

МЕТОД МОМЕНТОВ И КОЛЛЕКТИВНОЕ ДВИЖЕНИЕ АТОМНЫХ ЯДЕР

Е. Б. Бальбуцев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Дан обзор работ, в которых был предложен и разработан новый метод описания коллективного движения атомных ядер, основанный на моментах (в фазовом пространстве) функции Вигнера. Представлены результаты расчетов в рамках этого метода равновесной формы вращающихся ядер, энергий и вероятностей возбуждения изоскалярных и изовекторных резонансов и низколежащих коллективных состояний 0^+ , 1^+ , 2^+ , 3^+ , 4^+ и 1^- , 2^- , 3^- , их ширины. Проведено обсуждение и сравнение этих результатов с экспериментальными данными и расчетами других авторов.

The papers aimed at constructing a new method for the description of the nuclear collective motion are reviewed. The method is based on the phase-space moments of the Wigner function. Various results of calculations within this method are presented: the equilibrium shape of rotating nuclei, energies and excitation probabilities of isoscalar and isovector resonances and low-lying collective states 0^+ , 1^+ , 2^+ , 3^+ , 4^+ and 1^- , 2^- , 3^- , their widths. These results are discussed and compared with the experimental data and with the calculations of other authors.

ВВЕДЕНИЕ

Бурное развитие экспериментальной ядерной физики, произошедшее в последние два десятилетия и непрерывно продолжающееся и в настоящее время, привело к накоплению информации, качественно отличающейся от существовавшей в то время, когда были сформулированы основные модели структуры ядра.

Возросла точность измерения характеристик основного и низколежащих состояний атомных ядер. Постоянно накапливаются и уточняются данные о распадных характеристиках состояний. Чрезвычайно расширились диапазоны энергии возбуждения и углового момента, в которых появились новые данные. Необычайно увеличилось число ядерных состояний, о которых доступна информация, определяющая их электромагнитные свойства.

Основная масса новой экспериментальной информации, непосредственно относящейся к структуре атомных ядер, поступает в настоящее время из экспериментов с использованием ядерных реакций, и в частности реакций с тяжелыми ионами. Анализ ядерных реакций требует определенной информации о структуре ядер. Таким образом, все более возрастает потребность в совместном анализе динамики ядерных реакций и структуры стационарных состояний атомных ядер. Для надежного анализа как реакций, так и структу-

ры требуется такое развитие теории, в котором был бы достигнут баланс в точности описания основных структурных особенностей ядер и механизма реакции. Эта цель может быть достигнута только путем формулировки ядерных моделей, оперирующих в основном надежно установленными ядерными параметрами и не требующих проведения чрезвычайно громоздких расчетов для получения количественных соотношений. Желательно при этом, чтобы модель не была чисто феноменологической, а выводилась из «первых принципов», например из многочастичного уравнения Шредингера. Рассматриваемый в обзоре оригинальный подход к исследованию коллективного движения в общем и целом удовлетворяет перечисленным критериям. Его базисом служит хорошо зарекомендовавший себя в теории атомов [1, 2] метод Хартри — Фока, который можно считать также наиболее приспособленным для изучения атомных ядер. Для описания возбужденных состояний он был обобщен Дираком, предложившим зависящий от времени метод Хартри — Фока (ТДHF). Этот метод явно или косвенно служит фундаментом многих феноменологических, микроскопических и промежуточных между ними моделей ядра [3]. Из него выводится исключительно популярное в теории ядра приближение случайных фаз (RPA), описывающее вибрационные движения малой амплитуды (малые колебания около равновесного состояния) [2]. Известны также попытки изучения с его помощью движений большой амплитуды [4].

Мощный толчок развитию «гидродинамических» аспектов метода ТДHF дало открытие гигантских резонансов мультипольности $\lambda \geq 2$. Дело в том, что гигантский дипольный резонанс (ГДР) (а также монопольный — дыхательная мода) неплохо описывается в чисто гидродинамическом подходе [5], например, широко известные модели Гольдхабера — Теллера и Штейнведеля — Йенсена. А вот для энергии изоскалярного гигантского квадрупольного резонанса (ГКР) гидродинамика оказалась неспособной дать даже порядок величины.

Связь метода ТДHF с гидродинамикой устанавливается следующим образом [6]. Сначала фурье-преобразованием по координате $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ матрица плотности $\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, фигурирующая в методе, преобразуется в функцию Вигнера [7] $f(\mathbf{R}, \mathbf{p})$, где $\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$.

Получившееся уравнение для $f(\mathbf{R}, \mathbf{p})$ внешне очень похоже на кинетическое уравнение Власова [8], отличаясь от него квантовыми поправками, роль которых в общем невелика. Это уравнение интегрируется затем по импульсам с весами 1 и p_i , что дает уравнение непрерывности и уравнение движения (уравнение Эйлера). Динамическими переменными в них служат плотность $\rho(\mathbf{r})$ и средняя скорость вещества $\mathbf{u}(\mathbf{r})$. Уравнение Эйлера содержит также еще одну динамическую переменную — тензор давлений $P_{ij}(\mathbf{r})$. Для него тоже можно написать динамическое уравнение, проинтегрировав «кинетическое» уравнение с весом $p_i p_j$. Однако такой шаг ведет в тупик, ибо каждое новое интегрирование обязательно добавляет новую динамиче-

скую переменную, так что в конечном счете получается бесконечная система зацепленных дифференциальных уравнений гидродинамического типа. Чтобы получить замкнутую систему уравнений для переменных $\rho(\mathbf{r})$ и $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, можно попытаться представить тензор давлений в виде приближенной функции этих локальных динамических переменных [9]. В многочастичных системах, где длина свободного пробега значительно меньше характерных расстояний, на которых изменяется плотность, такая процедура хорошо работает. Она обычно реализуется посредством локального уравнения состояния, которое для вырожденной ферми-системы может быть получено из приближения Томаса — Ферми с зависящими от плотности потенциалами. В атомных ядрах длина свободного пробега превышает размеры ядра, так что для них указанный рецепт, очевидно, не годится [10].

Берч [11] первый предположил, что ядро может колебаться как упругое тело, для которого характерно наличие недиагональных компонент тензора давлений, отсутствующих в гидродинамической картине. Наличие этих компонент можно объяснить микроскопически типично квантовым эффектом, присущим ферми-системам: деформацией поверхности Ферми в импульсном пространстве во время ядерного движения. Берч предложил учитывать этот эффект макроскопически, с помощью «скейлинга». Основой метода служит простая идея: коллективное состояние системы, если оно существует, характеризуется тем, что все одночастичные состояния, составляющие слетеровский детерминант, имеют один и тот же вектор смещений и потенциал скоростей. За пионерской работой Берча, давшей вполне разумные значения энергий монопольного и квадрупольного гигантских резонансов, последовало множество работ, улучшающих, обосновывающих и обобщающих скейлинг-приближение (см. ссылки в разд. 1). На «тупииковом» же пути развития «гидродинамического» подхода были лишь единичные публикации. Так, в работе Никса и Сирка [12] к уравнениям непрерывности и Эйлера было добавлено динамическое уравнение для тензора давлений, из которого был выброшен тензор третьего ранга, т. е. проблема замыкания бесконечной цепочки уравнений была «решена» топорным способом. Тем не менее они получили неожиданно хорошее согласие с экспериментом для энергии ГКР. Их метод расчета энергий оказался достаточно сложным, так что они были вынуждены пренебречь также и всеми потенциальными взаимодействиями между нуклонами.

Чтобы преодолеть эти в общем-то уже технические трудности, авторы работ [13—15] воспользовались методом вириальных теорем, разработанным Чандрасекхаром и Лебовицем [16] для решения похожих проблем астрономии: расчета фигур равновесия и собственных частот колебаний вращающихся самогравитирующих масс. Этот метод позволил не только рассчитать энергию ГКР с учетом всех потенциальных взаимодействий и обобщить результат на вращающиеся ядра, но и решить самый главный вопрос — проблему замыкания.

Разумеется, этим достоинства метода вириальных теорем не огра-

ничиваются. Довольно скоро стало ясно, что в сочетании с уравнениями гидродинамического типа они являются мощным инструментом для изучения коллективного движения в атомных ядрах и, вообще, в любых конечных многочастичных системах, динамика которых описывается уравнениями TDHF. Соответственно и данный обзор посвящен главным образом описанию метода замыкания бесконечной цепочки названных уравнений и его приложениям к изучению колебаний вращающихся и невращающихся ядер.

1. ФОРМУЛИРОВКА МЕТОДА

Уравнения для матрицы плотности и функции Вигнера. Основой нашего метода описания коллективной ядерной динамики служит уравнение для одночастичной матрицы плотности $\hat{\rho} = \rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)$:

$$i\hbar\partial\hat{\rho}/\partial t = [\hat{H}, \hat{\rho}], \quad (1)$$

где \hat{H} — одночастичный самосогласованный гамильтониан, зависящий, в свою очередь, от матрицы плотности. Уравнение (1) с вполне конкретным определением гамильтониана появляется в теории Хартри — Фока; оно используется также в так называемом методе функционала энергии, оставляющем больше возможностей для выбора одночастичного гамильтониана и добавок дающим некоторые основания считать уравнение (1) достаточно общим [17]. Для изучения вращающихся ядер достаточно добавить к самосогласованному гамильтониану член $-\mathbf{I}\Omega$, где \mathbf{I} — оператор углового момента, а Ω — скорость вращения. Влияние внешних полей может быть учтено добавлением к \hat{H} потенциала внешних сил.

Наконец, добавляя к правой части уравнения так называемый корреляционный член, можно прийти к точному уравнению для одночастичной матрицы плотности, представляющему собой первое из цепочки уравнений для многочастичных матриц плотности [18, 19].

Для дальнейшего изложения удобно переформулировать уравнение (1), введя преобразование Вигнера матрицы плотности [7]:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int e^{-i\mathbf{p}\mathbf{s}/\hbar} \rho\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{s}}{2}, \mathbf{r} - \frac{\mathbf{s}}{2}, t\right) d\mathbf{s}. \quad (2)$$

Функция Вигнера $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ напоминает функцию распределения классической кинетической теории, дающую вероятность найти нуклон с импульсом \mathbf{p} в точке \mathbf{r} в момент времени t [19]. Однако, в отличие от истинной функции распределения, она может, в принципе, принимать отрицательные значения.

Преобразование Вигнера операторов нормируется следующим образом [4]:

$$O_W(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \int e^{-i\mathbf{p}\mathbf{s}/\hbar} \left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{s}}{2} \middle| \hat{O} \middle| \mathbf{r} - \frac{\mathbf{s}}{2}\right) d\mathbf{s}. \quad (3)$$

Некоторые важные свойства преобразования Вигнера даны в [20]. Любая операторная функция, зависящая только от \hat{p} или только от \hat{r} , преобразуется в такую же функцию соответствующих переменных (p или r). Произведение двух операторов $\hat{c} = \hat{a} \cdot \hat{b}$ преобразуется к виду

$$c_W(r, p) = \exp \left\{ \frac{i\hbar}{2} (\nabla_r^a \cdot \nabla_p^b - \nabla_p^a \cdot \nabla_r^b) \right\} a_W(r, p) b_W(r, p). \quad (4)$$

Верхний индекс у оператора «набла» указывает функцию, на которую действует данный оператор. Применяя (4) к (1), находим [20—23]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{2}{\hbar} \sin \left\{ \frac{\hbar}{2} (\nabla_r^H \cdot \nabla_p^f - \nabla_p^H \cdot \nabla_r^f) \right\} H_W f. \quad (5)$$

Рассмотрим гамильтониан, который является суммой кинетической энергии и локального потенциала. (Нелокальные члены нетрудно будет ввести при надобности.) Его преобразование Вигнера суть классическая версия того же гамильтониана:

$$H_W = \frac{p^2}{2m} + W(r),$$

где W — потенциал ядерных и кулоновских сил, m — масса нуклона. Тогда из уравнения (5) имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{m} \cdot \nabla_r f = \frac{2}{\hbar} \sin \left(\frac{\hbar}{2} \nabla_r^W \cdot \nabla_p^f \right) W(r) f(r, p, t). \quad (6)$$

Приближение, в котором оставлен только первый член разложения \sin в ряд, известно как квазиклассическое приближение теории Хартри — Фока. Уравнение (6) тогда совпадает с кинетическим уравнением для функции распределения (уравнением Власова [6, 24]) и служит основой многих ядерных моделей [6, 12, 20, 23, 25, 26]. Рассматриваемый здесь метод позволяет учесть любое число членов разложения в уравнении (6) и тем самым исследовать роль квантовых поправок к решениям кинетического уравнения [27, 28].

Моменты по импульсам. Следующий шаг на пути к описанию ядерных коллективных характеристик — ввести в рассмотрение моменты функции Вигнера:

$$\begin{aligned} n(r, t) &= \int f(r, p, t) dp, \quad \rho(r, t) = mn(r, t), \\ u(r, t) &= \int pf(r, p, t) dp / \rho(r, t), \\ P_{ij} &= \frac{1}{m} \int (p_i - mu_i)(p_j - mu_j) f(r, p, t) dp, \end{aligned} \quad (7)$$

$$P_{i_1 \dots i_n} = m^{1-n} \int (p_{i_1} - mu_{i_1})(p_{i_2} - mu_{i_2}) \dots (p_{i_n} - mu_{i_n}) f(r, p, t) dp.$$

Физический смысл первых моментов очевиден: n — плотность числа частиц (ρ — массовая плотность); \mathbf{u} — поле коллективных скоростей; P_{ij} — компоненты тензора давлений (напряжений); P_{ijk} — тензор переноса энергии и импульса. Необходимость введения других тензоров станет ясна ниже.

Напишем уравнения движения для всех этих моментов. Рецепт их получения подсказывается уже внешним сходством чисто квантового уравнения для функции Вигнера с классическим кинетическим уравнением. Поэтому будем действовать точно так же, как это делают, когда из кинетического уравнения получают уравнения гидродинамики [24, 29, 30].

Проинтегрируем уравнение (6) по импульсам с весами 1, p_i и $p_i p_j / m$. Таким образом, получим уравнение непрерывности

$$\partial n / \partial t + \operatorname{div} (n\mathbf{u}) = 0, \quad (8)$$

уравнение движения (обобщение известного уравнения Эйлера)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + n \frac{\partial W}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (P_{ij} + \rho u_i u_j) = 0 \quad (9)$$

и уравнение для тензора давлений

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial t} + \sum_{h=1}^3 \left(P_{jh} \frac{\partial u_i}{\partial x_h} + P_{ih} \frac{\partial u_j}{\partial x_h} \right) + \sum_{h=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_h} (P_{ijk} + P_{ij} u_k) = 0. \quad (10)$$

Эти три уравнения ничем не отличаются от классических уравнений гидродинамики. Правда, вместо последнего уравнения там обычно фигурирует его шпур — уравнение баланса энергии. Квантовая поправка впервые появляется в уравнении для тензора третьего ранга P_{ijk} . Уравнение движения для тензора произвольного ранга n получается, очевидно, интегрированием (6) с весом $p_{i_1} \dots p_{i_n} / m^{n-1}$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} P_{i_1 \dots i_n} + \sum_{h=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_h} (P_{i_1 \dots i_n h} + P_{i_1 \dots i_n} u_h) + \\ & + \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^3 \left\{ \frac{\partial u_{i_l}}{\partial x_k} P_{i_1 \dots (i_l) \dots i_n h} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{i_l k}}{\partial x_k} P_{i_1 \dots (i_l) \dots i_n} \right\} = \\ & = - \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k n! (\hbar/2m)^{2k} / m}{(2k+1)!^2 (n-2k-1)!} \times \\ & \times \sum_{P \{ \substack{i_1 \dots i_n \\ l_1 \dots l_n} \}} P_{(l_1 \dots l_{2k+1}) l_{k+2} \dots l_n} \frac{\partial^{2k+1} W}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_{2k+1}}}. \quad (14) \end{aligned}$$

Здесь $P_{(l_1 \dots l_m) l_{m+1} \dots l_n}$ означает тензор с $n - m$ индексами, остающимися после вычеркивания индексов $l_1 \dots l_m$ из набора $i_1 \dots i_n$,

$$P_{(l_1 l_2 \dots l_n)} = \rho, \quad P_{(l_1 l_2 \dots l_{n-1}) l_n} = 0.$$

Суммирование в правой части уравнения (11) идет по k и по всем перестановкам индексов $i_1 \dots i_n$, а $\left[\frac{n-1}{2} \right]$ означает целую часть числа $\frac{1}{2}(n-1)$.

Для функции Вигнера принято естественное граничное условие: $f \rightarrow 0$ при $|\mathbf{p}| \rightarrow \infty$. Очевидно, что для конечных ядер следует принять и второе граничное условие — $f \rightarrow 0$ при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$, чтобы определенные в (7) различные характеристики ядра (n , ρ , P_{ij} и т. д.) были отличны от нуля только внутри ядра.

Число уравнений для моментов функции Вигнера бесконечно. Легко видеть, что они образуют иерархию: временная производная плотности связана со скоростью ядерного вещества, чья временная производная, в свою очередь, связана с тензором давлений и т. д.

Член, «зацепляющий» уравнение для тензора $P_{i_1 \dots i_n}$ со следующим уравнением в цепочке, содержит тензор $P_{i_1 \dots i_n i_{n+1}}$, который имеет под знаком интеграла добавочный скоростной множитель $(\mathbf{p} - m\mathbf{u})_{i_{n+1}}$. Практически все физические приложения теории ядерного коллективного движения ограничены условием: энергия нулевого движения нуклонов $[(3/5) T_{FA} \simeq 21 \text{ А МэВ}]$ много больше кинетической энергии коллективного потока, т. е. в типичных случаях $|\mathbf{p}_i| \gg m|\mathbf{u}_i|$ и, следовательно, зацепляющий член не имеет очевидной малости. Таким образом, возникает проблема замыкания этой цепочки уравнений. В гидродинамике замыкание системы уравнений достигается при помощи феноменологических предположений и приближений [29]. Для конечных ферми-систем, каковыми являются атомные ядра, такие приближения, как правило, неприемлемы. Требуется иной подход. Можно, конечно, решить проблему, просто отбросив зацепляющий член, как это делалось, например, в работе [12]. Однако такой способ может привести к заметным ошибкам, что будет показано ниже. Проблема замыкания обсуждалась в работе [31], но ничего принципиально нового там предложено не было. Оригинальная идея решения была предложена в [26, 32] и детально описана в [33]. Суть ее заключается в следующем. Легко видеть, что зацепляющие члены входят в уравнения в виде производной по x_i . Так что если проинтегрировать любое уравнение по объему, то интеграл от зацепляющего члена превращается в интеграл по бесконечно удаленной поверхности, где функция Вигнера f , а вместе с ней ρ , ρu_i , $P_{ij} \dots k$ равны нулю. Именно этот факт и может быть использован для замыкания обсуждаемой бесконечной системы уравнений.

Моменты по координатам (вириальные теоремы). В работах [13—15] было показано, что для изучения коллективного движения

в ядрах оказывается очень удобным метод вириалов, заимствованный из [16], где он успешно применялся при решении похожих проблем астрономии (колебательные движения вращающихся самогравитирующих масс). Привлекательность этого метода заключается в том, что он позволяет получать уравнения движения непосредственно для различных интегральных характеристик ядра; в частности, для его всевозможных мультипольных моментов.

Первый вириал. Проинтегрируем первое уравнение из системы (8) — (11) (уравнение непрерывности) по бесконечному объему с единичным весом. Интеграл от $\text{div}(nu)$ обращается в нуль из-за граничного условия, а первый член дает очевидную константу движения:

$$\frac{d}{dt} \int n(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \equiv \frac{d}{dt} A(t) = 0,$$

т. е. число нуклонов сохраняется.

Второй вириал. Проинтегрируем теперь уравнение непрерывности по объему с весом x_i . Интегрируя второй член по частям и используя граничное условие, получаем уравнение движения для координаты центра тяжести нуклонов $J_i(t) = \int x_i \rho(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}$:

$$\frac{d}{dt} J_i(t) - \int \rho(\mathbf{r}, t) u_i(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = 0. \quad (12)$$

Очевидно, оно должно быть дополнено уравнением движения для интегральной характеристики $\int \rho u_i d\mathbf{r}$ (импульса ядра), которое получается интегрированием по объему уравнения (9) с единичным весом:

$$\frac{d}{dt} \int \rho u_i d\mathbf{r} + \int n \frac{\partial W}{\partial x_i} d\mathbf{r} = 0. \quad (13)$$

Интеграл от зацепляющего члена $\int \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} d\mathbf{r}$ обратился в нуль в силу граничного условия. В отсутствие внешних полей второй интеграл в уравнении (13) представляет собой сумму всех внутренних сил, действующих в ядре, и должен быть равен нулю. Уравнение (13) в этом случае выражает закон сохранения импульса ядра $\int \rho u d\mathbf{r}$, а уравнение (12) дает тривиальную информацию о равномерном и прямолинейном движении ядра в целом.

