионным полям, стоящего в правой его части.

Подставляя (189) в (188) и интегрируя по переменным  $\Omega$  и  $\Omega^+$ , получаем

$$\begin{aligned} \det B = \det^{-1}(\hat{\partial}) \int d\sigma^+ d\sigma \exp \left( \int dx \sigma^+ \hat{\partial} \sigma \right) \prod_+^{N^+} \{ -m_q + (2\pi\rho_+)^2 \times \\ \times \text{Tr}(\sigma_+^\dagger(x_+) \tau_2 S^*(\omega_+)) \text{Tr}(S^T(\omega_+) \tau_2 \sigma_+ \times \\ \times (x_+)) \} \prod_-^{N^-} \{ -m_q + (2\pi\rho_-)^2 \text{Tr}(\sigma_-^\dagger(x_-) \times \\ \times \tau_2 S^*(\omega_-)) \text{Tr}(S^T(\omega_-) \tau_2 \sigma_-(x_-)) \}. \quad (190) \end{aligned}$$

При раскрытии знака  $\text{Tr}$  в этой формуле спинор  $\sigma_{\pm\alpha\beta}$  следует понимать как матрицу размерностью  $2 \times 2$ .

Подставляя формулы (187) и (190) в (184) и выполняя суммирование по  $N^\pm$ , получаем

$$Z = \int dX d\sigma^+ d\sigma \exp \left( \int \mathcal{L}_{\text{eff}} dx \right). \quad (191)$$

Здесь эффективный лагранжиан дается следующими формулами:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{1}{2} \text{Tr} X_{\mu\nu}^2 + \sigma^+ \hat{\partial} \sigma + \mathcal{L}^+ + \mathcal{L}^-, \\ \mathcal{L}^\pm = e^{\pm i\theta} \int d\omega dn_0 \exp \{ 2\pi^2 \text{Tr}(m_{\mu\nu}^\pm X_{\mu\nu}) \} [ -m_q + \\ + (2\pi\rho)^2 \text{Tr}(\sigma_\pm^\dagger \tau_2 S^*(\omega)) \text{Tr}(S^T(\omega)) \tau_2 \sigma_\pm ]. \quad (192) \end{aligned}$$

Используя эту формулу, можно проверить инвариантность лагранжиана  $SU(2)$  относительно глобальной  $SU(2)$ -группы:

$$X'_{\mu\nu} = UX_{\mu\nu}U^+, \quad \sigma' = U\sigma, \quad U^+U = 1.$$

Другое свойство лагранжиана — это отсутствие инвариантности относительно  $\gamma_5$ -преобразований

$$\sigma' = \exp(i\alpha\gamma_5)\sigma, \quad \bar{\sigma}' = \bar{\sigma}\exp(i\alpha\gamma_5). \tag{193}$$

Предполагается, что это преобразование проводится с лагранжианом (192), переведенным в пространство Минковского согласно правилам

$$(X_{4i}, X_{ij}) \rightarrow (iX_{0i}, -X_{ij}), \quad \sigma \rightarrow \sigma, \quad \sigma^+ \rightarrow \bar{\sigma}.$$

Вся зависимость лагранжиана (192) от параметра  $\theta$  содержится в первом члене, который пропорционален массе кварка  $m_q$ . Зависимость от  $\theta$  оставшихся членов лагранжиана является фиктивной. От нее можно избавиться переопределением полей  $\sigma$  по формуле (193). Этот результат станет понятен, если вспомнить, что в киральном пределе ( $m_q \rightarrow 0$ ) зависимость от  $\theta$  должна отсутствовать.

В дальнейшем положим  $\theta = \pi$ . Чтобы выяснить физическое содержание теории (192), рассмотрим область больших расстояний, где в отсутствие конденсатов поля  $X_{\mu\nu}(x)$  оно убывает по крайней мере как  $1/x^2$ .

Разложим в ряд по  $X_{\mu\nu}$  экспоненту в (192), удержим лишь несколько первых членов в разложении и выполним интегрирование по  $\omega$  стандартным способом:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} \simeq -\frac{1}{2} \text{Tr} X_{\mu\nu}^2 (1 - \chi) + i\bar{\sigma}\hat{\partial}\sigma - m\bar{\sigma}\sigma + \mu\bar{\sigma}\sigma_{\mu\nu}X_{\mu\nu}\sigma + 2m_q n_0. \tag{194}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} n_0 &= \int dn_0, \quad m = \frac{1}{2} (2\pi\bar{\rho})^2 n_0, \quad \mu = -\frac{1}{3} (2\pi\bar{\rho})^4 n_0/g, \\ \chi &= \frac{2}{3g^2} m_q n_0 (2\pi\bar{\rho})^4, \quad \sigma_{\mu\nu} = (\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)/4i, \end{aligned} \right\} \tag{195}$$

$\bar{\rho}$  — средний размер инстантонов, определен ниже. Из явного вида функции  $dn_0/d\rho$  видно, что интеграл по  $dn_0(\rho)$  расходится на верхнем пределе (большие  $\rho$ ). Однако имеются основания полагать [32, 33], что при малых расстояниях между инстантонами имеется отталкивание, которое приводит к появлению фактора  $\exp(-\rho^2 \text{const})$  в формуле для  $dn_0(\rho)$ . В этом случае все интегралы в (195) будут хорошо определены. Кроме того, будет существовать средний размер инстантонов  $\bar{\rho}$ , определяемый формулой  $\int \rho^m dn_0 \approx \bar{\rho}^m n_0$ . Мы будем предполагать некоторый механизм подавления больших размеров инстантонов и рассматривать  $n_0$  и  $\bar{\rho}$  как полуфеноменологические параметры.

