«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1994, ТОМ 25, ВЫП.3

УДК 539.12

ЛОКАЛЬНЫЕ ВЕКТОР-ПАРАМЕТРЫ ГРУПП, ФОРМЫ КАРТАНА И ПРИЛОЖЕНИЯ К ТЕОРИЯМ КАЛИБРОВОЧНЫХ И КИРАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

В.И.Кувшинов, Нгуен Вьен Тхо

Институт физики им.Б.И.Степанова Академии наук Белоруссии, Минск

Обзор посвящен развитию метода векторной параметризации групп и его применениям к теориям калибровочных и киральных полей. Установлена прямая связь между формами Картана и законом композиции вектор-параметров групп, которая позволяет вычислить простым образом формы Картана для ряда групп, не решая дифференциальных уравнений Картана — Мауэра. Получен явный вид конечных калибровочных преобразований групп унитарных, пространственно-временных симметрий и суперсимметрии, а также нелинейных реализаций калибровочных гравитации и супергравитации. Найдены формы Картана и лагранжианы главных киральных и голдстоуновских полей для групп $U(2)$, $SU(2)$, $U(3)$, $SU(3)$, обладающие новыми типами нелинейности (отношение полиномов). Получено простое выражение лагранжиана $SU(2)$-модели Скирма в векторной параметризации группы $SU(2)$, содержащее только три независимые полевые переменные. На основе этого лагранжиана рассмотрены сохраняющиеся токи модели и схема квантования вращательных коллективных возбуждений, в которой используются вектор-параметры $SO(3)$ в качестве коллективных координат скирмионов. Такой подход к модели Скирма дает значительное упрощение выкладок при рассмотрении модели, а также ее модифицированного варианта со стабилизирующим членом шестого порядка.

The review is devoted to the development of the method of vector parametrization and its applications to the gauge and chiral field theories. The direct connection between the Cartan forms and the law of composition of parameters is established which allows to calculate simply the Cartan forms for many different groups, not resolving Cartan — Mauer's differential equations. The explicit form of finite gauge transformations for the groups of local unitary, space-time symmetries and supersymmetry, and of the nonlinear realizations of gravity and supergravity are obtained. The Cartan forms, the Lagrangians of the principal chiral and Goldstone fields for the unitary groups $U(2)$, $SU(2)$, $U(3)$, $SU(3)$ are found which have the new types of nonlinearity. The expression of the Lagrangian of $SU(2)$-Skyrme model is obtained which contains only three independent field variables and has the simple form. With this Lagrangian we consider the conserved currents of the model and the scheme of quantization of the rotational collective excitations in which the vector-parameters of $SO(3)$ are used as collective coordinates of skyrmions. This approach to the Skyrme model simplifies considerably the calculations in the consideration of the model, and also its modified variant with the sixth order stabilizing term.

ВВЕДЕНИЕ

При изучении непрерывных групп и их использовании в приложениях существенную роль играет выбор параметризации. Хотя он равносилен выбору системы координат на групповом многообразии и от него не должны зависеть физические следствия, удачный выбор параметризации не только может упростить математические выкладки, но и во многих случаях позволяет преодолеть трудности, которые существуют в других параметризациях.

Векторная параметризация, предложенная и разработанная сначала для группы вращений и группы Лоренца [1—5] и обобщенная впоследствии для ряда других групп (в частности, см. [6—8]), отличается от других параметризаций рядом привлекательных свойств:

1) закон композиции параметров, соответствующий умножению группы, имеет простой вид;

2) параметризация удовлетворяет условию естественности: если $g(Q)$ — элемент группы, Q — совокупность параметров, рассматриваемая как вектор в некотором пространстве, то

$$g(Q=0)=I, \qquad g(-Q)=g^{-1}(Q) \tag{1}$$

(I — единица группы);

3) параметризация обладает также свойством линейности: внутреннему автоморфизму отвечает линейное преобразование параметров

$$g(Q)\,g(Q')\,g^{-1}(Q) = g[\Lambda(Q)Q'], \tag{2}$$

где $\Lambda(Q)$ — матрица, элементы которой зависят от вектор-параметра Q. Эти свойства играют важную роль при разработке теории групп и их представлений и рассмотрении физических приложений, так как групповое умножение, вычисление обратного элемента, а также преобразование подобия постоянно возникают в групповых выкладках. Благодаря этим свойствам многие результаты можно получить только с использованием операций над параметрами, не обращаясь к конкретным выражениям матриц преобразований группы или ее представлений. В векторной параметризации было дано изящное изложение теорий групп вращений и Лоренца, в котором значительно упрощаются многие соотношения и их доказательства [5].

Недавнее развитие метода векторной параметризации показывает, что с его помощью можно изучать проблемы, связанные не только с глобальными преобразованиями, но и с локальными преобразованиями групп. Обнаруживается исключительно простая и прямая связь между формами Картана и законом композиции вектор-параметров групп, с помощью которой можно легко найти формы Картана для ряда групп [9—12]. Известно, что формы Картана играют важную роль в теории калибровочных и киральных полей: они фигурируют в формулах конечных преобразований калибровочных групп и их нелинейных реализаций, служат основными элементами для построения лагранжианов киральных полей и т.д. Поэтому разработка простого метода расчета форм Картана дает возможность исследовать ряд важных проблем теории этих полей.

В настоящем обзоре представлены новый метод расчета форм Картана на основании использования закона композиции параметров и его применения к проблемам теории калибровочных и киральный полей. В разд.1 приведены сведения о естественных линейных параметризациях групп вращения, Лоренца, унитарных групп, группы и супергруппы Пуанкаре, явный вид закона композиции параметров соответствующих групп. В разд.2 установлена связь между формами Картана и законом композиции параметров. На основе использования этой связи простым образом рассчитаны формы Картана для групп, параметризации которых даны в разд.1. Выражения форм Картана, приведенные в этом разделе, будут использованы в последующих разделах. Далее в разд.3 рассматривается задача о нахождении явного вида конечных преобразований калибровочных полей. Известно, что обычно при формулировке калибровочных полевых теорий локальные параметры группы вводятся с помощью инфинитезимальных преобразований. Однако представляет несомненный интерес формулировка таких теорий, основанная на использовании конечных преобразований калибровочной группы. В принципе для групп локальных унитарных или лоренцевой симметрий задача может решаться с использованием матричного полиномиального вида преобразований соответствующих групп [13,14], но эффективность расчета существенно зависит от сложности матриц этих преобразований. В данной работе с помощью метода расчета форм Картана, развитого в разд.2, мы можем легко получить результаты, не обращаясь к явному выражению групповых преобразований. Такой подход играет решающую роль в случае гравитации и супергравитации Пуанкаре, когда матричные выражения групповых преобразований имеют сложный вид [15,16]. В этом разделе получен также явный вид нелинейных реализаций калибровочных гравитации и супергравитации Пуанкаре, которые линейны на стабильной подгруппе Лоренца. В разд.4 обсуждается построение лагранжианов нелинейных киральных полей. Главные киральные поля отождествляются с локальными параметрами группы, а голдстоуновские поля — с локальными параметрами фактор-пространства G/H, где H — стабильная подгруппа группы G, связанная с ненарушаемыми симметриями. Обладая формами Картана для соответствующих групп, нетрудно найти лагранжианы этих полей. Полученные таким образом лагранжианы обладают новыми типами нелинейности (отношение конечных полиномов). В разд.5 приведен пример, иллюстрирующий применение нового вида лагранжианов киральных полей к исследованию свойств нелинейных полевых моделей. Рассматривается случай $SU(2)$-модели Скирма. В векторной параметризации группы $SU(2)$ лагранжиан этой модели имеет простой вид и содержит три независимые полевые переменные, которые можно отождествить с триплетом пионных полей. Изложена схема квантования вращательных коллективных возбуждений скирмионов, в которой в качестве коллективных координат выбираются вектор-параметры матриц вращений в трехмерном изопространстве. Найдены выражения сохраняющихся токов и зарядов модели в этих коллективных координатах. В аналогичном плане рассмотрен модифицированный вариант модели со стабилизирующим членом шестого порядка. В приложении приведены явные выражения для коэффициентов, входящих в закон композиции, формы Картана, киральные лагранжианы для исследуемых унитарных групп, через структурные постоянные этих групп.

1. ВЕКТОРНАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ГРУПП И ЗАКОН КОМПОЗИЦИИ ВЕКТОР-ПАРАМЕТРОВ

Векторная параметризация групп вращений и Лоренца. Векторная параметризация групп была предложена и разработана в [1] (см. также [5]) для группы трехмерных вращений $SO(3)$. Произвольная матрица трехмерного вращения O может быть параметризована трехмерными вещественными вектор-параметрами $\mathbf{c} = (c_a)$, $a = 1, 2, 3$ следующим образом [1,5]:

$$O = O(\mathbf{c}) = 1 + 2\,\frac{\mathbf{c}^{\times} + (\mathbf{c}^{\times})^2}{1 + \mathbf{c}^2} = \frac{1 - \mathbf{c}^2 + 2\mathbf{c}\bullet\mathbf{c} + 2\mathbf{c}^{\times}}{1 + \mathbf{c}^2}, \tag{3}$$

где $\mathbf{c}^{\times}$, $\mathbf{c}\bullet\mathbf{c}$ — следующие 3×3-матрицы:

$$(\mathbf{c}^{\times})_{ab} = \varepsilon_{adb} c_d, \tag{4}$$

$$(\mathbf{c}\bullet\mathbf{c})_{ab} = c_a c_b. \tag{5}$$

Вектор-параметр $\mathbf{c}$ имеет простой геометрический смысл: направление вектора $\mathbf{c}$ задает ось поворота, а угол поворота α определяется длиной $\mathbf{c}$:

$$|\mathbf{c}| = \mathrm{tg}\,(\alpha/2). \tag{6}$$

Закон композиции вектор-параметров c, соответствующий групповому умножению, имеет простой вид:

$$O(\mathbf{c}'') = O(\mathbf{c})\, O(\mathbf{c}'),$$
$$\mathbf{c}'' = \langle \mathbf{c}, \mathbf{c}' \rangle = \frac{\mathbf{c} + \mathbf{c}' + [\mathbf{c}, \mathbf{c}']}{1 - (\mathbf{c}\mathbf{c}')}, \tag{7}$$

где $(\mathbf{c}\mathbf{c}')$ и $[\mathbf{c}, \mathbf{c}']$ — обычные скалярное и векторное произведения трехмерных векторов, а скобки $\langle\ \ \rangle$ обозначают композицию вектор-параметров.

Легко убедиться, что параметризация (3) обладает свойством естественности:

$$\langle \mathbf{c}, 0 \rangle = \langle 0, \mathbf{c} \rangle = \mathbf{c}, \qquad \langle \mathbf{c}, -\mathbf{c} \rangle = \langle -\mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle = 0, \tag{8}$$

и линейности:

$$\mathbf{c}'' = \langle \mathbf{c}, \mathbf{c}', -\mathbf{c} \rangle = O(\mathbf{c})\, \mathbf{c}'. \tag{9}$$

Для группы Лоренца $SO(3,1)$ может вводиться аналогичная параметризация [2—5]. На основе того факта, что $SO(3,1)$ является комплексификацией $SO(3)$, в работах [2—5] для параметризации $SO(3,1)$ используется комплексный трехмерный вектор-параметр

$$\mathbf{q} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}, \tag{10}$$

с помощью которого произвольная матрица преобразования Лоренца L представляется в следующем компактном виде [5]:

$$L = L(\mathbf{q}) = \varepsilon_+(\mathbf{q})\, \varepsilon_-(\mathbf{q}) = \frac{(1 + \mathbf{q}_+)(1 + \mathbf{q}_-^*)}{|1 + \mathbf{q}^2|}. \tag{11}$$

Здесь введены обозначения:

$$\varepsilon_\pm(\mathbf{q}) = \frac{1 + \mathbf{q}_\pm}{\sqrt{1 + \mathbf{q}^2}}, \tag{12}$$

$\mathbf{q}_\pm$ — 4×4-матрица:

$$\mathbf{q}_\pm = \begin{pmatrix} \mathbf{q}^\times & \pm\mathbf{q} \\ \mp\mathbf{q} & 0 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где $\mathbf{q}^\times$ — 3×3-матрица, определяемая формулой (4). Закон композиции комплексных вектор-параметров $\mathbf{q}$ внешне совпадает с законом композиции вектор-параметров группы вращений:

$$L(\mathbf{q}'') = L(\mathbf{q})\, L(\mathbf{q}'), \qquad \mathbf{q}'' = \langle \mathbf{q}, \mathbf{q}' \rangle = \frac{\mathbf{q} + \mathbf{q}' + [\mathbf{q}, \mathbf{q}']}{1 - (\mathbf{q}\mathbf{q}')}. \tag{14}$$

Параметризация (11) также обладает естественностью:

$$\langle \mathrm{q}, 0\rangle = \langle 0, \mathrm{q}\rangle = \mathrm{q}, \qquad \langle \mathrm{q}, -\mathrm{q}\rangle = \langle -\mathrm{q}, \mathrm{q}\rangle = 0, \tag{15}$$

и линейностью:

$$\mathrm{q}'' = \langle \mathrm{q}, \mathrm{q}', -\mathrm{q}\rangle = O(\mathrm{q})\,\mathrm{q}'. \tag{16}$$

Известно, что для групп вращений и Лоренца в литературе часто используются параметризации с помощью вещественных и комплексных углов Эйлера (см., например, [17—19]). Однако закон композиции конечных углов Эйлера имеет довольно громоздкий вид [19]. В этих параметризациях свойства (1), (2) также не выполняются.

Векторная параметризация унитарных групп. Для унитарной группы $U(n)$ параметризацией, обладающей простым законом композиции, является параметризация с помощью форм Кэли [20—22]:

$$U = U(N) = \frac{1+N}{1-N}, \qquad U \in U(n), \tag{17}$$

где N — антиэрмитова $n \times n$-матрица (матрица параметров), $N^\dagger = -N$. При такой параметризации матрица U может быть представлена в виде полинома степени $n-1$ от матрицы-параметра N, коэффициенты которого выражаются через следы от степеней N [23,24]. Закон композиции матриц-параметров N имеет вид [21,22]:

$$\begin{gathered} U(L) = U(M)\,U(N), \\ L = \langle M, N\rangle = 1 - (1-N)\,(1+MN)^{-1}(1-M). \end{gathered} \tag{18}$$

В частности, имеет место соотношение [22]:

$$\langle M + \delta N, M\rangle \approx (1-M)^{-1}\delta N(1+M)^{-1}, \tag{19}$$

где δN — малая добавка к матрице M.

Легко убедиться, что параметризация (17) является естественной и линейной. Свойство линейности выражается следующим соотношением [21]:

$$VU(M)V^{-1} = U(VMV^{-1}), \qquad V = U(N). \tag{20}$$

При использовании формул (18), (19) в приложениях следует найти матрицы, обратные к $(1+M)$ или $(1+MN)$. С помощью характеристических уравнений для матриц M или MN, которые позволяют выразить их степени выше n через n низших степеней, можно получить выражения соответствующих обратных матриц [21,23,24]. Выпишем, например, выражение $(1+N)^{-1}$:

$$(1 + N)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k N^k, \tag{21}$$

где

$$\alpha_k = (-1)^k \left(\sum_{i=0}^{n-k-1} \beta_i \right) / \left(\sum_{j=0}^{n} \beta_j \right),$$

$$\beta_k = (1/k) \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} s_i \beta_{k-i}, \quad \beta_0 = 1, \quad s_i = \operatorname{Sp}(N^i).$$

Матрица-параметр N в (17) может раскладываться по соответствующим базисам. Тогда компоненты матрицы N в определенном базисе, составляющие вектор в некотором пространстве, могут быть использованы для параметризации группы $U(n)$.

Рассмотрим важные частные случаи: $n = 2$ и $n = 3$. Известно, что в качестве базисных матриц для матриц второго порядка обычно выбираются матрицы σ_i $(i = 0, 1, 2, 3)$, включающие матрицы Паули σ_a $(a = 1, 2, 3)$ и единичную матрицу $\sigma_0 = I$. Для антиэрмитовых 2×2-матриц N коэффициенты разложения в этом базисе являются чисто мнимыми: $N = -i\eta_i\sigma_i$ (η_i — вещественные, по повторным индексам подразумевается суммирование). Вектор в пространстве R^4, составляемый из компонент $\{\eta_i\}$, может играть роль вектор-параметра группы $U(2)$. Тогда для $U(2)$ параметризация (17) принимает вид:

$$U = \frac{1 - i\eta_i\sigma_i}{1 + i\eta_i\sigma_i} = U(\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3). \tag{22}$$

Для группы $SU(2)$ параметр η_0 должен равняться нулю, что следует из условия $\det(1 - i\eta_i\sigma_i) = \det(1 + i\eta_i\sigma_i)$. Поэтому произвольная матрица $U \in SU(2)$ параметризуется совокупностью трех вещественных параметров, составляющих трехмерный вектор $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$:

$$U = \frac{1 - i\eta_a\sigma_a}{1 + i\eta_a\sigma_a} = U(\eta_1, \eta_2, \eta_3). \tag{23}$$

В качестве базисных для матриц третьего порядка выбираются матрицы $\lambda_i (i = 0, 1, \ldots, 8)$: $\lambda_0 = \sqrt{2/3}I$; $\lambda_1, \ldots, \lambda_8$ — восемь матриц Гелл-Манна. Матрица-параметр N имеет разложение $N = -i\eta_i\lambda_i$ (η_i — вещественные), и матрица $U \in U(3)$ параметризуется вектором в $R^9 : \eta = \{\eta_i\}$:

$$U = \frac{1 - i\eta_i\lambda_i}{1 + i\eta_i\lambda_i} = U(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_8). \tag{24}$$

Для $SU(3)$ девять компонент вектор-параметра не являются независимыми, а связаны уравнением

$$3\eta_0^3 - \eta_0\eta_i\eta_i + i\sqrt{2/3}k_{jkl}\eta_j\eta_k\eta_l - \eta_0 = 0, \tag{25}$$

которое получается из условия $\det(1 - i\eta_i\lambda_i) = \det(1 + i\eta_i\lambda_i)$. Коэффициенты k_{jkl} задаются формулой (П.10).