Предыдущие формулы допускают различную трактовку для функции распределения и связанных с нею макроскопических переменных ρ , \mathbf{u} , P_{ij} и т. д. Можно, в частности, написать уравнения, подобные (1), для системы нескольких матриц плотности, содержащих информацию о нуклонах разного сорта: протонах или нейтронах. В этом случае в интеграл $\int \rho \frac{\partial W}{\partial x_i} d\mathbf{r}$ дает ненулевой вклад нейтрон-протонное взаимодействие. Тогда уравнения (12), (13) описывают движение центров тяжести нейтронов и протонов относительно друг

друга и могут служить основой для изучения гигантского дипольного резонанса.

Третий вириал. Интегрируя уравнение непрерывности по \mathbf{r} с весом $x_i x_j$, получаем уравнение движения для тензора инерции $J_{ij}(t) = \int x_i x_j \rho(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}$:

$$\frac{d}{dt} J_{ij}(t) - \int (x_i u_j + x_j u_i) \rho(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = 0. \quad (14)$$

Как видно, оно должно быть дополнено уравнением движения для интегральной характеристики $\int x_i u_j(\mathbf{r}, t) \rho(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}$, которое получается интегрированием по объему с весом x_j уравнения (9):

$$\frac{d}{dt} \int x_j u_i \rho d\mathbf{r} + \mathcal{W}_{ij} - K_{ij} - \Pi_{ij} = 0. \quad (15)$$

Здесь $\mathcal{W}_{ij} = \int x_j n \frac{\partial W}{\partial x_i} d\mathbf{r}$ — тензор потенциальной энергии. В отсутствие внешних сил он симметричен по i, j . $K_{ij} = \int \rho u_i u_j d\mathbf{r}$ — тензор кинетической энергии ядра, $\Pi_{ij} = \int P_{ij}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}$ — интегральный тензор давлений — в дальнейшем он будет именоваться просто тензором давлений. Уравнение движения для Π_{ij} получается интегрированием уравнения (10) по \mathbf{r} с единичным весом:

$$\frac{d\Pi_{ij}}{dt} + \sum_{k=1}^3 \int \left(P_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + P_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) d\mathbf{r} = 0. \quad (16)$$

Интеграл от зацепляющего члена $\int \frac{\partial P_{ijk}}{\partial x_k} d\mathbf{r}$ обратился в нуль, и мы остались с тремя интегрированными уравнениями (14) — (16), в которые входят только три неизвестные функции n , u и P_{ij} (имея в виду теорему Кона — Хоэнберга [17], самосогласованное среднее поле $W(\mathbf{r})$ можно считать функционалом плотности $n(\mathbf{r})$). Тензоры более высокого ранга P_{ijk} сюда не входят, и в этом смысле систему уравнений (14) — (16) можно считать замкнутой. Напомним, что индексы i, j принимают значения 1, 2, 3, так что эта система содержит, фактически, 21 уравнение [уравнения (14) и (16) симметричны по i, j]. Девять уравнений (15) полезно перекомбинировать в симметричные и антисимметричные блоки. Так, прибавляя к (15) такое же уравнение с переставленными индексами и используя (14), находим:

$$\frac{d^2}{dt^2} J_{ij}(t) + 2(\mathcal{W}_{ij} - K_{ij} - \Pi_{ij}) = 0. \quad (17)$$

Затем, вычитая из (15) такое же уравнение с переставленными индексами, получаем закон сохранения момента количества движения:

$$\frac{d}{dt} \int \rho (x_j u_i - x_i u_j) d\mathbf{r} = 0. \quad (18)$$

С помощью (9) и (16) можно также получить [26] закон сохранения энергии:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (K_{ii} + \Pi_{ii}) + \frac{1}{2} \int nW dr \right\} = 0. \quad (19)$$

Четвертый вириал. Интегрирование уравнения непрерывности по \mathbf{r} с весом $x_i x_j x_k$ дает уравнение движения для интегральной характеристики ядра

$$J_{ijk}(t) = \int x_i x_j x_k \rho(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}:$$

$$\frac{d}{dt} J_{ijk}(t) - \int (x_i x_j u_k + x_i x_k u_j + x_j x_k u_i) \rho(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = 0. \quad (20)$$

Действуя далее так же, как при выводе всех предыдущих вириальных уравнений, получаем следующие уравнения движения:

$$\frac{d}{dt} \int \rho u_i x_j x_k d\mathbf{r} - K_{ij, k} - K_{ik, j} + \mathcal{W}_{i, jk} - \Pi_{ij}^k - \Pi_{ik}^j = 0; \quad (21)$$

$$\frac{d}{dt} \Pi_{ij}^k - \int P_{ij} u_k d\mathbf{r} + \sum_{s=1}^3 \int \left[P_{js} \frac{\partial u_i}{\partial x_s} \right]_{ij} x_k d\mathbf{r} - \Pi_{ijk} = 0; \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Pi_{ijk} + \sum_{s=1}^3 \int \left[P_{jks} \frac{\partial u_i}{\partial x_s} - \frac{1}{\rho} P_{jk} \frac{\partial P_{is}}{\partial x_s} \right]_{ijk} d\mathbf{r} = \\ = \frac{\hbar^2}{4m^2} \int n \frac{\partial^3 W}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь $K_{ij, k} = \int \rho u_i u_j x_k d\mathbf{r}$, $\mathcal{W}_{i, jk} = \int n x_j x_k \frac{\partial W}{\partial x_i} d\mathbf{r}$, $\Pi_{ij}^k(t) = \int P_{ij}(\mathbf{r}, t) x_k d\mathbf{r}$, $\Pi_{ijk}(t) = \int P_{ijk}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}$. Индексы у квадратных скобок означают, что нужно провести по ним симметризацию. Например:

$$[A_{i, jk}]_{ijk} = A_{i, jk} + A_{j, ik} + A_{k, ij}.$$

Уравнения (20) — (23) представляют собой замкнутую систему интегриродифференциальных уравнений для ρ , \mathbf{u} , P_{ij} и P_{ijk} — тензоры более высокого ранга $P_{ijk\dots l}$ в нее не входят. Эта система примечательна тем, что в ней впервые появляется квантовая поправка — член в правой части уравнения (23), обязанный отличию уравнения для функции Вигнера от уравнения Власова.

Пятый вириал. Уравнения движения для тензоров четвертого ранга получаются аналогично всем предыдущим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} J_{ijkl} - \left[\int \rho u_i x_j x_k x_l d\mathbf{r} \right]_{ijkl} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \int \rho u_i x_j x_k x_l d\mathbf{r} - \left[\Pi_{ij}^{kl} + \int \rho u_i u_j x_k x_l d\mathbf{r} \right]_{ijkl} + \int n x_j x_k x_l \frac{\partial W}{\partial x_i} d\mathbf{r} = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Pi_{ij}^{kl} - \left[\Pi_{ijk}^l + \int P_{ij} u_k x_l dr \right]_{kl} + \sum_{s=1}^3 \left[\int P_{js} \frac{\partial u_i}{\partial x_s} x_k x_l dr \right]_{ij} = 0, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \Pi_{ijk}^l + \sum_{s=1}^3 \left[\int P_{jks} \frac{\partial u_i}{\partial x_s} x_l dr - \int \frac{1}{\rho} P_{ij} \frac{\partial P_{ks}}{\partial x_s} x_l dr \right]_{ijk} - \Pi_{ijkl} - \\ & - \int P_{ijk} u_l dr = \frac{\hbar^2}{4m^2} \int n x_l \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} dr, \quad \frac{\partial}{\partial t} \Pi_{ijkl} + \\ & + \sum_{s=1}^3 \left[\int \left(P_{jkl s} \frac{\partial u_i}{\partial x_s} - \frac{1}{\rho} P_{jkl} \frac{\partial P_{is}}{\partial x_s} \right) dr \right]_{ijkl} = 0. \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} \Pi_{ij}^{kl}(t) &= \int P_{ij}(\mathbf{r}, t) x_k x_l dr, \quad \Pi_{ijk}^l(t) = \int P_{ijk}(\mathbf{r}, t) x_l dr, \\ \Pi_{ijkl}(t) &= \int P_{ijkl}(\mathbf{r}, t) dr, \quad J_{ijkl}(t) = \int \rho(\mathbf{r}, t) x_i x_j x_k x_l dr. \end{aligned}$$

Системы уравнений для тензоров более высокого ранга нам не понадобятся. Процедура их получения, как видно, чрезвычайно проста и легко может быть продолжена.

Характерные черты вириальных уравнений и метода моментов. Обсудим и оценим полученные результаты. Сначала одно уравнение в частных производных для функции семи переменных $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ было заменено бесконечной системой уравнений для моментов этой функции в импульсном пространстве: $n(\mathbf{r}, t)$, $u_i(\mathbf{r}, t)$, $P_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{r}, t)$. Эта система давно известна [24, 34], но не очень популярна именно из-за ее бесконечности и отсутствия удовлетворительного рецепта работы с ней (обоснованного рецепта обрывания).

Далее, вместо бесконечной системы уравнений для функций n , u_i , $P_{i_1 \dots i_n}$ вводится в рассмотрение бесконечная же система уравнений для моментов уже этих функций в координатном пространстве, т. е. для всевозможных моментов функций f в фазовом пространстве (\mathbf{r}, \mathbf{p}) . В смысле бесконечности эта система, разумеется, ничем не лучше предыдущей. Но она обладает замечательной особенностью, делающей ее исключительно удобной для практических приложений — она распадается на независимые конечные подсистемы интегродифференциальных уравнений для функций $n(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, $P_{i_1 i_2}(\mathbf{r}, t)$, \dots , $P_{i_1 \dots i_n}$. Возникает, однако, вопрос: если мы найдем решения подсистем для n , \mathbf{u} , \dots , $P_{i_1 \dots i_k}$ и для n , \mathbf{u} , \dots , $P_{i_1 \dots i_{k+1}}$, совпадут ли функции n , \mathbf{u} и прочие, найденные при решении различных подсистем? Можно с уверенностью сказать, что скорее всего не совпадут. Нет ли здесь противоречия? Нет! Потому что решение каждой отдельно взятой подсистемы не единственно. Единственным может быть только решение, удовлетворяющее всем (т. е. бесконеч-

ному числу) подсистемам. Очевидно, что оно эквивалентно решению исходного дифференциального уравнения.

С формальной точки зрения все эти подсистемы — просто наборы динамических интегральных соотношений, которым должна удовлетворять точная функция Вигнера. Нас же они интересуют лишь в той мере, в какой они описывают моменты этой функции. Действительно, знание всех моментов функции f эквивалентно знанию самой функции. Если же задача такова, что для ее решения достаточно знать лишь несколько моментов функции, то совершенно необязательно находить саму эту функцию с тем, чтобы потом вычислить требуемые моменты. Естественно попытаться написать уравнения движения непосредственно для моментов. Очевидно, что обсуждаемые подсистемы и есть искомые уравнения движения. Однако при таком взгляде на эти подсистемы обнаруживается, что их уже нельзя считать вполне независимыми и можно говорить только о приближенной независимости. Рассмотрим более детально какую-нибудь подсистему, например (14) — (16). Что она описывает? Если судить по членам с временной производной, то, конечно динамику тензоров J_{ij} , $\int x_i u_{j\rho} d\mathbf{r}$ и Π_{ij} , которые можно назвать коллективными переменными задачи. Такое утверждение будет совершенно строгим только в том случае, если все присутствующие в уравнениях тензоры \mathcal{W}_{ij} , K_{ij} , $\int P_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} d\mathbf{r}$ удастся выразить через три вышеупомянутые переменные. Это действительно можно сделать для гармонического осциллятора. Чтобы убедиться в этом, достаточно переписать уравнение (11) в эквивалентном виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{P}_{i_1 \dots i_n} + \sum_{s=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_s} \tilde{P}_{i_1 \dots i_n s} + \frac{1}{m} \sum_{t=1}^n \frac{\partial W}{\partial x_t} \tilde{P}_{i_1 \dots (i_t) \dots i_n} +$$

$$+ (\text{кв. п.}) = 0, \quad (25)$$

где $\tilde{P}_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{r}, t) = \int p_{i_1} \dots p_{i_n} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}$, а выражение для квантовой поправки (кв.п.) такое же, как в (11) (с заменой $P_{ij \dots k}$ на $\tilde{P}_{ij \dots k}$). Если $W = \alpha r^2$, то квантовая поправка пропадает, а эквивалент подсистемы (14) — (16) принимает замкнутый вид:

$$\frac{d}{dt} J_{ij} - \tilde{\Pi}_i^j - \tilde{\Pi}_j^i = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{\Pi}_i^j + \frac{2\alpha}{m} J_{ij} - \tilde{\Pi}_{ij} = 0, \quad \frac{d}{dt} \tilde{\Pi}_{ij} + \frac{2\alpha}{m} (\tilde{\Pi}_i^j + \tilde{\Pi}_j^i) = 0.$$

Интересно отметить, что в случае кулоновского или гравитационного взаимодействия между частицами среднее поле внутри объекта с однородным распределением частиц (т. е. $n = \text{const}$) имеет как раз

квадратичную зависимость от радиуса. Именно поэтому метод моментов оказался так эффективен в астрономии [16]. В случае произвольного взаимодействия поставленная выше задача не имеет точного решения. Если, скажем, представить среднее поле $U(\mathbf{r})$ в виде полинома по \mathbf{r} , то все члены \mathbf{r}^k с $k > 2$ будут приносить в подсистему (14) — (16) тензоры более высокого ранга, чем два, и тем самым данная подсистема оказывается зацепленной со всеми остальными. Но это уже далеко не то зацепление, что в случае системы уравнений для функций $n, u_i, P_{ij...k}$. Здесь уже ясно, что любое обрывание системы уравнений для моментов эквивалентно какому-то приближенному описанию разницы между осцилляторным и истинным средним полем, причем корректность приближения можно контролировать. Таким образом, существование почти независимых подсистем, хотя и не дает никакого выигрыша с точки зрения чисто математической, оказывается удобным с точки зрения практической. Проблема замыкания, к которой даже неясно было, как подступиться в случае бесконечной цепочки уравнений для функций $n, u_i, P_{ij...k}$, сводится теперь к более-менее привычной задаче отыскания приемлемого приближения для потенциала. Ее решение, в свою очередь, определяется физикой исследуемого явления.

Проблема превращения почти независимых подсистем в действительно независимые сравнительно просто решается при изучении небольших отклонений ядра от состояния равновесия (движения малой амплитуды, когда можно провести линеаризацию уравнений по амплитудам), чему и будет уделено основное внимание в обзоре.

Следует подчеркнуть также, что замкнутые системы уравнений получаются для тензоров $\tilde{P}_{i_1...i_k}^{i_{k+1}...i_n} = \int \int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) p_{i_1} \dots p_{i_k} x_{i_{k+1}} \dots x_{i_n} d\mathbf{p} d\mathbf{r}$, где k пробегает все значения от 0 до n , причем $\tilde{P}^{i_1...i_n} \equiv J_{i_1...i_n}/m$, а $\tilde{P}_{i_1}^{i_2...i_n} = \int \rho u_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} d\mathbf{r}$, $\tilde{P}_{i_1 i_2}^{i_3...i_n} = \int \tilde{P}_{i_1 i_2} x_{i_3} \dots x_{i_n} d\mathbf{r}$ и т. д. Следовательно, динамику тензора инерции ранга $nJ_{i_1...i_n}$ можно описать только совместно со всеми тензорами $\tilde{P}_{i_1...i_k}^{i_{k+1}...i_n}$ ($1 \leq k \leq n$). Тензоры $P_{i_1...i_k}$ ($k \geq 2$) описывают деформацию поверхности Ферми (ДПФ) мультипольности $2 \leq \lambda \leq k$. Поэтому можно сказать, что для описания эволюции момента ядра (в координатном пространстве) мультипольности λ нужно учесть ДПФ всех мультипольностей вплоть до λ .

Отметим, наконец, что в таком подходе оператор кинетической энергии обрабатывается точно, а все приближения связаны только со средним полем. Это важно потому, что оператор кинетической энергии значительно более чувствителен ко всяким приближениям, и они могут, соответственно, привести к большим ошибкам.

Малые отклонения от равновесия. Вирialные уравнения могут быть легко приспособлены для описания движений малой амплиту-

ды. Для этого их нужно проварьировать в соответствии с правилами вариации интегральных величин [16]. В случае бесконечного объема интегрирования правила эти чрезвычайно просты: надо заменить подынтегральные функции n , u_i , $P_{ij\dots k}$ их эйлеровыми вариациями δn , δu_i , $\delta P_{ij\dots k}$. Так, вариация четвертого вириала после пренебрежения квадратичными по вариациям членами принимает вид:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \delta J_{ijk} - \left[\int x_i x_j (u_k^{(0)} \delta \rho + \rho^{(0)} \delta u_k) dr \right]_{ijk} = 0; \\ & \frac{d}{dt} \int (\rho^{(0)} \delta u_i + u_i^{(0)} \delta \rho) x_j x_k dr - \delta K_{ij, k} - \delta K_{ik, j} + \delta \mathcal{H}'_{i, jk} - \\ & \quad - \delta \Pi_{ij}^k - \delta \Pi_{ik}^j = 0; \\ & \frac{d}{dt} \delta \Pi_{ij}^k - \int (P_{ij}^{(0)} \delta u_k + u_k^{(0)} \delta P_{ij}) dr + \\ & + \sum_{s=1}^3 \int \left[P_{js}^{(0)} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_s} + \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_s} \delta P_{js} \right]_{ij} x_k dr - \delta \Pi_{ijk} = 0; \quad (26) \\ & \frac{d}{dt} \delta \Pi_{ijk} + \sum_{s=1}^3 \int \left[P_{jks}^{(0)} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_s} + \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_s} \delta P_{jks} + \right. \\ & \left. + \frac{\delta \rho}{(\rho^{(0)})^2} P_{jk}^{(0)} \frac{\partial P_{is}^{(0)}}{\partial x_s} - \frac{1}{\rho^{(0)}} \delta P_{jk} \frac{\partial P_{is}^{(0)}}{\partial x_s} - \frac{1}{\rho^{(0)}} P_{jk}^{(0)} \frac{\partial \delta P_{is}}{\partial x_s} \right]_{ijk} dr = \delta \chi_{ijk}. \end{aligned}$$

Здесь $\delta \chi_{ijk} = \frac{\hbar^2}{4m^2} \int \left(\delta n \frac{\partial^3 W^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + n^{(0)} \frac{\partial^3 \delta W}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right) dr$, $\delta K_{ij, k} = \int (\rho^{(0)} u_j^{(0)} \delta u_i + \rho^{(0)} u_i^{(0)} \delta u_j + u_i^{(0)} u_j^{(0)} \delta \rho) x_k dr$, $\delta \mathcal{H}'_{i, jk} = \int x_j x_k \times$
 $\times \left(\delta n \frac{\partial W^{(0)}}{\partial x_i} + n^{(0)} \frac{\partial \delta W}{\partial x_i} \right) dr$. Верхний индекс (0) означает,

что данная величина берется в равновесном состоянии. В дальнейшем мы будем рассматривать равновесные состояния только с $u_i^{(0)} = P_{ijk}^{(0)} = 0$, так что уравнения (26) слегка упрощаются.

Вариации δn и δu_i не являются независимыми. Соотношение между ними получается с помощью уравнения непрерывности [16]:

$$\delta n = -\operatorname{div}(n\xi), \quad \delta u_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial t}, \quad (27)$$

где $\xi_i(\mathbf{r}, t) \equiv dx_i$ — бесконечно малое смещение.

