

# ДИСПЕРСИОННЫЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ УЧЕТА МЕЗОННЫХ И КВАРК-ГЛЮОННЫХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ В АДРОН-АДРОННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ ПРИ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ЭНЕРГИЯХ

*А. Н. Сафронов*

НИИ ядерной физики МГУ, Москва

Адрон-адронное рассеяние рассматривается в рамках  $S$ -матричного формализма с учетом обменов частицами (адронами) в  $t$ - и  $u$ -каналах и механизма взаимодействия, связанного с образованием компаунд-системы (кварк-глюонного мешка) в промежуточном состоянии в  $s$ -канале. Получено общее представление для парциальной амплитуды рассеяния, совместимое с унитарностью, аналитичностью, релятивистской инвариантностью и условием конфинмента. Установлена его связь с  $P$ -матричным формализмом Джаффе — Лоу. В предложенном подходе решение дисперсионных соотношений для парциальных амплитуд содержит полюсы типа КДД-полюсов некоторой «перенормированной» амплитуды, которые являются релятивистскими аналогами  $P$ -матричных полюсов и соответствуют собственным состояниям компаунд-системы. Эти полюсы несут информацию о взаимодействии на малых расстояниях, а динамические разрезы парциальной амплитуды, обусловленные обменными механизмами в  $t$ - и  $u$ -каналах, определяют периферическую часть взаимодействия. Вклады далеких сингулярностей сильно подавлены механизмом образования кварк-глюонного мешка. Это устраняет основную трудность мезонных теорий ядерных сил. Исследованы эффекты связи составного кваркового мешка с каналами рассеяния. Метод применяется для анализа  $NN$ -,  $лл$ -,  $лK$ -,  $лN$ - и  $KN$ -рассеяния при низких и промежуточных энергиях

The hadron-hadron scattering problem treated in the  $S$ -matrix formalism taking into account the exchange mechanisms corresponding to the transfer of particles (hadrons) in  $t$ - and  $u$ -channels and scattering via the formation of an intermediate compound system (quark-gluon bag) in the  $s$ -channel. The general representation for the partial-wave scattering amplitude compatible with the requirements of unitarity, analyticity, relativistic invariance and the confinement condition is obtained. Its connection to the Jaffe—Low  $P$ -matrix formalism is found. In the suggested approach the solution of the partial —wave dispersion relations contains the CDD-type poles of some «renormalized» amplitude which are the relativistic analogous of the  $P$ -matrix poles and can be attributed to the eigenstate levels of

the compound system.] These poles are connected with the interaction at short distances whereas the dynamical cuts of the partial-wave amplitude, generated by the exchange mechanisms in the  $t$ - and  $u$ -channels, determine the peripheral part of interaction. The distant singularities are strongly suppressed due to the quark bag effects. This removes the main difficulty of the meson theoretic approaches. The effects of coupling of the quark compound bag to the scattering channels are investigated. The method is applied to analysis of  $NN$ -,  $\pi\pi$ -,  $\pi K$ -,  $\pi N$ - and  $KN$ -scattering at low and intermediate energies.‡

## ВВЕДЕНИЕ

Мезонная картина сильных взаимодействий более полувека служила (а в значительной степени и в настоящее время служит) основой различных феноменологических или полупеноменологических подходов, используемых для описания процессов рассеяния адронов при низких и промежуточных энергиях (см., например [1—3]). Мезонные теории ядерных сил естественным образом описывают периферическую область взаимодействий, но сталкиваются с серьезными трудностями на малых расстояниях. Так, например, при использовании реалистических значений константы связи  $\omega$ -мезона с нуклоном в рамках мезонной теории трудно понять природу отталкивающего кода в  $NN$ -рассеянии [1, 4].

Несмотря на значительный прогресс в понимании свойств сильных взаимодействий на основе квантовой хромодинамики (КХД) [5—13], построение теории рассеяния адронов с учётом их кварк-глюонной структуры при низких и промежуточных энергиях, где важную роль играют непертурбативные эффекты, представляет собой весьма сложную и до сих пор не решенную проблему. Поэтому на современном этапе теоретических исследований большое значение имеют различные приближённые подходы, которые в той или иной мере позволяют учитывать свойства КХД. Кварк-глюонные системы исследовались с помощью правил сумм КХД [14—15], метода, основанного на  $1/N_c$ -разложении [16, 17], который приводит к топологическим киральным моделям [18—20], и калибровочных теорий на решётке [21—23]. Был предложен также ряд более феноменологических подходов [24—53]. Следует отметить, что с наибольшим успехом указанные методы применялись для описания статических свойств адронов.

Наряду с потенциальными моделями конститuentных кварков [24—30] с конца 60-х годов разрабатывался подход к моделированию свойств КХД, основанный на релятивистских моделях мешков [31—51]. В Дубненской модели кварковых мешков, впервые предложенной ещё в 1967 г. [31, 36], была реализована основная идея данного подхода, согласно которой адронные состояния формируются за счёт локализации (запирания) полей валентных кварков и глюонов в ограниченных пространственных полостях, опережающих размеры адронов. Дальнейшее развитие этот подход получил в модели мешков MIT [32—34], в которой были учтены эффекты, связанные с формиро-

ванием полости в физическом вакууме КХД и сформулировано условие равновесия мешка.

Модели мешков привели не только к успешному описанию статических свойств адронов [31—36], но и предсказали существование ряда многокварковых состояний [37—44], многие из которых, однако, не были обнаружены в спектре масс адронов. Расчёты, выполненные с помощью модели мешков MIT [32—34], предсказали, например, состояния  $Q^6$ -системы с квантовыми числами двух нуклонов в разных каналах и массами в области 2,16—2,4 ГэВ [40, 43], состояние  $Q^2\bar{Q}^2$ -системы с массой  $\sim 0,65$  ГэВ [37, 43] и квантовыми числами двух л-мезонов  $I = J = 0$  ( $I$  — изоспин,  $J$  — угловой момент) и ряд других состояний.

Массы указанных многокварковых систем вычисляются с помощью граничных условий модели MIT, обеспечивающих условие конфайнмента во всех, в том числе синглетных по цвету, каналах, в которых его не должно быть. Поэтому граничные условия модели MIT в синглетных по цвету каналах носят явно искусственный характер, и возникает вопрос о статусе многокварковых мешковых состояний. Джаффе и Лоу [54] предложили сопоставить этим состояниям (названных ими примитивами) не полюсы  $S$ -матрицы, как для обычных адронных состояний, а полюсы  $P$ -матрицы, тесно связанной с  $R$ -матрицей Вигнера — Айзенбуда [55]. В одноканальном случае  $P$ -матрица является логарифмической производной волновой функции, описывающей относительное движение сталкивающихся частиц при некотором значении  $r = b^*(r$  — относительное расстояние между центрами масс адронов), линейно связанном с радиусом  $R$  составного кваркового мешка, образующегося при слиянии адронных кварковых мешков в один общий мешок, т. е.

$$b = cR, \quad (1)$$

где  $c$  — коэффициент, для которого имеются простые оценки [43, 54]. Например, в случае безмассовых кварков [43]

$$c \cong 1,37 (n/n_1 n_2)^{1/2}, \quad (2)$$

где  $n_1, n_2$  — числа валентных кварков и антикварков в сталкивающихся адронах,  $n = n_1 + n_2$ .

Обработав имеющиеся экспериментальные данные по мезон-мезонному ( $\pi\pi, \pi K$ ) рассеянию с помощью  $P$ -матричного формализма, Джаффе и Лоу [54] обнаружили согласие между положением ближайших к порогу полюсов  $P$ -матрицы и расчётами масс низших состояний  $Q^2\bar{Q}^2$ -системы с квантовыми числами соответствующих каналов рассеяния, выполненными в рамках модели MIT. Вслед за работой [54] были проведены  $P$ -матричные анализы и других процессов адрон-адронного рассеяния, которые убедительно показали, что по крайней мере ближайšie к порогу полюсы  $P$ -матрицы отвечают низшим уров-

\*  $b$  принято называть радиусом эквивалентного адронного мешка.

ням составных кварковых мешков [56—64]. В частности, модель вращающихся кварковых мешков [44] использовалась для интерпретации данных по дибарионным резонансам [65].

Подход Джаффе и Лоу [54] получил дальнейшее развитие в предложенной Ю. А. Симоновым квантовомеханической модели составных кварковых мешков (СКМ) [66, 67], в которой полная волновая функция системы представляется в виде суммы  $\Psi_{С1} + \Psi_Q$ , где  $\Psi_{С1}$  описывает относительное движение адронов как кварковых кластеров, а  $\Psi_Q$  — волновая функция СКМ. В первоначальной версии модели СКМ [66] предполагалось, что кварковый и адронный каналы ортогональны друг другу и связаны между собой только в бесконечно узкой области на поверхности кваркового мешка. В последующей версии модели СКМ [67, 68] ортогональность адронных и кварковых каналов, вообще говоря, не предполагается. В этом варианте модели эффективное взаимодействие адронов на малых расстояниях описывается нелокальным, зависящим от энергии потенциалом вида  $V_Q(r, r'; E) = \sum_v f_v(r, E) f_v(r', E) (E - E_v)^{-1}$ , где формфакторы

$f_v(r, E)$  имеют вид суммы двух слагаемых, одно из которых определяет поверхностное взаимодействие адронного канала с составным кварковым мешком, а другое слагаемое — объёмное взаимодействие, возникающее вследствие указанной неортогональности и содержащее линейную зависимость от энергии. Модель СКМ применялась для анализа процессов  $NN$ -[69—77],  $\pi N$ -[78],  $KN$ -[79] рассеяния и некоторых других адронных систем [76, 77, 80, 81].

Для описания адрон-адронного рассеяния де Тар предложил [82, 83] двухцентровую модель мешков MIT. Процедура, с помощью которой вычисляется эффективный адрон-адронный потенциал в уравнении Шредингера в методе де Тара, основана на использовании адиабатического приближения, что вряд ли можно считать оправданным применительно к описанию процессов адрон-адронного рассеяния при промежуточных энергиях. Отметим также теорию расширения нерелятивистских гамильтонианов с выходом в дополнительное пространство внутренних степеней свободы [84] и ряд других моделей [4, 85—87], подробное обсуждение которых, однако, выходит за рамки настоящего обзора.

В [88] впервые был предложен, а в последующих работах [89—102] развит и применен для анализа конкретных процессов релятивистски-инвариантный подход к проблеме учёта мезонных и кварк-глюонных степеней свободы в адрон-адронных взаимодействиях, основанный на использовании унитарности и аналитических свойств парциальных амплитуд рассеяния. В основе этого подхода лежит аналитическая теория  $S$ -матрицы, позволяющая с самого начала учесть наиболее фундаментальные физические принципы, которые предполагаются исходными при построении формализма: унитарность, аналитичность, релятивистскую инвариантность и требование конфайнмента.

В разд. 2—6 изложены теоретические основы развитого метода, а в разд. 7, 8 рассмотрены его применения для описания процессов  $NN$ -,  $\pi\pi$ -,  $\pi K$ -,  $\pi N$ - и  $KN$ - рассеяния при низких и промежуточных энергиях.

## 1. КОНФАЙНМЕНТ И АНАЛИТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ

Требование конфайнмента означает, что в физическом вакууме КХД могут свободно распространяться только бесцветные комплексы кварков и глюонов, т.е. адроны. По отношению к фундаментальным конститuentам адронов — кваркам и глюонам, а также цветным кластерам вакуум КХД представляет собой непрозрачную среду. Следует отметить, что строгая математическая формулировка конфайнмента в теории поля представляет определённую трудность [13], а исследование предложенных критериев конфайнмента [21, 52] требует разработки эффективных методов, не опирающихся на теорию возмущений. Можно, однако, сформулировать условие конфайнмента непосредственно на языке аналитической теории  $S$ -матрицы.

Действительно, эксперимент по рассеянию частиц с принципиальной точки зрения заключается в следующем. Фиксируется начальное состояние двух или большего числа бесконечно удалённых друг от друга невзаимодействующих частиц (кулоновское и гравитационное взаимодействия предполагаем для простоты «выключенными»), которому можно сопоставить вектор состояния системы  $|\alpha, in\rangle$ , отнесенный к бесконечно удалённому в прошлое моменту времени ( $t = -\infty$ ). После того как частицы сблизятся и провзаимодействуют между собой, фиксируется конечное состояние, которое описывается вектором  $|\beta, out\rangle$ , отнесенным к бесконечно удалённому в будущее моменту времени ( $t = \infty$ ). Подчеркнем, что термин «частица» в данном контексте используется для обозначения любых, в том числе составных, объектов (адронов, ядер), входящих в состав асимптотических  $in$ - и  $out$ -состояний и разделённых бесконечно большими пространственноподобными интервалами. При этом гиперповерхности, на которых определены  $in$ - и  $out$ -состояния, разделены бесконечно большим времениподобным интервалом.

Под составными объектами понимаются комплексы, состоящие из элементарных конститuentов, локализованных в ограниченных областях конфигурационного пространства. Частицы, входящие в состав асимптотических состояний, являются реальными, т.е. находящимися на массовых поверхностях ( $p_i^2 = m_i^2$ , где  $p_i$  — 4-импульс  $i$ -й частицы,  $m_i$  — её масса). Условие конфайнмента заключается в том, что ни сами кварки и глюоны, ни любые их комплексы, не образующие цветосинглетных объектов, не могут реализоваться в природе в качестве «частиц», входящих в состав асимптотических  $in$ - и  $out$ -состояний.

Основными принципами построения теории примем следующие постулаты, составляющие фундамент аналитической теории  $S$ -мат-

рицы (см., например, [103]): 1) принцип суперпозиции; 2) полнота и ортогональность in- и out-состояний; 3) существование унитарного  $S$ -оператора, связывающего наборы in- и out-состояний; 4) лоренц-инвариантность  $S$ -оператора; 5) свойство кластерной сепарабельности [104], являющееся следствием конечности радиуса сильных взаимодействий; 6) максимальная аналитичность первой степени, согласно которой единственными сингулярностями  $S$ -матрицы могут быть полюсы, отвечающие одночастичным состояниям, а также разрезы, порождаемые этими полюсами благодаря условию унитарности.

Унитарность  $S$ -матрицы, как известно, физически означает, что сумма вероятностей переходов во все каналы в процессе рассеяния равняется единице, а аналитичность является следствием одного из наиболее фундаментальных физических принципов, определяющих динамику взаимодействия — принципа микропричинности [105, 106]. Требования унитарности и аналитичности с неизбежностью ведут к тому, что  $S$ -матрица должна иметь точки ветвления по инвариантным переменным, которые определяются порогами каналов рассеяния. Смысл шестого постулата заключается в том, что он требует наличия на физическом листе у  $S$ -матрицы, помимо полюсов, отвечающих одночастичным состояниям, лишь тех сингулярностей, которые необходимы для выполнения условий унитарности во всех возможных каналах рассеяния.

Таким образом, из принципа аналитичности следует, что только частицы на их массовых поверхностях, входящие в состав асимптотических in- и out-состояний, могут генерировать сингулярности на физическом листе в амплитудах рассеяния. Поэтому в сильных взаимодействиях источником указанных сингулярностей в силу требований конфайнмента могут быть лишь бесцветные комплексы, т.е. адронные состояния. Вычеты амплитуд рассеяния в полюсах и скачки на разрезах определяются перенормированными константами связи и амплитудами процессов с частицами на их массовых поверхностях (правило Катковского [107]).

Итак, проявления адронных степеней свободы на языке теории  $S$ -матрицы чётко определены — это те эффекты, которые обусловлены полюсами и разрезами амплитуды рассеяния на физическом листе по инвариантным переменным. Вместе с тем известно, что задание скачка парциальной амплитуды на динамическом разрезе и условие унитарности не определяют однозначно решение задачи рассеяния [103, 108, 109]. Ещё в середине 50-х годов высказывалась мысль о том, что указанная неоднозначность, связанная с наличием в решении полюсов Кастильехо — Далица — Дайсона (КДД), может быть обусловлена внутренней структурой частиц [108, 110]\*.

Следует, конечно, иметь в виду, что практически невозможно рассчитать вклады далёких от физической области динамических разре-

\* Впервые наличие такой неоднозначности было проиллюстрировано на примере решения уравнения Лоу [108].

зов, которые соответствуют механизмам адронных обменов на малых расстояниях. В свете новых представлений о природе сильных взаимодействий ясно, однако, что на малых расстояниях решающую роль должна играть кварк-глюонная структура адронов. Принципиально важное значение при этом имеет эффект «асимптотической свободы» [7, 8]. Поэтому проблема построения общего представления для  $S$ -матрицы, совместимого с указанными фундаментальными физическими принципами в излагаемом ниже подходе [88—102], решается таким образом, чтобы взаимодействие в системе на малых расстояниях (порядка радиуса конфайнмента) можно было трактовать в терминах кварк-глюонных состояний. Что касается взаимодействия в периферической области, то оно определяется ближайшими динамическими разрезами и описывается на языке адронных обменов. Таким образом, этот подход позволяет сочетать мезонную картину ядерных сил на больших расстояниях с кварк-глюонной картиной на малых расстояниях.

## 2. РЕШЕНИЕ ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ ПАРЦИАЛЬНЫХ АМПЛИТУД МЕТОДОМ ОБОБЩЕННЫХ $R$ -ФУНКЦИЙ

Рассмотрим для простоты случай одноканального рассеяния двух бесспиновых частиц с равными массами  $m$ . Приведенная парциальная амплитуда  $A_l(s)$ , связанная с парциальной  $S$ -матрицей равенством

$$S_l = 1 + 2i\rho_l(s) A_l(s), \quad (3)$$

где

$$\rho_l(s) = 2k^{2l+1}/\sqrt{s}, \quad (4)$$

$s$  — квадрат энергии системы в с.ц.и.,  $k = (s/4 - m^2)^{1/2}$  — относительный импульс сталкивающихся частиц, кроме правого (унитарного) разреза  $C_R$  ( $s_R \leq s < \infty$ ,  $s_R = 4m^2$ ), имеет левый (динамический) разрез  $C_L$  на действительной оси ( $-\infty < s \leq s_L$ ), скачок на котором  $\text{Im } A_l(s)$ , обусловленный адронными обменами в  $t$ - и  $u$ -каналах, будем считать заданной величиной. Общее решение задачи рассеяния, совместимое с исходными требованиями, находится в два этапа. На первом этапе строится некоторое частное решение, содержащее динамический разрез амплитуды  $A_l(s)$  и зависящее от внешнего параметра  $b$ , который определяет разделение взаимодействия на «внешнюю» и «внутреннюю» части. В итоге на втором этапе проблема сводится к построению обобщенной  $R$ -функции [111] с заданным скачком на правом разрезе.

Итак, представим парциальную  $S$ -матрицу (1) в виде

$$S_l = \frac{D_l^{(-)}(b, s)}{D_l^{(+)}(b, s)} \tilde{S}_l, \quad (5)$$

где функция  $D_l^{(+)}(b, s)$  имеет только правый разрез  $C_R$ , а  $D_l^{(-)}(b, s)$  является аналитическим продолжением  $D_l^{(+)}(b, s)$  на второй лист римановой поверхности по переменной  $s$  относительно разреза  $C_R$ .

Для расчёта этих функций ниже будет сформулирована система уравнений. Введём функцию  $\tilde{A}_l(b, s)$ , называемую в дальнейшем перенормированной амплитудой (ПА), согласно определению

$$\tilde{S}_l = 1 + 2i\rho_l(b, s) \tilde{A}_l(b, s), \quad (6)$$

где

$$\tilde{\rho}_l(b, s) = \rho_l(s) [D_l^{(+)}(b, s) D_l^{(-)}(b, s)]^{-1}. \quad (7)$$

Из (3) — (7) следует, что  $A_l(s)$  и  $\tilde{A}_l(b, s)$  связаны между собой равенством

$$A_l(s) = \bar{A}_l(b, s) + [D_l^{(+)}(b, s)]^{-2} \tilde{A}_l(b, s), \quad (8)$$

где

$$\bar{A}_l(b, s) = [D_l^{(-)}(b, s)/D_l^{(+)}(b, s) - 1]/2i\rho_l(s). \quad (9)$$

Потребуем, чтобы ПА  $\tilde{A}_l(b, s)$  не имела левого разреза  $C_L$ . Поскольку  $\text{disc } D_l^{(+)}(b, s) = 0$  на  $C_L$ , из (8) следует, что это требование эквивалентно следующему условию на динамическом разрезе:

$$\text{disc } A_l(s) = \text{disc } \bar{A}_l(b, s). \quad (10)$$

Функции  $D_l^{(\pm)}(b, s)$  представим в виде

$$D_l^{(\pm)}(b, s) = d_l^{(\pm)}(bk) \Delta_l^{(\pm)}(b, s), \quad (11)$$

где

$$d_l^{(+)}(x) = ix^l h_l^{(+)}(x)/(2l-1)!!, \quad d_l^{(-)}(x) = d_l^{(+)}(-x), \quad (12)$$

$h_l^{(+)}(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} H_{l+1/2}^{(+)}(x)$  — функция Риккати — Ганкеля первого рода. Аналитические свойства функций  $d_l^{(\pm)}(x)$  рассмотрены в приложении А.

Физический смысл представления  $S$ -матрицы в виде (5) — (12) проще всего понять из рассмотрения картины рассеяния в конфигурационном представлении с помощью точно решаемых моделей. В разд. 5 мы обсудим этот вопрос более подробно.

Определим амплитуду  $T_l(b, s)$ , связанную с  $\bar{A}_l(b, s)$  (9) равенством

$$\bar{A}_l(b, s) = \frac{d_l^{(-)}(bk)/d_l^{(+)}(bk) - 1}{2i\rho_l(s)} + [d_l^{(+)}(bk)]^{-2} T_l(b, s). \quad (13)$$

С учётом (9), (11), (13)  $T_l(b, s)$  можно записать в виде отношения двух функций:

$$T_l(b, s) = n_l(b, s)/\Delta_l(b, s), \quad (14)$$



где

$$n_l(b, s) = [\Delta_l^{(-)}(b, s) - \Delta_l^{(+)}(b, s)]/2i\rho_l(s); \quad (15)$$

$$\Delta_l(b, s) = \Delta_l^{(+)}(b, s), \quad (16)$$

причём  $\Delta_l(b, s)$  имеет только правый разрез, а  $n_l(b, s)$  — только левый разрез на физическом листе. Условие унитарности для  $T_l(b, s)$  имеет вид

$$\text{Im } T_l^{-1}(b, s) = -\sigma_l(b, s) \theta(s - 4m^2), \quad (17)$$

где  $\sigma_l(b, s) = \rho_l(s) [d_l^{(+)}(bk) d_l^{(-)}(bk)]^{-1}$ ;

$$\theta(x) = 1 \quad (0); \quad x > 0 \quad (x < 0). \quad (18)$$

Из (10) и (14) с учётом принципа Шварца для функций  $A_l(s)$  и  $\bar{A}_l(b, s)$  [ $A_l(s^*) = A_l^*(s)$ ,  $A_l(b, s^*) = \bar{A}_l^*(b, s)$ ] следует, что скачок  $T_l(b, s)$  связан со скачком  $A_l(s)$  на динамическом разрезе  $C_L$  равенством

$$\begin{aligned} \text{Im } T_l(b, s) = \text{Im } A_l(s) [R_l^{(+)}(s)]^2 \exp(-b \sqrt{4m^2 - s}) \times \\ \times \theta(s_L - s) + \frac{(-1)^l}{2} |\rho_l(s)|^{-1} R_l^{(+)}(s) [R_l^{(-)}(s) - \\ - R_l^{(+)}(s) \exp(-b \sqrt{4m^2 - s})] \theta(-s), \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$R_l^{(\pm)}(s) = 1 + \sum_{n=1}^l a_n^{(l)} \left( \pm \frac{b}{2} \sqrt{4m^2 - s} \right)^n, \quad (20)$$

$a_n^{(l)}$  — положительные коэффициенты (A.2).

Заметим, что второе слагаемое в правой части (19), обусловленное релятивистскими эффектами, при  $s \rightarrow -\infty$  стремится к положительной константе. Чтобы избежать некоторого технического неудобства, связанного с тем, что  $\text{Im } T_l(b, s)$  (19) не стремится к нулю при  $s \rightarrow -\infty$ , модифицируем определение (3) амплитуды, выполнив заме-

ну  $\rho_l(s) \rightarrow \rho_l(s) \sqrt{\frac{s+s_a}{4m^2+s_a}}$ , где  $s_a$  — большая положительная константа ( $s_a \gg 4m^2$ ), играющая роль параметра обрезания. В области  $|s| \ll s_a$  модифицированное определение  $A_l(s)$  отличается от стандартного на исчезающе малую величину. Однако в этом случае второе слагаемое в выражении для скачка  $T_l(b, s)$  будет содержать дополнительный обрезывающий фактор вида  $\theta(s + s_a)$  [95, 101].

В результате для расчёта функций  $n_l(b, s)$ ,  $\Delta_l(b, s)$  получаем систему линейных интегральных уравнений

$$n_l(b, s) = \frac{1}{\pi} \int_{-s_a}^{s_L} \frac{\text{Im } T_l(b, s') \Delta_l(b, s')}{s' - s} ds'; \quad (21)$$

$$\Delta_l(b, s) = 1 - \frac{s - s_0}{\pi} \int_{s_R}^{\infty} \frac{\sigma_l(b, s') n_l(b, s')}{(s' - s - i\eta)(s - s_0)} ds'. \quad (22)$$

Уравнения (21), (22) внешне похожи на обычные уравнения  $N/D$ -метода [103, 109]. Но это только внешнее сходство. Между ними имеются принципиальные различия. Наиболее важное различие состоит в том, что в выражении для  $\text{Im } T_l(b, s)$  на динамическом разрезе (19) первое слагаемое, пропорциональное скачку  $A_l(s)$ , содержит экспоненциально убывающий фактор при  $s \rightarrow -\infty$ , который подавляет вклад далёких от физической области динамических сингулярностей. Поэтому решения уравнений (21), (22) определяются в основном ближайшими к физической области сингулярностями амплитуды рассеяния по инвариантам  $t$  и  $u$ . Другое различие связано с видом спектральной функции  $\sigma_l(b, s)$  (18) в уравнении (22). При  $s \rightarrow s_R$  она имеет пороговое поведение  $k^{2l+1}$  и  $\sim \sqrt{s}$  при  $s \rightarrow \infty$ . По этой причине решение системы уравнений (21), (22) для произвольных  $l$  не встречает трудностей, свойственных обычным уравнениям  $N/D$ -метода\* (см., например, [112]).