Из формулы (194) следует, что  $\sigma$ -кварк приобрел динамическую массу  $m$ , не исчезающую в киральном пределе.

На языке статистической физики инстантонного газа этот результат можно сформулировать следующим образом: в системе (184) имелось притяжение между частицами, описываемое функцией  $\det B$ , которое было дальнедействующим; затем произошло явление, аналогичное экранированию электрического заряда в кулоновской плазме, и это взаимодействие стало короткодействующим с радиусом действия порядка  $1/m$ , где  $m$  — динамическая масса.

Другая особенность лагранжиана (194) — это наличие хромоманнитного взаимодействия с константой взаимодействия  $\mu$ . Ранее мы выяснили, что лагранжиан инвариантен относительно глобальных  $SU(2)$ -преобразований в пространстве глобального цвета, где  $\sigma$  является дублетом, а  $X_\mu$  — триплетом. В этом пространстве  $\sigma$ -кварки обладают хромоманнитными моментами, равными  $\mu$  (195), причем взаимодействие этих моментов осуществляется посредством поля  $X_\mu$ . Таким образом, лагранжиан описывает абелеву  $U^3(1)$ -магнитодинамику.

Ранее было отмечено, что в статистической системе (184) может возникнуть неустойчивость. Из (194) видно, что она возникает при  $\chi > 1$ , когда перенормированное поле  $X_\mu$  имеет отрицательную метрику и в системе развивается ненулевое вакуумное среднее этого поля.

Параметр  $\chi$  пропорционален  $m_q$  и исчезает в киральном пределе. Однако, после того как  $\sigma$ -кварк приобрел массу  $m$ , конденсат  $\langle \bar{\sigma}\sigma \rangle$  уже отличен от нуля, и это приводит к перенормировке параметра  $m_q$  и величины  $\chi$ . Действительно, запишем

$$\bar{\sigma}_{+\beta\alpha}\sigma_{\pm b\alpha} = \frac{1}{8} \delta^{ab} \delta_{\alpha\beta} \langle \bar{\sigma}\sigma \rangle + : \bar{\sigma}_{\pm\beta\alpha}\sigma_{\pm b\alpha} :, \quad (196)$$

$$\langle \bar{\sigma}\sigma \rangle = -\frac{8m}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p}{p^2 + m^2}. \quad (197)$$

Подставляя (196) в формулу для эффективного лагранжиана (192), получаем следующий рецепт перенормировки:

$$m_q \rightarrow \bar{m}_q = m_q - \frac{1}{4} (2\pi\rho)^2 \langle \bar{\sigma}\sigma \rangle. \quad (198)$$

Этот эффект связан с тем, что нормальное произведение в (196) определено по отношению к массивному полю  $\sigma(x)$ , т.е. учитывается то обстоятельство, что часть лагранжиана взаимодействия  $\mathcal{L}^+ + \mathcal{L}^-$ , дающая массу полю  $m\bar{\sigma}\sigma$ , отнесена к свободной части лагранжиана (192).

В результате величина  $\chi(m_q)$  (195) заменяется  $\bar{\chi} = \chi(\bar{m}_q)$ .

Вычислим теперь кварковый конденсат  $\langle \bar{q}q \rangle$  по формуле

$$\langle \bar{q}q \rangle = - \left( Z \int d^4x \right)^{-1} dZ/dm_q.$$

Используя для  $Z$  представление (191), (194), получаем

$$\langle \bar{q}q \rangle = -2n_0 - \frac{n_0}{3g^2} (2\pi\rho)^4 \langle \text{Tr} X_{\mu\nu}^2 \rangle \simeq -2n_0. \quad (199)$$

Здесь мы предположили отсутствие конденсатов поля  $X_{\mu\nu}$  (считается  $\bar{\chi} < 1$ ).

Таким образом, существование динамической массы у поля  $\sigma$  (конденсат  $\langle \sigma\sigma \rangle$ ) совершенно не сказалось на величине  $\langle \bar{q}q \rangle$ . Отсутствие корреляции между этими величинами было бы невозможным, если бы имела симметрия, связанная с  $\gamma_5$ -поворотами. Но она аномально нарушена

$$\partial_\mu (\bar{q}\gamma_\mu\gamma_5q) = \frac{g^2}{8\pi^2} \text{Tr} G_{\mu\nu}G_{\mu\nu}^* + 2im_q\bar{q}\gamma_5q \quad (200)$$

для поля  $q(x)$  и явно (ненулевая в киральном пределе масса  $m$ ) для поля  $\sigma$ .

