

РЕЗОНАНСЫ В СУБАТОМНОЙ ФИЗИКЕ И ПРИНЦИПЫ ПОДОБИЯ И РАЗМЕРНОСТИ

Ф.А.Гареев, Г.С.Казача

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Ю.Л.Ратис

Самарский государственный аэрокосмический университет, Самара

В обзоре систематизируются и детально обсуждаются с точки зрения методов подобия, размерности и автомодельности экспериментальные данные по адронным резонансам, дибарионным резонансам, дармштадтскому эффекту и ABC-эффекту. Проводится физическая аналогия между α -распадом и распадом резонансов в субатомной физике. На основе этой аналогии воспроизведены ширины для большой группы адронных резонансов. Излагается дифракционный подход к анализу резонансных явлений в области промежуточных энергий. Обсуждаются пути дальнейшего развития подобных исследований.

In the review we systematize and discuss in detail the experimental data on the hadronic resonances, dibaryonic resonances, Darmstadt's effect and ABC-effect from the point of view of the methods of similitude, dimension and automodelity. We stress the physical analogy between α -decay in nuclear physics and decay of resonances physics. On the base of this analogy we reproduce the widths for the number of hadronic resonances. The diffractive approach for the analysis of the resonance phenomena in the intermediate energy physics is described. Perspectives and trends of the further investigations are discussed as well.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема построения теории адронных резонансов вот уже несколько десятилетий остается одной из наиболее актуальных в современной физике элементарных частиц. Дело в том, что, несмотря на впечатляющие успехи квантовой хромодинамики, расчет из первых принципов масс, ширин и магнитных моментов адронных резонансов по-прежнему невозможен, поскольку квантово-полевая теория возмущений оказывается малопригодной для этих целей в интересующей нас области промежуточных энергий. Наиболее распространенные на сегодняшний день практические методы анализа силь-

ных процессов [1—9] (эффективные полевые подходы [3—6], глауберовское приближение [7] и т.п.) являются модельными в смысле присутствия в расчетных формулах большого числа феноменологических параметров. Модельность физики промежуточных энергий в значительной степени связана с отсутствием малых параметров типа безразмерной константы связи [5]. Характерные для физики адронных резонансов передачи импульса q также, вообще говоря, не малы по сравнению с импульсом налетающих частиц P . В области промежуточных энергий не выполняется условие длинноволнового приближения $kR \ll 1$, где k — волновой вектор падающей частицы, R — характерный размер мишени.

Однако не только отсутствие подходящих малых параметров феноменологизирует теории сильных процессов. Хорошо известно, что даже для ядерной физики низких энергий невозможно построение теории из первых принципов. В случае высоких энергий ряд жестких процессов успешно описывается в рамках КХД [9]. Однако при переходе к области промежуточных энергий мы сталкиваемся с чрезвычайно сложными как с физической, так и с вычислительной точки зрения непертурбативными задачами КХД.

В результате все известные на сегодняшний день подходы в физике элементарных частиц, за исключением чисто кинематических [8], являются гибридными. Они основаны на использовании как фундаментальных принципов квантовой теории, так и феноменологических параметризаций некоторых дополнительных формфакторов, присутствующих в расчетах различных наблюдаемых величин.

Проблема усложняется тем, что степень полноты системы первых принципов квантовой теории неизвестна, а традиционно используемые в физике промежуточных энергий мезонные теории (см., например, [6]) неперенормируемы.

За последние 30 лет было исследовано огромное количество конкретных реакций и разработано множество моделей, достаточно хорошо воспроизводящих эксперимент. Однако в силу отмеченной выше феноменологичности сами эти модели и подходы требуют дополнительного исследования для выяснения физической картины явления. Таким образом, возникает проблема анализа общефизической концентрации резонанса (квазистационарного состояния) как в физике элементарных частиц, так и в стандартной ядерной физике.

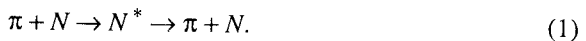
Исторически первой задачей о нахождении энергии и времени жизни квазистационарного состояния в квантовой механике была теория α -распада. В 1928 году Гамов [10], Кондон и Герни [11] теоретически объяснили закон Гейгера — Неттола [12] на основе представлений о туннельном эффекте. При этом с первой же работы распад любого квазистационарного состояния в квантовой теории трактовался как двухступенчатый процесс.

На первой стадии распада во внутренней области квантовой системы происходит формирование кластера, а на второй стадии этот кластер туннелирует через потенциальный барьер как единое целое. В соответствии с представлением о двухступенчатости распада квазистационарных состояний в квантовой механике возникло несколько широко распространенных подходов к описанию подобных процессов [13]. Почти все они так или иначе связаны с факторизацией выражения для ширины квазистационарного состояния. При этом используются разные модификации R -матричной теории ядерных реакций Вигнера и Айзенбуда [14] с вещественными граничными условиями на «радиусе» канала реакции [15] или с комплексными граничными условиями (условиями излучения) [16].

Формально R -матричная теория является строгой. В принципе она может быть использована для описания всех типов ядерных реакций. Действительно, результаты применения R -матричной теории для описания различных резонансных реакций в ядерной физике впечатляющие (см., например, монографии [17,18]), и эта теория стала мощным средством для интерпретации ядерных данных.

Здесь следует подчеркнуть, что R -матричная интерпретация экспериментальных данных по резонансным ядерным реакциям является однозначной только при описании узких резонансов. Более того, можно показать [19], что все приближенные методы вычисления положений и ширин узких ($\Gamma \rightarrow 0$) резонансных состояний эквивалентны. Для широких (перекрывающихся) резонансов однозначного определения резонанса (параметров резонанса) дать нельзя, поскольку в этом случае возникает неразрешимая задача отделения фона от резонанса, резонансы перекрываются, да и сами параметры резонанса становятся функциями энергии. Таким образом, задача теоретического описания положений и ширин широких резонансов становится многопараметрической и модельно-зависимой.

В физике элементарных частиц в большинстве случаев имеют дело с широкими резонансами. Как стандартный пример, рассмотрим рассеяние



Общепринятая интерпретация этой реакции заключается в том, что в процессе столкновения образуются сильновозбужденные промежуточные состояния N^* -нуклона с ширинами $\Gamma \approx 100 + 600$ МэВ и временами жизни $\tau_R \approx (6-1)10^{-24}$ с. Такие состояния получили название нуклонных (барионных) резонансов. Время жизни τ_R нуклонных резонансов приблизительно равно или немножко больше времени пролета частиц τ_{II} ($\tau_{II} \approx d/v$, где $d \approx 1$ фм и v — скорость относительного движения сталкивающихся частиц) через область взаимодействия. Тем не менее такое определение

резонансов полезно, поскольку некоторые их свойства (квантовые числа) напоминают свойства узких резонансов и стабильных частиц, и оно позволяет полуколичественно описывать процессы типа (1) на языке моделей, заимствованных из ядерной физики [22,23]. Такой подход дал возможность провести систематику адронных резонансов на основе современных (кварковых) моделей [24].

Несколько сотен адронных резонансов были классифицированы на основе хорошо известной наивной кварковой модели (модель $SU(3)$ супермультиплетов) [24]. Мезоны в этой модели рассматриваются как связанные состояния валентных кварк-антикварковых пар ($M = q\bar{q}$), а барионы состоят из трех валентных кварков ($B = qqq$). Однако вскоре стала очевидной ограниченность такой наивной кварковой модели (см. [24,25]). Поэтому в дальнейшем в эту модель ввели более сложные состояния: мультикварковые состояния ($M = qq\bar{q}\bar{q}$, $B = qq\bar{q}\bar{q}$), глюболы ($M = gg, ggg$) и гибриды ($M = q\bar{q}g$, $B = qq\bar{q}g$). Все такие новые частицы назвали экзотическими адронами. В результате модель стала многопараметрической, неоднозначной и трудоемкой. Например, даже в простом случае ($M = qq\bar{q}\bar{q}$) современные вычисления [26] ограничены конфигурациями $(q^2\bar{q}^2)_{L=0}$.

Сейчас стало очевидным, что современные модели не в состоянии описывать многие резонансные явления в субатомной физике: дибарионные резонансы [27—30], резонансы в двухпионных системах — АВС-эффект [31,32], резонансы в системах e^+e^- , обнаруженные при столкновении тяжелых ионов [33] и т.д.

Таким образом, современное развитие кварковых моделей идет в полной аналогии с историей развития оболочечной модели в ядерной физике: сперва были введены в рассмотрение простые квазичастичные состояния, затем многоквазичастичные состояния и, наконец, коллективные состояния — когерентная суперпозиция большого числа простых квазичастичных конфигураций. Оказалось, что коллективные моды движения в ядрах можно рассматривать на языке простых коллективных переменных [18,34,35], и это наблюдение дало мощный толчок к пониманию чрезвычайно сложного спектра ядерных состояний.

Собственно говоря, речь идет о выработке определенной культуры анализа и интерпретации экспериментальных данных, о поиске способов выделения вклада различных механизмов в сечения сильных процессов на основе модельно-независимых критериев.

Возникновение многих из указанного комплекса проблем может быть отнесено к концу 20-х — началу 30-х гг., т.е. к периоду формулировки основных принципов квантовой теории. Вопросы, касающиеся непосредственно физики барионных резонансов, начали появляться после 1953 г., т.е. после открытия группой Ферми $\Delta(1232)$ -изобары.

В течение последующих 40 лет было опубликовано не поддающееся учету число работ по физике адронных резонансов. В результате анализа их свойств был открыт целый «зоопарк» частиц (N^* , Δ , Λ , Σ , Ξ , Ω, \dots), а также совокупность соответствующих квантовых чисел, таких как странность, гиперзаряд, барионное число и т.п. Более того, можно сказать, что вся кварковая проблематика, включая КХД, в конце концов выросла из физики резонансов.

Несмотря на огромное количество впечатляющих результатов, полученных со времени открытия Δ -изобары, понимание истинной роли этого резонанса в физике промежуточных энергий начало приходить только к началу 80-х годов, когда стало ясно, что многие эффекты, ранее интерпретировавшиеся как проявление короткодействующих нуклон-нуклонных корреляций, на самом деле связаны с вкладом барионных резонансов (в первую очередь, $\Delta(1232)$ -изобары). В настоящее время имеются веские основания считать, что этот резонанс в пионной ядерной физике промежуточных энергий выживает как отдельная разновидность барионов даже в сильновзаимодействующем ядерном окружении и может рассматриваться как квазичастица, точно так же, как и нуклон [6].

В работах [36—40] был предложен полуфеноменологический подход для описания спектра масс адронных и дибарионных резонансов. При этом оказалось, что простая массовая формула (24) (см. ниже), близкая как по своей физической природе, так и по способу вывода к формуле Бальмера в старой квантовой теории Нильса Бора, описывает не только гросс-структуру (т.е. положение «центров тяжести» мультиплетов) спектра адронных масс, но и положение отдельных уровней с точностью не меньшей, чем их ширина. Результат этот оказался в высшей степени неожиданным, поскольку указанная бальмероподобная массовая формула вовсе не содержала подгоночных параметров. При этом было сделано предсказание ряда новых резонансов.

В физике известно сравнительно небольшое число примеров так называемых «грубых» систем, интегральные свойства которых прекрасно описываются в простейших подходах, однако точность описания физической картины падает в процессе ее детализации. Впервые подобное поведение систем в классической механике было открыто Анри Пуанкаре, который, собственно, и предложил удачное название для таких систем. С математической точки зрения снижение точности описания физической системы с ростом числа параметров модели очень подробно изучено в теории аппроксимации многочленами таблично заданных функций. Хорошо известно, что с ростом порядка аппроксимирующего многочлена начинается раскачка аппроксимации в межузловых интервалах, а задача корректной интерполяции экспериментальных данных становится вообще невыполнимой. В физике

классическим примером корректной работы с грубыми системами является теория дифракции.

И, наконец, укажем на еще одно фундаментальное направление в физике высоких энергий: объединение принципа автомодельности с общими принципами квантовой теории. Именно на таком пути были установлены знаменитые правила кваркового счета Матвеева, Мурадяна и Тавхелидзе [41]. Дальнейшее развитие это направление получило в работах А.М.Балдина [42], посвященных релятивистской теории динамических систем. В настоящем обзоре мы изложим приложение методов теории подобия, размерности и автомодельности к задаче расчета масс резонансов в субатомной физике.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕЗОНАНСОВ

Однозначное и общепринятое определение условий квантования может быть дано только для замкнутых (изолированных) квантово-механических систем. При этом дискретный спектр имеют только системы, совершающие финитное движение, для которых соответствующие волновые функции в нуле ($r = 0$) и на бесконечности ($r \rightarrow \infty$) равны нулю. Примерами замкнутых систем, имеющих дискретный спектр, являются атомы, ядра и т.д. Для расчета дискретных спектров квантовых систем было предложено несколько квазиклассических вариантов теории (включая старую квантовую теорию Нильса Бора), опирающихся на принцип соответствия. В теории колебаний и волн хорошо известен общезначимый принцип взаимности, утверждающий, что результат остается инвариантным, если поменять местами наблюдателя и источник. Математически это означает, что соответствующая краевая задача для замкнутых систем является самосопряженной. Общепринятый способ решения таких краевых задач — разложение в ряд Фурье по собственным колебаниям системы. Таким образом, получается простая модель замкнутой системы как совокупности независимых осцилляторов.

Эренфест доказал, что для систем, совершающих периодические движения, величины

$$\oint P_i dx_i = I_i \quad (2)$$

являются инвариантами (адиабатическими) движения при медленном (адиабатическом) изменении параметров системы. Здесь P_i — обобщенный импульс и x_i — обобщенная координата. Именно этот факт сыграл решающую роль при установлении правил квантования для водородоподобного атома в «старой» квантовой теории Бора — Зоммерфельда (еще до работ Шредингера и Гейзенберга):

$$\frac{1}{2\pi} \oint P_i dx_i = n\hbar, \quad (3)$$

где n — так называемое главное квантовое число, принимающее только целочисленные значения: 1, 2, 3, ... Другими словами, условие квантования Бора — Зоммерфельда представляет собой условие квантования адиабатического инварианта.

Следуя де Бройлю, квантовые условия теории Бора — Зоммерфельда можно интерпретировать на основе волновых представлений. Согласно этой теории условие квантования для углового момента имеет вид

$$L = rP = n\hbar = n \frac{h}{2\pi}, \quad (4)$$

где $P = mv$ означает импульс электрона. Соотношение (4) можно переписать в виде

$$2\pi r = n \lambda_D, \quad (5)$$

где λ_D — длина дебройлевских волн:

$$\lambda_D = \frac{h}{P}. \quad (6)$$

Левая часть (5) есть длина окружности, так что условие квантования Бора — Зоммерфельда означает, что на этой длине должно укладываться целое число длин дебройлевских волн. Таким образом, условие квантования (6) совпадает с условием существования собственных колебаний для замкнутых микро- и макросистем, совершающих финитное движение.

Условие квантования (5) допускает еще одну изящную интерпретацию. Если ввести комптоновскую длину волны

$$\lambda_C = \frac{\hbar}{mc} \quad (7)$$

и переписать (5) в виде

$$\lambda_D \alpha = n \lambda_C, \quad \text{то } v = \alpha \frac{c}{n}, \quad (8)$$

где $\alpha = e^2/\hbar c$ — постоянная тонкой структуры (здесь и далее $\lambda = \hbar/P$). Система квантуется, если длина дебройлевской волны соизмерима с длиной комптоновской волны, поделенной на постоянную тонкой структуры α .

Резонансы представляют собой одно из наиболее замечательных явлений в микро- и макрофизике. В простейшем своем проявлении они приводят к острым пикам в полном сечении рассеяния как функции энергии сталкивающихся частиц. В настоящее время предложено множество различных моделей для объяснения резонансных явлений (см. [19—21]). Общим для этих моделей является то, что хорошо выделенным максимумам сечений при $E = E_R$ сопоставляется существование **долгоживущих почти связанных состояний**, состоящих из мишени и падающей частицы. Если энергия пада-

ющей частицы равна E_R , то падающая частица «захватывается» в такое долгоживущее промежуточное состояние. Далее это состояние распадается, излучая соответствующие частицы на бесконечность. Такое объяснение резонансного рассеяния является стандартным. Другим примером резонансных явлений может служить распад радиоактивных ядер или нестабильных частиц. Распадающаяся система в строгом смысле не обладает дискретным спектром энергий, частицы из нее вылетают на бесконечность, то есть движение системы инфинитно.

Некоторые распадающиеся системы имеют малую вероятность распада. Для таких систем обычно вводят понятие о «квазистационарных» состояниях. В таких состояниях частицы движутся в течение большого промежутка времени τ в ограниченной области пространства, затем покидают эту область и уходят на бесконечность. Для таких состояний можно ввести понятие плотности состояний в континууме [43,44] в виде

$$\rho(E) = \frac{1}{\pi} \frac{d\delta(E)}{dE}, \quad (9)$$

где $\delta(E)$ — фаза рассеяния. Энергетический спектр таких состояний называется «квазидискретным», ширина Γ определяет время жизни τ системы в ограниченной области пространства согласно соотношению

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma}. \quad (10)$$

Такое определение «квазистационарных» состояний как почти связанных состояний не противоречит принципу соответствия. Действительно, при $\Gamma \rightarrow 0$ плотность квазистационарных состояний (9) переходит [19] в плотность состояний дискретного спектра

$$\lim_{\Gamma \rightarrow 0} \rho(E) = \delta(E - E_V), \quad (11)$$

где E_V — энергии дискретного спектра системы.