Введем также в обиход коллективные переменные

$$V_{i, j \dots k} = \int \rho \xi_i x_j \dots x_k dr. \quad (28)$$

Они естественны для нашей задачи, поскольку вариация тензора инерции является их линейной комбинацией:

$$\begin{aligned} \delta J_{ij\dots k} &= \int x_i x_j \dots x_k \delta \rho \, d\mathbf{r} = \\ &= \sum_{s=1}^3 \int \rho \xi_s \frac{\partial}{\partial x_s} (x_i x_j \dots x_k) \, d\mathbf{r} = V_{ij\dots k}, \end{aligned} \quad (29)$$

где $V_{ij\dots k} = [V_{i,j\dots k}]_{ij\dots k}$. Подставляя (27) в (26), видим, что первое уравнение удовлетворяется тождественно, а остальные принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} V_{i,jk} + \delta \mathcal{W}^i_{i,jk} - \delta \Pi_{ij}^k - \delta \Pi_{ik}^j &= 0, \\ \frac{d}{dt} \delta \Pi_{ij}^k - \frac{d}{dt} \int P_{ij}^{(0)} \xi_k \, d\mathbf{r} + \\ + \sum_{s=1}^3 \frac{d}{dt} \int \left[P_{js}^{(0)} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_s} \right]_{ij} x_k \, d\mathbf{r} - \delta \Pi_{ijk} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \delta \Pi_{ijk} - \sum_{s=1}^3 \int \frac{1}{\rho^{(0)}} \left[\frac{1}{\rho^{(0)}} P_{jk}^{(0)} \frac{\partial P_{is}^{(0)}}{\partial x_s} \operatorname{div}(\rho \xi) + \right. \\ \left. + \delta P_{jk} \frac{\partial P_{is}^{(0)}}{\partial x_s} + P_{jk}^{(0)} \frac{\partial \delta P_{is}}{\partial x_s} \right]_{ijk} \, d\mathbf{r} &= \delta \mathcal{X}_{ijk}. \end{aligned} \quad (30)$$

Вариации $\delta \mathcal{W}^i_{i,jk}$ и $\delta \mathcal{X}_{ijk}$ зависят от конкретного вида самосогласованного среднего поля и являются, очевидно, функционалами ξ . Коллективные переменные в (30) — это $V_{i,jk}$, $\delta \Pi_{ij}^k$ и $\delta \Pi_{ijk}$. Задача теперь состоит в том, чтобы все интегралы, фигурирующие в (30), записать в терминах этих переменных.

Как уже говорилось, в общем случае она не имеет точного решения. Существуют, однако, два фактора, позволяющие построить приближенное решение, которое, в принципе, будет сколь угодно близко к точному. Это конечные размеры ядра и малая амплитуда изучаемых движений. Второй фактор уже был использован при выводе линеаризованной системы уравнений (26). Роль первого фактора становится очевидной, если представить неизвестную функцию $\xi_i(\mathbf{r}, t)$ в виде ряда:

$$\begin{aligned} \xi_i(\mathbf{r}, t) &= L_i(t) + \sum_{j=1}^3 L_{i,j}(t) x_j + \sum_{j,k=1}^3 L_{i,jk}(t) x_j x_k + \\ &+ \sum_{j,k,l=1}^3 L_{i,jkl}(t) x_j x_k x_l + \dots, \end{aligned} \quad (34)$$

где $L_{i,jk\dots l}$ — неизвестные функции времени. Сколько членов этого ряда существенны для построения решения? Ответ зависит, очевидно, от типа изучаемого движения. Практически все суще-

ствующие модели [5, 31, 35—40] предсказывают радиальную зависимость ξ в виде функции Бесселя, что формально соответствует бесконечному ряду (31). Однако при ближайшем рассмотрении оказывается, что в пределах ядра находится лишь очень небольшая часть этой функции с небольшим числом характерных точек (максимумов, минимумов, нулей) либо не имеющая их вовсе. Ясно, что этот «кусочек» функции Бесселя может быть с какой угодно степенью точности аппроксимирован конечным числом членов ряда (31). Функции Бесселя были упомянуты лишь для примера — главным критерием при определении необходимого числа членов ряда должно служить, естественно, согласие с экспериментальными данными и внутренняя согласованность предлагаемой схемы расчета.

Поясним последнее замечание. Допустим, мы решили ограничиться первыми тремя членами ряда (31). Проинтегрируем его по \mathbf{r} с весами ρ , ρx_j , $\rho x_j x_k$. В результате получим систему линейных уравнений, позволяющую однозначно выразить переменные V_i , $V_{i,j}$ и $V_{i,jk}$ через L_i , $L_{i,j}$ и $L_{i,jk}$, и наоборот. Отсюда следует, что принятое приближение для ξ_i обязывает нас написать динамические уравнения для всех тензоров V_i , $V_{i,j}$, $V_{i,jk}$, иначе система будет неполна. Нетрудно сформулировать общее правило: если в ряде (31) оставлены члены вплоть до $L_{i,j_1 j_2 \dots j_n}$, то нужно иметь уравнения для всех тензоров от V_i до $V_{i,j_1 j_2 \dots j_n}$. Справедливо и обратное утверждение: если мы написали систему динамических уравнений для тензоров от V_i до $V_{i,j_1 j_2 \dots j_n}$, то в ряде (31) необходимо оставить все члены от L_i до $L_{i,j_1 j_2 \dots j_n}$. Если оставить меньшее число тензоров $L_{i,jk \dots l}$, то из системы уравнений, связывающей $V_{i,j \dots k}$ и $L_{i,j \dots k}$, сразу же находим, что не все тензоры $V_{i,j \dots k}$ независимы и, следовательно, система динамических уравнений для $V_{i,j \dots k}$ переопределена. Таким образом, мы показали, что существует взаимно однозначное соответствие между числом учитываемых членов ряда (31) и количеством моментов функции Вигнера, для которых нужно написать динамические уравнения. Чем сложнее (в смысле картины распределения смещений-токов) движение, которое мы хотим исследовать, тем больше моментов надо принять во внимание. И, естественно, наоборот: чем больше моментов охвачено уравнениями движения, тем более сложное движение ядерного вещества мы способны описать.

Все эти рассуждения практически без изменения можно повторить и применительно к разложению $\delta P_{ij}(\mathbf{r}, t)$:

$$\begin{aligned} \delta P_{ij}(\mathbf{r}, t) = \\ = n^{(0)}(\mathbf{r}) \left[D_{ij}(t) + \sum_{k=1}^3 D_{ij,k}(t) x_k + \sum_{k,l=1}^3 D_{ij,kl}(t) x_k x_l + \dots \right]. \quad (32) \end{aligned}$$

Множитель $n^{(0)}(\mathbf{r})$ введен здесь с очевидной целью гарантировать обращение в нуль δP_{ij} вне ядра. При разложении ξ в этом не было

необходимости, так как ξ никогда не появляется под знаком интеграла без $n^{(0)}$ или $P_{ij\dots k}^0$. Интегрируя (32) по \mathbf{r} с весами 1, x_h , $x_h x_l \dots$, можно получить систему уравнений, однозначно связывающую функции $D_{ij, k\dots l}(t)$ с тензорами $\delta\Pi_{ij}^{k\dots l}$.

Отметим важную деталь. Разлагая тензоры $\delta\Pi_{ij\dots k}^l(\mathbf{r}, t)$ в ряды по x_i и обрывая их, мы делаем тем самым какие-то приближения для функции Вигнера в координатном пространстве — в импульсном пространстве она обрабатывается точно, без каких бы то ни было приближений. В этом принципиальное отличие (и преимущество) нашего метода от широко известного «скейлинг-приближения» [5, 9—11, 35, 36, 39, 41—46].

Теперь остается только подставить первые три члена ряда (31) и первые два члена (32) в уравнения (30), добавить к ним вариации систем уравнений (14) — (16) и (12), (13) и убедиться, что получилась замкнутая система уравнений для тензоров V_i , $V_{i,j}$, $V_{i,jk}$, $\delta\Pi_{ij}$, $\delta\Pi_{ij}^k$ и $\delta\Pi_{ijk}$. В дальнейшем мы будем рассматривать только трипланарно-симметричные (в состоянии равновесия) ядра, так что уравнения для тензоров четного и нечетного рангов разделяются.

2. ВИРИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТЕНЗОРОВ ВТОРОГО РАНГА; ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕСЖИМАЕМОГО ЯДРА С РЕЗКИМ КРАЕМ

В этом разделе будут изучаться квадрупольные колебания вращающихся ядер с помощью вириальных уравнений (14) — (16).

С этой целью запишем их во вращающейся системе координат:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J_{ij} - \int \rho (x_i u_j + x_j u_i) d\mathbf{r} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \int \rho x_j u_i d\mathbf{r} + \mathcal{W}_{ij} - K_{ij} + \Pi_{ij} + 2 \sum_{s, k=1}^3 \epsilon_{isk} \Omega_s \int \rho u_k x_j d\mathbf{r} + \\ + \sum_{k=1}^3 \Omega_i \Omega_k J_{jk} - \Omega^2 J_{ij} &= 0, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\frac{d}{dt} \Pi_{ij} + \sum_{k=1}^3 \int \left(P_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + P_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) d\mathbf{r} + 2 \sum_{s, k=1}^3 \Omega_s [\epsilon_{isk} \Pi_{kj}]_{ij} = 0,$$

где ϵ_{ijk} — символ Леви-Чивиты, Ω_i — компоненты скорости вращения.

Эти уравнения позволяют исследовать как равновесное состояние вращающегося ядра (состояние «векового равновесия»), так и малые отклонения от него — гигантский квадрупольный резонанс и низколежащие моды. Чтобы почувствовать, как работает метод, и продемонстрировать его возможности, будем работать в приближении резкого края ядра с однородной плотностью, считая ядерное ве-

щество несжимаемым. Это позволяет получить практически все результаты аналитически, да к тому же такое приближение вполне приемлемо для многих физических задач.

Вековое равновесие и форма вращающихся ядер. Под равновесным здесь понимается состояние, описываемое уравнениями (33), в которых отсутствует зависимость от времени. В астрономии такое состояние вращающихся тел называется вековым равновесием. При $\Omega = 0$ это было бы основное состояние ядра. Мы будем рассматривать наиболее простой случай, когда ядро вращается как целое, т. е. в равновесном состоянии $u_i^{(0)} = 0$. Тогда тензор кинетической энергии K_{ij} обращается в нуль. Тензор потенциальной энергии состоит из ядерной и кулоновской частей:

$$\mathcal{W}_{ij} = \mathcal{U}_{ij} + C_{ij},$$

где $\mathcal{U}_{ij} = \int n x_j \frac{\partial U}{\partial x_i} d\mathbf{r}$, U — ядерное среднее поле,

$$C_{ij} = \left(\frac{Ze_p}{A} \right)^2 \int d\mathbf{r} n(\mathbf{r}) x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \int d\mathbf{r}' \frac{n(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \\ = - \left(\frac{Ze_p}{A} \right)^2 \frac{1}{2} \int \int n(\mathbf{r}) n(\mathbf{r}') \frac{(x_i - x'_i)(x_j - x'_j)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{r} d\mathbf{r}'.$$

Тензор \mathcal{U}_{ij} разделяется на поверхностную и объемную части:

$$\mathcal{U}_{ij} = n_0 \int_V x_j \frac{\partial U}{\partial x_i} d\mathbf{r} = n_0 \left\{ \int_S x_j U s_i d\mathbf{S} - \delta_{ij} \int_V U d\mathbf{r} \right\} \equiv 2\sigma_{ij} - \delta_{ij} \mathcal{U}_0.$$

Здесь \int_V означает интегрирование по объему, в котором плотность

n отлична от нуля, s_i — компонента единичного вектора внешней нормали к поверхности S , ограничивающей данный объем. Ось вращения направим по оси x_3 , так что $\Omega_3 = \Omega$, $\Omega_2 = \Omega_1 = 0$. Равновесные уравнения (33) принимают вид:

$$2\sigma_{ij} - \delta_{ij} \mathcal{U}_0 + C_{ij} - \Pi_{ij} + \Omega^2 (\delta_{i3} - 1) J_{ij} = 0, \quad (34)$$

$$\Omega \sum_{s=1}^3 (\varepsilon_{i3s} \Pi_{sj} + \varepsilon_{j3s} \Pi_{si}) = 0. \quad (35)$$

Равенство (34) представляет собой баланс давления, кулоновских, ядерных (поверхностных и объемных) и центробежных сил.

Мы будем рассматривать главным образом ядра, имеющие сферическую форму в основном состоянии (при $\Omega = 0$). Деформация в них возникает только из-за вращения. Эффективность метода во многом определяется выбором параметров, определяющих форму ядра: чем больше параметров требуется для аккуратного воспроизведения точной формы поверхности ядра, тем больше уравнений (моментов) приходится привлекать для расчетов. Наиболее разработанной с математической точки зрения является аппроксимация формы поверхности эллипсоидами [16, 47—50], которой мы и воспользуемся. Полуоси эллипсоида a_i свяжем с параметрами деформации δ и неаксиаль-

ности γ следующим образом:

$$a_{1,2}^2 = a_0^2 \left(1 - \frac{4}{3} \delta \cos(\gamma \pm 120^\circ) \right), \quad a_3^2 = a_0^2 \left(1 - \frac{4}{3} \delta \cos \gamma \right). \quad (36)$$

Параметр a_0 выражается через δ и γ с помощью условия сохранения объема: $a_1 a_2 a_3 = R^3 = r_0^3 A$, где $r_0 = 1,2$ фм, R — радиус сферы.

При такой параметризации формы ядро обладает трипланарной симметрией, и интегралы σ_{ij} , C_{ij} и J_{ij} оказываются отличными от нуля только при $i = j$. Но тогда из (34) следует, что тензор Π_{ij} должен быть диагональным: $\Pi_{ij} = \delta_{ij} \Pi_{ii}$.

Таким образом, недиагональные компоненты уравнения (34) удовлетворяются тождественно и остаются только диагональные. Вычитая компоненту с $i = 3$ из компонент с $i = 1$ и $i = 2$, получаем два соотношения, связывающие параметры формы δ и γ со скоростью вращения Ω :

$$\begin{aligned} \Omega^2 J_{11} &= 2(\sigma_{11} - \sigma_{33}) + (C_{11} - C_{33}) + (\Pi_{33} - \Pi_{11}), \\ \Omega^2 J_{22} &= 2(\sigma_{22} - \sigma_{33}) + (C_{22} - C_{33}) + (\Pi_{33} - \Pi_{22}). \end{aligned} \quad (37)$$

Отметим, что объемная часть ядерного потенциала сюда не вошла. Далее, из уравнения (35) следует, что $\Pi_{11} = \Pi_{22}$. И никаких ограничений на Π_{33} . Поэтому можно положить $\Pi_{11} = \Pi_{22} = \Pi_{33} = \Pi_0$. Во всяком случае, это не противоречит здравому смыслу, подсказывающему, что в ядрах без статической деформации давление должно быть изотропным. Тогда тензор давлений тоже выпадает из соотношений (37), и мы приходим к выводу, что форма вращающегося ядра определяется конкуренцией поверхностных, кулоновских и центробежных сил в полном согласии с жидкокапельной моделью ядра [49].

Раз уж мы приняли приближение резкого края ядра, то, чтобы быть последовательными, имеет смысл параметризовать ядерный потенциал на поверхности ядра поверхностным натяжением [49]:

$$nU|_S = T \operatorname{div} s + \operatorname{const}. \quad (38)$$

Коэффициент поверхностного натяжения $T = b/4\pi r_0^2$, где $b \simeq \simeq 17$ МэВ — коэффициент при поверхностном ($\sim A^{2/3}$) члене формулы Вайцеккера. Постоянный член из разностных формул (37), естественно, выпадает. Тензор поверхностных сил с такой параметризацией принимает вид [49]:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} T \int_S (\delta_{ij} - s_i s_j) dS. \quad (39)$$

Выражения для σ_{ij} и C_{ij} через полуоси эллипсоида были выведены в работах [16, 49]. Они выписаны в приложении 1. С их помощью, учитывая, что $J_{ii} = (1/5) mA a_i^2$, получаем окончательные формулы:

$$\tilde{\Omega}^2 a_i^2 = \mathcal{A}_3 - \mathcal{A}_i + 2X (a_3^2 A_3 - a_i^2 A_i), \quad i = 1, 2. \quad (40)$$

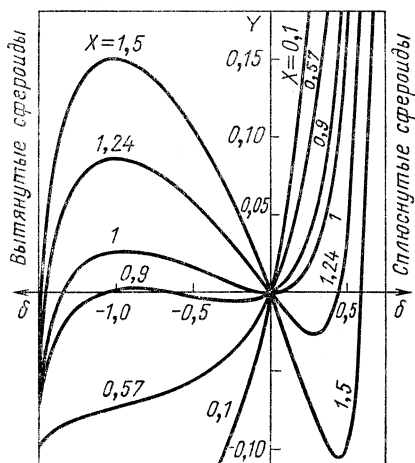


Рис. 1. Зависимость известного в теории деления параметра вращения $Y = I^2/2I_0^2$ ядра сфероидальной формы от параметра деформации δ при различных значениях параметра делимости X :

$$I = J\Omega, \quad I_0 = \frac{2}{5} mAR^2\Omega_0,$$

$$\Omega_0^2 = 10\pi T/mA, \quad J = \frac{1}{5} mA (a_1^2 + a_2^2)$$

Здесь $\tilde{\Omega}^2 = \Omega^2/\Omega_0^2$, $\Omega_0^2 = 10\pi T/mA$, $X = 2\pi q^2 R^3/15T \simeq 0,0206Z^2/A$ — параметр делимости, $q = e_p nZ/A$ — плотность заряда, e_p — заряд протона, \mathcal{A}_i , A_i — одноиндексные символы, выражающиеся через эллиптические интегралы.

Определения многоиндексных символов $\mathcal{A}_{ij} \dots$, $\mathcal{B}_{ij} \dots$, $A_{ij} \dots$, $B_{ij} \dots$ были даны в [16, 49] (см. приложение 1).

В качестве примера решения уравнений (40) на рис. 1 показана зависимость параметра вращения (отношение вращательной энергии к поверхностной) Y от деформации для сплюснутых и вытянутых сфероидов при различных X . Уравнения (40) описывают множество физических явлений, в том числе бифуркацию, гигантский бэк-бендинг, фор-бендинг, изомеры формы ... Полный анализ их решений можно найти в [14, 15, 26].

Малые отклонения от состояния равновесия; 2^+ -возбуждения вращающихся ядер. В разд. 1 было показано, что для описания различных движений малой амплитуды можно применить вариации соответствующих вириальных уравнений. Для квадрупольных колебаний это будут уравнения (33). Варьируя их в соответствии с изложенными там правилами и сохраняя только линейные по вариациям члены, находим:

$$\frac{d^2}{dt^2} V_{i,j} - \pi_{ij} - \Omega^2 V_{ij} (1 - \delta_{is}) + 2\Omega \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{i3k} \dot{V}_{k,j} + \delta \mathcal{W}_{ij} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \pi_{ij} + \sum_{k=1}^3 \int \left(P_{ik} \frac{\partial \dot{\xi}_j}{\partial x_k} + P_{jk} \frac{\partial \dot{\xi}_i}{\partial x_k} \right) d\mathbf{r} + 2\Omega \sum_{k=1}^3 (\varepsilon_{i3k} \pi_{kj} + \varepsilon_{j3k} \pi_{ki}) = 0.$$

(41)

Здесь $\pi_{ij} = \delta \Pi_{ij}$.

Далее, следуя тем же правилам, оставим в разложении (31) только два члена. Первый не даст вклада ни в один из интегралов (41) из-за трипланарной симметрии ядра, так что можно взять

$$\xi_i = \sum_{s=1}^3 L_{i,s} x_s. \quad (42)$$

Интегрируя это равенство по объему с весом ρx_j , находим простую связь между $V_{i,j}$ и $L_{i,j}$:

$$V_{i,j} = L_{i,j} J_{ij} = L_{i,j} mA \langle x_j^2 \rangle = L_{i,j} \frac{1}{5} mA a_i^2.$$

Уравнения (41) с учетом (42) превращаются в систему дифференциальных уравнений:

$$\ddot{V}_{i,j} - \pi_{ij} - \Omega^2 (1 - \delta_{i3}) V_{ij} + 2\Omega \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{i3k} \dot{V}_{k,j} + 2\delta\sigma_{ij} + \delta C_{ij} - \delta_{ij} \delta \Pi_0 = 0, \quad (43)$$

$$\dot{\pi}_{ij} + \frac{5\Pi_0}{mA} \left(\frac{\dot{V}_{i,j}}{a_j^2} + \frac{\dot{V}_{j,i}}{a_i^2} \right) + 2\Omega \sum_{k=1}^3 (\varepsilon_{i3k} \pi_{kj} + \varepsilon_{j3k} \pi_{ki}) = 0.$$

Формулы для δC_{ij} и $\delta\sigma_{ij}$ в приближении резкого края ядра были получены в работах [16, 49] и приведены в приложении 1.