Закон композиции параметров (18) и свойство линейности (20), записанные в матричном виде, могут быть реализованы в терминах вектор-параметров η для групп $U(2)$, $SU(2)$, $U(3)$, $SU(3)$. Используя (21) и свойства базисных матриц σ_i и λ_i, получаем:

а) Для группы $SU(2)$ — закон композиции вектор-параметров:

$$U(\boldsymbol{\zeta}) = U(\boldsymbol{\xi})\,U(\boldsymbol{\eta}),$$

$$\boldsymbol{\zeta} = \langle\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}\rangle = \frac{(1 - \boldsymbol{\eta}^2)\,\boldsymbol{\xi} + (1 - \boldsymbol{\xi}^2)\boldsymbol{\eta} + 2[\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}]}{1 - 2(\boldsymbol{\xi\eta}) + \boldsymbol{\xi}^2\boldsymbol{\eta}^2}, \tag{26}$$

($(\boldsymbol{\xi\eta})$ и $[\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}]$ обозначают скалярное и векторное произведения трехмерных векторов $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\eta}$);

свойство линейности:

$$U(\boldsymbol{\eta})\,U(\boldsymbol{\eta}_0)\,U^{-1}(\boldsymbol{\eta}) = U[\Lambda(\boldsymbol{\eta})\,\boldsymbol{\eta}_0],$$

$$\Lambda(\boldsymbol{\eta}) = 1 + 4\,\frac{(1 - \boldsymbol{\eta}^2)\,\boldsymbol{\eta}^{\times} + 2(\boldsymbol{\eta}^{\times})^2}{(1 + \boldsymbol{\eta}^2)^2}. \tag{27}$$

б) Для группы $U(2)$ — закон композиции параметров:

$$\zeta_i = \langle\xi, \eta\rangle_i = s^{-1}(\xi, \eta)\,\{\xi_i + \eta_i + (h_{jki} - h_{kji})\,\xi_j\eta_k - 2(\xi\eta)\xi_i -$$

$$- h_{jkm}h_{mli}\,\xi_j\xi_l\eta_k - 2(\xi\eta)\,\eta_i - h_{jkm}h_{mli}\,\xi_k\eta_j\eta_l + 2i\delta_{0i}(\xi\eta)^2 +$$

$$+ 2h_{jki}(\xi\eta)\,\xi_k\eta_j + (h_{kjn}h_{nmp}h_{pli} - \delta_{0i}h_{jkn}h_{nlp}h_{pm0})\,\xi_j\xi_l\eta_k\eta_m\}, \tag{28}$$

где $(\xi\eta) = \xi_i\eta_i$, по повторным индексам подразумевается суммирование, все индексы принимают значения 0,1,2,3,

$$s(\xi, \eta) = 1 - 2(\xi\eta) + 2(\xi\eta)^2 + ih_{ijm}h_{mkn}h_{nl0}\,\xi_i\xi_k\eta_j\eta_l,$$

свойство линейности:

$$U(\eta)\,U(\eta_0)\,U^{-1}(\eta) = U[\Lambda(\eta)\,\eta_0], \quad \Lambda = (\Lambda_{ij}), \quad i,j = 0,1,2,3,$$
$$\Lambda_{ij} = s^{-1}(\eta)\,\{\delta_{ij} + \lambda^{(1)}_{ijk}\eta_k + \lambda^{(2)}_{ijkl}\eta_k\eta_l + \lambda^{(3)}_{ijklm}\eta_k\eta_l\eta_m \lambda^{(4)}_{ijklmn}\eta_k\eta_l\eta_m\eta_n\}, \tag{29}$$

где коэффициенты $\lambda^{(1)},\ldots,\lambda^{(4)}$ даны в приложении (формула (П.5)) и $s(\eta) = (1 + \eta_0^2 + \boldsymbol{\eta}^2)^2 + 4\eta_0^2$.

в) Для групп $U(3)$ и $SU(3)$ — закон композиции параметров:

$$\zeta_i = \langle\xi,\eta\rangle_i = s^{-1}(\xi,\eta)\,\{\xi_i + \eta_i + \rho^{(1,1)}_{ijk}\xi_j\eta_k + \rho^{(1,2)}_{ijkl}\xi_j\eta_k\eta_l + \rho^{(2,1)}_{ijkl}\xi_j\xi_k\eta_l +$$
$$+ \rho^{(2,2)}_{ijklm}\xi_j\xi_k\eta_l\eta_m + \rho^{(2,3)}_{ijklmn}\xi_j\xi_k\eta_l\eta_m\eta_n +$$
$$+ \rho^{(3,2)}_{ijklmn}\xi_j\xi_k\xi_l\eta_m\eta_n + \rho^{(3,3)}_{ijklmnp}\xi_j\xi_k\xi_l\eta_m\eta_n\eta_p\}, \tag{30}$$

где

$$s(\xi,\eta) = 1 - 2(\xi\eta) + 2(\xi\eta)^2 + i(\sqrt{6}/2)k_{ijm}k_{mkn}k_{nl0}\,\xi_i\xi_k\eta_j\eta_l - (4/3)\,(\xi\eta)^3 -$$
$$- i\sqrt{6}k_{ijm}k_{mkn}k_{nl0}(\xi\eta)\,\xi_i\xi_k\eta_j\eta_l - i(\sqrt{6}/3)k_{ijn}k_{nkp}k_{plq}k_{qmr}k_{rn0}\xi_i\xi_k\xi_m\eta_j\eta_l\eta_m,$$

свойство линейности:

$$U(\eta)\,U(\eta_0)\,U^{-1}(\eta) = U[\Lambda(\eta)\,\eta_0], \quad \Lambda = (\Lambda_{ij}), \quad i,j = 0, 1,\ldots, 8,$$
$$\Lambda_{ij} = s^{-1}(\eta)\,\{\delta_{ij} + \lambda^{(1)}_{ijk}\eta_k + \lambda^{(2)}_{ijkl}\eta_k\eta_l + \lambda^{(3)}_{ijklm}\eta_k\eta_l\eta_m + \lambda^{(4)}_{ijklmn}\eta_k\eta_l\eta_m\eta_n +$$
$$+ \lambda^{(5)}_{ijklmnp}\eta_k\eta_l\eta_m\eta_n\eta_p + \lambda^{(6)}_{ijklmnpq}\eta_k\eta_l\eta_m\eta_n\eta_p\eta_q\}, \tag{31}$$

где все индексы принимают значения 0, 1,…, 8,

$$s(\eta) = (1 - 3\eta_0^2 + \eta_s\eta_s)^2 + (\sqrt{6}\eta_0 - \eta_0^3 + \sqrt{6}\eta_0\eta_s\eta_s - \frac{2i}{3}k_{ijk}\eta_i\eta_j\eta_k)^2,$$

коэффициенты ρ и λ даны в приложении (формулы (П.11) и (П.12)), при этом для группы $SU(3)$ следует учесть уравнение связи параметров (25).

Для группы $SU(2)$ в работах [13,22] (см. также [8]) предложена и разработана и другая удобная векторная параметризация: произвольная матрица $U \in SU(2)$ представляется в виде

$$U = \frac{1 - in_a\sigma_a}{\sqrt{1 + \mathbf{n}^2}} = \frac{1 - i\mathbf{n}\sigma}{\sqrt{1 + \mathbf{n}^2}}, \tag{32}$$

где $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ — трехмерный вещественный вектор. Закон композиции вектор-параметров $\mathbf{n}$ имеет простой вид:

$$\mathbf{n}'' = \langle \mathbf{n}, \mathbf{n}' \rangle = \frac{\mathbf{n} + \mathbf{n}' + [\mathbf{n}, \mathbf{n}']}{1 - \mathbf{n}\mathbf{n}'}. \tag{33}$$

Легко видеть, что существует простое соотношение между вектор-параметром $\mathbf{n}$ в (32) и вектор-параметром $\boldsymbol{\eta}$ в параметризации (24):

$$\mathbf{n} = 2\frac{\boldsymbol{\eta}}{1 - \boldsymbol{\eta}^2}. \tag{34}$$

Естественная линейная параметризация группы Пуанкаре. Преобразования группы Пуанкаре векторов четырехмерного пространства Минковского:

$$x \to x' = Lx + a, \tag{35}$$

где L — лоренцево преобразование, a — 4-вектор, удобно представить в виде действия 5×5-матриц:

$$\begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Lx + a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Легко видеть, что в сочетании с четырьмя параметрами a непосредственное использование комплексных вектор-параметров $\mathbf{q}$ группы Лоренца в качестве параметров группы Пуанкаре дает параметризацию, не обладающую естественностью и линейностью. Поэтому в работе [6] для параметризации группы Пуанкаре была выбрана совокупность параметров:

$$Q = \{\mathbf{p}, \mathbf{p}^*, b\}, \tag{37}$$

где b — 4-вектор пространства Минковского, $\mathbf{p}$ — комплексный трехмерный вектор-параметр, связанный с вектор-параметром $\mathbf{q}$ следующим образом:

$$L(\mathbf{q}) = L^2(\mathbf{p}), \qquad \mathbf{q} = \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = \frac{2\mathbf{p}}{1 - \mathbf{p}^2}. \tag{38}$$

Матрица, представляющая произвольное преобразование группы Пуанкаре, записывается в виде

$$P = P(Q) = \begin{pmatrix} L^2(\mathbf{p}) & \dfrac{L(\mathbf{p})b}{|1 + \mathbf{p}^2|} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Закон композиции параметров Q имеет следующий вид:

$$Q''=\langle Q, Q'\rangle,\quad Q=\{\mathrm{p}, \mathrm{p}^*, b\},\quad Q'=\{\mathrm{p}', \mathrm{p}'^*, b'\},\quad Q''=\{\mathrm{p}'', \mathrm{p}''^*, b''\},$$

$$\mathrm{p}''=\frac{(1-\mathrm{p}'^2)\,\mathrm{p}+(1-\mathrm{p}^2)\,\mathrm{p}'+2[\mathrm{p}\mathrm{p}']}{1+\mathrm{p}^2\mathrm{p}'^2-2\mathrm{p}\mathrm{p}'},\qquad \mathrm{p}''^*=(\mathrm{p}'')^*,\tag{40}$$

$$b''=\frac{|1+\mathrm{p}'^2|\,L(-\mathrm{p}'')\,L(\mathrm{p})\,b+|1+\mathrm{p}^2|\,L(\mathrm{p}'')\,L(-\mathrm{p}')\,b'}{|1+\mathrm{p}^2\mathrm{p}'^2-2\mathrm{p}\mathrm{p}'|}.$$

Формула (39) дает естественную и линейную параметризацию группы Пуанкаре, причем внутреннему автоморфизму $P(Q')\to P(Q'')=$ $=P(Q)\,P(Q')\,P^{-1}(Q)$ соответствует следующее линейное преобразование параметров [6]:

$$Q''=\Lambda(Q)Q',$$

$$\Lambda(Q)=\begin{pmatrix} O^2(\mathrm{p}) & 0 & 0\\ 0 & O^2(\mathrm{p}^*) & 0\\ \alpha_+(\mathrm{p}, \mathrm{p}^*, b) & \alpha_-(\mathrm{p}, \mathrm{p}^*, b) & L^2(\mathrm{p})\end{pmatrix},\tag{41}$$

где $O(\mathrm{p})$ — 3×3-матрицы, действующие в пространстве комплексных параметров p и имеющие вид

$$O(\mathrm{p})=1+2\,\frac{\mathrm{p}^\times+(\mathrm{p}^\times)^2}{1+\mathrm{p}^2},\tag{42}$$

$\alpha_\pm(\mathrm{p}, \mathrm{p}^*, b)$ — прямоугольные 4×3-матрицы со следующими элементами:

$$[\alpha_\pm(\mathrm{p}, \mathrm{p}^*, b)]_{ma}=-\frac{2}{|1+\mathrm{p}^2|}\,[L^2(\mathrm{p})\,I_a^{(\pm)}L(-\mathrm{p})\,b]_m,\tag{43}$$

$I_a^{(\pm)}$ — 4×4-матрица генераторов группы Лоренца с элементом

$$[I_a^{(\pm)}]_{mn}=\frac{1}{2}\,[\pm(\delta_{ma}\delta_{4n}-\delta_{an}\delta_{m4})-\frac{1}{2}\,\varepsilon_{abc}(\delta_{mb}\delta_{cn}-\delta_{bn}\delta_{mc})],\tag{44}$$
$$(a, b, c=1, 2, 3;\quad m, n=1, 2, 3, 4).$$

Линейная естественная параметризация супергруппы Пуанкаре. Обратимся теперь к супергруппе Пуанкаре. На основе линейной естественной параметризации группы Пуанкаре можно найти аналогичную параметризацию супергруппы [9]. Согласно [9], элемент супергруппы Пуанкаре параметризуется совокупностью параметров $Q=(\mathrm{p}, \mathrm{p}^*, B, A, A^*)$, где p — комплексный 3-мерный вектор-параметр $SL(2, C)$, B — вещественная 2×2-матрица, A — 2-мерный комплексный вектор с антикоммутирующими компонентами. Закон композиции параметров задается следующими формулами:

$$Q'' = \langle Q, Q' \rangle,$$

$$\mathrm{p}'' = \langle \mathrm{p}, \mathrm{p}' \rangle = \frac{(1 - \mathrm{p}'^2)\,\mathrm{p} + (1 - \mathrm{p}^2)\,\mathrm{p}' + 2[\mathrm{p}\mathrm{p}']}{1 + \mathrm{p}^2\mathrm{p}'^2 - 2\mathrm{p}\mathrm{p}'}, \qquad \mathrm{p}^{*\prime\prime} = (\mathrm{p}'')^*,$$

$$B'' = (1 + \mathrm{p}^2\mathrm{p}'^2 - 2\mathrm{p}\mathrm{p}')^{-1}\,\{|1 + \mathrm{p}'^2|\,l''^{-1} l B l^+ l''^{+-1} +$$

$$+ |1 + \mathrm{p}^2|\,l'' l^{-1} B' l^{-1+} l''^{+} - i\sqrt{1 + \mathrm{p}^{2*}}\,\sqrt{1 + \mathrm{p}'^2}\,l''^{-1} l A \bullet \overline{A}' l^{-1+} l''^{+} +$$

$$+ i\sqrt{1 + \mathrm{p}'^{*2}}\,\sqrt{1 + \mathrm{p}^2}\,l'' l^{-1} A' \bullet \overline{A} l^+ l''^{-1+}\},$$

$$A'' = \sqrt{1 + \mathrm{p}''^2}\left(\frac{l''^{-1} l A}{\sqrt{1 + \mathrm{p}^2}} + \frac{l'' l^{-1} A'}{\sqrt{1 + \mathrm{p}'^2}}\right), \qquad A^{*\prime\prime} = (A'')^*, \tag{45}$$

где

$$l \in SL(2, C), \qquad l = l(\mathrm{p}) = \frac{(1 + \hat{\mathrm{p}})}{\sqrt{1 + \mathrm{p}^2}}, \qquad \hat{\mathrm{p}} = i p_a \sigma_a,$$

σ_a — матрицы Паули,

$$A \bullet \overline{A}' = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \bullet (A_1^{*\prime}, A_2^{*\prime}) = \begin{pmatrix} A_1 A_1^{*\prime} & A_1 A_2^{*\prime} \\ A_2 A_2^{*\prime} & A_2 A_2^{*\prime} \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что эта параметризация удовлетворяет условию естественности. Взяв преобразование внутреннего автоморфизма $S(Q'')\,S(Q)\,S^{-1}(Q)$, получаем следующее выражение для преобразования параметров:

$$\mathrm{p}'' = O^2(\mathrm{p})\,\mathrm{p}', \quad O(\mathrm{p}) = 1 + 2\,\frac{\mathrm{p}^\times + (\mathrm{p}^\times)^2}{1 + \mathrm{p}^2}, \quad (\mathrm{p}^\times)_{ab} = \varepsilon_{acb}\,p_c, \quad O\widetilde{O} = I,$$

$$B'' = l^2 B' l^{+2} - |1 + \mathrm{p}^2|^{-1}\,[2 l^2 \hat{\mathrm{p}}' l^{-1} (B + iA \bullet \widehat{A}) l^+ +$$

$$+ 2l(B - iA \bullet \overline{A})\,l^{-1+} \hat{\mathrm{p}}' l^{+2}] - 2i(1 + \mathrm{p}^2)^{-1/2} l A \bullet \overline{A}' l^{+2} - \tag{46}$$

$$- 2i(1 + \mathrm{p}^{*2})^{-1/2} l^2 A' \bullet \overline{A} l^+,$$

$$A'' = l^2 A' - 2(1 + \mathrm{p}^2)^{-1/2} l^2 \hat{\mathrm{p}}' l^{-1} A.$$

Учитывая линейность $\hat{\mathrm{p}}$ по параметру p, можно увидеть, что преобразование (46) является линейным.

2. МЕТОД РАСЧЕТА ФОРМ КАРТАНА НА ОСНОВЕ ЗАКОНА КОМПОЗИЦИИ ГРУППОВЫХ ПАРАМЕТРОВ

При рассмотрении вопросов, связанных с локальными групповыми преобразованиями, часто встречаются дифференциальные формы Картана $(dg)g^{-1} = (\partial g(x)/\partial x^{\mu})g^{-1}(x)dx^{\mu}$, где $g(x)$ — функция, принимающая значения в группе G. Обычно нахождение форм Картана требует решения дифференциальных уравнений Картана — Мауэра (см., например, [25—27]). Покажем, что в параметризации группы G, обладающей свойством естественности (1), формы Картана можно определить простым образом с помощью закона композиции групповых параметров [9—12].