Из формул (195), (199) получается следующее представление для динамической массы:

$$m = -\frac{1}{4} (2\pi\rho)^2 \langle \bar{q}q \rangle. \quad (201)$$

Обращает на себя внимание сходство этой формулы с (198), однако  $\bar{m}_q$ , в отличие от динамической массы  $m$ , является лишь параметром лагранжиана (194) и не имеет смысла полюса какого-либо пропагатора.

Отметим, что с учетом перенормировки  $X_\mu$  фактором  $\sqrt{1-\bar{\chi}}$  магнитный момент  $\sigma$ -кварка  $\bar{\mu} = \mu/\sqrt{1-\bar{\chi}}$  может быть записан в виде

$$\bar{\mu} = -\frac{\bar{g}}{2m_q} \bar{\chi}.$$

Здесь были использованы формулы (195) и введено обозначение  $\bar{g} = g/\sqrt{1-\bar{\chi}}$ . Таким образом, магнитный момент  $\sigma$ -кварка равен перенормированному магнитному моменту  $q$ -кварка.

**Б. Приближенные операторные равенства.** Здесь мы установим связь между калибровочно-инвариантными операторами, составленными из полей  $q$  и  $A_\mu$ , и полями  $\sigma(x)$ ,  $X_{\mu\nu}(x)$ .

Рассмотрим оператор  $G_{\mu\nu}^2(x)$ . В поле одного инстантона он имеет значение

$$\frac{g^2}{16\pi^2} \text{Tr} G^2(x) = f(x, \rho) = \frac{6}{\pi^2(x^2 + \rho^2)^4}. \quad (202)$$

В многоинстантонном приближении (179) имеем

$$\frac{g^2}{16\pi^2} \text{Tr} G^2(x) \simeq \sum_+^{N^+} f(x-x_+, \rho_+) + \sum_-^{N^-} f(x-x_-, \rho_-).$$

С помощью оператора плотности

$$\hat{d}n^{\pm}/d\rho = \sum_{+-}^{N+-} \delta(x - x_{\pm}) \delta(\rho - \rho_{\pm})$$

эта формула может быть записана в виде

$$\frac{g^2}{16\pi^2} \text{Tr} G^2(x) \simeq \int f(x-z, \rho) \left\{ \frac{\hat{d}n^+(z, \rho)}{d\rho} + \frac{\hat{d}n^-(z, \rho)}{d\rho} \right\} dz d\rho. \quad (203)$$

Поскольку статистическая сумма (184) эквивалентна эффективной теории (191), то все статистические операторы могут быть выражены через  $\sigma$  и  $X$ . Методом внешних источников, применявшимся выше при исследовании двух- и трехмерной моделей, можно получить приближенное операторное равенство, справедливое в области больших расстояний [29]:

$$\frac{\hat{d}n^{\pm}}{d\rho} \approx l^{\pm}(z, \rho), \quad (204)$$

где  $l^{\pm}$  имеет смысл плотности лагранжиана  $\mathcal{L}^{\pm}$  (192) по переменным  $\rho, z$ :

$$\mathcal{L}(X(z), \sigma(z)) = \int d\rho l^{\pm}(X(z), \sigma(z), \rho). \quad (205)$$

Как и при получении формулы (194), разложим  $\mathcal{L}^{\pm}$  (192) в ряд по  $X$ . Тогда из (192), (205) получим

$$l^{\pm} \simeq \frac{dn_0}{d\rho} \left\{ m_q - (2\pi\rho)^2 \sigma^+ \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \sigma - \frac{(2\pi\rho)^4}{3g} \sigma^+ X_{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \sigma + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \frac{(2\pi\rho)^4}{4g^2} m_q \text{Tr} (X_{\mu\nu} \pm X_{\mu\nu}^*)^2 + \dots \right\}. \quad (206)$$

Из (203), (204), (206) следует приближенное операторное равенство

$$\frac{g^2}{16\pi^2} G^2(x) \simeq \int dz f(x-z, \bar{\rho}) \times \\ \times \left\{ -m\sigma^+(z) \sigma(z) + \frac{1}{2} \chi \text{Tr} X_{\mu\nu}^2(z) \dots \right\} + 2m_q n_0. \quad (207)$$

Мы оставили только билинейные по полям члены и опустили все высшие. При получении последнего члена в (207) использовалось также соотношение  $\int f(x, \rho) dx = 1$ , которое вытекает из определения (202).