Коллективные координаты π_{ij} представляют изменение тензора давлений P_{ij} в связи с изменением распределения нуклонов по скоростям. Если считать, что в равновесном состоянии нуклоны равномерно заполняют некоторую сферу в пространстве скоростей (модель ферми-газа), то для равновесного значения давления получим:

$$\Pi_0 = \frac{1}{5} m A v_F^2,$$

где $v_F = \hbar (9\pi)^{1/3} / 2mr_0$ — скорость Ферми. Малые отклонения от состояния равновесия для пространства скоростей означают небольшие смещения dv , которые могут привести лишь к небольшому изменению формы ферми-поверхности. Естественно, что вся эта процедура получила название «модели деформации поверхности Ферми» [11, 12]. Здесь необходимо отметить принципиальное отличие этой модели от теории классической жидкой капли (КЖК). В уравнение Эйлера, описывающее КЖК, тоже входит давление. Но оно там не является независимой переменной, а посредством уравнения состояния (статического уравнения!) выражается через другие переменные, описывающие КЖК (например, через плотность — в баротропных процессах). Здесь же тензор давлений является независимой переменной и определяется динамическим уравнением, которое нужно решать совместно с уравнением Эйлера. Таким образом, появляются дополнительные степени свободы, и в результате спектр капли ферми-жидкости (КФЖ), каковой является ядро, оказывается богаче спектра КЖК.

Пятнадцать уравнений (43) полезно перекомбинировать так, чтобы образовалась система уравнений в терминах неприводимых тензоров. Известно [51], что из девяти компонент произвольного декартова тензора второго ранга (каковым и является $V_{i,j}$) можно построить один тензор нулевого ранга, один псевдотензор первого ранга и один неприводимый тензор второго ранга. Это означает, что уравнения (43) должны описывать 0^+ -, 1^+ - и 2^+ -моды. Однако реально они дают информацию только о 2^+ -модах, так как принятое здесь приближение несжимаемости исключает из рассмотрения 0^+ -моды, а 1^+ -возбуждения не возникают из-за сохранения углового момента ядра. Соотношения между тензорами $V_{i,j}$ и неприводимыми тензорами приведены в приложении 2.

Система уравнений (43) распадается на две независимые подсистемы, описывающие возбуждения положительной и отрицательной сигнатуры. При $a_1 = a_2$ первая подсистема, в свою очередь, разделяется на две части, описывающие β - и γ -колебания.

Информацию о нормальных модах можно получить, исследуя периодическую решения подсистем с зависимостью от времени $e^{i\omega t}$. Нормальные частоты находятся из соответствующих характеристических уравнений. В качестве примера приведем характеристическое уравнение для γ -колебаний

$$\mathcal{F}_\gamma(\omega, \Omega) \mathcal{F}_\gamma(\omega, -\Omega) = 0,$$

где

$$\mathcal{F}_\gamma(\omega, \Omega) = \omega^3 - 6\Omega\omega^2 + 2\omega(5\Omega^2 - d_3 - g) + 8\Omega(d_3 - \Omega^2),$$

$$d_3 = \Omega_0^2 (\mathcal{A}_{11} - 2XB_{11}), \quad g = v_F^2/a_1^2.$$

Когда $\Omega = 0$, получается один пятикратно вырожденный уровень:

$$\hbar\omega_{\text{сф}} = \hbar \sqrt{2} \left[\frac{v_F^2}{R^2} + 8\Omega_0^2 \frac{1-X}{15} \right]^{1/2}. \quad (44)$$

Он хорошо описывает экспериментальное положение центроидов гигантских квадрупольных резонансов (ГКР) в атомных ядрах. За вклад деформации ферми-поверхности в $\omega_{\text{сф}}$ отвечает первый член в скобках — по величине он на порядок больше второго, что говорит о слабом влиянии на ГКР кулоновских и поверхностных сил. Если ими пренебречь, то воспроизводятся результаты работ [16, 12]:

$$\hbar\omega_{\text{сф}} = 64,7A^{-1/3} \text{ МэВ}.$$

На рис. 2 представлены решения уравнений (43) при $\Omega \neq 0$ для ядра ^{154}Er ($X = 0,62$).

Гигантский квадрупольный резонанс расщепляется на пять веток из-за возникновения деформации ядра и действия кориолисовых сил. Появляются две низколежащие моды. В сфероидах каждой ветви ГКР можно сопоставить определенное значение проекции мультипольного момента возбуждения на ось вращения: $\mu = 0, \pm 1, \pm 2$.

Рис. 2. Зависимость спектра квадрупольных колебаний от скорости вращения для ^{153}Er ($X = 0,62$):

сплошные линии соответствуют сплюснутым сфероидам, пунктирные — эллипсоидам; $\hbar\Omega_0 = 2,83$ МэВ. Индексом $+(-)$ отмечен знак проекции мультипольного момента. На дополнительной оси абсцисс приведены угловые моменты, соответствующие данной скорости вращения сpherоида ($I_{\text{сф}}$) или эллипсоида ($I_{\text{эл}}$)

Нормальные моды колебаний около эллипсоидальной равновесной формы спиваются с соответствующими модами сфероидов в точке бифуркации, где $\Omega_0^2 = d_3$.

Как видно, энергия возбуждения низколежащей γ -моды может принимать отрицательные значения. Это связано с тем, что при $I > I_0$ равновесная эллипсоидальная форма становится более выгодной энергетически, чем сфероидальная. Наличие низколежащей γ -моды указывает на мягкость капли ферми-жидкости относительно неаксиальной деформации.

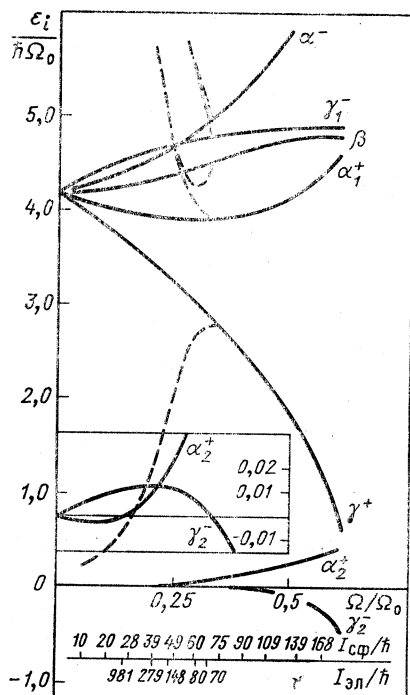
Энергия возбуждения второй низколежащей ветви (α -мода) обращается в нуль при $\Omega = \Omega_\alpha = \left(1 - \frac{a_3^2}{a_1^2}\right) 2 \frac{v_F}{a_3}$, чему соответствует $I_\alpha \simeq 0,4 A (1 - X)$. Когда I немного превышает I_α , ее можно аппроксимировать формулой

$$\hbar\omega_\alpha \simeq \hbar\Omega (1 - M_3/M_1),$$

характерной для энергии прецессионной моды твердого тела [52] с таким же распределением массы (M_i — момент инерции относительно оси i). Таким образом, учет ферми-движения наделяет каплю свойствами, присущими твердому телу.

Более глубокий анализ физических свойств квадрупольных нормальных мод невозможен без знания вероятностей их возбуждения. Они могут быть рассчитаны тремя способами. Первый — проквантовать уравнения движения (43), как это было сделано в [25, 26]. Второй — воспользоваться классическими формулами для интенсивностей переходов [53]. Наиболее адекватен нашему подходу третий способ — применить теорию линейного отклика системы на возмущение ее внешним полем

$$O(t) = O_e e^{-i\omega t} + O_+ e^{i\omega t}.$$



Удобная форма теории отклика дана Лейном [54]. Матричные элементы оператора O удовлетворяют соотношению

$$|\langle \psi_\alpha | O | \psi_0 \rangle|^2 = \lim_{\omega \rightarrow \omega_\alpha} \hbar (\omega - \omega_\alpha) \overline{\langle \psi'_0 | O e^{-i\omega t} | \psi'_0 \rangle}, \quad (45)$$

где ψ_0 и ψ_α — невозмущенные волновые функции основного и возбужденного стационарных состояний; ψ'_0 — возмущенная волновая функция основного состояния; $\omega_\alpha = (E_\alpha - E_0)/\hbar$ — нормальные частоты системы; черта означает усреднение по интервалу времени, много большему, чем $1/\omega$; ω — частота внешнего поля $O(t)$.

Чтобы воспользоваться формулой (45), нужно решить две проблемы:

1) выразить матричный элемент $\langle \psi'_0 | O | \psi'_0 \rangle$ в терминах интегральных характеристик системы, т. е. $V_{i,j}$, $\delta\Pi_{ij}$ и т. д.;

2) найти решения уравнений, описывающих временную эволюцию этих характеристик в возмущенном состоянии.

Для решения первой проблемы достаточно заметить, что

$$\begin{aligned} \langle \psi'_0 | O | \psi'_0 \rangle &= \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) O(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{p} (\rho O)_W = \\ &= \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{p} \exp\left\{\frac{\hbar}{2i} (\nabla_{\mathbf{r}}^0 \cdot \nabla_{\mathbf{p}}^f - \nabla_{\mathbf{p}}^0 \cdot \nabla_{\mathbf{r}}^f)\right\} O_W(\mathbf{r}, \mathbf{p}) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t), \end{aligned}$$

если O — одночастичный оператор. Здесь мы воспользовались равенством (4), O_W — вигнер-образ оператора O .

Для решения второй проблемы нужно добавить к гамильтониану в уравнении (1) потенциал $O(t)$. При этом в правой части уравнения (5) появится член

$$\frac{2}{\hbar} \sin\left\{\frac{\hbar}{2} (\nabla_{\mathbf{r}}^0 \cdot \nabla_{\mathbf{p}}^f - \nabla_{\mathbf{p}}^0 \cdot \nabla_{\mathbf{r}}^f)\right\} [O_W(\mathbf{r}, \mathbf{p}) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) e^{-i\omega t} + \text{к. с.}]. \quad (46)$$

Проделав далее те же выкладки, что и прежде, получим уравнения для всех моментов функции Вигнера, необходимых при расчете $\langle \psi'_0 | O | \psi'_0 \rangle$. Единственным новым элементом будет наличие члена (46), делающего уравнения для моментов неоднородными.

Применительно к 2^+ -возбуждениям в качестве возмущения надо взять оператор квадрупольного электрического момента

$$\hat{q}_{2\mu} = (Z/A) e_p r^2 Y_{2\mu}.$$

Его вигнер-образ $q_{2\mu}(\mathbf{r})$ дается этим же выражением, а для матричного элемента имеем:

$$\begin{aligned} \langle \psi'_0 | \hat{q}_{2\mu} | \psi'_0 \rangle &= \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{p} q_{2\mu}(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \\ &= \int d\mathbf{r} n(\mathbf{r}, t) q_{2\mu}(\mathbf{r}) = Q_{2\mu}^{(0)} + \delta Q_{2\mu}(t). \end{aligned}$$

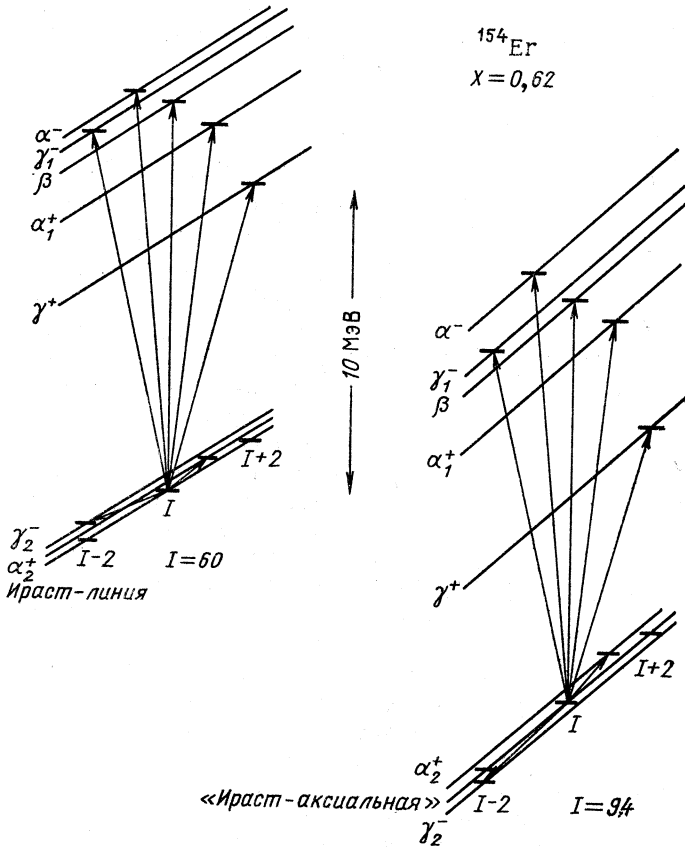


Рис. 3. Разрешенные электромагнитные переходы между равновесным и возбужденными состояниями при двух характерных значениях скорости вращения для ^{154}Er ($X = 0,62$); сфериды

Решая неоднородные уравнения, соответствующие системе (43), можно найти все $\delta Q_{2\mu}$, а с помощью (45) — приведенные вероятности переходов. Например, для γ -моды получается:

$$|\langle \psi_{\gamma_1} | \hat{q}_{2+2} | \psi_0 \rangle|^2 = \frac{3}{2\pi} \frac{\hbar e_p^2 Z^2}{m A} \frac{a_1^2 (\omega_1 + 4\Omega)}{(\omega_1 - \omega_2) (\omega_1 - \omega_3)}.$$

Здесь ω_i — корни уравнения $\mathcal{F}_\gamma(\omega, -\Omega) = 0$. Естественно, множитель $(\omega_1 + 4\Omega)/(\omega_1 - \omega_2) (\omega_1 - \omega_3)$ должен быть положителен — тем самым задаются правила отбора. Так, легко видеть, что этот фактор отрицателен для наименьшего по абсолютному значению корня, так как два других (больших по абсолютному значению) корня всегда имеют разные знаки. Следовательно, низколежащая

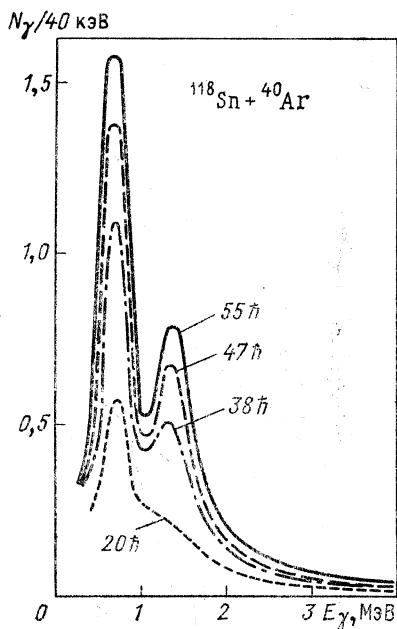


Рис. 4. Спектры γ -излучения для нескольких начальных значений спинов состояний, с которых начинается каскад

γ -мода не может возбуждаться оператором \hat{q}_{2+2} ! Легко показать, что она возбуждается оператором \hat{q}_{2-2} , т. е. с уменьшением углового момента на $2\hbar$, что и отражено на рис. 3, где показаны куски спектра коллективных возбужденных состояний сфероидов при двух характерных значениях I . При меньшем спине невозбужденное состояние принадлежит ирраст-последовательности, а при большем — последовательности стационарных аксиальных конфигураций, не являющихся ирраст-конфигурациями ядер. Последняя отмечена на рис. 3 («ирраст-аксиальная»).

По рис. 3 видно, что из-за наличия мягких мод при всех значениях I возможны переходы, ведущие к возбуждению γ -моды и уменьшению углового момента на две единицы Планка, причем энергия таких переходов $E_\gamma \simeq 2\hbar\Omega$, т. е. очень близка к энергии переходов вдоль ирраст-линии.

Вторая низколежащая ветвь (α -мода) позволяет осуществлять переходы тоже практически вдоль ирраст-линии, но уже с $E_\gamma \simeq 1\hbar\Omega$ и с $\Delta I = 1\hbar$. Возможность таких переходов именно в связи с низкоэнергетическими вобблинг-модами неаксиальных ядер обсуждалась в [55].

Существование низколежащих мод, по-видимому, подтверждается экспериментально. На рис. 4, заимствованном из работ [56, 57], представлен спектр γ -квантов, разряжающих высокоспиновые состояния ядра ^{154}Er , образующегося в реакции $^{40}\text{Ar} + ^{118}\text{Sn}$ после вылета четырех нейтронов. Анализ анизотропии излучения указывает, что область более высокого по энергии пика формируется практически полностью квадрупольными переходами с $\Delta I = 2\hbar$, обладающими большой степенью коллективности (около 140 единиц Вайскопфа), что неплохо согласуется со свойствами низколежащей γ -моды.

В области нижнего пика необходимо допустить существенный вклад переходов с $\Delta I = 1\hbar$. Интенсивность нижнего пика быстро растет с увеличением углового момента — это позволяет предположить, что имеет место подпитка за счет прецессионной моды. Наконец,

отношение энергий, при которых наблюдаются пики, совпадает с теоретическим $E_\gamma/E_\alpha \simeq 2$.

Много интересной информации дает анализ модельно-независимого энергетически взвешенного правила сумм [58]:

$$\sum_i (E_i - E_0) |\langle i|F|0\rangle|^2 = \frac{1}{2} \langle 0|[F, [H, F]]|0\rangle.$$

В нашем случае F — оператор квадрупольного момента. Расчеты показывают, что единственный 2^+ -уровень (при $\Omega = 0$), который мы отождествили с ГКР, исчерпывает правило сумм полностью. Это и не удивительно. Ведь уравнения движения с самого начала выводились именно для мультипольных моментов, так что описываемые ими возбуждения должны исчерпывать соответствующее правило сумм на 100%.

Если при их выводе и делались какие-то приближения, то только с потенциалом, что на правило сумм влиять не должно (если потенциал не зависит от импульса). Но что же этот факт 100%-ного исчерпывания означает? Вывод напрашивается сам собой: написав и решив уравнения движения для квадрупольного момента, мы найдем положение центроида всех возможных в атомном ядре 2^+ -состояний. При дальнейшей детализации вектора смещений [продолжение ряда (31)], а также учете других степеней свободы (спина, изоспина) будет происходить расщепление центроида на большее число 2^+ -уровней. Так, учет изоспиновых степеней свободы приводит к расщеплению на изоскалярный и изовекторный резонансы с примерно равными силами, не изменяя существенно образом положения центроида изоскалярного ГКР.

Здесь необходимо отметить следующий факт. В случае эллипсоидальных конфигураций указанные на рис. 2 моды не исчерпывают правила сумм! Дело оказывается в том, что система уравнений (43), кроме решений вибрационного типа ($\sim e^{i\omega t}$), допускает также и невибрационные решения — их подробный анализ, вывод соответствующих спектров и массовых параметров можно найти в работе [26].

Средовые ширины квадрупольных возбуждений вращающихся ядер. Для учета средовой ширины резонансов в рамках обсуждаемого подхода исходное уравнение для матрицы плотности [см. уравнение (1)] следует видоизменить, написав в правой части так называемый «корреляционный член» [4]. Вигнер-образ корреляционного члена можно назвать интегралом столкновений из-за явной аналогии между уравнением (6) и уравнением Больцмана — Власова [59].