Связанные состояния для замкнутых систем рассматривают, решая уравнение Шредингера с нулевыми граничными условиями на бесконечности. Несвязанные системы распадаются, излучая частицы на бесконечность. Поэтому кажется естественным в этом случае искать решения уравнения Шредингера, представляющие собой расходящиеся сферические волны на бесконечности, что адекватно физике задачи. Поскольку в этом случае граничные условия комплексны, то и собственные значения энергии тоже комплексны. Заметим, что метод комплексных собственных значений в 1884 г. впервые применил Дж.Томсон [45], который этим методом рассмотрел проблему электромагнитных колебаний заряда на идеально проводящей сфере. Естественное обобщение решений уравнения Шредингера, соответ-

ствующих дискретным связанным состояниям, для положительной (комплексной $E = E_R - i\Gamma/2$, $E_R > 0$ и $\Gamma > 0$) величины энергии введено Гамовым [10] при описании α -распада. Как и связанные состояния, состояния с комплексными собственными значениями имеют энергии, которые соответствуют полюсам S -матрицы. Представление S -матрицы с помощью ее полюсов дано Пайерлсом [46]. Теория ядерных реакций, в которой эти полюсы используются для разложения амплитуды реакции, развита Хамблетом и Розенфельдом [47]. В дальнейшем метод комплексных собственных значений нашел применение во многих областях физики [48], а в теории дифракции и распространения электромагнитных волн [49] и теории резонаторов [50] стал общепринятым.

Поскольку гамовские функции экспоненциально растут с увеличением r , обычные определения нормировки, ортогональности и полноты для них неприменимы. Позже был предложен ряд способов нормировки гамовских функций, однако все они эквивалентны методу Зельдовича [51] и неприменимы для функций антисвязанных состояний и для функций с $|\operatorname{Re} k_n| < |\operatorname{Im} k_n|$. Совсем недавно в нашей работе [19] была доказана полнота гамовских волновых функций в ограниченной области пространства $r \leq R$, где R — расстояние, на котором ядерные силы можно полагать равными нулю. В доказательстве полноты важную роль сыграла теорема Миттаг — Леффлера в формулировке Коши [48]. Таким образом, волновые функции непрерывного спектра, функции Грина и S -матрица могут быть разложены в ряд Миттаг — Леффлера, при этом полученные ряды сходятся равномерно (при $r \leq R$).

Резонансные явления, связанные с нестабильными квантовыми системами, можно описать с помощью полной системы гамовских функций. Хотя мы разлагаем волновую функцию нестабильной системы по гамовским функциям в ограниченной области пространства ($0 \leq r \leq R$), фактически она известна во всем пространстве, так как S -матрица разложена по тем же резонансным полюсам. Базисные гамовские функции имеют адекватные физике исследуемой задачи асимптотические свойства (условия излучения), поэтому в этом подходе можно исследовать многие важные вопросы теории нестабильных состояний на примере точно решаемых моделей: аналитические свойства волновых функций таких состояний, определение среднего времени жизни нестабильной частицы по рассеянию продуктов ее распада друг на друге и т.д. Поэтому в рамках данного подхода можно исследовать точность других приближенных методов и указать границы их применимости. Ранее [19] мы показали, что все приближенные методы вычисления положений и ширин узких ($\Gamma \rightarrow 0$) квазистационарных состояний эквивалентны. В этом случае соответствующие сечения рассеяния друг на друге продуктов распада нестабильной частицы описываются стандартной форму-

лой типа Брейта — Вигнера, параметры которой могут быть однозначно определены из экспериментальных данных. Физические основы этого вывода очевидны и обсуждаются детально в [17,19,52]. Здесь же отметим, что хотя волновая функция квазистационарного состояния с малой шириной ($\Gamma \rightarrow 0$ и $E_R \gg \Gamma$) формально и принадлежит к непрерывному спектру и в принципе простирается на все пространство, на самом деле она локализована во внутренней области классического движения (т.е. в области действия короткодействующего притягивающего потенциала), отделенной от внешней области широким и высоким потенциальным барьером с малой проницаемостью [17].

Этот вывод несправедлив для широких резонансов. Если даже такой широкий резонанс изолирован от других, то возникает вопрос об отделении резонансного вклада от фона (который может быть разрешен только в рамках модельных предположений), и неизвестна зависимость ширины резонанса Γ от энергии.

Итак, мы должны констатировать, что на сегодняшний день невозможно дать универсальное и точное определение резонанса, поскольку характерные свойства этого явления постепенно исчезают с увеличением ширины квазистационарного состояния, и перекрывающиеся резонансные и неупругие пороговые эффекты неотделимы друг от друга.

На наш взгляд, квантово-механическое определение резонансов, изложенное выше, является наиболее последовательным. Такое определение резонансов сейчас общепринято в ядерной физике, а в 70-е годы также использовалось при интерпретации резонансов в физике элементарных частиц. Реанимация такого определения резонансов в физике элементарных частиц произошла совсем недавно [23].

На практике при определении резонанса как полюса S -матрицы и извлечении параметров этого полюса из экспериментальных данных используют ряд дополнительных допущений. Обычно предполагают, что взаимодействие имеет конечный радиус действия. Тогда можно ввести временной интервал (это понятие впервые было введено Вигнером [53]), равный разнице времени прибытия и времени ухода волнового пакета из области взаимодействия. В некоторых случаях временной интервал имеет характерную энергетическую зависимость с сильно выделенным максимумом в узком интервале энергий. Эта задержка во времени волного пакета в области взаимодействия интерпретируется как образование короткоживущей нестабильной частицы, распадающейся далее в соответствующие открытые каналы [52,54,55].

Время задержки можно вычислить с помощью S -матрицы. Поскольку параметры резонанса обычно определяются в рамках фазового анализа (диаграммы Аргана), то рассматривают величины [23]:

$$T(W) = \frac{1}{2i} (\eta(W) \exp [2i\delta(W)] - 1), \quad (12)$$

$$SP(W) = \left| \frac{dT(W)}{dW} \right|, \quad (13)$$

где $\delta(W)$ — реальная часть фазового сдвига, $\eta(W)$ — параметр поглощения и W — полная энергия в с.ц.м. Задержка во времени пропорциональна $SP(W)$. Она не всегда связана с временем жизни нестабильной частицы. Задержка может быть вызвана открытием нового канала распада системы (пороговый эффект) или же образованием виртуального состояния (подробности см. в [17]). Классическим примером виртуального состояния может служить низкоэнергетическое протон-нейтронное рассеяние в 1S -состоянии.

Подчеркнем, что задержка во времени является необходимым, но недостаточным условием возникновения резонанса. Далее положение резонансов ассоциируется с полюсами функции $T(W)$, расположенными недалеко от вещественной оси. Обычно параметризуют функцию $T(W)$ в виде формулы Брейта — Вигнера с массой M и константой Γ , тогда максимальное значение времени задержки будет при $W = M$. И последняя тонкость: резонанс должен наблюдаться в других каналах распада.

Результаты исследований возбужденных состояний нуклона в рамках вышеизложенных концепций хорошо известны [23]. Другой, так называемый стандартный метод принят в PARTICLE DATA GROUP [24]. Сравнительный анализ показывает, что имеется кардинальное отличие результатов анализа двух групп, что важно для современных кварковых моделей резонансов. Следует подчеркнуть, что **наблюдаются большие различия результатов, полученных разными группами** (см. компиляцию [24]). На наш взгляд, это означает модельную зависимость результатов обработки экспериментальных данных по резонансам и незавершенность современных подходов к описанию резонансных явлений в физике элементарных частиц. Здесь следует отметить общую незавершенность теории резонансов с большими ширинами $E_R \sim \Gamma$ не только в физике элементарных частиц, но и в ядерной [19,56] и атомной [57] физике.

3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ

Наблюдение ярких резких линий — одно из интереснейших явлений в геометрической оптике. Эти линии, обусловленные концентрацией световых лучей (световые лучи их касаются), получили название «каустики». Классическим примером каустики является радуга. Объяснение этого явления, по-видимому, впервые, было дано преподобным Хэмнетом Холдичем

еще в 1857 г. (см. [58])* . Отраженные лучи света в случае радуги имеют огибающую — это и есть каустика. Стандартное объяснение яркости каустики очень простое: лучи света, образующие каустику, касательны к ней и почти совпадают друг с другом, то есть на каустике собираются бесконечно близкие лучи. Вследствие этого в ограниченной области пространства сосредоточивается гораздо больше лучей, чем в других областях, и этим обусловлена яркость каустики. Следует напомнить, что хотя классическое описание радуги на языке геометрической оптики правильно отражает положение и форму каустики, однако оно предсказывает бесконечно большую интенсивность радуги, что в принципе неверно.

Для нас важно то, что каустика разделяет пространство на две части: одна заполнена лучами (освещенная часть), а в другую лучи не проникают (каустическая тень). В освещенной части через каждую точку проходят два луча — один из них коснулся каустики, а другой еще нет. При подходе к каустике со стороны освещенной зоны возникает рост амплитуды поля, то есть наблюдается локальный максимум. Поле спадает при переходе через каустику и удалении от нее в область тени. В направлении нормали к каустике поле в освещенной части пространства имеет характер стоячей волны, обусловленной интерференцией двух лучевых полей. Вдоль каустики поле имеет характер бегущей волны.

В теории дифракции электромагнитных и акустических волн известны так называемые **волны соскальзывания** [59], скользящие вдоль каустики (сосредоточенные на каустике) и непрерывно отдающие свою энергию окружающему пространству. Существование волн соскальзывания в общем случае не доказано, однако в случае разделения переменных их можно построить в явном виде [59]. В теории открытых резонаторов (в частности, теории излучения антенн) такие волны играют фундаментальную роль [50]. Аналогом волн соскальзывания для замкнутых систем могут служить так называемые **волны шепчущей галереи**, впервые обнаруженные Рэлеем (1910) [60] при рассмотрении явления шепчущей галереи в акустике для круговой области. Эти волны локализованы около поверхности галереи из-за их отражения от границы под скользящим углом. Волны соскальзывания и волны шепчущей галереи детально изучены [17,59,61], и условием их существования в случае сферической симметрии является выполнение соотношения

$$L \approx kr_0, \quad (14)$$

* Авторы благодарны Ф.М.Пенькову за то, что он обратил их внимание на работу Р.Декарта, в которой дано правильное объяснение явления радуги еще в 1637 г. [177].

где L — индекс функции Бесселя — Ханкеля, а kr_0 — ее аргумент, причем окружность $r = r_0$ служит каустикой для волн соскальзывания. Для волн шепчущей галереи окружность $r = r_0$ является стенкой галереи. Очевидно, условие (14) означает не что иное, как условие сохранения соответствующего адиабатического инварианта в классической механике, в данном случае сохранение момента импульса L . В квантовой механике это означает квантование углового момента $L\hbar$.

Наиболее прозрачно этот хорошо известный факт можно проиллюстрировать в квазиклассическом приближении, когда волновую функцию можно записать в следующем виде [17]:

$$\Psi(q_i, t) = A(q_i) e^{iS(q_i, t)/\hbar}, \quad (15)$$

где $S(q_i, t)$ — полное действие, а функция $A(q_i)$ является однозначной функцией координат q_i . Из требования однозначности волновой функции следует, что для любой замкнутой кривой в q_i -пространстве должно выполняться равенство:

$$\Delta S = \oint P_i dq_i = 2\pi\hbar n_i. \quad (16)$$

Это условие квантования с целыми числами, однако оно не всегда верно. В случае осциллятора n_i нужно заменить на $n_i + 1/2$. В общем случае условие квантования имеет вид

$$\Delta S = \oint P_i dq_i = 2\pi\hbar(n_i + \gamma_i), \quad (16a)$$

где γ_i — число порядка единицы, зависящее от характера граничных условий для рассматриваемой степени свободы.

Итак, сильно локализованные волны возникают на границе раздела двух сред. Классическим примером этого явления могут служить боковые волны [62] в гидродинамике, возникающие при отражении сферической волны от границы раздела двух сред с разными плотностями. От характера неоднородностей среды зависит, как разовьется рассеяние волн на таких особенностях среды. Общего ответа нет как в классической, так и в квантовой теории. Многообещающие наблюдения накапливаются в теории катастроф [63] и теории хаотических систем и их полуклассического квантования [64], однако эти вопросы выходят за рамки нашего обзора. Здесь же мы только отметим, что забытая и через 40 лет обнаруженная Келлером [65] (см. также [66], где приведено много интересных примеров) работа Эйнштейна [67] имеет прямое отношение к пониманию условия квантования Бора — Зоммерфельда. Эйнштейн ввел условие квантования на торе, а именно потребовал непрерывности волновой функции для любой замкну-

той кривой на торе. Сейчас это квантование получило название ЕВК-квантование (Einstein, Brillouin, Keller):

$$\Delta S = \oint P_i dq_i = 2\pi\hbar \left(n_i + \frac{\beta_i}{4} \right), \quad (166)$$

где $n_i \geq 0$ и $\beta_i \geq 0$ должны быть целыми числами. Целое число β_i называется числом Маслова [68,69]. Подход Эйнштейна — Бриллюэна — Келлера является весьма общим, и **условия ЕВК-квантования справедливы и в тех случаях, когда переменные не разделяются**. Практические вычисления чисел Маслова проведены относительно недавно [70].

Сейчас можно считать общепринятой в ядерной физике точку зрения [18,71,72], что особую роль в появлении значительных разрежений и ступеней уровней ядер играет квазиклассическое квантование движения по многомерным периодическим орбитам.

Как общий итог наших обсуждений, мы примем в качестве рабочей гипотезы следующее физическое определение резонансов: **это периодическое движение, отражение волн в ограниченной области пространства и их интерференция, приводящие к сильной локализации волн около неоднородностей среды**. В рамках R -матричной теории ядерных реакций [15] мы используем граничное условие излучения для физических частиц, на которые может распадаться рассматриваемая система. При этом все пространство разделяется на две части: область взаимодействия, где система «живет» определенное время, и асимптотическая область, где продукты распада нестабильной частицы не взаимодействуют между собой. Согласно концепции этой теории можно вводить полную систему волновых функций в области взаимодействия $r \leq r_0$ и, следовательно, определить логарифмические радиальные производные для внутренних волновых функций

$$\left(\frac{r}{u_{in}(r)} \frac{du_{in}(r)}{dr} \right) \Big|_{r=r_0-0} = f = \frac{1}{R}. \quad (17)$$

Эти внутренние волновые функции могут быть вычислены в рамках современных кварковых моделей, затем они должны быть спроектированы на физические наблюдаемые состояния (эта процедура детально разработана в рамках P -матричного подхода [73—76]) и сшиты с внешними волновыми функциями.

Для простоты рассмотрим нестабильные системы, распадающиеся только по одному доминирующему открытому каналу. Как мы уже говорили, распад адронных резонансов можно рассматривать в полной аналогии с излучением открытых классических электродинамических резонаторов [50]. Поэтому соответствующий математический аппарат может быть использован с незначительными модификациями (см. приложение). Следо-

вательно, граничные условия для продуктов распада нестабильной частицы должны соответствовать условию излучения

$$\left(\frac{r}{h_L^{(1)}(Pr)} \frac{dh_L^{(1)}(Pr)}{dr} \right) \Big|_{r=r_0+0} = f, \quad (18)$$

где $h_L^{(1)}(Pr)$ — сферические функции Риккати — Бесселя. В рамках излагаемого подхода нам кажется вполне естественным потребовать, **чтобы внутренняя волновая функция в точке сшивания с внешней волновой функцией $r = r_0$ имела максимум, т.е.**

$$\frac{du_{in}(r)}{dr} \Big|_{r=r_0-0} = 0. \quad (19)$$

Физически это означает, что мы требуем максимальной локализации волновой функции нестабильной системы на поверхности $r = r_0$. В приближении R -матричного подхода граничное условие было противоположным, а именно: внутренняя волновая функция в точке сшивания с внешней волновой функцией $r = r_0$ должна быть равной нулю

$$u_{in}(r) \Big|_{r=r_0-0} = 0, \quad (20)$$

чтобы удовлетворить требованию конфайнмента.

Здесь мы хотим сделать одно существенное замечание. Никто никогда не обращал внимания, за исключением наших работ [36—39], на тот факт, что имеется глубокая физическая аналогия между общепринятыми моделями открытых резонаторов в классической электродинамике и в волновой механике и R -матричным подходом для описания резонансных реакций в ядерной физике. Открытые резонаторы имеют реальную физическую поверхность, разделяющую пространство на две части: внутреннюю часть резонатора, где генерируются соответствующие собственные состояния резонатора, и внешнюю, куда и уходят волны из резонатора. В R -матричном подходе объявляется, что радиус сшивания внешней и внутренней волновых функций $r = r_0$ должен быть выбран там, где влиянием ядерных сил можно пренебречь. Это правильно, однако такое утверждение можно уточнить. Действительно, при построении инвариантного тора Эйнштейна необходимо определить каустические поверхности, и тогда можно доказать, что собственные волновые функции сосредоточены внутри этих каустических поверхностей. Таким образом, каустики в задачах определения собственных колебаний любых систем играют роль «физических поверхностей», запирающих на определенное время систему внутри такого тора. Мы приходим к выводу, что граничное условие излучения должно выполняться около внешней каустической поверхности. Причем можно строго доказать [61],

что задание определенных граничных условий на радиусе канала $r = r_0$ однозначно определяет потенциал взаимодействия между продуктами распада нестабильной системы в этой точке. И, наконец, условие определения собственных частот открытых резонаторов [50] полностью аналогично условию квантования (16б) по ЕВК-методу.