Связь между формами Картана и законом композиции параметров. Обозначим $Q = \{Q_n\}$ совокупность параметров группы G. С точки зрения геометрии группового пространства параметров, бесконечно малому вектору dQ с началом в точке Q отвечает элемент группы $g(Q')$: $g(Q')\,g(Q) = g(Q + dQ)$. Разлагая $g(Q + dQ)$ в ряд по dQ:

$$g(Q + dQ) = g(Q) + \frac{\partial g}{\partial Q_m}\bigg|_Q dQ_m + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial Q_n \partial Q_m}\bigg|_Q dQ_m dQ_n + \ldots =$$

$$= g(Q) + dg(Q) + O(dQ^2), \qquad (47)$$

получаем

$$g(Q') = g(Q + dQ)\,g^{-1}(Q) = I + (dg(Q))\,g^{-1}(Q) + O(dQ^2). \qquad (48)$$

С другой стороны, из свойства естественности (1) можно представить $g(Q')$ в виде

$$g(Q') = g(Q + dQ)\,g^{-1}(Q) = g(Q + dQ)\,g(-Q). \qquad (49)$$

Отсюда следует, что

$$Q' = \langle Q + dQ,\, -Q\rangle. \qquad (50)$$

В уравнении (50), если $dQ = 0$, то $Q' = \langle Q, -Q\rangle = 0$ (согласно (1)), поэтому параметры $Q_{n'}$ являются бесконечно малыми и представляются в виде:

$$Q'_n = \langle Q + dQ, -Q\rangle_n = \alpha_{nm}(Q)dQ_m + O(dQ^2) = Q'^{(1)}_n + O(dQ^2), \qquad (51)$$

где коэффициенты $\alpha_{nm}(Q)$ зависят от конкретного вида закона композиции параметров, $Q'^{(1)}_n = \alpha_{nm}(Q)dQ_m$ — член первого порядка по dQ в выражении Q'_n.

Поскольку касательное пространство к группе Ли G в единичном элементе группы отождествляется с алгеброй Ли этой группы, $g(Q')$ имеет вид

$$g(Q') = I + iQ'^{(1)}_n X_n + O(dQ^2), \qquad (52)$$

где $\{X_n\}$ — генераторы группы G.

Сравнивая (48) и (52), получаем

$$(dg(Q))\, g^{-1}(Q) = -\,g(Q)\, dg^{-1}(Q) = iQ'^{(1)}_n X_n, \qquad (53)$$

где $Q'^{(1)}_n$ определяются формулой (51).

Уравнение (53) дает простой метод расчета форм Картана: их нахождение в данном подходе сводится к выделению члена первого порядка по $dQ(Q'^{(1)}_n)$ в выражении $\langle Q + dQ, -Q\rangle$. Итак, если для группы найдена параметризация, обладающая законом композиции параметров и свойством естественности, с помощью этого метода легко определить формы Картана, не прибегая к решению дифференциальных уравнений Картана — Мауэра. Ниже на основе использования этого метода и параметризаций, приведенных в разд.1, рассчитаны выражения форм Картана для ряда групп.

Формы Картана для унитарных групп. Формы Картана для группы $U(2)$ определяются следующей формулой (с использованием параметризации (22)):

$$(dU)U^{-1} = -\,2iN'^{(1)} = -\,2i\eta_i'^{(1)}\sigma_i = -\,2if_{ij}(\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3)\, d\eta_j\, \sigma_i\,, \qquad (54)$$

где $N'^{(1)}$ — член первого порядка по dN в выражении $\langle N + dN, -N\rangle$. Используя (19) и (21), найдем выражение f_{ij} в формуле (54):

$$f_{ij}(\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \frac{\delta_{ij} + \alpha^{(1)}_{ijk}\eta_k + \alpha^{(2)}_{ijkl}\,\eta_k\eta_l}{(1-\eta_0^2 + \boldsymbol{\eta}^2)^2 + 4\eta_0^2}\,, \qquad (55)$$

где $\alpha^{(1)}_{ijk}$, $\alpha^{(2)}_{ijkl}$ — постоянные коэффициенты, выражения которых через структурные постоянные группы $U(2)$ даны в приложении (см. (П.6)).

Формы Картана для случая группы $SU(2)$ определяются следующим образом (с использованием параметризации (23)):

$$(dU)U^{-1} = -2if_{ab}(\eta_1, \eta_2, \eta_3)\, d\eta_b \sigma_a, \qquad a, b = 1, 2, 3,$$

$$f_{ab}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \tag{56}$$

$$= \frac{1}{(1 + \boldsymbol{\eta}^2)^2} [\delta_{ab} - 2\varepsilon_{abc}\eta_c + (\delta_{ad}\delta_{cb} + \delta_{ac}\delta_{db} - \delta_{ab}\delta_{dc})\eta_c\eta_d].$$

Для группы $U(3)$ в параметризации (24) имеем

$$(dU)U^{-1} = -2iF_{ij}(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_8)\, d\eta_j \lambda_i,$$

$$F_{ij}(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_8) =$$

$$= [(1 - 3\eta_0^2 + \eta_s\eta_s)^2 + (\sqrt{6}\eta_0 - \eta_0^3 + \sqrt{6}\eta_0\eta_s\eta_s - \frac{2}{3} ik_{pqr}\eta_p\eta_q\eta_r)^2]^{-1} \times$$

$$\times \{\delta_{ij} + \beta^{(1)}_{ijk}\eta_k + \beta^{(2)}_{ijkl}\eta_k\eta_l + \beta^{(3)}_{ijklm}\eta_k\eta_l\eta_m + \beta^{(4)}_{ijklmn}\eta_k\eta_l\eta_m\eta_n\}, \tag{57}$$

где k_{pqr} и $\beta^{(1)}, \ldots, \beta^{(4)}$ даны в приложении (ф-лы (П.10) и (П.13)).

Для группы $SU(3)$ формы Картана определяются теми же уравнениями (57), но с добавлением уравнения связи параметров (25).

Случай группы Лоренца. В параметризации (11) группы Лоренца с законом композиции (14) легко выделить член первого порядка в выражении $\langle \mathbf{q} + d\mathbf{q}, -\mathbf{q}\rangle$ и получить формы Картана для группы Лоренца:

$$(dL)L^{-1} = i[f_{ab}(\mathbf{q})\, dq_b I_a^{(+)} + f^*_{ab}(\mathbf{q})\, dq^*_b I_a^{(-)}], \tag{58}$$

$$f_{ab}(\mathbf{q}) = i\frac{\delta_{ab} - \varepsilon_{abc}q_c}{1 + \mathbf{q}^2}, \qquad f^*_{ab}(\mathbf{q}) = f_{ab}(\mathbf{q}^*), \tag{59}$$

где $I_a^{\pm}$ — генераторы группы Лоренца, матричная форма которых задается формулой (44).

Формы Картана для группы и супергруппы Пуанкаре. Приведем выражение форм Картана для группы и супергруппы Пуанкаре, рассчитанное по развитой выше методике [15,16]. Для группы Пуанкаре имеем

$$(dP)P^{-1} = iQ'^{(1)}_A X_A, \tag{60}$$

где $\{X_A\} = \{J_a^{(+)}, J_a^{(-)}, T_m\}$ — совокупность генераторов подгруппы Лоренца и 4-трансляций, которые в 5-мерном представлении имеют вид

$$J_a^{(\pm)}= \begin{pmatrix} 2I_a^{(\pm)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (T_m)_{MN}= \delta_{mM}\delta_{N5}, \quad (M, N = 1, 2,\ldots, 5), \tag{61}$$

$\{Q_A'^{(1)}\} = \{p_a'^{(1)}, p_a'^{(1)*}, b_m'^{(1)}\}$ — член первого порядка в выражении $\langle Q + dQ, - Q\rangle$, причем

$$p_a'^{(1)}= iF_{ab}(\mathrm{p})\, \partial_\mu p_b\,,$$

$$F_{ab}(\mathrm{p}) = - (1 + \mathrm{p}^2)^{-2}[(1 - \mathrm{p}^2)\, \delta_{ab}+ 2p_a p_b- 2\varepsilon_{abc}p_c],$$

$$b_m'^{(1)}= i[\beta_+(\mathrm{p}, \mathrm{p}^*, b)]_{ma}\partial_\mu\, p_a+$$

$$+ i[\beta_-(\mathrm{p}, \mathrm{p}^*, b)]_{ma}\partial_\mu p_a^*- \frac{i}{|1 + \mathrm{p}^2|}\,[L(\mathrm{p})]_{mn}\partial_\mu b^n, \tag{62}$$

$$[\beta_+(\mathrm{p}, \mathrm{p}^*, b)]_{ma}= \frac{1}{|1 + \mathrm{p}^2|}\left\{\left[\frac{p_a}{1 + \mathrm{p}^2} - (4F_{ba}(\mathrm{p}) + f_{ba}(\mathrm{p}))I_b^{(+)}\right]L(\mathrm{p})b\right\}_m,$$

$$[\beta_-(\mathrm{p}, \mathrm{p}^*, b)]_{ma}= \frac{1}{|1 + \mathrm{p}^2|}\left\{\left[\frac{p_a^*}{1 + \mathrm{p}^{*2}} - (4F_{ba}^*(\mathrm{p}) + f_{ba}^*(\mathrm{p}))I_b^{(-)}\right]L(\mathrm{p})b\right\}_m,$$

$f_{ab}(\mathrm{p})$ задается формулой (59).

Формы Картана для супергруппы Пуанкаре имеют вид

$$(dS)\, S^{-1}= iQ_A'^{(1)}X_A, \tag{63}$$

где $\{X_A\} = \{J_a^{(+)}, J_a^{(-)}, T_m, Q_\alpha, Q_\alpha^*\}$ — генераторы супергруппы, $\{Q_A'^{(1)}\} = \{p_a'^{(1)}, p_a'^{(1)*}, B_m'^{(1)}, A_\alpha'^{(1)}, A_\alpha'^{(1)*}\}$, причем

$$p_a'^{(1)}= iF_{ab}(\mathrm{p})\, \partial_\mu p_b\,,$$

$$B'^{(1)} = i|1 + \mathrm{p}^2|(1 + \mathrm{p}^2)^{-2}[(\alpha_a+ \beta_a)l(\mathrm{p})\,(B + iA\bullet\bar{A})l^+(\mathrm{p})\, \partial_\mu\, p_a+$$

$$+ l(\mathrm{p})\,(B - iA\bullet\bar{A})\, l^+(\mathrm{p})\,(\alpha_a^+ + \beta_a^+)\, \partial_\mu p_a^*+ l(\mathrm{p})\, \partial_\mu B l^+(\mathrm{p}) +$$

$$+ il(\mathrm{p})\, A\bullet(\partial_\mu\bar{A})\, l^{-1}(\mathrm{p}) - il(\mathrm{p})\,(\partial_\mu A)\bullet\bar{A}l^+(\mathrm{p})],$$

$$A'^{(1)} = i(1 + \mathrm{p}^2)\ [(\alpha_a + \beta_a)\, A\partial_\mu p_a + l(\mathrm{p})\, \partial_\mu A\,]. \tag{64}$$

В формулах (64) используются следующие обозначения:

$$B = B_m \sigma^m, \qquad B'^{(1)} = B'^{(1)}_m \sigma^m,$$

$$F_{ab}(\mathrm{p}) = -\,(1 + \mathrm{p}^2)^{-2}[(1 - \mathrm{p}^2)\,\delta_{ab} + 2p_a p_b - 2\varepsilon_{abc}\, p_c\,],$$

$$\alpha_a = (1 + \mathrm{p}^2)^{-1} p_a - i\sigma_a, \qquad \beta_a = (1 + \mathrm{p}^2)^{-1} p_a - 2iF_{ba}\sigma_b\,.$$

3. ЯВНЫЙ ВИД КОНЕЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ И ИХ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕАЛИЗАЦИЙ

В этом разделе показано, что на основе использования линейных естественных параметризаций групп и метода расчета форм Картана, развитого в разд.2, можно найти явный вид конечных преобразований калибровочных полей и их нелинейных реализаций.

Конечные локальные преобразования унитарных групп. Известно, что конечные преобразования калибровочных полей для унитарных групп имеют вид

$$B'_\mu = U(x)\, B_\mu U^{-1}(x) + (\partial_\mu U(x))\, U^{-1}(x), \tag{65}$$

или

$$b'_{\mu i}(x) T_i = b_{\mu i}(x)\, U(x) T_i U^{-1}(x) + (\partial_\mu U(x)) U^{-1}(x), \tag{65$'$}$$

где $b_{\mu i}(x)$ — компоненты калибровочного поля B_μ ($B_\mu = b_{\mu i} T_i$), T_i — генераторы группы, $U(x)$ — конечное локальное унитарное преобразование. Найдем явный вид этих преобразований в терминах конечных локальных параметров группы для унитарных групп $U(2)$, $SU(2)$, $U(3)$, $SU(3)$, используя приведенные в разд.1 параметризации этих групп.

Второй член в правой части (65$'$) определяется формами Картана, которые были рассчитаны в разд.2. Что касается первого члена, то

$$U(x) T_i U^{-1}(x) = \Lambda_{ij}(\eta(x)) T_j\,, \tag{66}$$

где $\Lambda_{ij}(\eta(x))$ — матрица линейного преобразования вектор-параметров при преобразовании подобия (в соответствии со свойством линейности параметризации):

$$U(\eta(x))\,U(\eta_0)\,U^{-1}(\eta(x)) = U[\Lambda(\eta(x))\,\eta_0]. \tag{67}$$

Действительно, выбирая в (67) в качестве η_0 произвольный малый вектор-параметр (но $\eta(x)$ — конечный) и разлагая $U(\eta_0) = 1 + \eta_{0i}T_i$, выводим (66).

Таким путем получаем следующие выражения для преобразований компонент калибровочного поля при произвольных конечных локальных преобразованиях унитарных групп:

$$b'_{\mu i}(x) = \Lambda_{ij}(\eta(x))\,b_{\mu j}(x) + f_{ij}(\eta)\,\partial_\mu \eta_j(x), \tag{68}$$

где явные выражения матриц f_{ij} для $U(2)$, $SU(2)$, $U(3)$, $SU(3)$ даны формулами (55), (56), (57), а Λ_{ij} — формулами (27), (29), (31).

Изложенный выше метод получения явного вида конечных калибровочных преобразований унитарных групп может быть использован без трудностей для ряда других групп.

Конечные локальные преобразования групп пространственно-временных симметрий и супергруппы. Известно, что теории гравитации и супергравитации могут формулироваться как калибровочные теории групп пространственно-временных симметрий и суперсимметрий [28—41,49,50]. Общей математической основой этих теорий может служить геометрия расслоенных пространств [42—45]. Тогда группа симметрии рассматривается как структурная группа, действующая в касательном расслоении над пространственно-временным многообразием (базой) с координатами x_μ, $\mu = 1, 2, 3, 4$, а калибровочные поля — как коэффициенты $\Omega_{\mu A}$ 1-формы связности $\Omega = \Omega_{\mu A} I_A dx^\mu$ (I_A — генераторы группы симметрии) на расслоении, принимающей значения в алгебре Ли группы. Конечные локальные преобразования S группы (т.е. преобразования, параметры которых зависят от точек базового пространства-времени) описываются как замены сечения расслоения, при которых форма связности Ω преобразуется следующим образом (см., например, [43]):

$$\Omega' = S\Omega S^{-1} + SdS^{-1}. \tag{69}$$

Из (69) можно найти явный вид преобразования коэффициентов 1-формы связности при конечных локальных преобразованиях группы пространственно-временных симметрий и суперсимметрии, используя приведенные в разд.1 параметризации этих групп. Конечные локальные лоренцевы преобразования принимают вид [14]:

$$\begin{aligned} \omega'_{\mu a}(x) &= O_{ab}(\mathrm{q}(x))\, \omega_{\mu b}(x) + f_{ab}(\mathrm{q}(x))\, \partial_\mu q_b(x), \\ \omega^{*\prime}_{\mu a}(x) &= O^*_{ab}(\mathrm{q}(x))\, \omega^*_{\mu b}(x) + f^*_{ab}(\mathrm{q}(x))\, \partial_\mu q^*_b(x), \end{aligned} \tag{70}$$

где $\omega_{\mu a}(x)$, $\omega^*_{\mu a}(x)$ — коэффициенты 1-формы связности, принимающей значения в алгебре Ли группы Лоренца: $\Omega = (\omega_{\mu a}(x)I^{(+)}_a + \omega^*_{\mu a}(x)I^{(-)}_a)dx^\mu$ ($I^{(\pm)}_a$ — генераторы группы Лоренца). Калибровочное поле Ω имеет геометрический смысл локальной лоренцевой связности.

Конечные локальные преобразования группы Пуанкаре имеют следующий вид [15]:

$$\begin{aligned} \omega'_{\mu a}(x) &= [O^2(\mathrm{p}(x))]_{ab}\omega_{\mu b}(x) + F_{ab}(\mathrm{p}(x))\, \partial_\mu p_b(x), \\ \omega'^*_{\mu a}(x) &= [O^2(\mathrm{p}^*(x))]_{ab}\omega^*_{\mu b}(x) + F^*_{ab}(\mathrm{p}(x))\, \partial_\mu p^*_b(x), \\ \theta'_{\mu m}(x) &= [\alpha_+(\mathrm{p}(x), \mathrm{p}^*(x), b(x))]_{ma}\omega_{\mu a}(x) + \\ &+ [\alpha_-(\mathrm{p}(x), \mathrm{p}^*(x), b(x))]_{ma}\omega^*_{\mu a}(x) + \\ &+ [L^2(\mathrm{p}(x))]_{mn}\theta^n_\mu(x) + [\beta_+(\mathrm{p}(x), \mathrm{p}^*(x), b(x))]_{ma}\partial_\mu p_a(x) + \\ &+ [\beta_-(\mathrm{p}(x), \mathrm{p}^*(x), b(x))]_{ma}\partial_\mu p^*_a(x) - \frac{1}{|1 + \mathrm{p}^2(x)|}[L(\mathrm{p}(x))]_{mn}\partial_\mu b^n(x), \end{aligned} \tag{71}$$

где матрицы $O(\mathrm{p})$, $F_{ab}(\mathrm{p})$, $\alpha_\pm(\mathrm{p}, \mathrm{p}^*, b)$, $\beta_\pm(\mathrm{p}, \mathrm{p}^*, b)$ задаются формулами (42), (43), (62). В уравнениях (71) $\omega_{\mu a}(x)$, $\omega^*_{\mu a}(x)$, $\theta^m_\mu(x)$ являются коэффициентами 1-формы связности, принимающей значения в алгебре Ли группы Пуанкаре: $\Omega = (\omega_{\mu a}(x)J^{(+)}_a + \omega^*_{\mu a}(x)J^{(-)}_a + \theta^m_\mu(x)T_m)\, dx^\mu$, где $J^{(\pm)}_a$, T_m — генераторы группы Пуанкаре (см. (61)). Геометрическая интерпретация этих коэффициентов дается на основе рассмотрения нелинейной реализации группы Пуанкаре (см. ниже).