Интеграл столкновений классической кинетической теории сохраняет плотность, импульс и кинетическую энергию вещества в каждой точке пространства. Аналогичными свойствами наделяют интеграл столкновений и в ядерных моделях, имея в виду короткий ра-

днус действия ядерных сил. Итак, считаем, что

$$\int dpI(f) = 0,$$

$$\int dpI(f) p_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (47)$$

$$\sum_{s=1}^3 \int dpI(f) p_s^2 = 0.$$

Учитывая (47), можно убедиться, что при включении интеграла столкновений уравнения (8) и (9) не изменяются вовсе. Уравнения (10), (11) для тензоров $P_{i_1 \dots i_n}$ приобретают правую часть, равную

$$m^{1-n} \int I(f) (p_{i_1} - m u_{i_1}) \dots (p_{i_n} - m u_{i_n}) dp.$$

Удобным (в смысле применения метода моментов) представлением $I(f)$ является следующее разложение:

$$I(f) = a(f - f^{(0)}) + b_0 f^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + \sum_{[n]} b_{[n]} \frac{\partial^n}{\partial p_{i_1} \dots \partial p_{i_n}} f^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}),$$

где $f^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ — функция распределения для стационарного состояния, а сумма берется по всем возможным наборам индексов, причем $n \geq 1$. Коэффициенты a , b_0 , $b_{[n]}$ в классической теории являются функциями r и t , а в квантовом случае представляют собой функционалы от $\delta f \equiv f - f^{(0)}$, содержащие информацию о всей «предыстории» системы.

Уравнения (47) при такой параметризации интеграла столкновений удовлетворяются, если выполнены следующие соотношения:

$$b_0 = -a\delta n/n_0,$$

$$b_i = ma\delta u_i,$$

$$\sum_{i=1}^3 b_{i i} = \frac{am}{2n_0} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\delta n}{n_0} P_{ii}^{(0)} - \delta P_{ii} \right).$$

Здесь мы пренебрегли квадратичными по вариациям членами. Анализ зависимости от углового момента ширины коллективных возбуждений квадрупольного типа проведем, предполагая, что $a = -1/\tau =$

$= \text{const}$, $b_{ij} = \delta_{ij} \frac{am}{6n_0} \sum_{s=1}^3 \left(\frac{\delta n}{n_0} P_{ss}^{(0)} - \delta P_{ss} \right)$, а все остальные функции

$b_{[n]} = 0$. Это приближение является исправленным (в отношении сохранения плотности вещества, импульса и кинетической энергии сталкивающихся частиц) вариантом приближения «времени релаксации», популярного в физической кинетике [30, 60] и нередко используемого в ядерных моделях [60—62]. τ считаем параметром, который

определяем так, чтобы воспроизвести наблюдаемые на эксперименте ширины ГРП в отсутствие вращения.

Вибрационные решения преобразованной системы (43) становятся комплексными. Реальную часть частоты отождествляем с энергией возбуждения $E = \hbar \operatorname{Re} \omega$, а мнимую часть — с его шириной [63]: $\Gamma = 2\hbar \operatorname{Im} \omega$.

Расчеты [64] показывают, что четкая корреляция между шириной отдельных ветвей резонанса и их энергией отсутствует. Однако ширина низколежащих колебательных мод существенно меньше ширины ветвей, представляющих гигантский квадрупольный резонанс. Соотношение $\Gamma \ll \Delta E_\gamma$, где ΔE_γ — энергия, уносимая γ -излучением в коллективном переходе, разряжающем или возбуждающем колебательную моду, оказывается выполненным для всех ветвей спектра квадрупольных колебаний.

Следует отметить, что уже в точке бифуркации, т. е. при $I \simeq 70\hbar$ (для ^{154}Er), наступает неустойчивость сферической конфигурации относительно квадрупольных колебаний (ширина низколежащей γ -моды становится отрицательной).

Эллипсоидальные конфигурации устойчивы по отношению к возмущениям квадрупольной симметрии во всей области угловых моментов, дозволенных условиями векового равновесия (40).

Атомные ядра со статической деформацией. Рассмотрим неврещающиеся ядра, имеющие статическую деформацию [65].

Начнем с анализа условий равновесия. Их нетрудно получить из (34), положив $\Omega = 0$ и $i = j$:

$$2\sigma_{ii} - \mathcal{U}_0 + C_{ii} - \Pi_{ii} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (48)$$

В случае сферического ядра ($\delta = 0$) все три уравнения (48) совпадают:

$$\Pi_0 - 2\sigma(0) - C(0) + \mathcal{U}_0 = 0. \quad (49)$$

Здесь $\sigma(0) = \frac{2}{3} \pi TR^2$, $C(0) = -\frac{4}{3} X \pi TR^2$.

Вычитая уравнение (49) из (48), получаем:

$$\Pi_{ii} = 2(\sigma_{ii} - \sigma(0)) + (C_{ii} - C(0)) + \Pi_0. \quad (50)$$

Это соотношение очень хорошо демонстрирует роль различных тензоров в возникновении статической деформации атомных ядер. Во-первых, отметим отсутствие тензора объемной ядерной энергии. Следовательно, как уже отмечалось, он не имеет никакого значения при описании формы ядер. Более того, можно показать, что кулоновские и ядерные поверхностные силы также не являются определяющими для возникновения статической деформации. Действительно, рассмотрим разность каких-либо двух уравнений из (50):

$$\Pi_{11} - \Pi_{33} = 2(\sigma_{11} - \sigma_{33}) + (C_{11} - C_{33}). \quad (51)$$

Если положить тензор давлений изотропным, т. е. $\Pi_{11} = \Pi_{22} = \Pi_{33}$, то (51) сводится к

$$2(\sigma_{11} - \sigma_{33}) + (C_{11} - C_{33}) = 0.$$

Ранее (см. гл. 1) было показано, что кроме тривиального решения $\delta = 0$ это уравнение имеет также решения с $\delta \neq 0$. Однако они возможны только при весьма экзотических значениях параметра делимости: $X > 1$ для сплюснутых сфероидов и $X > 0,89$ для вытянутых сфероидов. Таким образом, практически для всех существующих ядер предположение об изотропности тензора давлений однозначно ведет к сферической форме. Деформация возможна только при анизотропном тензоре давлений.

Воспользовавшись какой-либо реалистической моделью основного состояния (скажем, схемой Нильсона), можно было бы рассчитать Π_{ii} и потом из (51) определить деформацию ядра. Однако такая работа выходит за рамки данного обзора, поэтому мы будем брать δ из эксперимента, а зависимость Π_{ii} от деформации будем определять из (50).

Квадрупольные колебания малой амплитуды описываются системой уравнений (41) с $\Omega = 0$. Расчет показывает, что ГКР расщепляется на три ветви, каждой из которых можно поставить в соответствие определенное значение модуля проекции мультипольного момента $|\mu|$.

Расщепление ГКР за счет деформации экспериментально проявляется в его уширении. Уширение, полученное в наших расчетах, слабо меняется от ядра к ядру (см. таблицу) и составляет в среднем 1 МэВ, что неплохо согласуется как с модельными [66], так и с реалистическими [67, 68] расчетами по RPA, а также с расчетами, основанными на уравнениях гидродинамического типа [69].

Таблица уширения ГКР за счет деформации $\delta = 3\epsilon/[2(3-\epsilon)]$ [3]

Элемент	Деформация [3]	Ширина ГКР _{эсп.} МэВ	Уширение ГКР _{эсп.} МэВ	Уширение ГКР _{теор.} МэВ
⁹⁶ Mo	0	4,8±0,6 [70]	—	—
¹⁰⁰ Mo	0,19	5,4±0,5 [70]	0,3	1,0
¹⁴² Nd	0	3,8 [70]	—	—
¹⁵⁰ Nd	0,23	5,0±0,2 [70]	1,2±0,2	1,0
¹⁴⁴ Sm	0	3,9±0,2 [71] 5,4 [70] 2,4±0,2 [72]	—	—
¹⁵² Sm	0,26	4,3±0,2 [71]	0,4±0,3	1,2
¹⁵⁴ Sm	0,28	4,7±0,3 [71] 5,5 [70] 3,7±0,3 [72]	0,8±0,3 0,1 1,3±0,3	1,3
¹⁶⁴ Dy	0,28	—	—	1,3
¹⁷⁴ Hf	0,25	—	—	1,1
²³⁰ U	0,22	—	—	0,9

Экспериментальное уширение мы определяем просто, вычитая из ширины ГКР деформированного ядра ширину ГКР соответствующего сферического изотопа. В данных разных авторов [70—72] имеется довольно заметный разброс (см. таблицу), но все-таки большей частью теория согласуется с экспериментом. В [73] авторы сумели измерить непосредственно расстояние между γ - и β -ветвями в ^{152}Sm : $\Delta E = (2,1 \pm 0,6)$ МэВ, что тоже не слишком далеко от теоретического значения 1,2 МэВ.

3. ВИРИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТЕНЗОРОВ ВТОРОГО РАНГА. РЕАЛИСТИЧЕСКОЕ НЕЛОКАЛЬНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

В этом разделе будут продемонстрированы возможности метода моментов в работе с реалистическим нуклон-нуклонным взаимодействием при реалистическом же распределении вещества в ядре (диффузный край) [74]. В качестве реалистического взаимодействия используем один из вариантов сил Скирма — SKM* [75]. Самосогласованный потенциал получается из них обычным образом [76]; мы заимствуем его из [45]. Реалистическое взаимодействие различает протоны и нейтроны, поэтому матрица плотности приобретает соответствующий индекс τ , а уравнение (1) слегка видоизменяется [76]:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}_\tau}{\partial t} = [\hat{H}_\tau, \hat{\rho}_\tau]. \quad (52)$$

Гамильтониан здесь имеет следующий вид:

$$\hat{H}_\tau = -\nabla \frac{\hbar^2}{2m_\tau^*} \nabla + U_\tau(r) + \frac{1}{2i} (\nabla \cdot I_\tau + I_\tau \cdot \nabla),$$

где

$$\frac{1}{m_\tau^*} = \frac{1}{m} + 2C_\tau(r), \quad C_\tau = \frac{1}{4\hbar^2} \left(t_+ n - \frac{t_-}{2} n_\tau \right), \quad n = n_\tau + n_{\tau'},$$

$$\begin{aligned} U_\tau = t_0 \left[(1 + \chi_0/2) n - \left(\chi_0 + \frac{1}{2} \right) n_\tau \right] + \frac{1}{16} (3t_2 - 5t_1) \nabla^2 n + \\ + \frac{1}{32} (3t_2 + 5t_1) \nabla^2 n_\tau + \frac{1}{2} \eta [P + m(n_\tau u_\tau^2 + n_{\tau'} u_{\tau'}^2)] - \\ - \frac{mt_-}{8\hbar^2} (P_\tau + mn_\tau u_\tau^2) + \delta_{\tau, p} U_c + \frac{t_3}{24} n^{\sigma-1} \{ n^2 [(1 - \chi_3) \sigma + 2(2 + \chi_3)] - \\ - 2n_\tau^2 \sigma (1 + 2\chi_3) + 2nn_{\tau'} (\sigma - 1) (1 + 2\chi_3) \}, \end{aligned}$$

$$I_\tau = -\frac{t_+}{2} j + \frac{t_-}{4} j_\tau, \quad j_\tau = n_\tau u_\tau,$$

$$U_c(r) = \int n_p(r') \frac{e_p^2}{|r-r'|} dr' - \text{прямая часть кулоновского потенциала, } P_\tau = \sum_{s=1} P_{ss\tau}, \quad P = P_\tau + P_{\tau'}, \quad t_+ = t_1 + t_2, \quad t_- = t_1 - t_2,$$

$\eta = mt_+/2\hbar^2$, σ , t_0 , t_1 , t_2 , t_3 , χ_0 , χ_3 — параметры SKM*, $\tau' = p$ (протоны), если $\tau = n$ (нейтроны), и наоборот.

Проделав с уравнением (52) операции, описанные в разд. 1, получим модифицированное уравнение непрерывности

$$\frac{\partial n_\tau}{\partial t} + \text{div} (n_\tau u_\tau) = \eta \text{div} [n_\tau n_{\tau'} (u_{\tau'} - u_\tau)], \quad (53)$$

уравнение движения (Эйлера) и уравнение для тензора напряжений.

Далее, согласно рецептам разд. 1, надо проинтегрировать эти уравнения по \mathbf{r} с соответствующими весами и исследовать вариации

E_x , МэВ

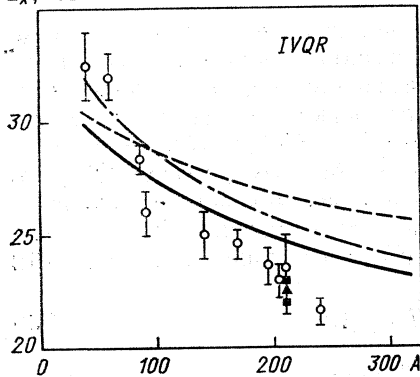


Рис. 5. Рассчитанные и экспериментальные значения энергии извекторного квадрупольного резонанса (IVQR) в зависимости от атомной массы:

сплошная кривая — равновесная плотность параметризуется по Бернштейну [78]; штрихпунктирная — по Вору и Мотельсону [77]; пунктирная кривая — приближенный расчет. Экспериментальные данные взяты из работы [79]

полученных вириальных уравнений, а также их статические решения. Здесь следует отметить несколько новых элементов.

Во-первых, в правой части уравнения непрерывности (53) появился член, имитирующий обменные эффекты [76]. Соответственно изменяется и формула для вариации плотности:

$$\delta n_\tau = -\text{div} (n_\tau \xi_\tau) - \eta \text{div} [n_\tau n_{\tau'} (\xi_\tau - \xi_{\tau'})].$$

Во-вторых, из-за нелокальности сил Скирма в вириальных уравнениях сохраняются члены, содержащие тензоры P_{ijk} . Ими приходится пренебрегать. С помощью правил сумм удастся, однако, показать, что роль отброшенных членов ничтожна.

Наконец, реалистичность взаимодействия дает возможность изучать как изоскалярные (IS), так и изовекторные (IV) возбуждения, а также моды сжатия. Детали расчетов можно найти в [74].

Статическое решение вириальных уравнений дает связь параметров формы ядра и скорости вращения, почти точно воспроизводящую результаты разд. 2. При этом оказывается, что за поверхностное натяжение отвечает нелокальная часть сил Скирма (коэффициенты t_+ , t_-).

Вибрационные решения этих уравнений описывают 2^+ , 1^+ и 0^+ -возбуждения. При $\Omega = 0$ теория дает IS и IV 2^+ - и 0^+ -уровни —

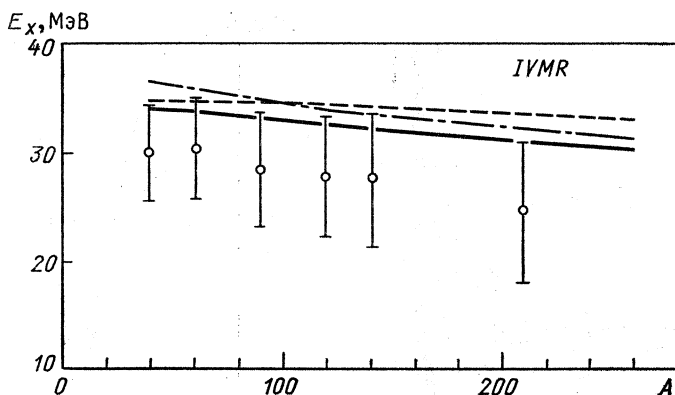


Рис. 6. Рассчитанные и экспериментальные значения энергии изовекторного монополярного резонанса (*IVMR*) в зависимости от атомной массы. Экспериментальные данные взяты из работы [80]. См. также пояснения к рис. 5

гигантские резонансы. Теоретические значения изоскалярных гигантских квадрупольного и монополярного резонансов (ГКР и ГМР) практически совпадают с экспериментом. Ситуация с изовекторными ГКР и ГМР не столь блестяща — о степени согласия теории с экспериментом можно судить по рис. 5 и 6. Здесь проверялась также точность широко используемого в такого рода расчетах приближения, когда считается, что нейтроны и протоны движутся в фазе ($V_{i,jn}/Z_n = V_{i,jp}/Z_p$ для *IS*-колебаний) либо в противофазе ($V_{i,jn}/Z_n = -V_{i,jp}/Z_p$ для *IV*-колебаний). Приближенное решение практически совпадает с точным для *IS*-мод и заметно отличается от точного для *IV*-мод — погрешность в тяжелых ядрах достигает 10%. Расчеты показывают, что *IV*- и *IS*-моды дают почти одинаковый вклад в электромагнитное ЭВПС и полностью его исчерпывают, причем каждая из них, в свою очередь, почти полностью исчерпывает соответствующее *IV* или *IS* правило сумм.

При $\Omega \neq 0$ оба ГКР расщепляются на пять ветвей, а также появляются пять низколежащих мод (рис. 7). Две из них (5 и 12 — *IS* γ - и α -моды) уже были описаны в разд. 2. У них появились изовекторные аналоги — кривые 6 и 11.

Пятая низколежащая мода (кривая 13) отвечает колебаниям протонного углового момента относительно нейтронного (наподобие ножниц). Изоскалярного аналога у нее нет, поскольку суммарный угловой момент сохраняется. Эту моду можно классифицировать как изовекторное 1^+ -возбуждение. В ядрах, имеющих статическую деформацию, она известна как ножничная мода, или угловой резонанс [81—83].

Моду 11 тоже можно трактовать как своеобразное вращательное движение нейтронов относительно протонов. Действительно, в разд. 2 было показано, что ее изоскалярный аналог (мода 12) имеет много

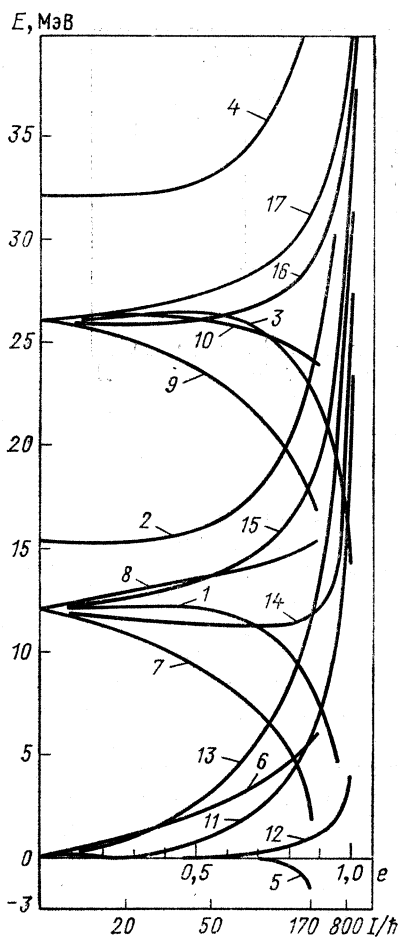


Рис. 7. Энергия 0^+ -, 1^+ - и 2^+ -возбуждений в зависимости от эксцентриситета $e = (1 - a_3^2/a_1^2)^{1/2}$ и углового момента I . Уровни перенумерованы следующим образом: изоскалярные $-1(0)$, $2(0)$, $5(-2)$, $7(+2)$, $8(-2)$, $13(-1)$, $14(+1)$, $15(-1)$; изовекторные $-3(0)$, $4(0)$, $6(-2)$, $9(+2)$, $10(-2)$, $16(+1)$, $17(-1)$ (в скобках указано значение μ — проекции соответствующего мультипольного момента на ось вращения). Изоскалярный уровень 12 и изовекторный уровень 11 имеют проекцию $\mu = -1$ до точки зачленения энергии и $\mu = +1$ после этой точки

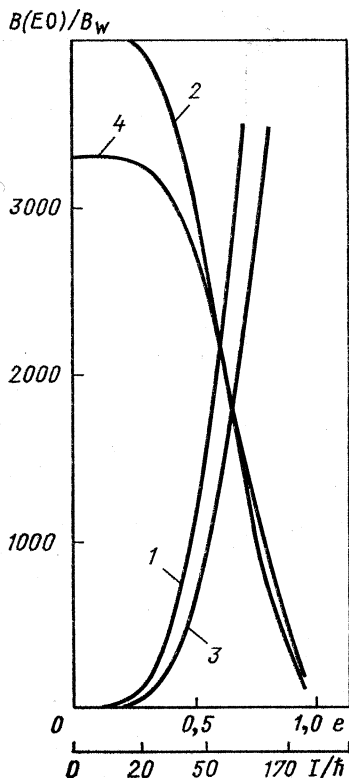


Рис. 8. $B(E0)/B_w$ -факторы переходов из возбужденных состояний в основное. Нумерация кривых соответствует нумерации уровней (см. рис. 7), с которых осуществляются переходы

общего с прецессией. Соответствующая изовекторная мода (11) должна, следовательно, описывать «прецессию» протонного вещества относительно нейтронного.