Итак, резонансы в волновых системах возникают в случае, когда отношение размеров r_0 резонирующей системы («полости») к длине соответствующей волны λ определяется выражением типа

$$Pr_0 = (n + \gamma); \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (21)$$

$$2\pi r_0 \equiv r_{\text{eff}} = (n + \gamma) \lambda, \quad (21a)$$

где $P = 2\pi/\lambda$ и γ — число порядка 1 ($0 \leq \gamma \leq 1$), зависящее от граничных условий для заданной степени свободы и типа волнового уравнения для резонирующей системы. В приложении мы показали, что условие квантования асимптотического импульса (21) для адронных резонансов может быть получено в рамках R -матричного подхода с использованием граничного условия излучения на поверхности резонанса, распадающегося на два адрона. Мы пришли к выводу, что $\gamma = 0$ или $1/2$ (можно привести аргументы [67] в пользу того, что в принципе могут быть случаи $\gamma = 1/4$ и $3/4$). Случай $Pr_0 = n + 1/2$ интерпретируется как радиальное квантование, а случай $Pr_0 = L$ может рассматриваться как хорошо известное условие орбитального квантования по Бору — Зоммерфельду. Попробуем с этих позиций проанализировать спектр Δ -изобар.

Если отвлечься от эффектов L -зависимости и спин-орбитального взаимодействия и рассматривать только грубую структуру этого спектра, то можно заметить, что мы имеем дело с 4 мультиплетами, отстоящими друг от друга примерно на 400 МэВ. «Квазиосцилляторный» характер гросс-структуры Δ -спектра заставляет предположить, что Δ -резонансное состояние πN -системы можно приближенно описать с помощью осцилляторного потенциала с параметром $\langle r_0 \rangle = \sqrt{\hbar/m\omega} \approx 0,86$ фм, близким к электромагнитному размеру нуклона.

Из табл.1 видно, что для пионов, образующихся при распаде Δ -изобар, величины импульсов в СЦИ не противоречат подобной оценке, сделанной в предположении, что $\gamma = 0$, и практически совпадают с аналогичными значениями импульсов пионных пучков, возбуждающих Δ -резонансы. Кроме того, импульсы испускаемых пионов с хорошей степенью точности являются целыми кратными от характерного импульса $\tilde{P}_\pi^{(0)} \approx 0,23$ ГэВ/с, определяемого размерами нуклона $\langle r_0 \rangle = 1/\tilde{P}_\pi^{(0)}$ (СЦИ) = 0,86 фм.

Таблица 1

Резонанс	P_π (СЦИ) (расс.), ГэВ/с	$1/\tilde{P}_\pi$ (СЦИ), фм	$\frac{\langle r_0 \rangle}{n + \gamma}$, фм	$n + \gamma$
$\Delta(1232)$	0,227	0,86	0,86	1
$\Delta(1620)$	0,526	0,38	0,43	2
$\Delta(1950)$	0,741	0,27	0,29	3
$\Delta(2420)$	1,023	0,19	0,21	4

Таблица 2

Резонанс	P_π (СЦИ) (расс.), ГэВ/с	$1/\tilde{P}_\pi$ (СЦИ), фм	$\frac{\langle r_0 \rangle}{n + \gamma}$, фм	$n + \gamma$
$N^*(1125)$	0,114	1,73	1,73	1/2
$N^*(1440)$	0,397	0,50	0,57	3/2
$N^*(1710)$	0,587	0,34	0,34	5/2
$N^*(2200)$	1,897	0,22	0,25	7/2
$N^*(2600)$	1,126	0,18	0,19	9/2

Аналогичные вычисления были сделаны для случая N^* -резонансов. В табл.2 приведена систематика N^* -резонансов, основанная на использовании «главного квантового числа» n и «постоянной граничных условий» $\gamma = 1/2$. Очевидно, что отсутствие «пробелов» в систематике Δ - и N^* -резонансов при $1 \leq n \leq 4$ можно рассматривать как указание на возможность существования гипотетического $N^*(1125)$ -резонанса с массой $m_{N^*} \approx 1115-1130$ МэВ и шириной $\Gamma < 30$ МэВ, что согласуется с результатами статистической обработки π^-p -сечений (рис.1).

Отличительной особенностью нуклон-нуклонного взаимодействия с образованием Δ -изобары является то, что 1) она возбуждается виртуальным, а не реальным пионом; 2) сталкивающиеся нуклоны являются тождественными частицами, и, следовательно, в реакцию $NN \rightarrow N\Delta$ дают вклад, как минимум, два когерентных процесса.

Например, реакция перезарядки $p(p, n)_\Delta$ описывается суперпозицией прямой (D) и обменной (E) диаграмм. Поэтому, в отличие от свободного πN -рассеяния, в реакциях типа $(p, n)_\Delta$ и аналогичных процессах должны проявляться, как минимум, два характерных масштаба, соответствующих двум инвариантным переданным импульсам:

$$t_d \equiv (P_1 - P_n)^2 = (P_2 - P_\Delta)^2 \equiv t,$$

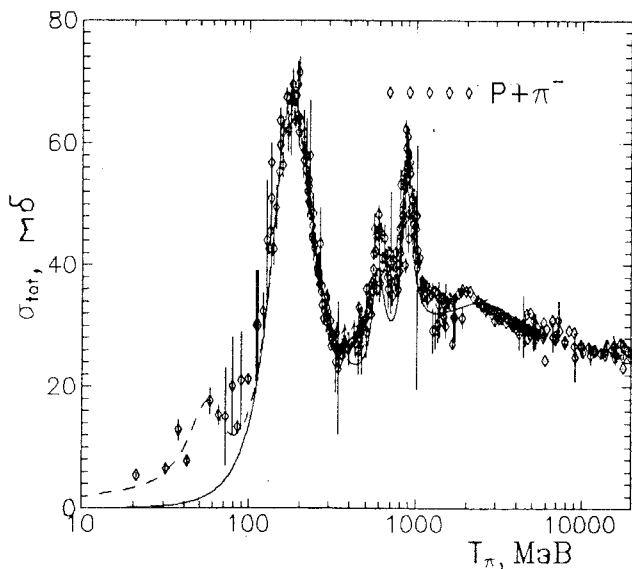


Рис.1. Полные сечения π^-p -рассеяния. Штриховая кривая построена с учетом вклада гипотетического $N^*(1125)$ -резонанса

$$t_{ex} \equiv (P_2 - P_n)^2 = (P_1 - P_\Delta)^2 \equiv u,$$

где t и u — стандартные мандельштамовские переменные, которым в шкале расстояний соответствуют величины

$$r_d \equiv 1/\sqrt{-t_d},$$

$$r_{ex} \equiv 1/\sqrt{-t_{ex}}.$$

Как видно из рис.2, для всех основных изобар ($\Delta(1232)$, $\Delta(1620)$, $\Delta(1950)$ и $\Delta(2420)$) значения r_d и r_{ex} для реакции перезарядки «вперед» (под углом $\theta = 0^\circ$) близки только в окрестности порога рождения Δ -резонанса (на пороге $u = t$, $s = s_{\min}$, где $s = (P_1 + P_2)^2$ — третья переменная Мандельстама — квадрат инвариантной массы системы). С ростом энергии налетающего протона величина r_d относительно быстро растет, в то время как r_{ex} плавно убывает. При переходе от одной Δ -изобары к другой положение кривой r_d в целом меняется скачкообразно (грубо говоря, по закону $1/n$, где $n = 1, 2, 3, 4$ для $\Delta(1232)$, $\Delta(1620)$, $\Delta(1950)$ и $\Delta(2420)$ соответственно). Кривая r_{ex}

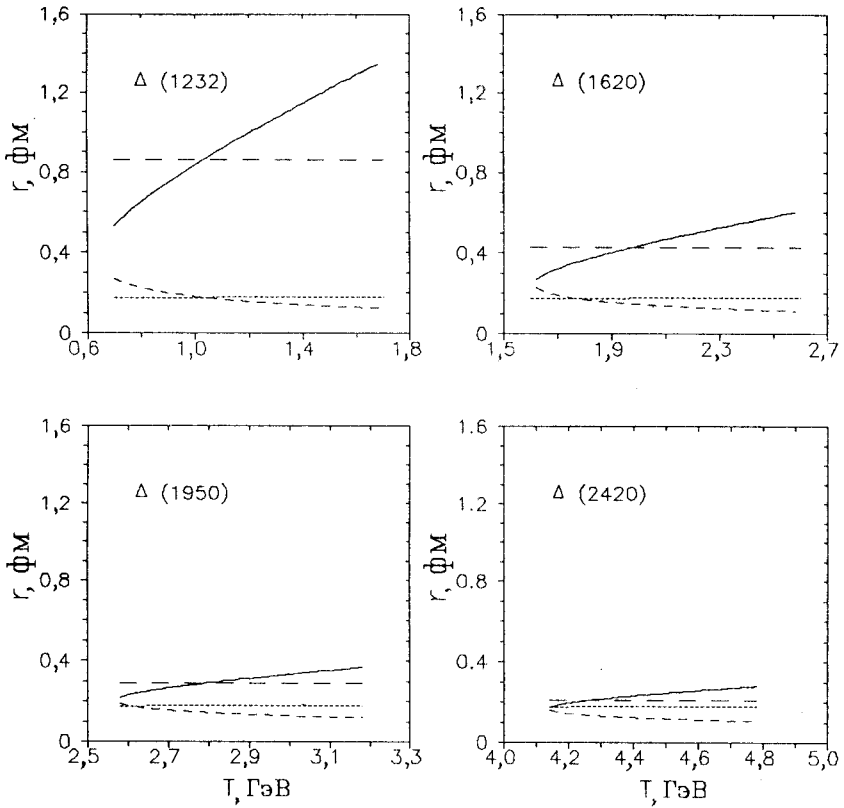


Рис.2. Зависимость скейлинговых переменных r_d и r_{ex} от энергии налетающего протона для типичных Δ -изобар, входящих в состав четырех основных мультиплетов барионов с изоспином $3/2$

как функция кинетической энергии снаряда T_p также скачкообразно меняется при переходе от одной Δ -изобары к другой. Однако амплитуда этого скачка существенно меньше, и для всех исследованных случаев r_{ex} лежит в диапазоне $0,1 \leq r_{ex} \leq 0,3$ фм, т.е. достаточно близко по порядку величины к характерному «жесткому» размеру нуклона $r_q \sim 0,2$ фм. Величина r_q может интерпретироваться как радиус жесткой сердцевины или ястровских корреляций, как размер конститuentного кварка, длина комптоновской волны нуклона или каким-либо сходным образом. В дальнейшем мы будем говорить об r_q как о размере нуклонных конститuentов, не делая акцента на какой-либо конкретной модельной интерпретации.

В связи с этим целесообразно ввести характеристические функции

$$\delta x_d \equiv 1 - \left[\frac{r_d - \langle r_0 \rangle}{\langle r_0 \rangle} \right]^2,$$

$$\delta x_{ex} \equiv 1 - \left[\frac{r_{ex} - \langle r_q \rangle}{\langle r_q \rangle} \right]^2.$$

Как видно из рис.3, энергетическая зависимость δx_d и δx_{ex} носит выраженный резонансный характер; для $\Delta(1232)$ -изобары положение максимумов δx_d и δx_{ex} совпадают ($\langle r_0 \rangle = 0,86$ фм, $\langle r_q \rangle = 0,18$ фм). Резонансные кривые $\delta x_d(T)$ и $\delta x_{ex}(T)$ хорошо коррелируют как между собой, так и с нормированной на единицу в максимуме функцией

$$\hat{\sigma}_{\Delta}(T) \equiv \sigma_{p+p \rightarrow n+\Delta^{++}} / \sigma_{p+p \rightarrow n+\Delta^{++}}^{\max},$$

описывающей энергетическую зависимость полного сечения образования P_{33} -резонанса [77,78].

С увеличением массы Δ -изобары положения максимумов функций $\delta x_d(T)$ и $\delta x_{ex}(T)$ раздвигаются, причем максимум δx_{ex} быстро приближается к порогу рождения Δ -резонанса, а для $\Delta(2420)$ попадает в кинематически запрещенную область.

Описанное поведение величин δx_d и δx_{ex} может быть интерпретировано следующим образом. В области энергий $T \approx 1$ ГэВ «прямой» виртуальный пион резонирует на нуклоне как целом, а «обменный» пион одновременно резонирует на нуклонном конstituенте. Конструктивная интерференция «прямой» и «обменной» амплитуд приводит к резонансному усилению сечения Δ -изобары, а также к заметному увеличению полного и неупругого сечений NN -взаимодействия [77,78]. С ростом энергии пучка «нуклонный» и «конституентный» резонансы раздвигаются, поэтому при $T_p > 3$ ГэВ изобара $\Delta(1232)$ возбуждается слабо. Образование же более тяжелых Δ -резонансов в нуклон-нуклонных соударениях всегда подавлено из-за рассогласования резонансных условий для прямой и обменной амплитуд.

Предложенная двухмасштабная модель рождения Δ -изобар также позволяет качественно объяснить обрыв спектра Δ -резонансов. В самом деле, при $n = 5$ согласно табл.1 перестает выполняться условие

$$\frac{\langle r_0 \rangle}{n + \gamma} \geq r_q, \quad (22)$$

т.е. длина дебройлевской волны пиона становится меньше размеров длины комптоновской волны нуклона, и стенка «нуклонной потенциаль-

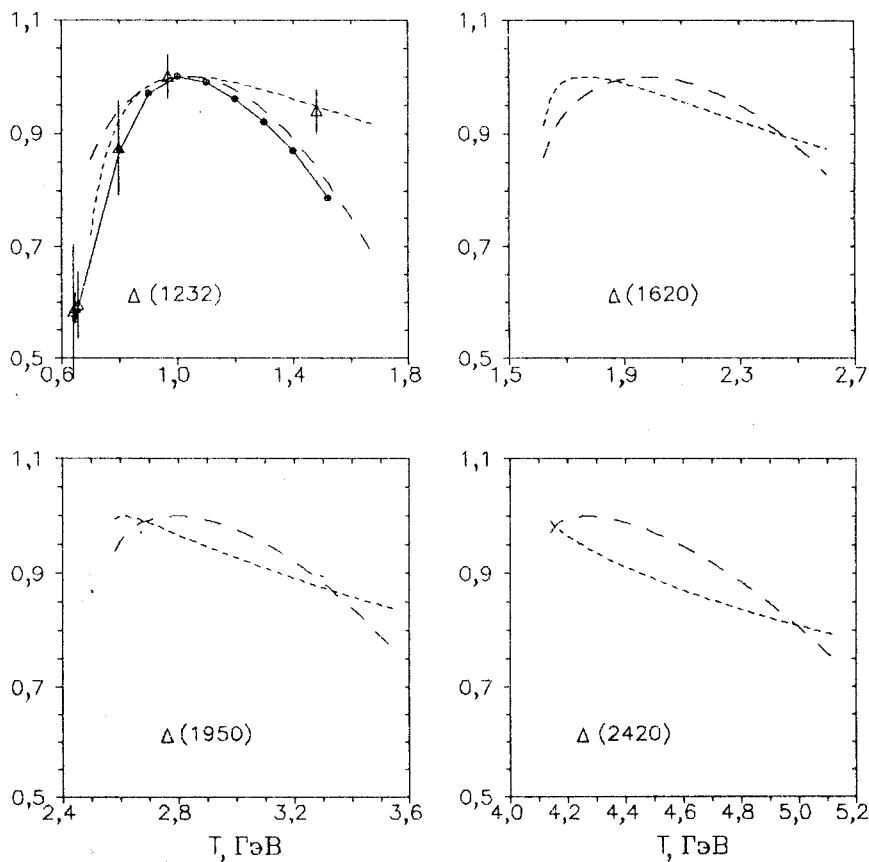


Рис.3. Зависимость характеристических функций $\delta\chi_d$ и $\delta\chi_{ex}$ от энергии налетающего протона для типичных Δ -изобар, входящих в состав четырех основных мультиплетов барионов с изоспином $3/2$. Экспериментальные точки на графике для $\Delta(1232)$ -изобары описывают энергетическую зависимость сечения реакции $pp \rightarrow n\Delta$ (кружки) и $pp \rightarrow nr\pi^+$ (треугольники)

ной ямы» экранируется. Следовательно, ограниченность спектра барионных резонансов сверху служит дополнительным указанием на жизнеспособность двухмасштабной модели резонансного пион-нуклонного рассеяния.