Таким образом, задание  $\text{Im } A_l(s)$  на  $C_L$  и параметра  $b$  фиксирует с помощью уравнений (21), (22) и соотношений (11), (19) определение функций  $D_l^{\pm}(b, s)$  в равенствах (5), (7), (9). Подчёркнём, что с формальной точки зрения использованный конкретный способ построения функций  $D_l^{\pm}(b, s)$ , разумеется, ни в коей мере не ограничивает общности искомого решения для  $S$ -матрицы, поскольку никаких ограничений на  $\tilde{S}_l$  в формуле (5) не предполагается. Получим теперь общее решение для перенормированной амплитуды  $\tilde{A}_l(b, s)$ , которая не имеет левого разреза и удовлетворяет условию унитарности в виде

$$\text{Im } \tilde{A}_l(b, s) = \tilde{\rho}_l(b, s) |\tilde{A}_l(b, s)|^2 \theta(s - 4m^2). \quad (23)$$

Далее будем предполагать, что функция  $\Delta_l(b, s)$ , определяемая из решения системы уравнений (21), (22), не имеет нулей на первом листе в  $s$ -плоскости (т.е. при включении одной только «внешней» части взаимодействия в системе отсутствуют связанные состояния). В противном случае следует несколько модифицировать дальнейшее рассмотрение с учётом этих нулей.

Если предположить, что  $A_l(s) \rightarrow 0$  при  $|s| \rightarrow \infty$ , то, как легко убедиться, на физическом листе  $\tilde{A}_l(b, s)$  тоже стремится к нулю при  $|s| \rightarrow \infty$  и, следовательно, для неё можно записать дисперсионное

\* В обычных  $N/D$ -уравнениях спектральная функция, являющаяся аналогом функции  $\sigma_l(b, s)$  в уравнении (22), растет при  $s \rightarrow \infty$  как  $s^{l+1/2}$ ; это приводит к тому, что уравнения в случае  $l > 0$ , строго говоря, не имеют решений, если скачок парциальной амплитуды на левом разрезе не удовлетворяет некоторым специальным требованиям, зависящим от динамики взаимодействия. Обычно указанная трудность преодолевается введением обрезающего фактора в спектральную функцию в области больших  $s$ .

соотношение

$$\tilde{A}_l(b, s) = - \sum_{n=1}^N \frac{\beta_{ln}}{s - \alpha_{ln}} + \frac{1}{\pi} \int_{s_R}^{\infty} \frac{\tilde{\rho}_l(b, s') |\tilde{A}_l(b, s')|^2}{s' - s - i\eta} ds', \quad (24)$$

где полюсы в точках  $s = \alpha_{ln}$  соответствуют связанным состояниям системы; вычеты  $\beta_{ln}$  в этих полюсах являются действительными положительными константами. Перенормированная амплитуда  $\tilde{A}_l(b, s)$  обладает следующими свойствами: 1) она является мероморфной функцией в  $s$ -плоскости с разрезом на действительной оси ( $s_R < < s < \infty$ ); 2)  $\tilde{A}_l^*(b, s) = \tilde{A}_l(b, s^*)$  и 3) для точек комплексной  $s$ -плоскости, не принадлежащих участку действительной оси  $s > s_R$ , справедливо равенство

$$\text{Im } \tilde{A}_l(b, s) = \Lambda_l(s) \text{Im } s, \quad (25)$$

где

$$\Lambda_l(s) = \sum_{n=1}^N \frac{\beta_{ln}}{|s - \alpha_{ln}|^2} + \frac{1}{\pi} \int_{s_R}^{\infty} \frac{\tilde{\rho}_l(b, s') |\tilde{A}_l(b, s')|^2}{|s' - s|^2} ds' \quad (26)$$

— действительная положительно определённая функция.

Если все константы  $\beta_{ln}$  равны нулю (т.е. система не имеет связанных состояний), то функция  $\tilde{A}_l(b, s)$  не может иметь нулей нигде, кроме точек действительной оси в области  $s \geq s_R$ . При наличии в системе  $N$  связанных состояний, как легко убедиться из анализа выражения (24), на отрезках действительной оси между пороговой точкой  $s = s_R$  и первым полюсом, а также между двумя соседними полюсами функция  $\tilde{A}_l(b, s)$  может иметь по одному нулю. Таким образом, при  $s < s_R$   $\tilde{A}_l(b, s)$  может иметь не более  $N$  нулей. Перечисленные свойства свидетельствуют о том, что  $\tilde{A}_l(b, s)$  является обобщённой  $R$ -функцией с правым разрезом на действительной оси ( $s_R \leq s < \infty$ ). Рассмотрение свойств обратной функции  $\tilde{A}_l^{-1}(b, s)$  приводит к выводу, что она также является обобщённой  $R$ -функцией с известным значением скачка на правом разрезе. С помощью теоремы Герглота [108, 111] получаем для неё общее решение в виде

$$\tilde{A}_l^{-1}(b, s) = \tilde{P}_l(b, s) - \frac{s - s_0}{\pi} \int_{s_R}^{\infty} \frac{\tilde{\rho}_l(b, s')}{(s' - s - i\eta)(s' - s_0)} ds'; \quad (27)$$

$$\tilde{P}_l(b, s) = a_l(b, s_0) - c_l(b) s + s \sum_i \frac{\gamma_{li}(b)}{s_{li}(b) [s - s_{li}(b)]}, \quad (28)$$

где  $a_l(b, s_0)$ ,  $c_l(b)$ ,  $\gamma_{li}(b)$ ,  $s_{li}(b)$  — действительные константы, параметрически зависящие от  $b$ , причём  $c_l(b)$ ,  $\gamma_{li}(b) \geq 0$ ; если система не имеет связанных состояний, то все константы  $s_{li}(b) > s_R$ , а

при наличии  $N$  связанных состояний не более  $N$  полюсов в выражении (28) могут находиться ниже порога, причём, между порогом  $s_R$  и точкой  $s = \max \{\alpha_{ln}\}$ , а также между двумя соседними точками  $s = \alpha_{lm}, \alpha_{lm+1}$  ( $m = 1, \dots, N - 1$ ) выражение (28) может иметь не более одного полюса.

Полюсы функции  $\tilde{P}_l(b, s)$  являются нулями перенормированной амплитуды  $\tilde{A}_l(b, s)$ , что даёт нам основание назвать их КДД (ПА)-полюсами. Такая терминология принята нами лишь с учётом определённой математической аналогии полюсов выражения (28) с полюсами, которые были введены в теорию рассеяния Кастильехо, Далицем и Дайсоном. Однако прямого отношения они друг к другу не имеют.

Покажем, что из представления (27), (28) следуют определённые ограничения на константы  $\beta_{ln}$  в выражении (24). Действительно, из указанных формул следует соотношение

$$\beta_{ln} = \left\{ c_l(b) + \sum_i \frac{\gamma_{li}(b)}{[s_{li}(b) - \alpha_{ln}]^2} + J_{ln}(b) \right\}^{-1}, \quad (29)$$

где

$$J_{ln}(b) = \frac{1}{\pi} \int_{s_R}^{\infty} \frac{\tilde{\rho}_l(b, s')}{(s' - \alpha_{ln})^2} ds' > 0, \quad (30)$$

из которого с учётом положительности констант  $c_l(b), \gamma_{li}(b)$  получаем неравенство

$$\beta_{ln} \leq J_{ln}^-(b). \quad (31)$$

В результате для вершинной константы, связанной с вычетом парциальной амплитуды соотношением

$$g_{ln}^2 = (-1)^{l+1} m^{-1} \lim_{s \rightarrow \alpha_{ln}} [(s - \alpha_{ln}) k^{2l} A_l(s)], \quad (32)$$

из неравенства (31) получаем ограничение [101, 113, 114]

$$g_{ln}^2 \leq \kappa_{ln}^{2l} m^{-1} J_{ln}^{-1}(b) [D_l^{(+)}(b, \alpha_{ln})]^{-2}, \quad (33)$$

где  $\kappa_{ln} = (m^2 - \alpha_{ln}/4)^{1/2}$ . Можно показать [114], что неравенство (33) остаётся в силе и при учёте связи с неупругими каналами.

Если предположить, что парциальная амплитуда не имеет левого разреза, то в случае  $S$ -волнового рассеяния в нерелятивистском пределе [при этом  $\rho_0(s)$  следует заменить на  $(s/4m^2 - 1)^{1/2}$ ] из (33) получаем неравенство

$$g_{0n}^2 \leq 2\kappa_{0n} \exp(2b\kappa_{0n}). \quad (34)$$

Это ограничение ранее было получено Рудерманом и Газиоровичем [115] в предположении, что потенциал, определяющий взаимодействие двух нерелятивистских частиц, отличен от нуля в области

$r \leq b$ . Неравенство (33) можно рассматривать как обобщение результатов Рудермана — Газиоровича [115] и Грибова — Зельдовича — Переломова [116] на (релятивистский) случай, когда парциальная амплитуда имеет левый разрез. Ограничение на вершинную константу в [116] получено методом дисперсионных соотношений с помощью теории  $R$ -функций в предположении нулевого радиуса сил. Отметим, что вопрос об ограничениях на вершинные константы в рамках аксиоматического подхода к квантовой теории поля на основе представления Лемана — Челлена исследовался в [117].

### 3. ОБОБЩЕНИЕ ФОРМАЛИЗМА НА МНОГОКАНАЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ

Обобщим полученное в предыдущем разделе представление для парциальной амплитуды упругого рассеяния на многоканальный случай. Рассмотрим переходы между двухчастичными состояниями  $|\lambda\rangle$ , характеризующимися наборами квантовых чисел  $\lambda$ . Парциальные амплитуды при заданном полном угловом моменте системы  $J$  образуют квадратную матрицу  $\hat{A}_J(s)$  размерности  $N \times N$  ( $N$  — число явно учитываемых двухчастичных каналов), связанную с  $S$ -матрицей соотношением

$$\hat{S}_J = \hat{I} + 2i\hat{\rho}^{1/2}(s)\hat{A}_J(s)\hat{\rho}^{1/2}(s), \quad (35)$$

где  $\hat{\rho}(s)$  — диагональная матрица с матричными элементами\*

$$\langle \lambda' | \hat{\rho}(s) | \lambda \rangle = \delta_{\lambda'\lambda} \rho_\lambda(s) \theta(s - 4m^2), \quad (36)$$

причём  $\rho_\lambda(s)$  определяется выражением вида (4), в котором  $k$  и  $l$  следует заменить соответственно на относительный импульс  $k_\lambda = (s/4 - m_\lambda^2)^{1/2}$  и орбитальный момент  $l_\lambda$  в канале  $\lambda$ .

Матрицу парциальных амплитуд  $\hat{A}_J(s)$  представим в виде

$$\hat{A}_J(s) = \hat{A}_J(\mathbf{b}, s) + [\hat{D}_J^T(\mathbf{b}, s)]^{-1} \hat{\tilde{A}}_J(\mathbf{b}, s) [\hat{D}_J(\mathbf{b}, s)]^{-1}, \quad (37)$$

где символ  $T$  означает транспонирование,  $\mathbf{b} = \{b_\lambda\}$  — совокупность  $N$  внешних параметров;

$$\hat{\tilde{A}}_J(\mathbf{b}, s) = \hat{N}_J(\mathbf{b}, s) \hat{D}_J^{-1}(\mathbf{b}, s), \quad (38)$$

причём матричные элементы  $\hat{D}_J(\mathbf{b}, s)$  имеют только правые разрезы, а матричные элементы  $\hat{N}_J(\mathbf{b}, s)$  — только левые разрезы, и в физической области справедливо равенство

$$\text{Im } \hat{D}_J(\mathbf{b}, s) = -\hat{\rho}(s) \hat{N}_J(\mathbf{b}, s). \quad (39)$$

\* Массы частиц  $m_\lambda$  в каждом из двухчастичных каналов предполагаются для простоты равными.

Сформулируем прежде всего уравнения для матриц  $\hat{D}_J(\mathbf{b}, s)$  и  $\hat{A}_J(\mathbf{b}, s)$ . Симметричную матрицу  $\hat{A}_J(\mathbf{b}, s)$  запишем в виде

$$\hat{A}_J(\mathbf{b}, s) = \hat{A}_0(\mathbf{b}, s) + \hat{d}^{-1}(\mathbf{b}, s) \hat{T}_J(\mathbf{b}, s) \hat{d}^{-1}(\mathbf{b}, s), \quad (40)$$

где  $d(\mathbf{b}, s)$ ,  $\hat{A}_0(\mathbf{b}, s)$  — диагональные матрицы с матричными элементами

$$\langle \lambda' | \hat{d}(\mathbf{b}, s) | \lambda \rangle = \delta_{\lambda' \lambda} d_{i_\lambda}^{(+)}(b_\lambda k_\lambda); \quad (41)$$

$$\langle \lambda' | \hat{A}_0(\mathbf{b}, s) | \lambda \rangle = \delta_{\lambda' \lambda} [d_{i_\lambda}^{(-)}(b_\lambda k_\lambda) / d_{i_\lambda}^{(+)}(b_\lambda k_\lambda) - 1] / 2i \rho_\lambda(s).$$

Здесь  $d_{i_\lambda}^{(\pm)}(x)$  — функции (12),  $\hat{T}_J(\mathbf{b}, s)$  — симметричная матрица, для которой условие унитарности имеет вид

$$\text{Im } \hat{T}_J^{-1}(\mathbf{b}, s) = -\hat{\sigma}_J(\mathbf{b}, s), \quad (42)$$

причём матричные элементы матрицы  $\hat{\sigma}_J(\mathbf{b}, s)$  определяются выражением

$$\langle \lambda' | \hat{\sigma}_J(\mathbf{b}, s) | \lambda \rangle = \delta_{\lambda' \lambda} \rho_\lambda(s) [d_{i_\lambda}^{(+)}(b_\lambda k_\lambda) d_{i_\lambda}^{(-)}(b_\lambda k_\lambda)]^{-1}. \quad (43)$$

Полагая

$$\hat{D}_J(\mathbf{b}, s) = \hat{d}(\mathbf{b}, s) \hat{\Delta}_J(\mathbf{b}, s), \quad (44)$$

для  $\hat{T}_J(\mathbf{b}, s)$  получаем выражение вида

$$\hat{T}_J(\mathbf{b}, s) = \hat{n}_J(\mathbf{b}, s) \hat{\Delta}_J^{-1}(\mathbf{b}, s), \quad (45)$$

где матричные элементы  $\hat{\Delta}_J(\mathbf{b}, s)$  имеют только правые разрезы, а матричные элементы  $\hat{n}_J(\mathbf{b}, s)$  — левые разрезы. Потребуем, чтобы на динамических разрезах выполнялось соотношение

$$\text{Im } \hat{A}_J(s) = \text{Im } \hat{A}_J(\mathbf{b}, s), \quad (46)$$

и нормируем  $\hat{\Delta}_J(\mathbf{b}, s)$  на единичную матрицу при  $|s| \rightarrow \infty$ . Тогда для расчета  $\hat{n}_J(\mathbf{b}, s)$ ,  $\hat{\Delta}_J(\mathbf{b}, s)$  можно записать систему интегральных уравнений вида (21), (22), в которых функции  $n_l(b, s)$ ,  $\Delta_l(b, s)$ ,  $T_l(b, s)$  и  $\sigma_l(b, s)$  следует заменить соответственно матрицами  $\hat{n}_J(\mathbf{b}, s)$ ,  $\hat{\Delta}_J(\mathbf{b}, s)$ ,  $\hat{T}_J(\mathbf{b}, s)$  и  $\hat{\sigma}_J(\mathbf{b}, s)$ .

Для мнимых частей матричных элементов  $\hat{T}_J(\mathbf{b}, s)$  на левых разрезах с помощью соотношений (37), (46) легко получить выражение, являющееся аналогом выражения (19) в одноканальном случае. Вклады далёких от физической области динамических сингулярностей в нём, как и в случае одноканального рассеяния, подавлены экспоненциальными факторами.

После того как  $\hat{A}_J(\mathbf{b}, s)$ ,  $\hat{D}_J(\mathbf{b}, s)$  определены в результате решения указанных уравнений, задача сводится к нахождению матрицы  $\hat{\tilde{A}}_J(\mathbf{b}, s)$ . Условие унитарности для неё имеет вид

$$\text{Im } \hat{\tilde{A}}_J(\mathbf{b}, s) = \hat{A}_J^*(\mathbf{b}, s) \hat{\rho}_J(\mathbf{b}, s) \hat{A}_J(\mathbf{b}, s), \quad (47)$$

где

$$\hat{\rho}_J(\mathbf{b}, s) = [\hat{D}_J^*(\mathbf{b}, s)]^{-1} \hat{\rho}(s) [\hat{D}_J^T(\mathbf{b}, s)]^{-1} \quad (48)$$

— симметричная эрмитова матрица. Из (37), (46) следует, что  $\text{disc } \hat{\tilde{A}}_J(\mathbf{b}, s) = 0$  на  $C_L$ , и с учётом (47) для матрицы  $\hat{\tilde{A}}_J(\mathbf{b}, s)$  можно записать представление

$$\hat{\tilde{A}}_J(\mathbf{b}, s) = - \sum_{n=1}^N \frac{\hat{\beta}_{Jn}}{s - \alpha_{Jn}} + \frac{1}{\pi} \int_{s_R}^{\infty} \frac{\hat{A}_J^*(\mathbf{b}, s') \hat{\rho}_J(\mathbf{b}, s') \hat{A}_J(\mathbf{b}, s')}{s' - s - i\eta} ds', \quad (49)$$

где вычеты  $\hat{\beta}_{Jn}$  в полюсах, соответствующих связанным состояниям, являются действительными симметричными матрицами с равными нулю детерминантами. Можно показать, что диагональные матричные элементы  $\hat{\beta}_{Jn}$  являются неотрицательными константами.

Из представления (49) следует, что в комплексной  $s$ -плоскости вне точек действительной оси при  $s > s_R$  мнимые части диагональных матричных элементов матрицы  $\hat{\tilde{A}}_J(\mathbf{b}, s)$  пропорциональны мнимым частям аргумента  $s$ , т.е.

$$\text{Im } \langle \lambda | \hat{\tilde{A}}_J(\mathbf{b}, s) | \lambda \rangle = \Lambda_J^{(\lambda)}(s) \text{Im } s, \quad (50)$$

где  $\Lambda_J^{(\lambda)}(s)$  — положительно-определенные функции, что является характерным признаком обобщенной  $R$ -функции. Анализ выражения

(49) приводит к выводу, что  $\det \hat{\tilde{A}}_J(\mathbf{b}, s)$  может обращаться в нуль только на действительной оси, причем при отсутствии связанных состояний все нули должны быть расположены в области  $s > s_R$ , а в случае, если имеются связанные состояния, — при  $s > \min \{|\alpha_{Jn}|\}$ .

Как следует из равенства (47),  $\text{Im } \hat{\tilde{A}}_J^{-1}(\mathbf{b}, s)$  при  $s > s_R$  является известной величиной. В результате для  $\hat{\tilde{A}}_J(\mathbf{b}, s)$  получаем решение вида (27), (28), в котором  $\hat{A}_l(b, s)$ ,  $\hat{P}_l(b, s)$ ,  $\hat{\rho}_l(b, s)$ ,  $a_l(b, s_0)$ ,  $c_l(b)$ ,  $\gamma_{li}(b)$  следует заменить соответственно на матрицы  $\hat{\tilde{A}}_J(\mathbf{b}, s)$ ,  $\hat{\tilde{P}}_J(\mathbf{b}, s)$ ,  $\hat{\tilde{\rho}}_J(\mathbf{b}, s)$ ,  $\hat{a}_J(\mathbf{b}, s_0)$ ,  $\hat{c}_J(\mathbf{b})$ ,  $\hat{\gamma}_{Ji}(\mathbf{b})$ , а  $s_{li}(b)$  — заменить на  $s_{Ji}(\mathbf{b})$ ;

$\hat{a}_J(\mathbf{b}, s_0)$ ,  $\hat{c}_J(\mathbf{b})$ ,  $\hat{\gamma}_{Ji}(\mathbf{b})$  являются действительными симметричными матрицами. В точках  $s = s_{Ji}(\mathbf{b})$   $\det \hat{A}_J(\mathbf{b}, s)$  обращается в нуль. При наличии связанных состояний величины  $s_{Ji}(\mathbf{b})$  удовлетворяют условию  $s_{Ji}(\mathbf{b}) > \min \{\alpha_{Jn}\}$ , а при отсутствии связанных состояний  $s_{Ji}(\mathbf{b}) > s_R$ . Детерминанты матриц  $\hat{\beta}_{Jn}$ ,  $\hat{c}_F(\mathbf{b})$  и  $\hat{\gamma}_{Ji}(\mathbf{b})$  равны нулю, а диагональные матричные элементы неотрицательны.

#### 4. МЕТОД УЧЕТА ЭФФЕКТОВ НЕУПРУГОСТИ

При анализе процессов адрон-адронного рассеяния в области промежуточных энергий во многих случаях важно учитывать вклад неупругих каналов. В практических вычислениях с помощью дисперсионных уравнений обычно явно учитывается лишь небольшое число (как правило, один или два) двухчастичных каналов \*. Остальные, в том числе и многочастичные, каналы при этом могут быть учтены введением параметров неупругости и соответствующей переформулировкой уравнений. Имеются два основных метода учёта неупругих каналов в обычных одноканальных  $N/D$ -уравнениях — методы Фруассара [120] и Фрея — Варнока [121], в которых предполагается, что известен параметр неупругости  $\eta_i(s) = |S_i|$  во всей области энергий. Уравнения Фрея — Варнока [121] были обобщены Варноком [122] на многоканальный случай. Учёт неупругости в методе Варнока качественно меняет свойства многоканальных  $N/D$ -уравнений (они становятся сингулярными), и требуется довольно громоздкая процедура для того, чтобы свести их к эквивалентной система уравнений фредгольмовского типа.

Следует отметить, что даже такая практически важная задача, как построение матрицы рассеяния в случае двух связанных каналов с учётом эффектов неупругости, вплоть до 1982 г. не была решена удовлетворительно. Этот вопрос обсуждался в литературе (см., например, [123—125]) в связи с описанием данных по  $NN$ -рассеянию в области промежуточных энергий \*\*. Арндт и Ропер [123] предложили метод параметризации вклада неупругих каналов, основанный на  $K$ -матричном представлении парциальной  $S$ -матрицы. Действительная часть  $K$ -матрицы в этом методе выражается через параметры Сташпа [126] с помощью тех же соотношений, что и при отсутствии неупругости, а мнимая часть определяет вклад явно неучтённых неупругих

\* Методы включения в дисперсионные уравнения и трехчастичных каналов обсуждались в литературе (см., например, [118, 119]). Обычно, однако, эти методы (ввиду их сложности) сводят к некоторой модификации двухчастичных подходов.

\*\* Методы, использовавшиеся для параметризации вклада неупругих каналов в более ранних фазовых анализах  $NN$ -рассеяния, либо не удовлетворяют критерию общности, либо нарушают условие унитарности, если не требовать специальных ограничений на область изменения одних параметров в зависимости от значения других параметров [123].



каналов. Такой подход обладает рядом достоинств по сравнению с другими методами (более подробное обсуждение см. в [123—125]). В частности, метод Арндта и Ропера позволяет естественным образом учесть некоторые физические свойства амплитуд рассеяния. Обсуждаемая параметризация использовалась в новых фазовых анализах  $NN$  -[127, 128],  $\pi N$  -[129] и  $KN$  -[130] рассеяния при промежуточных энергиях.

В [131] была предложена новая формулировка многоканальных  $N/D$ -уравнений с учётом неупругости, основанная на  $K$ -матричном методе параметризации явно не рассматриваемых каналов, которая имеет преимущества по сравнению с методом Варнока [122]. Останемся на применении указанного подхода [131] для учёта эффектов неупругости в уравнениях, сформулированных в разд. 2, 3 [98].

Абсорбтивную часть  $K$ -матрицы, связанной с матрицей парциальных амплитуд  $\hat{A}_J(s)$  соотношением  $\hat{A}_J^i(s) = \hat{K}_J^i(s) - i\hat{\rho}(s)$ , выше порога явно неучтенных каналов  $s_I$  будем считать заданной величиной [наряду с  $\text{Im}\hat{A}_J(s)$  на динамических разрезах]. Представим  $\hat{A}_J(s)$  в виде

$$\hat{A}_J(s) = \hat{A}_J^i(s) + [\hat{D}_J^{i*}(s)]^{-1} \hat{A}_J^i(s) [\hat{D}_J^i(s)]^{-1}, \quad (51)$$

где

$$\hat{A}_J^i(s) = \hat{N}_J^i(s) [\hat{D}_J^i(s)]^{-1}, \quad (52)$$

причём матрицы  $\hat{N}_J^i(s)$  и  $\hat{D}_J^i(s)$  определим таким образом, что в физической области имеет место равенство

$$\text{Im} \hat{D}_J^i(s) = -\hat{\rho}(s) \text{Re} \hat{N}_J^i(s), \quad (53)$$

а выше порога явно неучтенных каналов

$$\text{Im} \hat{N}_J^i(s) = \hat{\zeta}_J(s) \text{Re} \hat{D}_J^i(s) \theta(s - s_I), \quad (54)$$

здесь

$$\hat{\zeta}_J(s) = \text{Im} \hat{K}_J(s) [\hat{I} + \hat{\rho}(s) \text{Im} \hat{K}_J(s)]^{-1} \quad (55)$$

— величина, полностью определяемая абсорбтивной частью  $K$ -матрицы.