Для супергруппы Пуанкаре мы имеем следующие формулы для калибровочных полей при преобразованиях с произвольными конечными локальными параметрами супергруппы $Q(x) = \{\mathrm{p}(x), \mathrm{p}^*(x), B(x), A(x), A^*(x)\}$ [16]:

$$\omega'_{\mu a} = O^2_{ab}(\mathrm{p})\,\omega_{\mu b} + F_{ab}(\mathrm{p})\,\partial_\mu p_b\,, \qquad \omega^{*\prime}_{\mu a} = (\omega'_{\mu a})^*,$$

$$\begin{aligned}\theta'_\mu = {} & l^2\theta_\mu l^{+2} - |1+\mathrm{p}^2|^{-1}[2l^2\hat{\omega}_\mu l^{-1}(B+iA\bullet\bar{A})\,l^+ + 2l(B-iA\bullet\bar{A})\,l^{-1+}\hat{\omega}^+_\mu l^{+2}] - \\ & -2i(1+\mathrm{p}^2)^{-1/2}lA\bullet\bar{\Psi}_\mu l^{+2} - 2i(1+\mathrm{p}^2)^{-1/2}l^2\Psi_\mu\bullet\bar{A}l^+ + \\ & + |1+\mathrm{p}^2|\,(1+\mathrm{p}^2)^{-2}[(\alpha_a+\beta_a)\,l(B+iA\bullet\bar{A})\,l^+\partial_\mu p_a + \\ & + l(B-iA\bullet\bar{A})\,l^+(\alpha^+_a+\beta^+_a)\,\partial_\mu p^*_a + l\partial_\mu Bl^+ + \\ & + ilA\bullet(\partial_\mu\bar{A})l^{-1} - il(\partial_\mu A)\bullet\bar{A}l^+\,],\end{aligned} \tag{72}$$

$$\Psi'_\mu = l^2\Psi_\mu - (1+\mathrm{p}^2)^{-1/2}\,[2l^2\hat{\omega}_\mu l^{-1}A - (\alpha_a+\beta_a)\,A\partial_\mu p_a + l\partial_\mu A\,],$$

$$\Psi^{*\prime}_\mu = (\Psi'_\mu)^*,$$

где

$$\theta_\mu = \theta_{\mu m}\sigma^m, \quad \theta'_\mu = \theta'_{\mu m}\sigma^m, \quad \hat{\omega}_\mu = i\omega_{\mu a}\sigma_a, \quad \hat{\omega}^+_\mu = -i\omega^*_{\mu a}\sigma_a,$$

$$F_{ab}(\mathrm{p}) = -(1+\mathrm{p}^2)^{-2}[(1+\mathrm{p}^2)\,\delta_{ab} + 2p_a p_b + (\mathrm{p}^\times)_{ab}],$$

$$\alpha_a = (1+\mathrm{p}^2)^{-1}p_a - i\sigma_a, \qquad \beta_a = (1+\mathrm{p}^2)^{-1}p_a - 2iF_{ba}\sigma_b\,.$$

В уравнениях (72) $\omega_{\mu a}(x), \omega^*_{\mu a}(x), \theta_{\mu m}(x), \Psi_{\mu\alpha}(x), \Psi^*_{\mu\alpha}(x)$ — коэффициенты 1-формы связности, принимающей значения в алгебре Ли супергруппы:

$$\Omega = (\omega_{\mu a}(x)J^+_a + \omega^*_{\mu a}(x)J^-_a + \theta_{\mu m}(x)T^m + \Psi_{\mu\alpha}(x)Q^\times_\alpha - \Psi^*_{\mu\alpha}(x)Q^{*\times)}_\alpha)\,dx^\mu,$$

$$Q^\times_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}Q_\beta.$$

Геометрическая интерпретация этих коэффициентов дается нелинейной реализацией супергруппы Пуанкаре (см. ниже).

Явный вид нелинейных реализаций калибровочных теорий гравитации и супергравитации. Рассмотрим нелинейную реализацию группы Пуанкаре, которая линейна на подгруппе Лоренца. Мы можем написать преобразования группы Пуанкаре (39) в виде

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{L(\mathrm{p})b}{|1+\mathrm{p}^2|} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^2(\mathrm{p}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P_F P_L, \tag{73}$$

где L обозначает подгруппу Лоренца и F — фактор-пространство P/L. В соответствии с методом нелинейной реализации [46—48,26,27] введем поле $\Phi(x)$, принимающее значения в фактор-пространстве в фиксированной точке x:

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{L(\mathrm{p})\,\xi(x)}{|1+\mathrm{p}^2|} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in F_x, \qquad \xi(x) \in R^{1,3}, \tag{74}$$

и определим нелинейное калибровочное поле $\hat{\Omega}$:

$$\hat{\Omega} = \Phi^{-1}\Omega\Phi + \Phi^{-1}d\Phi. \tag{75}$$

Учитывая явный вид (61) генераторов группы Пуанкаре для 5×5-матриц Ω, $\hat{\Omega}$, мы можем написать:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 2\omega & \theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\Omega} = \begin{pmatrix} 2\hat{\omega} & \hat{\theta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{76}$$

где ω, $\hat{\omega}$ — 1-формы, принимающие значения в алгебре Ли группы Лоренца: $\omega = (\omega_{\mu a} I_a^{(+)} + \omega^*_{\mu a} I_a^{(-)})\, dx^\mu$, $\hat{\omega} = (\hat{\omega}_{\mu a} I_a^{(+)} + \hat{\omega}^*_{\mu a} I_a^{(-)})\, dx^\mu$; $\theta, \hat{\theta}$ — 1-формы со значениями в $R^{1,3}$: $\theta = \theta^m_\mu I_m dx^\mu$, $\hat{\theta} = \hat{\theta}^m_\mu I_m dx^\mu$. Формулы (75), (76) позволяют определить $\hat{\omega}$, $\hat{\theta}$ из ω, θ (путем использования естественности, линейности параметризации и метода расчета форм Картана (разд.2)) [15]:

$$\hat{\omega} = \omega, \qquad \hat{\theta} = \theta + D\left(\frac{L(\mathrm{p})\,\xi}{|1+\mathrm{p}^2|}\right), \qquad D = d + \omega. \tag{77}$$

При замене сечения $\hat{\omega}$ преобразуется как линейное калибровочное поле группы Лоренца:

$$\hat{\omega}' = L^2(\mathrm{p})\,\hat{\omega}(L^2(\mathrm{p}))^{-1} + L^2(\mathrm{p})\,d(L^2(\mathrm{p}))^{-1}, \tag{78}$$

или

$$\hat{\omega}'_{\mu a}(x) = [O^2(\mathrm{p}(x))]_{ab}\omega_{\mu b}(x) + F_{ab}(\mathrm{p}(x))\,\partial_\mu p_b(x), \tag{78$'$}$$

и $\hat{\theta}$ — как лоренц-тензор: $\hat{\theta}' = L^2(\mathrm{p})\,\hat{\theta}$. Поэтому $\hat{\omega}$ и $\hat{\theta}$ интерпретируются, соответственно, как локальная лоренцева связность и тетрада ($e^m_\mu = k_0\hat{\theta}^m_\mu$, $[k_0] = \text{см}$). Эти величины будут играть роль основных динамических переменных для построения калибровочной теории гравитации.

Аналогично можно найти явный вид нелинейной реализации супергруппы Пуанкаре, которая линейна на подгруппе Лоренца. Напишем преобразование супергруппы:

$$S(\mathrm{p}, \mathrm{p}^*, B, A, A^*) =$$
$$= S\left(0, 0, \frac{l(\mathrm{p}) B l^+(\mathrm{p})}{|1+\mathrm{p}^2|}, \frac{l(\mathrm{p})}{\sqrt{1+\mathrm{p}^2}}, \frac{l^*(\mathrm{p}) A^*}{\sqrt{1+\mathrm{p}^{*2}}}\right) S(\mathrm{p}, \mathrm{p}^*, 0, 0, 0) = S_F S_L, \quad (79)$$

где S_L — элемент подгруппы Лоренца, $S_F \in G/L$. Определим нелинейное калибровочное поле $\hat{\Omega}$:

$$\hat{\Omega} = \Phi^{-1} \Omega \Phi + \Phi^{-1} d\Phi, \quad (80)$$

где $\Phi(x)$ принимает значения в фактор-пространстве в фиксированной точке x и имеет вид

$$\Phi(x) = S\left(0, 0, \frac{l(\mathrm{p}) B l^+(\mathrm{p})}{|1+\mathrm{p}^2|}, \frac{l(\mathrm{p})\, \eta(x)}{\sqrt{1+\mathrm{p}^2}}, \frac{l^*(\mathrm{p})\, \eta^*(x)}{\sqrt{1+\mathrm{p}^{*2}}}\right),$$
$$\xi(x) = \xi^m(x), \xi^m(x) \in R^{1,3}, \qquad \eta(x) = \begin{pmatrix} \eta_1(x) \\ \eta_2(x) \end{pmatrix}, \quad (81)$$

здесь $\eta_1(x), \eta_2(x)$ — антикоммутационные компоненты. Из (80), (81) получаем явный вид нелинейных калибровочных полей [16]:

$$\hat{\omega}_{\mu a} = \omega_{\mu a}, \qquad \hat{\omega}^*_{\mu a} = \omega^*_{\mu a},$$
$$\hat{\theta}_\mu = \theta_\mu + \mathfrak{D}_\mu \left(\frac{l(\mathrm{p})\, \xi(x)\, l^+(\mathrm{p})}{|1+\mathrm{p}^2|}\right) - i\left[\Delta^{\rightarrow}_\mu \left(\frac{l(\mathrm{p})\, \eta(x)}{\sqrt{1+\mathrm{p}^2}}\right)\right] \bullet \bar{\eta}(x) +$$
$$+ i\eta(x) \bullet \left[\overline{\left(\frac{l(\mathrm{p})\, \eta(x)}{\sqrt{1+\mathrm{p}^2}}\right)} \Delta^{\leftarrow +}_\mu\right] + 2i\left(\frac{l(\mathrm{p})\, \eta(x)}{\sqrt{1+\mathrm{p}^2}}\right) \bullet \bar{\Psi}_\mu + 2i\Psi_\mu \bullet \overline{\left(\frac{l(\mathrm{p})\, \eta(x)}{\sqrt{1+\mathrm{p}^2}}\right)},$$
$$\hat{\Psi}_\mu = \Psi_\mu + \Delta^{\rightarrow}_\mu \left(\frac{l(\mathrm{p})\, \eta(x)}{\sqrt{1+\mathrm{p}^2}}\right), \qquad \hat{\bar{\Psi}}_\mu = \bar{\Psi}_\mu + \overline{\left(\frac{l(\mathrm{p})\, \eta(x)}{\sqrt{1+\mathrm{p}^2}}\right)} \Delta^{\leftarrow +}_\mu, \quad (82)$$

где

$$\mathfrak{D}_\mu = \partial_\mu + \omega^{\rightarrow}_\mu + \omega^{\leftarrow +}_\mu,$$

$$\Delta_\mu^{\rightarrow} = \partial_\mu^{\rightarrow} + 2\omega_\mu^{\rightarrow}, \qquad \Delta_\mu^{\leftarrow +} = \partial_\mu^{\leftarrow} + 2\omega^{\leftarrow +},$$

$$\omega_\mu = i\omega_{\mu a}\sigma_a, \quad \omega_\mu^+ = -i\omega_{\mu a}^*\sigma_a, \quad \theta_\mu = \theta_{\mu m}\sigma^m, \quad \widehat{\theta}_\mu = \widehat{\theta}_{\mu m}\sigma^m.$$

При замене сечения 1-форма $\widehat{\Omega}$ преобразуется как

$$\widehat{\omega}'_{\mu a} = O^2_{ab}(\mathrm{p})\,\widehat{\omega}_{\mu b} + F_{ab}\partial_\mu p_b, \qquad \widehat{\omega}^{*\prime}_{\mu a} = (\widehat{\omega}'_{\mu a})^*,$$

$$\widehat{\theta}'_\mu = l^2(\mathrm{p})\,\widehat{\theta}_\mu l^{+2}(\mathrm{p}), \tag{83}$$

$$\widehat{\Psi}'_\mu = l^2(\mathrm{p})\,\widehat{\Psi}_\mu, \qquad \overline{\widehat{\Psi}}'_\mu = (\overline{\widehat{\Psi}'_\mu}).$$

Коэффициенты $\widehat{\omega}_{\mu a}$, $\widehat{\omega}^*_{\mu a}$, $\widehat{\theta}_{\mu m}$, $\widehat{\Psi}_{\mu a}$ нелинейного калибровочного поля $\widehat{\Omega}$ с законом преобразования (83) отождествляются, соответственно, с локальной лоренцевой связностью, тетрадой и полем Рариты — Швингера и используются в качестве основных динамических переменных супергравитации.

4. ЛАГРАНЖИАНЫ ГЛАВНЫХ КИРАЛЬНЫХ И ГОЛДСТОУНОВСКИХ ПОЛЕЙ В ВЕКТОРНОЙ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ УНИТАРНЫХ ГРУПП

Как известно, в ряде задач теоретической физики возникают нелинейные киральные модели, в которых взаимодействие вводится не путем добавления лагранжиана взаимодействия к лагранжиану свободного поля, а чисто геометрическим способом (см., например, [51—54,43]). Киральные поля при этом принимают значения не в пространстве R^n, а в некотором нелинейном многообразии M, кривизна которого определяет их взаимодействие. Для таких киральных полей, как главные киральные поля, n-поля, голдстоуновские поля, нелинейные поля Скирма и т.д., многообразие M является либо группой G, либо фактор-пространством G/H (H — подгруппа группы G). Возможность исследования таких интересных особенностей нелинейных киральных моделей, как асимптотическая свобода, нетривиальная топологическая структура, существование частицеподобных решений и т.д., в значительной степени определяется сложностью и типом нелинейности лагранжиана, которые, в свою очередь, зависят от выбора параметризации группового многообразия.

В этом разделе будут приведены лагранжианы нелинейных киральных полей в векторной параметризации унитарных групп, рассмотренной в разд.1. Лагранжианы нелинейных киральных полей строятся на основе использования геометрии группового пространства, аналогичной геометрии римановых пространств и пространства аффинной связности. При этом поля отождествляются с локальными параметрами группы или фактор-пространства, а лагранжианы выражаются через формы Картана соответствующих групп [25—27,46,47,53,43].

Лагранжианы главных киральных полей (ГПК). Найдем выражения для лагранжианов ГПК, принимающих значения в многообразиях локальных параметров групп $U(2)$, $SU(2)$, $U(3)$, $SU(3)$. Эти многообразия сами образуют группы относительно операции $\langle\ ,\ \rangle$, изоморфные рассматриваемым группам. Лагранжианы ГПК могут быть отождествлены с метриками в алгебрах Ли, инвариантными относительно левых и правых сдвигов [43, 53]:

$$\mathfrak{L} = -\mathrm{const}\ \mathrm{Tr}\{(\partial_\mu U)U^{-1}(\partial^\mu U)U^{-1}\}. \tag{84}$$

Используя выражения форм Картана, рассчитанные в разд.3 (формулы (54)—(57)), получим лагранжианы ГКП в векторной параметризации.

Для группы $U(2)$ в параметризации (22)

$$\begin{aligned}\mathfrak{L} = \mathrm{const}\Big[(1-\eta_0^2(x)+\boldsymbol{\eta}^2(x))^2+4\eta_0^2(x)\Big]^{-2}\Big\{&\delta_{jj'}+\left(\alpha^{(1)}_{jj'k}+\alpha^{(1)}_{j'jk}\right)\eta_k(x)+\\ &+\left(\alpha^{(2)}_{jj'kl}+\alpha^{(2)}_{j'jkl}+\alpha^{(1)}_{ijk}\alpha^{(1)}_{ij'l}\right)\eta_k(x)\,\eta_l(x)+\\ &+\left(\alpha^{(1)}_{ijk}\,\alpha^{(2)}_{ij'lm}+\alpha^{(1)}_{ij'k}\,\alpha^{(2)}_{ijlm}\right)\eta_k(x)\,\eta_l(x)\,\eta_m(x)+\\ &+\alpha^{(2)}_{ijkl}\,\alpha^{(2)}_{ij'mn}\,\eta_k(x)\,\eta_l(x)\,\eta_m(x)\,\eta_n(x)\Big\}\,\partial_\mu\eta_j(x)\,\partial^\mu\eta_{j'}(x)\end{aligned} \tag{85}$$

(все индексы принимают значения 0,1,2,3).