Таким образом, селективное возбуждение $\Delta(1232)$ -резонанса в области энергий $T_p \sim 1$ ГэВ в рамках излагаемого подхода может рассматриваться

как проявление двойного резонанса формы. С точки зрения формальной теории рассеяния подобный резонанс можно трактовать как аномальное усиление процесса из-за одновременного выполнения условия взаимодействия в конечном (начальном) состоянии двух пар частиц [79,80] (в нашем случае — виртуальных пионов с нуклоном и конститuentом).

Рассмотрим барион как резонирующую систему, распадающуюся на мезон и барион с суммарной массой, меньшей, чем масса исходного бариона. Инвариантная масса исходной системы задается формулой

$$\sqrt{s} = \sqrt{P_\mu^2 + m_\mu^2} + \sqrt{P_b^2 + m_b^2}, \quad (23)$$

где индексы μ и b соответствуют мезону и бариону. Согласно (21) и (23) масса барионного резонанса определяется соотношением

$$M_n(B) = \sqrt{m_\mu^2 + \left[\frac{n+\gamma}{r_0}\right]^2} + \sqrt{m_b^2 + \left[\frac{n+\gamma}{r_0}\right]^2} + \Delta M_n, \quad (24)$$

где $\Delta M_n < \Gamma$ — поправочный член к массовой формуле, описывающий зависимость величины $M_n(B)$ от остальных квантовых чисел (I, l, J, P, S, \dots) и по определению равный

$$\Delta M(I, l, J, P, S, C, \dots) = \sqrt{s} - \sqrt{m_\mu^2 + \left[\frac{n+\gamma}{r_0}\right]^2} + \sqrt{m_b^2 + \left[\frac{n+\gamma}{r_0}\right]^2}. \quad (25)$$

Формула (24) для спектра барионных масс является физическим аналогом формулы Бальмера, а также аналогична формуле Вайцеккера для масс ядер в том смысле, что (24) содержит доминирующее слагаемое, описывающее положение «центров тяжести» мультиплетов, а также поправочный член, зависящий от конкретных квантовых чисел резонанса.

Еще раз подчеркнем, что основной член в массовой формуле (24) был получен на основе общего условия возникновения резонанса, не зависящего от конкретного вида волнового уравнения, тогда как для расчета поправки ΔM_n необходимо привлечение модельных представлений.

Все реакции, в которых за счет сильного взаимодействия происходит рождение и последующий распад барионного резонанса, описываются диаграммами, общий вид которых представлен на рис.4. Символы m_{in} (m_{out}) и B_{in} (B_{out}) обозначают налетающие (улетающие) мезон и барион, а толстая линия соответствует пропагатору барионного резонанса, возбуждаемого в реакции

$$m_{in} + B_{in} \rightarrow \tilde{B} \rightarrow m_{out} + B_{out}. \quad (26)$$

Структура (26) универсальна в том смысле, что она не зависит ни от того, являются ли входящие и выходящие частицы реальными или виртуальными, ни от способа регистрации конечных состояний. Например, в случае

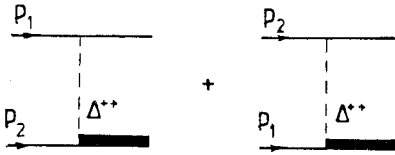


Рис.4. Диаграмма рождения и последующего распада барионного резонанса

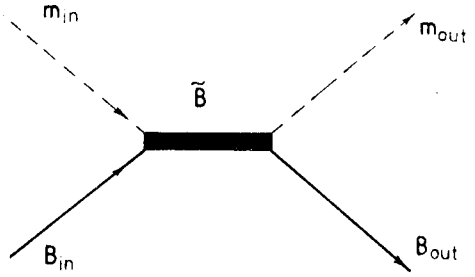


Рис.5. Прямая и обменная диаграммы реакции инклюзивной перезарядки $NN \rightarrow N\Delta$

реакции $p + p \rightarrow n + \Delta^{++} \rightarrow n + p + \pi^+$ мы можем пренебречь вкладом диаграмм, в которых нейтрон образуется в результате распада Δ -изобары и описать инклюзивное сечение перезарядки с помощью двух диаграмм (см. рис.5).

Тогда согласно [81,82]

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_n} = \\ & = \frac{2m^2 P_n}{\lambda^{1/2}(s, m^2, m^2)(2\pi)^3} \Gamma_{\Delta}(s_{\Delta}) |G_{\Delta}(s_{\Delta})|^2 \langle 0 | M(p + p \rightarrow n + \Delta^{++}) | 0 \rangle^2, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\Gamma_{\Delta}(s_{\Delta}) = \frac{1}{6\pi} \left[\frac{f_{\pi N\Delta}}{m_{\pi}} \right]^2 P_{\pi}^3 \frac{m}{\sqrt{s_{\Delta}}}, \quad (28)$$

$$G_{\Delta}(s_{\Delta}) = \frac{2M_{\Delta}}{M_{\Delta}^2 - s_{\Delta} - iM_{\Delta}\Gamma_{\Delta}(s_{\Delta})}. \quad (29)$$

Формула получается интегрированием по $d\Omega_{\pi}$ аналогичной формулы из работы [81,82] (ниже используются обозначения, формулы и терминология из работ [1,2,83,84]), которое выполняется аналитически в случае отсутствия распадных диаграмм в амплитуде рождения Δ -изобары $M(p + p \rightarrow n + \Delta^{++})$. При этом $\langle 0 | M(p + p \rightarrow n + \Delta^{++}) | 0 \rangle^2$ — это усредненный по проекциям спина квадрат модуля эффективной амплитуды рождения Δ -изобары, зависящий как от наблюдаемых кинематических переменных, так и от кинематических переменных виртуальных частиц:

$$s_{\Delta} = 3m^2 + 2mE_1 - 2mE_n - 2E_1E_n + 2P_1P_n \cos \theta_n, \quad (30)$$

$$t_1 = -q_1^2 = 2m^2 - 2E_1 E_n + P_1 P_n \cos \theta_n, \quad (31)$$

$$t_2 = -q_2^2 = 2m^2 - 2mE_n, \quad (32)$$

$$\cos \theta_{12} = \frac{m(m^2 - s_\Delta)}{\sqrt{s_\Delta t_1 t_2}}, \quad (33)$$

$$s = 2m(E_1 + m), \quad (34)$$

где E_1 — полная энергия налетающего протона, $P_1 = \sqrt{E_1^2 - m^2}$ — его импульс, а E_n и P_n — энергия и импульс регистрируемого нейтрона. Как уже отмечалось выше, формулы (27)—(34) получены в спектаторном приближении [6] для $\pi + p + g'$ -модели [81,82], которое является удовлетворительным для реакций $p + p \rightarrow n + X$ и $n + p \rightarrow p + X$ только вблизи максимума Δ -резонанса.

Выражение (27) содержит «нуклонный» ($\langle r_0 \rangle = 0,86$ фм) и «конституентный» ($r_q \approx 0,2$ фм) размеры в факторизованной форме. В самом деле, резонансный член $\Gamma_\Delta(s_\Delta) |G_\Delta(s_\Delta)|^2$ достигает максимума при $s_\Delta = M_\Delta^2$, что согласно (23), (24) и табл.1 возможно лишь в случае $n = 1$, $\gamma = 0$, $r_0 = 0,86$ фм. Следовательно,

$$M_\Delta = \sqrt{m_\pi^2 + \left[\frac{1}{r_0}\right]^2} + \sqrt{m^2 + \left[\frac{1}{r_q}\right]^2} + \Delta M_\Delta, \quad (35)$$

причем $\Delta M_\Delta \ll \Gamma_\Delta(M_\Delta)$. Таким образом, «нуклонный» размер $\langle r_0 \rangle \approx 0,86$ фм «спрятан» в пропагаторе Δ -изобары.

Амплитуда рождения Δ -изобары $M(p + p \rightarrow n + \Delta^{++})$ содержит формфакторы $F_{\pi NN}$ и $F_{\pi N\Delta}$, в которых «скрыт» конституентный размерный параметр $r_q \approx 0,2$ фм. (Например, для JAIN-набора [82] формфактор $F_{\pi N\Delta}$ содержит параметр обрезания $\Lambda_\pi = 1,2$ ГэВ, и величина $1/\Lambda_\pi \approx 0,17$ фм находится в прекрасном согласии с используемым нами значением $r_q \approx 0,18$ фм). Таким образом, математическая структура теории такова, что существенное усиление сечения $d^2\sigma/d\Omega dE$ или σ_{tot} возможно лишь тогда, когда резонанс на размере $\langle r_0 \rangle = 0,86$ фм возникает одновременно с резонансом на размере $r_q \approx 0,2$ фм. Формула (27) является первым членом миттаг-леффлеровского разложения NN -амплитуды по резонансам и может быть обобщена на случай произвольного резонанса посредством замены $M_\Delta \rightarrow M_n$ (n — «главное квантовое число»).

Отметим, что резонансная параметризация электромагнитных формфакторов нуклона, аналогичных вершинным функциям $F_{\pi NN}$ и $F_{\pi N\Delta}$ как по форме записи, так и по физическому смыслу, широко использовалась в 50-е годы [85]. В те же годы интенсивно исследовалась модель двойных резонансов для электрон-нуклонного рассеяния [86]. Однако в этих работах резонансные формфакторы для «керна» и «резонанса» вводились аддитивно. В результате согласование существующих экспериментальных данных с первыми принципами квантовой теории поля оказалось невозможным [87].

Суммируем изложенные выше результаты. Показано, что общезначимое (инвариантное относительно конкретного вида волнового уравнения) условие возникновения резонанса в волновых системах позволяет описать гросс-структуру барионного спектра. При этом оказалось, что все барионы имеют приблизительно одинаковый «размер» $\langle r_0 \rangle = 0,86$ фм, близкий к электромагнитному размеру нуклона. Это позволяет трактовать их как резонансы формы, причем только $\Delta(1232)$ -изобара может рассматриваться как двойной резонанс формы, что объясняет ее уникальную выделенность и селективность в пион-нуклонной и пион-ядерной физике.

Главный член в массовой формуле (24) не зависит от конкретной динамической модели. В теории низкоэнергетического потенциального рассеяния хорошо известно приближение эффективного радиуса, не зависящее от конкретного вида потенциала взаимодействия, что позволяет рассматривать формулу (24) как эвристический инструмент для поиска новых низкоэнергетических приближений в квантовой теории поля (включая КХД). Попутно отметим, что формула (24) близка по структуре к аналогичным формулам в модели мешка [88,89], что может служить дополнительным аргументом в пользу ее глубокой физической обоснованности.

4. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ШИРИН РЕЗОНАНСОВ

Целью настоящего раздела является обобщение формализма С.Г.Кадменского на случай распада короткоживущих квазипотенциальных состояний в квантовой механике, а также получение асимптотических оценок ширин подобных состояний и приложение развиваемого подхода к проблеме оценки ширин адронных и дибарионных резонансов [90]. Следует отметить, что в работах [91,92] развит квазиклассический метод вычисления ширин короткоживущих квазистационарных состояний. Ниже мы изложим метод [90], основанный на аналитическом продолжении решений уравнения Шредингера в комплексную плоскость энергии.

В наивной модели α -распада [93] ширина квазистационарного уровня в квазиклассическом приближении определяется формулой

$$\Gamma = \frac{P_\alpha \hbar^2 K}{2mR} \exp \left[-2 \int_R^{C/Q} dr k(r) \right], \quad (36)$$

где P_α — вероятность формирования α -частицы, m — ее приведенная масса, R — радиус канала, $C = 2(Z - 2)e^2$ — произведение зарядов α -частицы и дочернего ядра, Q — энергия α -частицы в системе центра масс родительского ядра, K и $k(r)$ — волновой вектор α -частицы внутри ямы и под барьером соответственно:

$$K = \left[\frac{2m}{\hbar^2} \left(Q + V_N - \frac{C}{R} \right) \right]^{1/2},$$

$$k(r) = \left[\frac{2m}{\hbar^2} \left(\frac{C}{r} - Q \right) \right]^{1/2},$$

причем V_N — глубина эффективной прямоугольной потенциальной ямы. Следует отметить, что даже такой упрощенный подход позволяет получить разумное описание экспериментальных данных путем подбора параметра R .

В рамках стандартного R -матричного формализма [15] ширина квазистационарного состояния вычисляется согласно формуле

$$\Gamma = 2\gamma_{CL}^2 P_{CL},$$

где γ_{CL}^2 — приведенная ширина уровня:

$$\gamma_{CL} = \left(\frac{\hbar^2}{2mR} \right)^{1/2} \int \Phi_C^* X_{LJM} dS,$$

Φ_C — поверхностная волновая функция канала, X_{LJM} — решение задачи на собственные значения во внутренней области распадающейся системы, а P_{CL} — фактор проницаемости барьера:

$$P_{CL} = \frac{kR}{F_L^2(\eta, kR) + G_L^2(\eta, kR)},$$

где F_L и G_L — регулярная и нерегулярная кулоновские функции соответственно. Строго говоря, R -матричный подход лежит в основе большинства распространенных в ядерной физике низких энергий вариантов теории резонансных ядерных реакций.

Весьма плодотворный подход к проблеме α -распада был предложен в работах группы С.Г.Кадменского (см. монографию [13] и ссылки в ней). Он основан на использовании так называемого интегрального формализма, который в случае наивной кластерной модели приводит к следующему выражению для ширины уровня:

$$\Gamma = 2\pi \int_0^R \tilde{F}_L(\eta, kr) V_{00}(r) \tilde{\Phi}_L(r) dr^2. \quad (37)$$

Обозначения в формуле (37) будут пояснены ниже.

Во всех перечисленных выше подходах естественным малым параметром теории служил фактор проницаемости барьера

$$P_{CL} \ll 1. \quad (38)$$

Однако в случае α -распада высоковозбужденных состояний ядер, а также в физике адронных резонансов постоянно приходится сталкиваться с нарушением условия (38). Покажем, как можно рассчитать ширину квазистационарного состояния без использования предложения о малости фактора проницаемости барьера (38).

Для определенности рассмотрим в одночастичном приближении задачу об α -распаде короткоживущих состояний атомных ядер.

Обозначим U_L — радиальную волновую функцию α -частицы, движущуюся в потенциале $V_{\alpha A}(r)$, а F_L — аналогичную регулярную функцию Кулона.

Уравнения Шредингера для U_L и F_L имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U_L}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (Q - V_c(r) - \frac{\hbar^2 L(L+1)}{2m r^2} - V_{\alpha A}(r)) U_L &= 0, \\ \frac{d^2 F_L}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (Q - V_{cp}(r) - \frac{\hbar^2 L(L+1)}{2m r^2}) F_L &= 0, \end{aligned} \quad (39)$$

где L — орбитальный момент, V_c — кулоновский потенциал, рассчитанный с учетом конечности размеров ядра, V_{cp} — кулоновский потенциал точечного заряда, $V_{\alpha A}$ — потенциал взаимодействия α -частицы с ядром-остатком.

Воспользуемся стандартным методом Грина и продelaем следующие преобразования:

$$F_L \frac{d^2 U_L}{dr^2} - U_L \frac{d^2 F_L}{dr^2} = \frac{2m}{\hbar^2} V_{00}(r) U_L F_L, \quad (40)$$

где

$$V_{00}(r) = V_{\alpha A}(r) + V_c(r) - V_{cp}(r).$$

Интегрируя выражение (40) по частям, получаем

$$F_L(\eta, kR)U'_L(R) - U_L(R)F'_L(\eta, kR) = \frac{2m}{\hbar^2} \int_0^R V_{00}(r)U_L(r)F_L(\eta, kr)dr. \quad (41)$$

Здесь и далее штрих обозначает первую производную по R .

Если R_0 — радиус обрезания ядерного потенциала, то при $R > R_0$ выполняется соотношение

$$U_L(R) = \frac{i}{2}([G_L - iF_L] - S_L[G_L + iF_L]),$$

откуда немедленно получаем

$$\begin{aligned} \frac{i}{2}([G'_L - iF'_L] - S_L[G'_L + iF'_L])F_L - \frac{i}{2}([G_L - iF_L] - S_L[G_L + iF_L])F'_L = \\ = \frac{2m}{\hbar^2} \int_0^R F_L(\eta, kR)V_{00}(r)U_L(r)dr. \end{aligned} \quad (42)$$

Воспользуемся свойством вронскиана:

$$F'_L G_L - F_L G'_L = k,$$

где

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} Q.$$

Введем функцию

$$\Phi_L(r) = S_L^{-1} U_L(r), \quad (43)$$

имеющую асимптотику:

$$\Phi_L(r) \propto \frac{i}{2}[S_L^{-1}(G_L(\eta, kr) - iF_L(\eta, kr)) - (G_L(\eta, kr) + iF_L(\eta, kr))]. \quad (44)$$

В резонансе по определению

$$S_L^{-1} = 0, \quad (45)$$

и асимптотика (44) резко упрощается:

$$\bar{\Phi}_L(r) \propto -\frac{i}{2}[G_L(\eta, kr) + iF_L(\eta, kr)]. \quad (46)$$

Для того чтобы подчеркнуть, что мы работаем только в окрестности резонанса, волновую функцию $\Phi_L(r)$ при $S_L^{-1} = 0$ в формуле (46) и далее мы

будем обозначать $\bar{\varphi}_L(r)$. Выразим ее через нормированную на единицу во внутренней области резонанса волновую функцию $\tilde{\varphi}_L(r)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_L(r) &= A_L \bar{\varphi}_L(r), \\ \int_0^R |\tilde{\varphi}_L(r)|^2 dr &= 1. \end{aligned} \quad (47)$$

Далее, чтобы не удлинять формулы, мы обозначим C_L, F_L, \dots значения соответствующих функций в точке R . Во избежание путаницы в обозначениях производную по r мы будем обозначать точкой. Введем поправочную функцию $\kappa(k, k^*)$:

$$\begin{aligned} \kappa^{-2}(k, k^*) &= \frac{1}{2k} ([G_L^* \dot{F}_L k - F_L^* \dot{G}_L k + G_L \dot{F}_L^* k^* - F_L \dot{G}_L^* k^*] + \\ &+ i[G_L \dot{G}_L^* k^* - G_L^* \dot{G}_L k + F_L \dot{F}_L^* k^* - F_L^* \dot{F}_L k]). \end{aligned} \quad (48)$$

Очевидно, что в приближении малых ширин

$$\kappa(k, k^*) = 1. \quad (49)$$

Введем кулоновскую функцию, нормированную на δ -функцию по энергии на вещественной оси:

$$\tilde{F}_L(\eta, kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi \hbar v}} F_L(\eta, kr). \quad (50)$$

Собирая вместе соотношения (42)—(50), мы немедленно получаем точную формулу для расчета ширин:

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\kappa^2(k, k^*)} \left| \int_0^R \tilde{F}_L(\eta, kr) V_{00}(r) \tilde{\varphi}_L(r) dr \right|^2. \quad (51)$$

В силу соотношения (49) в пределе малых ширин формула (51) переходит в известную формулу Кадменского. Соотношение (51) является результатом аналитического продолжения формализма Кадменского в комплексную плоскость энергии.