Для расчёта матриц  $\text{Re} \hat{N}_J^i(s)$ ,  $\text{Re} \hat{D}_J^i(s)$  запишем систему уравнений

$$\text{Re} \hat{N}_J^i(s) = \frac{1}{\pi} \int_{s_I}^{\infty} \frac{\hat{\zeta}_J(s') \text{Re} \hat{D}_J^i(s')}{s' - s} ds'; \quad (56)$$

$$\text{Re} \hat{D}_J^i(s) = \hat{I} - \frac{s - s_0}{\pi} \mathcal{P} \int_{s_R}^{\infty} \frac{\hat{\rho}(s') \text{Re} \hat{N}_J^i(s')}{(s' - s)(s' - s_0)} ds', \quad (57)$$

где символ  $\mathcal{P}$  означает, что интеграл понимается в смысле главного значения. Из этих уравнений следует, что на динамических разрезах имеет место соотношение

$$\text{disc } \hat{A}_J^i(s) = 0. \quad (58)$$

Можно показать, что условие унитарности для матрицы  $\hat{A}_J^e(s)$  в соотношении (51) имеет вид

$$\text{Im } \hat{A}_J^e(s) = \hat{A}_J^{e+}(s) \hat{\rho}_J^i(s) \hat{A}_J^e(s), \quad (59)$$

где

$$\hat{\rho}_J^i(s) = [\hat{D}_J^i(s)]^{-1} \hat{R}_J(s) [\hat{D}_J^{i+}(s)]^{-1} \quad (60)$$

— симметричная эрмитова матрица, а  $\hat{R}_J(s)$  определяется выражением

$$\hat{R}_J(s) = \hat{\rho}(s) + \hat{\rho}(s) \text{Im } \hat{K}_J(s) \hat{\rho}(s). \quad (64)$$

Равенство (59) имеет вид соотношения унитарности для матрицы парциальных амплитуд  $\hat{A}_J^e(s)$  с равной нулю абсорбтивной частью  $K$ -матрицы и переопределённой матрицей  $\hat{\rho}(s)$  (36). Из равенств (51), (58) следует, что скачки  $\hat{A}_J^e(s)$  и  $\hat{A}_J(s)$  на динамических разрезах связаны соотношением

$$\text{Im } \hat{A}_J^e(s) = \hat{D}_J^{i*}(s) \text{Im } \hat{A}_J(s) \hat{D}_J^i(s). \quad (62)$$

Далее можно построить матрицу  $\hat{A}_J^e(s)$  в полной аналогии с методом, изложенным в разд. 2, 3. При этом следует лишь в условии унитарности заменить матрицу  $\hat{\rho}(s)$  (36) матрицей  $\hat{\rho}_J^i(s)$  (60) и учесть перенормировку (62)  $\text{Im } \hat{A}_J^e(s)$  на динамических разрезах. Некоторое формальное различие построения матриц  $\hat{A}_J^e(s)$  и  $\hat{A}_J(s)$  состоит в том, что матрица  $\hat{\rho}_J^i(s)$  (60), в отличие от  $\hat{\rho}(s)$  (36), вообще говоря, недиагональна. Однако это никак не сказывается на общих свойствах рассматриваемого представления. Так, например,  $\hat{\rho}_J^i(\mathbf{b}, s)$  (48) по-прежнему является симметричной эрмитовой матрицей.

## 5. ТОЧНО РЕШАЕМЫЕ МОДЕЛИ

Представляет интерес проанализировать различные аспекты развития метода на примерах точно решаемых моделей. К ним относится, прежде всего, нерелятивистская потенциальная модель, которая заведомо удовлетворяет всем перечисленным в разд. 1 требованиям [132]. В этом важном частном случае можно строго доказать полученное представление, исходя непосредственно из динамического урав-

нения. Такое исследование полезно также в том отношении, что оно позволяет в наглядной форме прояснить физический смысл различных величин,

Итак, рассмотрим решение парциально-волнового уравнения Шредингера

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} - v(r) + k^2 \right) u_l(r, k) = 0 \quad (63)$$

с граничным условием  $u_l(r, k) \cong r^{l+1}$ , предполагая, что потенциал  $v(r)$  является суперпозицией потенциалов Юкавы. Определим два линейно независимых решения уравнения (63)  $\varphi_l(r, k)$  и  $\chi_l(r, k)$  с граничными условиями в точке  $r = b$ :

$$\varphi_l(b, k) = 1, \quad \varphi'_l(b, k) = 0, \quad (64)$$

$$\chi_l(b, k) = 0, \quad \chi'_l(b, k) = 1, \quad (65)$$

где штрих означает дифференцирование по параметру  $b$ . Определим, следуя Джаффе и Лоу [54],  $P$ -матрицу соотношением

$$u_l(r, k) = a_l(b, k) [\varphi_l(r, k) + P_l(b, k) \chi_l(r, k)], \quad (66)$$

из которого видно, что  $P_l(b, k)$  является логарифмической производной волновой функции  $u_l(r, k)$  при  $r = b$ . Используя стандартное определение  $S$ -матрицы [132], получаем связь  $S$ - и  $P$ -матриц в виде равенства (5), в котором

$$D_l^{(\pm)}(b, s) \rightarrow D_l^{(\pm)}(b, v) = k^l h_l^{(\pm)}(b, k) \quad (67)$$

и

$$\tilde{S}_l = \frac{P_l(b, k) - f_l^{(-)}(b, k)}{P_l(b, k) + f_l^{(+)}(b, k)}, \quad (68)$$

где  $v = k^2$ ,  $h_l^{(\pm)}(r, k)$  — решения уравнения (63) с граничными условиями на бесконечности

$$h_l^{(\pm)}(r, k) \cong \exp \left[ \pm i \left( kr - \frac{\pi l}{2} \right) \right]; \quad (69)$$

$$f_l^{(\pm)}(b, k) = d \ln h_l^{(\pm)}(b, k) / db. \quad (70)$$

Решение  $u_l(r, k)$  является целой чётной функцией  $k$  при любых значениях  $r$  ввиду того, что граничное условие для него не зависит от  $k$  (теорема Пуанкаре [132]). Поэтому  $P_l(b, k)$  является мероморфной функцией во всей комплексной  $v$ -плоскости, полюсы которой соответствуют нулям  $u_l(b, k)$ . В окрестности  $i$ -го нуля  $u_l(b, k)$  имеет вид

$$u_l(b, k) \cong_{v \rightarrow v_{li}(b)} c_{li}(b) [v - v_{li}(b)] \quad (71)$$

и, следовательно,

$$P_l(b, k) \cong_{v \rightarrow v_{li}(b)} \tau_{li}(b) [v - v_{li}(b)]^{-1}, \quad (72)$$

где

$$\tau_{li}(b) = -dv_{li}(b)/db. \tag{73}$$

В результате, учитывая, что  $P_l(b, k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} P_l^{(0)}(b, k)$ , где  $P_l^{(0)}(b, k)$  — матрица, соответствующая свободному движению частиц, для  $P_l(b, k)$  получаем выражение вида (28), в котором следует произвести замены  $s \rightarrow v$ ,  $s_{li}(b) \rightarrow v_{li}(b)$ ,  $\gamma_{li}(b) \rightarrow \tau_{li}(b)$  и положить  $c_l(b) = 0$ .

Используя свойства решений уравнения (63), можно доказать справедливость (в нерелятивистском пределе) всех соотношений разд. 2 [97]. При этом можно убедиться, что функция  $\tilde{P}_l(b, s)$  в формуле (27) связана простым линейным соотношением с  $P_l(b, k)$  в выражении (66). Приведём здесь лишь схему доказательства  $N/D$ -представления (14) и уравнений (21), (22). Легко видеть, что парциальная  $S$ -матрица для потенциала  $\tilde{v}(r) = v(r) + v_c(r)$ , где

$$v_c(r) = \begin{cases} \infty & \text{при } r \leq b; \\ 0 & \text{при } r > b \end{cases} \tag{74}$$

определяется выражением (5) с  $\tilde{S}_l = 1$  и функциями  $D_l^{(\pm)}(b, s)$  вида (67). Функция  $\bar{A}_l(b, s)$  в формулах (8), (9), (13) \* является приведенной парциальной амплитудой рассеяния для потенциала  $\tilde{v}(r)$ .

Ввиду того что потенциал  $v_c(r)$  (74) является сингулярным, рассмотрим следующую предельную процедуру. Определим потенциал  $v_c^a(r)$ , зависящий от параметра  $a$  таким образом, что  $\lim_{a \rightarrow \infty} v_c^a(r) = v_c(r)$ . Предположим, что при конечном фиксированном значении  $a$  для него обычным образом может быть сформулирована задача рассеяния в импульсном представлении. Оператор рассеяния  $\hat{t}^{(a)}(z)$  на сумме потенциалов  $\tilde{v}^{(a)}(r) = v_c^{(a)}(r) + v(r)$  с помощью двухпотенциальной формулы [106] представим в виде

$$\hat{t}^{(a)}(z) = \hat{t}_c^{(a)}(z) + [\hat{I} + \hat{v}_c^{(a)}\hat{G}_c^{(a)}(z)] \hat{t}^{(a)}(z) [\hat{I} + \hat{G}_c^{(a)}(z) \hat{v}_c^{(a)}], \tag{75}$$

операторы  $\hat{t}_c^{(a)}(z)$  и  $\hat{t}^{(a)}(z)$  удовлетворяют уравнениям

$$\hat{t}_c^{(a)}(z) = \hat{v}_c^{(a)} + \hat{v}_c^{(a)}G_0(z) \hat{t}_c^{(a)}(z), \tag{76}$$

$$\hat{t}^{(a)}(z) = \hat{v} + \hat{v}\hat{G}_c^{(a)}(z) \hat{t}^{(a)}(z), \tag{77}$$

где

$$\hat{G}_0(z) = (z/2\mu - \hat{H}_0)^{-1},$$

$$\hat{G}_c^{(a)}(z) = (z/2\mu - \hat{H}_0 - \hat{v}_c^{(a)})^{-1}, \tag{78}$$

\* Все формулы разд. 2 здесь, разумеется, рассматриваются в нерелятивистском пределе.

$\hat{H}_0$  — свободный гамильтониан;  $\mu$  — приведенная масса сталкивающихся частиц;  $\hat{v}$ ,  $v_c^{(a)}$  — локальные в координатном представлении операторы с матричными элементами

$$\langle r' | \hat{v} | r \rangle = \delta(r' - r) v(r), \quad \langle r' | \hat{v}_c^{(a)} | r \rangle = \delta(r' - r) v_c^{(a)}(r).$$

Используя свойство полноты in- и out-векторов состояний  $|k, l; a(\pm)\rangle$  для потенциала  $v_c^{(a)}(r)$ , с помощью (77) получаем интегральное уравнение для матричных элементов оператора  $\hat{t}^{(a)}(z)$  между этими состояниями. С учётом соотношения

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \langle r | k, l; a(\pm) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{при } r \leq b; \\ \langle r | k, l(\pm) \rangle & \text{при } r > b \end{cases} \quad (79)$$

$[\langle r | k, l(\pm) \rangle]$  — in- и out-решения (63) с потенциалом  $v_c(r)$  (74) в пределе  $a \rightarrow \infty$  указанное уравнение принимает вид

$$t_l(k', k; v + i\eta) = v_l^{(*)}(k', k) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty v_l^{(-)}(k, p) (p^2 - v - i\eta)^{-1} t_l(p, k; v + i\eta) p^2 dp, \quad (80)$$

где

$$v_l^{(\pm)}(k', k) = -\frac{\mu}{2\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \langle k', l; a(-) | \hat{v} | k, l; a(\pm) \rangle = -\frac{\mu}{2\pi} \int_b^\infty \langle k', l(-) | r \rangle v(r) \langle r | k, l(\pm) \rangle dr; \quad (81)$$

$$t_l(k', k; v) = -\frac{\mu}{2\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \langle k', l; a(-) | \hat{t}^{(a)}(v) | k, l; a(+)\rangle = -\frac{\mu}{2\pi} \langle k', l(-) | \hat{t}(v) | k, l(+)\rangle. \quad (82)$$

Матричные элементы потенциала  $v_l^{(\pm)}(k', k)$  (81) в плоскости  $v = k^2$  ( $v' = k'^2$ ) при фиксированном значении переменной  $k'(k)$ , кроме динамических сингулярностей, имеют также правый разрез  $[0 \leq v(v') < \infty]$ . Действительно, решение уравнения (63)  $\chi_l^{(e)}(r)$  с потенциалом  $v_c(r)$  (74) и граничными условиями вида (65) можно представить в форме

$$\chi_l^{(e)}(r, k) = h_{cl}^{(\pm)}(bk) \langle r | k, l(\pm) \rangle, \quad (83)$$

где

$$h_{cl}^{(\pm)}(x) = (2l - 1)!! d_l^{(\pm)}(x)/x^l, \quad \text{а } \langle r | k, l(\pm) \rangle -$$

фигурирующие в формулах (79), (81) in- и out-решения того же уравнения, обладающие в области  $r > b$  свойствами ортогональности

и полноты. Поскольку граничные условия (65) для решения  $\chi_l^{(c)}(r)$  не зависят от  $k$ , в силу теоремы Пуанкаре при любых значениях  $r$  оно является целой чётной функцией  $k$ . Функции  $h_{cl}^{(\pm)}(bk)$  имеют в плоскости  $v = k^2$  правый разрез, и поэтому такой разрез имеют и функции  $\langle r | k, l(\pm) \rangle$  в силу соотношения (83), откуда с учётом (81) следует сделанное утверждение.

Вводя перенормированные матричные элементы с помощью соотношений

$$v_l^{(\pm)}(k', k) = [h_{cl}^{*(-)}(bk) h_{cl}^{(+)}(bk)]^{-1} w_l(k', k; b), \quad (84)$$

$$t_l(k', k; v) = [h_{cl}^{*(-)}(bk') h_{cl}^{(+)}(bk)]^{-1} T_l(k', k; v, b) \quad (85)$$

и подставляя эти выражения в (80), получаем уравнение

$$T_l(k', k; v + i\eta, b) = w_l(k', k; b) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty w_l(k', \sqrt{v'}; b) T_l(\sqrt{v'}, k; v, b) \frac{\xi_l(b, v') dv'}{v' - v - i\eta}, \quad (86)$$

где

$$\xi_l(b, v) = \frac{b^{2l} v^{l+1/2}}{[(2l-1)!!]^2 d_l^{(+)}(bk) d_l^{(-)}(bk)}. \quad (87)$$

Матричные элементы

$$w_l(k', k; b) = \int_b^\infty \chi_l^{(c)}(r, k') \chi_l^{(c)}(r, k) v(r) dr \quad (88)$$

не имеют по переменным  $v = k^2$ ,  $v' = k'^2$  правых разрезов (т. е. содержат только динамические сингулярности), а амплитуда  $T_l(k', k; v, b)$  на энергетической поверхности ( $k' = k = \sqrt{v}$ ) с точностью до постоянного множителя совпадает (в нерелятивистском пределе) с функцией  $T_l(b, s)$  в формуле (13). Решение уравнения (86) можно представить в виде отношения двух рядов Фредгольма [132]

$$T_l(k', k; p^2 + i\eta, b) = n_l(k', k; p^2, b) \Delta_l^{-1}(b, p^2 + i\eta), \quad (89)$$

где

$$n_l(k', k; p^2, b) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{i=1}^n \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dq_i \frac{q_i \xi_l(b, q_i^2)}{q_i^2 - p^2} Q_{n+1} \left( \begin{matrix} k', q_1, \dots, q_n \\ k, q_1, \dots, q_n \end{matrix} \right); \quad (90)$$

$$\Delta_l(b, p^2 + i\eta) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{i=1}^n \int_0^\infty dq_i \frac{q_i \xi_l(b, q_i^2)}{q_i^2 - p^2 - i\eta} Q_n \left( \begin{matrix} q_1, \dots, q_n \\ q_1, \dots, q_n \end{matrix} \right), \quad (91)$$

$$Q_0 = 1,$$

$$Q_n \left( \begin{matrix} q_1, \dots, q_n \\ q_1, \dots, q_n \end{matrix} \right) = \det_{(i,j)} \| w_l(q_i, q_j; b) \| \quad \text{при } n \geq 1. \quad (92)$$

Вводя обозначение  $n_l(b, v) \equiv n_l(\sqrt{v}, \sqrt{v}; v, b)$ , путём чисто алгебраических преобразований получаем уравнение

$$\Delta_l(b, v + i\eta) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi_l(b, v') n_l(b, v')}{v' - v - i\eta} dv', \quad (93)$$

являющееся нерелятивистским аналогом уравнения (21). Учитывая аналитические свойства функции  $n_l(b, v)$ , вытекающие из представления (90), и её асимптотику на бесконечности [ $n_l(b, v) \rightarrow 0$  при  $|v| \rightarrow \infty$ ], можно получить также второе уравнение вида (22), связывающее функции  $\Delta_l(b, v)$  и  $n_l(b, v)$ . Достаточное для сходимости рядов Фредгольма доказательство компактности ядра уравнения (86) проводится аналогично тому, как это делается для уравнения Липпмана — Швингера [133].

Из свойств функций  $d_l^{(\pm)}(x)$ ,  $T_l(b, s)$  следует, что амплитуда  $\tilde{A}_l(b, s)$  [см. (13)] имеет существенно особую точку на бесконечности. Однако амплитуда  $A_l(s)$  для рассматриваемого «аналитического» потенциала  $v(r)$ , разумеется, не обладает указанной сингулярностью на бесконечности. Это достигается за счёт компенсации сингулярности функции  $\tilde{A}_l(b, s)$  в бесконечно удаленной точке аналогичной сингулярностью второго слагаемого в правой части соотношения (8). Указанная компенсация происходит при условии, что  $P$ -матрица в пределе  $|v| \rightarrow \infty$  стремится к величине  $P_l^{(0)}(b, k)$ , соответствующей свободному движению частиц.

Исследование в рамках нерелятивистской потенциальной модели можно обобщить на релятивистский случай с помощью квазипотенциального формализма [134—136], построив квазипотенциал таким образом, чтобы он приводил к требуемой аналитической структуре амплитуды  $A_l(s)$  (см. приложение Б). Можно показать, что в этом случае функция  $\tilde{P}_l(b, s)$  связана линейным соотношением с логарифмической производной волновой функции, описывающей относительное движение частиц  $P_l(b, s)$ , т. е.  $P$ -матрицей

$$\tilde{P}_l(b, s) = \alpha_l(b, s) P_l(b, s) + \beta_l(b, s) \quad (94)$$

с зависящим от энергии коэффициентом пропорциональности  $\alpha_l(b, s)$ . В некотором приближении, которое соответствует пренебрежению эффектами нелокальности взаимодействия в окрестности точки  $r = b$ ,  $\alpha_l(b, s)$  в (94) является чисто кинематической функцией

$$\alpha_l(b, s) \cong \frac{2[(2l-1)!!]^2}{\sqrt{s} b^{2l}}. \quad (95)$$

Рассмотрим, наконец, некоторые аспекты, связанные с интерпретацией КДД(ПА)-полюсов в формуле (28), с помощью точно решаемой теоретико-полевой модели типа модели Дайсона [110], которая учитывает внутреннюю структуру частиц. С точки зрения представлений, лежащих в основе современной теории сильных взаимодей-

ствий, в формировании компаунд-системы типа кварк-глюонного мешка в промежуточном состоянии существенную роль должны играть эффекты, связанные с перестройкой вакуума КХД [137].

Будем исходить из следующей физической картины адрон-адронного рассеяния. В начальном и конечном состояниях ядра бесконечно удалены друг от друга и интерпретируются как две невзаимодействующие кварк-глюонные подсистемы, кварковые поля которых локализованы в полостях  $B_i$  и  $B_j$  в пространствах относительных координат валентных кварков. При сближении на конечное расстояние  $r$  подсистемы могут взаимодействовать путём обмена некоторыми адронными состояниями (т. е. бесцветными комплексами кварков и глюонов, для которых физический вакуум КХД прозрачен). Однако это взаимодействие не приводит к радикальной перестройке вакуума, и адроны сохраняют свою индивидуальность при условии, что  $r$  больше некоторой характерной величины  $b$ . На меньших расстояниях ( $r < b$ ) с большой вероятностью может произойти перестройка вакуума, приводящая к формированию состояния мешкового типа, в котором поля валентных кварков локализованы в одной общей полости  $B_h$  в пространстве относительных координат кварков всей системы.

Таким образом, в этой модели имеются две характерные конфигурации кварковых полей и вакуума (одну из них можно назвать адронной конфигурацией, а другую — мешковой конфигурацией), которые в процессе взаимодействия могут подвергаться взаимным превращениям. Рассматриваемую модель удобно сформулировать в представлении вторичного квантования. Система описывается гамильтонианом вида  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}}$ . Первый член этого выражения соответствует невзаимодействующим адронным и мешковым конфигурациям:  $\hat{H}_0 = \hat{H}_a + \hat{H}_c$ , где

$$\hat{H}_a = \sum_{\lambda} \int \omega_{\lambda}(\mathbf{q}) a_{\lambda}^{(+)}(\mathbf{q}) a_{\lambda}^{(-)}(\mathbf{q}) d\mathbf{q}; \quad (96)$$

$$\hat{H}_c = \sum_{\beta} \varepsilon_{\beta} c_{\beta}^{(*)} c_{\beta}^{(-)}; \quad (97)$$

$a_{\lambda}^{(\pm)}(\mathbf{q})$  — операторы рождения и уничтожения пар адронов с относительным импульсом  $\mathbf{q}$  и дискретными квантовыми числами  $\lambda$ , а  $c_{\beta}^{(\pm)}$  — операторы рождения и уничтожения изолированной системы типа кварк-глюонного мешка с квантовыми числами  $\beta$ ; указанные операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[a_{\lambda}^{(-)}(\mathbf{q}'), a_{\lambda}^{(*)}(\mathbf{q})] = \delta_{\lambda, \lambda'} \delta(\mathbf{q}' - \mathbf{q}); \quad (98)$$

$$[c_{\beta}^{(-)}, c_{\beta}^{(+)}] = \delta_{\beta, \beta'}; \quad (99)$$

$\varepsilon_{\beta}$  — энергии собственных состояний мешкового типа;  $\omega(q) = \sqrt{m_i^2 + q^2} + \sqrt{m_j^2 + q^2}$ ,  $m_i, m_j$  — массы адронов. Часть гамиль-



тониана  $\hat{H}_{int}$ , ответственная за взаимодействие, также состоит из двух слагаемых, одно из которых описывает взаимное превращение адронной и мешковой конфигураций:

$$\hat{H}_{ac} = \sum_{\lambda\beta} \int d\mathbf{q} g_{\lambda\beta}(\mathbf{q}) a_{\lambda}^{(+)}(\mathbf{q}) c_{\beta}^{(-)} + \text{h.c.}, \quad (100)$$

где h.c. — эрмитово-сопряженное выражение;  $g_{\lambda\beta}(\mathbf{q})$  — формфакторы, определяющие динамику взаимодействия адронов с мешковыми состояниями, а другое слагаемое соответствует механизму взаимодействия, не связанному с формированием мешковых конфигураций в промежуточном состоянии

$$\hat{H}_{aa} = \sum_{\lambda\lambda'} \int d\mathbf{q} \int d\mathbf{q}' v_{\lambda\lambda'}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') a_{\lambda}^{(+)}(\mathbf{q}) a_{\lambda'}^{(-)}(\mathbf{q}'). \quad (101)$$

Предположим для простоты, что адроны — бесспиновые частицы и имеется всего один канал рассеяния [индекс  $\lambda$  в формулах (96), (98), (100), (101) в этом случае принимает единственное значение, и мы его опускаем]. Рассмотрим состояние  $|\Phi_{li}(b)\rangle$ , являющееся собственным состоянием полного гамильтониана системы с заданным угловым моментом  $l$ :

$$[\hat{H} - \omega_{li}(b)] |\Phi_{li}(b)\rangle = 0, \quad (102)$$

где

$$|\Phi_{li}(b)\rangle = \left[ \int d\mathbf{q} \langle \mathbf{q} | \Psi_{li}(b)\rangle a^{(+)}(\mathbf{q}) + \sum_{\beta} \langle \beta | \Phi_{li}\rangle c_{\beta}^{(+)} \right] |0\rangle, \quad (103)$$

$|0\rangle$  — вакуумное состояние, а волновая функция адронного канала в конфигурационном представлении

$$\langle \mathbf{r} | \Psi_{li}(b)\rangle = (2\pi)^{-3} \int d\mathbf{q} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) \langle \mathbf{q} | \Psi_{li}(b)\rangle \quad (104)$$

отлична от нуля в области  $r < b$  и на ее границе удовлетворяет условию

$$\langle \mathbf{r} | \Psi_{li}(b)\rangle |_{r=b} = 0. \quad (105)$$

Величина

$$\chi_{li}^2(b) = \int |\langle \mathbf{q} | \Psi_{li}(b)\rangle|^2 d\mathbf{q} \quad (106)$$

характеризует вероятность присутствия адронной конфигурации, а  $\langle \beta | \Phi_{li}\rangle^2$  — мешковой конфигурации с квантовыми числами  $\beta$  в состоянии  $|\Phi_{li}(b)\rangle$ . Операторное уравнение (102) приводит к системе уравнений для функций  $\langle \mathbf{q} | \Psi_{li}(b)\rangle$ ,  $\langle \beta | \Phi_{li}\rangle$ , которые следует решить с учетом граничного условия (105).

Анализируя решение уравнения Шредингера  $[\hat{H} - \omega(k)] \times \times |\Phi_{li}^{(+)}(k)\rangle = 0$ , соответствующее состоянию рассеяния с угловым моментом  $l$  и энергией  $\omega(k) = \sqrt{s}$ , легко убедиться, что волновая

функция адронного канала  $\langle r | \Psi_l^{(+)}(k) \rangle$  в точке  $r = b$  имеет нуль при  $s = \omega_{li}^2(b) \equiv s_{li}(b)$  и может быть представлена в окрестности этого нуля в виде (71). Следовательно,  $P_l(b, k) = d \ln \langle b | \Psi_l^{(+)}(k) \rangle / db$  имеет полюс при  $s = s_{li}(b)$ , и с учетом соотношений (73), (94) для вычета  $\gamma_{li}(b)$  в формуле (28) получаем выражение вида

$$\gamma_{li}(b) = -\alpha_l(b, s_{li}(b)) ds_{li}(b)/db. \quad (107)$$

Таким образом, положения КДД(ПА)-полюсов функции  $\tilde{P}_l(b, s)$  (28) определяются энергиями состояний, возникающих в системе при наложении граничного условия (105), которое соответствует бесконечно большому запирающему потенциалу в области  $r > b$ , а вычеты  $\gamma_{li}(b)$  (107) характеризуют интенсивность взаимодействия указанных состояний с каналом рассеяния.