Аналогично получается равенство

$$\frac{g^2}{16\pi^2} \text{Tr} GG^*(x) \simeq \int f(x-z, \rho) \{ l^+(z, \rho) - l^-(z, \rho) \} d\rho dz \simeq \\ \simeq \int f(x-z, \rho) \left\{ -m\sigma^+ \gamma_5 \sigma(z) - \frac{\chi}{2} \text{Tr} X_{\mu\nu} X_{\mu\nu}^*(z) + \dots \right\} dz. \quad (208)$$

Из (207), (208) следует, что в глюонном канале имеется большая примесь кварк-антикварковых пар  $\sigma$ -кварков. Это приводит к тому, что глюонный конденсат тесно связан с конденсатом  $\sigma$ -кварков (197). Действительно, из (207) следует

$$\left\langle \frac{g^2}{16\pi^2} G^2 \right\rangle \simeq -m \langle \bar{\sigma}\sigma \rangle + 2m_q n_0 = -m \langle \bar{\sigma}\sigma \rangle - m_q \langle \bar{q}q \rangle = -\bar{m}_q \langle \bar{q}q \rangle. \quad (209)$$

Как видно из написанного выше, существует несколько форм записи одного и того же эффекта влияния динамической массы на глюонный конденсат.

Появление динамической массы проясняет и смысл аксиальной аномалии (200).

В киральном пределе в правой части равенства (200) остается лишь интерполирующий оператор псевдоскалярного глюония, который может быть аппроксимирован кварковым оператором формулой (208).

Тогда (200) примет вид

$$\partial_\mu (\bar{q}\gamma_\mu\gamma_5 q) \simeq -2im \int f(x-z, \rho) \sigma^+ \gamma_5 \sigma(z) dz.$$

Появление мнимой единицы в этой формуле объясняется правилами перехода в евклидово пространство. Таким образом, на языке коллективных переменных  $\gamma_5$ -аномалия трактуется как появление у коллективного кварка динамической массы.

Другая особенность соотношений (207), (208) — это наличие нелокальной связи между изначальными и коллективными переменными. Объяснение этому следующее: коллективные переменные  $\sigma$ ,  $X$  описывают движение центров инстантонов, поэтому эти поля — локальные, однако инстантон в целом — нелокальный объект, следовательно, связь между изначальными и коллективными переменными должна быть нелокальной. Поэтому  $\sigma$ -кварк в изначальных переменных будет выглядеть как протяженный объект размером  $\bar{\rho}$  и обладать нетривиальным распределением цветового заряда.

Из (194) следует, что  $\sigma$ -кварк по отношению к полям обладает цветовым магнитным моментом  $\bar{\mu}$ , а цветовой заряд его равен нулю, т. е. лагранжиан (194) описывает чистую магнитодинамику.

Имеет смысл изучить цветové характеристики  $\sigma$ -кварка по отношению к изначальному понятию цвета.

Сохраняющийся ток цветового заряда, выраженный через  $q(x)$  и  $A(x)$ , связан с  $\sigma_{\mu\nu}$  уравнением Максвелла

$$C_\mu^a(x) = \partial_\nu G_{\nu\mu}^a(x). \quad (210)$$

В поле одного инстантона справедливо равенство

$$\partial_\nu G_{\nu\mu}^a = m_{\nu\mu}^a \pi^2 \partial_\nu F(x, \rho), \quad (211)$$

$$F(x, \rho) = \frac{4}{\pi^4} \left( \frac{1}{\rho^4} \ln \frac{x^2 + \rho^2}{x^2} - \frac{1}{\rho^2 (\rho^2 + x^2)} - \frac{1}{2(x^2 + \rho^2)^2} \right). \quad (212)$$

В многоинстантонном секторе (179) получаем

$$C_\mu^a(x) \simeq \int \partial_\nu F(x-z) \pi^2 \frac{\hat{d}m_{\nu\mu}^a(z)}{d\rho} dz d\rho, \quad (213)$$

где оператор плотности намагничивания

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} \hat{m}_{\nu\mu}^a(z, \rho) = & \sum_{+}^{N^+} m_{\nu\mu, a}^+ \delta(z-x_+) \delta(\rho-\rho_+) + \\ & + \sum_{-}^{N^-} m_{\nu\mu, a}^- \delta(z-x_-) \delta(\rho-\rho_-), \end{aligned}$$

а матрицы  $m_{\mu\nu, a}^\pm$  даются формулой (180). Методом внешних источников аналогично (94), (166), можно получить [29] приближенное операторное равенство

$$\pi^2 \frac{d}{d\rho} \hat{m}_{\nu\mu}^a \simeq \frac{\partial}{\partial X_{\nu\mu}^a} (l^+ + l^-).$$

Используя для  $l^\pm$  выражение (206), с учетом перенормировки  $\chi$ , получаем из (213)

$$C_\mu^a(x) \simeq \int \partial_\nu F(x-z, \bar{\rho}) \left\{ \frac{\bar{\chi}}{2} X_{\nu\mu}^a + \mu \sigma^+ \sigma_{\nu\mu} \frac{\tau^a}{2} \sigma \right\} dz.$$

Интегрируя это равенство по частям и используя уравнения движения, следующие из лагранжиана (194)

$$\partial_\mu X_{\mu\nu}^a (1 - \bar{\chi}) \simeq \partial_\mu \left( 2\mu \sigma^+ \sigma_{\mu\nu} \frac{\tau^a}{2} \sigma \right),$$

