

МАЛОБАРИОННЫЕ СИСТЕМЫ В МОДЕЛИ СОЛИТОНОВ КИРАЛЬНОГО ПОЛЯ

В. А. Николаев, О. Г. Ткачев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В обзоре приводятся основные результаты, полученные в последние годы на пути построения теории ядерных состояний в модели Скирма. Ядра в таком подходе ассоциируются с квантовыми солитонами кирального поля и имеют нетривиальную топологию. Приводятся результаты вычисления эффективного гамильтониана, массовых формул, электромагнитных статических характеристик и формфакторов легчайших ядер и нуклонов в рамках единого подхода. Обсуждается возможная роль калибровочных бозонов скрытой симметрии модели Скирма, а также участие дилатонов-кваркониев в структуре малобарионных систем.

In the present report the main results are presented that have been obtained for the last years on the way of creating the nuclear state theory in the frame of the Skyrme model. In such an approach nuclei are associated to quantum chiral solitons and they have a nontrivial topology. Results of calculation of the effective Hamiltonian, mass formulae, electromagnetic static characteristics and formfactors of light nuclei and nucleons are presented in the framework of an unique approach. The possible role of the hidden symmetry gauge bosons of the Skyrme model is discussed as well as the role of the dilaton-quarkonium in the structure of few-baryon systems.

ВВЕДЕНИЕ

Модель солитонов кирального поля как модель барионов и барионных систем родилась в 60-х годах в основополагающих работах Скирма [1]. Основное утверждение создателя модели сводилось к тому, что топологические солитоны кирального поля (солитоны с ненулевым топологическим зарядом) могут передавать все свойства барионов и их взаимодействий, если их топологический заряд отождествить с барионным. Речь шла о солитонах $SU(2) \times SU(2)$ кирально-симметричной модели псевдоскалярного поля. Модель Скирма явилась простейшим обобщением нелинейной σ -модели [2], имеющим стабильные солитонные решения с целочисленным топологическим зарядом. Нелинейная σ -модель представляет собой теорию самодельствующего пионного поля, в которой взаимодействие вводится через кирально-симметричный констрейн, включающий некоторое вспомогательное скалярное мезонное поле. В появившейся потом квантовой хромодинамике (КХД) как калибровочной теории силь-

ных взаимодействий низкоэнергетические свойства барионов и их систем связываются с «нетеоретиковозмущенческим» режимом. В этой области энергий решающим образом проявляются нетривиальные и существенно нелинейные свойства вакуума КХД [3, 4].

В то же время интенсивно развивался и продолжает развиваться феноменологический подход к описанию структуры барионов и их взаимодействий на основе эффективных киральных мезонных полей [5—8]. Были затрачены значительные усилия, чтобы обосновать подход, использующий эффективный киральный лагранжиан для описания сильновзаимодействующих систем [9—14]. В этом направлении достигнут значительный успех в последние несколько лет. Мы не будем останавливаться на этих работах, отметим только несколько принципиальных положений. Кварковые и глюонные степени свободы в производящем функционале КХД заменяются эффективными бозонными степенями свободы, приводя к новому производящему нелокальному функционалу для бозонных полей. Методом разложения по производным полей приходят к некоторому локальному лагранжиану, диктующему уравнения движения для бозонных полей. В приближении медленно меняющихся в пространстве полей в лагранжиане можно ограничиться низшими производными и таким образом прийти к модели Скирма или некоторым ее обобщениям.

В 1983 г. Виттен [15, 16] доказал, что идея Скирма может быть распространена до числа ароматов $N_f \geq 3$. Ему удалось показать, что солитоны с нечетным топологическим зарядом отождествляются с фермионами, если нечетно число цветов N_c , подлежащих калибровочной теории сильных взаимодействий. В КХД с $N_c = 3$ солитоны с нечетным топологическим зарядом суть фермионы, а солитоны с четным топологическим зарядом — бозоны. Таким образом, топологический заряд должен быть отождествлен с барионным, поскольку нет других фермионов, кроме барионов, в мире сильных взаимодействий. Так получила свое обоснование основная гипотеза модели Скирма.

Хотя, вообще говоря, безонизованная КХД (бозонное представление КХД) должна включать бесконечно много мезонных полей, можно ожидать, что легчайшие из мезонов будут существенны в смысле количественной значимости их вкладов в низкоэнергетические свойства барионов и ядер. Вот почему, ограничиваясь легчайшими мезонами, изучая низкоэнергетические свойства барионов, можно начать с модели Скирма и при необходимости прибегнуть к некоторым обобщениям. Среди возможных непосредственных обобщений следует отметить модели, передающие конформную аномалию КХД [17—21], включающие дилатонное поле, а также модели, включающие векторные мезоны, наличие которых отражает скрытую киральную калибровочную симметрию модели Скирма [22—24]. Небольшое число параметров, в принципе выводимых из КХД, рассматривается в таких моделях, как фитируемые по некоторым дан-

ным. Уже первые расчеты [25] в рамках модели Скирма обнаружили, что наблюдаемые статические свойства барионов воспроизводятся с погрешностью не выше 30 %. Использование обобщенного варианта модели, включающего поля векторных мезонов, дает возможность удовлетворительно описать не только статические барионные наблюдаемые, но и барионные формфакторы [26].

Применение модели топологических киральных солитонов к системе двух взаимодействующих нуклонов оказалось также чрезвычайно плодотворным. Самые характерные черты нуклон-нуклонного взаимодействия предсказываются уже оригинальной моделью Скирма, например одноопионное обменное взаимодействие [1], короткодействующее отталкивание [27], изоспин-зависящее спин-орбитальное взаимодействие [28], дальнедействующие части изовекторных электромагнитных обменных токовых операторов [39]. В рамках модели топологических киральных солитонов операторы изоскалярных электромагнитных токов барионов и ядер пропорциональны не зависящему от модели оператору аномального барионного тока. На этой основе развивается исследование изоскалярных обменных токовых операторов [30].

Успехи модели Скирма [1] в описании нуклонов как квантовых состояний киральных солитонов делает естественным применение модели к ядрам. В традиционной физике ядра рассматриваются как связанные состояния нуклонов. Первый опыт описания ядер в модели Скирма был сделан в потенциальном приближении [27, 31]. В таком подходе необходимо, прежде всего, рассчитать потенциал взаимодействия между скирмионами на всех расстояниях R между ними. Ядра могли бы рассматриваться как связанные состояния скирмионов в таком потенциале. Следует отметить некоторые трудности, встречающиеся на таком пути конструирования ядерных состояний. Прежде всего, расстояние между скирмионами определяется абсолютно произвольно, и потенциал взаимодействия имеет смысл только для больших расстояний, где он должен отождествляться с однобозонным обменным потенциалом. Чтобы удовлетворить последнему условию, используется так называемый анзац произведения для конфигураций кирального поля. На этом пути мы сталкиваемся с проблемой получения притягивающей части центрального потенциала на средних расстояниях, ответственной за связанность ядер. Эта проблема интенсивно обсуждается в настоящее время и, вероятно, скоро будет решена. Было отмечено также, что притяжение в промежуточной области, не зависящей от состояния центральной части потенциала, может быть обусловлено также квантовыми эффектами, такими, как пионные флуктуации, или эффектами деформации солитонов [32—34].

Потенциальное приближение не является единственным возможным при описании ядерных состояний, а также не является естественным в модели Скирма. В этой модели существует более прямой путь конструирования систем с произвольным барионным зарядом. На этом пути мы, прежде всего, ищем солитоны классических полей с соот-

ветствующим топологическим зарядом и затем квантуем солитонные степени свободы, чтобы получить объект с ядерными квантовыми числами. Из исследования систем с барионным числом 2, 3 и 4 без учета вибраций [35—39] и с включением дыхательной моды [40—41] можно заключить, что проблема отсутствия притяжения на средних расстояниях является, вероятно, технической, но не принципиальной, или просто артефактом потенциального приближения. Это видно из того факта, что даже первые расчеты, проведенные в рамках вариационного метода, и более рафинированные численные расчеты приводят к большой энергии связи для систем с барионным зарядом $B = 2$. Естественно, расстояние R в таком подходе никак не проявляется, но при необходимости может служить вариационным параметром, определяющим полевую конфигурацию. Вообще говоря, в таком подходе к теории ядерных состояний следует считать, что сами нуклоны могут рождаться только в окрестности поверхности ядер и, строго говоря, не существуют во внутренней области ядер. Действительно, чтобы приобрести нуклонные квантовые числа, скирмион должен иметь возможность свободно вращаться в координатном и изотопическом пространствах. Однако внутри ядра у него нет таких условий, так как потенциал взаимодействия между скирмионами зависит от их относительной ориентации в обоих пространствах. Как результат, только ядро как целое может иметь хорошие квантовые числа [42].

Наиболее впечатляющие результаты, касающиеся расчетов ядерных состояний, были получены прямыми численными методами для конфигураций с минимальной энергией и топологическим зарядом $B = 2$ [36, 43]. Недавно новый вариационный анзац, независимо, был предложен в [44] и [45]. Этот анзац удовлетворяет условиям симметрии, сформулированным в [37, 38], и, будучи очень простым по структуре, дает возможность сделать еще один шаг в аналитическом исследовании задачи, а также включить в рассмотрение некоторые вибрационные моды. На этом пути среди новых решений получены такие, которые можно интерпретировать как компаунд-ядерные состояния, включающие антинуклоны в свою структуру. Такие состояния могут проявиться в реакциях легких ядер с остановившимися антинуклонами. Обнаружение таких состояний свидетельствовало бы в пользу модели барионов и ядер как солитонов кирального поля.

В этом обзоре мы приведем схему вычисления эффективного квантового гамильтониана, описывающего ротационные и некоторые вибрационные степени свободы в методе коллективных переменных. Приведем также основные результаты, известные к настоящему времени, по вычислению спектра такого гамильтониана и свойства состояний с квантовыми числами легчайших ядер.

Появившиеся в последние годы обзоры по модели Скирма посвящены в основном однобарионному сектору [46—49]. Здесь делаем попытку систематизировать результаты, полученные для малобарионных состояний в модели Скирма и некоторых ее обобщениях.

1. СВОЙСТВА СТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕВЫХ КОНФИГУРАЦИЙ МАЛОБАРИОННЫХ СИСТЕМ

$SU(2)$ -модель Скирма определяется плотностью лагранжиана [25]

$$\mathcal{L} = \frac{F_\pi^2}{16} \text{Tr} L_\mu L_\mu + \frac{1}{32e^2} \text{Tr} [L_\mu L_\nu]^2, \quad (1)$$

построенной с помощью левоинвариантных форм Картана

$$L_\mu = U^+ \partial_\mu U, \quad (2)$$

где $SU(2)$ — матрицы $U(x)$ в экспоненциальной параметризации:

$$U = \exp \left\{ i \frac{2}{F_\pi} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi} \right\} \quad (3)$$

и задаются триплетом пионных полей $\boldsymbol{\pi}$. В последнем равенстве τ_i — суть матрицы Паули. Лагранжиан определяет модель, характеризующуюся спонтанно нарушенной киральной $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -симметрией. Солитоны такой модели несут некоторый точно сохраняющийся топологический заряд, соответствующий тривиально сохраняющемуся топологическому току

$$J_\mu^B = -\frac{1}{24\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr} (L_\nu L_\rho L_\sigma). \quad (4)$$

Солитоны представляют собой протяженные сильновзаимодействующие объекты. Они очень массивны, в сравнении с полями, входящими в лагранжиан. Благодаря перечисленным свойствам, квантовые состояния солитонов можно отождествить с барионами и барионными системами (атомными ядрами).

Обобщенный анзац для статических решений. Хорошо известно, что исторически первым стационарным решением уравнений модели Скирма в секторе с топологическим зарядом n была конфигурация типа «еж» или решение Скирма — Виттена

$$U_{\text{sw}}^{\leftarrow}(\mathbf{r}) = \cos F(r) + i(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{N}) \sin F(r). \quad (5)$$

Здесь \mathbf{N} задает направление в изотопическом пространстве, а, собственно, конфигурация «еж» конкретизируется вектором $\mathbf{N} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$. В равенстве (5) $F(r)$ — киральный угол, описывающий абсолютное значение пионного поля. Функция $F(r)$ удовлетворяет следующим граничным условиям $F(0) = n\pi$, $F(\infty) = 0$. Эти условия обеспечивают конечность энергии для солитонов с топологическим зарядом n , равным барионному заряду B . Как было показано в [50], конфигурация типа «еж» обеспечивает абсолютный минимум энергии солитона с $n = 1$. Однако для других секторов решения такого типа не обязательно обеспечивают даже локальный минимум.