Подынтегральное выражение в (51) имеет хорошую структуру с точки зрения возможности построения асимптотических оценок ширины квазистационарных состояний. В самом деле, потенциал $V_{\alpha A}(r)$ быстро убывает с ростом r , кулоновская функция $F_L(\eta, kr)$, напротив, экспоненциально растет при увеличении r , однако правее классической точки поворота она

ограничена. Волновая функция $\tilde{\varphi}_L$ осциллирует во внутренней области ядра и имеет максимум вблизи его поверхности. Произведение этих трех функций имеет острый максимум в поверхностной области ядра, и, следовательно, интеграл в (51) может быть оценен методом перевала.

Как результат, имеем

$$\Gamma_{s.p} = \xi_L(Q, r_0) \frac{kr_0}{2Q} [F_L(\eta, kr_0) V_{00}(r_0)]^2, \quad (52)$$

где $\Gamma_{s.p}$ — предельная одночастичная оценка ширины Γ , r_0 — радиус канала, выбираемого из условия максимума подынтегральной функции в формуле (51), а ξ_L — поправочный фактор порядка единицы:

$$\xi_L(Q, r_0) = \frac{8\pi |\tilde{\varphi}_L(r_0)|^2 \sigma^2}{r_0 \kappa^2(k, k^*)}. \quad (53)$$

В свою очередь, величина σ находится по формуле

$$\sigma^{-2} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{V_{00}} \frac{\partial V_{00}}{\partial r} + \frac{1}{F_L} \frac{\partial F_L}{\partial r} + \frac{1}{\tilde{\varphi}_L} \frac{\partial \tilde{\varphi}_L}{\partial r} \right]_{r=r_0}. \quad (54)$$

В соответствии с общей идеологией развиваемого подхода соотношения (52)—(54) получены в предположении, что радиус канала определяется из условия

$$\frac{\partial}{\partial r} [\tilde{F}_L(\eta, kr) V_{00}(r) \tilde{\varphi}_L(r)]_{r=r_0} = 0, \quad (55)$$

причем

$$\tilde{\varphi}_L(r_0) \approx 0. \quad (56)$$

Аналитичность соотношений (52)—(54) позволяет использовать их для оценки ширин адронных резонансов, т.е. в тех случаях, когда потенциал взаимодействия фрагментов распадающейся системы во внутренней области плохо известен. Влияние кулоновского барьера в этом случае невелико, и оценка (52) упрощается:

$$\Gamma_{s.p} = \tilde{\xi}_L(Q, r_0) \frac{(kr_0)^{2L+1}}{2Q} [V_{00}(r_0)]^2. \quad (57)$$

Новый поправочный фактор возникает при замене кулоновской функции на ее асимптотическое значение. Для оценок примем

$$\tilde{\varphi}_L(r_0) \approx r_0^{-1/2}, \quad \sigma \approx 0,2 \text{ фм},$$

тогда $\tilde{\xi} \approx 1,3$. Точнее значение $\tilde{\xi}$ оценить нельзя, поскольку величину σ определяет вторая производная от $\ln(\tilde{\varphi}_L(r))$, которая может быть найдена лишь численно.

Учет многочастичности задачи может быть произведен посредством введения спектроскопического фактора w : $\Gamma = w\Gamma_{s.p.}$

В качестве иллюстрации работоспособности излагаемого подхода приведем численные примеры. Так, при рассмотрении α -распада изотопов свинца ширина отдельных состояний может изменяться на 18 порядков. Несмотря на это из табл.3 видно, что перевальные оценки ширин разумно согласуются с точными расчетами в рамках интегрального формализма Кадменского.

Таблица 3. Ширина α -распада изотопов свинца

Ядро	$\Gamma^{теор}$, МэВ	$\Gamma^{теор}(R_0)$, МэВ	$\Gamma_{эксп}$, МэВ [94]
^{182}Pb	$1,06 \cdot 10^{-19}$	$0,55 \cdot 10^{-19}$	$0,82 \cdot 10^{-20}$
^{184}Pb	$0,75 \cdot 10^{-20}$	$0,42 \cdot 10^{-20}$	$0,83 \cdot 10^{-21}$
^{186}Pb	$0,49 \cdot 10^{-21}$	$0,30 \cdot 10^{-21}$	$0,97 \cdot 10^{-22}$
^{188}Pb	$0,17 \cdot 10^{-22}$	$0,11 \cdot 10^{-22}$	$0,41 \cdot 10^{-23}$
^{190}Pb	$0,20 \cdot 10^{-24}$	$0,15 \cdot 10^{-24}$	$0,57 \cdot 10^{-25}$
^{192}Pb	$0,69 \cdot 10^{-27}$	$0,60 \cdot 10^{-27}$	$0,13 \cdot 10^{-27}$
^{194}Pb	$0,16 \cdot 10^{-30}$	$0,17 \cdot 10^{-30}$	$0,41 \cdot 10^{-31}$
^{210}Pb	$0,66 \cdot 10^{-37}$	$0,10 \cdot 10^{-36}$	$0,12 \cdot 10^{-37}$

При расчетах мы полагали $R_0 = 1,25A^{1/3}$ фм и использовали потенциал Саксона — Вудса с параметром диффузности $a = 0,55$ фм. Глубина потенциала подбиралась в соответствии с энергией α -частицы Q по процедуре подгонки глубины ямы.

В многочисленных работах, выполненных в рамках подхода С.Г.Кадменского (см. монографию [13]), было установлено, что интеграл в (37) набирается в поверхностной области ядра. При этом ни наличие связи каналов (см. [95]), ни учет сверхтекучих корреляций и перенормировки взаимодействия при переходе от свободных нуклонов к связанным внутриядерным [96] не меняет указанного фундаментального вывода о том, что ширина α -распада формируется в кластерной (поверхностной) области ядра.

Используем изложенное выше обобщение формализма Кадменского для численной оценки ширин нестранных барионных резонансов. Сначала рассмотрим задачу резонансного P -волнового πN -рассеяния в рамках диаграммной техники, изложенной в [6].

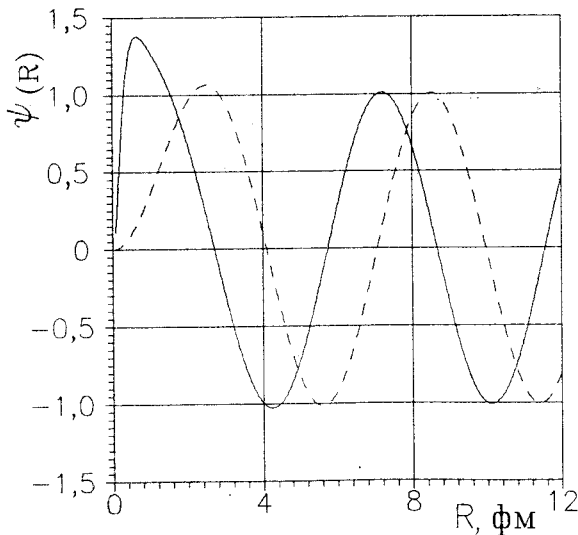


Рис.6. Волновая функция пиона в СЦИ распадающейся $\Delta(1232)$ -изобары. Штриховая кривая соответствует волновой функции свободного пиона с орбитальным моментом $L = 1$

Для этого в первом борновском приближении рассчитаем дальнюю действующую часть эффективного потенциала πN -взаимодействия [38]:

$$U_{\text{eff}}^{\pi N}(r) = -f_{\pi NN}^2 \frac{m + m_\pi}{mm_\pi} \left[\frac{m}{m_\pi} \right]^2 \frac{P_\pi^2}{\sqrt{s}} \frac{\exp(-\alpha r)}{r}, \quad (58)$$

где $m(m_\pi)$ — масса нуклона (пиона), $f_{\pi NN} = 1$ — сильная константа связи, $\alpha = \sqrt{2mE_\pi}$; $E_\pi = \sqrt{P_\pi^2 + m_\pi^2}$; $P_\pi = \lambda^{1/2}(s, m^2, m_\pi^2)/(2\sqrt{s})$, а треугольная функция λ определяется стандартным соотношением $\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx$.

Для анализа проблемы ширины адронных резонансов воспользуемся принципом соответствия.

Рассчитаем волновую функцию $\psi(r)$ пиона, образующегося при распаде Δ -изобары посредством численного интегрирования уравнения Клейна — Гордона, линеаризованного по потенциалу $U_{\text{eff}}^{\pi N}$. Из рис.6 видно, что потенциал $U_{\text{eff}}^{\pi N}(r)$ затягивает волновую функцию (ВФ) пиона во внутреннюю

область нуклона, причем положение максимума ВФ практически совпадает с первым боровским радиусом $r_0 = 0,86$ фм для $L = 1$.

Отсюда следует, что резонансы формируются на относительно больших расстояниях между разлетающимися продуктами распада. Это позволяет провести аналогию между физикой адронных резонансов и α -распадом (т.е. между физикой кварковых и нуклонных кластеров), при котором α -частица формируется в поверхностной области ядра [13,95,96]. В табл.4 представлены ширины адронных резонансов, рассчитанные в приближении (57), физическим обоснованием которого служит указанная выше аналогия между α -распадом и распадом адронных резонансов. Из табл.4 видно, что согласие теории с экспериментом хорошее.

Таблица 4. Массы и ширины πN -резонансов (в МэВ)

	Резонанс	$\Delta(1232)$	$N^*(1440)$
	$n + \gamma$	1	$1 + 1/2$
М	теория	1234	1370
	эсп. [24]	1230—1234	1430—1470
Г	теория	100	260
	эсп. [24]	115—125	250—450

Тот факт, что положение внешнего максимума волновой функции пиона $\psi(r)$, образующегося при распаде Δ -изобары (или $N^*(1440)$ -резонанса), практически совпадает с $r_0 = 0,86$ фм, говорит о том, что в физике адронных резонансов мы имеем дело с квантово-механическим аналогом открытых резонаторов [50]. В известной монографии [17] были проанализированы некоторые общие свойства квантовых аналогов открытых резонаторов.

Весьма серьезным тестом на справедливость излагаемого подхода является проверка его применимости к анализу свойств дибарионов. История узких дибарионных резонансов драматична. Существующая литература по данному вопросу очень богата (см., например, обзоры [97—99,28,27] и ссылки в них), но противоречива. Несмотря на то, что имеются расхождения экспериментальных данных из разных групп, мы решили использовать обширные результаты, полученные дубненской коллаборацией [100].

Расчеты ширин дибарионных резонансов проводились с потенциалом Хьюлтена

$$V_{00}(r) = V_0 \frac{\exp(-\mu r)}{1 - \exp(-\mu r)}, \quad (59)$$

причем для протон-нейтронных резонансов глубина потенциала принималась равной 35 МэВ, а для протон-протонных резонансов — 49 МэВ.

Таблица 5. Инвариантные массы и ширины (МэВ) дипротонных резонансов.
 Приведены наблюдаемые экспериментальные ширины без коррекции
 на разрешающую способность аппаратуры

	$n + \gamma$	1/2	1	1 + 1/2	2	2 + 1/2	3	3 + 1/2
M	теория	1890	1932	1998	2088	2198	2326	2468
	эксп.	1886	1937	1999	2087	2172		
	[100]							
Г	теория	4	9	12	17	22		
	эксп.	4 \mp 1	7 \mp 2	9 \mp 4	12 \mp 7	7 \mp 3		
	[100]							

**Таблица 6. Инвариантные массы и ширины нейтрон-протонных резонансов
 (в МэВ)**

	$n + \gamma$	1/2	1	1 + 1/2	2	2 + 1/2	3	3 + 1/2
M	теория	1892	1933	2000	2089	2200	2327	2469
	эксп.			1998	2084			
	[100]							
Г	теория	2	4	6	8	10		
	эксп.			14 \mp 4	11 \mp 5			
	[100]							

Параметр $\mu = 1,1 \text{ фм}^{-1}$. При этом, как видно из табл.5 и 6, имеет место хорошее согласие теории с экспериментом [100].

Таким образом, в табл.4—6 демонстрируется хорошее согласие теоретических и экспериментальных значений ширин. Причем во всех расчетах масс и ширин барионных и дибарионных резонансов использовалось одно и то же значение параметра $r_0 = 0,86 \text{ фм}$.

Необходимо особо отметить, что в рамках одного и того же подхода без подгоночных параметров удалось описать как широкие адронные резонансы (Δ -изобару и ровер), так и узкие дибарионные резонансы, имеющие ширину на 1—2 порядка меньшую. Происхождение этой малости ширины дибарионных резонансов хорошо иллюстрирует рис.7, на котором представлены в одном масштабе πN -потенциал (58) и потенциал Хюльтена для нейтрон-протонного взаимодействия. Малая глубина последнего в окрестности радиуса канала связана с тем, что при низких энергиях NN -взаимодействие определяется обменом пиона вдали от массовой поверхности. А малость потенциала взаимодействия, согласно (52), приводит к узости соответствующего резонанса.

В случае πN -взаимодействия пион лежит на массовой поверхности, и соответствующий потенциал имеет большую глубину. Следовательно, все

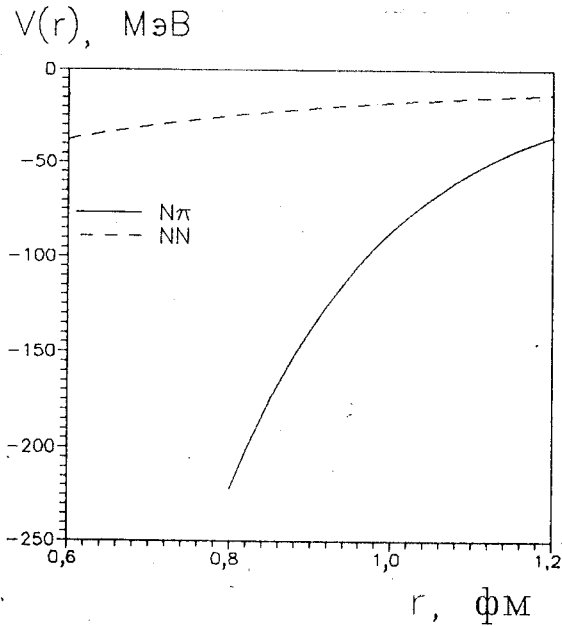


Рис.7. Потенциал Хюльтена для нейтрон-протонного взаимодействия (штриховая кривая) и эффективный потенциал πN -взаимодействия (сплошная кривая)

известные барионы, распадающиеся в результате сильных процессов, имеют характерные ширины порядка 100 МэВ.

Таким образом, ширины адронных и дибарионных резонансов допускают достаточно точное воспроизведение в рамках принципа соответствия на основе глубокой физической аналогии с теорией α -распада. Опыт, накопленный в процессе решения многочисленных задач в физике α -распада, однозначно свидетельствует о нечувствительности результатов расчета к выбору потенциалов αA -взаимодействия во внутренней области ядра. Теоретическая ширина α -распада также практически не зависит от поведения эффективной волновой функции α -частицы во внутренней области ядра. Физика α -распада — это кластерная физика. Все наблюдаемые величины определяются потенциалом αA -взаимодействия на поверхности ядра.

Перенесение этого подхода на физику адронных резонансов особенно важно, поскольку потенциальное описание подобных резонансов возможно только в поверхностной области распадающихся адронов. Поэтому систематическое исследование ширин адронных и дибарионных резонансов способно дать полезную информацию о потенциалах взаимодействия в окрест-

ности радиуса канала, ответственного за формирование резонанса. По нашему мнению малость ширины дибарионных резонансов, по сравнению с ширинами адронных резонансов, обусловлена малостью NN -взаимодействия по отношению к πN -взаимодействию в области формирования резонанса.