## 6. ИССЛЕДОВАНИЕ НУКЛОН-НУКЛОННОГО РАССЕЯНИЯ С УЧЕТОМ МЕЗОННЫХ ОБМЕННЫХ ЭФФЕКТОВ И КВАРКОВЫХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ ПРИ НИЗКИХ И ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ЭНЕРГИЯХ

Рассмотри прежде всего применение развитого метода к исследованию  $NN$ -рассеяния в области энергий налетающего нуклона в Л-системе  $T \lesssim 1$  ГэВ [94, 96, 98, 100]. В изотопическом формализме, при заданном полном угловом моменте системы  $J$ , в  $NN$ -секторе рассеяния имеется, как известно (см., например, [1]), пять независимых парциальных амплитуд:  $A_J^{(0)}(s) = \langle \lambda^{(0)} | \hat{A}_J(s) | \lambda^{(0)} \rangle$  — синглетная амплитуда,  $A_J^{(1)}(s) = \langle \lambda^{(1)} | \hat{A}_J(s) | \lambda^{(1)} \rangle$  — несвязанная триплетная амплитуда и  $A_J^{(11)}(s) = \langle \lambda_1 | \hat{A}_J(s) | \lambda_1 \rangle$ ,  $A_J^{(22)}(s) = \langle \lambda_2 | \hat{A}_J(s) | \lambda_2 \rangle$ ,  $A_J^{(12)}(s) = \langle \lambda_1 | \hat{A}_J(s) | \lambda_2 \rangle$  — связанные триплетные амплитуды, где  $\lambda^{(0)} = \{l = J, S = 0\}$ ,  $\lambda^{(1)} = \{l = J, S = 1\}$ ,  $\lambda_1 = \{l = J - 1, S = 1\}$ ,  $\lambda_2 = \{l = J + 1, S = 1\}$ ,  $l$  — орбитальный момент нуклонов,  $S$  — их полный спин. Скачки парциальных амплитуд  $A_J^{(\alpha)}(s)$  ( $\alpha = 0, 1, 11, 22, 12$ ) на динамических разрезах  $C_L$ , необходимые для решения системы уравнений вида (21), (22), вычислялись с учетом механизмов обмена одним, двумя и тремя  $\pi$ -мезонами в  $t$ - и  $u$ -каналах. Вклад механизма однопионного обмена в  $\text{Im} A_J^{(\alpha)}(s)$  на  $C_L$  определяется перенормированной пион-нуклонной константой связи  $g_{\pi}$ . Двухпионный обменный механизм учитывался с помощью метода, основанного на использовании условия унитарности в  $t$ -канале и имеющейся информации об амплитудах  $\pi N$ - и  $\pi\pi$ -рассеяния. Отметим, что аналогичная процедура применялась при расчете Парижского потенциала [138, 139] на больших и средних расстояниях ( $r \gtrsim 0,8$  фм).

Ковариантная фейнмановская амплитуда  $NN$ -рассеяния может быть записана в виде [1, 138]

$$M = \sum_{n=1}^5 [3p_n^{(+)}(s, t, u) + 2p_n^{(-)}(s, t, u) \tau^{(1)}\tau^{(2)}] P_n, \quad (108)$$

где  $\tau^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) — изоспиновые матрицы;  $P_n$  — определенные в [1] инварианты, построенные из произведений билинейных комбинаций дираковских спиноров;  $p_n^{(\pm)}(s, t, u)$  — скалярные функции мандельштамовских инвариантов, связанным соотношением  $s + t + u = 4m_N^2$  ( $m_N$  — масса нуклона). Для функций  $p_n^{(\pm)}(s, t, u)$  справедливо представление

$$p_n^{(\pm)}(s, t, u) = \delta_{n5} P_n^{(\pm)}(t) + \frac{1}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{\rho_n^{(\pm)}(s, t') \mp (-1)^n \rho_n^{(\pm)}(u, t')}{t' - t} dt', \quad (109)$$

где  $p_\pi^{(+)}(t) = 0$ ;  $p_\pi^{(-)}(t) = -\frac{1}{2} g_\pi^2 / (m_\pi^2 - t)$ ;  $m_\pi$  — масса  $\pi$ -мезона.

Первое слагаемое в этом выражении соответствует вкладу механизма однопионного обмена, а второе слагаемое — более сложным механизмам взаимодействия. Связь функций  $\rho_n^{(\pm)}(s, t)$  со скачками парциальных амплитуд  $A_J^{(\alpha)}(s)$  на  $C_L$  указана в приложении В.

В области  $s_{2\pi} \leq s \leq s_\pi$ , где  $s_\pi = 4m_N^2 - m_\pi^2$ ,  $s_{2\pi} = 4(m_N^2 - m_\pi^2)$ , величины  $\text{Im } A_J^{(\alpha)}(s)$  определяются константой  $g_\pi$ . На участке динамического разреза  $s_{3\pi} \leq s \leq s_{2\pi}$ , где  $s_{3\pi} = 4m_N^2 - 9m_\pi^2$ , наряду с однопионным механизмом, в  $\text{Im } A_J^{(\alpha)}(s)$  дает вклад механизм двухпионного обмена, который с помощью условия унитарности в  $t$ -канале можно связать с инвариантными амплитудами  $\pi N$ -рассеяния  $A_{\pi N}^{(\pm)}(s, t, u)$ ,  $B_{\pi N}^{(\pm)}(s, t, u)$  [106] на массовой поверхности при  $t \geq 4m_\pi^2$ . Из данных по  $\pi N$ -рассеянию, однако, эти амплитуды известны в области  $t \leq 0$ . Записывая дисперсионные соотношения для инвариантных функций  $A_{\pi N}^{(\pm)}(s, t, u)$ ,  $B_{\pi N}^{(\pm)}(s, t, u)$ , их можно аналитически продолжить в нужную область \* инвариантных переменных для расчета двухпионных вкладов в скачки парциальных амплитуд  $NN$ -рассеяния.

Целесообразно выделить в выражениях для  $\text{Im } A_J^{(\alpha)}(s)$  наиболее существенные вклады двухпионных состояний с низшими угловыми моментами  $J = 0, 1$  в  $t$ -канале, которые содержат резонансные части, соответствующие  $\rho$ - и  $\sigma$ -мезонам \*\*. Указанные вклады двухпионных состояний выражаются через спиральные амплитуды  $f_+^{J=0}(t)$  и  $f_\pm^{J=1}(t)$  процесса  $N\bar{N} \rightarrow 2\pi$  [1, 138]. Информация об этих амплитудах в области  $t \geq 4m_\pi^2$  может быть получена с помощью диспер-

\* Следует отметить, что эта область является нефизической для процесса  $N\bar{N} \rightarrow 2\pi$ ; поэтому связь скачков  $NN$ -амплитуд на  $C_L$  с амплитудами  $\pi N$ -рассеяния осуществляется либо с помощью так называемого продолженного соотношения унитарности в  $t$ -канале, либо можно использовать обычное условие унитарности (т. е. в области  $t \geq 4m_N^2$ ), а затем совершить аналитическое продолжение в область  $4m_\pi^2 \leq t < 4m_N^2$ ; обе указанные процедуры эквивалентны.

\*\* В теоретических исследованиях  $\sigma$ -мезон с шириной  $\sim 300$  МэВ и массой 500—600 МэВ иногда вводится для приближенного учета механизма двухпионного обмена в состоянии с  $I = J = 0$ .

сионных соотношений типа Омнеса — Мухелишвили [103] на основе имеющихся данных о фазах лл-рассеяния и амплитудах  $\pi N$ -рассеяния в физической области. Амплитуды  $f_{+}^{J=0}(t)$ ,  $f_{\pm}^{J=1}(t)$  в области  $4m_{\pi}^2 \leq t < 50 m_{\pi}^2$  изучены достаточно хорошо [140]. Эти данные используются при расчете двухпионных каналов в скачки парциальных амплитуд  $NN$ -рассеяния на  $C_L$ . Что касается вклада двухпионных промежуточных состояний с  $J \geq 2$  (в  $t$ -канале) в спектральные функции  $\rho_n^{(\pm)}(s, t)$  [который составляет  $\sim 10$ — $20$  % полной величины  $\rho_n^{(\pm)}(s, t)$ ], то он вычислялся с помощью параметризации функций  $A_{\pi N}^{(\pm)}(s, t, u)$ ,  $B_{\pi N}^{(\pm)}(s, t, u)$ , предложенной в [141].

Описанная процедура автоматически учитывает вклады от резонансных состояний двух пионов в  $t$ - и  $u$ -каналах, которые в модели однобозонного обмена аппроксимируются  $\rho$ - и  $\sigma$ -мезонными обменами, но при этом принимается во внимание как конечная ширина этих мезонов (что особенно существенно в случае  $\sigma$ -мезона), так и нерезонансная часть вклада двухпионных обменов. Как показывает конкретный анализ, вклад двухпионного механизма существенно отличается от вклада квадратной диаграммы (и соответствующей кроссинг-симметричной диаграммы) с двумя пионными и двумя нуклонными внутренними линиями, что свидетельствует о важности учета механизма возбуждения нуклона в промежуточном состоянии, который содержится в амплитудах  $\pi N$ -рассеяния. Механизм трехпионного обмена учитывался в рамках модели обмена  $\omega$ -мезоном.

Формфакторы в мезон-нуклонные вершины не вводились ввиду того, что вклады далеких сингулярностей на  $C_L$ , обусловленные обменными механизмами взаимодействия, сильно подавлены экспоненциальным фактором в формуле (19). По этой же причине механизмы обмена тяжелыми мезонами  $\rho$ ,  $\omega$ ,  $\sigma$  в рассматриваемом подходе играют существенно меньшую роль, чем в мезонных теориях ядерных сил.

Влияние неупругих каналов учитывалось с помощью абсорбтивной части  $K$ -матрицы (см. разд. 4), для задания которой использовался следующий полуфеноменологический метод: матрица  $\text{Im } \hat{K}_J(s)$  (функция в случае одного явно рассматриваемого канала рассеяния) аппроксимировалась суммой членов, пропорциональных абсорбтивным частям диаграмм, соответствующих механизмам обмена двумя  $\pi$ -мезонами в  $t$ -канале и содержащих  $NN\pi$ - и  $N\Delta$ -промежуточные состояния в  $s$ -канале, причем коэффициенты пропорциональности были выбраны по данным энергезависимого фазового анализа (ЭФА) [127].

Как показывают расчеты, для хорошего описания всех рассматриваемых  $NN$ -фаз в области энергий  $T \leq 1$  ГэВ достаточно ограничиться явным учетом только одного КДД(ПА)-полюса в выражении (28). Полагая

$$\tilde{P}_1(b, s) = \tilde{P}_1^{(0)}(b, s) + \frac{\gamma_1}{s-s_1}, \quad (110)$$

где  $\gamma_1 \equiv \gamma_{l_1}(b)$ ,  $s_1 \equiv s_{l_1}(b)$ , аппроксимируем функцию  $\tilde{P}_l^{(0)}(b, s)$  константой

$$\tilde{P}_l^{(0)}(b, s) \cong a. \quad (111)$$

В случае матричных уравнений (см. разд. 3), применяемых для описания связанных  $l = J - 1$ ,  $l = J + 1$ -каналов, аналогичное приближение используется для аппроксимации матрицы  $\hat{P}_l(b, s)$ . При этом в соотношениях вида (110), (111)  $\gamma_1$  и  $a$  следует заменить соответственно матрицами  $\hat{\gamma}_1$ ,  $\hat{a}$  размерности  $2 \times 2$ . Из результатов разд. 3 следует, что матричные элементы  $\hat{\gamma}_1$  имеют вид  $\langle \lambda | \hat{\gamma}_1 | \lambda' \rangle = \xi_\lambda \xi_{\lambda'}$ , где  $\lambda, \lambda' = 1, 2$ ,  $\xi_\lambda$  — действительные константы.

Подчеркнем, что справедливость приближения (111) предполагается только на указанном ограниченном энергетическом интервале. Оно заведомо должно нарушаться при достаточно большой энергии, поскольку, если исходить из предположения об отсутствии у амплитуды  $A_l(s)$  сингулярности в бесконечно удаленной точке, функция  $\tilde{P}_l(b, s)$  должна иметь бесконечное число полюсов вне круга конечного радиуса. Однако, как показывают вычисления, явный учет второго и более высоких полюсов функции  $\tilde{P}_l(b, s)$  не влияет на качество описания фаз  $NN$ -рассеяния в области  $T \lesssim 1$  ГэВ, а извлекаемые значения параметров  $\gamma_1$ ,  $s_1$  лишь в незначительной степени отличаются от результатов анализа, основанного на приближении (111).

В расчётах использовались следующие значения мезон-нуклонных констант связи:  $g_\pi^2/4\pi = 14,5$ ,  $g_\omega^2/4\pi = 4,77$ . Отметим, что указанное значение константы  $g_\omega$  согласуется с предсказаниями кварковой модели. Мезонные теории ядерных сил требуют существенно больших значений  $g_\omega$  [2, 3] ( $g_\omega^2/4\pi = 10 \div 20$ ). Это необходимо, чтобы обеспечить описание отталкивающей части  $NN$ -взаимодействия на малых расстояниях в этих теориях. В рассматриваемом подходе механизм отталкивания имеет совершенно иную природу. Он связан с формированием в промежуточном состоянии компаунд-системы типа составного кварк-глюонного мешка.

Константа  $a$  (111) (матрица  $\hat{a}$  в случае связанных каналов) выбиралась исходя из требования, гарантирующего правильное положение виртуального уровня в  ${}^1S_0$ -канале (энергии связи дейтрона в  ${}^3S_1 - {}^3D_1$ -каналах). Параметры  $b$ ,  $s_1$ ,  $\gamma_1$  ( $\hat{\gamma}_1$ ) были выбраны из условия наилучшего описания данных фазового анализа  $NN$ -рассеяния в области  $T = 0 \div 1050$  МэВ [127]. В табл. 1 представлены результаты расчёта  ${}^1S_0$ -,  ${}^3S_1 - {}^3D_1$ -,  ${}^3P_1$ -,  ${}^3P_0$ -,  ${}^1P_1$ -фаз и параметра смешивания  $\varepsilon_1$ , отвечающие значениям параметров  $b$ ,  $s_1$  и  $\gamma_1$ , приведенным в табл. 2. Для сравнения в таблице приведены также данные ЭФА [127] и фазового анализа при фиксированной энергии (ФАФЭ)

Таблица 1. Фазы \* *np*-рассеяния (в градусах); (а) — результаты расчёта с параметрами, приведенными в табл. 2; (б) — данные ЭФА [127] и (в) — данные ФАФЭ [128]

$T, \text{ МэВ}$	100	200	300	400	500	600	800	1000
${}^1S_0$ {	(а) 25,6 (б) 26,4 (в) 26,7	6,1 6,0 7,9	-7,1 -7,8 -5,6	-17,6 -17,0 -15,5	-26,4 -25,6 -22,9	-33,9 -33,8 -30,9	-46,6 -48,1 -43,6	-58,1 -59,8 -49,0
${}^3S_1$ {	(а) 44,0 (б) 43,7 (в) 42,7	20,3 29,8 19,8	6,2 7,3 4,4	-2,9 -2,3 -3,0	-9,1 -9,7 -11,5	-13,8 -15,7 -20,6	-22,5 -24,5 -30,1	-32,8 -30,5 —
${}^3D_1$ {	(а) -13,2 (б) -11,5 (в) -12,7	-22,6 -19,4 -19,4	-26,7 -24,6 -24,3	-27,8 -28,0 -25,2	-27,8 -30,8 -28,1	-29,4 -33,1 -32,1	-37,3 -36,7 -26,1	-49,7 -39,5 —
$\epsilon_1$ {	(а) 1,6 (б) 1,8 (в) 1,2	2,9 4,2 4,4	4,1 5,2 6,1	5,3 5,7 5,0	6,3 5,6 7,2	7,0 5,3 8,2	7,6 4,4 11,4	7,6 3,4 —
${}^3P_1$ {	(а) -14,3 (б) -13,9 (в) -14,4	-22,0 -22,1 -22,1	-28,5 -28,7 -29,2	-34,2 -34,1 -34,4	-39,4 -39,2 -40,7	-43,9 -45,1 -46,0	-56,9 -53,9 -52,1	-58,0 -59,8 -56,5
${}^3P_0$ {	(а) 9,6 (б) 12,3 (в) 11,1	1,9 1,6 -0,5	-7,1 -9,8 -10,1	-16,3 -19,0 -19,4	-25,6 -27,0 -26,6	-34,3 -38,1 -33,4	-63,6 -59,5 -47,0	-72,7 -72,2 -56,2
${}^1P_1$ {	(а) -13,1 (б) -12,2 (в) -11,4	-21,9 -23,9 -21,5	-29,7 -31,0 -29,2	-35,2 -35,0 -32,5	-38,2 -37,1 -33,5	-38,2 -38,1 -28,7	-31,0 -38,3 -40,8	-24,6 -37,2 —

\* Здесь и в дальнейшем используется определение фаз рассеяния, предложенное в [123].

Таблица 2. Значения параметров  $b$ ,  $\sqrt{s_1}$ ,  $\gamma_1$  для вариантов расчёта фаз *np*-рассеяния, приведенных в табл. 1

Канал	$b, \text{ ГэВ}^{-1}$	$\sqrt{s_1}, \text{ ГэВ}$	$\gamma_1, (\text{ГэВ})^2 (i+1)$
${}^1S_0$	5,3	2,455	1,133
${}^3S_1$	5,6	2,222	0,450
${}^3D_1$	5,9	2,222	0,00015
${}^3P_1$	5,3	2,487	0,016
${}^3P_0$	5,7	2,410	0,004
${}^1P_1$	5,7	2,575	0,086

[128]. Учёт неупругости практически не влияет на качество описания фаз и приводит лишь к небольшому изменению параметров. Мезонные обменные эффекты существенно влияют на положения полюсов функции  $\tilde{P}_l(b, s)$  (28) в  $P$ -волновых амплитудах, однако их влияние относительно мало в  $S$ -волнах. Более того, в некоторых случаях мезонные обменные взаимодействия качественно меняют поведение  $\tilde{P}_l(b, s)$  при низких энергиях. Как видно из табл. 2, низшие КДД(П)А-полюсы, найденные из фита данных фазового анализа с учётом мезонных обменных взаимодействий, как в  $S$ -волновых, так и в  $P$ -волновых состояниях, расположены в области промежуточных энергий. Однако если восстановить функции  $P_l(b, s)$  для рассеяния в  ${}^3P_1$ - и  ${}^1P_1$ -состояниях без учёта динамических разрезов с помощью тех же данных фазового анализа, то у них появятся дополнительные полюсы в низкоэнергетической области [98].

Таблица 3.  ${}^1S_0$ - и  ${}^3P_1$ -фазы  $np$ -рассеяния в низкоэнергетической области \*

T, МэВ	1	5	10	15	20	50	75	100	
${}^1S_0$	(A)	61,2	63,3	59,8	56,6	53,6	40,4	32,3	25,6
	(B)	51,6	58,8	57,2	54,9	52,7	41,5	34,1	27,8
	(C)	45,2	57,4	57,8	56,4	54,6	44,0	36,4	29,9
	(D)	58,2	65,1	61,3	57,4	54,6	41,3	33,2	26,4
	Эксп.	61,9	63,2	59,3	55,9	52,9	40,4	32,9	26,4
${}^3P_1$	(A)	-0,13	-1,08	-2,36	-3,52	-4,56	-9,17	-11,95	-14,30
	(B)	-0,14	-1,17	-2,58	-3,90	-5,10	-10,71	-14,18	-17,05
	(C)	-0,01	-0,15	-0,42	-0,75	-1,13	-3,87	-6,40	-8,97
	(D)	-0,13	-1,08	-2,36	-3,52	-4,54	-8,96	-11,45	-13,48
	Эксп.	-0,13	-1,09	-2,36	-3,49	-4,49	-8,85	-11,54	-13,92

\* (A) — расчёт с учётом неупругости и мезонных обменных эффектов по методу, описанному в тексте; параметры  $b$ ,  $\sqrt{s_0}$  и  $\gamma_1$  указаны в табл. 2; (B) — расчёт с теми же параметрами, что и в варианте (A), но с учётом динамического разреза, обусловленного только механизмом однопионного обмена; (C) — расчёт с теми же параметрами, что и в варианте (A), но без учёта динамического разреза; в варианте (D)  $2\pi$ -обменный механизм взаимодействия аппроксимирован обменами  $\rho$ - и  $\sigma$ -мезонов. Использовались следующие значения констант связи:  $g_\rho^2/4\pi = 0,53$ ,  $f_\rho = 1,5$   $g_\rho$ ,  $g_\sigma^2/4\pi = 6$  (определение этих констант такое же, как в [1]), а масса  $\sigma$ -мезона полагалась равной 550 МэВ; значения параметров  $b$ ,  $\sqrt{s_0}$ ,  $\gamma_1$  равны соответственно 5,7 ГэВ<sup>-1</sup>, 2,35 ГэВ и 1,28 ГэВ<sup>2</sup> (в  ${}^1S_0$ -канале) и 7,3 ГэВ<sup>-1</sup>, 2,37 ГэВ и 0,019 ГэВ<sup>4</sup> (в  ${}^3P_1$ -канале). Эксп. — данные ЭФА [127].

Данные табл. 3 иллюстрируют влияние мезонных обменных эффектов на вычисления  ${}^1S_0$ - и  ${}^3P_1$ -фаз в низкоэнергетической области. Для сравнения в этой таблице приведены также результаты расчётов [варианты (D)] этих фаз, в которых двухпионный обменный механизм

взаимодействия аппроксимировался  $\rho$ - и  $\sigma$ -мезонными обменами \*. Как видно из табл. 3, учёт мезонных обменных эффектов весьма важен для адекватного описания  $^1S_0$ -фазы в низкоэнергетической области. В частности, последовательный учёт механизма двухпионного обмена [вариант (A)] приводит к более точному согласию результатов вычислений с данными фазового анализа по сравнению с вариантом (D). Это связано с тем, что вклад ближайшего к физической области участка динамического разреза, который соответствует нерезонансной части механизма двухпионного взаимодействия, в модели однобозонного обмена не учитывается. Что касается резонансной части двухпионного взаимодействия, то она соответствует далёким от физической области участкам динамического разреза и поэтому, как уже подчёркивалось в разд. 2, сильно подавлена.

Как видно из приведенных результатов, в рамках рассматриваемого подхода удаётся хорошо описать энергетические зависимости фаз  $NN$ -рассеяния одновременно как при промежуточных энергиях, так и в низкоэнергетической области. Следовательно, параметры  $b$ ,  $s_1$ ,  $\gamma_1$ , управляющие поведением фаз рассеяния при промежуточных энергиях ( $T \sim 1$  ГэВ), в значительной степени ответственны и за энергетическую зависимость амплитуд рассеяния в околопороговой области. Влияние мезонных обменных эффектов на результаты расчёта длин рассеяния  $a_t$ ,  $a_s$  и эффективных радиусов  $r_t$ ,  $r_s$  в триплетном и синглетном состояниях исследовалось в [88, 89, 91]. Как показывает анализ, наибольшее влияние ( $\sim 25\%$ ) эти эффекты оказывают на эффективный радиус в синглетном состоянии  $r_s$ , а на длины рассеяния  $a_t$ ,  $a_s$  и эффективный радиус в триплетном состоянии  $r_t$  они влияют в значительно меньшей степени. Поэтому представляет интерес вывести приближённые аналитические формулы для низкоэнергетических параметров без учёта мезонных обменных эффектов.

Если пренебречь влиянием динамического разреза в парциальной амплитуде рассеяния, а также вкладом второго слагаемого в формуле (19), который обусловлен релятивистскими эффектами, и использовать приближение (114), то для  $a_t$  и  $r_t$  получаем выражения

$$a_t = b + (m_N \rho_0 h)^{-1}; \quad (112)$$

$$r_t = 2 \left\{ \frac{1}{3} [b + (m_N \rho_0 h)^{-1}] + m_N^{-1} (1 + m_N \rho_0 b h)^{-2} \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{2}{\pi} + \frac{\xi_1}{\rho_1^2} + \frac{1}{2} \rho_0 h - \frac{1}{3\rho_0 h} \right] \right\}, \quad (113)$$

где

$$h = 1 + \frac{\rho_0 \xi_1}{\rho_1^2 (\rho_0^2 + \rho_1^2)} - \frac{2}{\pi} \arctg \rho_0; \\ \xi_1 = \frac{\gamma_1}{4m_N^2} (1 - \rho_1^2)^2, \quad \rho_1 = \sqrt{1 - \frac{4m_N^2}{s_1}}; \quad (114)$$

\* Подробное описание вычислений фаз  $NN$ -рассеяния в рамках рассматриваемого подхода с учетом мезонных обменных взаимодействий в модели однобозонного обмена имеется в [94, 98].



$\rho_0 = \sqrt{\varepsilon_d/m_N}$ ,  $\varepsilon_d$  — энергия связи дейтрона. Выражения для  $a_s$ ,  $r_s$  получаются заменой в формулах (112) — (114)  $\rho_0 \rightarrow \rho'_0 = -\sqrt{\varepsilon'_d/m_N}$ , где  $\varepsilon'_d = 66$  кэВ [142] — величина, определяющая положение виртуального уровня в  $np$ -системе — так называемого «синглетного дейтрона». Формулы, аналогичные (112), (113) в контексте нерелятивистского ( $P$ -матричного) формализма, были получены в [66].