Остановимся на секторе с барионным зарядом $B = 2$ и попытаемся разобраться в вопросе, можно ли дейтрон отождествить с квантовым состоянием солитона с топологическим зарядом, равным двум. Несколько подробнее остановимся на проблеме поиска конфигураций

с минимальной энергией в этом секторе. Как мы уже отмечали, первоначальные усилия были сконцентрированы на вычислении межнуклонного потенциала в модели Скирма. Эти исследования основывались на наблюдении Скирма, что $B = 2$ -решение, описывающее хорошо разделенные скирмионы, может аппроксимироваться анзацем произведения. В системе отсчета, в которой центры скирмионов размещены симметрично относительно начала координат вдоль оси x , анзац произведения выглядит следующим образом:

$$U(\mathbf{r}, s, A) = U_1(\mathbf{r} + s\hat{x}) AU_1(\mathbf{r} - s\hat{x}) A^+, \quad (6)$$

где U_1 — решение типа «еж», минимизирующее энергию в секторе с $B = 1$. В уравнении (5) $SU(2)$ -матрица A описывает относительную изоспиновую ориентацию двух скирмионов. Потенциал $V(s, A)$ как функция относительного расстояния $2s$ в таком подходе определяется разностью энергии E конфигурации (6) и двумя массами M_1 скирмионов с $B = 1$:

$$V(s, A) = E[U_1, s, A] - 2M_1. \quad (7)$$

Межнуклонный потенциал получается затем проектированием $V(s, A)$ (как функции A) на состояния с определенным спином и изоспином [27, 31, 51—53]. В [54] $V(s, A)$ оценивался как функция s для различных значений A . Согласно полученным в [54] результатам, энергия взаимодействия минимизируется, если изоспиновые оси одного из скирмионов повернуты на 180° относительно некоторого направления, перпендикулярного линии, на которой локализованы скирмионы. Это соответствует матрице $A = \exp\{i\pi(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}/2)\}$, где \mathbf{n} — единичный вектор, перпендикулярный оси x . Для определенности можно взять $\mathbf{n} = \hat{z}$, что соответствует $A = i\tau_3$. Таким образом, приходим к конфигурации

$$U_2(x, y, z) = U_1(x + s, y, z) \tau_3 U_1(x - s, y, z) \tau_3. \quad (8)$$

Эта конфигурация достигает своего минимума на расстоянии $s = s_0 = 2,8/eF_\pi$, что соответствует классической энергии связи $-V(s_0, i\tau_3) = 1,06 F_\pi/e$, для выбранных авторами значений постоянных модели Скирма $F_\pi = 108 \text{ МэВ}$, $e = 4,84$ и $m_\pi/eF_\pi = 0,263$.

Квантование вращательных степеней свободы по методу [25] привело к двум близкорасположенным квантовым состояниям с квантовыми числами дейтрона: спин $s = 1$, изоспин $T = 0$ и четность $P = +1$. Характеризующие эти состояния расчетные значения среднеквадратичного зарядового радиуса, магнитного и квадрупольного моментов согласуются с дейтронными наблюдаемыми с погрешностью 30%. Однако в [36, 37] численными методами было показано, что симметричные относительно пространственных отражений конфигурации с $B = 2$ имеют существенно меньшую энергию, чем конфигурации, соответствующие анзацу произведения. Более того, было показано, что конфигурация с минимальной энергией также аксиально-симметрична и имеет тороподобное распределение плотности барионного заряда. Одновременно шел поиск аналитической формы такого

решения. Было предложено использовать приближенное решение с отражательной и аксиальной симметрией, вводя кручение в поле — « $k\varphi$ »-анзац:

$$\mathbf{N} = \{\cos(k\varphi) \sin \theta; \sin(k\varphi) \sin \theta; \cos \theta\}, \quad (9)$$

где (θ, φ) — углы вектора \mathbf{r} в сферической системе координат. В (9) k есть некоторое целое число, которое также определяет топологический заряд. Некоторые интересные свойства состояний, порождаемые этими решениями, были исследованы в [35, 40, 55, 56]. В секторе с барионным зарядом $B = 2$ эта форма решений приводит к массам квантовых состояний (с квантовыми числами дейтрона) порядка двух нуклонных масс. Процедура квантования приводит к богатому спектру ротационных полос [40, 55]. Следует подчеркнуть, что для такого анзаца энергия нижайшего классического состояния (солитона) несколько больше, чем двухсолитонный порог. Однако можно показать, что обсуждаемое решение можно улучшить и получить конфигурации с существенно меньшей энергией.

О симметриях решений в секторе $B = 2$. Чтобы прояснить суть дела, остановимся вкратце на симметриях решений в секторе $B = 2$. Что касается анзаца произведения, то такие решения удовлетворяют следующему нетривиальному условию:

$$U_2(x, -y, -z) = \tau_1 U_2(x, y, z) \tau_1, \quad (10)$$

а также имеют простые трансформационные свойства относительно преобразований четности $PU(\mathbf{r}) \Rightarrow U^+(-\mathbf{r})$:

$$PU_2(\mathbf{r}) \Rightarrow U_2(-\mathbf{r}) = \tau_3 U_2(\mathbf{r}) \tau_3. \quad (11)$$

Равенство (10) означает, что произвольному пространственному вращению на угол π относительно оси, на которой локализованы скирмионы, эквивалентно изоспиновому вращению на угол π относительно той же оси. Как показано в [54], эта симметрия очень важна для получения правильного спектра квантовых чисел. Симметрии этого типа связываются с квантовой теорией с критерием Финкельштейна — Рубинштейна [57], которому должны удовлетворять физические разрешенные состояния гильбертова пространства. Этот критерий обеспечивает выполнение принципа Паули. Что касается симметрии (10), то примененный к таким решениям критерий Финкельштейна — Рубинштейна удаляет из спектра состояний с $B = 2$ состояния с квантовыми числами $T = S = 0$, делая, таким образом, нижайшими состояниями в спектре состояния с квантовыми числами дейтрона. Из исследований, проведенных в [58], следует, что точными симметриями конфигураций с минимальной энергией в секторе $B = 2$ являются также

$$U_2(-x, y, z) = \tau_1 U_2(x, y, z) \tau_1; \quad (12)$$

$$U_2(-x, -y, z) = U_2(x, y, z). \quad (13)$$

Таким образом, две новые симметрии наряду с нетривиальной симметрией (10), характерной для анализа произведения, справедливы для точного решения.

В [38] было показано, а затем и подтверждено прямыми численными расчетами [37], что U_2 обладает также непрерывной цилиндрической симметрией. Так, если ось z выбрать в качестве оси симметрии, то цилиндрическая симметрия решения принимает вид

$$U_2(\rho, \varphi + \alpha, z) = e^{-i\alpha\tau_3} U_2(\rho, \varphi, z) e^{i\alpha\tau_3}. \quad (14)$$

Эта непрерывная симметрия включает последнюю из рассмотренных нами дискретных симметрий (13) при $\alpha = \pi$.

В следующем разделе мы воспользуемся анзацем [41, 44, 45], реализующим рассмотренные симметрии в секторах с $B \geq 2$:

$$N = \{\cos \Phi(\varphi) \sin T(\theta), \sin \Phi(\varphi) \cdot \sin T(\theta), \cos T(\theta)\}, \quad (15)$$

где $\Phi(\varphi)$ и $T(\theta)$ — некоторые произвольные функции от углов φ, θ сферической системы координат, определяющие локальную ориентацию изотопического вектора N . Мы покажем, что этот анзац является обобщением анзаца Скирма — Виттена и « $k\varphi$ »-анзаца и, в известном смысле, объясняет происхождение и приближенный характер последнего. Как будет видно из дальнейшего, этот анзац приводит к серии новых решений как в барионном, так и в топологически тривиальном секторах. Некоторые из новых состояний являются классически стабильными.

Массовый функционал и решения статических уравнений. Выпишем лагранжеву плотность $SU(2)$ модели Скирма для стационарных решений

$$\mathcal{L} = \frac{F_\pi^2}{16} \text{Tr}(L_k L_k) + \frac{1}{32e^2} \text{Tr}[L_k, L_l]^2. \quad (16)$$

Здесь $L_k(x) = U^+(x) \partial_k U(x)$ суть пространственные компоненты левых токов ($k = 1, 2, 3$). После некоторой утомительной алгебры, используя предположение о форме решения (15), лагранжиан L можно привести к виду

$$L = \int (\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4) dV, \quad (17)$$

где

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{F_\pi^2}{8} \left\{ (F')^2 + \left[\frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} (\Phi')^2 + (T')^2 \right] \frac{\sin^2 F}{r^2} \right\}; \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 = & -\frac{1}{2e^2} \frac{\sin^2 F}{r^2} \left\{ \frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} (T')^2 (\Phi')^2 \frac{\sin^2 F}{r^2} + \right. \\ & \left. + \left[\frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} (\Phi')^2 + (T')^2 \right] (F')^2 \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

В последних выражениях штрих означает дифференцирование по своему аргументу:

$$\Phi' = d\Phi/d\varphi, \quad T' = dT/d\theta, \quad F' = dF/dr. \quad (20)$$

Вариация (17) по Φ дает

$$\Phi'' = 0, \quad (21)$$

т. е.

$$\Phi(\varphi) = k\varphi + \text{const}. \quad (22)$$

Далее мы будем рассматривать только решения с $\text{const} = 0$. Чтобы обеспечить однозначность полного решения $U(\mathbf{r})$ во всем пространстве, следует потребовать целочисленность величины k .

Теперь для массы солитона нетрудно получить выражения:

$$M = M_2 + M_4; \quad (23)$$

$$M_2 = \frac{\gamma}{4} \int_0^\infty dx \cdot x^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \left\{ (F')^2 + \left[\frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} k^2 + (T')^2 \right] \frac{\sin^2 F}{x^2} \right\}; \quad (24)$$

$$M_4 = \gamma \int_0^\infty dx x^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \left\{ \left[\frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} k^2 + (T')^2 \right] (F')^2 + \frac{\sin^2 F}{x^2} \frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} k^2 (T')^2 \right\} \frac{\sin^2 F}{x^2}, \quad (25)$$

где $\gamma = \pi F_\pi / e$ и $x = F_\pi r$.

Из условий минимизации функционала массы

$$\delta M / \delta T = 0, \quad \delta M / \delta F = 0 \quad (26)$$

немедленно получаем систему связанных уравнений, определяющих функции $F(x)$ и $T(\theta)$:

$$[x^2 + 2a \sin^2 F] F'' + 2xF' + [a(F')^2 - \frac{a}{4} - 2b \frac{\sin^2 F}{x^2}] \sin(2F) = 0; \quad (27)$$

$$2 \left[A + k^2 B \frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} \right] T'' - k^2 A \frac{\sin^2(2T)}{\sin^2 \theta} + k^2 B \frac{\sin(2T)}{\sin^2 \theta} (T')^2 + 2T' \text{ctg} \theta \left[A - k^2 B \frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} \right] = 0. \quad (28)$$

Коэффициенты a , b и A , B задаются следующими функционалами решений:

$$a = \int_0^\pi \left[k^2 \frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} + (T')^2 \right] \sin \theta d\theta; \quad (29)$$

$$b = k^2 \int_0^\pi \frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} (T')^2 \sin \theta d\theta; \quad (30)$$

$$A = \int_0^\infty \sin^2 F \left[\frac{1}{4} + (F')^2 \right] dx; \quad (31)$$

$$B = \int_0^\infty \frac{\sin^4 F}{x^2} dx. \quad (32)$$

Из (24), (25) и (29), (30) мы можем заключить, что значение функции $T(\theta)$ должно быть кратно π в точках $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Рассматривая только конфигурации с конечной массой, мы ограничиваемся функциями $F(x)$, удовлетворяющими условиям $F(0) = \pi \cdot n$ с целым n . Без потери общности можно положить $F(\infty) = 0$. Нетрудно проверить, что асимптотическое поведение $F(x)$ полиномиально (для $m_\pi = 0$):

$$F|_{x \rightarrow \infty} \sim 1/x^{p+1}, \quad p = \frac{\sqrt{1+2a}-1}{2}. \quad (33)$$

В окрестности начала координат

$$F|_{x \rightarrow 0} \sim \pi n - \alpha x^p, \quad (34)$$

где α — некоторый численный фактор. Очевидно также, что $T(\theta)$ имеет следующее поведение в окрестности границ своей области определения:

$$T(\theta) \sim \theta^k \text{ при } \theta \rightarrow 0 \quad (35)$$

и

$$T(\theta) \sim \pi l - (\pi - \theta)^k \text{ при } \theta \rightarrow \pi, \quad (36)$$

где l — некоторое целое число. Таким образом, все решения U характеризуются набором целых чисел (n, k, l) .

Решение $T(\theta)$ может быть аппроксимировано следующим рядом [45]:

$$T(\theta) = \theta + \sum_{p=1}^m g_p \sin(2p\theta), \quad (37)$$

где g_p — вариационные параметры.

Форма этого решения удовлетворяет условиям отражательной симметрии [37] на поле:

$$N(x, y, -z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} N(x, y, z); \quad (38)$$

$$N(x, -y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} N(x, y, z); \quad (39)$$

$$N(-x, y, z) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} N(x, y, z). \quad (40)$$

Вариационный расчет требует учета, по крайней мере, двух членов в (37), чтобы воспроизвести с хорошей точностью решение уравнения, полученное в [41] прямым численным интегрированием уравнения для $T(\theta)$.

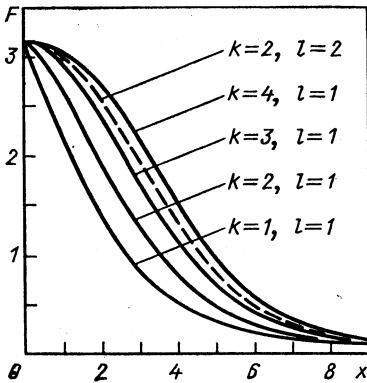


Рис. 1. Решение $F(x)$ системы уравнений (27)—(32) для некоторых значений l и k

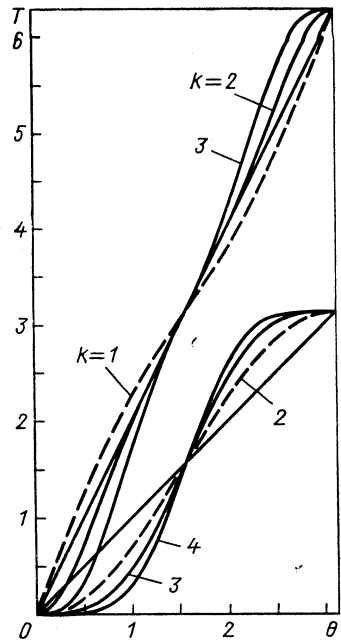


Рис. 2. Решение $T(\theta)$ системы уравнений (27)—(32) для некоторых значений l и k

Результат численного интегрирования системы уравнений (27) — (32) графически представлен на рис. 1 и 2 для некоторых значений k и l .