Для группы $SU(2)$ в параметризации (23) лагранжиан ГКП имеет крайне простой вид:

$$\mathfrak{L} = \mathrm{const}\frac{(\partial\,\boldsymbol{\eta}(x))^2}{(1+\boldsymbol{\eta}^2(x))^2}, \tag{86}$$

а в параметризации (32)

$$\mathfrak{L} = \mathrm{const}\left\{\frac{(\partial\,\mathbf{n}(x))^2}{1+\mathbf{n}^2(x)}-\frac{(\mathbf{n}(x)\partial\,\mathbf{n}(x))^2}{(1+\mathbf{n}^2(x))^2}\right\}. \tag{87}$$

Лагранжиан ГКП для группы $U(3)$

$$\mathfrak{L} = \text{const}\, F_{ij}(\eta(x))F_{ij'}(\eta(x))\partial_\mu \eta_j(x)\partial^\mu \eta_{j'}(x), \tag{88}$$

где $F_{ij}(\eta) = F_{ij}(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_8)$ определяются формулой (57). Лагранжианом ГКП для группы $SU(3)$ служит уравнение (88) с добавлением соотношения (25) как уравнения связи полей.

Отметим, что в лагранжиане (88) для группы $U(3)$ поле $\eta_0(x)$ взаимодействует с остальными полями $\eta_k(x)$ в отличие, например, от экспоненциальной параметризации, в которой такое взаимодействие отсутствует.

Лагранжианы голдстоуновских полей (ГП). Рассмотрим теперь киральные поля, принимающие значения в фактор-пространстве G/H. Известно, что для системы со спонтанно-нарушенной симметрией, если G является группой симметрии лагранжиана, H — инвариантной подгруппой вакуума, параметры фактор-пространства G/H отождествляются с ГП, соответствующими нарушению $G \to H$ [27,46,47]. Обозначим V_α генераторы подгруппы H, а A_i — генераторы, дополняющие H до группы G. Тогда можно записать формы Картана

$$(dG(Q))G^{-1}(Q) = iQ_n'^{(1)}X_n = i\,(\theta_\alpha V_\alpha + \omega_i A_i), \tag{89}$$

где дифференциальные формы θ_α, ω_i зависят, в общем случае, от v, dv, a, da (v и a — параметры H и G/H). В соответствии с геометрической интерпретацией θ_α, ω_i аналогичны вращениям и трансляциям реперов в римановом пространстве. Для построения лагранжианов ГП рассматриваем только пространство параметров a_i, полагая $v_\alpha = 0$, и определяем лагранжианы ГП как квадраты интервала геодезической линии между точками a_i и $a_i + da_i$ [26,27,46,47]:

$$\mathfrak{L} = \text{const}\, \omega_\mu^i(a, \partial a)\, \omega^{j\mu}(a, \partial a) C_{ik}^\alpha C_{\alpha j}^k. \tag{90}$$

Найдем лагранжиан голдстоуновских полей, соответствующих нарушениям $U(2)\times U(2) \to U(2)$. Отправляемся от прямого произведения двух независимых элементов группы $U(2)$, параметризованных R^4-векторами η_i и χ_j, $i, j = 0,1,2,3$ (см. (22)):

$$G = U(\eta) \otimes U(\chi),$$
$$U(\eta) = \frac{1 - i\eta_i\sigma_i}{1 + i\eta_i\sigma_i}, \quad U(\chi) = \frac{1 - i\chi_i\sigma_i}{1 + i\chi_i\sigma_i}. \tag{91}$$

Для малых η, χ имеем

$$G \cong 1_4 - 4i\left[\eta_i\left(\frac{\sigma_i}{2}\otimes 1_2\right) + \chi_j\left(1_2\otimes\frac{\sigma_j}{2}\right)\right] = 1_4 - 4i\;[\eta_i X_i^R + \chi_j X_j^L], \quad (92)$$

где

$$X_i^R = \frac{\sigma_i}{2}\otimes 1_2, \quad X_j^L = 1_2\otimes\frac{\sigma_j}{2}$$

подчиняются следующим перестановочным соотношениям:

$$[X_i^R, X_k^R] = ia_{ijk}X_k^R, \quad [X_i^L, X_j^L] = ia_{ijk}X_k^L, \quad [X_i^L, X_j^R] = 0, \qquad (93)$$

a_{ijk} — структурные постоянные группы $U(2)$, значения которых приведены в (П.2). Из X_i^R, X_j^L составляем комбинации $V_\alpha = X_\alpha^R + X_\alpha^L$, $A_i = X_i^R - X_i^L$, которые подчиняются уже следующим перестановочным соотношениям:

$$[V_\alpha, V_\beta] = ia_{\alpha\beta\gamma}V_\gamma, \quad [V_\alpha, A_j] = ia_{\alpha jk}A_k,$$
$$[A_i, A_j] = ia_{ij\alpha}V_\alpha, \quad i, j, k = 0, 1, 2, 3. \qquad (94)$$

При этом V_α порождают подгруппу H, а A_i связаны с нарушенными симметриями. Из (92) простым алгебраическим преобразованием можно выразить бесконечно малый элемент G через V_α, A_i:

$$G = 1 - 2i\;[v_\alpha V_\alpha + a_i A_i], \quad v_\alpha = \eta_\alpha + \chi_\alpha, \quad a_i = \eta_i - \chi_i, \qquad (95)$$

где v_α, a_i — параметры подгруппы H и фактор-пространства G/H соответственно.

Выражение форм Картана для группы $G = U(2)\times U(2)$ можно написать в виде

$$(dG)G^{-1} = -4i(\eta_i'^{(1)}X_i^R + \chi_k'^{(1)}X_k^L),$$
$$\eta_i'^{(1)} = f_{ij}(\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3)d\eta_j, \quad \chi_k'^{(1)} = f_{kl}(\chi_0, \chi_1, \chi_2, \chi_3)d\chi_l, \qquad (96)$$

где $f_{ij}(\eta)$ даны формулой (55). Приводя (96) к виду

$$(dG)G^{-1} = -2i\;[\theta_\alpha V_\alpha + \omega_i A_i],$$
$$\theta_\alpha = \eta_\alpha'^{(1)} + \chi_\alpha'^{(1)} = f_{\alpha j}\,d\eta_j + f_{\alpha l}(\chi)d\chi_l, \qquad (97)$$
$$\omega_i = \eta_i'^{(1)} - \chi_i'^{(1)} = f_{ij}(\eta)d\eta_j - f_{il}(\chi)d\chi_l$$

и сужая пространство параметров до пространства a_i (см. ф-лу (95)): $v_\alpha = \eta_\alpha + \chi_\alpha = 0, \chi_\alpha = -\eta_\alpha$, $a_i = \eta_i - \chi_i = 2\eta_i$, получим выражение θ_α и ω_i через параметры a_i фактор-пространства $U(2) \times U(2)/U(2)$:

$$\theta_\alpha = [f_{\alpha j}(a) - f_{\alpha j}(-a)]da_j\,, \quad \omega_i = [f_{ij}(a) + f_{ij}(-a)]da_j\,. \tag{98}$$

Лагранжиан ГП $\xi_i(x)$, рассматриваемых как параметры фактор-пространства $U(2) \times U(2)/U(2)$, имеет вид

$$\mathfrak{L} = \text{const}\,\omega_\mu^i(\xi, \partial\xi)\,\omega^{j\mu}(\xi, \partial\xi)C_{ik}^\alpha C_{\alpha j}^k\,, \quad (i, j, k, \alpha = 0, 1, 2, 3), \tag{99}$$

где $C_{ik}^\alpha = a_{ik\alpha}$ — структурные постоянные группы $U(2)$ (см. (П.2)),

$$\omega_\mu^i(\xi, \partial\xi) = [f_{ij}(\xi) + f_{ij}(-\xi)]\partial_\mu\xi_j\,. \tag{100}$$

Из (П.2) следует, что отличны от нуля только компоненты $C_{ak}^\alpha C_{\alpha b}^k$ при $i = a$, $j = b(a, b = 1,2,3)$: $C_{ak}^\alpha C_{\alpha b}^k = \delta_{ab}$, следовательно, из (55), (99), (100) получаем

$$\mathfrak{L} = \text{const}\,\omega_\mu^a(\xi(x), \partial\xi(x))\,\omega^{a\mu}(\xi(x), \partial\xi(x)) =$$

$$\mathfrak{L} = \text{const}\,[(1 - \xi_0^2(x) + \xi^2(x))^2 + 4\xi_0^2(x)]^{-2}\{\delta_{aj}\delta_{aj'} +$$

$$+ (\delta_{aj'}\alpha_{ajkl}^{(2)} + \delta_{aj}\alpha_{aj'kl}^{(2)})\,\xi_k(x)\,\xi_l(x) +$$

$$+ \alpha_{ajkl}^{(2)}\alpha_{aj'mn}^{(2)}\,\xi_k(x)\,\xi_l(x)\,\xi_m(x)\,\xi_n(x)\}\partial_\mu\xi_j(x)\partial^\mu\xi_{j'}(x),$$

$$i, j, k = 0,1,2,3; \quad a = 1,2,3. \tag{101}$$

Формула (101) дает лагранжиан ГП, соответствующих нарушению $U(2) \times U(2) \to U(2)$. Из (101) можно получить следующий лагранжиан ГП, соответствующих нарушению $SU(2) \times SU(2) \to SU(2)$:

$$\mathfrak{L} = \text{const}(1 + \boldsymbol{\xi}^2(x))^{-4}\{(\partial\,\boldsymbol{\xi}(x))^2 + 4(\boldsymbol{\xi}(x)\partial\,\boldsymbol{\xi}(x))^2 -$$

$$- 2\boldsymbol{\xi}^2(x)(\partial\,\boldsymbol{\xi}(x))^2 + \boldsymbol{\xi}^4(x)(\partial\,\boldsymbol{\xi}(x))^2\}. \tag{102}$$

Отметим, что заменой полевых переменных

$$\boldsymbol{\pi}(x) = 2\,\frac{\boldsymbol{\xi}(x)}{1 - \boldsymbol{\xi}^2(x)} \tag{103}$$

(см. формулу (34)) приводим лагранжиан (102) к простому виду:

$$\mathfrak{L} = \text{const}\,\frac{(\partial\,\pi(x))^2}{(1+\pi^2(x))^2}, \tag{104}$$

который является лагранжианом ГП $\xi(x)$ в параметризации $SU(2)$ формулой (32). Далее, считая компоненты поля $\pi(x)$ стереографическими координатами сферы S^3 в пространстве R^4 и переходя к координатам $\varphi^\alpha(x)$ пространства R^4 $(A = 1,2,3,4)$, лагранжиан (104) можно привести к виду:

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}\,\partial_\mu\,\varphi^\alpha(x)\partial^\mu\varphi^\alpha(x), \tag{105}$$

где $\varphi^\alpha(x)$ удовлетворяет связи $\varphi^\alpha(x)\varphi^\alpha(x) = 1$ (n-поле). Этот лагранжиан, как известно, описывает основные (вакуумные) состояния σ-модели [55].

Аналогичным, но более громоздким вычислением получаем лагранжиан ГП, соответствующих нарушению $U(3) \times U(3) \to U(3)$, используя параметризацию $U(3)$ формулой (24):

$$\begin{aligned}\mathfrak{L} = \text{const}\; s^{-2}(\xi(x))\{\partial_\mu\xi_a(x)\partial^\mu\xi_a(x) + [\gamma^{(2)}_{jj'kl}\,\xi_k(x)\,\xi_l(x) &+ \\ + \gamma^{(4)}_{jj'klmn}\,\xi_k(x)\,\xi_l(x)\,\xi_m(x)\,\xi_n(x) &+ \\ + \gamma^{(6)}_{jj'klmnpq}\,\xi_k(x)\,\xi_l(x)\,\xi_m(x)\,\xi_n(x)\,\xi_p(x)\,\xi_q(x) &+ \\ + \gamma^{(8)}_{jj'klmnpqrs}\,\xi_k(x)\,\xi_l(x)\,\xi_m(x)\,\xi_n(x)\,\xi_p(x)\,\xi_q(x)\,\xi_r(x)\,\xi_s(x)\,]&\times \\ \times\,\partial_\mu\,\xi_j\,(x)\partial^\mu\xi_{j'}(x)\}&,\end{aligned} \tag{106}$$

где

$$\begin{aligned}s(x) = (1 - 3\xi_0^2(x) + \xi_i(x)\,\xi_i(x))^2 - (i\sqrt{6}\,\xi_0(x) - i\,\xi_0^3(x) &+ \\ + i\sqrt{6}\,\xi_0(x)\,\xi_i(x) + k_{i_1i_2i_3}\,\xi_{i_1}(x)\,\xi_{i_2}(x)\,\xi_{i_3}(x))^2&.\end{aligned}$$

Здесь $\xi_i(x) = (\xi_0(x), \xi_a(x))$, $a = 1,2,...,8$; постоянные коэффициенты γ даны формулой (П.14). Лагранжианом ГП, соответствующих нарушению $SU(3) \times SU(3) \to SU(3)$, является лагранжиан (106) с добавлением уравнения связи (25).

Наконец, в качестве примера простейшего случая приведем также лагранжиан ГП, соответствующих нарушению $SU(2) \to U(1)$. Используя параметризацию группы $SU(2)$ формулой (32), получаем

$$\mathfrak{L} = \mathrm{const}\,\frac{(\partial\xi(x))^2}{(1+\xi^2(x))^2},\quad \xi(x) = \{\xi_i(x)\},\ i = 1{,}2. \tag{107}$$

Стереографическим отображением этот лагранжиан приводится к лагранжиану $\mathbf{n}$-поля $n(x) \in S^2$ (обычной сфере):

$$\mathfrak{L} = 1/2(\partial\,\mathbf{n}(x))^2,\ \mathbf{n}^2 = \{n_a\},\ (a = 1{,}2{,}3). \tag{108}$$

Отметим, что явный вид лагранжиана ГП, соответствующих нарушению $SU(2) \times SU(2)$ до $SU(2)$, в экспоненциальной параметризации обладает, в отличие от (102) и (104), неполиномиальной нелинейностью синуса [27]. Выражения же форм Картана, лагранжиана ГП в случае $SU(3) \times SU(3)/SU(3)$ в этом подходе имеют гораздо более сложный вид, чем в случае $SU(2)$, и в работах [26,27,46,47] не были выписаны.

5. ВЕКТОР-ПАРАМЕТРЫ КАК НЕЗАВИСИМЫЕ ПОЛЕВЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ И КОЛЛЕКТИВНЫЕ КООРДИНАТЫ СКИРМИОНОВ

Выше показано, что с использованием векторной параметризации могут быть получены киральные лагранжианы, обладающие новым типом нелинейности (отношение конечных полиномов). В частности, в случае группы $SU(2)$ они имеют крайне простой вид (см. ф-лу (86)), что облегчает рассмотрение их свойств. В этом разделе рассмотрена $SU(2)$-модель Скирма [54,56] (см. также [57—60]) на основе использования лагранжиана модели, полученного в векторной параметризации группы $SU(2)$. Известно, что модель Скирма представляет эффективную нелинейную полевую теорию, которая довольно проста и дает качественное описание низкоэнергетических свойств барионов и их взаимодействий. В этой модели барионы отождествляются с коллективными квантовыми возбуждениями солитонных решений полевого уравнения. Лагранжиан модели составляется из лагранжиана нелинейной σ-модели и члена, введенного Скирмом для стабилизации солитонов [54,56]:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^{(2)} + \mathfrak{L}^{(4)} = \frac{F_\pi^2}{16}\,\mathrm{Tr}(\partial_\mu U\,\partial^\mu U^\dagger) + \frac{1}{32e^2}\,\mathrm{Tr}\,[(\partial_\mu U)U^\dagger, (\partial_\nu U)U^\dagger\,]^2, \tag{109}$$

где U — $SU(2)$-матрица, $F_\pi = 186$ МэВ — постоянная распада пионов, e — безразмерный параметр. Обычно лагранжиан (109) рассматривается либо в матричном виде, либо в следующей параметризации: матрица U

параметризуется четырьмя параметрами $(\phi_0, \boldsymbol{\phi})$, которые не независимы, а подчиняются нелинейной связи

$$\phi_0^2 + \boldsymbol{\phi}^2 = c^2, \tag{110}$$

(c — постоянная). Конечно, лагранжиан с такой дополнительной связью неудобен для рассмотрения. Можно вместо четырех полей $(\phi_0, \boldsymbol{\phi})$ использовать три независимые компоненты поля $\boldsymbol{\varphi} = \varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ $(\varphi = |\boldsymbol{\varphi}|, \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\varphi}/\varphi)$:

$$\phi_0 = \cos\varphi, \quad \boldsymbol{\phi} = \hat{\boldsymbol{\varphi}}\sin\varphi, \tag{111}$$

однако соответствующий лагранжиан не имеет простого вида (см., например, [61]).