5. ПРИНЦИП ПОДОБИЯ И РАЗМЕРНОСТИ В ЯДЕРНОЙ ФИЗИКЕ

Использование принципов подобия, размерности и автомодельности оказалось весьма плодотворным в механике сплошных сред, гидродинамике, теории горения и т.п. [101—103]. В физику частиц гипотеза автомодельности была введена Матвеевым, Мурадяном и Тавхелидзе [41]. Дальнейшее развитие принципы подобия, размерности и автомодельности получили в работах А.М.Балдина [42], посвященных релятивистской теории динамических систем.

Проиллюстрируем работоспособность методов теории подобия на хорошо известных примерах из нерелятивистской ядерной физики.

Согласно Вайцзекеру [104] имеет место следующая зависимость радиуса ядра от числа нуклонов в ядре A :

$$R = R_0 A^{1/3}. \quad (60)$$

Из формулы (60) немедленно следует, что объем ядра пропорционален числу нуклонов. Это свойство сближает ядро с обычными однородными веществами. Ландау на основе разработанной им теории ферми-жидкости ввел понятие квазичастиц [105]. Важнейшей характеристикой ферми-жидкости оказалась дебройлевская длина волны $\lambda_f = 1/k_f$ квазичастицы, лежащей на поверхности Ферми. Введение понятия о квазичастицах представляется достаточно обоснованным только при выполнении условия

$$k_f R \gg 1, \quad R \gg \lambda_f, \quad (61)$$

что совпадает с условием применимости квазиклассического приближения в квантовой механике.

В рамках теории конечных ферми-систем энергию основного состояния ядра можно представить в виде суммы

$$E = E_0 + E_1,$$

где E_0 и E_1 — плавная и осциллирующая функции числа квазичастиц соответственно. Согласно работе [106] энергия E_1 имеет период $\pi/2$ в шкале $k_f R$. Действительно, для квазичастиц в ядре выполняется условие при-

менимости квазиклассического приближения. Поэтому можно применить правило радиального квантования Бора — Зоммерфельда. В итоге получается правило квантования для уровня Ферми [106]:

$$k_f R = \frac{\pi}{2} n, \quad n = 2, 3, 4, \dots, \quad (62)$$

достаточно хорошо воспроизводящее магические числа нуклонов в ядре. Приведенный результат можно интерпретировать следующим образом: наибольшей стабильностью обладают ядра, у которых **на диаметре $d = 2R$ укладывается целое число дебройлевских полуволн квазичастицы, лежащей на поверхности Ферми.**

Для ядерных резонансов коллективной природы [18] также выполняется соотношение

$$k = \beta \frac{1}{R} = \beta_1 A^{-1/3},$$

аналогичное (62). Таким образом, в приведенных примерах наблюдаемые квантовые эффекты объясняются существованием резонансных собственных частот для дебройлевских волн внутри сферической полости радиуса R .

В этом разделе мы кратко рассмотрели гросс-структуру ядра, отвлекаясь от ее тонких деталей. Ядро рассматривалось как грубая система, динамику которой можно описать в общих чертах в рамках теории ферми-жидкости. Указанный подход был использован В.Г.Носовым в монографии [106]. Для применимости такого подхода необходимо выполнение соотношений (60) и (61). **При этом оказывается, что важнейшей характеристикой ядра как грубой системы является величина $k_f R$, по определению совпадающая с угловым моментом $L = k_f R$ квазичастицы, лежащей на поверхности Ферми.**

Гипотеза автомодельности, введенная в физику частиц Матвеевым, Мурадяном и Тавхелидзе [41], подразумевает инвариантность по отношению к преобразованию импульсного пространства $P_i \rightarrow \xi P_i$.

Применим изложенные выше принципы для анализа спектра адронных (и других субатомных) резонансов. Воспользуемся тем, что для сферически-симметричных систем угловой момент L является интегралом движения. Кроме того, он остается неизменным при преобразовании дилатации

$$P \rightarrow \xi P, \quad r \rightarrow \xi^{-1} r, \quad (63)$$

где $P = \hbar k$: В этом случае длина волны де Бройля преобразуется как $\lambda_D \rightarrow \xi^{-1} \lambda_D$. Итак, в квазиклассическом приближении $L = R/\lambda_D$, т.е. интеграл движения L определяется характерным размером системы и соответствующей длиной дебройлевской волны. В работах [36—39] было показано на конкретных примерах, что условие квантования (21) может

быть применено для адронных резонансов, распадающихся как за счет сильного, так и за счет слабого взаимодействия. Поэтому мы примем следующую рабочую гипотезу: условие квантования (21) справедливо для резонансов любой природы, независимо от вида взаимодействия при выполнении условия квазиклассичности (61). Другими словами, здесь мы имеем дело с принципом автомодельности второго рода, т.е. к принципам теории размерности и автомодельности добавляются определенные свойства асимптотического поведения рассматриваемых величин. В нашем случае это требование выполнения условия квазиклассичности (61).

Перепишем формулу

$$m_n(R) = \sqrt{m_1^2 + P^2} + \sqrt{m_2^2 + P^2}, \quad (64)$$

используя соотношения $\lambda_D = \hbar/P$, $\lambda_C = \hbar/mc$:

$$m_n(R) = \hbar c \sqrt{\lambda(1)_C^{-2} + \lambda_D^{-2}} + \hbar c \sqrt{\lambda(2)_C^{-2} + \lambda_D^{-2}}, \quad (64a)$$

где λ_C — комптоновская длина волны для продуктов бинарного распада резонанса. Здесь λ_D/λ_C , r_0/λ_D — параметры подобия, и при их фиксированных значениях величина инвариантной массы остается подобной самой себе при изменении всех остальных параметров задачи.

При масштабных преобразованиях вида

$$P \rightarrow \xi P, \quad m_i \rightarrow \xi m_i \quad (63a)$$

инвариантные массы резонансов меняются как однородная функция параметра масштабного преобразования ξ :

$$m_n(R) \rightarrow \xi m_n(R). \quad (63b)$$

Таким образом, мы сформулировали принцип автомодельности для распределения масс резонансов.

Следует заметить, что в приведенной выше формулировке принципа автомодельности для распределения масс резонансов одинаково важную роль играют длины волн де Бройля и Комптона. Только при определенных соотношениях между ними возникают резонансы

$$\frac{r_0}{\lambda_D} \propto \frac{\lambda_C}{\lambda_D} \propto n.$$

Несмотря на приближенный характер полученных соотношений (при их установлении было использовано асимптотическое условие квазиклассичности (61)), их точность оказалась удивительно высокой (см. работы [36—39]). Ниже мы применим эти соотношения для систематического

исследования резонансов в системах (pp) , $(\pi\pi)$ и (e^+e^-) и на основе сравнительного анализа этих систем дадим интерпретацию «дармштадтского эффекта».

6. НЕСТРАННЫЕ ДИБАРИОННЫЕ РЕЗОНАНСЫ

История дибарионных резонансов драматична и противоречива. Современный статус дибарионных резонансов представлен в недавних обзорах [27—29], где анализируются экспериментальные данные об узких дибарионных резонансах в области инвариантных масс до 2300 МэВ. Характерной особенностью дибарионных резонансов является их аномально малая ширина. Объяснение этой особенности является весьма серьезным тестом для любой теоретической модели. Обзор теоретических работ представлен в [107] (см. также недавние публикации [108,109]). Существующие теоретические модели не в состоянии объяснить узость ширин дибарионных резонансов. Последняя доступная нам работа [110] дает оценку для ширины $\Gamma \leq 40$ МэВ. Как отмечалось выше, малость ширин дибарионных резонансов по сравнению с ширинами адронных резонансов обусловлена малостью NN -взаимодействия по отношению к πN -взаимодействию в области формирования резонанса (подробнее см. выше). Значения инвариантных масс дибарионных резонансов, вычисленные в существующих теоретических моделях [107], систематически больше на 300 МэВ, чем экспериментальные значения.

Однако следует заметить, что экспериментальный спектр дибарионных резонансов очень богатый, и, естественно, наш подход не в состоянии описать все наблюдаемые дибарионные состояния, поскольку он изначально претендует лишь на воспроизведение положения центров тяжести соответствующих мультиплетов. Поэтому ниже мы проанализируем экспериментальный спектр дипротонных резонансов, привлекая для этой цели все доступные нам экспериментальные данные. Для этого используем соотношение (64), из которого находится импульс P наблюдаемого протона (антипротона) в системе центра инерции распадающегося дибарионного резонанса. Применим полученное для разных дипротонных и антипротонных состояний распределение импульсов для вычисления спектра масс e^+e^- -системы, используя принцип масштабной инвариантности. Экспериментальные данные в совокупности с результатами наших расчетов на основе формул (21) и (24) представлены в табл.7 [111] (заметим, что в нашем подходе массы дипротонных и протон-антипротонных резонансов должны быть равными, и, как видно из табл.7, такое равенство в самом деле выполняется с хорошей точностью).

Таблица 7. Спектр масс дипротонных и протон-антипротонных резонансов (в МэВ). Экспериментальные данные для протон-антипротонных резонансов взяты из компиляции [24]

Теория	Эксперимент NN	Эксперимент $\bar{N}\bar{N}$
	1877,5 ± 0,5 [116]	
	1886 ± 1 [100]	
1890	1892 [100]	
	1898 ± 1 [100], 1902 [28]	1897 ± 1
	1916 ± 2 [100,28],	1920
	1918 ± 3 [112]	
1932	1937 ± 2 [100],	1930 ± 2
	1932 ± 3 [112]	
	1941 [28]	1942 ± 5, 1949 ± 10
	1955 ± 2 [100],	
	1956 ± 3 [113]	
	1965 ± 2 [100], 1969 [28]	1968
	1980 ± 2 [100]	
1999	1999 ± 2 [100]	
	2008 ± 3 [100], 2016 [28],	2022 ± 6
	2017 ± 3 [100]	
	2035 ± 8 [113]	
	2046 ± 3 [100], 2052 [28]	
2089	2087 ± 3 [100,28]	2080 ± 10, 2090 ± 20
	2106 ± 2 [100], 2122 [28]	2110 ± 10
	2129 ± 5 [100], 2155 [28]	
	2172 ± 5 [100]	2180 ± 10
2199	2194 [28]	2207 ± 13
	2220 [114], 2236 [28],	2229
	2238 ± 3 [100]	
	2282 ± 4 [100,28]	2260
2327		2307 ± 6
	2350 [114]	2380
2470		2480 ± 30, 2450 ± 10
		≈2500
2625		
2790	2735 [115]	2710 ± 20
		2850 ± 5
2964		
3145		
3332		3370 ± 10
3524		3600 ± 20
3720		

7. ДАРМШТАДТСКИЙ ЭФФЕКТ

Современное состояние экспериментов и теоретических моделей по дармштадтскому эффекту дано в обзоре Ю.Н.Покотилового [117] (литература по данной проблеме чрезвычайно богата, см. [117]). Суть дармштадтского эффекта состоит в том, что при столкновении тяжелых ионов при энергии ниже кулоновского барьера наблюдаются узкие позитронные линии и электронно-позитронные пары в диапазоне эффективных масс $1,4 + 1,9$ МэВ с ширинами $2 + 40$ кэВ. Сейчас можно считать общепризнанным фактом наличие самого эффекта. Постоянство, с которым узкие линии наблюдаются в независимых экспериментах совместно с их статистической значимостью $5\sigma - 6\sigma$, не позволяет интерпретировать их как статистические флуктуации. Также можно отметить как общепризнанный вывод о том, что гипотеза двухчастичного распада на позитрон и электрон свободной элементарной или составной частицы, покоящейся в системе центра масс сталкивающихся ионов, не может быть признана адекватной физике рассматриваемого эффекта. Аналогичный эффект наблюдался также при упругом рассеянии позитронов при низких энергиях на атомных электронах. Однако поиски резонансных состояний при рассеянии позитронов на электронах при соответствующих энергиях дают значительно более сильные ограничения на их ширину: $\Gamma < 10^{-3}$ эВ (см. ссылки на экспериментальные данные в [24], а также теоретическую работу [118]).

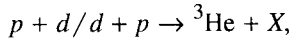
Привлекательность эффекта состоит в необычности ситуации: прекрасное известная система e^+e^- проявляет свойства, никак ранее не предполагавшиеся и никогда не предсказанные.

Последнее десятилетие ситуация подогревалась еще в связи с проблемой **гипотетического аксиона** — нейтральной ($J^P = 0^-$) частицы с непредсказываемой теорией массой. Проблема аксиона вызвала много безуспешных экспериментов по его обнаружению. Поэтому для объяснения дармштадтского эффекта были созданы модели, зачастую основанные на фантастических идеях. В качестве вывода приведем заключение из обзора [117]: **основные особенности дармштадтского эффекта представляют серьезную проблему для интерпретации и не находят объяснения.**

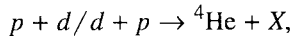
Еще раз подчеркнем: резонансные пики при рассеянии позитронов на свободных электронах не обнаружены, однако они обнаружены в e^+e^- -системе при рассеянии тяжелых ионов, а также при рассеянии позитронов на (связанных) атомных электронах. Другими словами, **дармштадтский эффект наблюдается только при условии присутствия внешнего силового центра.**

Нам представляется чрезвычайно важным указать некоторые хорошо известные аналогичные случаи в разных областях физики.

Рассмотрим ABC-«частицы» или ABC-эффект. Сообщение о наблюдении ABC-«частицы» впервые было приведено в [31] (название этой частице было присвоено по первым буквам фамилий авторов Abashian, Booth, Crowe) в реакции:



при энергии падающих протонов от 624 до 743 МэВ. В распределении импульса ${}^3\text{He}$ в лабораторной системе координат наблюдался острый пик, который в дальнейшем был интерпретирован как проявление резонансной структуры в системе двух пионов при массе 315 МэВ. Поскольку не было найдено такого же четкого эффекта в реакции



то авторы работ пришли к выводу, что изоспин ABC-«частицы» равен нулю. Литература по экспериментальному изучению ABC-эффекта довольно богата, современное состояние вопроса отражено в обзоре [32]. Отметим, что этот эффект экспериментально исследовался в различных реакциях (авторы обзора [32] отмечают 54 реакции). ABC-эффект наблюдается только тогда, когда в продуктах реакции наряду с двумя пионами присутствует третья частица (или много частиц). Согласно этому обзору не исключается возможность существования четырех резонансноподобных состояний $I = 0$, $J^\pi = 0^+$ с большими ширинами при энергиях 315, 455, 550 и 750 МэВ. Следует особо отметить, что (в противоположность случаю дармштадтского эффекта, который вызвал большой поток теоретических работ) ABC-эффект остался фактически незамеченным.

Компиляция доступных нам экспериментальных данных и результаты их теоретического анализа приведены в табл.8.

Содержащиеся в табл.8 указания на возможность существования новых резонансов могут открыть чрезвычайно интересную область физики резонансов немного выше порогов рождения n -частиц, например двух, трех, четырех,... пионов, мезонов, нуклонов и т.д.

Обратимся к истории открытия резонансов. Так, ρ -мезон с массой 770 МэВ и шириной $\Gamma = 152$ МэВ был открыт [124] при изучении угловых и энергетических зависимостей $\pi\pi$ -рассеяния. ρ -мезон распадается на два пиона ($\approx 100\%$) и является единственным твердо установленным двухпионным резонансом с минимальной массой 770 МэВ. Изучение трехпионных систем привело к открытию $\omega(782)$ -мезона с $\Gamma = 8,4$ МэВ при рассеянии антипротонов на протонах [125] и $\eta(547)$ -мезона [126] с $\Gamma = 1,2$ кэВ в реакции $\pi^+ + d \rightarrow p + p + \pi^+\pi^-\pi^0$. Действительно, трехпионный канал распада является доминирующим для этих мезонов: для $\eta(547)$ -мезона 55%, для $\omega(782)$ -мезона 89%. Совсем недавно было объявлено [127] о наблюдении резонанса 0^- с массой (749 ± 30) МэВ и $\Gamma = (32 \pm 17)$ МэВ в системе трех

Таблица 8. Спектр масс дипионных резонансов (в МэВ)

Теория	Эксперимент $\pi\pi$
	315, $\Gamma = 25$ [32], 313 ± 3 [100]
	332 ± 3 [100]
361	350 ± 10 [120]
	395 [119], 400 [122], 388 ± 2 [100]
	425 [121]
	455 [32], 470 ± 7 [100]
537	550 [32], 520 [119]
	583 ± 3 [100]
	600, $\Gamma = 600$ [123]
	652 ± 2 [100]
743	750 [32], $769,9 \pm 0,8$, $\Gamma = 151,2 \pm 1,2$ [24]
959	980 ± 10 , $\Gamma =$ от 40 до 400 [24]
1180	1275 ± 5 , $\Gamma = 185 \pm 20$ [24]
1405	1465 ± 25 , $\Gamma = 310 \pm 60$ [24]

пионов в реакции $\pi^- + A \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^- + A$. Были предсказаны векторные мезоны ρ и ω (см. ссылки в обзоре [32]), а также было предсказано [128] существование резонанса 0^- с массой (749 ± 30) МэВ в системе трех мезонов, однако о возможности существования η -мезона никто и не подозревал.