Распределение барионного заряда и структуры солитонов. Рассмотрим более подробно структуру солитонов. С этой целью вычислим распределение барионного заряда согласно уравнению (4). Прямой расчет приводит к следующему выражению:

$$J_0^B(r, \theta) = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{\sin^2 F}{r^2} \frac{dF}{dr} \frac{\sin T}{\sin \theta} \frac{dT}{d\theta} \frac{d\Phi}{d\varphi}. \quad (41)$$

Полученное выражение для плотности барионного заряда переходит в выражение, полученное для конфигурации типа «еж», если положить $k = 1$ и $T(\theta) = \theta$, как и должно быть. Выражение (41) немедленно определяет и свой интеграл, т. е. барионный заряд B :

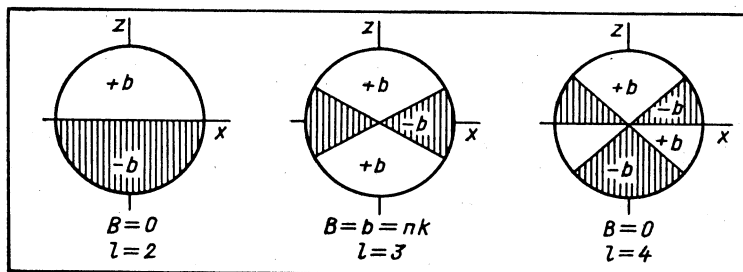
$$B = \frac{kn}{2} [1 - \cos(\pi l)]. \quad (42)$$

Очевидно, что четным значениям l будут соответствовать конфигурации из вакуумного сектора $B = 0$, а нечетным l — из барионного сектора. На рис. 3 схематично представлено распределение барионного заряда в x, z -плоскости для солитонов, характеризуемых числами n, k, l . В табл. 1 мы символически представляем структуру солитонов, полный барионный заряд и значения среднеквадратичных радиусов для некоторых значений k и l . Мы указываем, например,

Таблица 1. Структура состояний ($n=1, k, l$) и среднеквадратичные радиусы распределений барионного заряда

k	$l=1$	$l=2$	$l=3$
1	$B=1 (S)$ $r_x^2 - r_y^2 = r_z^2 = 1,49$	$B=0 (S - \bar{S})$ $r_x = r_y = 0$ $r_z = 0$	$B=1 (S - \bar{S} - S)$ $r_x = r_y = -4,1$ $r_z = 22,8$
2	$B=2 (2S)$ $r_x^2 = r_y^2 = 6,5$ $r_z = 2,9$	$B=0 (2S - \bar{2S})$ $r_x = r_y = 0$ $r_z = 0$	$B=2 (2S - \bar{2S} - 2S)$ $r_x = r_y = -8,7$ $r_z = 62$
3	$B=3 (3S)$ $r_x^2 = r_y^2 = 16,2$ $r_z = 4,2$	$B=0 (3S - \bar{3S})$ $r_x = r_y = 0$ $r_z = 0$	$B=2 (3S - \bar{3S} - 3S)$ $r_x = r_y = -9,9$ $r_z = 114,3$

структуру $2S - \bar{2S}$ для решения с $k=2, l=2$, когда барионное зарядовое распределение делит все пространство на две аксиально-симметричные области. Две единицы барионного заряда сконцентрированы в одной из них и две единицы отрицательного (антибарионного) заряда — в другой. Вычисленные среднеквадратичные радиусы

Рис. 3. Распределение барионного заряда в (x, z) -плоскости для решения, задаваемого числами n, k, l

распределений барионного заряда обнаруживают большое различие в форме получаемых стационарных конфигураций. Некоторые средние квадраты радиусов отрицательны. Очевидно, только превалирование отрицательного, обязанного антисолитонам, барионного заряда может приводить к таким значениям.

На рис. 4, 5 представлены более детально результаты, полученные в [59] для плотности распределения барионного заряда в (x, z) -плоскости, и «трехмерная» картина того же распределения для дибариона. Согласно рис. 4, пик в распределении барионной плотности лежит около $\rho = \sqrt{x^2 - y^2} \approx 1,5/F_{\pi e}$, $z=0$. Решение с $k=2, l=1$ имеет тороидальную структуру, как было отмечено в [36].

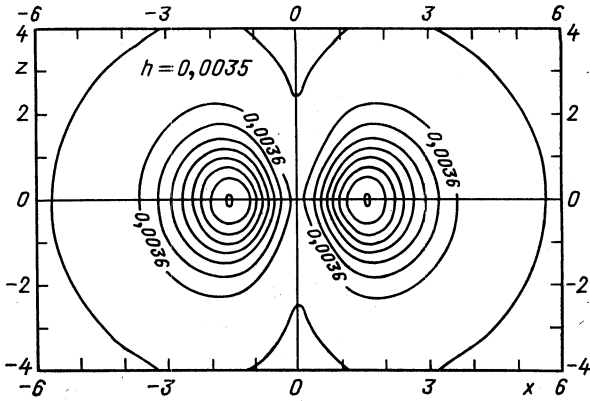


Рис. 4. Линии равного значения плотности распределения барионного числа в (x, z) -плоскости для двухскирмионной конфигурации. Интервал между линиями $h = 0,0035$

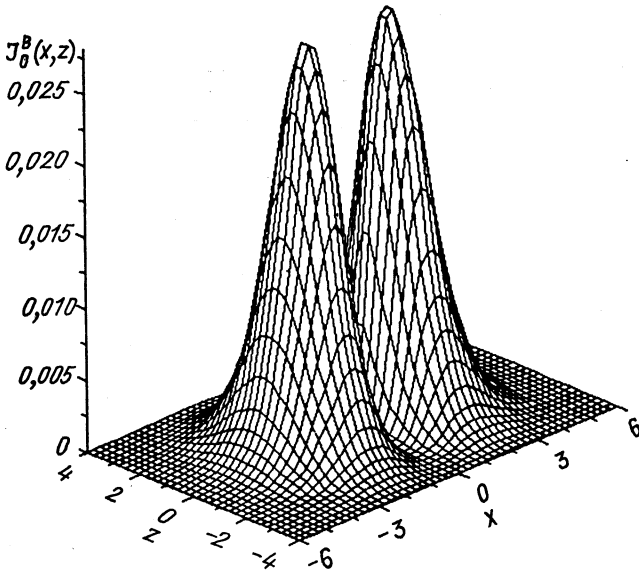


Рис. 5. «Трехмерная» картина распределения плотности барионного числа двухскирмионной конфигурации

На рис. 6, 7 показаны линии, соответствующие постоянным значениям плотности барионного заряда, и «трехмерная» картина плотности барионного заряда для $S - \bar{S} - S$ -скирмионов, что дает более конкретное представление о таком, уже существенно более сложном объекте. Очевидно, этот солитон уже не имеет простой тороподобной

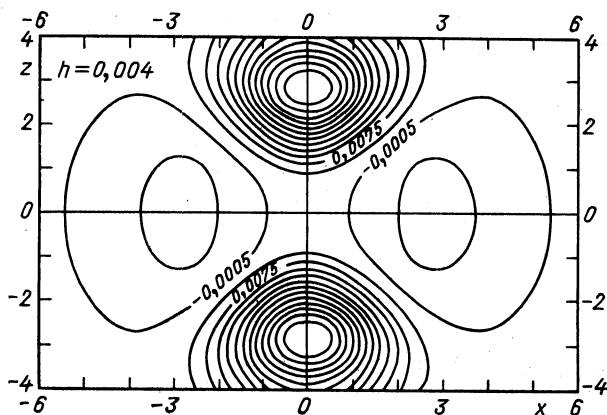


Рис. 6. То же, что и на рис. 4, для $S - \bar{S} - S$ -конфигурации скирмионов. Интервал между линиями $h = 0,004$

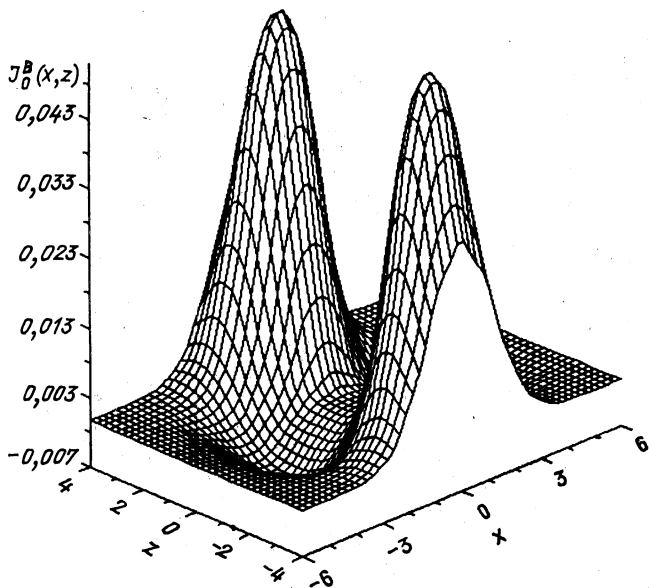


Рис. 7. То же, что и на рис. 5, для $S - \bar{S} - S$ -конфигурации скирмионов

структуры. Только один из скирмионов подструктуры этого объекта представляет собой диффузный тор (с $B = -1$), а два других не являются таковыми. Можно заключить также (см. рис. 3), что $B = 0$, $l = 4$ -солитоны состоят из одного тороидального скирмиона, одного тороидального антискирмиона и скирмион-антискирмионной пары нетороидальной формы, локализованной в окрестности z -оси.

Здесь уместно указать, что квантовые состояния $S - \bar{S} - S$ -типа могли бы проявляться экспериментально как компаунд-ядерные состояния во взаимодействиях остановившихся антипротонов с дейтронами. Таким образом, появляется возможность теоретически включить антинуклоны в структуру компаунд-состояний на равных основаниях с нуклонами.

Массы классических солитонов. Отметим здесь, что когда мы исследуем мультискирмионные конфигурации, мы, вообще говоря, имеем дело не только с классически стабильными конфигурациями (распад которых на два или больше скирмионов запрещен энергетически), но также с классически нестабильными. Это связано с тем очевидным обстоятельством, что классически нестабильные солитоны могут стать стабильными объектами, благодаря учету квантовых флуктуаций. (Аналогичную ситуацию мы имеем в теории атома водорода.)

Числа, представленные в табл. 2, соответствуют нашим расчетам

Таблица 2. Массы классических солитонов [59] в единицах $\pi F_{\pi}/e$

k	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$
1	11,605	26,358	46,332	71,169
2	22,458	45,536	73,533	106,61
3	34,585	66,701	103,08	144,32
4	47,675	89,310	134,45	
5	61,569	113,12		

в кирально-симметричном пределе (масса пиона $m_{\pi} = 0$). Вариационный расчет с учетом нарушающего киральную симметрию члена

$$\mathcal{L}_{\pi} = -\frac{F_{\pi}^2 m_{\pi}^2}{8} \text{Tr}(1 - U), \quad (43)$$

который учитывает ненулевую массу π -мезона ($m_{\pi} = 139$ МэВ), позволяет сравнить эти результаты с результатами, полученными прямым численным методом [60] («методом шапок»), см. также табл. 3. Сравнение показывает, что значения, полученные в работах [41] и [61], совпадают с хорошей точностью. Так, вариационный расчет, использующий обобщенный анзац (15) с постоянными $F_{\pi} = 108$ МэВ

Таблица 3. Свойства классических конфигураций [60] с $B=2, 3$ и 4

B	M , МэВ	R_B^2 , фм ²	Q_B , фм ²	$\langle Z_M \rangle$, фм	$\langle Z_B \rangle$, фм
2	1656,0	0,884	0,084	0,355	0,303
3	2523,5	1,356	0,187	0,356	0,295
4	3446,8	1,930	0,308	0,355	0,287

и $e = 4,84$, дает 1670 МэВ для дискриминионной массы, что надо сравнивать с 1660 МэВ из [61]. Значения масс для других скирмионов, взятые из [44] и [61], также удовлетворительно согласуются друг с другом: 3-скирмион $M = 2580$ и 2530 МэВ, 4-скирмион — $M_4 = 3572$ и 3452 МэВ, 5-скирмион — $M_5 = 4635$ и 4420 МэВ. Некоторое расхождение в значениях расчетных масс для мультискирмионов дает возможность оценить погрешности, вероятно, вводимые вариационным анзацем. Погрешности 5 % для $B \leq 5$.

Для оценки и контроля погрешности в численных расчетах может быть использован один из вариантов теоремы вириала. Согласно этой теореме, для рассматриваемой задачи величина

$$\Delta = \gamma \{ (A_2 - A_1) a + bB - C \} \quad (44)$$

должна быть нулевой. Здесь A_1 , A_2 и C равны значениям следующих интегралов:

$$A_1 = \frac{1}{4} \int_0^\infty \sin^2 F dx, \quad A_2 = \int_0^\infty (F')^2 \sin^2 F dx, \quad (45)$$

$$C = \frac{1}{2} \int_0^\infty (xF')^2 dx. \quad (46)$$

Для величин Δ было получено значение $|\Delta| = 1$ МэВ для наиболее «трудного» случая ($k = 4$, $l = 3$) [59].

В заключение данного раздела систематизируем основные результаты, представленные в табл. 1 и 2. Получено расширение спектра классических n -мультимарионов до спектра nk -мультискирмионных конфигураций. Так трибарионному состоянию соответствует $k = 3$, $n = 1$, $l = 1$ -член табл. 2 с энергией связи около 5,4 МэВ на барион. Кроме того, возникает новая серия мезоноподобных решений ($nk/2$ -барион $\div nk/2$ -антибарионных конфигураций для четных l). (См., например, $k = 2$, $n = 1$, $l = 2$ -случай, который соответствует два бариона — два антибариона-конфигурации с массой около 3192 МэВ.) Некоторые из полученных таким образом конфигураций являются

классически стабильными объектами, как видно из табл. 2 (они выделены жирным шрифтом). Масса таких объектов меньше суммы масс их барионных составляющих. Классическая энергия связи этих состояний может быть легко получена с помощью табл. 2 для произвольных F_π и e .