В параметризации (23) группы $SU(2)$ первый член (109) принимает вид (86). А для коммутаторов во втором члене можно записать:

$$[(\partial_\mu U)U^\dagger, (\partial_\nu U)U^\dagger] = -4F_{\mu a}F_{\nu a'}[\sigma_a, \sigma_{a'}], \tag{112}$$

где обозначено

$$F_{\mu a} = f_{ab}(\eta_1, \eta_2, \eta_3)\,\partial_\mu \eta_b, \tag{113}$$

(f_{ab} задаются формулой (56)). Используя алгебру σ-матриц, перепишем соотношение (112) в виде

$$[(\partial_\mu U)U^\dagger, (\partial_\nu U)U^\dagger] = -8i\varepsilon_{aa'c}\,F_{\mu a}\,F_{\nu a'}\,\sigma_c. \tag{114}$$

Тогда

$$\mathrm{Tr}[(\partial_\mu U)U^\dagger, (\partial_\nu U)U^\dagger]^2 =$$

$$= -64\varepsilon_{aa'c}\varepsilon_{dd'e}F_{\mu a}F_{\nu a'}F_d^\mu F_{d'}^\nu\,\mathrm{Tr}(\sigma_c\sigma_e) = -128[(F_{\mu a})^2 - F_{\mu a}F_a^\nu F_{\nu a'}F_a^\mu] =$$

$$= -128\,\frac{(\partial_\mu \boldsymbol{\eta}\cdot\partial^\mu\boldsymbol{\eta})^2 - (\partial_\mu \boldsymbol{\eta}\cdot\partial^\nu\boldsymbol{\eta})(\partial_\nu \boldsymbol{\eta}\cdot\partial^\mu\boldsymbol{\eta})}{(1+\boldsymbol{\eta}^2)^4} = -128\,\frac{[\partial_\mu\boldsymbol{\eta}\wedge\partial_\nu\boldsymbol{\eta}]^2}{(1+\boldsymbol{\eta}^2)^4}. \tag{115}$$

Наконец, получаем лагранжиан $SU(2)$-модели Скирма в виде [62]:

$$\mathfrak{L} = \frac{F_\pi^2}{2}\,\frac{(\partial_\mu\boldsymbol{\eta}\cdot\partial^\mu\boldsymbol{\eta})}{(1+\boldsymbol{\eta}^2)^2} - \frac{4}{e^2}\,\frac{[\partial_\mu\boldsymbol{\eta}\wedge\partial_\nu\boldsymbol{\eta}]^2}{(1+\boldsymbol{\eta}^2)^4} \tag{116}$$

и соответствующее выражение плотности статической энергии

$$\mathcal{E} = \frac{F_\pi^2}{2}\frac{(\nabla_i \boldsymbol{\eta})^2}{(1+\boldsymbol{\eta}^2)^4} + \frac{4}{e^2}\frac{[\nabla_i \boldsymbol{\eta} \wedge \nabla_j \boldsymbol{\eta}]^2}{(1+\boldsymbol{\eta}^2)^4}. \tag{117}$$

Отметим, что, в отличие от обычного подхода [54,56—61], лагранжиан (116) содержит только три независимые полевые компоненты η_a $(a = 1,2,3)$, которые можно отождествить с триплетом пионных полей, и имеет простой вид. Лагранжиан (116) дает всю информацию о взаимодействии между полями и не требует дополнительного уравнения связи. Выражение для плотности статической энергии (117) является явно инвариантным относительно вращений в изопространстве. Благодаря этим особенностям лагранжиан модели Скирма (116) весьма удобен для рассмотрения сферически-симметричного решения и полевой конфигурации, описывающей вращающиеся скирмионы.

Вектор-параметры $SO(3)$ как коллективные координаты при квантовании вращающихся скирмионов. Для лагранжиана (116) солитонное решение находится с помощью анзаца:

$$\eta_0(\mathbf{x}) = \mathrm{tg}(\omega(r)/2)\,\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{118}$$

и граничных условий $\omega(0) = \pi$, $\omega(\infty) = 0$. Тогда в сферических координатах для компонентов полей и градиентов имеем:

$$(\eta_0)_r = \mathrm{tg}(\omega(r)/2),\quad (\eta_0)_\theta = (\eta_0)_\varphi = 0,$$

$$(\nabla_r \eta_0)_r = \frac{1}{2\cos^2(\omega(r)/2)}\left(\frac{d\omega}{dr}\right),\quad (\nabla_\theta \eta_0)_\theta = (\nabla_\varphi \eta_0)_\varphi = \frac{1}{r}\,\mathrm{tg}(\omega(r)/2). \tag{119}$$

Подставляя (119) в (117), получаем известное сферически-симметричное солитонное решение [54,56], минимизирующее статическую энергию.

Рассмотрим схему квантования вращательных возбуждений солитонного решения $\eta_0(\mathbf{x})$. Из (117) видно, что статическая энергия является инвариантной при вращениях вектора η_0 в трехмерном изопространстве, поэтому согласно общей схеме квазиклассического метода квантования [63,64] параметры этих изовращений играют роль коллективных координат при квантовании вращательных возбуждений солитонов. Как известно (разд.1), для $SO(3)$ существует удобная параметризация: матрица $O \in SO(3)$ параметризуется вещественным трехмерным вектором $\mathbf{q}$. Выберем в качестве коллективных координат солитона компоненты q_i этого вектор-параметра $\mathbf{q}$.

Рассматривая зависящие от времени полевые конфигурации вида [65,66]:

$$\eta(\mathbf{x}, t) = O(\mathbf{q}(t))\,\eta_0(\mathbf{x}) \tag{120}$$

и подставляя (120) в лагранжиан (116), найдем лагранжиан, содержащий коллективные координаты $q_i(t)$:

$$L = -M + \frac{F_\pi^2}{2}\int d^3\mathbf{x}\,\frac{(\eta_0)_r(\eta_0)_r}{(1+\boldsymbol{\eta}_0^2)^2}\,[(\partial_t\tilde{O})(\partial_t O)\,]_{rr} +$$

$$+ \frac{8}{e^2}\int d^3\mathbf{x}\,\frac{1}{(1+\boldsymbol{\eta}_0^2)^4}\,\{(\nabla_i\,\eta_0)^2(\eta_0)_r(\eta_0)_r[(\partial_t\tilde{O})(\partial_t O)\,]_{rr} -$$

$$- (\nabla_r\,\eta_0)_r(\nabla_r\,\eta_0)_r(\eta_0)_r(\eta_0)_r[(\tilde{O}\,\partial_t O)_{rr}]^2 -$$

$$- (\nabla_\theta\,\eta_0)_\theta(\nabla_\theta\,\eta_0)_\theta(\eta_0)_r(\eta_0)_r[(\tilde{O}\,\partial_t O)_{\theta r}]^2 -$$

$$- (\nabla_\varphi\,\eta_0)_\varphi(\nabla_\varphi\,\eta_0)_\varphi(\eta_0)_r(\eta_0)_r[(\tilde{O}\,\partial_t O)_{\varphi r}]^2\}, \tag{121}$$

где $M = \mathfrak{E}\,[\eta_0(\mathbf{x})\,]$ — масса солитона, индексы r, θ, φ указывают на компоненты векторов и матриц в системе сферических координат.

В векторной параметризации $SO(3)$ выражение $\tilde{O}\,\partial_t O$ имеет следующий вид [8]:

$$\tilde{O}\,\partial_t O = g_a\tau_a,\ g_a = g_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -2i\,\frac{\delta_{ab} - \varepsilon_{abc}q_c}{1+\mathbf{q}^2}\,\dot{q}_b, \tag{122}$$

где a,b=1,2,3; τ_a — 3×3-матрицы, элементы которых в декартовых координатах $(\tau_a)_{bc} = -i\varepsilon_{abc}$. Легко видеть, что в сферических координатах $(\tau_a)_{rr}=0$ и

$$(\tilde{O}\,\partial_t O)_{rr} = g_a(\tau_a)_{rr} = 0. \tag{123}$$

Подставляя компоненты полей и градиентов (119) в (121) и учитывая (123), получаем для последних членов (121):

$$\frac{1}{r^2}\,\mathrm{tg}^4(\omega(r)/2)\,[(\tilde{O}\partial_t O)_{rr}(\tilde{O}\partial_t O)_{rr} + (\tilde{O}\partial_t O)_{r\theta}\,(\tilde{O}\partial_t O)_{\theta r} +$$

$$+ (\tilde{O}\partial_t O)_{r\varphi}\,(\tilde{O}\partial_t O)_{\varphi r}\,] = \frac{1}{r^2}\,\mathrm{tg}^4(\omega(r)/2)\,[\tilde{O}(\partial_t O)\tilde{O}(\partial_t O)\,]_{rr}, \tag{124}$$

и для всего лагранжиана:

$$L = -M + \left\{ \frac{F_\pi^2}{2} \int r^2 dr \, \frac{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\omega(r)}{2}\right)}{\left(1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\omega(r)}{2}\right)\right)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{8}{e^2} \int r^2 dr \, \frac{\left[\frac{1}{4\cos^4(\omega(r)/2)} \cdot \left(\frac{d\omega}{dr}\right)^2 + \frac{2}{r^2} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\omega(r)}{2}\right)\right]}{\left(1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\omega(r)}{2}\right)\right)^4} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\omega(r)}{2}\right) \right\} \times$$

$$\times \int d\Omega \; [(\partial_t \widetilde{O})(\partial_t O)\,]_{rr} + \left\{ \frac{8}{e^2} \int r^2 dr \, \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\operatorname{tg}^4\left(\frac{\omega(r)}{2}\right)}{\left(1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\omega(r)}{2}\right)\right)^4} \right\} \times$$

$$\times \int d\Omega \; [\widetilde{O}(\partial_t O)\widetilde{O}\,(\partial_t O)\,]_{rr} \,. \tag{125}$$

Для элементов любой матрицы N в сферических координатах:

$$\int d\Omega \; N_{rr} = \int d\Omega \; R_{ri} N_{ik} R^{-1}_{kr} = N_{ik} \int d\Omega \; R_{ri} R^{-1}_{kr} =$$

$$= N_{ik} \frac{4\pi}{3} \delta_{ik} = \frac{4\pi}{3} \operatorname{Tr} N, \tag{126}$$

где N_{ik} — элементы этой матрицы в декартовых координатах, R — матрица преобразования координат.

Легко убедиться, что

$$\operatorname{Tr}(\partial_t \widetilde{O} \; \partial_t O) = -\operatorname{Tr}[\widetilde{O}(\partial_t O) \; \widetilde{O} \; (\partial_t O)\,] = -g_a \, g_b \operatorname{Tr}(\sigma_a \sigma_b) = -2\mathbf{g}^2,$$

поэтому получаем окончательно

$$L = -M - \frac{8\pi}{3} \lambda \, \mathbf{g}^2, \tag{127}$$

где $\mathbf{g} = \{g_a\}$, $a = 1, 2, 3$, определяются формулой (122) и λ — постоянная:

$$\lambda = \int_0^\infty drr^2 \left\{ \frac{F_\pi^2}{8} \sin^2\omega(r) + \frac{1}{2e^2} \left[\left(\frac{d\omega}{dr}\right)^2 + \frac{\sin^2\omega(r)}{r^2} \right] \sin^2\omega(r) \right\}. \tag{128}$$

Из соотношения (122) имеем

$$\mathbf{g}^2 = -4\,\alpha_{ij}\,(\mathbf{q})\,\dot{q}_i\dot{q}_j\,,\ \alpha_{ij} = \frac{\delta_{ij}(1+\mathbf{q}^2) - q_iq_j}{(1+\mathbf{q}^2)^2}, \tag{129}$$

следовательно,

$$L = -M + \chi\,\alpha_{ij}\,(\mathbf{q})\,q_iq_j\,,\ \chi = \frac{32\pi}{3}\lambda. \tag{130}$$

Вводя обобщенный импульс, сопряженный координатам q_i,

$$\pi_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 2\chi\,\alpha_{ij}\,(\mathbf{q})\,\dot{q}_j\,, \tag{131}$$

мы можем представить гамильтониан, содержащий коллективные координаты, в виде

$$H = \pi_i\,\dot{q}_i - L = M + \chi\,\alpha_{ij}\,(\mathbf{q})\,\dot{q}_i\dot{q}_j = M + \frac{1}{4\lambda}\,(\alpha^{-1})_{kl}\,\pi_k\,\pi_l, \tag{132}$$

где $(\alpha^{-1})_{kl}$ — элементы матрицы, обратной $\alpha = (\alpha_{ij})$. Нетрудно найти, что

$$(\alpha^{-1})_{kl} = (1+\mathbf{q}^2)(\delta_{kl} + q_kq_l),$$

и, следовательно,

$$H = M + \frac{1}{4\chi}\,(1+\mathbf{q}^2)(\delta_{kl} + q_kq_l)\,\pi_k\,\pi_l\,. \tag{133}$$

Применяя правило канонического квантования $\pi_k \to -i\dfrac{\partial}{\partial q_k}$, получаем квантованный гамильтониан системы:

$$H_{qu} = M - \frac{1}{4\chi}\,(1+\mathbf{q}^2)(\delta_{kl} + q_kq_l)\,\frac{\partial}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial q_l}. \tag{134}$$

Второй член правой части (134) пропорционален квадрату инфинитезимального вектор-оператора группы вращений [5], поэтому имеем [65,66]:

$$H_{qu} = M - \frac{1}{\chi}\mathbf{I}^2,\ \ \mathbf{I}^2 = \frac{1}{4}(1+\mathbf{q}^2)(\delta_{kl} + q_kq_l)\,\frac{\partial}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial q_l}. \tag{135}$$

Для сферически-симметричного анзаца (118) и полевой конфигурации (120) вращающегося скирмиона легко видеть, что операторы изотопических (I_i) и пространственных (J_i) вращений связаны между собой ортогональным преобразованием, а, следовательно, $\mathbf{I}^2 = \mathbf{J}^2$. Мы пришли к задаче о шаровом волчке. Энергетический спектр вращающихся возбуждений:

$$E_l = M + \frac{1}{\chi} l(l+1), \tag{136}$$

где l принимает целые или полуцелые значения. Выбирая возможность квантования по полуцелым моментам, мы можем отождествить вращательные возбуждения скирмиона с нуклонами ($l = 1/2$) и Δ-резонансами ($l = 3/2$). Волновыми функциями с определенными спином и изоспином служат матричные элементы $T^l_{mm'}(\mathrm{q})$ представлений группы вращений [5]. Например, можно выбрать в качестве волновых функций нуклонов следующие матричные элементы $T^{1/2}_{mm'}(\mathrm{q})$:

$$|p\uparrow\rangle = \frac{1+\alpha}{(1+\alpha^2+2|\beta|^2)^{1/2}}, \quad |p\downarrow\rangle = \frac{\sqrt{2}\beta}{(1+\alpha^2+2|\beta|^2)^{1/2}},$$
$$|n\uparrow\rangle = \frac{\sqrt{2}\beta}{(1+\alpha^2+2|\beta|^2)^{1/2}}, |n\downarrow\rangle = \frac{1-\alpha}{(1+\alpha^2+2|\beta|^2)^{1/2}}, \tag{137}$$

где α, β — компоненты вектора q в аксиальном базисе [5]:

$$\mathrm{q} = \alpha\, \mathrm{q}_0 + \beta\, \mathrm{e} + \beta^* \mathrm{e}^*,$$

(α — вещественный, а β — комплексный).

Отметим, что проблема квантования вращательных степеней свободы скирмионов рассматривалась в работе [56] (см. также [57—59]). В нашем подходе получено значительное упрощение при рассмотрении конфигурации (120) вращающихся скирмионов: вращение скирмионов представляется изовращением вектор-поля η_0, знаменатели в лагранжиане (116) не изменяются при изовращении (120), и, следовательно, легко отделять части, содержащие матрицу вращений O. В этом плане нетрудно провести выкладки и в случае модифицированного варианта модели Скирма, в котором вводится стабилизирующий член шестого порядка [67,68] (см. ниже). Применение векторной параметризации $SO(3)$ к исследованию вращательных скирмионов позволяет использовать детально разработанную теорию группы вращений и ее представлений в этой параметризации [5].

Сохраняющиеся топологический и нетеровский токи модели. Выражение плотности топологического тока [54,56]:

$$B^\mu = \frac{\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{24\pi^2} \mathrm{Tr}[(U^\dagger \partial_\nu U)(U^\dagger \partial_\alpha U)(U^\dagger \partial_\beta U)], \tag{138}$$

в полевых переменных $\eta_a(x)$ имеет вид

$$B^{\mu} = \frac{(-2i)^3}{24\pi^2} \cdot \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\nu a} F_{\alpha b} F_{\beta c} \operatorname{Tr}(\sigma_a \sigma_b \sigma_c) =$$

$$= -\frac{2}{3\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{abc} F_{\nu a} F_{\alpha b} F_{\beta c}, \tag{139}$$

где $F_{\mu a}$ определяются формулой (113).

В частности, плотность топологического заряда

$$B_0 = -\frac{2}{3\pi^2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{abc} F_{ia} F_{jb} F_{kc} = -\frac{4}{\pi^2} \operatorname{det} F, \tag{140}$$

$(i, j, k, a, b, c = 1, 2, 3)$, где F — 3x3-матрица, составленная из элементов F_{ia}. Подставляя компоненты полей и градиентов (119) в выражении F_{ia}, получаем

$$\operatorname{det} F = -\frac{\sin^2\omega}{8r^2} \frac{d\omega}{dr}$$

и

$$B_0 = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{\sin^2\omega}{r^2} \frac{d\omega}{dr} \tag{141}$$

— соотношение, которое совпадает с известным результатом [54,56].