получаем окончательно

$$C_\mu^a(x) \simeq \int F(x-z, \bar{\rho}) \frac{\bar{\mu}}{V \sqrt{1-\bar{\chi}}} \partial_\mu \left( \sigma^+(z) \sigma_{\nu\mu} \frac{\tau^a}{2} \sigma(z) \right) dz.$$

Вычислим цветовой формфактор  $\sigma$ -кварка в евклидовой области по переданному импульсу  $q = p_1 - p_2$ . Здесь  $p_1$  и  $p_2$  — импульсы начального и конечного состояний кварка соответственно. Из верхнего равенства имеем

$$\langle p_1 | C_\mu^a(0) | p_2 \rangle = -i \frac{\bar{\mu}}{V \sqrt{1-\bar{\chi}}} \tilde{F}(q^2) q_\nu \sigma_{p_1}^+ \sigma_{\mu\nu} \frac{\tau^a}{2} \sigma_{p_2}.$$

Здесь  $\tilde{F}(q^2)$  — фурье-образ функции  $F(x)$  (212). Легко проверить, что  $\tilde{F}(0) = 1$ .

В системе Брейта хромозлектрический ( $F_e$ ) и хромомагнитный ( $F_m$ ) формфакторы имеют вид

$$F_e = -q^2 \tilde{F}(q^2) \bar{\mu} / 4m \sqrt{1-\bar{\chi}}, \quad F_m = \bar{\mu} \tilde{F}(q^2) / 2 \sqrt{1-\bar{\chi}}. \quad (214)$$



Из этих формул следует, что цветовой заряд  $\sigma$ -кварка равен нулю, а формальный хромомагнитный момент  $F_m(0) = \bar{\mu}/2\sqrt{1-\bar{\chi}}$ .

Отметим отличие формального хромомагнитного момента от динамического  $\bar{\mu}$ , являющегося константой взаимодействия в эффективном лагранжиане (194).

До сих пор мы рассматривали теорию с одним кварком. Однако результаты можно обобщить на теорию с несколькими кварками. Например, в теории с двумя легкими кварками  $u$  и  $d$  эффективный лагранжиан также будет содержать два кварка  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , причем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\pm} = e^{\pm i\theta} \int dn_0 d\omega \exp \{ 2\pi^2 \text{Tr} (m_{\mu\nu}^{\pm} X_{\mu\nu}) \} [ -m_u + (2\pi\rho)^2 \times \\ \times \text{Tr} (\sigma_{1\pm}^+ \tau_2 S^* (\omega)) \text{Tr} (S^T (\omega) \tau_2 \sigma_{1\pm}) ] [ -m_d + (2\pi\rho)^2 \text{Tr} (\sigma_{2\pm}^+ \tau_2 S^* (\omega)) \times \\ \times \text{Tr} (S^T (\omega) \tau_2 \sigma_{2\pm}) ]. \end{aligned} \quad (215)$$

Этот лагранжиан по форме совпадает с лагранжианом 'т Хофта [30]. Отличие состоит в том, что он зависит от других переменных.

Когда имелся один кварк,  $\gamma_5$ -неинвариантный член был двухкварковым. Это означало, что притяжение, индуцированное фермионным детерминантом  $\det B$ , непосредственно приводило к появлению динамической массы, что, в свою очередь, обеспечивало экранировку этого притяжения (дебаевский эффект).

Из (215) видно, что теперь  $\gamma_5$ -неинвариантный член является, вообще говоря, четырехкварковым. Однако его исследование затруднено из-за возникновения ультрафиолетовых бесконечностей [см. (197)] в эффективной теории при попытке использовать ее вне рамок древесного приближения. Это означает, что теория требует доопределения в области малых расстояний.

Для оценки параметров лагранжиана предположим, что благодаря каким-то эффектам в теории возникают кварковые конденсаты  $\langle \sigma_1^+ \sigma_1 \rangle$ ,  $\langle \sigma_2^+ \sigma_2 \rangle$ .

Тогда можно использовать аппроксимацию

$$\sigma_1^+ \sigma_1 \sigma_2^+ \sigma_2 \simeq \sigma_1^+ \sigma_1 \langle \sigma_2^+ \sigma_2 \rangle + \sigma_2^+ \sigma_2 \langle \sigma_1^+ \sigma_1 \rangle - \langle \sigma_1^+ \sigma_1 \rangle \langle \sigma_2^+ \sigma_2 \rangle.$$

Подставляя это выражение в (215) и выполняя интегрирование, получаем следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \bar{m}_u &= m_u - \frac{1}{4} (2\pi\bar{\rho})^2 \langle \sigma_1^+ \sigma_1 \rangle; \\ m_{\sigma_1} &= -\frac{1}{4} (2\pi\bar{\rho})^2 \langle \bar{u}u \rangle; \quad \mu_{\sigma_1} = -\frac{\bar{g}\bar{\chi}}{2\bar{m}_u}; \\ \bar{\chi} &= -\frac{1}{3g^2} (2\pi\bar{\rho})^4 \bar{m}_u \langle \bar{u}u \rangle; \quad \langle \bar{u}u \rangle = -2\bar{m}_d n_0; \\ \frac{\alpha}{8\pi} \langle G^2 \rangle &= -\bar{m}_u \langle \bar{u}u \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (216)$$

Остальные соотношения получаются одновременной заменой в этих формулах  $u \rightarrow d$ ,  $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ .

Для группы  $SU_c(3)$  имеют место аналогичные формулы, а именно: в формулах для масс  $\bar{m}_u$ ,  $\bar{m}_d$ ,  $\bar{m}_\sigma$  достаточно сделать замену  $(2\pi\rho)^2$  на  $8\pi^2 \rho^2/3$ , а в формуле для  $\bar{\chi}$  заменить множитель  $1/3$  на  $1/8$ .

В работе [33] была высказана гипотеза и приведены аргументы в пользу того, что инстантонная физика развивается на масштабе  $\bar{\rho} = 1/600$  МэВ. Смысл появления этого масштаба в том, что в этой области токовые кварки превращаются в составляющие кварки с массами порядка 300 МэВ.

Принимая эту точку зрения, приравняем массу  $\sigma$ -кварка к 300 МэВ. Используя также феноменологические значения конденсатов  $\langle \bar{u}u \rangle = -1,7 \cdot 10^{-2}$  ГэВ<sup>3</sup>,  $\langle \frac{\alpha}{\pi} G^2 \rangle \simeq 1,2 \cdot 10^{-2}$  ГэВ<sup>4</sup>, получаем

$$\bar{m}_u = \bar{m}_d = 90 \text{ МэВ}, \quad \bar{\rho} = 1/600 \text{ МэВ}, \quad \langle \bar{\sigma}\sigma \rangle = 0,3 \langle \bar{q}q \rangle, \quad \bar{\chi} \simeq 0,5.$$

Таким образом, эффекты сложной структуры вакуума приводят к описанию КХД в терминах коллективных степеней свободы  $X$  и  $\sigma$ . Коллективный кварк приобрел динамическую массу, пропорциональную кварковому конденсату.

В терминах изначальных переменных  $\sigma$ -кварк выглядит как протяженный объект размером порядка  $\bar{\rho}$  [см. (207), (208), (214)].

Можно также показать [35], что учет отталкивания между инстантонами, взятого в форме абсолютно жесткого кора [32], приводит к формированию кора размером порядка  $\bar{\rho}$  у эффективных кварков, что приводит также к дифракционной картине рассеяния кварка на кварке.

В глюонном канале имеется большая примесь кварк-антикварковых пар  $\sigma$ -частиц [см. (207), (208)]. Это объясняет возможность рассмотрения  $\eta'$ -мезона как псевдоскалярного глюония [36] в том смысле, что глюонный оператор  $GG^*(x)$  пропорционален кварковому  $i\bar{m}\sigma\gamma_5\sigma$ . Аналогичная ситуация имеет место в модели Швингера, где операторы  $\epsilon_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$  и  $i\bar{\psi}\gamma_5\psi$  пропорциональны одному и тому же полю  $\Sigma$  [(44), (45), см. также (132)].

Взаимодействие коллективных степеней свободы описывается лагранжианом магнито-динамики (194). Несмотря на то, что  $\sigma$ -кварк бесцветен, он имеет хромагнитный момент. Его происхождение обусловлено тем, что вокруг кварка существует виртуальное облако классического глюонного поля инстантонного типа. Туннелирующий под барьером кварк своим магнитным полем намагничивает это облако, магнитный момент которого  $\chi \frac{e}{2m_q}$  следует приписать эффективному кварку.

Что касается электромагнитных свойств  $\sigma$ -кварка, то можно показать [37], что его заряд совпадает с зарядом «голового»  $q$ -кварка.

Поэтому его электромагнитный момент равен  $e/2m$ , где  $m$  — динамическая масса (195). Отметим, что магнитный момент эффективного кварка значительно меньше магнитного момента голого кварка  $e/2m_q$ , как и должно быть в модели составляющих кварков.

Таким образом, между областью асимптотически свободных кварков с кулоновским взаимодействием и адронной областью с юкавским короткодействием имеется область составляющих кварков с магнитным взаимодействием  $1/R^3$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели несколько калибровочных моделей, обладающих сложной структурой вакуума. Всех их объединяет одно свойство — физические возбуждения в них являются бесцветными. Но реализуется это по-разному.

В модели Швингера электромагнитное поле можно разбить на поперечную и продольную части. После этого фазу продольной части можно использовать для построения калибровочно-инвариантного фермиона  $\sigma(x)$  путем компенсации соответствующей фазы, возникающей при калибровочном преобразовании. Понятно, что оператор  $\sigma(x)$  определен с точностью до глобальной фазы, поэтому в модели остается глобальная  $U(1)$ -группа. Однако физически эта симметрия не наблюдаема, так как из-за дальнего действия в двумерии имеет место конфайнмент и наблюдаются лишь фермион-антифермионные пары, а оператор  $\sigma(x)$  является не зависящим от  $x$  унитарным оператором.