В табл. 2 легко обнаруживается почти линейная зависимость классической массы от барионного заряда. Такая зависимость «драматически» отличается от зависимости $M \sim B(B+1)$, которая может быть получена [62] для анзаца Скимра — Виттена.

2. СПЕКТР КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ МУЛЬТИСКИРМИОНОВ

Зададимся целью получить квантовомеханический эффективный гамильтониан в рамках метода коллективных координат. С этой целью введем дыхательные и ротационные степени свободы [41] как коллективные координаты и вычислим энергии связи нижайших квантовых состояний.

Эффективный гамильтониан в терминах коллективных переменных. Опишем наиболее важные шаги, необходимые для получения эффективного гамильтониана. Теперь зависящее от времени киральное поле выберем в виде

$$U(\mathbf{r}, t) = \exp \{i\tau^i I^{ij}(t) N^j (R_{mk}^{-1} x_k) F(xe^{-\lambda})\}, \quad (47)$$

где $R(t)$ и $I(t)$ суть 3×3 -матрицы пространственных и изоспиновых вращений соответственно, а $\lambda(t)$ — зависящий от времени параметр дилатационных преобразований. Подставив (47) в лагранжиан, в котором теперь временные компоненты токов L_0 играют основную роль,

$$L = -M + \frac{F_\pi^2}{16} \int d^3r \operatorname{Tr}(L_0 L_0) + \frac{1}{16e^2} \int \operatorname{Tr}[L_0, L_k]^2 d^3r, \quad (48)$$

проводя каноническое преобразование и определяя сопряженные переменные

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}, \quad T^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\omega}^i}, \quad S_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Omega}_i}, \quad (49)$$

где угловые скорости Ω_i и ω^i для вращений и изовращений даются соотношениями

$$R_{ik}^{-1} \dot{R}_{kj} = \varepsilon_{ijk} \Omega_k, \quad \dot{I}^{ik} (I^{-1})^{kj} = \varepsilon^{ijk} \omega^k, \quad (50)$$

получаем гамильтониан для $k \neq 1$:

$$\hat{H} = M(\lambda) + \frac{\hat{p}^2}{2m(\lambda)} + \frac{\hat{T}^2}{2Q_T(\lambda)} + \frac{\hat{S}^2}{2Q_S(\lambda)} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{Q_T(\lambda)} + \frac{k^2}{Q_S(\lambda)} - \frac{1}{Q(\lambda)} \right\} \hat{T}_3^2. \quad (51)$$

Здесь символы \hat{P} , \hat{T} , \hat{S} интерпретируются теперь как квантовые операторы-импульс, соответствующий вибрациям, изоспин и спин соответственно. Вибрационный потенциал $M(\lambda)$ дается следующим выражением:

$$M(\lambda) = M_2 e^{-\lambda} + M_4 e^{\lambda}. \quad (52)$$

Для инерциальных величин $m(\lambda)$, $Q_T(\lambda)$, $Q_S(\lambda)$, $Q(\lambda)$ имеем:

$$m(\lambda) = \frac{2\pi}{F\pi e^3} \int dx x^4 (F')^2 \times \\ \times \left\{ \frac{e^{-3\lambda}}{2} + e^{-\lambda} \frac{\sin^2 F}{x^2} \int_0^\pi \left[k^2 \frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} + (T')^2 \right] \sin \theta d\theta \right\}; \quad (53)$$

$$Q_T(\lambda) = \frac{\pi}{F\pi e^3} \int_0^\infty dx x^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \times \\ \times \left\{ -e^{-\lambda} \frac{\sin^4 F}{x^2} \left[k^2 \frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} \cos^2 T + (T')^2 \right] + \right. \\ \left. + \sin^2 F \left[\frac{e^{-3\lambda}}{4} + e^{-\lambda} \left((F')^2 + \left[k^2 \frac{\sin^2 T}{\sin \theta} + (T')^2 \right] \frac{\sin^2 F}{x^2} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times (1 + \cos^2 T) \right\}; \quad (54)$$

$$Q_S(\lambda) = \frac{\pi}{F\pi e^3} \int_0^\infty x^2 dx \int_0^\pi \sin \theta d\theta \times \\ \times \left\{ \sin^2 F \left[\frac{e^{-3\lambda}}{4} + e^{-\lambda} \left((F')^2 + \left[k^2 \frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} + (T')^2 \right] \frac{\sin^2 F}{x^2} \right) \right] \times \right. \\ \times \left(k^2 \frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} \cos^2 \theta + (T')^2 \right) - \\ \left. - e^{-\lambda} \frac{\sin^4 F}{x^2} \left(k^4 \frac{\sin^4 T}{\sin^4 \theta} \cos^2 \theta + (T')^4 \right) \right\}; \quad (55)$$

$$Q(\lambda) = \frac{2\pi}{F\pi e^3} \int_0^\infty dx x^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \times \\ \times \left\{ -e^{-\lambda} \frac{\sin^4 F}{x^2} k^2 \frac{\sin^4 T}{\sin^2 \theta} + \sin^2 F \left[\frac{e^{-3\lambda}}{4} + e^{-\lambda} \left((F')^2 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \left[k^2 \frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} + (T')^2 \right] \frac{\sin^2 F}{x^2} \right) \right] \sin^2 T \right\}. \quad (56)$$

Весс-зуминовское действие и статистика. При квантовании систем типа рассматриваемых нами возникает деликатный вопрос о статистике системы. Следует ли систему квантовать как бозонную или фермионную? Чтобы ответ на этот вопрос был однозначным, следует избавиться от лишних симметрий лагранжиана σ -модели [15].

Например, легко проверить, что лагранжиан инвариантен относительно преобразований $x \rightarrow -x, t \rightarrow t$, а также $U \rightarrow U^+$ отдельно. В сильных взаимодействиях, однако, сохраняется комбинированная симметрия $P: x \rightarrow -x; t \rightarrow t; U \rightarrow U^+$. Можно обнаружить и другие «лишние» симметрии. Виттен предложил добавить в уравнения движения член, нечетный относительно $x \rightarrow -x, t \rightarrow t$, сделав тем самым уравнения движения

$$\frac{F^2_{\pi}}{8} \partial^{\mu} L_{\mu} + \lambda \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} L_{\mu} L_{\nu} L_{\rho} L_{\sigma} = 0 \tag{57}$$

неинвариантными относительно обеих лишних симметрий в силу того, что два члена уравнения имеют противоположные четности относительно этих симметрий. Уравнение движения оказывается симметричным только относительно комбинированной симметрии. Кирально-симметричное действие, вариация которого приводит ко второму члену уравнения (58), записывается в виде интеграла по градиенту M пятимерного пространства:

$$\Gamma = \lambda \int_M \varepsilon^{ijklm} \text{Tr} (L_i L_j L_k L_l L_m) d^5x. \tag{58}$$

Виттен [15] замечает, что коэффициент λ в этом выражении должен быть некоторым целым множителем n нормировочного множителя $-i/(240\pi^2)$, имеющего геометрический смысл. Условие квантования множителя λ также имеет геометрическое происхождение. Само действие (58) было введено в [63] и воспроизводит аномалии, проявляющиеся при перенормировках фермионных петель, связанных с внешними аксиальными токами. Действие ответственно, в частности, за $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ -распад. Можно строго показать, что аномалии КХД воспроизводятся, если обсуждаемое целое число n равно числу цветов N_c . В эффективной теории число цветов остается как воспоминание о суммировании по кваркам. Общий результат работы [16] сводится к тому, что для нечетных N_c солитоны должны квантоваться как фермионы и для четных N_c как бозоны, в замечательном соответствии с тем фактом, что N_c кварков с барионным зарядом $1/N_c$ образуют барион. Для доказательства этого утверждения обычно рассматривают адиабатическое вращение солитона в течение большого временного интервала T . Аномальное действие, линейное по временным производным, дает конечный вклад даже для бесконечного интервала, этот вклад кратен π : $\Gamma = N_c \pi$. Таким образом, волновой функционал повернутого на угол 2π солитона отличается фазой $(-1)^{N_c}$ от функционала неповернутого солитона, что и доказывает утверждение. Для $SU(2)$ -вариантов теории аномальное действие равно тождественно нулю, и приходится использовать другие условия [57], заменяющие условия Виттена в $SU(2)$ -варианте модели.

Критерий Финкельштейна-Рубинштейна (сектор $B = 2$). Итак, мы работаем в координатном представлении $|I, R\rangle$ гильбертова про-

странства, в котором векторы состояния $|\Psi\rangle$ представляются волновыми функциями $\Psi(J, R) = \langle J, R | \Psi \rangle$. Более удобный базис дается прямым произведением

$$|TT_3, T_3^{b.f}\rangle |SS_3, S_3^{b.f}\rangle, \quad (59)$$

где третьи проекции изоспина T в лабораторной T_3 и внутренней системе $T_3^{b.f}$ (связанной с телом), а также спина S, S_3 и $S_3^{b.f}$ удовлетворяют условиям

$$\left. \begin{aligned} -T &\leq T_3, T_3^{b.f} \leq T; \\ -S &\leq S_3, S_3^{b.f} \leq S. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Можно показать, что используемый нами анзац приводит к следующей связи между внутренними проекциями:

$$kT_3^{b.f} + S_3^{b.f} = 0. \quad (61)$$

Это условие следует рассматривать как ограничение на выбор волновой функции квантованного скирмиона. Выписанному условию удовлетворяет, например, функция

$$\langle J, R | TT_3, SS_3L \rangle = \frac{\sqrt{(2T+1)(2S+1)}}{2\pi^2} D_{T_3, L}^T(I) D_{S_3, -kL}^S(R), \quad (62)$$

где числа L определяют третьи проекции во внутренней системе координат.

В базисе (59) оператор кинетической (вращательной) энергии диагонализуется, а условие (61) легко удовлетворить, отбросив все состояния, не удовлетворяющие этому критерию, как нефизические. Однако не все остающиеся состояния являются физическими. Следует потребовать выполнимости принципа Паули. С этой целью можно сформулировать еще один критерий [57]. Такой критерий должен, в частности, отбирать такие волновые функции в секторе с $B = 1$, которые меняют знак при повороте на угол 2π , чтобы изолированный скирмион квантовался как фермион. В контексте солитонной физики такой критерий был сформулирован в [57] и [64]. Было отмечено, что 2π -вращение одиночного скирмиона есть замкнутый путь в гильбертовом пространстве конфигураций $|U(\mathbf{r})\rangle$, которые не могут быть деформированы в точку непрерывными преобразованиями. Более того, согласно гомотопии $\pi_4(SU(2)) = Z_2$, есть только два топологически неэквивалентных типа замкнутых путей. К первому типу относятся стягиваемые в точку пути, а нестягиваемые — ко второму. Таким образом, общее правило, согласующееся с тем, что изолированный нуклон должен квантоваться как фермион, может быть сформулировано следующим образом: конечным точкам замкнутого пути в пространстве состояний соответствует относительная фаза $+1$, если путь стягиваем, и (-1) , если нестягиваем. Реализация этого критерия в секторе $B = 2$ [43] приводит к следующему представлению для волновых функций в секторе с барионным числом

$B = 2$. Разрешенные состояния определяются произведением
 1) $|TT_3 0\rangle |SS_3 0\rangle$, (63)
 если $T + S$ нечетно, $L = 0$;

$$2) \frac{1}{\sqrt{2}} [|TT_3 L\rangle |SS_3 - 2L\rangle - (-1)^{T+S} |TT_3 - L\rangle |SS_3 2L\rangle], \quad (64)$$

где

$$L = 1, \dots, \min \{T, S/2\}.$$

Остановимся кратко на операторе четности P , который определяет четность разрешенных состояний. Оператор P определяется преобразованием

$$PU(\mathbf{r}, t)P^{-1} = U^+(-\mathbf{r}, t). \quad (65)$$

Но, как было показано в [58], конфигурация с $B = 2$ удовлетворяет условию

$$U_2^+(-\mathbf{r}) = \tau_3 U(\mathbf{r}) \tau_3. \quad (66)$$

Следовательно, P должен преобразовывать коллективные координаты A, B :

$$PAP^{-1} = A(i\tau_3); PBP^{-1} = B. \quad (67)$$

В последнем равенстве мы использовали $SU(2)$ -матрицы представления группы пространственных и извращений, связанные с нашими координатами I и R соотношениями

$$\left. \begin{aligned} I_{ij} &= \frac{1}{2i} \text{Tr}(\tau_i A \tau_j A^+); \\ R_{ij} &= \frac{1}{2i} \text{Tr}(\tau_i B \tau_j B^+). \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Можно получить, что

$$P = e^{i\pi|\tau_3^b \cdot \mathbf{f}_l} = e^{i\pi L}. \quad (69)$$

Таким образом, четность состояний определяется числом L .

Массы нижайших расчетных солитонных состояний с $B = 2$ представлены в табл. 4 [59]. Расчеты проводились в гармоническом приближении (для потенциала вибраций) со следующими константами: $F_\pi = 108$ МэВ и $e = 4,84$. Этим постоянным соответствует масса нуклона $M_{\text{нукл}} = 931$ МэВ. В табл. 4 представлены результаты, соответствующие нулевой массе пиона.