Таким образом, у нас имеется два 1^+ -уровня магнитного типа. Если, следуя [84], учесть возможную неаксиальность ядер, то эти

уровни должны расщепиться. Учет спиновых степеней свободы, а также деформации поверхности Ферми более высокой мультипольности может привести к дальнейшему их расщеплению. Другие авторы в различных феноменологических подходах [85—89] получают, как правило, один или два уровня. В более реалистических расчетах типа RPA + HFV ножничная мода сильно фрагментирует [90—94]. В первых экспериментах, подтвердивших существование такой моды [95], получался один уровень при E_{1+} (эксп) = 3,1 МэВ (^{156}Gd) с $B(M1)\uparrow_{\text{эксп}} = (1,3 \pm 0,2) \mu_N^2$. По мере совершенствования техники эксперимента число уровней росло, так что в недавней работе [96] в этом ядре наблюдали уже десять уровней с энергиями от 2,027 до 3,218 МэВ и с $B(M1)\uparrow$ от $0,09\mu_N^2$ до $1,21\mu_N^2$, причем

$$\sum_{i=1}^{10} B_i(M1)\uparrow = 2,66\mu_N^2.$$

Если отвлечься от того, что в данной работе ядра деформируются только из-за вращения, и сравнить вычисленную здесь энергию 1^+ -возбуждений при соответствующей деформации $\delta = 0,25$ ($e \simeq 0,66$, $I \simeq 69\hbar$, см. рис. 7) с экспериментальными значениями для ядра ^{156}Gd , то оказывается, что теория дает вполне разумные значения $E_{1+}(13) \simeq 4,9$ МэВ, $E_{1+}(11) \simeq 1,9$ МэВ. Теоретические значения $B(M1)$ -факторов обоих уровней практически одинаковы ($\simeq 1,6\mu_N^2$) и тоже неплохо согласуются с экспериментом.

Отметим также, что во всех экспериментальных работах подчеркивается орбитальный характер обсуждаемой моды, что находится в полном соответствии с нашей теорией. Уровни 12 и 11, которые обращаются в нуль при $I_c \simeq 25\hbar$ и $I_c \simeq 19\hbar$, соответственно, имеют интересную особенность: в этой точке у них меняется знак μ с минуса на плюс. Это означает, что соответствующие данным уровням моды возбуждаются с уменьшением спина при $I < I_c$ и с увеличением спина при $I > I_c$. Небезынтересно и механическое толкование этого явления. Поскольку мода 12 родственна прецессионной, можно сказать, что в точке I_c меняется направление вектора прецессии.

Расчет $B(E2)$ -факторов показывает большую коллективность (15—20 единиц Вайскопфа) высоколежащих мод и заметное увеличение коллективности низколежащих мод (особенно 5 и 12) с ростом I . Для изоскалярных возбуждений $B(E2)$ -факторы, как правило, больше, чем для изовекторных.

На рис. 8 показаны рассчитанные $B(E0)$ -факторы в зависимости от e и I . Как видно, в районе $e \simeq 0,6 \div 0,7$ ($\delta \simeq 0,3$) $B(E0)$ -факторы дыхательной моды и β -моды сравниваются по величине. Это говорит о сильном смешивании монополюльных и квадрупольных возбуждений в деформированных ядрах. Экспериментально оно проявляется в «расщеплении» гигантского монополюльного резонанса в деформированных ядрах [97, 98]. Интересно, что качественно этот результат воспроизводится в довольно простой схематической модели [66].

4. ВИРИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТЕНЗОРОВ 3-ГО РАНГА И ВОЗБУЖДЕНИЯ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ЧЕТНОСТИ

В этом разделе изучаются динамика тензоров третьего ранга и, соответственно, свойства возбуждений отрицательной четности.

Основные уравнения. Вириальные уравнения (21) — (23), в случае равновесного состояния, удовлетворяются тождественно, не давая никакой полезной информации. Движения малой амплитуды описываются системой уравнений (30). В разложении (31) для $\xi_i(\mathbf{r}, t)$ ограничиваемся первыми тремя членами ряда, а в разложении (32) для $\delta P_{ij}(\mathbf{r}, t)$ — двумя.

Согласно разд. 1, динамику декартовых тензоров третьего ранга необходимо изучать совместно с динамикой тензоров первого ранга. Если не различать протоны и нейтроны, то единственным тензором первого ранга будет координата центра тяжести ядра $V_i(t)$, которая фиксируется условием

$$V_i(t) \equiv \int \xi_i(\mathbf{r}, t) \rho(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = 0.$$

Присутствующий в (30) тензор потенциальной энергии $\mathcal{W}_{i,jk}$ является суммой двух слагаемых:

$$\mathcal{W}_{i,jk} = \mathcal{U}_{i,jk} + C_{i,jk}.$$

Кулоновская часть имеет следующий вид:

$$C_{i,jk} = \left(\frac{Ze_p}{A}\right)^2 \int n(\mathbf{r}) x_j x_k \frac{\partial}{\partial x_i} \int \frac{n(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' d\mathbf{r}.$$

В приближении постоянной плотности и резкого края ядра тензор ядерных сил полезно разбить на объемную и поверхностную части:

$$\mathcal{U}_{i,jk} = \int_V n x_j x_k \frac{\partial U}{\partial x_i} d\mathbf{r} = n_0 \int_V x_j x_k \frac{\partial U}{\partial x_i} d\mathbf{r} = \Sigma_{i,jk} - \delta_{ij} \mathcal{U}_k - \delta_{ik} \mathcal{U}_j,$$

$$\text{где } \Sigma_{i,jk} = n_0 \int_S U x_j x_k s_i dS, \quad \mathcal{U}_j = n_0 \int_V x_j U d\mathbf{r}.$$

Среднее поле U на поверхности ядра параметризуем поверхностным натяжением [см. формулу (38)]. Для эллипсоидов тензоры $\Sigma_{i,jk}$ и $C_{i,jk}$, очевидно, равны нулю. Формулы для вариаций $\delta \Sigma_{i,jk}$ были получены в работе [49], а для $\delta C_{i,jk}$ — в работе [16]. Естественно, они представляют собой комбинации $V_{i,jk}$ и многоиндексных символов.

На проблеме расчета квантовой поправки $\delta \chi_{i,jk}$ следует остановиться особо.

В случае самосогласованного среднего поля его вариация дается формулой

$$\delta W(\mathbf{r}) = \int v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \delta n(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'.$$

С ее помощью получаем

$$\begin{aligned} \delta\chi_{ijk} &= \int \int d\mathbf{r}' d\mathbf{r} \left\{ \delta n(\mathbf{r}) n(\mathbf{r}') \frac{\partial^3 v(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + n(\mathbf{r}) \delta n(\mathbf{r}') \frac{\partial^3 v(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right\} = \\ &= \int \int d\mathbf{r}' dn(\mathbf{r}') \delta n(\mathbf{r}) \left\{ \frac{\partial^3 v(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^3 v(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial x'_i \partial x'_j \partial x'_k} \right\}. \end{aligned}$$

Если выполнены условия галилеевой инвариантности, т. е. $v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = v(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$, то

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = - \frac{\partial v}{\partial x'_i}$$

и квантовая поправка $\delta\chi_{ijk}$ обращается в нуль.

Если же среднее поле не самосогласовано, то квантовая поправка начинает зависеть от вида потенциала. Так, в нашем случае, когда среднее поле на поверхности ядра аппроксимируется поверхностным натяжением, для квантовой поправки получается [27, 28]:

$$\begin{aligned} \delta\chi_{ijk} &= 2\pi T \frac{\hbar^2}{m^2} \left\{ \sum_{s=1}^3 \left[\delta_{ik} \left(\frac{1}{5} L_{j,ss} - \frac{1}{7} L_{jss} \right) + \delta_{ij} \left(\frac{1}{5} L_{k,ss} - \frac{1}{7} L_{kss} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \delta_{kj} \left(\frac{1}{5} L_{i,ss} - \frac{1}{7} L_{iss} \right) \right] - \frac{2}{7} L_{ijk} \right\}, \end{aligned}$$

где $L_{ijk} = L_{i,jk} + L_{j,ki} + L_{k,ij}$.

С учетом всех перечисленных замечаний система уравнений (30) принимает вид:

$$\begin{aligned} \ddot{V}_{i,jk} + \delta C_{i,jk} + \delta \Sigma_{i,jk} - \delta_{ij} \delta \mathcal{U}_k - \delta_{ik} \delta \mathcal{U}_j - \delta \Pi_{ij}^k - \delta \Pi_{ik}^j &= 0; \\ \delta \dot{\Pi}_{ij}^k + \frac{2A}{9m} \langle p^2 r^2 \rangle (\dot{L}_{i,jk} + \dot{L}_{j,ik}) - \delta \Pi_{ijk} &= 0; \\ \delta \dot{\Pi}_{ijk} - \frac{\langle p^2 \rangle}{m^2 \langle r^2 \rangle} \left[\sum_{s=1}^3 (\delta_{jk} \delta \Pi_{is}^s + \delta_{ik} \delta \Pi_{js}^s + \delta_{ij} \delta \Pi_{ks}^s) - \right. \\ &\quad \left. - \delta \Pi_{ij}^k - \delta \Pi_{jk}^i - \delta \Pi_{ki}^j \right] = \delta \chi_{ijk}. \end{aligned} \quad (54)$$

Сорок шесть уравнений этой системы следует перекомбинировать так, чтобы они превратились в уравнения для неприводимых тензоров мультипольности $\lambda = 3, 2, 1$. Соответствующие системы уравнений можно найти в [33].

Возбуждения 3⁻. Теория дает два 3⁻-уровня. В простейшем приближении они могут быть записаны как

$$E_{3^-}^{(B)} = \hbar \sqrt{\frac{43}{5}} \frac{v_F}{R} \simeq 130 A^{-1/3} \text{ МэВ}, \quad (55)$$

$$E_{3^-}^{(H)} = \hbar \sqrt{\frac{15}{43} \left(\frac{7}{4} - X \right) \frac{160\pi}{7mA}} T \simeq 31,4 \sqrt{\frac{7}{4} - X} A^{1/2} \text{ МэВ}.$$

$E_3^{(B)}$ является, очевидно, центроидом гигантского октупольного резонанса (ГОР), а $E_3^{(H)}$ можно интерпретировать как центроид всех 3^- -уровней, лежащих ниже ГОР.

Здесь уместно будет обсудить одно общепринятое приближение, без которого нам удалось обойтись. Речь идет о бесхитростном обрывании цепочки p -моментов уравнения (6) на уравнении (10), когда пренебрегают тензорами P_{ijk} , P_{ijkl} и т. д. в надежде, что с ростом ранга тензоров $P_{i\dots l}$ их влияние быстро убывает, т. е. существует некая «сходимость по рангу». Если мы, следуя этой логике, положим $P_{ijk} = 0$ и отбросим последнее уравнение в (54), то получим только одно 3^- -состояние с энергией

$$\hbar\omega_{3^-} (P_{ijk} = 0) = \hbar \frac{v_F}{R} \sqrt{\frac{28}{5}} \simeq 104,5A^{-1/3} \text{ МэВ},$$

что в точности совпадает с результатом Никса [12], но слишком заметно отличается от (55), чтобы можно было говорить о какой бы то ни было сходимости.

Из анализа соотношений между амплитудами видно, что октупольная ДПФ одинаково важна как для высоко-, так и для низколежащего возбуждения, а эффекты квадрупольной ДПФ проявляются, практически, только в высоколежащем возбуждении. Распределение коллективных токов одинаково для обеих мод.

Расчеты показывают, что ГОР исчерпывает около 70% ЭВПС, а $E_3^{(H)}$ — соответственно около 30%, что находится в качественном согласии с экспериментальными данными. Заметим также, что учет квантовой поправки практически не влияет на энергии 3^- -возбуждений, но оказывается заметным при расчете $B(E3)$ -факторов низколежащих 3^- -состояний, приближая результаты к эксперименту на $\sim 10\%$ в тяжелых ядрах и на $\sim 20\%$ — в легких.

Возбуждения 2^- и 1^- . Кроме двух 3^- -уровней уравнения (54) дают также один 2^- - и один 1^- -уровень. В простейших приближениях энергию 2^- -возбуждения, которое мы отождествляем с магнитным квадрупольным резонансом, можно представить в виде

$$E_{2^-} \simeq \hbar \sqrt{\frac{7}{5}} \frac{v_F}{R} \simeq 52,3A^{-1/3} \text{ МэВ}.$$

Эта формула неплохо описывает экспериментальные данные. Расчеты $B(M2)$ -факторов показывают, что ни в одном ядре они не отличаются от экспериментальных больше чем в 3 раза, что следует считать неплохим согласием, поскольку мы не учитываем спиновые степени свободы.

Изоскалярное 1^- -возбуждение отвечает колебаниям тороидного дипольного момента [99] ядра $T = \frac{e_p Z}{40cA} \int n [\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}) - 2r^2 \mathbf{u}] d\mathbf{r}$. Его энергия дается формулой

$$E_{1^-} = \hbar \sqrt{\frac{41}{5}} \frac{v_F}{R} \simeq 65,6A^{-1/3} \text{ МэВ},$$

что близко к результату работы [100]. Достаточно убедительной экспериментальной информации о таких возбуждениях сейчас нет, хотя имеются некоторые спекуляции на эту тему [101, 102].

Возбуждения 3^- и 2^- с реалистическим нелокальным взаимодействием. Продemonстрируем результаты расчетов энергий 3^- - и 2^- -возбуждений с силами Скирма (SKM*).

Структура соответствующей системы уравнений сходна со структурой системы (54) с той лишь разницей, что в уравнения теперь входят как протонные, так и нейтронные переменные и самих уравнений, соответственно, в 2 раза больше. С помощью приближенного решения (см. разд. 3) резонансы легко могут быть классифицированы по изоспину. Изоскалярные моды представлены на рис. 9. Как видно, учет диффузности края ядра (для ГОР и 2^-) и реалистичность взаимодействия приводят к заметному улучшению согласия теории

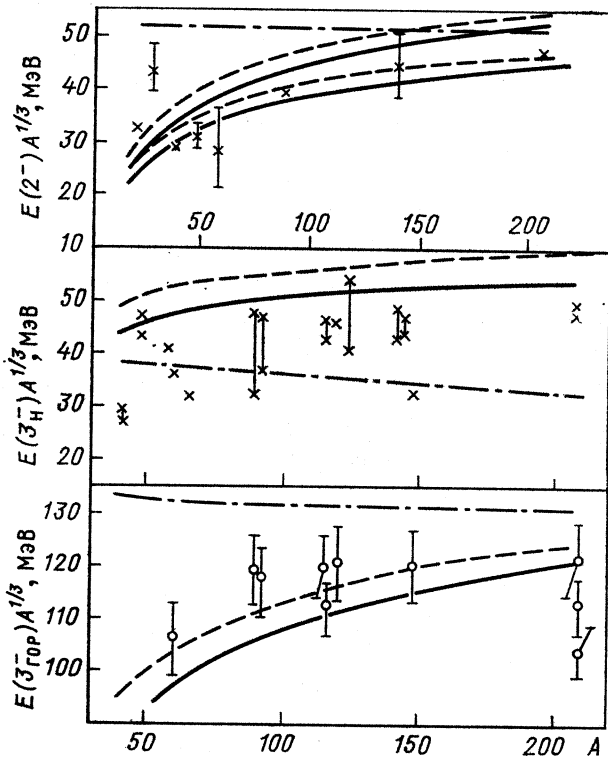


Рис. 9. Центриды энергий изоскалярного ГОР (внизу), изоскалярных низколежащих 3^- -состояний (посередине) и магнитного квадрупольного резонанса (изоскалярного и изовекторного) (вверху):

расчеты выполнены с параметрами равновесной плотности из [78] (сплошные кривые) и [77] (пунктир); штрихпунктирные кривые — результаты расчета в приближении несжимаемого ядра с резким краем. Экспериментальные данные — из работ [103–113]

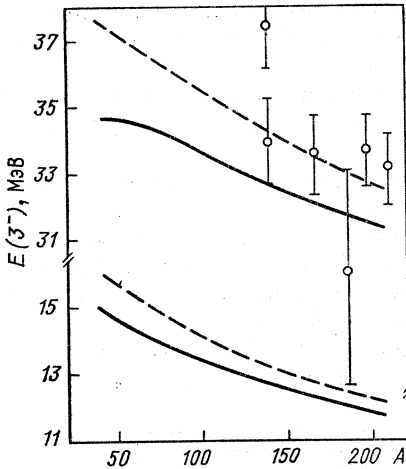


Рис. 10. Энергии изовекторных 3^- -резонансов:

параметры равновесной плотности взяты из [78] (сплошные кривые) и [77] (пунктир); экспериментальные данные — из [79]

с экспериментом. Положение центроидов низколежащих 3^- -уровней определялось по формуле:

$$E_{3^-}^{(H)} = \frac{\sum_i E_{3^-}^{(i)} B(E3, 3_i^- \rightarrow gr)}{\sum_i B(E3, 3_i^- \rightarrow gr)}$$

В данных различных авторов по $B(E3)$ -факторам [103—112] имеется довольно большой разнор. Поэтому на рисунке приведены два

экспериментальных значения — максимальное и минимальное.

Энергии изовекторных 3^- -возбуждений представлены на рис. 10. Там же показаны и первые экспериментальные данные по изовекторному ГОР [79]. Согласие теории с экспериментом, как видно, неплохое. Результаты микроскопических [68, 114] и феноменологических [115, 116] расчетов изовекторного ГОР в общем и целом довольно близки к нашим, но зависимость от A предсказывается иная. Наш расчет можно аппроксимировать кривой $E \approx 51A^{-1/11}$ МэВ, тогда как феноменология дает $E \approx 172A^{-1/3}$ МэВ [68].

5. ВИРИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТЕНЗОРОВ ВТОРОГО И ЧЕТВЕРТОГО РАНГА. 1^+ -, 2^+ -, 3^+ - и 4^+ -ВОЗБУЖДЕНИЯ В ПРИБЛИЖЕНИИ НЕСЖИМАЕМОГО ЯДРА С РЕЗКИМ КРАЕМ

В этом разделе делается еще один шаг в сторону увеличения ранга изучаемых тензоров. Здесь будет исследоваться динамика тензоров четвертого и второго ранга (совместно) с тем, чтобы описать гигантский гексадекапольный резонанс (ГГР) и ГКР в рамках единого подхода [117].

Основные уравнения и приближения. Согласно сформулированным в разд. 1 правилам для описания коллективных возбуждений положительной четности с мультипольностью $\lambda \leq 4$ требуются две системы вириальных уравнений. Первую систему представляют уравнения (14) — (16), вторую — уравнения (24).