Интересная особенность рассматриваемого метода состоит в том, что он позволяет на основе данных об энергетической зависимости фазы рассеяния исследовать свойства различных механизмов взаимодействия в пространстве относительных расстояний между нуклонами путём варьирования параметра  $b$ . Предположим, что при заданном значении параметра  $b$  взаимодействие в области  $r > b$  определяется механизмами мезонных обменов, которые надлежащим образом учтены заданием скачка  $A_l(s)$  на  $C_L$ . Тогда поведение фазы рассеяния должно быть взаимосвязано с  $\text{disc } A_l(s)$  на  $C_L$  таким образом, чтобы ни при каких энергиях не нарушалось условие [см. (28)]

$$d\tilde{P}_l(b, s)/ds < 0, \quad (115)$$

которое является следствием принципа аналитичности, отражающего, как мы полагаем, требование причинности. Представляется естественным рассматривать неравенство (115) как обобщение условия, которому удовлетворяет логарифмическая производная волновой функции в нерелятивистской квантовой механике [55].

Если в области  $r > b$  действует принципиально иной механизм взаимодействия, не сводящийся к мезонным обменам, то в этом случае при данном значении  $b$  возможно нарушение условия (115). Область значений параметра  $b$  ( $b < b_0$ ), в которой нарушается условие (115), следует считать «запрещённой». Это означает, что взаимодействие на расстояниях  $r < b_0$  можно описать в терминах КДД(ПА)-полюсов функции  $P_l(b, s)$  (при  $b > b_0$ ), но нельзя отнести к «внешнему» взаимодействию, которое определяется функциями  $\Delta_l(b, s)$ ,  $n_l(b, s)$  (15), (16) (при  $b < b_0$ ). Разумеется практически достаточно надёжно можно рассчитать вклад в  $\text{disc } A_l(s)$  на  $C_L$  только ближайших к физической области динамических сингулярностей, ответственных за взаимодействие в периферической области. Энергетическая зависимость фазы рассеяния также известна из данных фазовых анализов с некоторой конечной точностью. Благоприятным обстоятельством является то, что вклады далёких от физической области участков динамического разреза подавлены экспоненциальным фактором в соотношении (19). Но степень этого подавления зависит от значения  $b$ . С уменьшением  $b$  всё больший вес приобретают далёкие сингулярности, вклад которых известен плохо. Поэтому в каждом конкретном случае требуется специальный анализ наиболее вероятных причин возможного нарушения условия (115).

В качестве примера в табл. 4 приведены данные об энергетической зависимости функции  $\tilde{P}_l(b, s)$  для  $NN$ -рассеяния в  ${}^1P_1$ -состоянии,

Таблица 4. Энергетическая зависимость функции  $\tilde{P}_l(b, s) \cdot 10^3$  (ГэВ<sup>2</sup>) для  $np$ -рассеяния в  $^1P_1$ -состоянии: (а) — результаты расчёта на основе данных ЭФА [127] с учётом динамического разреза, (б) — без учёта динамического разреза \*

T, МэВ	$b = 7,3 \text{ ГэВ}^{-1}$		$b = 5,7 \text{ ГэВ}^{-1}$	
	(а)	(б)	(а)	(б)
1	5,22	-10,88	9,85	-5,12
5	5,63	-42,73	10,31	-9,42
10	5,83	32,15	10,95	-21,67
20	6,27	12,52	12,52	176,64
50	7,29	8,66	16,91	25,19
100	8,04	7,93	21,48	22,22
200	7,68	6,83	22,24	20,07
300	6,14	5,27	19,05	17,06
400	3,90	3,31	15,58	14,16
600	-5,39	-4,27	6,94	6,73
800	-26,12	-20,05	1,07	1,46
1050	57,93	53,47	-13,89	-12,53

\* Точка вычитания  $s_0$  в (22) и (27) выбрана в начале левого разреза.

полученные с помощью ЭФА [127] для двух значений  $b$  (7,3 и 5,7 ГэВ<sup>-1</sup>) с учётом [варианты (а)] и без учёта [варианты (б)] динамического разреза. Из этих данных видно, во-первых, что у функции  $P_l(b, s)$ , как уже отмечалось выше, появляется дополнительный полкус при низких энергиях, если пренебречь влиянием мезонных обменных эффектов и, во-вторых, в низкоэнергетической области условие (115) нарушается при учёте динамического разреза даже в случае  $b = 7,3 \text{ ГэВ}^{-1}$ . При вариации мезон-нуклонных констант связи в разумных пределах, а также в различных вариантах учёта двухпионных обменных эффектов эти закономерности качественно не меняются. Поскольку трудно предположить, что в области  $r > 7,3 \text{ ГэВ}^{-1}$  имеется какой-либо неучтённый механизм взаимодействия, по нашему мнению, наиболее вероятной причиной нарушения условия (115) в данном случае является то, что ЭФА [127] недостаточно адекватно передаёт энергетическую зависимость  $^1P_1$ -фазы в области низких энергий. Приведенные на рис. 1 теоретические кривые могут служить примерами поведения  $^1P_1$ -фазы, которые не нарушают условие (115). На этом рисунке приведены также данные различных фазовых анализов. Кроме поведения в низкоэнергетической области, представляет несомненный интерес уточнить энергетическую зависимость этой фазы в области 600—800 МэВ, где имеется довольно большое расхождение между различными данными.

Применим теперь соотношение (115) для определения «запрещенной» области значений параметра  $b$  в  $^1S_0$ -состоянии. В табл. 5 приведены результаты расчета функции  $P_l(b, s)$ , полученные с помо-

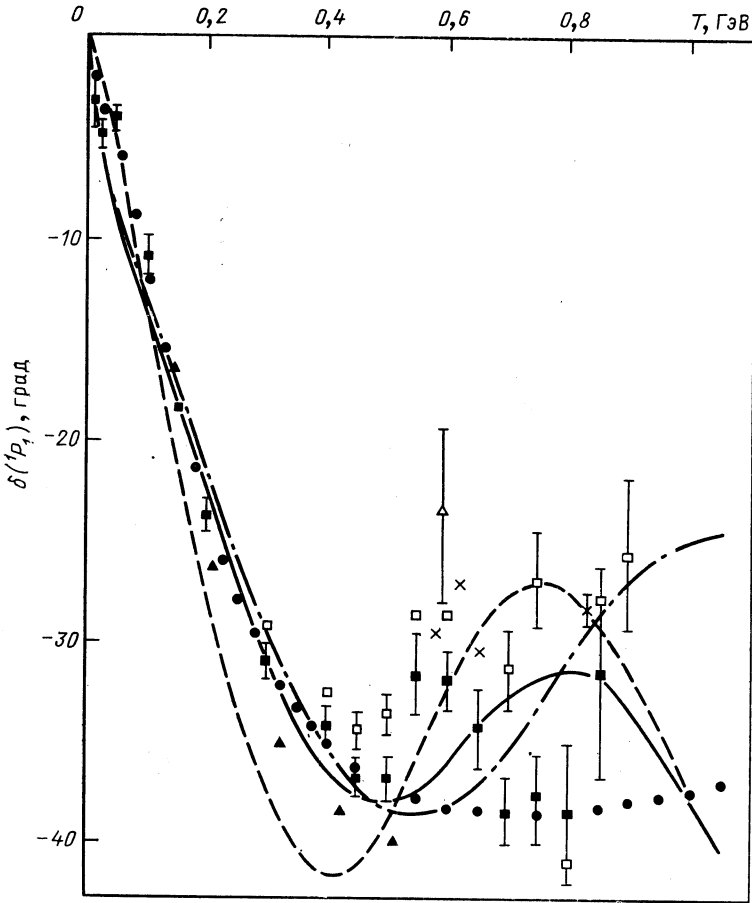


Рис. 1. Энергетическая зависимость  $^1P_1$ -фазы  $np$ -рассеяния:

сплошная кривая — расчет при  $b = 7,3 \text{ ГэВ}^{-1}$  ( $\sqrt{s_1} = 2,289 \text{ ГэВ}$ ,  $\gamma_1 = 0,012 \text{ ГэВ}^*$ ) с учетом динамического разреза; штриховая — результат вычислений с теми же параметрами, но без учета динамического разреза; штрихпунктирная — результат расчета с параметрами, указанными в табл. 2 и с учетом динамического разреза. Данные фазовых анализов приведены из работ [127] (● — ЭФА, ■ — ФАФЭ), [128] (□ — ФАФЭ), [153] (▲), [154] (×), [155] (Δ)

щью данных ЭФА [127] для  $^1S_0$ -фазы при четырех значениях  $b$  с учетом мезонных обменных взаимодействий. Как видно из этой таблицы, значения  $b$ , равные 5,0 и 4,5  $\text{ГэВ}^{-1}$ , находятся в «разрешенной» области, однако  $b$ , равные 4,0 и 3,0  $\text{ГэВ}^{-1}$ , принадлежат уже «запрещенной» области. Этот результат можно интерпретировать следующ-

Таблица 5. Энергетическая зависимость функции  $\tilde{P}_l(b, s)$  для  $pp$ -рассеяния в  $^1S_0$ -состоянии при различных значениях параметра  $b$  (ГэВ $^{-1}$ ) \*

T, МэВ	b			
	5,0	4,5	4,0	3,0
1	0,5173	0,5207	0,5267	0,3632
5	0,5156	0,5203	0,5268	0,5646
10	0,5155	0,5198	0,5269	0,5662
20	0,5130	0,5184	0,5265	0,5686
50	0,5033	0,5114	0,5223	0,5708
100	0,4856	0,4986	0,5141	0,5722
200	0,4524	0,4765	0,5019	0,5821
300	0,4129	0,4498	0,4854	0,5839
400	0,3579	0,4115	0,4584	0,5701
600	0,2328	0,3344	0,4098	0,5566
800	0,0703	0,2506	0,3627	0,5494
1050	-0,2884	0,1084	0,2891	0,5301

\* Точка вычитания  $s_0$  в (22) и (27) выбрана в начале левого разреза.

щим образом: для того чтобы объяснить поведение  $^1S_0$ -фазы ЭФА [127], на расстояниях  $r \lesssim 0,8$  фм должен быть механизм взаимодействия, не сводящийся к мезонным обменным взаимодействиям, учтённым описанным выше образом при расчёте скачка парциальной амплитуды на динамическом разрезе.

Как видно из табл. 2, оптимальные значения  $b$ , полученные из анализа как  $S$ -волновых, так и  $P$ -волновых амплитуд  $NN$ -рассеяния при низких и промежуточных энергиях, приблизительно одинаковы и находятся в области 5,3–5,7 ГэВ $^{-1}$ , что примерно на 20–30 % меньше значений, получаемых с помощью формул (1), (2), если для оценки радиуса шестикваркового мешка воспользоваться моделью мешков MIT [32–34]. Именно таким образом обычно оценивается радиус эквивалентного адронного мешка, являющийся аналогом параметра  $b$  в  $P$ -матричных анализах (см., например, [43]). Отметим также, что в анализе, основанном на модели СКМ [73, 76], извлекаемые значения радиуса эквивалентного адронного мешка в  $^1S_0$ - и  $^3S_1$  —  $^3D_1$ -каналах составляют 6,1–6,7 ГэВ $^{-1}$ .

В этой связи представляет интерес проанализировать вопрос о том, какую роль играет последовательный учёт эффектов релятивистской динамики в рассматриваемом дисперсионном подходе, проявляющийся в том, что мы исходим из требуемой аналитической структуры для инвариантных фейнмановских амплитуд. С этой целью были выполнены вычисления фаз  $NN$ -рассеяния в рамках «нерелятивистской» версии уравнений, которые в одноканальном слу-

чае получаются из уравнений, сформулированных в разд. 2 заменой функции  $\rho_l(s)$  (4) на  $k^{2l} \sqrt{s/4m_N^2 - 1}$  и модификацией формулы (19) [в «нерелятивистской» версии следует опустить второе слагаемое в выражении для  $\text{Im } T_l(b, s)$ ]. В остальном вычисления проводились по описанной выше схеме (с учётом релятивистской кинематики и с теми же скачками парциальных амплитуд, что и в релятивистском случае). Из анализа  $S$ - и  $P$ -волновых  $NN$ -фаз на основе нерелятивистской версии уравнений следует, что оптимальные (по  $\chi^2$ ) значения  $b$  находятся в области 6,6—7,0 ГэВ<sup>-1</sup>. Таким образом, учёт эффектов релятивистской динамики способствует уменьшению  $b$  примерно на 0,25—0,3 фм.

Как следует из анализа, проведенного в разд. 5, полюсы функции  $P_l(b, s)$  (28) могут быть сопоставлены состояниям компаунд-системы типа составного кварк-глюонного мешка, что позволяет использовать для оценки величин  $s_{li}(b)$ ,  $\gamma_{li}(b)$  кварковые гамильтонианы моделей мешков. В модели MIT [32—34] кварковый мешок трактуется как изолированная система, размер которой определяется балансом вакуумного давления и давления кварк-глюонной плазмы, находящейся в сферической полости радиуса  $R$ . Приведём положения низших уровней шестикваркового мешка в  $S$ -волновых каналах  $NN$ -рассеяния в этой модели: 2,243 ГэВ ( $^1S_0$ ), 2,165 ГэВ ( $^3S_1$ ) [40, 43]. Для  $P$ -волновых каналов можно воспользоваться расчётами энергий низших состояний в модели вращающихся мешков [65]: 2,11 ГэВ ( $^1P_1$ ), 2,20 ГэВ ( $^3P_1$ ) и 2,245 ГэВ ( $^3P_0$ ). Причина, по которой эти энергии несколько меньше значений  $\sqrt{s_1}$ , приведенных в табл. 2, тесно связана с тем обстоятельством, что радиусы шестикварковых мешков в модели MIT больше значений, вытекающих из формул (1), (2) и данных о параметре  $b$ , указанных в табл. 2. Действительно, если вычислить  $R$  из условия равновесия шестикваркового мешка в модели MIT, то с помощью формул (1), (2) для  $NN$ -рассеяния в  $^1S_0$ - и  $^3S_1$ -состояниях получаем  $b \simeq 7,4$  ГэВ<sup>-1</sup>.

Недостатком данного метода теоретической оценки параметра  $b$  и положений КДД(ПА)-полюсов является, на наш взгляд, то, что условие равновесия в модели MIT не учитывает связи шестикваркового мешка с каналами  $NN$ -рассеяния. Заметим, что в киральных моделях (KM) [45—49] и, в частности, в СВМ (Cloudy Bag Model) [46, 47] кварковый мешок представляет собой систему, находящуюся в динамическом равновесии с окружающим его пионным полем. Иными словами, в KM учитывается связь кваркового мешка с соответствующим пионным каналом рассеяния. Например, для нуклонного мешка таким каналом является канал  $\pi N$ -рассеяния. Следуя этой логике, кварковый мешок можно трактовать как систему кварковых и глюонных полей, находящуюся в динамическом равновесии с адронными полями всех каналов рассеяния (в том числе закрытыми при данной энергии), с которыми может быть связана эта система в силу законов сохранения. Можно ожидать, что каналы рассеяния, имею-

щие с мешком одинаковый кварковый состав, наиболее сильно с ним связаны, и эти каналы следует учесть в первую очередь.

В модели мешков MIT и КМ энергия безмассовых кварковых полей, локализованных в полости радиуса  $R$ , определяется выражением

$$H_Q(R) = \frac{A}{R} + \frac{4\pi}{3} BR^3, \tag{116}$$

где  $A = N\omega_Q - Z_0 + \alpha_s \Delta_{\text{см}}$ ;  $N$  — число кварков и антикварков в системе;  $\omega_Q$  — волновое число кварка в  $S_{1/2}$ -состоянии;  $Z_0$  — феноменологическая константа, эффективно учитывающая энергию нулевых мод и движение центра масс;  $\alpha_s$  — константа кварк-глюонного взаимодействия;  $\Delta_{\text{см}}$  — величина, определяемая цветомagnитным взаимодействием кварков, которая вычисляется в приближении одноглюонного обмена [35];  $B$  — константа, имеющая смысл разности плотностей энергий вакуума вне и внутри мешка. Наборы констант  $B$ ,  $Z_0$  и  $\alpha_s$ , найденные из условия наилучшего описания спектра масс адронов для моделей мешков MIT [32—34] и СВМ [47], представлены в табл. 6.

Таблица 6. Наборы параметров  $B^{1/4}$ ,  $\alpha_s$ ,  $Z_0$  для моделей MIT [32—34] и СВМ [47]\*

Модель	$B^{1/4}$ , ГэВ	$\alpha_s$	$Z_0$
MIT	0,146	2,2	1,84
СВМ (1)	0,169	1,69	1,80
СВМ (2)	0,151	1,41	1,31

\* Во второй и третьей строках таблицы приведены два набора параметров модели СВМ, которые приблизительно одинаково хорошо описывают спектр масс адронов.

Для оценки величин  $s_{li}(b)$ ,  $\gamma_{li}(b)$  в случае  $l = 0$  рассмотрим метод [99, 100], основанный на предположении, что энергия  $\omega_i(b)$  (индекс  $l = 0$  здесь и далее опускаем) состояния вида (103), локализованного в области относительных расстояний между адронами  $r < b$ , определяется гамильтонианом  $H_Q(R)$  (116) посредством уравнения

$$\omega_i(b) = H_Q(R), \tag{117}$$

где радиус  $R$  компаунд-системы типа кварк-глюонного мешка и параметр  $b$  связаны соотношением (1), в котором константа  $c$  либо теоретически оценивается с помощью формулы (2), либо рассматривается как феноменологический параметр. С учётом (1), (95), (116), (117) равенство (107) (для  $l = 0$ ) принимает вид

$$\frac{A}{R^2} = 4\pi BR^2 + \frac{1}{4} c\gamma_i(cR). \tag{118}$$

Физический смысл этого уравнения состоит в том, что давление, создаваемое кварками во внутренней полости, уравнивается суммой вакуумного давления [первый член в правой части равенства (118)] и давления, обусловленного связью с каналом рассеяния. В пределе  $\gamma_i(b) \rightarrow 0$  (т. е. при отсутствии связи с каналом рассеяния) уравнение (118) сводится к обычному условию равновесия для изолированного мешка модели MIT. Требование неотрицательности вычетов  $\gamma_i(b)$  (см. разд. 2), являющееся следствием принципа причинности, означает, что дополнительное давление, обусловленное связью с адронным каналом рассеяния, всегда действует в направлении сжатия кваркового мешка.

В табл. 7, 8 приведены значения  $\sqrt{s_1}$ ,  $\gamma_1$  для  $NN$ -рассеяния в  $^1S_0$ - и  $^3S_1$ -состояниях, найденные из фита данных фазового анализа

Таблица 7. Параметры КДД (ПА)-полюса  $^*b^1S_0$ -канале для  $pp$ -рассеяния при фиксированных значениях  $b$

$b$ , ГэВ $^{-1}$	4,9	5,1	5,3	5,5	5,7	5,9
Подгонка по данным фазового анализа [127]						
$\sqrt{s_1}$ , ГэВ	2,56	2,51	2,45	2,40	2,34	2,30
$\gamma_1$ , ГэВ $^2$	1,32	1,25	1,12	0,98	0,83	0,71
$\chi^2$	2,07	1,78	1,55	1,43	1,42	1,63
$\sqrt{s_1}$ , ГэВ	2,58	2,55	2,52	2,48	2,43	2,38
$\gamma_1$ , ГэВ $^2$	1,77	1,87	1,95	1,91	1,80	1,63
$\chi^2$	5,49	6,41	5,68	4,96	4,24	3,55
Предсказания, основанные на уравнениях (117), (118)						
$\sqrt{s_1}$ MIT $\begin{cases} (a) \\ (b) \end{cases}$	2,67	2,60	2,53	2,47	2,42	2,38
CBM (1)	2,51	2,50	2,46	2,42	2,37	2,34
CBM (2)	2,78	2,72	2,67	2,63	2,61	2,58
	2,76	2,68	2,62	2,56	2,51	2,47
$\gamma_1$ MIT $\begin{cases} (a) \\ (b) \end{cases}$	1,63	1,44	1,27	1,11	0,95	0,81
CBM (1)	1,43	1,27	1,10	0,93	0,74	0,56
CBM (2)	1,28	1,06	0,86	0,67	0,49	0,32
	1,62	1,42	1,24	1,07	0,91	0,76
$c$ $\begin{cases} (b) \\ (b) \end{cases}$	1,00	1,04	1,05	1,06	1,06	1,06
	1,03	1,04	1,05	1,04	1,03	1,02

\* Символом  $\sim$  обозначены параметры КДД (ПА)-полюса в нерелятивистской версии формализма.

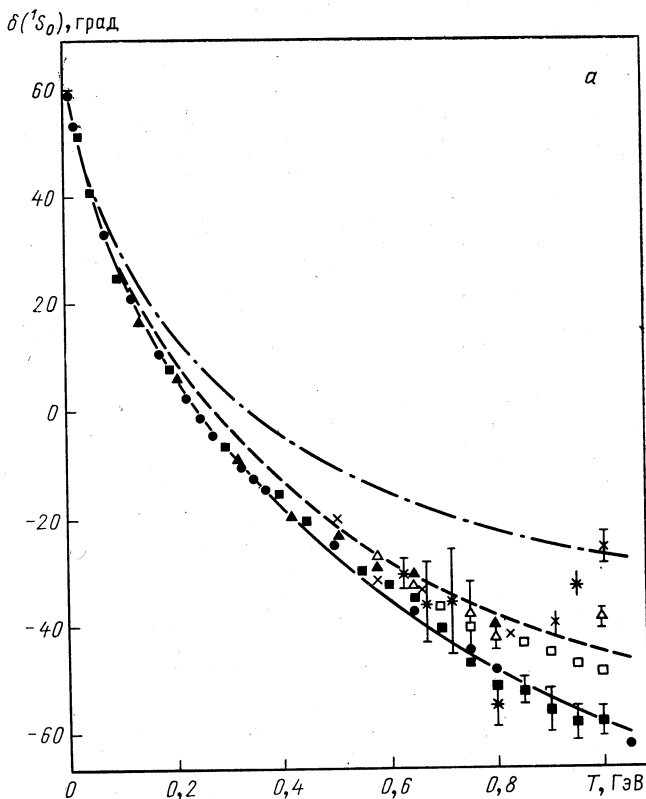
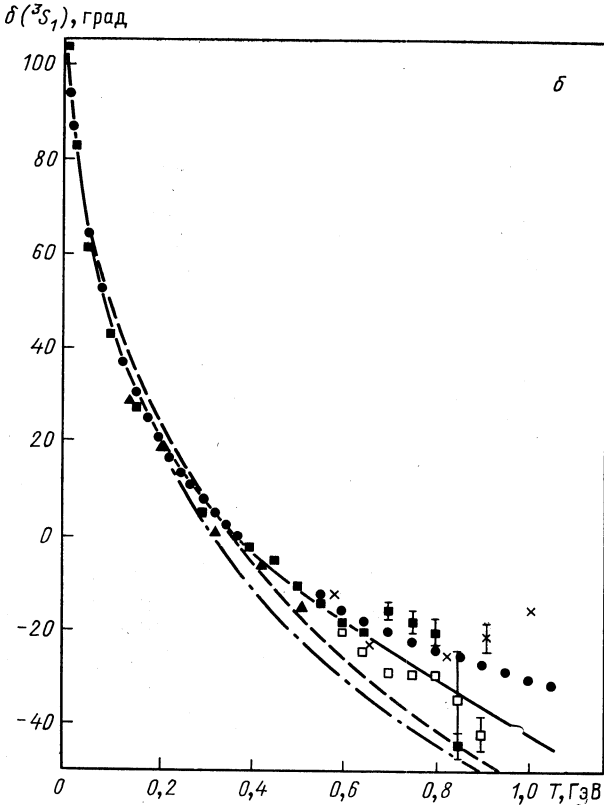


Рис. 2. Результаты расчета  ${}^1S_0$  (а)- и  ${}^3S_2$  (б)- фаз *пр-рас* метод расчета параметров описан в тексте и основан на использовании гамильтонианов квар модели СВМ (2) и штрихпунктирная — модели MIT; б — сплошная (вариант с  $b = 5,7 \text{ ГэВ}^{-1}$ ) вая — модели СВМ (1). Данные фазовых анализов приведены из работ [127] (● — ЭФА, ■ —

[127] по методу  $\chi^2$  при фиксированных значениях  $b$ , а также предсказания, основанные на уравнениях (117), (118) с параметрами моделей мешков MIT и СВМ, указанными в табл. 6. Для сравнения в табл. 7, 8 представлены также результаты аналогичного анализа, выполненного с помощью указанной выше нерелятивистской версии уравнений. Для гамильтониана модели мешков MIT оценки параметров  $\sqrt{s_1}$ ,  $\gamma_1$  и  $c$  проведены тремя способами: в варианте (а) параметр  $c$  был выбран равным 1,1 (1,0) для  $NN$ -рассеяния в  ${}^1S_0$ - ( ${}^3S_1$ )-состоянии, а  $\sqrt{s_1}$  и  $\gamma_1$  вычислялись с помощью уравнений (117), (118); в варианте (б)  $\gamma_1$  полагалось равным «экспериментальному» значению, т. е. значению, найденному из фита данных фазового анализа (при данном  $b$ ), и вычислялись  $\sqrt{s_1}$ ,  $c$  с помощью указанных уравнений; в варианте (в)  $\sqrt{s_1}$  полагалось равным эксперименталь-





сеяния с параметрами, указанными в табл. 9:

новых моделей мешков. а — сплошная кривая соответствует модели СВМ (1); штриховая — и штрихпунктирная (вариант с  $b=5,1 \text{ ГэВ}^{-1}$ ) кривые соответствуют модели МТ, а штрихо-ФАФЭ); [128] ( $\square$  — ФАФЭ); [153] ( $\blacktriangle$ ); [154] ( $\times$ ); [156] ( $\triangle$ ) и [157] ( $\ast$ )

ному значению и делались предсказания для  $\gamma_1$ ,  $c$ . При использовании гамильтониана (116) с параметрами моделей СВМ(1) и СВМ(2) (см. табл. 6) вычисления  $\sqrt{s_1}$  и  $\gamma_1$  проводились так же, как в варианте (а). В вариантах (б) и (в) предсказания для параметра  $c$  практически совпадают, причём результаты вычислений мало меняются при варьировании параметра  $b$  в окрестности минимума  $\chi^2$ . Полученные значения для параметра  $c$  несколько меньше теоретической оценки по формуле (2) ( $c \cong 1,1$ ), но это отличие невелико, особенно для рассеяния в  $^1S_0$ -состоянии.