Если пренебречь вибрационными степенями свободы, ограничившись только ротационными, то получающееся выражение для массового спектра с $B = 2$ ($k = 2, l = 1$) в кирально-симметричном пределе приобретает вид [41]

$$E_{ST,3} \approx \frac{F_\pi}{e} \left\{ 70,55 + \frac{e^4}{2} \left[\frac{S(S+1)}{272,4} + \frac{T(T+1)}{183,0} - \frac{T_3^2}{83,2} \right] \right\} \quad (70)$$

Таблица 4. Рассчитанные энергии для $B=2$ ($k=2, l=1$) состояний с изоспином T , спин-четностью S^P и квантовым числом $n=0$, соответствующим вибрационной моде

T	0	0	1	1	1
S^P	0^+	1^+	0^+	1^+	2^-
$E - 2M_{\text{нукл}}$, МэВ	-214	-172	-154	-118	-53

для произвольных значений F_π и e . Численные факторы в последней формуле представляют собой вычисленные согласно формулам (53)—(56) безразмерные интегралы, определяющие моменты инерции в спиновом и изоспиновом пространствах. Эти моменты инерции, как мы указывали, являются функционалами от решений классических уравнений. Учет явного нарушения киральной симметрии пионным массовым членом приводит к следующей массовой формуле [45]:

$$E = [1674 \text{ МэВ}] + [31 \text{ МэВ}] S(S + 1) + [47 \text{ МэВ}] T(T + 1) - [100 \text{ МэВ}] (T_{\frac{3}{2}}^{b,f})^2 \quad (71)$$

для $F_\pi = 108 \text{ МэВ}$ и $e = 4,84$ и к энергиям связи, представленным в табл. 5. Последнее уравнение предсказывает серию двухнуклонных

Таблица 5. То же, что и в табл. 4, для кирально-несимметричного случая [45]

T	0	0	1	1	1	0
S^P	0^+	1^+	0^+	1^+	2^-	2^+
$E - 2M_{\text{нукл}}$, МэВ	-201,4	-140	-107,8	-46,4	-23,6	-15

состояний с изоспином $T = 1$. Энергии этих состояний существенно выше энергии дейтронного состояния и могут интерпретироваться как резонансы.

В табл. 6 приводятся энергии возбуждений дипротонных состояний естественной четности. В последней строке таблицы приводятся энергии возбуждений, измеренные в [65]. Известная к настоящему времени интерпретация этой серии состояний, проявляющихся в pp -упругих каналах, использует представление о сильной связи с $N\Delta$ -состоянием с выстроенным спином и орбитальным моментом [66].

Таблица 6. Расчетные энергии возбуждений для дипротонных состояний естественной четности. $\Delta E_{\text{эксп}}$ соответствует приложению кандидата в резонансное состояние согласно [65]

Состояние	$1D_2$	$3F_3$	$1G_4$	$3H_5$	$1I_6$
$\Delta E_{\text{возб}}$, МэВ	218	304	650	860	1310
$\Delta E_{\text{эксп}}$, МэВ	250	310	540	810	1010

Несколько более общее представление о форме решения в секторе $B = 2$ было использовано в [43]. Киральный угол $F = F(\rho, z)$ и функция $T(\rho, z)$ были выбраны функциями независимых переменных (ρ, z) цилиндрической системы координат. Полученные в [43] функции $T = T(\rho, z)$ мало отличаются от использованного в [44, 59] анзаца $T = T(\text{arctg } z/\rho)$. В табл. 7 приведен спектр масс для ди-

Таблица 7. Спектр масс в секторе $B=2$ из [43]

Классификация	T	S	L	Четность	Теория	Эксперимент
Дейтрон (3S_1)	0	1	0	+	1720	1876
NN (1S_0)	1	0	0	+	1755	1880
? (3P_2)	1	2	1	-	1838	
$N\Delta$ (5S_2)	1	2	0	+	1938	
$N\Delta$ (3S_1)	2	1	0	+	2007	
? (5P_3)	1	3	1	-	2022	
$\Delta\Delta$ (7S_3)	0	3	0	+	2026	
? (3P_2)	2	2	1	-	2030	
? (5D_4)	2	4	2	+	2159	
? (5P_3)	2	3	1	-	2213	
$\Delta\Delta$ (1S_0)	3	0	0	+	2233	

бариона в физических единицах, полученный в [43] для $F_\pi = 108$ МэВ, $e = 4,84$ и $m_\pi/F_\pi e = 0,263$. Вибрации не учитывались. Представленные в [60] результаты для спектра дибарионных состояний согласуются с приведенными результатами из [43] с большей точностью.

Нужно подчеркнуть, что состояние $|T = 2, S = 0\rangle$ имеет массу 1940 МэВ. Это должно означать, что оно стабильно относительно сильных взаимодействий, так как не может распадаться на два нуклона (сохранение изоспина) или на два нуклона и пион (сохранение энергии). Однако следует еще раз подчеркнуть, что этот результат очень чувствителен к выбранным значениям параметров модели ($F_\pi = 108$ МэВ, $e = 4,84$ без вибраций), фиксирующих массы нуклона и Δ -изобары.

Можно отметить, что рассчитанный массовый спектр предсказывает, что дейтрон и 1S_0 -состояние являются стабильными относительно распада на два нуклона, с энергией связи 158 и 123 МэВ соответственно. (Как известно, только первое из них является связанным.) Расчетное значение разности между уровнями также отличается от экспериментального почти на порядок. Возможно, такое разногласие с экспериментом может быть преодолено уходом от полуклассического приближения. Как было указано в [43], существует замечательное соответствие между низжайшими состояниями с $T_{3,f}^b = 0$ ($L = 0$) и состояниями, ожидающимися в 50-мерном неприводном представлении $SU(4)$ спин-ароматической группы в нерелятивистской кварковой модели. Эта классификация указана в табл. 7, где дана также и физическая интерпретация таких шестикварковых состояний. Аналогичные состояния появляются и в сферических моделях кварковых мешков.

Что касается более высоких состояний с $L > 0$, то такое соответствие отсутствует. Эта трудность обязана условию $T \geq |L|$, $S \geq |2L|$, поскольку это свойство не характерно ни для какого $SU(2)$ -представления. Отсюда можно заключить, что полученный спектр дибарионных резонансов в этой модели содержит состояния, отсутствующие в модели кварковых мешков.

Указанная в таблице спектроскопическая ${}^{2S+1}L$ -классификация имеет, конечно, условный смысл, поскольку в данной модели нуклоны как составляющие ядерных состояний не выделяются. Следовательно, имея общий спин, мы не делим его на внутренний спин нуклонов и относительный орбитальный угловой момент.

Таблица 8. Спектр низжайших мультибарионных состояний с $B=3; 4$ ($m_\pi \neq 0$) [59]

B	3	3	4	4	4
T	1/2	3/2	0	0	1
S	3/2	3/2	0	1	0
L	1/2	1/2	0	0	0
$E - B \cdot M_{\text{нукл}}$, МэВ	-268,0	-210,5	-324,0	-312,7	-294,5

Наконец, в табл. 8 представлен полученный в [59] спектр низжайших состояний в секторах $B = 3$ и $B = 4$ с использованием вариационного анзаца (47), учитывающего дыхательную моду.

В табл. 9 более подробно представлены вклады вращательных и вибрационных степеней свободы в массу трибарионнов в таком подходе.

Таблица 9. Спектр трибарионов

λ_{\min}	T	S	T_3	E_{tot}	$\hbar\omega_{\text{vibr}}$
0	1/2	3/2	1/2	2461	
-0,027	1/2	3/2	1/2	2460	127
0	3/2	3/2	1/2	2526	
-0,071	3/2	3/2	1/2	2519	125
0	5/2	3/2	1/2	2633	
-0,133	5/2	3/2	1/2	2607	122

Легко видеть, что $\lambda = 0$ не является стабильной точкой (минимумом эффективного потенциала), когда принимаются во внимание вращения скирмионов. Следовательно, λ_{\min} , соответствующее минимуму, следует находить до решения уравнения Шредингера. В расчетах [59] показано, что роль такой процедуры численно мала для низколежащих состояний, исключая однуклонный случай. В табл. 9 даны значения λ_{\min} , вращательной энергии E_{Tot} (включает значение классической массы) и энергии вибрационного фона $\hbar\omega_{\text{vibr}}$ для $F_{\pi} = 108$ МэВ и $e = 4,84$. Значения $\lambda_{\min} = 0$ соответствуют расчетам, в которых минимизация эффективного потенциала по масштабному параметру λ не проводилась.

Итак, все состояния, которые могли бы соответствовать состояниям легких ядер, имеют очень большую энергию связи. Возможно все же, что полученные ядерно-подобные состояния не должны сопоставляться с ядерными до тех пор, пока все важные квантовые поправки (или эффекты) будут учтены в их структуре.

Обнаруживается также такое замечательное явление — некоторые состояния, не являющиеся стабильными на классическом уровне, становятся таковыми на квантовом. Так, например, классически нестабильное состояние $k = 4$, $l = 1$, имеющее энергию $+88$ МэВ над порогом развала, становится стабильным после учета квантовых поправок к массе состояния (см. табл. 2 и 8).

Несколько замечаний о существовании нуклон-антинуклонных состояний. Случаю $l = 2$ соответствуют согласно формуле (42) $B = 0$ -состояния. Некоторые из этих состояний, будучи проквантованными, могли бы рассматриваться как нуклон-антинуклонные связанные состояния. Классическая масса таких состояний порядка двух нуклонных масс ($k = 2$). Следовательно, можно ожидать, что если такие состояния будут стабильными после включения кванто-

вых поправок, энергия которых будет меньше двух нуклонных масс. То же должно быть справедливым и для других состояний с $l = 2$.

Согласно расчетам $T = S = 0$ -состояний, конфигурации, которые были стабильными до включения квантовых поправок, остались стабильными и после включения дыхательной моды. Состояние $k = 1, l = 2$, которое было нестабильным до проведения процедуры квантования

$[\Delta M_{\text{нл}}(k = 1, l = 2) - 2M_{\text{нл}}(k = 1, l = 1) = 220,7 \text{ МэВ}]$, все еще остается нестабильным ($\Delta_{\text{нв}} = 56,7 \text{ МэВ}$). Состояния же с $k = 2, 3, 4, l = 2$ стабильны. Некоторые из этих состояний могли бы проявиться как компаунд-состояния в реакциях с остановившимися антинуклонами. Здесь уместно отметить, что впервые $N - \bar{N}$ -состояния в модели Скирма рассматривались в [67] в другом подходе.

Странные мультискирмионы. В связи с развитием ускорительной техники, построением каонных и адронных фабрик, теоретически может быть поставлен вопрос об экспериментальном обнаружении мультибарионов с большой странностью. Они могли бы рождаться в реакциях с обменом странностью с участием каонов и гиперонов, а также в столкновениях тяжелых ионов. В связи с этим в [68] было предложено рассмотреть солитоны, соответствующие $SO(3)$ -подгруппе $SU(3)$ -группы. В [69] в таком подходе было установлено, что существует тетралямбда-состояние $B = -S = 4$ (S — странность), стабильное относительно развала на два диламба-состояния. В последней работе использовался анзац

$$U = \exp\left(i \frac{2}{3} G\right) + i \sin F \exp\left(-i \frac{1}{3} G\right) \Lambda \cdot N + \\ + \left[\cos F \exp\left(-i \frac{1}{3} G\right) - \exp\left(i \frac{2}{3} G\right)\right] \Lambda_i \Lambda_k N_i N_k, \quad (72)$$

где $\Lambda_x = \lambda_7$, $\Lambda_y = -\lambda_5$, $\Lambda_z = \lambda_2$ — матрицы Гелл-Мана $SU(3)$ -группы. Вектор N определяется аналогично (9). Для рассмотренных мультискирмионов барионное число B не зависит от второй функции профиля G .

Условие $(1 - \cos F \cdot \cos G) = 0$, которое должно выполняться в топологическом центре скирмиона, приводит к определенным значениям обеих функций профиля в этой точке. Весс-зуминовский член равен нулю для таких $SO(3)$ -скирмионов [70]. Это приводит к нулевому значению гиперзаряда $Y = 0$ и к странности $S = -B$, где

$$B = 2 \frac{k}{\pi} [F(0) - F(\infty)]. \quad (73)$$

В кирально-симметричном пределе тетралямбда со странностью $S = -4$ является стабильной относительно развала на два диламба

$$2M_2 - M_4 \approx 2,5 F_{\pi}/e. \quad (74)$$

Включение массовых членов псевдоскаляров, явно нарушающее киральную симметрию, вообще говоря, может привести к несвязности системы. Так, для $F_\pi = 186$ МэВ и $e = 6,08$ было получено [68] $M_2 \approx 2379$ МэВ, $2M_2 - M_4 \approx 28$ МэВ. Для $F_\pi = 108$ МэВ и $e = 4,84$ $2M_2 - M_4 \approx 0$. Как указано в [60], состояния с $k \geq 3$, $B \geq 6$ уже нестабильны относительно распада на дилемба-состояния.

Был рассмотрен также вариант более прямого обобщения $SU(2)$ до $SU(3)$ -мультиквармионов. В [60] приведены результаты исследования дибарионов, соответствующих нижайшим по энергии мультиплетам (10-, 27-, 35- и 28-плетам), соответствующие следующим значениям оператора Казимира $O_3^{(q)}$ представления

$$G(SU(3)) = \frac{1}{3} [p^2 + q^2 + pq + 3(p+q)] = 6, 8, 12, 18. \quad (75)$$

Там же представлены результаты для 35-плета трибарионов и 28-плета тетрабарионов. Как правило, энергия связи странных малобарионных систем возрастает с ростом странности внутри данного мультиплета.

Здесь следует отметить, что массы барионного октета и декуплета не воспроизводятся обсуждаемым $SU(3)$ -обобщением, благодаря очень большому вкладу массового члена [71]. Величина F_π , необходимая для воспроизведения масс гиперонов, оказывается очень малой. Описание масс барионного октета и декуплета более успешно в варианте $SU(3)$ -модели в [72]. Существование странных дибарионов теоретически обнаруживается в этой модели.