Считаем, что в состоянии равновесия ядро имеет сферическую форму; $u_i^0 = 0$, $P_{ij}^0 = \delta_{ij}P^{(0)}$, $P_{ijk}^0 = 0$. Смещения ξ_i и вариации δP_{ij} и δP_{ijk} аппроксимируем следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi_i(\mathbf{r}, t) = & L_i(t) + \sum_{j=1}^3 L_{i,j}(t) x_j + \sum_{j,k=1}^3 L_{i,jk}(t) x_j x_k + \\ & + \sum_{j,k,l=1}^3 L_{i,jkl}(t) x_j x_k x_l; \end{aligned} \quad (56)$$

$$\delta P_{ij}(\mathbf{r}, t) = n(\mathbf{r}, t) \left[D_{ij}(t) + \sum_{k=1}^3 D_{ij}^k(t) x_k + \sum_{k,l=1}^3 D_{ij}^{kl}(t) x_k x_l \right]; \quad (57)$$

$$\delta P_{ijk}(\mathbf{r}, t) = n(\mathbf{r}, t) \left[N_{ijk}(t) + \sum_{l=1}^3 N_{ijk}^l(t) x_l \right]. \quad (58)$$

В предыдущих разделах уже приводились аргументы в пользу такого приближения. В дополнение к ним отметим, что в случае гексадекапольных колебаний формула (56) эквивалентна анзацу Тасси [118], а в случае квадрупольных колебаний представляет собой его обобщение. Кроме того, при $\lambda = 4$ формулы (56) — (58) являются в определенном смысле «длинноволновым приближением», а при $\lambda = 2$ это уже выход за его рамки. Равновесные значения тензоров P_{ij} , Π_{ijkl} и среднего поля W связаны соотношениями, следующими из вириальных уравнений (15), (24):

$$\begin{aligned} \int n x_j \frac{\partial W}{\partial x_i} d\mathbf{r} - \Pi_{ij} &= 0; \\ \int n x_j x_k x_l \frac{\partial W}{\partial x_i} d\mathbf{r} - \Pi_{ij}^{kl} &= 0; \\ \Pi_{ijkl} + \sum_{s=1}^3 \int \frac{1}{\rho} \left[P_{ij} \frac{\partial P_{ks}}{\partial x_s} \right]_{ijk} x_l d\mathbf{r} &= -\frac{\hbar^2}{4m^2} \int n x_l \frac{\partial^3 W}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

С учетом вышеперечисленных приближений и замечаний вариации вириальных уравнений принимают вид:

$$\begin{aligned} \ddot{V}_{i,j} - \delta \Pi_{ij} + \delta C_{ij} + 2\delta \sigma_{ij} - \delta U_{ij} &= 0; \\ \delta \dot{\Pi}_{ij} + \frac{A \langle p^2 \rangle}{3m} \dot{L}_{ij} + A \frac{\langle p^2 r^2 \rangle}{3m} \dot{\tilde{L}}_{ij} &= 0; \\ \ddot{V}_{i,jkl} + \delta C_{i,jkl} + \delta \Sigma_{i,jkl} - \delta U_{i,jkl} - [\delta \Pi_{ij}^{kl}]_{jkl} &= 0; \\ \delta \dot{\Pi}_{ij}^{kl} + 2A \frac{\langle p^2 r^4 \rangle}{15m} [\dot{L}_{i,jkl}]_{ij} + \delta_{kl} \frac{A}{9m} \left(\langle p^2 r^2 \rangle \dot{L}_{ij} + \frac{3}{5} \langle p^2 r^4 \rangle \dot{\tilde{L}}_{ij} \right) - \\ - \delta_{ij} \frac{A}{9m} \left(\langle p^2 r^2 \rangle \dot{L}_{kl} + \frac{3}{5} \langle p^2 r^4 \rangle \dot{\tilde{L}}_{kl} \right) - [\delta \Pi_{ijk}^l]_{kl} &= 0; \quad (59) \\ \delta \dot{\Pi}_{ijk}^l + \frac{A}{15m^3} [\delta_{jk} \langle p^4 \rangle \dot{L}_{il} + \langle p^4 r^2 \rangle \dot{\tilde{L}}_{il}]_{ijk} + \frac{\langle p^2 \rangle}{m^2 \langle r^2 \rangle} [\delta \Pi_{jkl}^i]_{ijk} &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \delta \Pi_{ijk}^l + \frac{A}{3m^2} \left\{ \langle p^2 \rangle \delta_{il} D_{jh} + \frac{1}{3} \langle p^2 r^2 \rangle \left(2D_{jh}^{il} + \sum_{s=1}^3 D_{jh}^{ss} \right) \right\} - \\ & - \frac{1}{m} \delta_{jh} \int \frac{1}{n} x_l P^{(0)} \sum_{t=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_t} \left[n \left(D_{it} + \sum_{s,r=1}^3 D_{it}^{sr} x_s x_r \right) \right] dr - \\ & - \frac{1}{m} \delta_{jh} \int \frac{1}{n^2} x_l \operatorname{div} (n \xi) P^{(0)} \frac{\partial P^{(0)}}{\partial x_i} dr - \delta \Pi_{ijkl} - \chi_{ijk, l} = 0. \end{aligned}$$

Здесь

$$\tilde{L}_{ij} = \sum_{s=1}^3 (L_{i, jss} + L_{j, iss}), \quad \chi_{ijk, l} = \frac{\hbar^2}{4m^2} \delta \int n x_l \frac{\partial^3 W}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} dr.$$

Тензоры кулоновских сил имеют вид:

$$\begin{aligned} C_{i, jhl} &= \frac{1}{3} (2[C_{ij, hl}]_{jhl} + C_{ik; j, l} + C_{il; j, h} + C_{ij; h, l}), \\ 2C_{ij, hl} &= - \left(\frac{e_p Z}{A} \right)^2 \iint n(\mathbf{r}) n(\mathbf{r}') x_h x_l \frac{(x_i - x'_i)(x_j - x'_j)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dr dr', \\ 2C_{ij; h, l} &= - \left(\frac{e_p Z}{A} \right)^2 \iint n(\mathbf{r}) n(\mathbf{r}') x_h x'_l \frac{(x_i - x'_i)(x_j - x'_j)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dr dr'. \end{aligned}$$

Выражения для их вариаций приведены в [119]. Тензоры ядерных сил, как обычно, разделяем на поверхностную и объемную части:

$$\begin{aligned} \int n x_j \frac{\partial U}{\partial x_i} dr &= 2\sigma_{ij} - U_{ij}, \\ \int n x_j x_k x_l \frac{\partial U}{\partial x_i} dr &= \Sigma_{i, jkl} - \mathcal{U}_{i, jkl}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} 2\sigma_{ij} &= - \int x_j U \frac{\partial n}{\partial x_i} dr, \quad U_{ij} = \delta_{ij} \int n U dr, \quad \Sigma_{i, jkl} = 2[\sigma_{ij, hl}]_{jkl}, \\ 2\Sigma_{ij, kl} &= - \int x_j x_k x_l U \frac{\partial n}{\partial x_i} dr, \quad \mathcal{U}_{i, jkl} = [\delta_{ij} \mathcal{U}_{kl}]_{jkl}, \quad \mathcal{U}_{kl} = \int n U x_k x_l dr. \end{aligned}$$

Среднее поле на поверхности ядра аппроксимируем поверхностным натяжением (38). Тогда для тензоров σ_{ij} и $\delta\sigma_{ij}$ получаются выражения, приведенные в приложении 1, а для тензора $\delta\Sigma_{i, jkl}$ и квантовой поправки $\chi_{ijk, l}$ имеем

$$\begin{aligned} \delta\Sigma_{i, jkl} &= \frac{24\pi\Gamma}{mA} \left\{ V_{i, jkl} - \frac{R^2}{9} [\delta_{jk} V_{il}]_{jkl} \right\}, \\ \chi_{ijk, l} &= - \frac{5\pi\Gamma\hbar^2}{Am^3 R^2} \left[\delta_{ij} \left\{ \frac{3}{5} V_{kl} - \frac{1}{R^2} \sum_{s=1}^3 (V_{k, lss} + V_{l, hss}) \right\} \right]_{ijkl}. \end{aligned}$$

Учитывая, что индексы i, j, k, l принимают значения 1, 2, 3, нетрудно подсчитать, что система (59) содержит 126 уравнений. Их можно перекомбинировать так, чтобы получились уравнения для мод определенной мультипольности $\lambda = 4, 3, 2, 1, 0$.

Результаты расчетов. В приближении несжимаемости 0^+ -уровни не появляются. Теория дает два 4^+ -уровня с энергиями: $E_4^{(1)} \simeq$

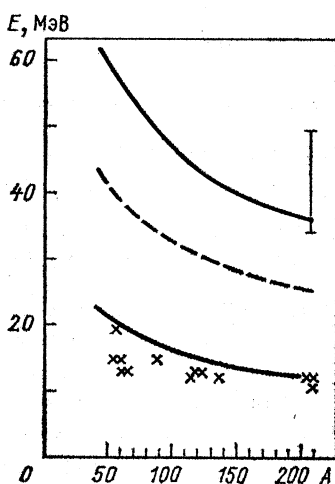


Рис. 11. Гексадекапольные возбуждения:

сплошные кривые — точный расчет; пунктир — учтена только квадрупольная ДПФ; крестики — экспериментальные данные из [98, 120]. Экспериментальные границы для верхнего 4^+ -возбуждения — из работы [98]

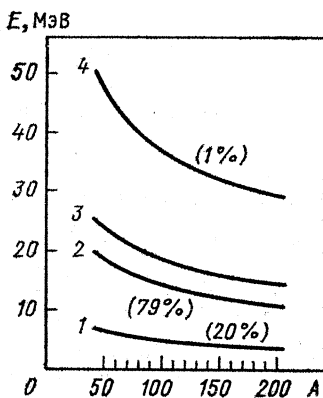


Рис. 12. Квадрупольные возбуждения. В скобках указан процент истощения изоскалярного правила сумм

$\simeq 70 A^{-1/3}$ МэВ и $E_4^{(2)} \simeq 242A^{-1/3}$ МэВ. Они изображены на рис. 11 сплошными линиями (для ядер с дорожки β -стабильности). Там же представлены экспериментальные данные по гигантским гексадекапольным резонансам из работ [98, 120]. Как видно, решение с меньшей энергией неплохо с ними согласуется. Расхождение в легких ядрах должно уменьшиться при учете размытости края ядра и сжимаемости. Этот резонанс приблизительно соответствует ожидаемому переходу с $\Delta N = 2$ и обычно воспроизводится в RPA -расчетах различной степени сложности [68, 114, 121, 122]. Без учета кулоновских и поверхностных сил $E_4^{(1)}$ опускается к $\sim 65 A^{-1/3}$ МэВ.

Второй 4^+ -резонанс лежит явно выше ожидаемого возбуждения с $\Delta N = 4$, которое, как правило, и получается в RPA -расчетах [68, 114, 121]. Исключение составляет лишь работа [122], предсказывающая положение второго 4^+ -уровня в том же районе, где и мы. Имеющееся одно экспериментальное указание [98] согласуется с нашим расчетом.

Если пренебречь октупольной и гексадекапольной ДПФ (переменные $\delta\Pi_{ijk}^i$ и $\delta\Pi_{ijk}^l$), то остается только одно решение (пунктирная

кривая), которое не имеет ничего общего с экспериментом, но совпадает (если пренебречь также кулоновскими и поверхностными силами) с результатом работы [12]: $E_4 \simeq 150A^{-1/3}$ МэВ.

Оба уровня дают примерно одинаковый вклад в ЭВПС и полностью его исчерпывают.

Система (59) дает один 3^+ -уровень с энергией

$$E_3 = 4 \sqrt{\frac{2}{5}} \frac{v_F}{R} \simeq 116A^{-1/3} \text{ МэВ.}$$

Если пренебречь октупольной ДПФ, уровень опускается к $\tilde{E}_3 = 3 \sqrt{\frac{2}{5}} \frac{v_F}{R} = 87A^{-1/3}$ МэВ. В работе [5], где октупольная ДПФ не учитывается, он получается примерно при 103,5 МэВ, т.е. приблизительно посередине между E_3 и \tilde{E}_3 . Экспериментальных данных пока нет. Из уравнений (59) получаются четыре 2^+ -уровня, показанных на рис. 12. Они могут быть приближенно записаны как $E_2^{(1)} \simeq 23,7A^{-1/3}$ МэВ, $E_2^{(2)} \simeq 65,9A^{-1/3}$ МэВ, $E_2^{(3)} \simeq 87,3 A^{-1/3}$ МэВ, $E_2^{(4)} \simeq 174,7 A^{-1/3}$ МэВ. Уровень $E_2^{(2)}$ есть не что иное, как гигантский квадрупольный резонанс (ГКР). Напомним, что в разд. 2, 3 он рассчитывался с помощью системы уравнений только для тензоров второго ранга, и тогда получалось $\tilde{E}_2^{(2)} \simeq 64,7 A^{-1/3}$ МэВ. Как видно, расширение схемы расчета до тензоров четвертого ранга практически не повлияло на энергию ГКР, что говорит об устойчивости метода. Нижний уровень ($E_2^{(1)}$) исчерпывает $\sim 20\%$ ЭВПС, что согласуется с результатами работы [123], а ГКР — ($E_2^{(2)}$) — около 79%, оставляя на долю двух более высоких 2^+ -возбуждений всего лишь 1% правила сумм. Все вместе они исчерпывают ЭВПС полностью. Отсюда можно сделать вывод, что низколежащее 2^+ -возбуждение является центроидом всех 2^+ -состояний ядра, лежащих ниже ГКР. Экспериментальные данные [124—130] не противоречат такой интерпретации. Следует подчеркнуть, что для нашего метода факт появления низколежащего 2^+ -состояния принципиально важен, так как оно воспроизводится в микроскопических расчетах [114, 122, 131] и не получается в методе фазового пространства [39, 132, 133].

Природу по крайней мере одного из двух высоколежащих 2^+ -возбуждений можно, по-видимому, связать с динамикой тороидного квадрупольного момента [99]:

$$T_{ij} = \frac{e_p Z}{28cA} \int n [4x_i x_j (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}) - 5r^2 (x_i u_j + x_j u_i) + 2r^2 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}) \delta_{ij}] d\mathbf{r},$$

поскольку его вариация является линейной комбинацией переменных, представленных в системе (59):

$$\delta T_{ij} = \frac{e_p Z R^2}{28mcA} \left\{ 2\dot{V}_{ij} - \frac{7}{R^2} \sum_{s=1}^3 [\dot{V}_{i, jss} |_{ij} + \frac{2}{R^2} \delta_{ij} \sum_{s,t} \dot{V}_{s, stt}] \right\}.$$

В пользу этого предположения говорит упрощенный *RPA*-расчет [100, 134], который предсказывает 2^+ -уровень вихревой природы при энергии $\sim 93A^{-1/3}$ МэВ, что очень близко к нашему результату для $E_2^{(3)}$. Там же предсказывается и низколежащий «тороидный» 2^+ -уровень, поэтому не исключено, что наш уровень при $23,7 A^{-1/3}$ МэВ имеет заметную примесь вихревой компоненты.

Система (59) дает также один уровень 1^+ с энергией

$$E_1 = 132,6A^{-1/3} \text{ МэВ.}$$

Пренебрежение октупольной ДПФ поднимает его до $E_1 = 162,4 A^{-1/3}$ МэВ, что почти точно совпадает с результатом работы [5] ($\sim 161A^{-1/3}$ МэВ), где тоже не учитывается октупольная ДПФ. В гидродинамике такая мода известна давно [5]. Соответствующее ей распределение токов показано на рис. 13, заимствованном из [9].

В завершение раздела заметим, что влияние квантовой поправки на все четыре моды пренебрежимо мало.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Суммируем кратко основные результаты и выводы. Начиная с уравнения для матрицы плотности в рамках зависящего от времени метода Хартри — Фока, получается система уравнений сначала для моментов функции Вигнера в импульсном пространстве, а после этого — для моментов во всем фазовом пространстве. Такие моменты функции Вигнера играют роль коллективных переменных. Теория Хартри — Фока приводится к виду, напоминающему гидродинамику, а именно: к динамике ферми-жидкости.

Как один из важнейших пунктов рассматриваются правила замыкания цепочки уравнений для моментов. Из этих правил следует, что для корректного описания динамики массового (или зарядового) тензора ранга k ($J_{i_1 \dots i_k} = \int \rho x_{i_1} \dots x_{i_k} d\mathbf{r}$) необходимо учитывать деформацию поверхности Ферми, описываемую тензорами

$$P_{i_1 \dots i_l} = m^{1-l} \int (\mathbf{p} - m\mathbf{u})_{i_1} \dots (\mathbf{p} - m\mathbf{u})_{i_l} f d\mathbf{p}$$

всех рангов вплоть до $l = k$.

Метод применяется для изучения формы вращающихся ядер и квадрупольных и монопольных возбуждений в них [13—15, 26, 74], а также для изучения коллективных состояний отрицательной четности в сферических ядрах [27, 28, 32, 33]: октупольных, дипольных и магнитных квадрупольных возбуждений. Расчеты проделаны как

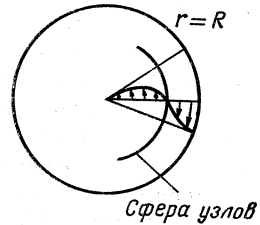


Рис. 13. Поле коллективных скоростей, соответствующее 1^+ -возбуждению

в приближении резкого края ядра с поверхностным натяжением, так и для ядер с диффузным краем и реалистическим взаимодействием (SKM*).

В приближении резкого края в сферических ядрах исследовались 4^+ -, 3^+ - и 1^+ -возбуждения [117]. Рассматривались энергии возбуждения коллективных состояний и их электромагнитные характеристики. Показана возможность описания ширин резонансов в рамках предложенного подхода [64].

Полученные результаты довольно убедительно говорят о достоинствах метода моментов. Действительно, в рамках единого подхода описываются статические и динамические свойства ядер, изоскалярные и изовекторные возбуждения; наряду с гигантскими резонансами получают низколежащие моды. Несмотря на достаточно сложное реалистическое взаимодействие вычислительная работа сравнительно проста: находятся корни полиномов, коэффициентами которых служат обыкновенные одномерные интегралы. Нелокальность взаимодействия не приводит к каким-либо дополнительным трудностям. Большой интерес представляет факт появления низколежащих 3^- - и 2^+ -уровней — он позволяет надеяться все более подробно описывать низколежащую часть спектра по мере дальнейшего увеличения числа степеней свободы (по мере изучения динамики тензоров все более высокого ранга).

Теория, описанная в обзоре, будучи относительно простой, оказалась в состоянии воспроизвести известные экспериментальные данные во всех случаях, где такое сопоставление было возможным, а также дать оценки, сходные с результатами иных теоретических более трудоемких расчетов.

В данном подходе делаются определенные предположения о поле скоростей ядерной материи. Они могут привести к некоторым погрешностям в оценке физических наблюдаемых. Для их исправления, согласно теории, нужно вовлечь в рассмотрение тензоры $J_{i_1 \dots i_k}$ более высокого ранга. Трудности, возникающие на этом пути, более чем компенсируются возможностью обойти трудности другого рода, встречающиеся при решении дифференциальных уравнений для $\rho(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, $P_{ij}(\mathbf{r}, t)$ и т. д. Именно, чтобы решить дифференциальное уравнение, нужно задать граничные условия на поверхности ядра. Они довольно очевидны на «внешней» поверхности, где нет вещества. Но эти условия практически бесполезны, пока не найден способ описания динамики поверхностного слоя, что является, например, целью работ [135, 136].

В обзоре показано, что можно дать количественное описание свойств ядерных вибрационных состояний, используя параметры модели жидкой капли, т. е. модели, предназначенной для описания статических свойств ядер. Так, согласно результатам разд. 4, именно параметры поверхностного натяжения и делимости капли фермижидкости определяют положение 3^- -возбуждений и силу $E3$ -переходов в области энергий порядка одной главной оболочки. Есть надежда,

что предложенный метод поможет заполнить щель между макроскопическим (жидкая капля) и микроскопическим (оболочечная модель и пр.) подходами к ядерной динамике. Хотя и хорошо понятое концептуально [137] соотношение между этими подходами требует дальнейшего изучения.

Очертим круг возможных дальнейших приложений метода. Очевидно, не должно встретиться принципиальных трудностей включение спиновых степеней свободы — просто число всевозможных уравнений движения удвоится. Интересно было бы принять во внимание и недиагональные по спину и изоспину элементы матрицы плотности, что позволило бы описывать спин-флиповые и зарядово-обменные процессы. Не представляется безнадежной также проблема описания движений большой амплитуды, в частности деления. Для описания вращения ядер, имеющих статическую деформацию, потребуется работать с эллипсоидами Римана [16], т. е. с объектами, имеющими ненулевое распределение скоростей $u^{(0)}(r)$ в состоянии векового равновесия. Описание реакций без касания, типа кулоновского возбуждения, по-видимому, вообще не должно встретить никаких проблем. Некоторые соображения по поводу реакций с касанием были высказаны в [138]. Расчеты динамики тензоров пятого, шестого ранга и т. д. (особенно с реалистическим взаимодействием) сдерживаются пока громоздкостью выкладок, однако с развитием возможностей аналитического программирования и здесь можно ожидать большого продвижения.