Итак, нижайший резонанс в трехпионной системе — η -мезон имеет инвариантную массу, меньшую на 225 МэВ, чем масса нижайшего резонанса в двухпионной системе (ρ -мезона), при этом $\Gamma_\rho/\Gamma_\eta \approx 10^5$ [24]. Более того, все вышеупомянутые резонансы, имеющие доминирующие трехпионные каналы распада, живут гораздо дольше, чем ρ -мезон. Далее, $\eta'(958)$ -мезон, распадающийся преимущественно на $\pi\pi\eta$ (65%), имеет ширину 200 кэВ, то есть живет дольше ρ -мезона в 760 раз.

Приведем еще один интересный пример. Дипионные массовые распределения, наблюдаемые при распаде Y -мезонов, невозможно объяснить в рамках существующих теоретических моделей (см. обзор [129]). Так, при распаде $Y(3S) \rightarrow Y(2S) + \pi^+\pi^-$ наблюдается пик в распределении масс двух пионов при энергии (350 ± 10) МэВ [120], а при распаде $Y(2S) \rightarrow Y(1S) + \pi^+\pi^-$ при энергии ≈ 310 МэВ [130]. Более того, при распаде $Y(3S) \rightarrow Y(1S) + \pi^+\pi^-$ наблюдаются два пика — при энергиях ≈ 400 и ≈ 800 МэВ [130] соответственно. Следовательно, система из двух пионов при наличии третьей частицы проявляет резонансные свойства при более низких значениях инвариантной массы двухпионной подсистемы по сравнению со случаем свободного $\pi\pi$ -взаимодействия.

Резюме: ABC-эффект, как и дармштадтский эффект, наблюдается только в случае присутствия третьей частицы (или частиц).

Для полноты картины приведем несколько примеров, хорошо известных в ядерной физике низких энергий. Два протона не имеют связанного состояния, упругое рассеяние протона на протоне при малых энергиях не проявляет никаких особенностей, однако есть экспериментальные указания на то, что в реакции $p + n \rightarrow (pp) + \pi^-$ при инвариантной массе двух протонов $(1877,5 \pm 0,5)$ МэВ [116] наблюдается узкая статистически обеспеченная нерегулярность. В работе [131] наблюдался дипротонный резонанс в реакции $dd \rightarrow 2n + (2p)$: пиковое значение энергии развала резонанса — $(0,43 \pm 0,09)$ МэВ, среднее ее значение — $(0,45 \pm 0,05)$ МэВ, полная ширина резонанса — $(0,14 \pm 0,13)$ МэВ. При добавлении к двум протонам нейтрона образуется связанная система (тритон) с полной энергией связи 8,48 МэВ. В реакции ${}^{11}\text{Li} \rightarrow {}^9\text{Li} + (nn)$ обнаружена [132] резонансноподобная структура в системе двух нейтронов при энергии относительного движения 50 кэВ или при импульсе $P = 5$ МэВ/с в СЦИ двух нейтронов. Следовательно, в этом случае дебройлевская длина волны нейтрона равна ≈ 40 фм, т.е. **эффективное расстояние между двумя нейтронами ≈ 40 фм**. Известно, что тритон t не имеет резонансных состояний (сечение упругого $p + d$ -рассеяния не имеет никаких особенностей), однако в реакции ${}^6\text{He} + n \rightarrow \alpha + t$ обнаружен [133] резонанс у тритона с $E^* = (7,0 \pm 0,3)$ МэВ и шириной $\Gamma = (0,6 \pm 0,3)$ МэВ.

Интенсивные исследования дармштадтского эффекта начались немедленно после обнаружения [33] узких позитронных пиков при рассеянии тяжелых ионов. Экспериментальные значения спектра масс e^+e^- приведены в табл.9. Узкие резонансы в суммарном позитрон-электронном спектре наблюдались группой ORANGE [134] для систем $U + Ta$ с энергией пиков $E_{e^+} + E_{e^-} = (634 \pm 5,803 \pm 6)$ кэВ, $U + Pb$ с энергией пиков $E_{e^+} + E_{e^-} = (575 \pm 6,787 \pm 8)$ кэВ и $U + U$ с энергией $E_{e^+} + E_{e^-} = (555 \pm 8,630 \pm \pm 8,815 \pm 8)$ кэВ. Группа EPOS [135] наблюдала пики при энергиях 620, 750 и 810 кэВ. Для резонанса с энергией 634 кэВ, наблюдаемого при столкновении $U + Ta$, были проведены измерения угловых корреляций лептонов. Результаты этих измерений противоречат предположению о распаде нейтральной свободной частицы с нулевым спином (гипотетического аксиона). Некоторые e^+e^- -пики свидетельствуют о разлете частиц на 180° , что обычно интерпретируется как соответствие сценарию распада свободной частицы, движущейся со скоростью центра масс сталкивающихся ионов. В работе [134] сделан вывод о том, что электрон-позитронная пара не может излучаться из движущегося отдельного ядра и что она излучается в окрестности третьего тяжелого положительно заряженного партнера, движущегося с ма-

Таблица 9. Распределение импульсов P (МэВ/с) и масс (МэВ) для дипротонных, пионных и e^+e^- -резонансов

$P(NN)$	$m(NN)$	$P(\pi\pi)$	$m(\pi\pi)$	$P(e^+e^-)$	$420 * P(e^+e^-)$	$m(e^+e^-)$
20	1877	71	313			
29	1877,5	90	332			
94	1886	105	350			
120	1892	140	395			
155	1902	160	425			
193	1916	206	497	0,4637	195	1,380
230	1932	237	550	0,5476	230	1,498
250	1942	255	583	0,5992	252	1,575
274	1955			0,6553	275	1,662
298	1969	295	652	0,7029	295	1,738
316	1980			0,7566	318	1,826
344	1999	348	750	0,8109	341	1,917
368	2016	359	770			
394	2035					
415	2052					
457	2087					
477	2106	470	980			
502	2129					
529	2155					
547	2172					
568	2194					
593	2220					
609	2238	619	1270			
649	2282					
670	2307					
707	2350	711	1450			

лой трансверсальной скоростью ($|v_{\pm}| < 0,02$ с). Наконец, имеются указания на то, что сечение процесса, как функция энергии налетающих ионов, имеет резонансный характер.

В табл.9 приведены импульсы P для дипротонных, дипионных и e^+e^- -резонансов (см. также рис.8). Для дипротонных и e^+e^- -резонансов в распределении P наблюдается четкая регулярная структура с интервалом ≈ 25 МэВ/с и ≈ 53 кэВ/с соответственно. Что же касается дипионных резонансов, то здесь трудно прийти к определенному выводу из-за большой неопределенности масс и ширин этих резонансов, хотя при желании можно было бы и в этом случае усмотреть некую регулярность в распределении P . Из табл.9 и рис.8 можно заключить, что действительно наблюдается

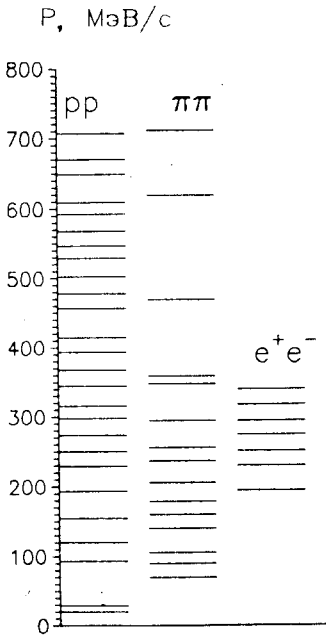


Рис.8. Значения импульсов P для продуктов распада резонансов в системах pp , $\pi\pi$ и e^+e^- , вычисленные из соотношения (64) при экспериментальных значениях масс резонансов

подобие между распределениями $P(pp)$ и $P(e^+e^-)$ для дипротонных и e^+e^- -резонансов. Из сравнения экспериментальных данных между $P(pp)$ и $P(e^+e^-)$ следует, что

$$P(pp) = 420P(e^+e^-). \quad (65)$$

Тем самым определяются значения $P(e^+e^-)$ из экспериментальных данных по протон-протонным и антипротон-протонным резонансам. Инвариантные массы для e^+e^- -резонансов легко вычисляются по таким образом определенным импульсам $P(e^+e^-)$ -пар. Полученные результаты и сравнение с экспериментальными данными по инвариантным массам представлены в табл.10. Как видно

из табл.10, погрешность описания экспериментальных данных составляет менее одного процента. При этом в излагаемом подходе содержится только один варьируемый параметр — параметр масштабного преобразования ξ (см. определение (63а)). В рассматриваемом случае он оказался равным 420.

Наблюдается также подобие между распределениями импульсов $P(pp)$ и $P(\pi\pi)$ для дипротонных и дипионных резонансов (см. табл.9 и рис.8) с параметром масштабного преобразования $\xi \approx 1$.

Итак, имеет место инвариантность дипротонных, дипионных и e^+e^- -резонансов по отношению к преобразованию (63). В первых случаях она выполняется для сильновзаимодействующих систем, а в последнем случае — для системы с электромагнитным взаимодействием. Другими словами, инвариантность относительно преобразования (63) и принцип автомодельности справедливы для всех рассмотренных в настоящем обзоре резонансов независимо от вида взаимодействия.

Таким образом, на основании вышеизложенного мы подходим к выводу о том, что дармштадтский эффект должен интерпретироваться как резонанс в системе e^+e^- в присутствии третьего (тяжелого) партнера, в полной аналогии с физикой дипионов. Исходя из принципа неопределенности Гейзен-

Таблица 10. Спектр масс e^+e^- -резонансов (в кэВ). Параметр подобия $\xi = 420$

Теория	Эксперимент
1026	1043 [138]
1031	1062 [138], 1067 [137]
1116	
1172	
1260	
1375	1380 [134]
1497	1498
1568	1532 [136], 1575 [134]
1657	1662 [136,139], 1652 [134]
1749	1738 [136]
1818	1831, 1837 [134]
1932	1917 [136]
2029	
2134	
2225	
2402	

берга, мы можем оценить характерные размеры e^+e^- -резонансов: 200—4000 фм. Следовательно, e^+e^- -резонансы имеют большие размеры — порядка и больше длины комптоновской волны электрона (386 фм), что полностью согласуется с концепцией квантования асимптотического импульса.

Подобная трактовка дармштадтского эффекта позволяет количественно оценить такую важную характеристику, как величина переданного импульса. В эксперименте среднее значение переданного лептонам импульса равно 800—1000 кэВ/с [134] для резонанса с массой 1652 кэВ, что по порядку величины хорошо согласуется с теоретической оценкой 650 кэВ/с.

Следовательно, дармштадтский эффект может быть объяснен в рамках традиционных физических представлений без введения гипотез о существовании аксионов или каких-либо иных новых «элементарных частиц». Отметим, что в ядерной физике и в физике элементарных частиц имеется много других резонансных явлений, аналогичных дармштадтскому и АВС-эффекту.

Резюмируем вышесказанное следующим образом:

1) Резонансы в субатомных системах подчиняются принципу подобия, в силу которого длины волн де Бройля и Комптона соизмеримы.

2) Во всех исследованных случаях резонансы возникали при условии соизмеримости длины волны де Бройля с геометрическими размерами системы, независимо от физической природы взаимодействия.

3) Дармштадтский эффект и ABC-эффект находят простое и естественное объяснение в рамках предложенной концепции. Они объясняются возникновением резонансов в волновой системе, которая оказалась локализованной в пространстве из-за наличия силового центра (третьей частицы или нескольких дополнительных частиц).

8. ЭКЗОТИЧЕСКИЕ БАРИОННЫЕ РЕЗОНАНСЫ

Простейшим возможным мультикварковым состоянием является система $q^2\bar{q}^2$, введенная в [140]. Даже для таких простых систем вычисления в рамках решеточной и других вытекающих из КХД моделях (ссылки см. в [26]) недостаточно точны, чтобы дать удовлетворительный результат. Недавние вычисления [26]) ограничены только случаем $L = 0$ $q^2\bar{q}^2$. Здесь мы хотим представить результаты вычислений [141] и сделать некоторые предсказания по поводу новых кандидатов — резонансов, а также сравнить их с существующими экспериментальными данными, которые имеются в нашем распоряжении. Следует отметить, что многочастичный распад можно рассматривать как цепь бинарных распадов: двухчастичный распад первичного резонанса на два кластера, затем распад этих кластеров снова на две частицы и т.д. Это согласуется с общепринятой моделью рождения мультичастиц через распад промежуточных резонансов. Поэтому многочастичный распад можно интерпретировать как разветвляющийся процесс, в котором промежуточные резонансы играют существенную роль. Такой подход указывает путь для использования массовой формулы (24) при изучении многочастичных распадов резонансов. Указанное приближение дает простейший способ для оценки инвариантных масс резонансов, распадающихся на мультичастицы.

Хорошо известно, что барионные резонансы не распадаются по каналу $N\omega^0$, но резонансная структура наблюдается (см. [142]) в $p\pi^+\pi^-\pi^0$ -системе с массой (1780 ± 40) МэВ и шириной (250 ± 80) МэВ в области ω^0 -резонанса в $\pi^+\pi^-\pi^0$ -системе. Этот резонанс был объяснен как проявление экзотической структуры $uuds\bar{s}$. Мы предлагаем трактовать структуру $N^*(1780)$ -резонанса как молекулярное состояние системы $p\omega^0$ (см. табл.11). N^* -резонанс с массой 1700 МэВ и шириной 150 МэВ был приведен в работе [143]. Он распадается по каналам $p\eta$, $\Delta 2\pi$ и $p3\pi$.

Современный статус узких экзотических барионных резонансов представлен в обзорной статье [25]. Поэтому ниже мы приводим только результаты вычислений в совокупности с экспериментальными данными [25] и краткими замечаниями.

Таблица 11. Спектр инвариантных масс (МэВ) для $p\pi^+\pi^-\pi^0 \equiv \rho\omega^0$ -резонансов

	$n + \gamma$	1/2	1	1 + 1/2	2	2 + 1/2	3	3 + 1/2	4
M	теория	1736	1781	1854	1951	2069	2205	2355	2517
	эксп.	1700	1780						
		[143]	[142]						

Таблица 12. Спектр инвариантных масс (МэВ) для $\Sigma(1385)K$ -резонансов

	$n + \gamma$	1/2	1	1 + 1/2	2	2 + 1/2	3	3 + 1/2	4
M	теория	1897	1948	2029	2133	2255	2392	2542	2702
	эксп.		1956	2050					
			[144]	[145]					

Резонанс в системе $\Sigma(1385)K$ с инвариантной массой 1956_{-6}^{+8} МэВ и шириной (27 ± 15) МэВ впервые наблюдался авторами работы [144] и был интерпретирован как $N_\phi(1960)$ -барион. Структура этого резонанса рассматривалась в работе [144] в качестве кандидата на экзотический барионный резонанс со скрытой странностью ($udd\bar{s}\bar{s}$). Резонанс с массой (2050 ± 6) МэВ и шириной ≈ 120 МэВ в работе [145] рассматривался как новый барион со скрытой странностью. Эти выводы следует считать предварительными, требующими подтверждения дальнейшими измерениями с увеличенной статистикой.

Некоторые резонансноподобные структуры с массой 2170 МэВ и $\Gamma \approx 110$ МэВ наблюдались в эксперименте [145] для $p\phi^-$ и $\Lambda(1520)K^+$ -систем. Оба этих экспериментальных спектра имеют подобный характер, и рассматриваемая в настоящем обзоре модель описывает их хорошо. $p\phi^-$ и $\Lambda(1520)K^+$ -системы имеют резонансы при массе 2160 и 2162 МэВ соответственно (см. табл.13), и в результате когерентная сумма амплитуд двух резонансов дает резкий пик в экспериментальном спектре. Совершенно непонятно, как интерпретировать эти резонансы в рамках других существующих моделей. Карнаухов и др. [146] наблюдали резонансноподобную структуру в системе $K_s^0 K^+ p\pi^-\pi^-$ с массой (3521 ± 3) МэВ и шириной 6_{-6}^{+21} МэВ. Статистическая значимость наблюдаемой структуры равна 10σ . Эта структура имеет нулевую странность и названа $R(3520)$ -барионом. $R(3520)$ -барион имеет существенно большую массу, чем порог для системы $K_s^0 K^+ p\pi^-\pi^-$, и рассматривается в работе [146] в качестве кандидата на пятикварковое состояние. Мы можем интерпретировать его как проявление квазимолекулярного резонанса для многочастичной системы $K_s^0 K^+ p\pi^-\pi^-$. Существует много

Таблица 13. Спектр инвариантных масс (МэВ) для $\Lambda(1520)K$ -резонансов

	$n + \gamma$	1/2	1	1 + 1/2	2	2 + 1/2	3	3 + 1/2	4
М	теория эксп.	2031	2081	2160 2170 [145]	2261	2380	2514	2660	2816

Спектр инвариантных масс (МэВ) для $\phi\rho$ -резонансов

	$n + \gamma$	1/2	1	1 + 1/2	2	2 + 1/2	3	3 + 1/2	4
М	теория эксп.	1972	2011	2075	2162 2170 [145]	2269	2393	2532	2683

комбинаций, которые, в принципе, можно проверить экспериментально. Например, комбинации $((\bar{K}^0 p)_{1520} K^+)_{2031} (\pi^- \pi^-)_{361}$ с оценочной массой 3532 МэВ или $((\bar{K}^0 \pi^-)_{892} K^+)_{1406} p)_{2446} \pi^-$ с оценочной массой 3539 МэВ можно считать претендентами на такую структуру. Следовательно, некоторые квазимолекулярные состояния могут перекрываться при массе 3520 МэВ и давать резкий пик в результате когерентного сложения амплитуд. Большинство экспериментальных данных в области странных барионов было получено на пропановой пузырьковой камере дубненской коллаборацией (см. работу [147] и ссылки в ней). Результаты вычислений в рамках нашей модели хорошо согласуются с этими экспериментальными данными.