3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ФОРМФАКТОРЫ

Описанные выше состояния легчайших ядер весьма отдаленно напоминают состояния, с которыми мы привыкли иметь дело в традиционной теоретической ядерной физике ядер как систем взаимодействующих нуклонов. Так, квантовый солитон с топзарядом два, с квантовыми числами дейтрона имеет тороподобную структуру, совсем не просматривающуюся в традиционных представлениях об этом легчайшем ядре. Представление о легких ядрах как квантовых солитонах кирального поля можно подвергнуть различным испытаниям. Так, например, расчетные электромагнитные характеристики должны воспроизводить значения, даваемые экспериментально, или по порядку величины соответствовать значениям известных моделей этих ядер. Тороидальная структура распределения барионного заряда и соответствующее распределение электрического заряда могли бы вообще разрушить какое-либо согласие с экспериментом. Вот почему были сделаны первые работы по расчету электромагнитных характеристик дейтрона в такой модели. При этом, конечно, нельзя надеяться на численное воспроизведение электромагнитных характеристик с погрешностью, не превышающей 30 %, как это

было для нуклона в оригинальной модели Скирма, но лишь на качественное воспроизведение. Тороидальная структура легчайших ядер могла бы, в принципе, проявиться в каком-либо необычном поведении формфакторов ядер, что, конечно, не свидетельствовало бы в пользу модели киральных солитонов.

Явный вид электромагнитного тока модели Скирма был уже опробован в расчетах электромагнитных характеристик нуклонных состояний [74, 75]. Те же операторы используются и в секторах с $B \geq 1$. Подстановка анзаца (47) в выражение

$$J_\mu(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} B_\mu(\mathbf{x}) + J_\mu^{V_3}(\mathbf{x}), \quad (76)$$

где $B_\mu(\mathbf{x})/2$ — изоскалярная часть электромагнитного тока, а $J_\mu^{V_3}(\mathbf{x})$ — третья компонента изовекторного тока, определяют оператор плотности электромагнитного тока $J_\mu(\mathbf{x})$. Усреднение получающегося оператора по состояниям, описанным в предыдущих разделах, определяет, в свою очередь, все электромагнитные наблюдаемые этих состояний. Так, например, кулоновский $F_C(q^2)$ - и квадрупольный $F_Q(q^2)$ -формфакторы дейтрона в брейтовской системе определяются следующим матричным элементом [76]:

$$\begin{aligned} \langle dS'_3 \mathbf{p}' | J^0(\mathbf{r}=0) dS_3 \mathbf{p} \rangle &= F_C(q^2) \delta_{S'_3 S_3} + \\ &+ \frac{1}{6M_d^2} F_Q(q^2) U_{S'_3 S_3} (3q^a q^b - q^2 \delta^{ab}) U_{b S_3}^+. \end{aligned} \quad (77)$$

Здесь передаваемый импульс $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$, $q = |\mathbf{q}|$, M_d — масса дейтрона, а U_{im} — унитарная матрица, связывающая прямоугольный и сферический базисы. Формфакторы равны соответственно интегралам:

$$F_C(q^2) = \frac{1}{2} \int d^3r j_0(qr) B_0(\mathbf{r}) \quad (78)$$

и

$$\frac{1}{M_d^2} F_Q(q^2) = \frac{3}{2} \frac{1}{q^2} \int d^3r j_2(qr) B_0(\mathbf{r}) \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{r^2}. \quad (79)$$

Для малых передач $q^2 \rightarrow 0$ характерно следующее поведение формфакторов:

$$F_C(q^2) \rightarrow 1 - \frac{1}{6} q^2 \langle r^2 \rangle_d \quad (80)$$

и

$$F_Q(0) = M_d^2 Q, \quad (81)$$

где $\langle r^2 \rangle_d$ и Q суть квадрат зарядного радиуса и квадрупольный момент:

$$\langle r^2 \rangle_d = \frac{1}{2} \int d^3r r r^2 B^0(\mathbf{r}); \quad (82)$$

$$Q = \frac{1}{10} \int d^3r (x^2 + y^2 - 2z^2) B^0(\mathbf{r}). \quad (83)$$

В расчетах, проведенных в [76], используется следующий набор параметров: $F_\pi = 108$ МэВ, $e = 4,84$, $m_\pi/F_\pi e = 0,263$. Этот набор оптимизирует предсказания статических свойств нуклона (без учета вибрационных степеней свободы) и, очевидно, не соответствует вакуумному сектору, где постоянная пионного распада имеет почти в 2 раза большее значение $F_\pi = 186$ МэВ, согласно нормировке кинетической части лагранжиана. Статические электромагнитные свойства дейтрона с этими параметрами суть следующие [43]:

$$\langle r^2 \rangle_d^{1/2} = 0,92 \text{ фм}; Q = 0,082 \text{ фм}^2;$$

$$\mu_d = 0,74 \mu_N; \mu_{d \rightarrow p} = -4,4 \mu_N.$$

Последние два числа соответствуют магнитному моменту дейтрона и переходному магнитному моменту для реакции фоторазвала дейтрона в единицах ядерных магнетонов μ_N . Эти величины определяются уже матричными элементами пространственной части электромагнитного тока. Причем переходный момент определяется изовекторной его частью. Полученные значения согласуются по знаку и порядку с экспериментально измеренными для дейтрона. Оказалось, тороидальная структура солитона не приводит к какому-то необыкновенному поведению формфакторов. Качественно поведение этих формфакторов действительно подобно поведению в общепринятых моделях дейтрона, хотя количественное совпадение с экспериментальными данными не столь впечатляющее.

На рис. 8 мы приводим результаты наших расчетов для кулоновского F_C и квадрупольного F_Q формфакторов состояния с дейтронными квантовыми числами в кирально-симметричном пределе ($m_\pi = 0$, $F_\pi = 129$ МэВ и $e = 5,45$) и в случае нарушения симметрии ($m_\pi = 139$ МэВ, $F_\pi = 108$ МэВ и $e = 4,84$). Однако предсказания в этом оригинальном варианте модели Скирма значительно отличаются от экспериментальных. Модельные формфакторы падают слишком медленно с ростом передаваемого импульса, лишь качественно воспроизводят поведение формфакторов.

Следует подчеркнуть здесь, что в традиционном подходе формфакторы дейтрона вычисляются совсем иначе. Так, например, в импульсном приближении кулоновский формфактор дейтрона записы-

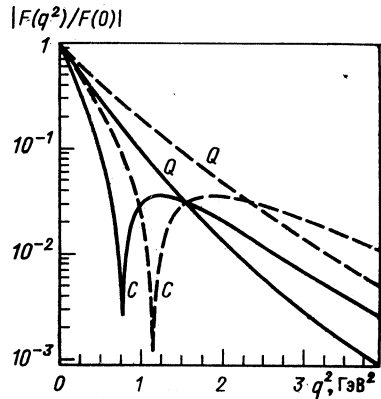


Рис. 8. Нормированные на единицу при $q^2 = 0$ зарядовый и квадрупольный формфакторы состояния с квантовыми числами дейтрона:

сплошная кривая: $F_\pi = 108$ МэВ; $e = 4,84$; $m_\pi = 139$ МэВ
пунктир: $F_\pi = 129$ МэВ; $e = 5,45$; $m_\pi = 0$

ваются следующим образом:

$$F_C(q^2) = [G_E^p(q^2) + G_E^n(q^2)] \int_0^\infty dr [u^2(r) + w^2(r)] j_0(qr/2). \quad (84)$$

В этом выражении G_E^p и G_E^n — электрические формфакторы протона и нейтрона, а $u(r)$ и $w(r)$ — s - и d -компоненты радиальной волновой функции дейтрона. Обращает на себя внимание тот факт, что в последней формуле дейтронный формфактор определяется фурье-преобразованием как внутренней волновой функции, так и внутринуклонных зарядовых распределений. В модели Скирма эти два распределения не разделяются, а формфактор задан фурье-образом барионного распределения.

Более близок к традиционному подход, использованный в [77]. Авторы этой работы используют анзац произведения

$$A_1 U_1(\mathbf{r} - \mathbf{x}_1) A_1^+ A_2 U_1(\mathbf{r} - \mathbf{x}_2) A_2^+, \quad (85)$$

где U_1 — решение в секторе $B = 1$, а соответствующая функция кирального угла $F(r)$ фитируется по изоскалярному нуклонному формфактору.

Подстановка этого представления в выражение для электромагнитного тока приводит к разложению

$$J^\mu(\mathbf{r}) = J_1^\mu(\mathbf{r} - \mathbf{x}_1, A_1) + J_2^\mu(\mathbf{r} - \mathbf{x}_2, A_2) + J_{\text{ex}}^\mu(\mathbf{r}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, A_1, A_2). \quad (86)$$

Первые два члена, очевидно, соответствуют импульсному приближению. Последний член задает вклад мезонных обменных токов, как его интерпретирует модель Скирма. Чтобы рассчитать этот вклад в электромагнитные формфакторы, следует усреднить этот член по волновым функциям от $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ потенциального подхода (например, по волновым функциям в парижском потенциале). Появившиеся в (86) $SU(2)$ -матрицы ориентаций солитонов в изоспиновом пространстве требуют усреднения по нуклонным волновым функциям модели Скирма. И хотя в таком «гибридном» подходе получаются разумные результаты для формфакторов, он не является совсем последовательным в модели Скирма, по крайней мере, в настоящее время. Не следует исключать все же возможность строгого обоснования такого подхода в будущем.

Представляется интересным рассчитать тензор поляризации P [78], определяемый следующей комбинацией кулоновского и квадрупольного формфакторов:

$$P(q) = \frac{\sqrt{2}}{3} q^2 F_Q(q) \frac{F_C(q) + \frac{1}{12} q^2 F_Q(q)}{F_C^2(q) + \frac{1}{18} q^4 F_Q^2(q)}, \quad (87)$$

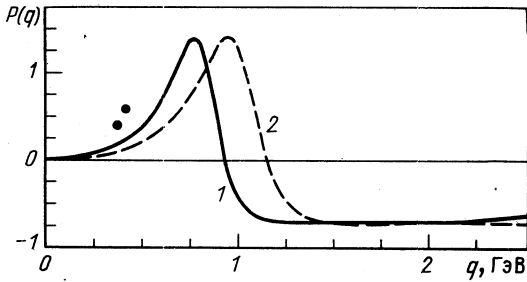


Рис. 9. Тензор поляризации дейтрона. Экспериментальные данные (точки) из [78]:
 1 — $F_{\pi} = 108$ МэВ; $e = 4,84$; $m_{\pi} = 139$ МэВ;
 2 — $F_{\pi} = 129$ МэВ; $e = 5,45$; $m_{\pi} = 139$ МэВ

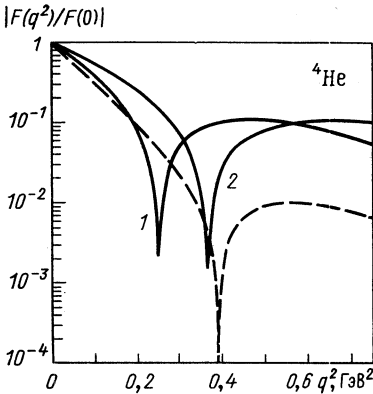


Рис. 10. Кулоновский формфактор ${}^4\text{He}$:
 1 — $F_{\pi} = 108$ МэВ, $e = 4,87$, $m_{\pi} = 139$ МэВ;
 2 — $F_{\pi} = 129$ МэВ, $e = 5,45$, $m_{\pi} = 0$; штриховая линия соответствует фиту экспериментальных данных [80]

Результат такого расчета дан на рис. 9. Этот расчет носит качественный, но предсказательный характер. Ограниченный объем известных нам экспериментальных данных также представлен на рис. 9. Наша кривая ведет себя подобно приведенной в [79] кривой в гибридной модели дейтрона, включающей кварковые степени свободы и мезонные обменные токи.

Несколько больший оптимизм внушает кулоновский формфактор, представленный на рис. 10.

Векторные мезоны. Хотелось бы отметить, что включение векторных мезонов может улучшить согласие расчетных электромагнитных характеристик малобарионных систем с экспериментальными. Один из способов введения векторных мезонных полей основан на использовании скрытой $SU(2)$ -симметрии нелинейной σ -модели [22]. Скрытая симметрия вскрывается, если представить солитонное поле как произведение двух $SU(2)$ левого ξ_L и правого ξ_R полей:

$$U(\mathbf{x}) = \xi_L^{\dagger}(\mathbf{x}) \xi_R(\mathbf{x}). \quad (88)$$

Теперь можно доказать, что лагранжиан инвариантен относительно локальных калибровочных преобразований

$$\xi_{L,R} \Rightarrow h(\mathbf{x}) \xi_{L,R}, \quad (89)$$

где $h(\mathbf{x})$ — унитарное скалярное поле.

Калибровочные бозоны, ассоциируемые с этой симметрией, идентифицируются с ρ -мезонами, которым сопоставляются следующие полевые операторы:

$$\tau \rho_\mu = \frac{1}{ig} (\partial_\mu \xi_L \xi_L^\dagger + \partial_\mu \xi_R \xi_R^\dagger), \quad (90)$$

в чем можно убедиться, заменив производные ∂_μ ковариантными:

$$D_\mu = \partial_\mu - \frac{g}{2} (\tau \cdot \rho_\mu + \omega_\mu). \quad (91)$$

В последнем равенстве ω_μ соответствуют ω -мезонному полю. Результирующий лагранжиан имеет форму лагранжиана Вайнберга [81], а калибровочная постоянная может быть отождествлена с постоянной $\rho \rightarrow 2\pi$ -распада.

Включение электромагнитного взаимодействия проводится с помощью удлинения ковариантной производной в эффективном лагранжиане

$$D_\mu \xi = (\partial_\mu - iV_\mu) \xi + ieA_\mu \xi Q, \quad (92)$$

где A_μ — фотонное поле, а Q — зарядовый оператор кварков.