В скалярном варианте модели Швингера со скалярным потенциалом хиггсовского типа имеет место экранирование заряда. Из-за специфического потенциала в системе развивается конденсат пар заряженных частиц  $\langle \phi^+ \phi \rangle$ , в результате чего калибровочное поле приобретает массу. Это означает, что оно экспоненциально мало на больших расстояниях, т. е. заряд экранирован симметричным образом. В результате в системе остаются только бесцветные переменные — скалярное и псевдоскалярное поля ( $\rho, \Sigma$ ).

При добавлении безмассового фермиона появляется еще одна степень свободы — бесцветный фермион ( $\sigma$ ), который приобрел динамическую массу за счет  $\gamma_5$ -аномалии. В этом случае, в отличие от модели Швингера, в системе остается глобальная симметрия, связанная с сохранением фермионного числа, поскольку незаряженные фермионы ( $\sigma$ ) могут теперь двигаться.

В трехмерной модели Джорджи — Глэшоу с фермионами имеет место конфайнмент, причем на больших расстояниях наблюдается самая легкая частица, связанная с изначально безмассовой компонентой калибровочного поля, которая является бесцветной, поскольку она может рассматриваться как фермион-антифермионное связанное состояние.

В модели спонтанно нарушена  $\gamma_5$ -симметрия, реализуется нелинейная  $\sigma$ -модель, выполняются тождества PCAC и обсуждаемая частица является голдстоуновским бозоном.

В КХД с одним легким кварком инстантоны приводят к бесцветному фермиону ( $\sigma$ ). Причем сохраняется глобальная группа, связанная с несимметричным экранированием цвета, так как остается хромагнитный момент и соответствующие хромагнитные поля. Фермион имеет динамическую массу за счет  $\gamma_5$ -аномалии.

В КХД с двумя легкими кварками ( $u, d$ ) соответствующий  $\gamma_5$ -неинвариантный 'т хофтовский лагранжиан будет четырехкварковым ( $\bar{\sigma}_u \sigma_u \bar{\sigma}_d \sigma_d$ ), т. е. прямо не приводит к динамической массе фермиона.

Можно только предполагать возникновение конденсатов ( $\bar{\sigma}_u \sigma_u$ ), ( $\bar{\sigma}_d \sigma_d$ ) за счет каких-то эффектов, и тогда динамическая масса появится.

В литературе имеются исследования 'т хофтовского лагранжиана методами модели Намбу — Йона — Лазинио. Но это некорректно по следующей причине: для появления конденсата ( $\bar{\sigma}_u \sigma_u$ ) в рамках данного метода необходимо иметь взаимодействие ( $\bar{\sigma}_u \sigma_u \bar{\sigma}_u \sigma_u$ ) типа притяжения (важен знак); для появления конденсата ( $\bar{\sigma}_d \sigma_d$ ) нужно иметь такое же взаимодействие ( $\bar{\sigma}_d \sigma_d \bar{\sigma}_d \sigma_d$ ), между тем мы имеем лишь взаимодействие между  $\sigma_u$ - и  $\sigma_d$ -кварками ( $\bar{\sigma}_u \sigma_u \bar{\sigma}_d \sigma_d$ ).

Более того, если диагонализировать лагранжиан 'т Хофта, то в канале  $\eta'$  (псевдоскалярный) будет отталкивание, т. е. нет и намека на формирование  $\eta'$  ( $x$ )-поля в рамках используемого метода. Отметим, что это отталкивание есть неизбежное следствие  $\gamma_5$ -аномалии, ибо именно оно должно увеличить массу  $\eta'$  относительно массы  $\pi$ -мезона ( $U(1)$ -проблема [30]). Это можно проследить, если лагранжиан 'т Хофта дополнить феноменологическим взаимодействием типа притяжения  $G(\bar{\sigma}_u \sigma_u \bar{\sigma}_u \sigma_u + \bar{\sigma}_d \sigma_d \bar{\sigma}_d \sigma_d)$  и исследовать этот лагранжиан обсуждаемым методом (см., например, [38]).

Следует также отметить, что проблема инстантонов больших размеров также не имеет достаточно полного решения.

Кроме того, для перенормировки предэкспоненты в формуле для  $dn_0(\rho)$  необходимо двухпетлевое вычисление флуктуаций вокруг инстантона. Поэтому инстантонные вычисления находятся пока на полуфеноменологическом уровне.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jackiw R., Rebbi C.//Phys. Rev. Lett. 1976. Vol. 37. P. 172—175.
2. Callan C.G., Dashen R.F., Gross D.J.//Phys. Lett. 1976. Vol. B63. P. 334—340.
3. Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля: Пер. с англ. М.: Мир, 1985.
4. Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей: М: Наука, 1978.
5. Schwinger J.//Phys. Rev. 1962. Vol. 128. P. 2425—2429.
6. Lowenstein J.H., Swieka J.A.//Ann. of Phys. 1971. Vol. 68. P. 172—195.