Нетеровские токи можно получить из лагранжиана (116) с помощью варьирования вектор-поля $\boldsymbol{\eta}(x)$. Рассмотрим, как пример, изоспиновый ток. При инфинитезимальном вращении в изопространстве вектор-поле $\boldsymbol{\eta}(x)$ преобразуется следующим образом:

$$\boldsymbol{\eta}' = O(\boldsymbol{\zeta})\, \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta} + \delta_{\zeta}\, \boldsymbol{\eta}, \tag{142}$$

где $\boldsymbol{\zeta}$ — вектор-параметр инфинитезимального вращения. Используя выражение матрицы вращения в векторной параметризации [5], имеем

$$[O(\boldsymbol{\zeta})]_{ab} = \delta_{ab} - 2i\, \zeta_c (\tau^c)_{ab},$$

и, следовательно,

$$(\delta_{\zeta}\, \eta)_a = -2i\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\tau})_{ab}\, \eta_b\, . \tag{143}$$

Соответствующий нетеровский ток

$$j_{\mu} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial^{\mu}\eta_a)} \delta\eta_a$$

принимает вид

$$j_\mu^c = -2i(\tau^c)_{ab}\left\{F_\pi^2\frac{(\partial_\mu\eta_a)\eta_b}{(1+\boldsymbol{\eta}^2)^2} - \frac{16}{e^2}\frac{[(\partial\boldsymbol{\eta})^2(\partial_\mu\eta_a)\eta_b - (\partial_\mu\boldsymbol{\eta}\cdot\partial_\nu\boldsymbol{\eta})(\partial^\nu\eta_a)\eta_b]}{(1+\boldsymbol{\eta}^2)^4}\right\}. \quad (144)$$

Подставляя полевые конфигурации (120) в (144), получим выражение тока через коллективные координаты. В частности, для плотности изоспинового заряда имеем

$$j_0^c = -2i\left\{F_\pi^2\frac{(\eta_0)_r(\eta_0)_r}{(1+\boldsymbol{\eta}_0^2)^2}(\partial_t\widetilde{O}\,\tau^c O)_{rr} + \frac{16}{e^2}\frac{(\nabla_i\boldsymbol{\eta}_0)^2(\eta_0)_r(\eta_0)_r}{(1+\boldsymbol{\eta}_0^2)^4}(\partial_t\widetilde{O}\,\tau^c O)_{rr} - \right.$$

$$\left. - \frac{16}{e^2}\frac{(\nabla_i\eta_0)_i(\nabla_i\eta_0)_i(\eta_0)_r(\eta_0)_r}{(1+\boldsymbol{\eta}_0^2)^4}(\widetilde{O}\,\tau^c O)_{ir}(\widetilde{O}\,\partial_t O)_{ir}\right\}, \quad (i = r, \theta, \varphi). \quad (145)$$

Угловой интеграл j_0^c имеет простой вид:

$$\int j_0^c d\Omega = -i\frac{16\pi\lambda'}{3}\mathrm{Tr}(O\partial_t\widetilde{O}\,\tau^c), \quad (146)$$

где

$$\lambda' = \frac{F_\pi^2}{8}\sin^2\omega(r) + \frac{1}{2e^2}\left[\left(\frac{d\omega}{dr}\right)^2 + \frac{\sin^2\omega(r)}{r^2}\right]\sin^2\omega(r).$$

Следы в (146) можно записать явно через коллективные координаты q_i:

$$\mathrm{Tr}[O(\partial_t\widetilde{O})\,\tau_c] = g_a(-\mathrm{q})\mathrm{Tr}(\tau_a\tau_c) = 2g_c(-\mathrm{q}) \quad (147)$$

(g_c задаются формулой (122)), поэтому выражение углового интеграла j_0^c через коллективные координаты принимает вид [66]:

$$\int d\Omega\, j_0^c = \frac{64\pi}{3}\lambda'\frac{\dot{\mathrm{q}} - [\mathrm{q}\wedge\dot{\mathrm{q}}]}{1+\mathrm{q}^2}. \quad (148)$$

Из этого выражения и волновых функций типа (137) можно вычислить физические средние в соответствующих адронных состояниях.

Модифицированный вариант модели Скирма со стабилизирующим членом шестого порядка. Известно, что в лагранжиан (116) для стабилизации солитонов, кроме члена четвертого порядка $\mathfrak{L}^4$, можно ввести еще член шестого порядка [67,68]:

$$\mathfrak{L}^{(6)} = (1/2)\, \varepsilon_6^2 B_\mu B^\mu, \tag{149}$$

где B_μ — барионный ток (139). Этот член, как и член четвертого порядка, содержит только производные первого порядка, максимально две временные производные и удовлетворяет требованиям симметрии. Он может быть интерпретирован как проявление эффектов векторных мезонов в пределе бесконечности масс и констант связи векторных мезонов [69—71]. Тогда параметр ε_6 связан с массой ω-мезона m_ω и ω-барионной константой связи ($\varepsilon_6 = g_\omega / m_\omega$).

В параметризации (23) группы $SU(2)$ $\mathfrak{L}^{(6)}$ принимает вид

$$\mathfrak{L}^{(6)} = -(4\varepsilon_6^2/3\pi^4)(1 + \boldsymbol{\eta}^2)^{-6} \times$$
$$\times \{(\partial\boldsymbol{\eta})^6 - 3(\partial\boldsymbol{\eta})^2(\partial_\alpha \boldsymbol{\eta}\, \partial^\beta \boldsymbol{\eta})(\partial_\beta \boldsymbol{\eta}\, \partial^\alpha \boldsymbol{\eta}) +$$
$$+ 2(\partial_\nu \boldsymbol{\eta}\, \partial^\beta \boldsymbol{\eta})(\partial_\beta \boldsymbol{\eta}\, \partial^\alpha \boldsymbol{\eta})(\partial_\alpha \boldsymbol{\eta}\, \partial^\nu \boldsymbol{\eta})\}. \tag{150}$$

$\mathfrak{L}^{(6)}$ вносит в плотность статической энергии следующую добавку:

$$\mathcal{E}^{(6)} = -(4\varepsilon_6^2/3\pi^4)(1 + \boldsymbol{\eta}^2)^{-6} \times$$
$$\times \{(\nabla_i \boldsymbol{\eta}\, \nabla_i \boldsymbol{\eta})^3 - 3(\nabla_i \boldsymbol{\eta}\, \nabla_i \boldsymbol{\eta})(\nabla_j \boldsymbol{\eta}\, \nabla_k \boldsymbol{\eta})^2 +$$
$$+ 2(\nabla_i \boldsymbol{\eta}\, \nabla_j \boldsymbol{\eta})(\nabla_j \boldsymbol{\eta}\, \nabla_k \boldsymbol{\eta})(\nabla_k \boldsymbol{\eta}\, \nabla_i \boldsymbol{\eta})\}. \tag{151}$$

Полученное с помощью анзаца (118) решение, минимизирующее $E = E^{(2)} + E^{(4)} + E^{(6)}$ и удовлетворяющее граничным условиям $\omega(0) = \pi$, $\omega(\infty) = 0$, обладает теми же асимптотическими свойствами, что и в случае стандартной модели Скирма. Подставляя полевую конфигурацию (120) в $L^{(6)}$, получаем аналогичное (121) выражение:

$$L^{(6)} = -M^{(6)} + (4\varepsilon_6^2/3\pi^4) \int d^3x \frac{1}{(1+\boldsymbol{\eta}_0^2)^6} \times$$
$$\times \{ [(\nabla_i \boldsymbol{\eta}_0 \nabla_i \boldsymbol{\eta}_0)^3 - (\nabla_i \boldsymbol{\eta}_0 \nabla_j \boldsymbol{\eta}_0)(\nabla_i \boldsymbol{\eta}_0 \nabla_j \boldsymbol{\eta}_0)](\eta_0)_r(\eta_0)_r[(\partial_t \widetilde{O})(\partial_t O)]_{rr} +$$
$$+ 2[(\nabla_i \boldsymbol{\eta}_0 \nabla_j \boldsymbol{\eta}_0)(\nabla_i \boldsymbol{\eta}_0)_k(\nabla_j \boldsymbol{\eta}_0)_l - (\nabla_i \boldsymbol{\eta}_0 \nabla_i \boldsymbol{\eta}_0)(\nabla_j \eta_0)_k(\nabla_j \eta_0)_l] \times$$
$$\times (\eta_0)_r(\eta_0)_r\, [\widetilde{O}\, \partial_t O)_{kr}(\widetilde{O}\, \partial_t O)_{lr}]\}, \quad k, l = r, \varphi, \theta, \tag{152}$$

которое приводит к следующей добавке $\lambda^{(6)}$ к постоянной λ (128):

$$\lambda^{(6)} = (\varepsilon_6^2/8\pi^4) \int dr \sin^4\omega(r)(d\,\omega/dr)^2. \tag{153}$$

Квантовый гамильтониан вращательных скирмионов по-прежнему сохраняет вид (135), но со следующим добавлением к постоянной χ, определяющей момент инерции скирмионов:

$$\chi^{(6)} = (4\varepsilon_6^2/3\pi^3) \int dr \sin^4\omega(r)(d\,\omega/dr)^2. \tag{154}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Эффективность использования теоретико-групповых методов в различных задачах теоретической физики зачастую существенно зависит от адекватного выбора параметризации соответствующей группы симметрии, выбора координат на нелинейном групповом многообразии. При этом, хотя окончательные физические результаты не должны зависеть от этого выбора, те или иные параметризации могут отражать физику задачи, существенно прояснять и упрощать расчеты.

Наличие явного и простого вида закона композиции параметров, свойства естественности и линейности, которые присущи векторной параметризации, не является тривиальным. Использование этих свойств позволяет провести исследования групп только на уровне параметров, не обращаясь к конкретному матричному виду преобразований групп или их представлений. В обзоре развит метод расчета форм Картана на основе использования закона композиции параметров. Метод применим в любом случае, когда известна параметризация, удовлетворяющая упомянутым свойствам. С помощью этого метода рассчитаны явные выражения форм Картана для групп пространственно-временных, внутренних симметрий и суперсимметрии. Отметим, что в литературе вычисление форм Картана обычно сводится к решению структурных уравнений Картана — Мауэра и является гораздо более сложной процедурой.

Изложенный простой метод расчета форм Картана открывает возможность использования векторной параметризации для решения проблем, связанных с локальными преобразованиями групп. Он позволяет, в частности, сформулировать калибровочные теории групп пространственно-временных, внутренних симметрий и суперсимметрии в конечном (а не только инфинитезимальном) подходе. Полученный явный вид конечных калибровочных преобразований может быть удобен, например, в исследовании проблемы квантования калибровочных теорий.

Вектор-параметры унитарных групп играют роль полевых переменных в теории нелинейных киральных полей. Найденные лагранжианы ГКП и ГП в векторной параметризации обладают новым типом нелинейности (отношение конечных полиномов). Подчеркнем достоинства векторной параметризации для группы $SU(2)$: в этой параметризации лагранжианы нелинейных киральных полей имеют простой вид и содержат три независимые полевые переменные, составляющие трехмерный вектор; вся информация о взаимодействии содержится в лагранжиане без использования дополнительного уравнения связи. Для групп $U(3)$ и $SU(3)$, ввиду сложности их структур, киральные лагранжианы имеют более сложный вид, однако здесь их выражения выписаны явно. Из этих выражений можно получить приближенные лагранжианы, представляющие интерес для феноменологии физики частиц. Напомним, что в экспоненциальной параметризации формы Картана и киральные лагранжианы для группы $SU(2)$ обладают нелинейностью синуса (см., например, [26,27]). Их выражения для групп $U(3)$ и $SU(3)$ в этой параметризации, ввиду сложности, не были выписаны.

Использование векторной параметризации при исследовании свойств $SU(2)$-модели Скирма позволяет резко упростить выражения и выкладки. В векторной параметризации группы $SU(2)$ лагранжиан модели содержит три независимые полевые переменные, которые можно отождествить с триплетом пионов. Выражение для лагранжиана имеет вид отношения полиномов, знаменатели которых зависят только от квадрата вектор-поля. В силу этого знаменатели не изменяются при вращении вектор-поля в изопространстве, и при подстановке вращательных конфигураций в лагранжиане легко отделить те части, которые зависят от элементов матрицы вращений. Известно, что векторная параметризация группы $SO(3)$ весьма удобна для рассмотрения конечных вращений, поэтому естественно выбрать в качестве коллективных координат скирмионов компоненты вектор-параметра $SO(3)$. Выражения сохраняющихся нетеровских токов имеют компактный вид вследствие использования этих коллективных координат, квантовый гамильтониан вида шарового волчка вращательных возбуждений (в рамках твердых вращений) получается в рамках векторного исчисления.

Авторы глубоко признательны академику АНБ Ф.И.Федорову, основоположнику векторной параметризации, за интерес и поддержку этой работы, а также А.А.Богушу, Л.М.Томильчику, Л.Ф.Бабичеву, А.Б.Березину и другим сотрудникам лаборатории теоретической физики и физики высоких энергий Института физики АНБ за обсуждения результатов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Коммутаторы и антикоммутаторы матриц $\sigma_i = (\sigma_0, \sigma_a)$, где $\sigma_0 = I$; $\sigma_{1,2,3}$ — матрицы Паули, имеют вид

$$[\sigma_i, \sigma_j]_- = 2ia_{ijk}\sigma_k, \ \{\sigma_i, \sigma_j\}_+ = 2s_{ijk}\sigma_k, \ i, j, k = 0,1,2,3, \tag{П.1}$$

где a_{ijk}, s_{ijk}, соответственно, антисимметричны и симметричны по всем индексам. Отличны от нуля следующие компоненты a_{ijk}, s_{ijk}:

$$a_{abc} = \varepsilon_{abc}, \tag{П.2}$$

$$s_{000} = 1, \ s_{0ab} = \delta_{ab} \ (a, b, c = 1, 2, 3). \tag{П.3}$$

Обозначая

$$h_{ijk} = a_{ijk} - is_{ijk}, \ \ i, j, k = 0, 1, 2, 3, \tag{П.4}$$

мы имеем для коэффициентов $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}, \lambda^{(4)}$ в формуле (29):

$$\lambda^{(1)}_{ijk} = 2(h_{kij} - h_{ikj}),$$

$$\lambda^{(2)}_{ijkl} = 4\delta_{ij}\,\delta_{0k}\,\delta_{0l} + 2i\,\delta_{0l}\,(h_{kij} - h_{ikj}) + 4h_{ikm}h_{mlj} - h_{klp}h_{pij} - h_{ikp}h_{plj}\,,$$

$$\lambda^{(3)}_{ijklm} = -4\delta_{0l}\,\delta_{0m}(h_{kij} + h_{ikj}) + 2i\,\delta_{0m}(h_{klp}h_{pij} - h_{ikp}h_{plj}) +$$
$$+ 2(h_{kip}h_{plq}h_{qmj} + h_{klp}h_{piq}h_{qmj}),$$

$$\lambda^{(4)}_{ijklmn} = 4\delta_{0m}\delta_{0n}h_{ikp}h_{plj} + 2i\,\delta_{0n}h_{kip}h_{plq}h_{qmj} -$$
$$-2i\,\delta_{0n}h_{klp}h_{piq}h_{qmj} + h_{klp}h_{piq}h_{qmr}h_{rnj} \tag{П.5}$$

и для коэффициентов $\alpha^{(1)}_{ijk}, \alpha^{(2)}_{ijkl}$ в формулах (55), (85), (101):

$$\alpha^{(1)}_{ijk} = h_{jki} - h_{kji},$$

$$\alpha^{(2)}_{ijkl} = 4\delta_{ij}\,\delta_{0k}\delta_{0l} + 2i(h_{jki} + h_{kji})\,\delta_{0l} - h_{kjm}h_{mli}\,. \tag{П.6}$$

Коммутаторы и антикоммутаторы матриц $\lambda_i = (\lambda_0, \lambda_\alpha)$, ($\lambda_0 = \sqrt{2/3}I$, λ_a ($a = 1,2,...,8$) — матрицы Гелл-Манна):

$$[\lambda_i, \lambda_j]_- = 2iA_{ijk}\lambda_k, \quad \{\lambda_i, \lambda_j\}_+ = 2S_{ijk}\lambda_k, \quad i, j, k = 0, 1, ..., 8, \qquad (П.7)$$

где A_{ijk}, S_{ijk}, соответственно, антисимметричны и симметричны по всем индексам. Отличны от нуля следующие компоненты A_{ijk}, S_{ijk}:

$$A_{abc} = f_{abc}, \; S_{000} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \; S_{0ab} = \sqrt{\frac{2}{3}}\delta_{ab}, \; S_{abc} = d_{abc}, \qquad (П.8)$$

f_{abc}, d_{abc} определяются соотношением

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2if_{abc}\lambda_c, \; \{\lambda_a, \lambda_b\}_+ = 2d_{abc}\lambda_c, \; a, b, c = 1,2,...,8. \qquad (П.9)$$

Значения f_{abc}, d_{abc} даны, например, в [72]. Обозначая

$$k_{ijk} = A_{ijk} - iS_{ijk}, \qquad (П.10)$$

мы имеем для коэффициентов $\rho^{(1,1)}$, $\rho^{(1,2)}$, $\rho^{(2,1)}$, $\rho^{(2,2)}$, $\rho^{(2,3)}$, $\rho^{(3,2)}$, $\rho^{(3,3)}$ в формуле (30):

$$\rho^{(1,1)}_{ijk} = k_{jki} - k_{kij},$$

$$\rho^{(1,2)}_{ijkl} = -2\delta_{jk}\delta_{il} - k_{ljm}k_{mki},$$

$$\rho^{(2,1)}_{ijkl} = -2\delta_{kl}\delta_{ij} - k_{jlm}k_{mki},$$

$$\rho^{(2,2)}_{ijklm} = -i\sqrt{6}\,\delta_{0i}\delta_{jl}\delta_{km} + 2\delta_{km}(k_{lji} - k_{jli}) + $$
$$+ k_{mjn}k_{nlp}k_{pki} - k_{ljn}k_{nmp}k_{pki},$$

$$\rho^{(2,3)}_{ijklmn} = 2\delta_{kl}\delta_{jm}\delta_{in} + (i\sqrt{6}/2)\,\delta_{in}k_{jlp}k_{pkq}k_{qm0} + \qquad (П.11)$$
$$+ 2\delta_{jl}k_{nkp}k_{pmi} - ik_{njp}k_{plq}k_{qkr}k_{rmi},$$

$$\rho^{(3,2)}_{ijklmn} = 2\delta_{jm}\delta_{kn}\delta_{il} + (i\sqrt{6}/2)\,\delta_{il}k_{jmp}k_{pkq}k_{qn0} + $$
$$+ 2\delta_{jm}k_{knp}k_{pli} - ik_{jmp}k_{pkq}k_{qnr}k_{rli},$$

$$\rho^{(3,3)}_{ijklmnp} = 3\delta_{jm}k_{knq}k_{qlr}k_{rp0} + k_{jmq}k_{qkr}k_{knp}k_{rns}k_{slt}k_{tpi} - $$
$$- (i\sqrt{6}/3)\,\delta_{jm}\delta_{kn}\delta_{lp}\delta_{i0} - 2\delta_{jm}\delta_{kn}k_{pli} - 2\delta_{jm}k_{nkq}k_{qpr}k_{rli} - $$
$$- (i\sqrt{6}/2)k_{jmq}k_{qkr}k_{rn0}k_{pli} - k_{pjq}k_{qmr}r_{rks}k_{snt}k_{tli},$$