В рассматриваемом подходе один из вариантов приводит к модели доминантности векторных мезонов (прямая связь фотонов с полем пионов пропадает). В результате для изоскалярного тока будем иметь

$$J_{I=0}^\mu = -\frac{m_\omega^2}{3g} \omega_\mu(x) \quad (93)$$

(m_ω — масса ω -мезона) и для изоскалярного кулоновского формфактора можно получить [82]

$$G_{I=0}^C(q^2) = -\frac{m_\omega^2}{3g} \int d^3r e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \omega_0(r) = \frac{1}{2} \frac{m_\omega^2}{m_\omega^2 + q^2} \int d^3r B_0(r) j_0(qr). \quad (94)$$

В последнем интеграле нетрудно узнать формфактор, с которым мы уже встречались в оригинальной модели Скирма. Отсюда для зарядового радиуса будем иметь

$$\langle r^2 \rangle_{I=0} = -12 \frac{dG_{I=0}^C(q^2)}{dq^2} \Big|_{q^2=0} = \frac{6}{m_\omega^2} + \langle r_B^2 \rangle. \quad (95)$$

Аналогично изовекторный электромагнитный формфактор имеет подобный фактор $(q^2 + m_\rho^2)^{-1}$.

Приведенные в табл. 10 значения статических характеристик для нуклонов, получаемые в такой модели, дают некоторые основания считать, что и расчет этих величин в схеме с векторными мезонами для малобарионных систем приведет к более реалистичным значениям.

О других схемах включения векторных мезонов см. [23—24, 83—87].

Таблица 10. Статические электромагнитные свойства нуклонов [26]

Параметр	Модель	Полная модель	Эксперимент
$\langle r_E^2 \rangle_p^{1/2}$, фМ	0,93	0,97	$0,86 \pm 0,01$
$\langle r_E^2 \rangle_n^{1/2}$, фМ	-0,22	-0,25	$-0,119 \pm 0,001$
$\langle r_M^2 \rangle_p^{1/2}$, фМ	0,84	0,94	$0,86 \pm 0,06$
$\langle r_M^2 \rangle_n^{1/2}$, фМ	0,85	0,94	$0,88 \pm 0,07$
μ_p	3,36	2,77	2,79
μ_n	-2,57	-1,88	-1,91
$ \mu_p/\mu_n $	1,31	1,51	1,46

4. МУЛЬТИБАРИОНЫ И СКАЛЯРНЫЕ ПОЛЯ

Для полноты данного обзора остановимся кратко на другом возможном варианте возникновения мультибарионных состояний в солитонных моделях. Этот вариант предполагает использование эффективного лагранжиана мезонных полей, которые ближе к линейной σ -модели и вводит в рассмотрение дополнительное скалярное поле.

Введение скалярного поля σ в эффективный лагранжиан может иметь различную мотивацию. Так, например, в [88] исследовались не зависящие от изоспина компоненты спин-орбитального взаимодействия. В модели Скирма они имеют правильный (отрицательный) знак в присутствии членов шестого порядка по производным типа

$$\mathcal{L}_6 = -\varepsilon^2 B_\mu B^\mu, \quad (96)$$

где B_μ — аномальный барионный ток модели.

Однако этого оказывается недостаточно, чтобы обеспечить требуемое значение отрицательной части спин-орбитального взаимодействия. Необходимая величина, однако, достигается автоматически, если ввести дополнительное скалярное поле по схеме, предложенной в [17, 18], а также в [19, 20]. Введение скалярного поля позволяет воспроизвести еще одну характерную черту КХД лагранжиана. Речь идет о конформной аномалии или о ненулевом значении следа тензора энергии-импульса в КХД. Это явление может быть передано в рамках метода эффективных лагранжианов ценой введения дилатонного поля. Введение скаляра приводит также, как было показано в [84, 89, 90], к требуемому сильному притяжению в промежуточной области расстояний нуклон-нуклонного потенциала.

След тензора энергии-импульса КХД и соответственно дивергенция дилатационного тока не равны нулю (см., например, [91, 92]):

$$\partial_\mu j_D^\mu = \theta_\mu^\mu = \frac{\beta(g_s)}{g_s} \text{Tr}(G_{\mu\nu}^2) + [1 + \gamma(g_s)] \sum_{i=1}^{n_f} m_i \bar{q}_i q_i. \quad (97)$$

Здесь j_D^μ — дилатационный ток, соответствующий масштабным преобразованиям; θ_μ^μ — канонический тензор энергии-импульса; g_s — бегущая константа связи; $\beta(g_s)$ — КХД β -функция. В $SU(2)$ -секторе можно пренебречь вкладом кварковых массовых членов и построить эффективную теорию, передающую глюодинамику в терминах скалярных полей.

В [93] было предположено, что существует параметр порядка: $H(x) = \theta_\mu^\mu$. Этот параметр порядка было предложено отождествлять со скалярными глюоболом.

С точностью до членов второго порядка по производным от H лагранжиан \mathcal{L}_H однозначно определяется и равен

$$\mathcal{L}_H = \frac{1}{2} \alpha H^{-3/2} (\partial_\mu H)^2 - \frac{1}{4} H \ln \left[\frac{H}{\Lambda^4} \right], \quad (98)$$

где α — некоторый безразмерный параметр порядка, а Λ — масштаб КХД. Этот потенциал имеет минимум при $\langle H \rangle = \Lambda^4/e$, давая отрицательную плотность энергии вакуума $\langle H \rangle/4$. Пузырек в таком вакууме увеличил бы полную энергию, но был бы нестабильным. Однако оказалось, что такой пузырек может стабилизироваться взаимодействующим с ним киральным солитоном. В этом и состоит еще одна идея возможного устройства барионов и мультибарионов.

Аналогичной структурой обладают и решения, получающиеся в модели поля дилатонов-кваркониев, взаимодействующего с киральным полем. Лагранжиан такой модели был получен методом одновременной киральной и конформной бозонизации КХД в [19]. Модель представляет собой обобщение модели Скирма и вводит в рассмотрение скалярное поле $\sigma(x)$, взаимодействующее с киральным полем $U(x)$ [20]:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}(U, \sigma) = \frac{F_\pi^2}{4} e^{-2\sigma} \text{Tr} \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger + N_f \frac{F_\pi^2}{4} e^{-2\sigma} (\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{128\pi^2} \text{Tr} [\partial_\mu U U^\dagger, \partial_\mu U U^\dagger]^2 - C_g \frac{N_f}{48} \left[e^{-4\sigma} - 1 + \frac{4}{\epsilon} (1 - e^{-\epsilon\sigma}) \right], \quad (99)$$

где F_π — постоянная пионного распада (93 МэВ), а N_f — число ароматов. Величина глюонного конденсата $C_g = \langle G_{\mu\nu}^2 \rangle$ лежит в интервале значений (300—400 МэВ)⁴. Первые два слагаемых суть кинетические члены кирального и скалярного полей, третий член — скирмовское самодействие кирального поля. Эффективный потенциал скалярных полей, задаваемый последним членом лагранжиана, представляет собой экстраполяцию низкоэнергетического потенциала [20] в область высоких энергий. При экстраполяции использовалось однопетлевое приближение для β -функции Гелл-Мана — Лоу КХД. Параметр ϵ определяется числом ароматов $\epsilon = 8N_f/(33 - 2N_f)$.

Обращаясь к барионному сектору, сделаем предположение о форме статических кирального и скалярного полей. Так, для кирального поля примем анзац Скирма — Витена $U(r) = \exp \{i\mathbf{t}\mathbf{n}F(r)\}$, где

$\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, и потребуем сферическую симметричность дилатонного поля $\sigma(r)$. Тогда для массового функционала M имеем:

$$M = M_2 + M_4 + V, \tag{100}$$

в котором

$$M_2 = 4\pi \frac{F\pi}{e} \int_0^\infty dx \left\{ \frac{N_f}{4} x^2 (\rho')^2 + \rho^2 \left[\frac{x^2 (F')^2}{2} + \sin^2 F \right] \right\}; \tag{101}$$

$$M_4 = 4\pi \frac{F\pi}{e} \int_0^\infty dx \left\{ \frac{1}{2} \frac{\sin^4 F}{x^2} + \sin^2 F (F')^2 \right\}; \tag{102}$$

$$V = 4\pi \frac{F\pi}{e} D_{\text{eff}} \int_0^\infty dx x^2 \left[\rho^4 - 1 + \frac{4}{\epsilon} (1 - \rho^\epsilon) \right]; \tag{103}$$

$$\rho(r) = \exp \{-\sigma(r)\}. \tag{104}$$

В выражениях (101) — (104) безразмерная переменная $x = F_\pi e r$ выражена через скирмовский параметр e , который согласно (99) равен 2π . Вклад потенциала в массу определяется коэффициентом $D_{\text{eff}} = C_g N_f / (48e^2 F_\pi^4)$. Массовый функционал (100) приводит к системе связанных уравнений (штрихам соответствует взятие производных по x):

$$F'' [\rho^2 x^2 + 2 \sin^2 F] + 2F' x [x\rho\rho' + \rho^2] + \sin(2F) (F')^2 - \rho^2 \sin(2F) - \frac{\sin^2 F}{x^2} \sin(2F) = 0;$$

$$\frac{N_f}{2} x [x\rho'' + 2\rho'] - 2\rho \left[\frac{x^2 (F')^2}{2} + \sin^2 F \right] - 4D_{\text{eff}} [\rho^3 - \rho^{\epsilon-1}] x^2 = 0. \tag{105}$$

Согласно теореме вириала, вклады отдельных членов функционала на решениях системы должны удовлетворять условию $M_4 - M_2 - 3V = 0$, которое можно использовать для контроля точности численного решения системы. В окрестности начала координат $F(x) \sim \pi N - \alpha x$ и $\rho(x) \sim \rho(0) + \beta x^2$. Для достаточно больших значений x : $F(x) \sim a/x^2$, $\rho \sim 1 - b/x^6$. Между численными коэффициентами α и β , a и b существуют нетривиальные связи. Выбранные граничные условия обеспечивают конечность функционала массы при фиксированном значении топологического заряда N . Квантование вращательных степеней свободы солитона можно провести, используя метод коллективных переменных. В результате приходим к следующему выражению для массы нуклона $M_N = M + (3/8) I$, в котором теперь вращательный момент инерции [21]

$$I = \frac{8\pi}{3} (F_\pi e^3)^{-1} \int_0^\infty dx \sin^2 F [\rho^2 x^2 + (F')^2 x^2 + \sin^2 F]. \tag{106}$$

Некоторые результаты численных расчетов даны в табл. 11, в которой мы приводим также среднеквадратичный радиус распределения барионного заряда $\langle r_B \rangle^{1/2}$, для сравнения в последнем столбце даны результаты, получающиеся в оригинальной модели Скирма.

Таблица 11. Некоторые значения входных и выходных величин для нуклона в модели с дилатонами-кваркониями [21]

C_g	(300 МэВ) ⁴	(300 МэВ) ⁴	Скирм
N_f	3	2	2
F_π , МэВ	93	93	93
e	2 π	2 π	2 π
$\rho(0)$	0,29	0,22	1
M , МэВ	867	827	1087
$\langle r_B^2 \rangle^{1/2}$, фм	0,37	0,38	0,38
M_N , МэВ	1072	1033	1260

Обращает на себя внимание частичное восстановление киральной инвариантности, что проявляется в сильном отклонении значения ρ в начале координат от асимптотического значения $\rho = 1$. Следует отметить существенно меньшую классическую составляющую массы, в также меньшее значение массы, учитывающей вращательные степени свободы в сравнении с оригинальной моделью Скирма.

Рассчитываемые в такой модели электромагнитные формфакторы нуклонов качественно воспроизводят экспериментальные, но опять падают слишком медленно. Барионы представляются очень компактными объектами. Однако существенно меньшие значения масс барионов по сравнению с даваемыми оригинальной моделью Скирма подталкивают к поиску мультибарионных решений. В табл. 12 приведе-

Таблица 12. Результаты расчетов в обобщенной модели с дилатационным полем [$F_\pi = 93$ МэВ, $e = 2\pi$, $C_g = (240 \text{ МэВ})^4$, $N_f = 2$ — для нуклона и $N_f = 3$ для дибариона].

Для сравнения даны результаты, получающиеся в оригинальной модели Скирма

Параметр	Нуклон		Дибарион ($S = 1$)	
	Обобщенная модель	Модель Скирма	Обобщенная модель	Модель Скирма
M , МэВ	758	1079	2012	3214
$\langle r^2 \rangle^{1/2}$, фм	0,42	0,36	0,75	0,70
M_B , МэВ	962	1242	2165	3320
С минимизацией по масштабному параметру λ :				
$\langle r^2 \rangle^{1/2}$, фм	0,50	0,44	0,81	0,75
M_B , МэВ	933	1204	2126	3320

ны результаты расчетов массы дибариона с анзацем Скирма — Витена для дибариона. Несмотря на значительно меньшее значение массы в сравнении с решением в оригинальной модели с тем же анзацем, нет убедительных аргументов в пользу того, что это решение соответствует минимуму в секторе $B = 2$. Не исключено, что включение дилатонного поля не разрушает тороподобного решения, типа рассмотренного в предыдущих разделах.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше были рассмотрены свойства малобарионных систем, получающиеся в рамках модели Скирма и некоторых ее обобщениях. Показано, что, используя весьма общие предположения о форме решений уравнений движения, в оригинальной модели приходим к связанным состояниям в секторах с барионным числом $B = 2, 3, 4$, имеющим тороидальную структуру. В вакуумном секторе $B = 0$ также обнаруживаются связанные состояния, но нетороидальной структуры. Удастся получить также более сложные состояния, состоящие из тороидальных солитонов и нетороидных подструктур. Некоторые из этих состояний могли бы проявиться в реакциях с остановившимися антинуклонами как ядерные компаунд-состояния, содержащие антибарионы как свои структурные единицы. Поиск таких состояний желателен для подтверждения модели сильновзаимодействующих систем как солитонов кирального поля.