7. Красников Н. В., Матвеев В. А., Рубаков В. А. и др.//ТМФ. 1980. Т. 45. С. 313—328.
8. Тавхелидзе А. Н., Токарев В. Ф.//ЭЧАЯ. 1985. Т. 16. Вып. 5. С. 973—1004.
9. Вайтман А. Проблемы в релятивистской динамике квантовых полей. М.: Наука, 1968.
10. Velo G.//Nuovo cimento. 1967. Vol. 52A. P. 1028—1037.
11. Адлер С., Дашен Р. Алгебры токов: Пер. с англ. М.: Мир, 1970; Де Альфаро В., Фубини С., Фурлан Г., Росетти К. Токи в физике адронов: Пер. с англ. М.: Мир, 1976.
12. Coleman S., Jackiw R., Susskind L.//Ann. of Phys. 1975. Vol. 93. P. 267—275.
13. Frohlich J., Morchio G., Strocchi F.//Phys. Lett. 1980. Vol. B97. P. 249—252.
14. Матвеев В. А., Тавхелидзе А. Н., Шапошников М. Е.//ТМФ. 1984. Т. 59. С. 323—344; Власов В. В., Матвеев В. А., Тавхелидзе А. Н. и др.//ЭЧАЯ. 1987. Т. 18. С. 5—38.
15. Rothe K.D., Swieka J.A.//Phys. Rev. 1977. Vol. D15. P. 541—543.
16. Nielsen H.B., Olesen P.//Nucl. Phys. 1973. Vol. B61. P. 45—61.
17. Арбузов Б. А., Тавхелидзе А. Н., Фаустов Р. Н.//ДАН СССР. 1961. Т. 139. С. 345—350.
18. Callan C.G., Dashen R., Gross D.J.//Phys. Rev. 1977. Vol. D16. P. 2526—2634.
19. Погребков А. К., Сушко В. Н.//ТМФ. 1975. Т. 24. С. 425—428, Mandelstam S.//Phys. Rev. 1975. Vol. D11. P. 3026—3030; Colleman S.//Ibid. P. 2088—2093.
20. Polyakov A.//Nucl. Phys. 1977. Vol. B120. P. 429—458.
21. Dietz K., Filk Th.//Nucl. Phys. 1980. Vol. B164. P. 535—544.
22. Токарев В. Ф.//ТМФ. 1983. Т. 54. С. 111—123.
23. Поляков А. М.//Письма в ЖЭТФ. 1974. Т. 20. С. 430—432. 't Hooft G.//Nucl. Phys. 1974. Vol. B79. P. 276—284.
24. Prasad M.K., Sommerfield C.H.//Phys. Rev. Lett. 1975. P. 760—763; Богомольный Е. Б.//ЯФ. 1976. Т. 24. С. 449—454.
25. Vergeles S.N.//Nucl. Phys. 1979. Vol. B152. P. 330—344.
26. Jackiw R., Rebbi C.//Phys. Rev. 1977. Vol. D13. P. 3398—3409.
27. Belavin A.A., Polyakov A. M., Schwartz A.S., Tyupkin Yu.S.//Phys. Lett. 1975. Vol. B59. P. 85—87.
28. Callan C.G., Dashen R.F., Gross D.J.//Phys. Rev. 1979. Vol. D19. P. 1826—1855.
29. Токарев В. Ф.//ТМФ. 1984. Т. 58. С. 354—366; Тр. междунар. семинара, Тбилиси, 1984. М.: ИЯИ, 1985. Т. 2. С. 14—19. Препринт ИЯИ Р-0406, 1985; ТМФ. 1987. Т. 73. С. 223—233.
30. 't Hooft G.//Phys. Rev. 1976. Vol. D14. P. 3432—3450.
31. Lee C., Bardeen W.A.//Nucl. Phys. 1979. Vol. B153. P. 210—236.
32. Ilgenfritz E.M., Mueller-Preußker M.//Nucl. Phys. 1981. Vol. B184. P. 443—460.
33. Dyakonov D.I., Petrov V.Yu.//Nucl. Phys. 1984. Vol. B245. P. 259—268.
34. Shuryak E.V.//Phys. Rep. 1984. Vol. 115. P. 151—314.
35. Мусатов И. В., Токарев В. Ф.//Тр. междунар. семинара, Протвино, 1987; Проблемы физики высоких энергий и теории поля. М.: Наука, 1988. С. 343—348.
36. Вайнштейн А. И., Захаров В. И., Новиков В. А., Шифман М. А.//Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 29. С. 649—651.
37. Леонов И. В., Токарев В. Ф.//ТМФ. 1988. Т. 74. С. 192—202.
38. Ebert D., Volkov M.E.//Z. Phys. 1983. Vol. C16. P. 205—219.