для коэффициентов $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}, \lambda^{(4)}, \lambda^{(5)}, \lambda^{(6)}$ в формуле (31):

$$\lambda^{(1)}_{ijk} = 2(k_{kij} - k_{ikj}),$$

$$\lambda^{(2)}_{ijkl} = 2\delta_{ij}\,\delta_{kl} + 2k_{klm}(k_{mij} + k_{imj}) - 4k_{lin}\,k_{nkj}\,,$$

$$\begin{aligned}\lambda^{(3)}_{ijklm} &= 3(\delta_{0k}\,\delta_{0l}\,(k_{mij} - k_{imj}) + 3\delta_{kl}\,(k_{mij} - k_{imj}) - \\ &- i\sqrt{6}\,\delta_{0m}\,k_{kln}(k_{nij} - k_{inj}) - k_{kln}\,k_{nmp}(k_{pij} - k_{ijp}) - \\ &- k_{kln}\,k_{nip}\,k_{pmj} + 4k_{klp}\,k_{min}\,k_{npj}\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda^{(4)}_{ijklmn} &= 9\delta_{ij}\,\delta_{0k}\,\delta_{0l}\,\delta_{0m}\,\delta_{0n} - 6\delta_{ij}\,\delta_{0k}\,\delta_{0l}\,\delta_{mn} + \delta_{ij}\,\delta_{kl}\,\delta_{mn} + \\ &+ 3i\sqrt{6}\,\delta_{0k}\,\delta_{0l}\,\delta_{0m}(k_{nij} + k_{inj}) - 12\delta_{0k}\,\delta_{0l}\,k_{mip}\,k_{pnj} + \\ &+ i\sqrt{6}\,\delta_{0k}\,\delta_{lm}(k_{nij} + k_{inj}) + 2\delta_{mn}\,k_{klp}(k_{pij} + k_{ipj}) - \\ &- i\sqrt{6}\,\delta_{0n}\,k_{klp}\,k_{pmq}(k_{qij} + k_{iqj}) + 2i\sqrt{6}\,\delta_{0n}\,k_{klp}(k_{piq}\,k_{qmj} - k_{miq}\,k_{qpj}) - \\ &- 4\delta_{mn}\,k_{kip}\,k_{plj} - 2k_{klp}\,k_{pmq}(k_{qir}\,k_{rnj} + k_{nir}\,k_{rqj}) + 4k_{klp}k_{mnq}\,k_{pir}\,k_{rqj}\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda^{(5)}_{ijklmnp} &= 9\delta_{0k}\,\delta_{0l}\,\delta_{0m}\,\delta_{0n}(k_{pij} - k_{ipj}) + 6\delta_{0k}\,\delta_{0l}\,\delta_{mn}(k_{pij} + k_{ipj}) + \\ &+ \delta_{kl}\,\delta_{mn}\,(k_{pij} - k_{ipj}) - 3i\sqrt{6}\,\delta_{0k}\,\delta_{0l}\,\delta_{om}k_{npq}\,(k_{qij} + k_{iqj}) + \qquad (\text{П}.12)\\ &+ i\sqrt{6}\,\delta_{0k}\,\delta_{lm}\,k_{npq}\,(k_{qij} - k_{iqj}) - 3\delta_{0k}\,\delta_{0l}\,k_{mnq}\,k_{qpr}\,(k_{rij} - k_{irj}) - \\ &- 3\delta_{0k}\,\delta_{0l}\,k_{mnq}\,k_{qpr}\,(k_{rij} - k_{irj}) + \delta_{kl}\,k_{mnq}\,k_{qpr}\,(k_{rij} - k_{irj}) + \\ &+ 6\delta_{0k}\,\delta_{0l}\,k_{mnr}\,(k_{piq}\,k_{qrj} - k_{riq}\,k_{qpj}) + 2\delta_{kl}\,k_{mnr}\,(k_{piq}\,k_{qrj} - k_{riq}\,k_{qpj}) + \\ &+ 2i\sqrt{6}\,\delta_{0k}\,k_{lmq}\,k_{qnr}\,(k_{ris}\,k_{spj} - k_{pis}\,k_{srj}) + \\ &+ 2k_{klq}\,k_{qmr}\,k_{nps}\,k_{rit}\,k_{tsj} - 2k_{klq}\,k_{npr}\,k_{rms}\,k_{qit}\,k_{tsj}\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda^{(6)}_{ijklmnpq} &= -9\delta_{0k}\,\delta_{0l}\,\delta_{0m}\,\delta_{0n}\,k_{pir}\,k_{rqj} + 6\delta_{0k}\,\delta_{0l}\,\delta_{mn}\,k_{pir}\,k_{rqj} - \\ &- \delta_{kl}\,\delta_{mn}\,k_{pir}\,k_{rqj} + 3i\sqrt{6}\,\delta_{0k}\,\delta_{0l}\,\delta_{0m}\,k_{nps}\,(k_{qir}\,k_{rsj} + k_{sir}\,k_{rqj}) - \\ &- i\sqrt{6}\,\delta_{0k}\,\delta_{lm}\,k_{nps}(k_{qir}\,k_{rsj} + k_{sir}\,k_{rqj}) + \\ &+ 3\delta_{0k}\,\delta_{0l}\,k_{mnr}\,k_{rps}\,(k_{qit}\,k_{tsj} + k_{sit}\,k_{tqj}) + 6\delta_{0k}\delta_{0l}\,k_{mnr}\,k_{pqs}\,k_{rit}\,k_{tsj} -\end{aligned}$$

$$- i\sqrt{6}\, \delta_{0k} k_{riu} k_{utj} (k_{lmr} k_{nps} k_{sqt} + k_{lms} k_{snr} k_{pqt}) -$$

$$-\delta_{kl} k_{mnr} k_{rps} (k_{qit} k_{tsj} + k_{sit} k_{tqj}) - k_{klr} k_{rms} k_{npt} k_{tqu} k_{siv} k_{vuj},$$

для коэффициентов $\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \beta^{(3)}, \beta^{(4)}$ в формуле (57):

$$\beta^{(1)}_{ijk} = k_{jki} - k_{kji},$$

$$\beta^{(2)}_{ijkl} = \delta_{ij} \delta_{nk} \delta_{nl} + k_{jkm} k_{mli} - k_{kjm} k_{mli} + k_{klm} k_{mji},$$

$$\beta^{(3)}_{ijklm} = 3(k_{jki} - k_{kji}) \delta_{0l} \delta_{0m} + (k_{jki} - k_{kij}) \delta_{lm} +$$

$$+ i\sqrt{6}\, (k_{jkn} k_{nli} - k_{kln} k_{nij}) \delta_{0m} + (k_{kln} k_{njp} k_{pmi} - k_{kjn} k_{nlp} k_{pmi}),$$

$$\beta^{(4)}_{ijklmn} = 9\delta_{ij} \delta_{0k} \delta_{0l} \delta_{0m} \delta_{0n} - 6\delta_{ij} \delta_{0k} \delta_{0l} \delta_{mn} + \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + \qquad (\Pi.13)$$

$$+ 3i\sqrt{6}\, (k_{jki} + k_{kji}) \delta_{0l} \delta_{0m} \delta_{0n} - i\sqrt{6}\, (k_{jki} + k_{kji}) \delta_{0l} \delta_{mn} -$$

$$- 3(2k_{kjp} k_{pli} + k_{klp} k_{pji} + k_{jkp} k_{pli}) \delta_{0m} \delta_{0n} + (k_{jkp} k_{pli} + k_{klp} k_{pji}) \delta_{mn} -$$

$$- i\sqrt{6}\, (k_{klp} k_{pjq} k_{qmi} + k_{kjp} k_{plq} k_{qmi}) \delta_{0n} + k_{klp} k_{pjq} k_{qmr} k_{rni}$$

и, наконец, для коэффициентов $\gamma^{(2)}, \gamma^{(4)}, \gamma^{(6)}, \gamma^{(8)}$ в формуле (106):

$$\gamma^{(2)}_{ijkl} = \sum_{a=1}^{8} 2\delta_{ai}\, p_{ajkl},$$

$$\gamma^{(4)}_{ijklmn} = \sum_{a=1}^{8} (p_{aikl}\, p_{ajmn} + 2\delta_{ai}\, q_{ajklmn}),$$

$$\gamma^{(6)}_{ijklmnpq} = \sum_{a=1}^{8} 2p_{aikl}\, q_{ajmnpq}, \qquad (\Pi.14)$$

$$\gamma^{(8)}_{ijklmnpqrs} = \sum_{a=1}^{8} q_{aiklmn}\, q_{ajpqrs},$$

где

$$p_{ijkl} = 2\delta_{ij} \delta_{kl} + k_{klr} k_{rji} + k_{jkr} k_{rli} - k_{kjr} k_{rli},$$

$$q_{ijklmn} = 9\delta_{ij} \delta_{0k} \delta_{0l} \delta_{mn} - 6\delta_{ij} \delta_{0k} \delta_{0l} \delta_{mn} + \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} +$$

$$+ 6\sqrt{6}\, (k_{kji} + k_{jki}) \delta_{0l} \delta_{0m} \delta_{0n} - 2i\sqrt{6}\, (k_{kji} + k_{jki}) \delta_{0l} \delta_{mn} -$$

$$- 3(k_{klr} k_{rji} + k_{jkr} k_{rli} - 2k_{kjr} k_{rli}) \delta_{0m} \delta_{0n} + (k_{klr} k_{rji} + k_{jkr} k_{rli}) \delta_{mn} -$$

$$- i\sqrt{6}\,(k_{klr} k_{rjs} k_{smi} + k_{kjr} k_{rls} k_{smi}) \delta_{0n} + k_{klr} k_{rjs} k_{smt} k_{tni} .$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Федоров Ф.И.** — Докл. АН БССР, 1958, т.2, с.408.
2. **Федоров Ф.И.** — Там же, 1961, т.5, с.101.
3. **Федоров Ф.И.** — Там же, 1961, т.5, с.194.
4. **Федоров Ф.И.** — ДАН СССР, 1962, т.143, с.56.
5. **Федоров Ф.И.** — Группа Лоренца. М.: Наука, 1979.
6. **Березин А.В., Федоров Ф.И.** — Докл. АН БССР, 1982, т.26, с.17.
7. **Березин А.В., Кувшинов В.И., Федоров Ф.И.** — ДАН СССР, 1988, т.302, с.317.
8. **Богуш А.А.** — Введение в полевую теорию элементарных частиц. Минск: Наука и техника, 1981.
9. **Березин А.В., Кувшинов В.И., Нгуен Вьен Тхо** — Ковариантные методы в теоретической физике. Физика элементарных частиц и теория относительности. Минск: ИФ АН БССР, 1991, с.21.
10. **Kuvshinov V.I., Nguyen Vien Tho** — Rapid Communications on Theoretical Physics. Prep. No. 652(2), 1991, IP AS of Belarus, p.14.
11. **Kuvshinov V.I., Nguyen Vien Tho** — Journ. of Phys. A — Math. and Gen., 1993, vol.26, p.631.
12. **Кувшинов В.И., Нгуен Вьен Тхо** — Ядерная физика, 1992, т.55, вып.8, с.2253.
13. **Богуш А.А.** — Докл. АН БССР, 1980, т.24, с.1073.
14. **Кувшинов В.И., Нгуен Вьен Тхо** — Докл. АН БССР, 1991, т.35, с.119.
15. **Кувшинов В.И., Нгуен Вьен Тхо** — Там же, 1991, т.35, с.597.
16. **Кувшинов В.И., Нгуен Вьен Тхо, Федоров Ф.И.** — Докл. РАН, 1992, т.326, с.68.
17. **Гельфанд И.М., Минлос З.А., Шапиро З.Я.** — Представления группы вращений и Лоренца. М.: Физматгиз, 1958.
18. **Наймарк М.А.** — Линейные представления группы Лоренца. М.: Физматгиз, 1958.
19. **Виленкин Н.Я.** — Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965.
20. **Гантмахер Ф.Р.** — Теория матриц. М.: Наука, 1967.
21. **Федоровых А.М.** — Изв. АН БССР, сер. физ.-мат. наук, 1983, вып.2, с.90.
22. **Богуш А.А., Жирков Л.Ф., Федоровых А.М.** — В сб.: Труды межд. сем. «Теоретико-групповые методы в теоретической физике», М.: Наука, 1983, т.1, с.196.
23. **Богуш А.А.** — Изв. АН БССР, сер. физ.-мат. наук, 1973, вып.5, с.105.
24. **Богуш А.А., Федоров Ф.И.** — ДАН СССР, 1972, т.206, с.1033.
25. **Картан Э.** — Геометрия групп Ли и симметрические пространства. М.: Изд-во иностр. лит., 1949.
26. **Волков М.К.** — ЭЧАЯ, 1973, т.4, вып.1, с.3.
27. **Волков М.К., Первушин В.Н.** — Существенно нелинейные квантовые теории, динамические симметрии и физика мезонов. М.: Атомиздат, 1978.
28. **Utiyama R.** — Phys.Rev., 1956, vol.101, p.1587.
29. **Kibble T.W.B.** — J. Math. Phys., 1961, vol.2, p.212.
30. **Sciama D.** — Recent Development in GR. Warsaw, New York, 1962, p.321.
31. **Коноплева Н.П., Попов В.Н.** — Калибровочные поля. М.: Атомиздат, 1972.
32. **Held F.W., von der Heyder P., Kerlick G.D.** — Rev. Mod. Phys., 1976, vol.68, p.393.
33. **Пономарев В.Н., Барвинский А.О., Обухов Ю.Н.** — Геометро-динамические методы и калибровочный подход к теории гравитационных взаимодействий. М.: Энергоатомиздат, 1985.

34. Иваненко Д.В., Пронин П.И., Сарданашвили Г.А. — Калибровочная теория гравитации. М.: Изд. МГУ, 1985.
35. Tseytlin A.A. — Phys. Rev., 1982, vol.D26, p.3327.
36. Chamseddine A.N., West P.C. — Nucl. Phys., 1977, vol.B129, p.39.
37. MacDowell S.W., Mansouri F. — Phys. Rev. Lett., 1977, vol.38, p.739; Ibid. p.1376.
38. Chang L.N., Mansouri F. — Phys. Rev., 1978, vol.17D, p.3168.
39. van Nieuwenhuizen P. — Phys. Repts., 1981, vol.68, p.189.
40. Fradkin E.S., Tseytlin A.A. — Phys. Repts., 1985, vol.119, p.233.
41. Весс Ю., Беггер Дж. — Суперсимметрия и супергравитация: Пер. с англ. М.: Мир, 1986.
42. Лихнерович А. — Теория связностей в целом и группы голономии: Пер. с франц. М.: Изд-во иностр. лит., 1949.
43. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. — Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
44. Зуланке Р., Витген П. — Дифференциальная геометрия и расслоения: Пер. с нем. М.: Мир, 1975.
45. Кобаяси Ш., Номидзу К. — Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981.
46. Coleman S., Wess J., Zumino B. — Phys. Rev., 1969, vol.177, p.2239.
47. Callan C.G., Coleman S., Wess J., Zumino B. — Phys. Rev., 1969, vol.177, p.2247.
48. Salam A., Strathdee J. — Phys. Rev., 1969, vol.184, p.1750.
49. Chang L.N., Mansouri F. — Phys. Rev., 1978, vol.D17, p.3168.
50. Gursey F., Marchildon L. — Phys. Rev., 1978, vol.D17, p.2038.
51. Perelomov A.M. — Phys. Repts., 1987, vol.146, p.135.
52. Переломов А.М. — Элементарные частицы. 13-я Школа физики ИТЭФ, М.: Энергоатомиздат, 1989, вып.2, с.3.
53. Шварц А.С. — Квантовая теория поля и топология. М.: Наука, 1989.
54. Skyrme T.H.R. — Proc. Roy. Soc., 1961, vol.A260, p.127.
55. Gell-Mann M., Levy M. — Nuovo Cimento, 1960, vol.16, p.705.
56. Adkin G., Nappi C., Witten E. — Nucl. Phys., 1983, vol.B228, p. 552.
57. Zahed I., Brown G.E. — Phys. Repts., 1986, vol.142, p.1.
58. Holzwarth G., Schweisinger B. — Repts. Progr. Phys., 1986, vol.49, p.825.
59. Николаев В.А. — ЭЧАЯ, 1986, т.17, вып.2, с.401.
60. Маханьков В.Г., Рыбаков Ю.П., Санюк В.И. — УФН, 1992, т.162, вып.1, с.3.
61. Walliser H., Eskart G. — Nucl. Phys., 1984, vol.A429, p.514.
62. Kuvshinov V.I., Nguyen Vien Tho — Proc. of the Sem. on Nonlinear Phenomena in Complex Systems, Polatsk, February 17—20, 1992, p.192.
63. Jackiw R. — Rev. of Mod. Phys., 1977, vol.49, p.661.
64. Раджараман Р. — Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. М.: Мир, 1985.
65. Кувшинов В.И., Нгуен Вьен Тхо — Докл. АНБ, 1993 (в печати).
66. Kuvshinov V.I., Nguyen Vien Tho — Physical Express, 1993 (в печати).
67. Jackson A., Jackson A.D., Goldhaber A.S., Brown G.E. — Phys. Lett., 1985, vol.154B, p.101.
68. Wirzba A., Weise W. — Phys. Lett., 1987, vol.B188, p.6.
69. Bando M. et al. — Phys. Lett., 1985, vol.54, p.1215.
70. Igarashi Y. et al. — Nucl. Phys., 1985, vol. 259B, p.721.
71. Adkin G.S., Nappi C.R. — Phys. Lett., 1984, vol.137B, p.251.
72. Новожилов Ю.В. — Введение в теорию элементарных частиц. М.: Наука, 1972.