Расчеты свойств состояний с квантовыми числами легких ядер проводятся в основном в рамках метода коллективных координат. С этой целью предварительно вычисляется эффективный гамильтониан, учитывающий ротационные пространственные и изопространственные, а также некоторые вибрационные степени свободы. Все получающиеся кандидаты в состояниях легких ядер имеют большую энергию связи, чем ее экспериментальное значение. Возможно, что рассчитываемые состояния все еще нельзя отождествлять с ядерными, поскольку большая часть квантовых поправок не была принята во внимание. Рассчитываемые электромагнитные формфакторы состояний с квантовыми числами дейтрона и ${}^4\text{He}$ качественно воспроизводят экспериментальные.

Расчеты электромагнитных характеристик нуклонов с векторными мезонами, соответствующими скрытой калибровочной симметрии модели, дают основание считать, что включение этих мезонов в эффективный лагранжиан улучшит согласие теоретических формфакторов легчайших ядер с экспериментальными при больших переделах.

Наконец, нельзя исключить, что включение дилатонного поля, требуемое для воспроизведения конформной аномалии КХД эффективным лагранжианом, не разрушит тороидальной структуры легчайших ядер, но позволит воспроизвести наблюдаемые значения энергий связи для значений констант связи, принятых в мезонном секторе.

Авторы выражают признательность В. Г. Кадышевскому, В. Б. Беляеву, М. К. Волкову, Г. В. Ефимову, В. Ю. Новожилову, А. А. Андрианову, В. А. Андрианову, В. Б. Копелиовичу, М. Джонсону, В. Неренбергу за многочисленные обсуждения затронутых в обзоре вопросов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Skyrme T.H.R.//Proc. Roy. Soc. 1961. Vol. A260. P. 127—138; Nucl. Phys. 1962. Vol. 31. P. 556—569.
2. Gell-Mann M., Levy M.//Nuovo cimento. 1960. Vol. 16. P. 705—711.
3. Shuryak E.V.//Nucl. Phys. 1989. Vol. B319. P. 511—540; Simonov Yu.A.//Nucl. Phys. 1988. Vol. B307. P. 512—530.
4. Dyakonov D.I., Petrov V.Yu.//Nucl. Phys. 1984. Vol. B245. P. 259—292; Nucl. Phys. 1986. Vol. B272. P. 457—490.
5. Weinberg S.//Phys. Rev. Lett. 1967. Vol. 18. P. 188—191.
6. Волков М. К.//ЭЧАЯ. 1982. Т. 13. Вып. 5. С. 1070—1903; Ebert D., Volkov M.K.//Fortschr. Phys. 1981. Bd 29. S. 127—186.
7. Первушин В. Н.//ТМФ. 1975. Т. 22. С. 291—299; Kazakov D.I., Pervoushin V.N., Pushkin S.V.//J. Phys. A. 1978. Vol. 10. P. 2093—2105.
8. Slavnov A.A.//Nucl. Phys. 1971. Vol. B31. P. 301—315.
9. Andrianov A.A., Novozhilov Yu.V.//Phys. Lett. 1985. Vol. B153. P. 422—426.
10. Андрианов А. А., Андрианов В. А., Новожилов В. Ю.//ТМФ. 1987. Т. 70, № 1. С. 63—75.
11. Дьяконов Д. И., Эйдеc М. И.//Письма в ЖЭТФ. 1983. Т. 38, № 7. С. 358—360.
12. Ebert D., Reinhardt H.//Nucl. Phys. 1986. Vol. B271. P. 188—225.
13. Aitchison I.J.P., Fraser C.M.//Phys. Rev. 1985. Vol. D31, N 10. P. 2605—2615.
14. Карчев Н. И., Славнов А. А.//ТМФ. 1985. Т. 65, № 2. С. 192—200.
15. Witten E.//Nucl. Phys. 1983. Vol. B223. P. 422—432.
16. Witten E.//Nucl. Phys. 1983. Vol. B223. P. 433—444.
17. Gomm M., Jain P., Jonson R., Schechter J.//Phys. Rev. 1986. Vol. D33. P. 801—812; 3476—3478.
18. Jain P., Jonson R., Schechter J.//Phys. Rev. 1987. Vol. D35. P. 2230—2237.
19. Andrianov A.A., Andrianov V.A., Novozhilov V.Yu., Novozhilov Yu.V.//Phys. Lett. 1987. Vol. B186. P. 401—404.
20. Andrianov V.A., Novozhilov V.Yu. ICTP Preprint. IC/87/411. Trieste, 1987; Phys. Lett. 1988. Vol. B202. P. 580—586.
21. Nikolaev V.A., Novozhilov V.Yu., Tkachev O.G. JINR Preprint E4-88-536. Dubna, 1988.
22. Bando M., Kugo T., Uehara S. e.a.//Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 54. P. 1215—1218.
23. Kaymakcalan O., Rajeev S., Schechter J.//Phys. Rev. 1984. Vol. D30. P. 594—602.
24. Kaymakcalan O., Schechter J.//Phys. Rev. 1985. Vol. D31. P. 1109—1113.
25. Adkins G.S., Nappi C.R., Witten E.//Nucl. Phys. 1983. Vol. B228. P. 552—566.
26. Meissner U.G., Kaiser N., Weise W.//Nucl. Phys. 1987. Vol. A466. P. 685—723.
27. Jakson A., Jakson A.D., Pasquier V.//Nucl. Phys. 1985. Vol. A432. P. 567—609.
28. Nyman E.M., Riska D.O.//Phys. Lett. 1987. Vol. B183. P. 7—9.

29. Blom U., Riska D.O.//Nucl. Phys. 1988 Vol. A476. P. 603—616.
30. Nyma E.M., Riska D.O.//Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 57. P. 3007—3010; Nucl. Phys. 1986. Vol. A454. P. 498—509.
31. Vinh Mau R., Lacombe M., Loiseau B. e.a.//Phys. Lett. 1985. Vol. B150. 259—264.
32. Zahed I., Wirzba A., Meissner U.-G.//Phys. Rev. 1986. Vol. D33. P. 830—835.
33. Otofujii T., Saito S., Yasino M. e.a.//Progr. Theoret. Phys. 1987. Vol. 78. P. 527—531.
34. De Pace A., Muter H., Faessler A.//Phys. Lett. 1987. Vol. B188. P. 307—340; Z. Phys. 1987. Vol. A326. P. 33—39.
35. Weigel H., Schwesinger B., Holzwarth G.//Phys. Lett. 1986. Vol. B168. P. 321—325.
36. Копелиович В. Б., Штерн Б. Е.//Письма в ЖЭТФ. 1987. Т. 45, вып. 4. С. 165—168.
37. Verbaarshot J.J.M.//Phys. Lett. 1987. Vol. B195. P. 235—239.
38. Manton N.S.//Phys. Lett. 1987. Vol. B192. P. 177—179.
39. Кожевников И. Р., Рыбаков Ю. П., Фомин М. Б.//ТМФ. 1989. Т. 75. С. 353—359.
40. Nikolaev V.A., Tkachev O.G. JINR Communication P4-86-515. Dubna, 1986.
41. Nikolaev V.A., Tkachev O.G.//JINR Rapid Communication N1[34]-89. Dubna, 1986. P. 28—36; JINR Rapid Communication N 4 [37]-89. Dubna, 1986. P. 18—23.
42. Дьяконов Д. И.//ЯФ. 1987. Т. 45. С. 1592—1594.
43. Braaten E., Carson L.//Phys. Rev. 1988. Vol. D38. P. 3525—3539.
44. Nikolaev V.A., Tkachev O.G. JINR Preprint E4-89-56. Dubna, 1989; TRIUMF (FEW BODY XII) TRI-89-2. Vancouver, 1989. P. F25—F26.
45. Kurihara T., Kanada H., Otofujii T., Saito S. TRIUMF (FEW BODY XII) TRI-89-2. Vancouver, 1989. P. F31—F32; Progr. Theoret. Phys. 1989. Vol. 81. P. 858—865.
46. Николаев В. А.//ЭЧАЯ. 1989. Т. 20. Вып. 2. С. 401—439.
47. Schwesinger B., Weigel H., Holzwarth G., Hayashi A.//Phys. Repts. 1989. Vol. 173. P. 1—173.
48. Riska D.O.//Phys. Repts. 1989. Vol. 181. P. 1—208.
49. Маханьков В. Г., Рыбаков Ю. П., Санюк В. И. Лекции для молодых ученых P4-89-568. Дубна, 1989. Вып. 55.
50. Rybakov Yu.P., Sanyuk V.I. The Niels Born Inst. preprint. NBI-HE-81-49. Copenhagen, 1981.
51. Kaulfuss U.B., Meissner U.-G.//Phys. Rev. 1984. Vol. C30. P. 2058—2066; Phys. Rev. 1985. Vol. D31. P. 3024—3026.
52. Vento V.//Phys. Lett. 1985. Vol. B153. P. 198—202.
53. Jakson A., Jakson A.D., Goldhaber A.S., Brown G.E.//Phys. Lett. 1985. Vol. B154. P. 101—106.
54. Braaten E., Carson L.//Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 56. P. 1897—1900.
55. Nikolaev V.A.//Proc. of the VIII Intern. Seminar on High Energy Physics Problem D1.2-86-668. Dubna, 1986. Vol. 1. P. 78—88.
56. Nikolaev V.A.//Proc. of the IX Intern. Seminar on High Energy Physics Problem D1.2-88-652. Dubna, 1988. Vol. 1. P. 51—56.
57. Finkelstein D., Rubinstein J.//J. Math. Phys. 1968 Vol. 9. P. 1762—1779.
58. Verbaarshot J.J.M., Walhout T.S., Wambach J., Wyld H.W.//Nucl. Phys. 1987. Vol. A468. P. 520—538.
59. Nikolaev V.A., Tkachev O.G. JINR Preprint E4-89-848. Dubna, 1989.
60. Kopeliovich V.B., Stern V.E. Nordita preprint 89/34 N. 1989.
61. Зенкин С. Б., Копелиович В. Б., Штерн В. Е. Материалы симпозиума по нуклон-нуклонным и нуклон-ядерным взаимодействиям ЛИЯФ. Л. 1986. С. 415—425.
62. Богомольный Е. Б., Фатеев В. А.//ЯФ. 1983. Т. 37. С. 228—241.

63. Wess J., Zumino B.//Phys. Lett. 1971. Vol. B37. P. 95—97.
64. Williams J.//J. Math. Phys. 1983. Vol. 11. P. 2611—2616.
65. Auer I.P., Chang-Fang C., Colton E. e.a.//Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 48. P. 1150—1152.
66. Otofujii T., Sakai K., Kanada H. e.a.//Progr. Theoret. Phys. 1985. Vol. 73. P. 703—716.
67. Walliser H., Hayashi A., Holzwarth G.//Nucl. Phys. 1986. Vol. A456. P. 717—732.
68. Balachandarn A.P., Barducci A., Lizzi F.e.a.//Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 52. P. 887—890.
69. Иссинский А. И., Копелнович В. Б., Штерн В. Е.//ЯФ. 1988. Т. 48. С. 209—890.
70. Balachandran A.P., Lizzi F., Rodgers V.G.S., Stern A. e.a.//Nucl. Phys. 1985. Vol. B256. P. 525—556.
71. Praszalovich M.//Phys. Lett. 1985. Vol. B158. P. 264—269.
72. Callan C.J., Klebanov I.//Nucl. Phys. 1985. Vol. B262. P. 365—382.
73. Kunz J., Mulders P.J.//Phys. Lett. 1988. Vol. B215. P. 449—455.
74. Braaten E., Tse S.-M., Willcoch C.//Phys. Rev. 1986. Vol. D34. P. 1482—1492.
75. Николаев В. А., Ткачев О. Г. Сообщение ОИЯИ P4-87-422. Дубна, 1987.
76. Braaten E., Carson L.//Phys. Rev. 1989. Vol. D39. P. 838—843.
77. Nyman E.M., Riska D.O.//Nucl. Phys. Vol. A468. P. 473—492.
78. Shulze M.E., Beck D., Farkhondeh H.e.a.//Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 52. P. 597—600.
79. Burov V.V., Dostovalov V.N.//Z. Phys. 1987. Vol. A326. P. 245—253.
80. Ворончев В. Т., Еаинов Т. Д., Краснопольский В. М. и др. Препринт ИЯИ АН СССР 17-0472, 1986.
81. Weiberg S.//Phys. Rev. 1968. Vol. 166. P. 1568—1577.
82. Weise W.//Progress in Particle and Nuclear Physics./Ed. by A. Faessler. Amsterdam: Pergamon Press, 1988. Vol. 20. P. 113—149.
83. Ebert D., Volkov M.K.//Z. Phys. 1983. Vol. C16. P. 205—210.
84. Lacombe M., Loiseau B., Vinh Mau R., Cottingham W.N. e.a. IPN Orsay preprint 87-28, 1987.
85. Ebert D., Reinhardt H. JI NR. Preprint, E2-86-274. Dubna, 1986.
86. Zhu X.Q., Khanna F.C., Wong S.S.M.//Nuovo cimento. 1989. Vol. A101. P. 563—582.
87. Novozhilov V.Yu. Preprint IC/89/95. Trieste, 1989.
88. Riska D.O., Schwesinger B.//Phys. Lett. 1989. Vol. B229. P. 339—342.
89. Yabu H., Schwesinger B., Holzwarth G.//Phys. Lett. 1989. Vol. B224. P. 25—28.
90. Mashaal M., Phom T.N., Truong T.N.//Phys. Rev. 1986. Vol. D34. P. 3484—3488; Lacombe M., Loiseau B., Vinh Mau R., Cottingham W.N.//Phys. Rev. Lett. 1989. Vol. 57. P. 170—173.
91. Collins Y.C., Duncan A., Joglekar S.D.//Phys. Rev. 1977. Vol. D16. P. 438—449.
92. Nielsen N.K.//Nucl. Phys. 1972. Vol. B210. P. 212—220.
93. Schechter J.//Phys. Rev. 1980. Vol. D21. P. 3393—3400.