Как видно из данных табл. 7, 8, благодаря учёту связи шестикваркового мешка с каналом  $NN$ -рассеяния предсказания, основанные на уравнениях (117), (118), для положения КДД(ПА)-полюса  $s_1$  и вычета  $\gamma_1$  в целом находятся в удовлетворительном согласии с экспериментальными величинами при значениях  $b$  вблизи минимума  $\chi^2$ .

Таблица 8. Параметры КДД (ПА)-полюса в  ${}^3S_1$ -канале для  $pr$ -рассеяния при фиксированных значениях  $b$ 

$b$ , ГэВ $^{-1}$	4,9	5,1	5,3	5,5	5,7
Подгонка по данным фазового анализа [127]					
$\sqrt{s_1}$ , ГэВ	2,30	2,27	2,24	2,21	2,19
$\gamma_1$ , ГэВ $^2$	0,52	0,51	0,48	0,45	0,41
$\chi^2$	6,8	4,6	2,9	1,6	1,1
$\sqrt{\tilde{s}_1}$ , ГэВ	2,33	2,31	2,28	2,26	2,23
$\tilde{\gamma}_1$ , ГэВ $^2$	0,67	0,72	0,73	0,72	0,69
$\tilde{\chi}^2$	42,9	35,1	27,8	21,9	16,7
Предсказания, основанные на уравнениях (117), (118)					
$\sqrt{s_1}$ MIT { (a) (б)	2,40 2,20	2,34 2,20	2,29 2,20	2,25 2,19	2,22 2,19
CBM (1)	2,57	2,54	2,51	2,50	2,50
CBM (2)	2,52	2,46	2,42	2,38	2,35
$\gamma_1$ MIT { (a) (б)	1,22 0,98	1,04 0,85	0,87 0,71	0,72 0,56	0,57 0,39
CBM (1)	0,78	0,57	0,36	0,16	—
CBM (2)	1,22	1,02	0,84	0,67	0,52
$c$ { (б) (в)	0,83 0,93	0,87 0,95	0,90 0,86	0,93 0,96	0,96 0,95

Таблица 9. Значения параметров  $b$ ,  $\sqrt{s_1}$ ,  $\gamma_1$  и  $c$  для вариантов расчёта  ${}^1S_0$ - и  ${}^3S_1$ -фаз  $pr$ -рассеяния, приведенных на рис. 2

Фаза	Модель	$b$ , ГэВ $^{-1}$	$\sqrt{s_1}$ , ГэВ	$\gamma_1$ , ГэВ $^2$	$c$
${}^1S_0$	MIT	5,1	2,629	1,490	1,1
	CBM (1)	4,9	2,811	1,367	1,1
	CBM (2)	4,4	2,760	1,599	1,1
${}^3S_1$	MIT	5,7	2,220	0,568	1,0
	MIT	5,1	2,485	1,354	1,1
	CBM (1)	4,1	2,828	1,839	1,0

В заключение этого раздела приведём результаты расчёта  $^1S_0$ - и  $^3S_1$ -фаз (см. рис. 2 и табл. 9), в котором параметры  $s_1$ ,  $\gamma_1$  вычислялись с помощью уравнений (117), (118). Константа  $a$  (111), как и выше, определялась из условия, чтобы система имела правильное положение виртуального уровня в  $^1S_0$ -канале или экспериментальную энергию связи дейтрона в  $^3S_1$ -канале ( $D$ -волна в этом расчёте не учитывалась). Оставшийся ещё не определённым параметр  $b$  был выбран таким образом, чтобы длина рассеяния в каждом из рассматриваемых каналов совпадала с её экспериментальным значением [1].

## 7. АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ МЕЗОН-МЕЗОННОГО И МЕЗОН-БАРИОННОГО РАССЕЯНИЯ ПРИ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ЭНЕРГИЯХ

Обсуждаемый подход обладает большой универсальностью и может быть применен не только к  $N\bar{N}$ -рассеянию, но и к другим процессам адрон-адронного рассеяния при низких и промежуточных энергиях. Исследование этих процессов позволяет выявить новые интересные закономерности качественного и количественного характера. Как следует из результатов разд. 6, характерной особенностью  $N\bar{N}$ -рассеяния является то, что в области промежуточных энергий  $T \lesssim 1$  ГэВ, где имеются данные фазовых анализов и сравнительно невелико влияние неупругих каналов, во всех рассмотренных парциальных волнах важен вклад только одного КДД(ПА)-полюса. Представляет, однако, интерес анализ процессов, которые характеризуются наличием сразу нескольких КДД(ПА)-полюсов в каком-либо канале рассеяния в области энергий, где имеется информация о фазах рассеяния. Важным примером такого типа процессов может служить  $\pi\pi$ -рассеяние. В последние годы интерес к этому процессу тесно связан с проблемой интерпретации и описания свойств скалярных мезонов (см., например, [143, 144]).

За последние 10—15 лет было выполнено более десяти фазовых анализов  $\pi\pi$ - и  $K\bar{K}$ -рассеяния в области  $\sqrt{s} \lesssim 1,8$  ГэВ. Имеющиеся экспериментальные данные пока не позволяют однозначно выполнить фазовый анализ при фиксированной энергии (ФАФЭ). Анализы такого типа приводят, как правило, к нескольким решениям. Так, например, ФАФЭ [145] приводит к четырём решениям для  $\delta_0^0$ -фазы ( $\delta_0^I$ , где  $I$  — изоспин,  $J$  — угловой момент). Первое из этих решений на интервале масс 1,0—1,4 ГэВ почти полностью совпадает с результатом энергозависимого фазового анализа (ЭФА) [146]. В [147] приведены аргументы в пользу именно этого решения. Однако в области масс выше 1,4 ГэВ данные ЭФА [146] близки к другому решению ФАФЭ [145]. Более поздний ЭФА [148] основан на экспериментах с большой статистикой по рождению пионов и каонов в  $\pi\bar{N}$ -взаимодействиях. Данные анализов [146, 148] для  $\delta_0^0$ -фазы не сильно отличаются друг от друга и в основном различие касается деталей поведения этой фазы в области  $S^*$  (980)-резонанса. С другой стороны, один из последних анализов [149] даёт для  $\delta_0^0$ -фазы заметно отличаю-

щиеся от данных работ [146, 148] значения на интервалах масс  $\pi\pi$ -системы 0,4—0,7 и 1,1—1,3 ГэВ.

Расчёты  $S$ - ( $I = 0,2$ ) и  $P$ - ( $I = 1$ ) фаз  $\pi\pi$ -рассеяния были выполнены с помощью уравнений разд. 2 с учётом эффектов неупругости, обусловленных в основном влиянием  $K\bar{K}$ - и  $\eta\bar{\eta}$ -каналов. Информация о параметре неупругости в этих уравнениях была взята из данных фазовых анализов  $\pi\pi$ - и  $K\bar{K}$ -рассеяния [146, 148]. Скачки парциальных амплитуд на динамическом разрезе были рассчитаны с учё-

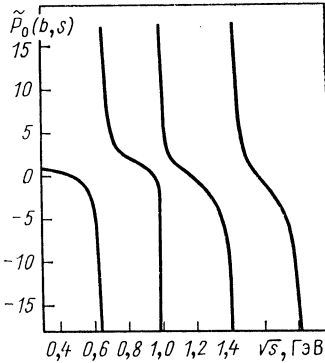


Рис. 3. Энергетическая зависимость функции  $\tilde{P}_0(b, s)$  в формуле (27) для  $\pi\pi$ -рассеяния в канале с  $J = I = 0$  при  $b = 5 \text{ ГэВ}^{-1}$ , построенная по данным фазового анализа работы [146]

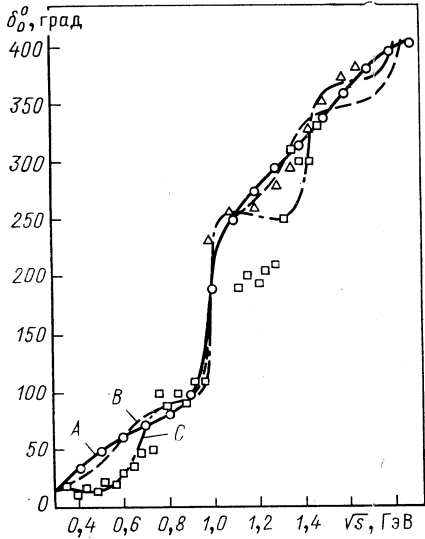


Рис. 4. Энергетическая зависимость  $\delta_0^0$ -фазы  $\pi\pi$ -рассеяния при  $b = 5 \text{ ГэВ}^{-1}$  для трех вариантов расчета А, В, С с параметрами  $\sqrt{s_i}$ ,  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), указанными в табл. 10. Данные фазовых анализов взяты из работ [146] ( $\circ$ ); [148] ( $\Delta$ ) и [149] ( $\square$ )

том механизма  $\rho$ -мезонного обмена в  $t$ -канале. Однако благодаря указанному выше эффекту подавления далёких динамических сингулярностей вклад  $\rho$ -мезонного обмена [первое слагаемое в формуле (19)] лишь в очень малой степени сказывается на результатах расчёта парциальных амплитуд. Второе слагаемое в формуле (19), обусловленное релятивистскими эффектами, оказывает существенное влияние на результаты расчёта фаз рассеяния.

На рис. 3 показан вид функции  $\tilde{P}_0(b, s)$  для  $b = 5 \text{ ГэВ}^{-1}$  в канале  $I = J = 0$ , полученный с помощью ЭФА [146]. Видно, что  $\tilde{P}_l(b, s)$  имеет поведение, характерное для  $R$ -функции: она убывает с ростом аргумента при всех значениях  $s$  и имеет разрывы, отвечающие полюсам. На рис. 4 сплошной кривой [вариант (А)] представлен фит данных ЭФА [146]  $\delta_0^0$ -фазы  $\pi\pi$ -рассеяния с учётом вклада четырёх

КДД(ПА)-полюсов при  $b = 5 \text{ ГэВ}^{-1}$  и параметрами  $\sqrt{s_i} \equiv \sqrt{s_{0i}(b)}$ ,  $\gamma_i \equiv \gamma_{0i}(b)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), указанными в табл. 10. В таблице приведены также значения масс примитивов  $Q^2\bar{Q}^2$ -системы в  $J^P = 0^+$ -канале, рассчитанные в рамках модели кварковых мешков MIT [43]. Заметим, что в отличие от расчёта Джаффе [39], в [43] учитывалось смешивание, обусловленное зависимостью интенсивности цветомагнитного взаимодействия от аромата кварков. Однако для уровней  $Q^2\bar{Q}^2$ -системы, приведенных в табл. 10, результаты работ [39, 43] весьма близки. Можно ожидать, что в окрестности третьего КДД(ПА)-полюса имеется также примитив  $Q\bar{Q}$ -системы, отвечающий  $\varepsilon$  (1300—1400)-резонансу.

Чтобы показать степень чувствительности результатов расчёта  $\delta_0^\circ$  фазы к выбору различных параметров (особенно вычетов  $\gamma_i$ ), на рис. 4 приведены два альтернативных варианта расчёта  $B$  и  $C$ . Как

Таблица 10. Параметры КДД(ПА)-полюсов для  $\pi\pi$ -рассеяния в канале с  $I=J=0$  (см. рис. 4). Предсказания для масс  $Q^2\bar{Q}^2$ -состояний (примитивов) взяты из работы [43]

$i$	$\sqrt{s_i}, \text{ ГэВ}$			$\gamma_i, \text{ ГэВ}^2$			Предсказания для масс $Q^2\bar{Q}^2$ ( $J^P = 0^+, I = 0$ ) примитивов	
	(A)	(B)	(C)	(A)	(B)	(C)	Масса, ГэВ	Обозначение примитива
1	0,651	0,638	0,685	0,293	0,207	0,150	0,642	$C^0$ (9)
2	1,009	1,005	0,998	0,128	0,091	0,040	1,122 1,115	$C^0$ (36) $C^s$ (9)
3	1,380	1,358	1,431	1,049	0,701	0,298	1,43 1,51	$C^0$ (9*) $C^s$ (36)
4	1,913	1,838	1,844	4,177	0,800	1,047	1,82 1,78	$C^0$ (36*) $C^{ss}$ (36)

Примечание. Используются обозначения примитивов, принятые в [37]; в скобках указан  $SU(3)_f$ -мультиплет, которому будет принадлежать состояние при выключении смешивания, вызванного различием цветомагнитных сил для различных ароматов кварков; звёздочкой отмечены цветоспиновые возбуждения данного мультиплета; буква  $s$  означает присутствие скрытой  $ss$ -пары.

видно из табл. 10, найденные из фита данных фазового анализа положения КДД(ПА)-полюсов достаточно хорошо согласуются с расчётами спектра масс  $Q^2\bar{Q}^2$ -системы в модели кварковых мешков MIT [39, 43].

Попытаемся оценить величины  $\gamma_i$ , учитывая соотношения (94), (95) и используя для оценки вычетов  $P$ -матрицы метод, предложен-

ный в [54]. В результате получим формулу [95]

$$\gamma_i = 3 \sqrt{s_i} \langle \Lambda \rangle / b, \quad (119)$$

где  $\langle \Lambda \rangle$  — доля примеси кварковой конфигурации, соответствующей адронному каналу рассеяния в кластерном разложении волновой функции мешкового состояния. Предполагая, что вычет в первом КДД(ПА)-полусе обусловлен связью с  $C^0$  (9)-примитивом, а второй КДД(ПА)-полус — с  $C^0$  (36)-примитивом, с помощью формулы (119) получаем следующие значения для указанных вычетов:  $\gamma_1 = 0,16 \text{ ГэВ}^2$  и  $\gamma_2 = 0,06 \text{ ГэВ}^2$  [95].

Следует отметить, что вычеты  $\gamma_i$  более чувствительны к деталям энергетической зависимости фазы рассеяния, чем положения КДД(ПА)-полусов. Как видно из рис. 4, поведение фазы, подобное вариантам  $B$  или  $C$ , не противоречит данным фазовых анализов. Вместе с тем значения вычетов в этих вариантах существенно отличаются от их значений в варианте  $A$ . Поэтому для получения более точных данных о вычетах необходимо улучшить экспериментальную информацию о  $\delta_0^0$ -фазе лл-рассеяния.

Таблица 11. Предсказания для параметров  $\sqrt{s_1}$ ,  $\gamma_1$ ,  $c$  в  $J=I=0$ -канале лл-рассеяния, основанные на уравнениях (117), (118). Описание вариантов расчёта (а), (б), (с) дано в тексте

Вариант	$\sqrt{s_1}$ , ГэВ	$\gamma_1$ , ГэВ <sup>2</sup>	$c$
(а)	0,678	0,265	1,4
(б)	0,687	0,293	1,437
(с)	0,651	0,140	1,260

Применим теперь для вычисления  $s_1$ ,  $\gamma_1$ , а также параметра  $c$  в формуле (1) уравнения (117), (118). В табл. 11 представлены результаты расчёта параметров, относящихся к низшему уровню  $Q^2\bar{Q}^2$ -мешка с квантовыми числами  $J=I=0$  при  $b=5 \text{ ГэВ}^{-1}$ . В варианте (а) параметр  $c$  оценивается по формуле (2), а  $\sqrt{s_1}$  и  $\gamma_1$  вычисляются с помощью уравнений (117), (118) и кваркового гамильтониана (116) с параметрами модели мешков MIT (см. табл. 6); в варианте (б) значение  $\gamma_1$  взято из фита данных фазового анализа [для варианта (A), см. табл. 10] и предсказываются  $\sqrt{s_1}$ ,  $c$  с помощью указанных уравнений; наконец, в варианте (в) значение  $\sqrt{s_1}$  взято из фита [для варианта (A), см. табл. 10], а уравнения (117), (118) используются для вычисления  $\gamma_1$ ,  $c$ . Как видно из табл. 10, 11, предсказания для  $\gamma_1$ , основанные на уравнениях (117), (118) и гамильтониане модели MIT, находятся в удовлетворительном согласии со значениями, найденными из фита данных фазового анализа. Предсказа-

ния для параметра  $c$  также находятся в удовлетворительном согласии с оценкой по формуле (2).

Аналогичный анализ был проведен также для  $\delta_0^2$ - и  $\delta_1^1$ -фаз  $\pi\pi$ -рассеяния. В каждом из этих случаев можно ограничиться явным учётом только двух КДД(ПА)-полюсов. Соответствующие фиты данных фазовых анализов [146, 150] с параметрами, указанными в табл. 12, 13,

Таблица 12. Параметры КДД (ПА)-полюсов для  $\pi\pi$ -рассеяния в канале с  $J=0, I=2$  (см. рис. 5). Предсказания для масс  $Q^2\bar{Q}^2$ -состояний (примитивов) взяты из работы [43]

$i$	$V_{s_i}^-$ , ГэВ	$\gamma_i$ , ГэВ <sup>2</sup>	Предсказания для масс $Q^2\bar{Q}^2$ ( $J^P=0^+, I=2$ )-примитивов	
			Масса, ГэВ	Обозначение примитива
1	1,14	2,03	1,122	$E_{\pi\pi}$ (36)
2	2,08	10,16	1,8	$E_{\pi\pi}$ (36*)

Таблица 13. Параметры КДД (ПА)-полюсов для  $\pi\pi$ -рассеяния в канале с  $J=I=1$  (см. рис. 6)

$V_{s_i}^-$ , ГэВ		$\gamma_i$ , ГэВ <sup>4</sup>	
$i=1$	$i=2$	$i=1$	$i=2$
0,805	1,72	0,0038	0,187

представлены на рис. 5, 6. В табл. 12 приведены также предсказания для масс двух низших примитивов  $Q^2\bar{Q}^2$ -системы с квантовыми числами  $J^P=0^+, I=2$  в модели мешков MIT [43]. Таким образом, и в канале с  $I=2$  положения низших КДД(ПА)-полюсов хорошо согласуются с предсказаниями модели кварковых мешков.

Интересно сопоставить поведение фаз  $\pi\pi$ -рассеяния в  $S$ -волновых каналах с изоспинами 0 и 2. Качественно разное поведение указанных фаз обусловлено разным характером расположения мешковых уровней: в канале с  $I=2$  низшие уровни сдвинуты по отношению к уровням в канале с  $I=0$  примерно на 0,5 ГэВ в сторону более высоких энергий.

Сформулированные в разд. 2 уравнения были обобщены на случай рассеяния частиц с неравными массами  $m_1, m_2$  и применены для исследования процессов  $\pi K^-$ ,  $\pi N^-$  и  $KN^-$ -рассеяния в области промежуточных энергий [99]. Перенормированная амплитуда, как и в случае рассеяния частиц с равными массами, определяется формулами

(27), (28), в которых  $s_R = (m_1 + m_2)^2$ . Специфика рассеяния частиц с неравными массами заключается в том, что парциальные амплитуды имеют в  $s$ -плоскости динамические разрезы в комплексной области. Это в некоторой степени усложняет решение системы уравнений

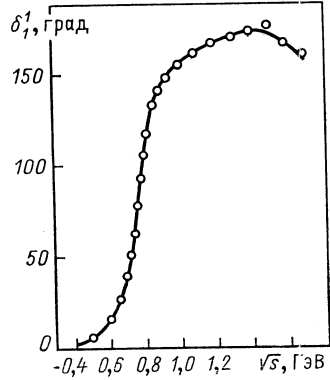
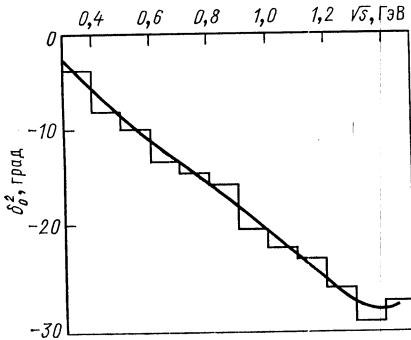


Рис. 5. Энергетическая зависимость  $\delta_0^2$ -фазы  $\pi\pi$ -рассеяния при  $b = 5,3 \text{ ГэВ}^{-1}$  с параметрами  $\sqrt{s_i}, \gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ), указанными в табл. 12. Данные фазового анализа, представленные на рисунке в виде гистограммы, взяты из работы [450]

Рис. 6. Энергетическая зависимость  $\delta_1^1$ -фазы  $\pi\pi$ -рассеяния при  $b = 5 \text{ ГэВ}^{-1}$  с параметрами  $\sqrt{s_i}, \gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ), указанными в табл. 13. Данные фазового анализа (○) взяты из работы [446]

вида (21), (22). Следует, впрочем, отметить, что влияние этих разрезов на результаты расчёта рассматриваемых ниже  $S$ -волновых фаз  $\pi K$ -,  $\pi N$ - и  $KN$ -рассеяния мало. Результаты вычислений  $S_{2I}$ -фаз  $\pi K$ -рассеяния в состояниях с изоспином  $I$ , равным  $1/2, 3/2$ , вместе

Таблица 14. Результаты расчёта  $S_1$ -фазы  $\pi K$ -рассеяния в состоянии с изоспином  $I = 1/2$ . Наборы параметров, отвечающие вариантам расчёта (А) и (В), приведены в табл. 16. Эксп. — данные фазового анализа [451]

$\sqrt{s}$ , ГэВ	0,730	0,875	0,935	1,1	1,3
$S_1$ { (А)	19,6	37,2	42,7	59,2	76,9
(В)	22,3	37,1	42,8	59,0	77,4
Эксп.	21,0	38,1	40,9	60,2	79,3

с данными фазового анализа из работы [451] представлены в табл. 14, 15. В каждом канале учитывались два КДД(ПА)-полюса. Соответствующие наборы параметров для вариантов расчёта (А) и (В) приведены в табл. 16. В вычислениях были учтены динамические раз-



Таблица 15. Результаты расчёта  $S_3$ -фазы  $\pi K$ -рассеяния в состоянии с изоспином  $I=3/2$ . Наборы параметров, отвечающие вариантам расчёта (А) и (В), приведены в табл. 16. Эксп. — данные фазового анализа [151]

$\sqrt{s}$ , ГэВ	0,723	0,98	1,18	1,34	1,72
$S_3$ { (А)	-13,6	-17,7	-22,5	-25,3	-23,6
(В)	-12,7	-17,9	-22,4	-25,1	-22,4
Эксп.	-10,0	-18,0	-22,4	-26,4	-22,8

резы парциальных амплитуд, связанные с диаграммой обмена  $K^*$  (892)-мезоном в  $u$ -канале. Однако этот механизм оказывает малое влияние на результаты расчёта  $S$ -волновых фаз  $\pi K$ -рассеяния.

Массы двух низших  $Q^2\bar{Q}^2$ -примитивов в экзотическом канале со странностью, равной единице и изоспином  $I = 1/2$  в модели мешков MIT равны: 0,88 ГэВ [ $C_K$  (9)]; 1,32 ГэВ [ $C_K$  (36)] и с изоспином  $I = 3/2$  — 1,32 ГэВ [ $E_{\pi K}$  (36)], 1,95 ГэВ [ $E_{\pi K}$  (36)] [43].

Приведенные в табл. 16 данные можно сравнить с результатами  $P$ -матричного анализа. Извлекаемые из обработки экспериментальных данных в рамках  $P$ -матричного формализма значения параметра  $\sqrt{s_1}$ , определяющего положения низших полюсов  $P$ -матрицы, составляют 0,94 ГэВ для рассеяния в канале с  $I = 1/2$  и 1,19 ГэВ — в канале с  $I = 3/2$  [43]. Таким образом, положения низших полюсов  $P$ -матрицы довольно хорошо согласуются с результатами, приведенными в табл. 16 [особенно для вариантов (А)]. Однако для вычетов в этих полюсах различие между данными  $P$ -матричного анализа и результатами табл. 16 более значительно. Если для связи вычетов  $P$ -матрицы и функции  $\tilde{P}_l(b, s)$  (28) воспользоваться соотношениями (94), (95), то на основе данных о вычетах из  $P$ -матричного анализа [43] получаем следующие значения параметра  $\gamma_1$  в рассматриваемых каналах  $\pi N$ -рассеяния:  $\gamma_1 = 0,165$  ГэВ<sup>2</sup> ( $I = 1/2$ ) и  $\gamma_1 = 0,37$  ГэВ<sup>2</sup> ( $I = 3/2$ ).

Получим предсказания для  $\sqrt{s_1}$ ,  $\gamma_1$  в  $S$ -волновых каналах  $\pi K$ -рассеяния на основе уравнений вида (117), (118) и кварковых гамильтонианов моделей мешков. Однако выражение  $H_Q(R)$  (116) в уравнении (117) при этом следует модифицировать с учётом конечности массы  $s$ -кварка  $m_s$ . В случае  $m_s \neq 0$  величина  $A$  в (116) является функцией  $R$ . Для неё можно воспользоваться приближённым выражением [43]

$$A \cong A_0 + \lambda n_s R, \quad (120)$$

где  $A_0$  вычисляется при  $m_s = 0$ ,  $n_s$  — число  $s$ -кварков в системе,  $\lambda$  — коэффициент, равный  $\sim 0,19$  ГэВ. В уравнении (118)  $A$  следует заменить  $A_0$ . Результаты вычислений  $\sqrt{s_1}$ ,  $\gamma_1$  для различных зна-

чений параметров  $b$  и  $c$  указаны в табл. 17. Из сравнения данных табл. 16, 17 видно, что теоретические предсказания, основанные на уравнениях (117), (118) и гамильтонианах моделей мешков для  $S$ -волновых каналов  $\pi K$ -рассеяния, в целом находятся в удовлетворительном согласии с величинами, найденными из фита экспериментальных фаз рассеяния.