Приложение 1. Тензоры поверхностной и кулоновской энергии в приближении резкого края ядра и их вариации

$$C_{ii} = bX A_i a_i^2 / r_0^2; \quad \sigma_{ii} = \mathcal{A}_j + \mathcal{A}_k \quad b/4r_0^2 \quad (i \neq j \neq k);$$

$$\delta C_{ij} = X \Omega_0^2 \left[2B_{ij} V_{ij} + \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 V_{kk} (B_{ik} - A_k) \right],$$

$$\delta \sigma_{ij} = \frac{1}{4} \Omega_0^2 \left[2\mathcal{A}_{ij} V_{ij} - \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 V_{kk} (\mathcal{A}_k + \mathcal{B}_{ik}) / a_k^2 \right].$$

Здесь $\Omega_0^2 = 5b/2mAr_0^2$, $\mathcal{A}_{ij} \dots$, $\mathcal{B}_{ij} \dots$ и $A_{ij} \dots$, $B_{ij} \dots$ — так называемые многоиндексные символы, введенные в [16] и [49]:

$$\mathcal{A}_{ij} \dots = \int_0^\infty \frac{R^6 dt}{\Delta_R (a_i^2 + t^2) (a_j^2 + t^2) \dots}, \quad A_{ij} \dots = \int_0^\infty \frac{R^3 dt}{\Delta_c (a_i^2 + t) (a_j^2 + t) \dots};$$

$$\mathcal{B}_{ij} \dots = \int_0^\infty \frac{R^6 t^2 dt}{\Delta_R (a_i^2 + t^2) (a_j^2 + t^2) \dots}, \quad B_{ij} \dots = \int_0^\infty \frac{R^3 t dt}{\Delta_c (a_i^2 + t) (a_j^2 + t) \dots};$$

$$\Delta_R^2 = (a_1^2 + t^2) (a_2^2 + t^2) (a_3^2 + t^2), \quad \Delta_c^2 = (a_1^2 + t) (a_2^2 + t) (a_3^2 + t).$$

Приложение 2. Связь между компонентами неприводимых и декартовых тензоров

Соотношения между компонентами декартова тензора $V_{i,j}$ и вариациями квадрупольного момента $Q_{2\mu}$, углового момента I и среднеквадратичного радиуса $\langle r^2 \rangle$:

$$\delta Q_{20} = -\chi (V_{11} + V_{22} - 2V_{33}); \quad \delta Q_{2, \pm 1} = \mp \chi \sqrt{6} (V_{13} \pm iV_{23});$$

$$\delta Q_{2, \pm 2} = \chi \sqrt{3/2} (V_{11} - V_{22} \pm 2iV_{12}); \quad \chi = \sqrt{5/\pi} Z e_p / 4m_A;$$

$$\delta I_1 = \dot{V}_{3,2} - \dot{V}_{2,3} - \Omega V_{31}; \quad \delta I_2 = \dot{V}_{1,3} - \dot{V}_{3,1} - \Omega V_{32};$$

$$\delta I_3 = \dot{V}_{2,1} - \dot{V}_{1,2} + \Omega (V_{11} + V_{22});$$

$$\delta \langle r^2 \rangle = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^3 V_{ii}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Давыдов А. С. Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1963.
2. Таулес Д. Квантовая механика систем многих частиц: Пер. с англ. М.: Мир, 1975.
3. Соловьев В. Г. Теория сложных ядер: М.: Наука, 1971.
4. Мэдлер П. // ЭЧАЯ. 1984. Т. 15. Вып. 2. С. 418—482.
5. Wong C. Y., Azziz N. // Phys. Rev. 1981. Vol. C24, N 5. P. 2290—2310.
6. Bertsch G. F. // Nuclear physics with heavy ions and mesons, 1977 Les Houches Lectures/Ed. by R. Balian et al. Amsterdam: North Holland, 1978. Vol. 1. P. 175—262.
7. Wigner E. // Phys. Rev. 1932. Vol. 40, N 5. P. 749—759.
8. Власов А. А. // УФН. 1967. Т. 93, № 3. С. 444—470.
9. Holzwarth G., Eckart G. // Nucl. Phys. 1979. Vol. A325, N 1. P. 1—30.
10. Holzwarth G. // Proc. of the Winter College on fundamental Nucl. Phys. (ICTP, Trieste, Italy)/Ed. by K. Dietrich, M. Di Toro, H. J. Mang. 1984. Vol. 2. P. 967—989.
11. Bertsch G. F. // Nucl. Phys. 1975. Vol. A249. P. 253—268.
12. Nix J. R., Sierk A. J. // Phys. Rev. 1980. Vol. C 21. P. 396—404; 1982. Vol. C25. P. 1068—1069.
13. Balbutsev E. B., Dymarz R., Mikhailov I. N., Vaishvila Z. // Phys. Lett. 1981. Vol. B105, N 2, 3. P. 84—88.
14. Бальбуцев Е. Б., Вайшвила З., Михайлов И. Н. // ЯФ. 1982. Т. 35. Вып. 4. С. 836—847.
15. Бальбуцев Е. Б., Вайшвила З., Михайлов И. Н. // ЯФ. 1982. Т. 36. Вып. 5 (11). С. 1109—1120.
16. Чандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия: Пер. с англ. М.: Мир, 1973.
17. Hohenberg P., Kohn W. // Phys. Rev. 1964. Vol. 136, N 3B. P. 864—871.
18. Боголюбов Н. Н., Гуров К. П. // ЖЭТФ. 1947. Т. 17. Вып. 7. С. 614—628.
19. Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика: Пер. с англ. М.: Мир, 1978. Т. 1.
20. Brink D., Di Toro M. // Nucl. Phys. 1981. Vol. A372. P. 151—172.
21. Мойэл Дж. Е. Квантовая механика как статистическая теория // Вопросы причинности в квантовой механике: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. С. 208—243.
22. Kerman A. K., Koonin S. E. // Ann. Phys. 1976. Vol. 100, N 1, 2. P. 332—358.
23. Kolomietz V. M., Tang Henry H. K. // Phys. Scripta. 1981. Vol. 24. P. 915—924.
24. Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика: Пер. с англ. М.: Мир, 1978. Т. 2.
25. Бальбуцев Е. Б., Вайшвила З., Михайлов И. Н. // ЯФ. 1983. Т. 38. Вып. 3 (9). С. 591—600.

26. Balbutsev E. B., Mikhailov I. N., Vaishvila Z.//Nucl. Phys. 1986. Vol. A457. P. 222—260.
27. Бальбуцев Е. Б., Ди Торо М. Квантовые поправки к коллективному ядерному движению. Препринт ОИЯИ Р4-86-551. Дубна, 1986.
28. Balbutsev E. B., Mikhailov I. N., Di Toro M.//Europhysics Lett. 1988. Vol. 6. P. 317—321.
29. Зоммерфельд А. Термодинамика и статистическая физика: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1955.
30. Лифшиц Е. М., Пятаевский Л. П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.
31. Hasse R. W., Ghosh G., Winter J., Lumbroso A.//Phys. Rev. 1982. Vol. C25, N 5. P. 2771—2779.
32. Balbutsev E. B., Mikhailov I. N., Vaishvila Z.//J. Phys. G. 1986. Vol. 12. P. L185—L189.
33. Balbutsev E. B., Mikhailov I. N.//J. Phys. G. 1988. Vol. 14. P. 545—567.
34. Силин В. П. Введение в кинетическую теорию газов. М.: Наука, 1971.
35. Ando K., Nishizaki S.//Progr. Theoret. Phys. 1982. Vol. 68, N 4. P. 1196—1216.
36. Nishizaki S., Ando K.//Progr. Theoret. Phys. 1984. Vol. 71, N 6. P. 1263—1274.
37. Струтинский В. М., Магнер А. Г., Денисов В. Ю.//ЯФ. 1984. Т. 39. Вып. 6. С. 1382—1389.
38. Семенко С. Ф.//ЯФ. 1977. Т. 26. Вып. 2. С. 274—281.
39. Коломиец В. М.//Изв. АН СССР. Сер. физ. 1987. Т. 51, № 11. С. 2006—2013.
40. Jang S.//Phys. Rev. 1986. Vol. C33, N 1. P. 352—364.
41. Di Toro M., Russo G.//Z. Phys. 1988. Vol. A331, N 4. P. 381—389.
42. Holzwarth G., Eckart G.//Z. Phys. 1978. Vol. A284, N 3. P. 291—296.
43. Stringari S.//Ann. Phys. 1983. Vol. 151, N 1. P. 35—70.
44. Brito L. P., Da Providência C.//Phys. Rev. 1985. Vol. C32, N 6, P. 2049—2057.
45. Di Toro M., Lombardo V., Russo G.//Nucl. Phys. 1985. Vol. A435, N 1, P. 173—189.
46. Li Guo-giang, Xu Gong-ou//J. Phys. G.: Nucl. Phys. 1989. Vol. 15. P. 79—84.
47. Пик-Пичак Г. А.//ЖЭТФ. 1962. Т. 43. № 5. С. 1701—1708.
48. Beringer R., Knox W. J.//Phys. Rev. 1961. Vol. 121, N 4. P. 1195—1200.
49. Rosenkilde C. E.//J. Math. Phys. 1967. Vol. 8. N 1. P. 84, 88, 98.
50. Rosensteel G.//Ann. Phys. 1988. Vol. 186. N 2. P. 230—291.
51. Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975.
52. Голдштейн Г. Классическая механика. М.: Наука, 1975.
53. Бальбуцев Е. Б. Описание коллективного движения атомных ядер методом моментов. Дис. д-ра физ.-мат. наук. Дубна, 1990.
54. Лейн А. Теория ядра: Пер. с англ. М.: Атомиздат. 1967. Гл. 9.
55. Andersson G., Larson S. E., Leader G. e.a.//Nucl. Phys. 1976. Vol. A268, N 2. P. 206—256.
56. Михайлов И. Н., Цвек С., Бриансон Ш. и др.//Изв. АН СССР. Сер. физ. 1984. Т. 48, № 10. С. 1869—1877.
57. Thibaud J. P., Aguier P., Bastin G. e.a.//Z. Phys. 1985. Vol. A231, N 2. P. 275—286.
58. Бор О., Мотгельсон Б. Р. Структура атомного ядра: Пер. с англ. М.: Мир, 1977. Т. 2.
59. Абрикосов А. А., Халатников И. М.//УФН. 1958. Т. 66. Вып. 2. С. 177—212.
60. Wegmann G.//Nucl. Phys. 1975. Vol. A251, N 2. P. 289—296.
61. Bertsch G. F.//Z. Phys. 1978. Vol. A289, N 1. P. 103—105.
62. Köhler H. S.//Nucl. Phys. 1980. Vol. A343, N 2. P. 315—332.

63. Hasse R. W.//Rep. Progr. Phys. 1978. Vol. 41, N 7. P. 1027—1101.
64. Бальбуцев Е. Б., Михайлов И. Н., Пиперова Й.//Изв. АН СССР. Сер. физ. 1987. Т. 51, № 5. С. 890—897.
65. Бальбуцев Е. Б., Молодцова И. В.//ЯФ 1989. Т. 50, № 8. с. 338—343.
66. Aberg Sven//Nucl. Phys. 1987. Vol. A473, N 1. P. 1—30.
67. Zawischa D., Speth J., Pal D.//Nucl. Phys. 1978. Vol. A311, P. 445—476.
68. Малов Л. А., Соловьев В. Г.//ЭЧАЯ. 1980. Т. 11. Вып. 2. С. 301—341.
69. Jang S., Vouyussy A.//Phys. Rev. 1987. Vol. C36, N 4. P. 1587—1594.
70. Bertrand F. E.//Ann. Rev. Nucl. Sci. 1976. Vol. 26. P. 457—509.
71. Satchler G. R.//Proc. of the Intern. School of Physics «Enrico Fermi». Varenna, Italy, 1976, Course LXIX/Ed. by A. Bohr, R. A. Broglia. Bologna Societa Italiana di Fisica. P. 271—351.
72. Youngblood D. H., Bogucki P., Bronson J.D.e.a.//Phys. Rev. 1981. Vol. C23, N 5. P. 1997—2007.
73. Dolbilkin B. S., Ohsawa S., Torizuka Y. e.a.//Phys. Rev. 1982. Vol. C25, N 5. P. 2255—2268.
74. Бальбуцев Е. Б., Пиперова Й.//ЯФ. 1989. Т. 50. Вып. 4 (10). С. 961—973.
75. Bartel J., Quentin P., Brack M. e.a.//Nucl. Phys. 1982. Vol. A386, N 1. P. 79—100.
76. Engel Y. M., Brink D. M., Goeke K. e.a.//Nucl. Phys. 1975. Vol. A249, N 2. P. 215—238.
77. Бор О., Мотгельсон Б. Р. Структура атомного ядра: Пер. с англ. М.: Мир, 1971. Т. 1.
78. Bernstein A. M.//Adv. in Nucl. Phys. 1969. Vol. 3. P. 325—476.
79. Pitthan R.//Proc. of the giant multipole resonance topical conference held at the American museum of science and energy/Ed. by F. E. Bertrand. Oak-Ridge, Tennessee, 1979. P. 161—176.
80. Erell A., Alster J., Lichtenstadt J.e.a.//Phys. Rev. 1986. Vol. C34. N 5. P. 1822—1844.
81. Lo Iudice N., Palumbo F.//Nucl. Phys. 1979. Vol. A236, N 1. P. 193—208.
82. De Franceschi C., Palumbo F., Lo Iudice N.//Phys. Rev. 1984. Vol. 29, N 4. P. 1496—1509.
83. Hilton R. R.//Z. Phys. 1984. Vol. A316, N 1. P. 121—122.
84. Lo Iudice N., Lipparini E., Stringari S.e.a.//Phys. Lett. 1985. Vol. B161, N 1—3. P. 18—20.
85. Sambataro M., Scholten O., Dieperink A.E.L.e.a.//Nucl. Phys. 1984. Vol. A423, N 2, P. 333—349.
86. Pittel S., Dukelsky J., Perazzo R. P. J., Sofia H. M.//Phys. Lett. 1984. Vol. B144, N 3, 4. P. 145—150.
87. Van Isaker P., Lipas P. O., Helimäki K.e.a.//Nucl. Phys. 1988. Vol. A476, N 2. P. 301—315.
88. Raduta A. A., Delion D. S.//Nucl. Phys. 1989. Vol. A491, N 1, P. 24—44.
89. Poves A., Retamosa J., Moya de Guerra E.//Phys. Rev. 1989. Vol. C39, N 4. P. 1639—1640.
90. Susuki T., Rowe D. J.//Nucl. Phys. 1977. Vol. A289, N 2. P. 461—474.
91. Nojarov R., Bochnacki Z., Faessler A.//Z. Phys. 1986. Vol. A324, N 3. P. 289—298.
92. Hamamoto I., Aberg S.//Phys. Scripta. 1986. Vol. 34, N 6A. P. 697—702.
93. Civitarese O., Faessler A., Nojarov R.//Phys. Rev. 1987. Vol. C35, N 6. P. 2310—2317.
94. Speth J., Zawischa D.//Phys. Lett. 1988. Vol. B211, N 3, P. 247—251.
95. Bohle D., Richter A., Steffen W.e.a.//Phys. Lett. 1984. Vol. B137, N 1. P. 27—31.
96. Pitz H. H., Berg U.E.P., Heil R.D.e.a.//Nucl. Phys. 1989. Vol. A492, N 3. P. 411—425.
97. Garg U., Bogucki P., Bronson J. D. e.a.//Phys. Rev. 1984. Vol. C. 29, N 1. P. 93—96.
98. Buenerd M.//J. Phys. 1984. Ser. C4. Vol. 45. P. 115—134.
99. Дубовик В. М., Тосунян Л. А.//ЭЧАЯ. 1983. Т. 14. Вып. 5. С. 1193—1228.

100. Семенко С. Ф. // ЯФ. 1981. Т. 34. Вып. 3.(9). С. 639—647.
101. Беляев С. Н., Козин А. Б., Нечкин А. А. и др. // ЯФ. 1985. Т. 42. Вып. 5(11). С. 1050—1058.
102. Rost H., Eyrieh E., Hofmann A.e.a. // Phys. Lett. 1979. Vol. B88, N 1, 2. P. 51—54.
103. Bertrand F. E. // Nucl. Phys. 1981. Vol. A354, N 1, 2. P. 129C—155C.
104. Moss J. M., Brown D. R., Younblood D.M.e.a. // Phys. Rev. 1978. Vol. C18. N 2. P. 741—749.
105. Neuhausen R., Lightbody J. W., Jr., Fivozinsky S. P., Penner S. // Nucl. Phys. 1976. Vol. A263, N 2. P. 249—260.
106. Burger S. J., Heyman G. // Nucl. Phys. 1975. Vol. A243, N 3. P. 461—491.
107. Moss J. M., Younblood D. H., Rozsa C. M., Brown D. R. // Phys. Rev. Lett. 1976. Vol. 37. N 13. P. 816—819.
108. Bertrand F. E., Gross E. E., Horen D.J.e.a. // Phys. Rev. 1986. Vol. C34, N 1. P. 45—59.
109. Harakeh M. N., Van Heyst B., Van der Borg K., Van der Woude A. // Nucl. Phys. 1979. Vol. A327. P. 373—396.
110. Fujita Y., Fujiwara M., Morinobu S.e.a. // Phys. Rev. 1985. Vol. C32, N 2. P. 425—430.
111. Fujiwara M., Fujita Y., Katayama I.e.a. // Phys. Rev. 1988. Vol. C37, N 6. P. 2885—2888.
112. Higashi A., Katori K., Fujiwara M.e.a. // Phys. Rev. 1989. Vol. C39, N 4. P. 1286—1296.
113. Richter A. // Тр. Междунар. школы по структуре ядра. Алушта, 1980. ОИЯИ Д4-80-385. Дубна, 1980. С. 89—141.
114. De Haro R., Krewald S., Speth S. // Nucl. Phys. 1982. Vol. A388, N 2. P. 265—302.
115. Hasse R. W., Nerud P. // J. Phys. G. 1976. Vol. 2, N 7, P. L101—L105.
116. Auerbach N., Yeverechyahu A. // Ann. Phys. 1975. Vol. 95, N 1, P. 35—52.
117. Бальбуцев Е. Б., Басруков С. И., Михайлов И. Н. и др. // ЯФ. 1989. Т. 60. Вып. 5 (11). С. 1264—1276.
118. Tassie L. J. // Austr. J. Phys. 1956. Vol. 9. P. 407—418.
119. Chandrasekhar S. // Astrophysical Jour. 1968. Vol. 152, N 1. P. 293—304.
120. Савицкий Г. А., Фаргушный В. А., Евсеев И. Г. и др. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. общ. и яд. физ. 1986. Вып. 1(34). С. 120—124.
121. Семенко С. Ф. // ЯФ. 1984. Т. 39. Вып. 2. С. 351—360.
122. Liu K. F., Brown G. E. // Nucl. Phys. 1976. Vol. A265. P. 385—415.
123. Стещенко А. И., Охрименко И. П. // Физика многочастичных систем. Киев: Наукова думка, 1985. Вып. 8. С. 11.
124. Sakai M., Rester A.C. // At. Data and Nucl. Data Tables. 1977. Vol. 20, N 5. P. 441—474.
125. Авотина М. П., Кондуров И. А., Сбитнева О. Н. Таблицы ядерных моментов и параметров деформации атомных ядер. Л.: ЛИЯФ АН СССР, 1982.
126. Heisenberg J., Dawson J., Milliman T.e.a. // Phys. Rev. 1984. Vol. C29, N 1, P. 97—108.
127. Van der Bijl L. T., Blok H. P., Van Hienen J.F.A., Blok J. // Nucl. Phys. 1983. Vol. A393, N 1, 2. P. 173—204.
128. Mariscotti M. A. J., Bes D. R., Reich S. L. e.a. // Nucl. Phys. 1983. Vol. A407, N 1, 2. P. 98—126.
129. Scott A., Mathur N. P., Petrovich F. // Nucl. Phys. 1977. Vol. 285, N 2. P. 222—234.
130. Oakley D. S., Smithson M. J., Mordechai S. e.a. // Phys. Rev. 1987. Vol. C35, N 4. P. 1392—1402.
131. Khodel V. A., Saperstein E. E. // Phys. Rep. 1982. Vol. 92, N 5. P. 185—337.
132. Kohl H., Schuck P., Stringari S. // Nucl. Phys. 1986. Vol. A459, N 2. P. 265—278.

133. Da Providência J. P., Holzwarth G.//Nucl. Phys. 1985. Vol. A439, N 3. P. 477—488.
134. Семенко С. Ф. Исследование структуры ядер на электронных ускорителях с энергией ≈ 100 МэВ. Препринт ФИАН № 76. М., 1986.
135. Strutinsky V. M., Magner A. G., Brack M.//Z. Phys. 1984. Vol. A316, N 2. P. 217—223.
136. Магнер А. Г./ЯФ. 1987. Т. 45. Вып. 2. С. 374—382.
137. Bjornholm S.//Nucl. Phys. 1985. Vol. A447. P. 117C—132C.
138. Бальбуцев Е. Б., Михайлов И. Н. Описание коллективного движения атомных ядер методом моментов//Коллективная ядерная динамика. Л.: Наука, 1990. С. 3—66.