Таблица 16. Наборы параметров [ $b$  (ГэВ<sup>-1</sup>),  $\sqrt{s_i}$  (ГэВ),  $\gamma_i$  (ГэВ<sup>2</sup>),  $i = 1, 2$ ], соответствующие вариантам расчёта (А) и (В)  $S_{2I}$ -фаз ( $I = 1/2, 3/2$ )  $\pi K$ -рассеяния, приведенным в табл. 14, 15

$\pi K$	$b$	$\sqrt{s_1}$	$\sqrt{s_2}$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
$S_1$ { (А) (В)	6,0	0,945	1,583	0,209	1,879
	5,0	1,012	1,782	0,304	3,283
$S_3$ { (А) (В)	6,0	1,242	2,323	0,803	9,07
	5,0	1,421	2,278	1,371	6,3

Таблица 17. Предсказания для  $\sqrt{s_1}$  (ГэВ),  $\gamma_1$  (ГэВ<sup>2</sup>) в  $S$ -волновых каналах  $\pi K$ -рассеяния, основанные на уравнениях вида (117), (118)

Модель	$b$	$c$	$I = 1/2$		$I = 3/2$	
			$\sqrt{s_1}$	$\gamma_1$	$\sqrt{s_1}$	$\gamma_1$
MIT	5,0	1,4	0,927	0,312	1,533	0,797
SVM (1)	5,0	1,4	1,267	0,363	1,732	0,736
SVM (2)	6,0	1,4	1,362	0,324	1,685	0,540
MIT	5,0	1,5	0,958	0,388	1,606	0,907
MIT	6,0	1,5	0,892	0,144	1,433	0,504
IT	5,0	1,6	0,992	0,455	1,684	1,009
IT	6,0	1,6	0,910	0,212	1,487	0,597

При исследовании процессов  $\pi N$ - и  $KN$ -рассеяния учитывались ближайшие к физической области динамические сингулярности парциальных амплитуд, обусловленные механизмом обменного взаимодействия в  $u$ -канале. Расчёты, однако, показывают, что этот механизм мало влияет на  $S$ -волновые фазы рассеяния. На рис. 7 представлены результаты вычислений  $S_{11}$  ( $I = 1/2, J = 1/2$ )- и  $S_{31}$  ( $I = 3/2, J = 1/2$ )-фаз  $\pi N$ -рассеяния с учётом двух КДД(ПА)-полюсов для наборов параметров, указанных в табл. 18. Эти параметры определены из фита данных фазового анализа [129]. Сплошные кривые

Таблица 18. Наборы параметров [ $b$  (ГэВ $^{-1}$ ),  $\sqrt{s_i}$  (ГэВ),  $\gamma_i$  (ГэВ $^2$ )], соответствующие вариантам расчёта  $S_{11}$ - и  $S_{31}$ -фаз  $\pi N$ -рассеяния, приведенным на рис. 7

$\pi N$	$b$	$\sqrt{s_1}$	$\sqrt{s_2}$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
$S_{11}$	6,0	1,507	1,829	0,427	1,291
$S_{31}$ {	(A)	6,35	1,637	0,920	0,331
	(B)	6,40	1,604	2,858	12,50

на рис. 7 получены с помощью подгоночной процедуры в области  $\sqrt{s} \leq 1,8$  ГэВ, а штриховая кривая на рис. 4, б — в области  $\sqrt{s} \leq 1,6$  ГэВ.

Следует отметить, что в рассматриваемой области энергий существенное влияние на поведение  $S$ -волновых амплитуд  $\pi N$ -рас-

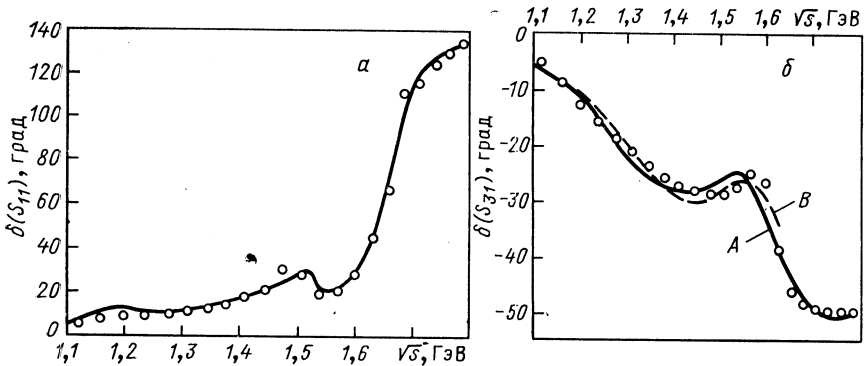


Рис. 7. Результаты расчета энергетической зависимости  $S_{11}$  (а)- и  $S_{31}$  (б)-фаз  $\pi N$ -рассеяния с параметрами, указанными в табл. 18. Данные фазового анализа (○) взяты из работы [129]

сеяния оказывает связь с неупругими каналами ( $\eta N$ ,  $\pi\pi N$ ), учитываемая с помощью абсорбтивной части  $K$ -матрицы (см. разд. 4), которая выбрана с учётом данных фазового анализа [129]. В частности, нерегулярность в поведении  $S_{11}$ -фазы при  $\sqrt{s} \cong 1,5$  ГэВ (тесно связанная с резонансом в данной парциальной волне при этой энергии [152]) обусловлена взаимодействием с  $\eta N$ -каналом. Пик в энергетической зависимости  $S_{31}$ -фазы в области  $\sqrt{s} \cong 1,57$  ГэВ также обусловлен связью с неупругими каналами.

Массы двух низших состояний  $Q^4\bar{Q}$ -мешка с  $I = 1/2$  в модели MIT равны: 1,502 ГэВ [ $C_N$  (18)], 1,75 ГэВ [ $C_N$  (45)] и с  $I = 3/2$  — 1,713 ГэВ [ $C_\Delta$  (45)], 1,95 ГэВ [ $C_\Delta$  (45\*)] [43]. Приведём также предсказания для параметров низших КДД(ПА)-полюсов в рассмотренных каналах  $\ell N$ -рассеяния, основанные на уравнениях (117), (118) и кварковом гамильтониане модели мешков MIT:  $\sqrt{s_1} = 1,577$  ГэВ,  $\gamma_1 = 0,489$  ГэВ<sup>2</sup> (в  $S_{11}$ -канале при  $b = 6,0$  ГэВ<sup>-1</sup>) и  $\sqrt{s_1} = 1,781$  ГэВ,  $\gamma_1 = 0,475$  ГэВ<sup>2</sup> (в  $S_{31}$ -канале при  $b = 6,4$  ГэВ<sup>-1</sup>); параметр  $c$  в этих вычислениях в соответствии с формулой (2) полагался равным 1,25. Таким образом, предсказания, основанные на уравнениях (117), (118), удовлетворительно согласуются с данными табл. 18.

Таблица 19. Результаты расчёта  $S_{11}$ -фазы ( $J = 1/2, I = 1$ )  $KN$ -рассеяния с наборами параметров, приведенными в табл. 20. Эксп. — данные фазового анализа [130]

$\sqrt{s}$ , ГэВ	1,527	1,673	1,933	2,119	2,247
$S_{11} \left\{ \begin{array}{l} (A) \\ (B) \\ \text{Эксп.} \end{array} \right.$	-23,75 -22,63 -23,23	-39,48 -40,62 -38,15	-56,00 -53,33 -55,74	-58,46 -63,69 -58,21	-41,98 -35,19 -41,44

Таблица 20. Наборы параметров [ $b$  (ГэВ<sup>-1</sup>),  $\sqrt{s_i}$  (ГэВ) и  $\gamma_i$  (ГэВ<sup>2</sup>),  $i = 1, 2$ ] для вариантов расчёта  $S_{11}$  ( $I = 1, J = 1/2$ )-фазы  $KN$ -рассеяния, представленных в табл. 19

$KN$	$b$	$\sqrt{s_1}$	$\sqrt{s_2}$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
$S_{11} \left\{ \begin{array}{l} (A) \\ (B) \end{array} \right.$	7,0 7,0	1,852 1,834	2,286 2,528	0,572 0,527	12,713 3,701

В табл. 19 представлены результаты расчёта  $S_{11}$  ( $I = 1, J = 1/2$ )-фазы  $KN$ -рассеяния с учётом двух КДД(ПА)-полюсов. Значения параметров  $b$ ,  $\sqrt{s_i}$ ,  $\gamma_i$ , найденные из фита данных фазового анализа [130], указаны в табл. 20. Масса низшего  $Q^4\bar{Q}$ -примитива со странностью и изоспином, равными единице, в модели мешков MIT равна 1,905 ГэВ [ $E_{(NK)}$  (45)] [43]. Предсказания для параметров низшего КДД(ПА)-полюса, основанные на модифицированных уравнениях вида (117), (118) (с учетом конечности массы  $s$ -кварка) и гамильтониане модели мешков MIT, приводят к следующим значениям:  $\sqrt{s_1} = 1,965$  ГэВ,  $\gamma_1 = 0,408$  ГэВ<sup>2</sup> (при  $b = 7,0$  ГэВ<sup>-1</sup> и  $c = 1,35$ ).

Величины, приведенные в табл. 18, 20, можно также сравнить с результатами  $P$ -матричных анализов  $\pi N$ - и  $KN$ -рассеяния [43, 56] и данными работ [78, 79], в которых  $S$ -волновые амплитуды этих процессов анализировались в рамках модели СКМ [66, 67]. Положения КДД(ПА)-полюсов находятся в хорошем согласии с данными указанных работ о положениях  $P$ -матричных полюсов (при близких значениях параметра  $b$ ). Данные о вычетах, однако, заметно различаются. Так, например, вычисление  $\gamma_1$  в  $S_{11}$ -канале  $\pi N$ -рассеяния с помощью формул (94), (95) и информации о вычете в полюсе  $P$ -матрицы [43] приводит к значению  $0,19 \text{ ГэВ}^2$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулированные в разд. 2—4 на основе релятивистского формализма уравнения для парциальных амплитуд на массовой поверхности учитывают механизмы адронных обменов в  $t$ - и  $u$ -каналах в периферической области взаимодействия и механизм образования в промежуточном состоянии компаунд-системы типа составного кварк-глюонного мешка в  $s$ -канале на расстояниях порядка радиуса конфайнмента. Совместимое с унитарностью, аналитичностью, релятивистской инвариантностью и требованием конфайнмента представление для  $S$ -матрицы строится таким образом, чтобы параметры, определяющие общее решение дисперсионных соотношений для парциальных амплитуд, допускали интерпретацию в терминах характеристик кварковой компаунд-системы мешкового типа. При фиксированных значениях параметра  $b$ , характеризующего размеры области малых расстояний, на которых существенны эффекты кварковой структуры адронов, это решение определяется заданием скачков парциальных амплитуд на динамических разрезах, соответствующих вкладу адронных обменных взаимодействий, и полюсами  $R$ -функции  $\tilde{P}_I(b, s)$  (28) [или матрицы  $\hat{P}_J(\mathbf{b}, s)$  в многоканальном случае] — релятивистского аналога  $P$ -матрицы Джаффе — Лоу [54].

Полюсы  $\tilde{P}_I(b, s)$  ( $\hat{P}_J(\mathbf{b}, s)$ ) [названные нами КДД(ПА)-полюсами] расположены в  $s$ -плоскости на действительной полуоси, начало которой определяется массой наиболее глубоко связанного состояния (или порогом канала рассеяния при отсутствии связанных состояний), а вычеты [диагональные элементы матрицы вычетов  $\hat{P}_J(\mathbf{b}, s)$ ] в этих полюсах являются положительными константами (условие причинности). То обстоятельство, что общее решение дисперсионных соотношений определяется, вообще говоря, бесконечным числом параметров [КДД(ПА)-полюсов], является, по существу, отражением того факта, что исходные фундаментальные принципы не запрещают системе иметь бесконечное число «внутренних» степеней свободы. Однако на ограниченном энергетическом интервале (в области низких и промежуточных энергий  $\sim 1 \text{ ГэВ}$ ) можно с хорошей точностью огра-

ничиться явным учётом лишь небольшого числа КДД(ПА)-полюсов. Эти полюсы несут информацию о взаимодействии на малых расстояниях ( $r \lesssim b$ ) и могут быть сопоставлены собственным состояниям кварковой компаунд-системы, что позволяет связать поведение фаз рассеяния с расчётами спектра масс многокварковых систем и использовать для этих целей гамильтонианы моделей мешков, параметры которых фиксированы из условия наилучшего описания адронных состояний.

Развитый подход применен для анализа процессов  $NN$ -,  $\pi\pi$ -,  $\pi K$ ,  $\pi N$ - и  $KN$ -рассеяния при низких и промежуточных энергиях. Из рассмотренных примеров следует, во-первых, что предсказываемое кварковыми гамильтонианами расположение мешковых уровней успешно объясняет характерные качественные закономерности в энергетической зависимости фаз рассеяния при промежуточных энергиях (наиболее ярко, на наш взгляд, это видно из сопоставления поведения  $\delta_0^0$ - и  $\delta_0^2$ -фаз  $\pi\pi$ -рассеяния). Во-вторых, предсказания не только положений КДД(ПА)-полюсов, но и вычетов в этих полюсах, основанные на уравнениях (117), (118), которые учитывают связь мешковых состояний с каналом рассеяния, для низших состояний находятся в удовлетворительном согласии с величинами, найденными из фита данных фазовых анализов.

При расчёте мезонных обменных взаимодействий в  $t$ - и  $u$ -каналах предложенный подход позволяет эффективно использовать методы релятивистской квантовой теории поля, учитывая модельно-независимую информацию о перенормированных константах связи мезонов и барионов, а также процессах, определяющих скачки парциальных амплитуд рассеяния на динамических разрезах. Механизм образования компаунд-системы типа кварк-глюонного мешка в промежуточном состоянии приводит к сильному подавлению вклада далёких от физической области динамических сингулярностей амплитуд рассеяния, что снимает основную трудность традиционных подходов, связанную с необходимостью расчёта мезонных обменных взаимодействий на малых расстояниях. Благодаря этому в развитом подходе обмены тяжёлыми мезонами ( $\rho$ ,  $\omega$ ) в  $NN$ -взаимодействиях играют существенно меньшую роль, чем в мезонных теориях ядерных сил. В частности, короткодействующее отталкивание в  $NN$ -рассеянии обусловлено главным образом взаимодействием  $NN$ -каналов с мешковыми состояниями, а не обменом  $\omega$ -мезоном, как в мезонных теориях.

Автор выражает благодарность В. В. Анисовичу, В. Б. Беляеву, Л. Д. Блохинцеву, И. М. Народецкому, В. Г. Неудачину, Ю. В. Орлову, Ю. Е. Покровскому, Ю. А. Симонову, В. Е. Троицкому и Р. А. Эрамянну за обсуждение вопросов, затронутых в обзоре.

## П Р И Л О Ж Е Н И Е А

Функции  $d_l^{(\pm)}(x)$  (12) могут быть записаны в виде

$$d_l^{(\pm)}(x) = \left[ 1 + \sum_{n=1}^l (\mp ix)^n a_n^{(l)} \right] \exp(\pm ix), \quad (\text{A.1})$$

где

$$a_n^{(l)} = \frac{(2l-n)!}{2^{l-n} n! (l-n)! (2l-1)!} \quad (\text{A.2})$$

— положительные коэффициенты. В комплексной  $x$ -плоскости функция  $d_l^{(\pm)}(x)$  обладает следующими свойствами: она является целой функцией  $x$ , имеет  $l$  нулей в нижней полуплоскости (т. е. все её нули расположены на втором листе в  $z$ -плоскости,  $z=x^2$ ), экспоненциально убывает (возрастает) в верхней (нижней) полуплоскости при  $|x| \rightarrow \infty$  вдоль любого направления, не параллельного действительной оси, и осциллирует при  $|x| \rightarrow \infty$  вдоль направлений, параллельных действительной оси. Отсутствие нулей на действительной оси в  $z$ -плоскости (на первом листе) у функции  $d_l^{(+)}(x)$  непосредственно следует из представления (A.1), если учесть положительность коэффициентов  $a_n^{(l)}$  (A.2). Используя свойства функций Риккати — Ганкеля, можно показать, что  $d_l^{(+)}(x)$  не имеет нулей на первом листе и в комплексной области.

Учитывая, что  $d_l^{(+)}(x)$  в  $z$ -плоскости имеет разрез на действительной оси ( $0 \leq z < \infty$ ), не имеет полюсов и нулей на первом листе, а также принимая во внимание условие нормировки  $d_l^{(+)}(0) = 1$ , для неё можно записать представление Омнеса — Мухелишвили (см., например, [103])

$$d_l^{(+)}(x) = \exp \left\{ \frac{x^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\alpha_l(z') dz'}{z'(z'-x^2-i\eta)} \right\}, \quad (\text{A.3})$$

где фаза  $\alpha_l(z)$  имеет вид

$$\alpha_l(x^2) = x - \arctg \left\{ \frac{x \sum_{m=0}^{N_1} (-1)^m x^{2m} a_{2m+1}^{(l)}}{1 + \sum_{m=1}^{N_2} (-1)^m x^{2m} a_{2m}^{(l)}} \right\}; \quad (\text{A.4})$$

$$N_1 = \begin{cases} l/2 - 1, & \text{если } l \text{ чётно;} \\ (l+1)/2, & \text{если } l \text{ нечётно, } N_2 = N_1 + (-1)^l. \end{cases}$$

Произведение  $d_l^{(+)}(bk) d_l^{(-)}(bk)$ , входящее в определение функций  $\sigma_l(b, s)$ ,  $\xi_l(b, \nu)$  [см. (18), (87)], является полиномом степени  $l$  по переменной  $\nu$  ( $\nu = k^2$ ), который всегда положителен на действительной оси при  $\nu \geq 0$ .

## П Р И Л О Ж Е Н И Е Б

Исследование в рамках нерелятивистской потенциальной модели (см. разд. 5) можно обобщить на релятивистский случай с помощью квазипотенциального формализма [134—136]. Воспользуемся версией этого формализма, в которой

уравнение для парциальной амплитуды, описывающей рассеяние бесспиновых частиц с равными массами  $m$ , имеет вид

$$A_l(k', k; \nu + i\eta) = W_l(k', k) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} W_l(k', q) (q^2 - \nu - i\eta)^{-1} A_l(q, k; \nu + i\eta) \varepsilon(q) q^2 dq, \quad (\text{Б.1})$$

где  $\nu = s/4 - m^2$ ;  $\varepsilon(q) = (m^2 + q^2)^{-1/2}$ . Волновые функции in- и out-состояний в импульсном представлении определяются равенством

$$\langle q | \Psi_{lk}^{(\pm)} \rangle = \frac{\pi}{2} \frac{1}{k^2} \varepsilon^{-1}(k) \delta(q - k) + \frac{A_l(q, k; k^2 \pm i\eta)}{q^2 - k^2 \mp i\eta}. \quad (\text{Б.2})$$

Ядро интегрального преобразования в координатное представление

$$\langle r | \Psi_{lk}^{(\pm)} \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \langle r | q, l \rangle \langle q | \Psi_{lk}^{(\pm)} \rangle \varepsilon(q) q^2 dq \quad (\text{Б.3})$$

выберем в виде [136]

$$\langle r | q, l \rangle = q^{-1} j_l(rq) \varepsilon^{-1/2}(q), \quad (\text{Б.4})$$

где  $j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{l+1/2}(x)$  — функции Риккати — Бесселя.

Из (Б.1) — (Б.4) следует, что функции  $\langle r | \Psi_{lk}^{(\pm)} \rangle$  являются решениями уравнения

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 \right) \langle r | \Psi_{lk}^{(\pm)} \rangle = - \int_0^{\infty} V_l(r, r') \langle r' | \Psi_{lk}^{(\pm)} \rangle dr' \quad (\text{Б.5})$$

с граничными условиями на бесконечности

$$\langle r | \Psi_{lk}^{(\pm)} \rangle \underset{r \rightarrow \infty}{\cong} \frac{1}{k \varepsilon^{1/2}(k)} \left\{ \sin \left( kr - \frac{\pi l}{2} \right) + \rho_l(k^2) A_l(k^2 \pm i\eta) \exp \left[ \pm i \left( kr - \frac{\pi l}{2} \right) \right] \right\}, \quad (\text{Б.6})$$

где

$$\rho_l(k^2) = k^{2l+1} \varepsilon(k); \quad A_l(k^2) = k^{-2l} A_l(k, k; k^2), \quad (\text{Б.7})$$

причём  $V_l(r, r')$  в (Б.5) и  $W_l(k, k')$  в (Б.1) связаны преобразованием вида (Б.3). Решение уравнения (Б.1) можно записать в виде

$$A_l(k', k; \nu + i\eta) = N_l(k', k; \nu) D_l^{-1}(\nu + i\eta), \quad (\text{Б.8})$$

где  $N(k', k; \nu)$  и  $D_l(\nu)$  определяются рядами Фредгольма вида (90), (91), в которых  $\xi_l(b, q^2)$  следует заменить  $\rho_l(q^2)$  (Б.7) и положить

$$Q_n \begin{pmatrix} q_1 & \dots & q_n \\ q_1 & \dots & q_n \end{pmatrix} = \det \| W_l(q_i, q_j) \|. \quad (\text{Б.9})$$

Функции (Б.6) можно представить в виде

$$\langle r | \Psi_{lk}^{(\pm)} \rangle = \frac{1}{D_l(k^2 \pm i\eta)} \frac{k^l \langle r | \Phi_{lk} \rangle}{\varepsilon^{1/2}(k) (2l+1)!}, \quad (\text{Б.10})$$



где

$$\langle r | \Phi_{lk} \rangle = \frac{(2l+1)!!}{2i k^{2l+1}} [D_l(k^2 - i\eta) \langle r | h_{lk}^{(+)} \rangle - D_l(k^2 + i\eta) \langle r | h_{lk}^{(-)} \rangle], \quad (\text{Б.11})$$

$\langle r | h_{lk}^{\pm} \rangle$  — решения уравнения (Б.5) с граничными условиями вида (69).

Квазипотенциал  $W_l(k', k)$  в (Б.4) построим таким образом, чтобы он приводил к требуемой аналитической структуре амплитуды рассеяния  $A_l(k^2)$  (Б.7) на энергетической поверхности (см. разд. 2).

Запишем  $W_l(k', k)$  в виде

$$W_l(k', k) = \frac{m}{k'k} \int_0^{\infty} j_l(k'r) j_l(kr) v(r) dr, \quad (\text{Б.12})$$

где вспомогательный локальный потенциал  $v(r)$  выберем в виде суперпозиции потенциалов Юкавы. Квазипотенциал  $V_l(r, r')$  в (Б.5) связан с  $v(r)$  равенством

$$V_l(r, r') = \int_0^{\infty} \tilde{\delta}_l(r, r'') \tilde{\delta}_l(r', r'') v(r) dr, \quad (\text{Б.13})$$

где

$$\tilde{\delta}_l(r, r') = \frac{2\sqrt{m}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{j_l(rq) j_l(r'q)}{(q^2 + m^2)^{1/4}} dq. \quad (\text{Б.14})$$

Функция  $\tilde{\delta}_l(r, r')$  определяет эффекты релятивистской «размазки» взаимодействия в конфигурационном пространстве. В нерелятивистском пределе  $\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{\delta}_l(r, r') = \delta(r - r')$ . Анализ рядов Фредгольма для  $N_l(k', k; v)$ ,  $D_l(v)$  (Б.8) приводит к выводу, что  $A_l(v)$  (Б.7) обладает на физическом листе требуемой аналитической структурой.

Можно показать, что для «аналитического» квазипотенциала (Б.13) логарифмическая производная  $P_l(b, v)$  волновой функции  $\langle r | \Phi_{lk} \rangle$  (Б.11) при  $r = b$  является мероморфной функцией в  $v = k^2$ -плоскости с разрезом на действительной оси  $-\infty < v \leq -m^2$ . Этот разрез является следствием указанного релятивистского эффекта «размазки» взаимодействия (Б.13).

Определим функции  $\tilde{A}_l(b, v)$  и  $\bar{A}_l(b, v)$  соотношениями вида (5)–(9), в которых

$$D_l^{\pm}(b, s) \rightarrow D_l^{\pm}(b, v) = \frac{(bk)^l \langle b | h_{lk}^{\pm} \rangle}{(2l-1)!!}. \quad (\text{Б.15})$$

Можно при этом показать, что

$$\tilde{A}_l^{-1}(b, v + i\eta) = \alpha_l(b, v) [P_l(b, v) - f_l^{(+)}(b, v)], \quad (\text{Б.16})$$

где

$$\alpha_l(b, v) = \frac{2i\tilde{p}_l(b, v)}{f_l^{(+)}(b, v) - f_l^{(-)}(b, v)}; \quad (\text{Б.17})$$

$$\tilde{\rho}_l(b, \nu) = \rho_l(\nu) [D_l^{(+)}(b, \nu) D_l^{(-)}(b, \nu)]^{-1}; \quad (\text{Б.18})$$

$f_l^{(\pm)}(b, \nu)$  — логарифмические производные функций  $\langle r | h_{lk}^{(\pm)} \rangle$  при  $r = b$ . Скачок  $\tilde{A}_l^{-1}(b, \nu)$  на правом разрезе  $C_R$  ( $0 \leq \nu < \infty$ ) определяется выражением

$$\text{disc } \tilde{A}_l^{-1}(b, \nu) = -\tilde{\rho}_l(b, \nu) \theta(\nu). \quad (\text{Б.19})$$

Следовательно, функция  $\tilde{P}_l(b, \nu)$ , определяемая равенством

$$\tilde{P}_l(b, \nu) = \tilde{A}_l^{-1}(b, \nu + i\eta) + J_l(b, \nu + i\eta), \quad (\text{Б.20})$$

где

$$J_l(b, \nu + i\eta) = \frac{\nu - \nu_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{\rho}_l(b, \nu') d\nu'}{(\nu' - \nu - i\eta)(\nu' - \nu_0)}, \quad (\text{Б.21})$$

не имеет правого разреза. Из (Б.16), (Б.20) следует, что в физической области  $\tilde{P}_l(b, \nu)$  и  $P_l(b, \nu)$  связаны соотношением

$$\tilde{P}_l(b, \nu) = \alpha_l(b, \nu) [P_l(b, \nu) - \text{Re } f_l^{(+)}(b, \nu)] - \text{Re } J_l(b, \nu). \quad (\text{Б.22})$$

Для «аналитического» квазипотенциала (Б.13)  $\tilde{P}_l(b, \nu)$ , как и  $P_l(b, \nu)$ , является мероморфной функцией в  $\nu$ -плоскости с разрезом  $-\infty < \nu \leq -m^2$ .

Величину  $\alpha_l(b, \nu)$  в (Б.22) можно представить в виде

$$\alpha_l(b, \nu) = \frac{[(2l-1)!!]^2 \varepsilon(k)}{b^{2l} [1 + Q_l(b, \nu)]}, \quad (\text{Б.23})$$

где

$$Q_l(b, \nu) = \frac{1}{2ik} \int_0^{\infty} dr \int_0^{\infty} dr' V_l(r, r') \langle r | h_{lk}^{(-)} \rangle \langle r' | h_{lk}^{(+)} \rangle \times \\ \times [\theta(b-r) \theta(r'-b) - \theta(b-r') \theta(r-b)]. \quad (\text{Б.24})$$

Таким образом, функция  $Q_l(b, \nu)$  отлична от нуля за счёт указанных выше эффектов релятивистской «размазки» взаимодействия в окрестности точки  $r = b$ . Если пренебречь этими эффектами, то  $\alpha_l(b, \nu)$  является чисто кинематической функцией и определяется выражением (95). Отметим, наконец, что разрез у  $\tilde{P}_l(b, \nu)$  в области  $-\infty < \nu \leq -m^2$  можно устранить путём некоторого переопределения функций  $D_l^{(\pm)}(b, \nu)$  (Б.15).

## П Р И Л О Ж Е Н И Е В

Скачки парциальных амплитуд  $A_J^{(\alpha)}(s)$  ( $\alpha = 0, 1, 11, 22, 12$ )  $NN$ -рассеяния на динамических разрезах связаны со спектральными функциями  $\rho_n^{(\pm)}(s, t)$  в (109) соотношениями

$$\text{Im } A_J^{(\alpha)}(s) = \frac{\theta(s_{2\pi} - s)}{s - s_R} \sum_{\alpha'} \beta_J(\alpha, \alpha') F_J^{(\alpha')} (s), \quad (\text{В.1})$$

где  $s_R = 4m_N^2$ ;  $s_{2\pi} = 4(m_N^2 - m_\pi^2)$ ; матрица  $\beta_J(\alpha, \alpha')$  имеет следующие отличные от нуля матричные элементы:

$$\begin{aligned} \beta_J(0, 0) &= \beta_J(1, 1) = 1, \\ \beta_J(11, 22) &= \beta_J(22, 11) = -\frac{J+1}{2J+1}, \\ \beta_J(11, 12) &= \beta_J(12, 11) = -\beta_J(22, 12) = -\beta_J(12, 22) = \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1}, \\ \beta_J(12, 12) &= \frac{4}{2J+1}, \end{aligned} \tag{B.2}$$

а функции  $F_J^{(\alpha)}(s)$  имеют вид

$$F_J^{(\alpha)}(s) = \sum_{n=1}^4 \frac{1}{16\pi} \int_{t_1}^{t_2(s)} D_n^{(J)}(s, t) R_{Jn}^{(\alpha)}(s, t) dt, \tag{B.3}$$

где

$$\begin{aligned} t_1 &= 4m_N^2; \quad t_2(s) = s_R - s; \\ D_n^{(J)}(s, t) &= 3\Delta_n^{(+)}(s, t) + 2\lambda^{(I)}\Delta_n^{(-)}(s, t); \\ \Delta_n^{(\pm)}(s, t) &= \rho_n^{(\pm)}(s, t) \mp (-1)^n \rho_n^{(\pm)}(s, t); \end{aligned} \tag{B.4}$$

$\lambda^{(I)}$  — изоспиновый фактор ( $\lambda^{(0)} = 1$ ,  $\lambda^{(1)} = -3$ );  $R_{Jn}^{(\alpha)}(s, t)$  — кинематические функции, определяемые равенствами

$$\left. \begin{aligned} R_{Jn}^{(0)}(s, t) &= f_n^{(1)}(s, t) h_J^{(+)}(s, t); \\ R_{Jn}^{(1)}(s, t) &= f_n^{(3)}(s, t) h_J^{(-)}(s, t) + f_n^{(4)}(s, t) h_J^{(+)}(s, t); \\ R_{Jn}^{(11)}(s, t) &= f_n^{(2)}(s, t) h_J^{(+)}(s, t); \\ R_{Jn}^{(22)}(s, t) &= f_n^{(3)}(s, t) h_J^{(+)}(s, t) + f_n^{(4)}(s, t) h_J^{(-)}(s, t); \\ R_{Jn}^{(12)}(s, t) &= f_n^{(5)}(s, t) h_J^{(0)}(s, t), \end{aligned} \right\} \tag{B.5}$$

где  $h_J^{(+)}(s, t) = P_J[z(s, t)]$ ;

$$\left. \begin{aligned} h_J^{(-)}(s, t) &= \frac{1}{2J+1} \{JP_{J+1}[z(s, t)] + (J+1)P_{J-1}[z(s, t)]\}; \\ h_J^{(0)}(s, t) &= \frac{1}{4} \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} \{P_{J+1}[z(s, t)] - P_{J-1}[z(s, t)]\}; \end{aligned} \right\} \tag{B.6}$$

$P_J(z)$  — полиномы Лежандра,  $z(s, t) = 1 + t/(s - s_R)$ ;

$$\left. \begin{aligned} f_1^{(m)}(s, t) &= \delta_{1m}(s_R - t) + \delta_{2m} \left( s_R + \frac{s + s_R}{s - s_R} t \right) - \\ &- \frac{1}{2} \delta_{3m}(s - s_R) + \frac{1}{2} \delta_{4m}(s + s_R) - \delta_{5m} \sqrt{s - s_R}; \\ f_2^{(m)}(s, t) &= \sqrt{s - s_R} \left\{ \delta_{1m}(2s + t - s_R) + \delta_{2m} \left( 2s - s_R + \frac{3s - s_R}{s - s_R} t \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \delta_{3m}(s - s_R) + \frac{1}{4} \delta_{4m}(3s - s_R) \right\} - \delta_{5m} s \sqrt{s}; \end{aligned} \right\} \tag{B.7}$$

$$f_3^{(m)}(s, t) = \frac{1}{4} (2s - s_R)^2 \left\{ (\delta_{1m} + \delta_{2m}) \left( 1 + \frac{t}{s - s_R} \right) + \frac{1}{2} (\delta_{3m} + \delta_4) \right\} -$$

$$- \frac{1}{4} (\delta_{1m} - \delta_{2m}) \frac{ss_R}{s - s_R} t - \frac{1}{8} (\delta_{3m} - \delta_{4m}) ss_R - \frac{1}{4} \delta_{5m} \sqrt{ss_R};$$

$$f_4^{(m)}(s, t) = \delta_{1m} (2s - s_R) + 2\delta_{2m} \left( s - s_R + \frac{ts_R}{s - s_R} \right) +$$

$$+ \delta_{3m} (s - s_R) + \delta_{4m} s - \delta_{5m} \sqrt{ss_R};$$

$$\delta_{mn} = 1 \text{ (0) при } m = n \text{ (} m \neq n \text{)}.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Браун Д. Е., Джексон А. Д. Нуклон-нуклонные взаимодействия: Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1979.
2. Machleidt R., Holinde K., Elster Ch. // Phys. Rep. 1987. Vol. 149. P. 1.
3. Van Faassen E., Tjon J.A. // Phys. Rev. 1986. Vol. C33. P. 2105—2120.
4. Neudatchin V.G., Obukhovskiy I.T., Kukulin V.I., Golovanova N.F. // Phys. Rev. 1975. Vol. C11, P. 128—136.
5. Fritsch H., Gell-Mann M., Leutwyler H. // Phys. Lett. 1973. Vol. 47B. P. 365—368.
6. Weinberg S. // Phys. Rev. Lett. 1973. Vol. 31. P. 494—497.
7. Gross D.J., Wilczek F.A. // Phys. Rev. Lett. 1973. Vol. 30. P. 1343—1346.
8. Politzer H.D. // Phys. Rev. Lett. 1973. Vol. 30. P. 1346—1349.
9. Bander M. // Phys. Rep. 1981. Vol. 75. P. 205—286.
10. Андреев И. В. Хромодинамика и жёсткие процессы при высоких энергиях. М.: Наука, 1981.
11. Волков М. К. // ЭЧАЯ. 1986. Т. 17. С. 433—471.
12. Киселев А. В., Петров В. А. // ЭЧАЯ. 1988. Т. 19. С. 51—110.
13. Арбузов Б. А. // ЭЧАЯ. 1988. Т. 19. С. 5—50.
14. Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I. // Nucl. Phys. 1979. Vol. B147. P. 385—447; 448—518.
15. Radyushkin A.V. // Acta Phys. Pol. 1984. Vol. B15. P. 403—417.
16. 't Hooft G. // Nucl. Phys. 1974. Vol. B72. P. 461—473.
17. Witten E. // Nucl. Phys. 1979. Vol. B160. P. 57—115.
18. Jackson A.D., Jackson A. // Nucl. Phys. 1985. Vol. A446. P. 89—96.
19. Дьяконов Д. И., Эйдес М. И. // Письма в ЖЭТФ, 1983. Т. 38. С. 358—360.
20. Андрианов А. А., Андрианов В. А., Новожилов В. Ю., Новожилов Ю. В. // ТМФ. 1987. Т. 70. С. 63—75.
21. Wilson K. // Phys. Rev. 1974. Vol. D10. P. 2445—2459.
22. Макеенко Ю. М. // УФН. 1984. Т. 143. С. 161—212.
23. Ohta S., Fukugita M., Ukawa A. // Phys. Lett. 1986. Vol. 173B. P. 15—18.
24. De Rujula A., Georgi H., Glasow S.L. // Phys. Rev. 1975. Vol. D12. P. 147—162.
25. Isgur N., Karl G. // Phys. Rev. 1979, Vol. D20. P. 1191—1194.
26. Беляев В. Б., Пупышев В. В. // ЯФ. 1980. Т. 31. С. 1324—1331.
27. Faessler A., Fernandez F. // Phys. Lett. 1983. Vol. 124B. P. 145—148.
28. Неудачин В. Г., Обуховский И. Т., Смирнов Ю. Ф. // ЭЧАЯ. 1984, Т. 15. Вып. 6. С. 1165—1207.
29. Yamauchi Y., Yamamoto R., Wakamatzu M. // Nucl. Phys. 1985. Vol. A443. P. 628—684.
30. Калашникова Ю. С., Народецкий И. М., Симонов Ю. А. // ЯФ. 1987. Т. 46. С. 1181—1188.
31. Bogolubov P.N. // Ann. Inst. Henri Poincare. 1967. Vol. 8. P. 163—190.
32. Chodos A., Jaffe R.L., Johnson K. e.a. // Phys. Rev. 1974. Vol. D 9. P. 3471—3495.

33. Chodos A., Jaffe R.L., Johnson K., Thorn C.B.//Phys. Rev. 1974. Vol. D10. P. 2599—2604.
34. De Grand T., Jaffe R.L., Johnson K., Kiskis J.//Phys. Rev. 1975. Vol. D12. P. 2060—2076.
35. Кобзарев И. Ю., Мартемьянов Б. В., Щепкин М. Г.//ЯФ. 1979. Т. 29. С. 1620—1628.
36. Боголюбов П. Н., Дорохов А. Е.//ЭЧАЯ. 1987. Т. 18. С. 917—959.
37. Jaffe R.L.//Phys. Rev. 1977. Vol. D15, P. 267—280; 281—289.
38. Strottman D.//Phys. Rev. 1979. Vol. D20. P. 748—767.
39. Jaffe R.L.//Phys. Rev. Lett. 1977. Vol. 38. P. 195—198.
40. Aerts A.T., Mulders P.J.G., de Swart J.J.//Phys. Rev. 1978. Vol. D17. P. 260—274.
41. Matveev V.A., Sorba P.//Nuovo cimento, 1978. Vol. 45A, P. 257—279.
42. Доркин С. М., Резник Б. Л., Титов А. И.//ЯФ. 1982. Т. 36. С. 1244—1257.
43. Bickerstaff R.P.//Phyl. Trans. Roy. Soc. Lond. 1983. Vol. A309. P. 611—641.
44. Johnson K., Thorn C.B.//Phys. Rev. 1976. Vol. D13. P. 1934—1939.
45. Chodos A., Thorn C.B.//Phys. Rev. 1975. Vol. D12. P. 2733—2743.
46. Thomas A.V., Theberge S., Miller G.A.//Phys. Rev. 1981. Vol. D24. P. 216—229.
47. Mulders P.J., Thomas A.W.//J. Phys. G: Nucl. Phys. 1983. Vol. 9. P. 1159—1167.
48. Thomas A.W.//Adv. in Nucl. Phys. 1984. Vol. 13. P. 1—137.
49. Мусаханов М. М., Чоудхури П. К., Исаев В. П.//ЯФ. 1987. Т. 45. С. 790—797.
50. Дорохов А. Е.//ТМФ, 1984. Т. 61. С. 64—84.
51. Покровский Ю. Е.//ЯФ. 1984. Т. 40. С. 1053—1065.
52. Ефимов Г. В., Иванов М. А.//ЭЧАЯ. 1981. Т. 12. С. 1220—1274.
53. Авакян Е. З., Авакян С. Л., Ефимов Г. В., Иванов М. А.//ЯФ. 1989. Т. 49. С. 1398—1407.
54. Jaffe R.L., Low F.E.//Phys. Rev. 1979. Vol. D19. P. 2105—2118.
55. Wigner E.P., Eisenbud L.//Phys. Rev. 1947. Vol. 72. P. 29—41.
56. Roesnel C.//Phys. Rev. 1979, Vol. D20, P. 1646—1655.
57. Jaffe R.L., Schatz M.P. Preprint CALT-68-775, 1980.
58. Corden M.J., Cox G.F., Kelsey D.P., Lawrence C.A., Watkins P.M.//Phys. Rev. 1982, Vol. D25, P. 720—734.
59. Mulders P.J.//Phys. Rev. 1982, Vol. D25, P. 1269—1279.
60. Mulders P.J.//Phys. Rev. 1983, Vol. D28, P. 443—449.
61. Веселов А. И., Грач И. Л., Народецкий И. М.//ЯФ. 1984. Т. 39, С. 719—728.
62. Bakker V.L.G., Grach I.L., Narodetskii I.M.//Nucl. Phys. 1984. Vol. A424, P. 563—593.
63. Грач И. Л., Народецкий И. М., Шматиков М. Ж.//ЯФ. 1984. Т. 39. С. 91—98.
64. Баккер Б. Л. Г., Далинг Р., Кербигов Б. О., Хайзинг А. Я.//ЯФ. 1986. Т. 43, С. 1525—1533.
65. Mulders P.J., Aerts A.T., de Swart J.J.//Phys. Rev. 1980. Vol. D21. P. 1370—1387; 2653—2671.
66. Simonov Yu.A.//Phys. Lett. 1981. Vol. 107B, P. 1—4.
67. Симонов Ю. А.//ЯФ, 1982. Т. 36. С. 722—731.
68. Веселов А. И., Калашникова Ю. С., Народецкий И. М.//ЯФ. 1984, Т. 40. С. 1024—1034.
69. Симонов Ю. А.//ЯФ. 1983. Т. 38. С. 1542—1554.
70. Обуховский И. Т., Симонов Ю. А., Шматиков М. Ж.//ЯФ. 1983. Т. 38. С. 1248—1261.
71. Дубовик В. М., Обуховский И. Т., Шматиков М. Ж.//ЯФ. 1984. Т. 39. С. 699—706.
72. Simonov Yu.A.//Nucl. Phys. 1984. Vol. A416. P. 109—118.

73. Kalashnikova Yu.S., Narodetskii I.M., Simonov Yu.A., Veselov A.I.// Phys. Lett. 1985. Vol. 155B. P. 217—222.
74. Грач И. Л., Калашникова Ю. С., Народецкий И. М., Шматиков М. Ж.// ЯФ. 1985. Т. 42. С. 241—248.
75. Веселов А. И., Грач И. Л., Калашникова Ю. С., Народецкий И. М.// ЯФ. 1986. Т. 44. С. 21—30.
76. Народецкий И. М.// Нуклон-нуклонные и адрон-ядерные взаимодействия при промежуточных энергиях. Л.: ЛИЯФ АН СССР, 1986. С. 426—466.
77. Грач И. Л., Народецкий И. М.// ЯФ. 1987. Т. 46. С. 1038—1046.
78. Грач И. Л., Калашникова Ю. С., Народецкий И. М.// ЯФ. 1987. Т. 45. С. 1428—1434.
79. Kalashnikova Yu. S.// Phys. Lett. 1984. Vol. 142B. P. 415—419.
80. Бадалян А. М., Симонов Ю. А.// ЯФ. 1982. Т. 36. С. 1479—1485.
81. Кербинов Б. О.// ЯФ. 1984. Т. 39. С. 816—824.
82. De Tar C.// Phys. Rev. 1978. Vol. D17. P. 302—322; 323—339.
83. De Tar C.// Phys. Rev. 1979. Vol. D19. P. 1451—1464.
84. Куперин Ю. А., Макаров К. А., Павлов Б. С.// ТМФ, 1986. Т. 69. С. 100—114.
85. Ефимов В. Н. Препринт ОИЯИ Р4-82-202. Дубна, 1982.
86. Lomon E.L.// AIP Conf. Proc. N 110, Hadron Substructure in Nuclear Physics. AIP, N.Y., 1984. P. 117—133.
87. Петров Н. М.// ЯФ. 1986. Т. 44. С. 1267—1271.
88. Сафронов А. Н.// Нуклон-нуклонные и пион-нуклонные взаимодействия при промежуточных энергиях. Л.: ЛИЯФ АН СССР, 1982. С. 259—265.
89. Safronov A.N.// Phys. Lett. 1983. Vol. 124B. P. 149—153.
90. Сафронов А. Н. Материалы Всесоюзной конференции по теории систем нескольких частиц с сильным взаимодействием. Л.: АН СССР, Минвуз СССР, ЛГУ, 1983. С. 10—12.
91. Сафронов А. Н.// ЯФ. 1983. Т. 38. С. 1515—1524.
92. Safronov A.N.// Proc. of the 10th Intern. Conf. on Few Body Problems. Amsterdam; North-Holland, 1984. P. 619—620.
93. Safronov A.N.// Proc. of the IX European Conf. on Few Body Problems in Physics. Tbilisi, 1984. Poster Sect. Pap. P. 143—144.
94. Сафронов А. Н.// Нуклон-нуклонные и адрон-ядерные взаимодействия при промежуточных энергиях. Л.: ЛИЯФ АН СССР, 1984. С. 388—394.
95. Safronov A.N.// Phys. Lett. 1985, Vol. 163B. P. 226—230.
96. Safronov A.N.// Proc. of the X European Symp. on the Dynamics of Few Body Systems. Balatonfureu, Hungary, 1985. Cont. Pap. P. 125—127.
97. Сафронов А. Н.// ТМФ. 1985. Т. 62. С. 97—104.
98. Сафронов А. Н.// ЯФ. 1985. Т. 41. С. 177—186.
99. Сафронов А. Н.// Нуклон-нуклонные и адрон-ядерные взаимодействия при промежуточных энергиях. Л.: ЛИЯФ АН СССР, 1986. С. 520—526.
100. Safronov A.N.// Proc. of the Eleventh Intern. IUPAP Conf. on Few Body Systems in Particle and Nuclear Physics. Supplement to research report of laboratory of nuclear science, Tohoku University, 1986. Vol. 19. P. 142—143.
101. Сафронов А. Н.// ЯФ. 1986. Т. 43. С. 666—675.
102. Сафронов А. Н.// Изв. АН СССР. Сер. физ. 1986. Т. 50. С. 145—150.
103. Коллинз П., Сквайрс Э. Полюса Редже в физике частиц: Пер. с англ. М.: Мир, 1971.
104. Wicham E.J., Crichton J.H.// Phys. Rev. 1963. Vol. 132. P. 2788—2799.
105. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.
106. Гольдбергер М., Ватсон К. Теория столкновений: Пер. с англ. М.: Мир, 1967.
107. Cutcosky R.E.// J. Math. Phys. 1960. Vol. 1. P. 429—433.

108. Castillejo L., Dalitz R.H., Dyson F.J.//Phys. Rev. 1956. Vol. 101, P. 453—458.
109. Ширков Д. В., Серебряков В. В., Мещеряков В. А. Дисперсионные теории сильных взаимодействий при низких энергиях. М.: Наука, 1967.
110. Dyson F.J.//Phys. Rev. 1957. Vol. 106. P. 157—159.
111. Wigner E.P.//Ann. Math. 1951. Vol. 53. P. 36—67.
112. Martin A.//Nuovo cimento. 1965. Vol. 38. P. 1326—1341.
113. Safronov A. N.//Proc. X European Symp. on the Dynamics of Few Body Systems, Balantofuren, Hungary, 1985. Contrib. Pap. P. 122—124.
114. Сафронов А. Н.//Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия. 1986. Т. 27. С. 29—33.
115. Ruderman M.A., Gasiorowicz S.//Nuovo cimento. 1958. Vol. 8. P. 861—877.
116. Грибов В. Н., Зельдович Я. Б., Переломов А. М.//ЖЭТФ, 1961. Т. 40. С. 1190—1198.
117. Гешкенбейн Б. В., Иоффе Б. Л.//ЖЭТФ. 1963. Т. 45. С. 555—564.
118. Бадалян А. М., Симонов Ю. А.//ЭЧАЯ. 1975. Т. 6. С. 299—346.
119. Greben J.M., Simonov Yu.A.//Phys. Rev. 1978. Vol. C18, P. 642—659.
120. Froissart M.//Nuovo cimento. 1961. Vol. 22. P. 191—192.
121. Frye G., Warnock R.L.//Phys. Rev. 1963. Vol. 130. P. 478—494.
122. Warnock R.L.//Phys. Rev. 1966. Vol. 146. P. 1109—1117.
123. Arndt R.A., Roper L.D.//Phys. Rev. 1982. Vol. D25. P. 2011—2012.
124. Bryan R.A.//Phys. Rev. 1984. Vol. C30. P. 305—313.
125. Sprung D.W.L.//Phys. Rev. 1987. Vol. C35. P. 869—874.
126. Stapp H.P., Ypsilantis T., Metropolis N.//Phys. Rev. 1957. Vol. 105. P. 302—310.
127. Arndt R.A., Roper L.D., Bryan R.A.//Phys. Rev. 1983. Vol. D28. P. 97—122.
128. Arndt R.A., Hyslop III J.S., Roper L.D.//Phys. Rev. 1987. Vol. D35. P. 128—144.
129. Arndt R.A., Ford J.M., Roper L.D.//Phys. Rev. 1985. Vol. D32. P. 1085—1103.
130. Arndt R.A., Roper L.D.//Phys. Rev. 1985. Vol. 31. P. 2230—2241.
131. Сафронов А. Н.//ТМФ. 1985. Т. 62. С. 236—241.
132. Де Альфаро В., Редже Т. Потенциальное рассеяние: Пер. с англ. М.: Мир, 1966.
133. Lovelace C.//Phys. Rev. 1964. Vol. 135. P. 1225—1249.
134. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N.//Nuovo cimento, 1963. Vol. 29, P. 280—399.
135. Blankenbecler R., Sugar R.//Phys. Rev. 1966. Vol. 142. P. 1051—1059.
136. Сафронов А. Н.//ТМФ, 1986. Т. 69. С. 88—99.
137. Callan C.J., Dashen R.F., Gross D.J.//Phys. Rev. 1979. Vol. D19. P. 1826—1855.
138. Cottingham W.N., Lacombe M., Loiseau B., Richard J.M., Vinh Mau R.//Phys. Rev. 1973. Vol. D8. P. 800—819.
139. Lacombe M., Loiseau B., Richard J.M. e.a.//Phys. Rev. 1975. Vol. D12. P. 1495—1498.
140. Hohler G., Pietarinen E.//Nucl. Phys. 1975. Vol. B95. P. 210—230.
141. Epstein G.N., McKeller B.H.J.//Phys. Rev. 1974. Vol. D10. P. 1005—1023.
142. Kok L.P.//Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45. P. 427—430.
143. Крупа Д., Мещеряков В. А., Суворцев Ю. С. Препринт ОИЯИ P2-87-181. Дубна, 1987.
144. Achasov N.N., Devyanin S.A., Shestakov G.N.//Z. Phys. C.: Particles and Fields. 1984. Vol. 22, P. 53; УФН. 1984. Т. 142. С. 361.
145. Huams B., Jones C., Weilhammer P. e.a.//Nucl. Phys. 1975. Vol. B100. P. 205—224.

146. Hyams B., Jones C., Weilhammer P. e.a.//Nucl. Phys. 1973. Vol. B64. P. 134—162.
147. Shimada T.//Nucl. Phys. 1975. Vol. B100. P. 225—236.
148. Irving A.C., Martin A.D., Done P.J.//Z. Phys. C.: Particles and Fields. 1981. Vol. 10. P. 45—53.
149. Cason N.M., Cannata P.E., Baumbaugh A.E.//Phys. Rev. 1983. Vol. D28. P. 1586—1600.
150. Hoogland W., Peters S., Grayer G. e.a.//Nucl. Phys. 1977. Vol. B126. P. 109—123.
151. Estabrooks P., Carnegie R.K., Martin A.D. e.a.//Nucl. Phys. 1978. Vol. B133. P. 490—524.
152. Yost G.P., Barnett R.M., Hinchliffe I. e.a. Particle Data Group//Phys. Lett. 1988. Vol. 204 B. P. 1—486.
153. Dobois R., Axen D., Keeler R. e.a.//Nucl. Phys. 1982. Vol. A377. P. 554—584.
154. Hoshimoto K., Higuchi Y., Hoshizaki N.//Progr. Theoret. Phys. 1980. Vol. 64. 1678—1692.
155. Джаркава М. И., Казаринов Ю. М., Страхота И., Хаятов М. Р.//ЯФ. 1982. Т. 35. С. 65—75.
156. Гребенюк О. Г., Комаров Е. Н., Шкляревский Г. М.//ЯФ. 1984. Т. 39. С. 74—86.
157. Вовченко В. Г., Казаринов М. Ю., Казаринов Ю. М. и др.// ЯФ. 1983. Т. 37. С. 158—166.