Ранее указывалось (см. ссылки в работе [148]) на возможное существование узкого бариониама (обозначенного M_S для систем $\Lambda\bar{p}\pi$, $\Lambda\bar{p}\pi\pi$ с $S = -1$ и \bar{M}_S для систем $\bar{\Lambda}p\pi$, $\bar{\Lambda}p\pi\pi$ с $S = +1$) с массой $(3060 \pm 5(\text{st.}) \pm 20(\text{syst.}))$ МэВ и шириной не больше чем (35 ± 5) МэВ. Этот результат подтверждают данные WA-62 [149]. Инвариантные массы резонансов в нашей модели не зависят от странности. Поэтому, например, системы $\Lambda\bar{p}\pi$, $\bar{\Lambda}p\pi$ и $\Lambda p\pi$ должны иметь почти одинаковые инвариантные массы. Предсказанная в нашей модели масса таких систем равна 3030 МэВ (см. табл.14). Она близка к значению, приведенному в работе [148]: $(3060 \pm 5(\text{st.}) \pm 20(\text{syst.}))$ МэВ.

Узкий бариониама M_Φ [148] наблюдался в массовом спектре $\Lambda\bar{p}K\pi$, $\bar{\Lambda}pK\pi$, $\bar{\Lambda}p\bar{K}$, $\bar{\Lambda}pK$, $p\bar{p}K\bar{K}$ с массой $(3260 \pm 5(\text{st.}) \pm 20(\text{syst.}))$ МэВ и шириной $\Gamma \leq (35 \pm 5)$ МэВ. Существует много возможных квазимолекулярных резонансов с очень близкими массами. Например, состояние $(\Lambda\bar{p})_{2166} \bar{K}$ с массой 3251 МэВ, $((p\bar{p})_{1890} K)_{2448} \bar{K}$ -состояние с массой 3270 МэВ и $((\bar{\Lambda}p)_{2067} K)_{2624} \pi$ -состояние с массой 3275 МэВ. Все эти квазимолекулярные состояния подсистем могут иметь резонансы с почти одинаковыми массами,

Таблица 14. Массы резонансов (МэВ), распадающихся по каналам $p\Lambda$, $(p\Lambda)_{2067\pi}$, $((p\Lambda)_{2067\pi})_{2250\pi}$, $((p\Lambda)_{2067\pi})_{2250\pi})_{2434\pi}$

$n + \gamma$	Распад $p\Lambda$		Распад $p\Lambda\pi$		Распад $p\Lambda\pi\pi$		Распад $p\Lambda\pi\pi\pi$	
	эсп.	теор.	эсп.	теор.	эсп.	теор.	эсп.	теор.
1/2	2095 [147]	2067		2250		2434		2617
1	2129 [147]	2105		2348		2530		2713
1 + 1/2	2181 [147]	2166	2495 [147]	2466		2647		2829
2	2224 [147]	2250		2595		2775		2956
	2263 [147]							
2 + 1/2	2357 [147]	2353		2734		2912	3100 [149]	3090
3	2500 [24]*	2473		2879	3060 [148]	3054		3230
3 + 1/2		2608	3060 [148]	3031		3203		3376
4		2755		3188		3357		3528

*Значение массы 2500 МэВ взято из работы [24] для $p\bar{\Lambda}$ -системы.

Таблица 15. Массы резонансов (МэВ), распадающихся по каналам $\Lambda\Lambda$, $(p\Lambda)_{2067\Lambda}$, $\Lambda(\pi\pi)_{361}$, Σp

$n + \gamma$	Распад $\Lambda\Lambda$		Распад $p\Lambda\Lambda$		Распад $\Lambda\pi\pi$		Распад Σp	
	эсп.	теор.	эсп.	теор.	эсп.	теор.	эсп.	теор.
1/2		2243		3192		1500		2148
1	2290 [150]	2278		3219		1566	2173 [147]	2185
1 + 1/2	2365 [147]	2335		3263	1704 [147]	1666	2218 [147]	2245
2		2412		3323		1789		2326
2 + 1/2		2508		3393		1931	2408 [147]	2426
							2384 [147]	
3		2621		3489	2071 [147]	2087		2544
3 + 1/2		2748	3568 [147]	3591		2253		2675
4		2887		3705		2428		2819
4 + 1/2		3038		3829	2604 [147]	2611		2974
5		3198		3962		2800		3138

и именно это обуславливает большую величину пика рассматриваемого резонанса. Очень интересно исследовать мультибарионные резонансы. В частности, мы хотели бы упомянуть резонанс, наблюдаемый в трехпротонной системе [151], с массой $(3,27 \pm 0,02)$ ГэВ и шириной $(0,07 \pm 0,04)$ ГэВ. Масса, вычисленная в рамках нашей модели, равна 3288 МэВ для квази-молекулярного $((pp)_{1890}p)$ -состояния.

В настоящее время имеются экспериментальные данные [152] по возникновению квазистационарных состояний для многонуклонных (кластеры

содержат до 6 нуклонов) систем. Поэтому изучение кластеров как мульти-частичного резонанса является широкой и интересной областью физики.

9. ПЛОТНОСТЬ МЕЗОННЫХ СОСТОЯНИЙ

Для вычисления числа и плотности мезонных состояний, достаточно хорошо установленных экспериментально [24] (за исключением странных мезонов из-за их скудной статистики), как функций их инвариантных масс можно использовать простейшую версию метода силовых функций [40] (детали см. в монографии [18]).

Рассмотрим плотность мезонных резонансных состояний как сумму нормированных распределений Брейта — Вигнера:

$$\frac{dN}{dm} = \frac{1}{2\pi} \sum_i (2J_i + 1)(2I_i + 1) \frac{\Gamma_i}{(m - m_i)^2 + \Gamma_i^2/4}, \quad (66)$$

где m_i и Γ_i — массы и ширины экспериментально наблюдаемых мезонных резонансных состояний [24]. На рис.9 представлена плотность мезонных резонансных состояний как функция массы m (сплошная кривая). Видно, что эта плотность имеет регулярную периодически осциллирующую структуру с периодом $\Delta m \approx 200$ МэВ (предсказанную в работе [38]) в области легких бесцветных мезонов ($S = C = B = 0$), ψ - и Υ -мезонов.

Результаты наших вычислений коррелируют с экспериментальными данными (см. рис.9; звездочки — вычисленные положения «центра тяжести» n -пионных резонансов) за исключением области дипионной массы

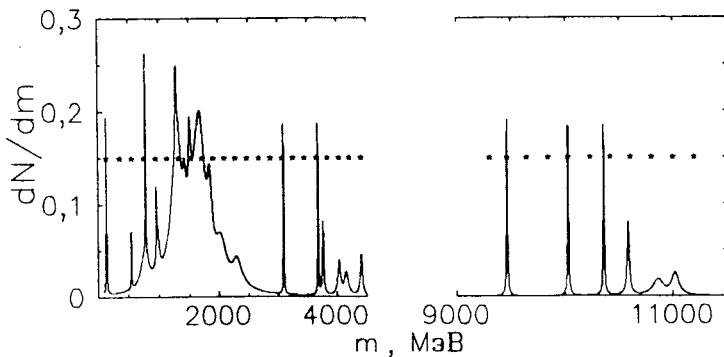


Рис.9. Распределение плотности хорошо установленных экспериментально мезонных состояний (сплошная кривая) и положение «центров тяжести» n -пионных резонансов, вычисленных по формуле (24)

$m(\pi\pi)_S = 360$ МэВ и области б-пионной $\eta\eta$ -массы, $m(\eta\eta)_S = 1118$ МэВ. По всей видимости, эти области требуют более внимательного экспериментального исследования (см. выше). Из рис.9 хорошо видно, что массовый спектр нижних резонансов имеет почти эквидистантный характер, и расстояние между резонансами («центрами тяжести» резонансов) равно ≈ 200 МэВ, если эти резонансы создаются последовательным добавлением пионов. Добавление K -мезонов дает расстояние около 500 МэВ ($m_{\text{theor}}(K^+K^-)_S = 1014$ МэВ, $m_{\text{theor}}((K^+K^-)_S K)_S = 1533$ МэВ, $m_{\text{theor}}((K^+K^-)_S (K^+K^-)_S)_S = 2052$ МэВ); добавление D -мезонов — 1900 МэВ; добавление B -мезонов — около 5300 МэВ и т.д. В рамках изложенной схемы высоколежащие вращательноподобные состояния должны быть основаны на нижних резонансах [38].

Современный статус ψ -мезонов был представлен в обзорном докладе [153]. ψ -системы можно рассматривать, используя следующие приближения:

1. Свойства этой системы обычно описывают как радиально возбужденные $c\bar{c}$ -состояния (детали см. в [153]).

2. Распределение масс такой системы можно оценить в рамках рассмотренной выше концепции, используя формулу (24) для расчета массы n -пионного резонанса. В этом случае состояние $((8\pi)_S(8\pi)_S)_P$ с массой 3100 МэВ выглядит подходящим кандидатом на $J/\psi(3097)$ -состояние; состояния $(J/\psi(3097)\pi)_S$, $(J/\psi(3097)(2\pi))_S$ и $(J/\psi(3097)(6\pi))_S$ с массами 3280, 3478 и 4240 МэВ соответственно не наблюдались в эксперименте. Состояние $(J/\psi(3097)(4\pi))_S$ с массой 3866 МэВ, возможно, наблюдалось: имеются некоторые указания на существование состояния с массой 3836 МэВ [154]. Состояния $(J/\psi(3097)(3\pi))_S$, $(J/\psi(3097)(5\pi))_S$ и $(J/\psi(3097)(7\pi))_S$ с массами 3668, 4053 и 4438 МэВ могут быть продуктами распада состояний $\psi(3685)$, $\psi(4040)$, $\psi(4415)$ соответственно. Результаты наших вычислений показаны на рис.9.

3. ψ -мезоны (по крайней мере, некоторые из них) можно рассматривать как димезоны в P -состоянии $(D\bar{D})_P$, $(D\bar{D}^*)_P$, $(D^*\bar{D}^*)_P$, или молекулярные состояния в соответствии с предположениями, сделанными Волошиным и Окунем [155], подобно $K\bar{K}$ -молекулярному описанию $f_0(975)$ -, $\alpha_0(980)$ -резонансов, предложенному в работе [156]. Экспериментальные данные и наши вычисления по формуле (24) показывают, что состояния $\psi(3770)$ и $\psi(4040)$ являются кандидатами на такое димезонное молекулярное состояние. Наша модель успешно описывает массы этих резонансов (см. табл.16); состояние $(D\bar{D}^*)_P$ с массой 3906 МэВ (наша оценка) не наблюдалось в эксперименте.

Таблица 16. Вычисленные массы (МэВ) некоторых ψ -мезонов

$\eta_c(2980), I^G(J^{PC}) = 0^+(0^{-+})$					
Канал распада	Доля Γ_i/Γ	P (эксп.)	P (теория)	m (теория)	$n + \gamma$
$(\omega(1390)\omega(1600))_S$	—	—	115	2999	1/2
$((\phi\phi)_S\eta'(958))_S$	—	—	115	3021	1/2
$J/\psi(3097), I^G(J^{PC}) = 0^-(1^{-})$					
Канал распада	Доля Γ_i/Γ	P (эксп.)	P (теория)	m (теория)	$n + \gamma$
$((8\pi)_S(8\pi)_S)_P$	—	—	229	3100	1
$(\Xi(1530)\Xi(1530))_P$	—	—	229	3098	1
$\psi(3686), I^G(J^{PC}) = ?^?(1^{-})$					
Канал распада	Доля Γ_i/Γ	P (эксп.)	P (теория)	m (теория)	$n + \gamma$
$(J/\psi(3097)\eta(547))_S$	2,7%	196	115	3658	1/2
$(J/\psi(3097)(\pi^0\pi^0)_S)_D$	18,4%	481	—	3704	2
$(J/\psi(3097)(\pi^+\pi^-)_S)_D$	32,4%	477	—	3714	2
$\psi(3770), I^G(J^{PC}) = ?^?(1^{-})$					
Канал распада	Доля Γ_i/Γ	P (эксп.)	P (теория)	m (теория)	$n + \gamma$
$(D\bar{D})_P$	преобладает	242	229	3766	1
$\psi(4040), I^G(J^{PC}) = ?^?(1^{-})$					
Канал распада	Доля Γ_i/Γ	P (эксп.)	P (теория)	m (теория)	$n + \gamma$
$D^0\bar{D}^0$	видна	774	803	4059	3 + 1/2
$D^*(2010)^0\bar{D}^0$	видна	577	574	4040	2 + 1/2
$(D^*(2010)^0\bar{D}^*(2010)^0)_P$	видна	228	229	4040	1
$\psi(4160), I^G(J^{PC}) = ?^?(1^{-})$					
Канал распада	Доля Γ_i/Γ	P (эксп.)	P (теория)	m (теория)	$n + \gamma$
$(\psi(3770)(\pi^+\pi^-)_S)_S$	не видна	—	115	4150	1/2
$\psi(4415), I^G(J^{PC}) = ?^?(1^{-})$					
Канал распада	Доля Γ_i/Γ	P (эксп.)	P (теория)	m (теория)	$n + \gamma$
$(23\pi)_S$	не видна	—	—	4416	1/2

Наконец, ψ -мезоны могут иметь молекулярные состояния в канале трех-мезонного распада (1^{-}). В связи с этим мы предлагаем следующих кандидатов:

для $\eta_c(2980)$ -распада — система $[[\eta'(958)\eta'(958)]_P\eta'(958)]_P$ с массой 2970 МэВ,

для $J/\psi(3097)$ — система $[[\phi(1020)\phi(1020)]_S\phi(1020)]_S$ с массой 3082 МэВ,

для $\psi(3686)$ — система $[[\phi(1020)\phi(1020)]_S\omega(1600)]_S$ с массой 3660 МэВ.

Современный статус Υ -мезонов был представлен в обзорной работе [157]; см. также результаты коллаборации CLEO [158]. Боттомониум обычно рассматривают как радиально возбужденную $b\bar{b}$ -систему. Наши результаты, полученные в рамках изложенной выше модели, представлены на рис.9. Они хорошо коррелируют с экспериментальными данными за исключением области масс 9640, 9840 и 10227 МэВ. Подобно случаю чармониума, димезонное $(B\bar{B})_P$ молекулярное состояние с массой 10568 МэВ может быть представлено в соответствие с $\Upsilon(10580)$. Димезонные состояния $(B\bar{B}^*)_P$ и $(B^*\bar{B}^*)_P$ с массами 10614 и 10660 МэВ соответственно не наблюдались в эксперименте.

Наконец, Υ -мезоны могут иметь молекулярные состояния в канале трех чармониум-мезонного (1^-) распада. Мы предлагаем следующих кандидатов:

- для $\Upsilon(10023)$ -распада — система $[[J/\psi(3097)J/\psi(3097)]_S\psi(3770)]_S$ с массой 9971 МэВ,
- для $\Upsilon(10355)$ -распада — система $[[J/\psi(3097)J/\psi(3097)]_S\psi(4160)]_S$ с массой 10361 МэВ,
- для $\Upsilon(10580)$ -распада — системы $[[J/\psi(3097)J/\psi(3097)]_S\psi(4415)]_S$ и $[[J/\psi(3097)\psi(3685)]_S\psi(3770)]_S$ с массами 10615 и 10559 МэВ соответственно,
- для $\Upsilon(10860)$ -распада — система $[[J/\psi(3097)\psi(3685)]_S\psi(4040)]_S$ с массой 10829 МэВ.

До сих пор не наблюдались следующие системы:

- 1) $[[\eta_c(2980)\eta_c(2980)]_P\eta_c(2980)]_P$ с массой 8971 МэВ,
- 2) $[[J/\psi(3097)J/\psi(3097)]_S J/\psi(3097)]_S$ с массой 9298 МэВ,
- 3) $[[J/\psi(3097)J/\psi(3097)]_S\psi(3685)]_S$ с массой 9886 МэВ (есть некоторые указания на существование такого состояния [159]),
- 4) $[[J/\psi(3097)J/\psi(3097)]_S\psi(4040)]_S$ с массой 10241 МэВ,
- 5) $[[J/\psi(3097)\psi(3685)]_S\psi(4415)]_S$ с массой 11203 МэВ (есть некоторые указания на существование такого состояния [160]).

Мы продемонстрировали, что трехмезонные (1^-) молекулярные состояния в каналах распада должны играть существенную роль при изучении массовых распределений ψ - и Υ -мезонов. Интересно, что ψ -частицы приблизительно в 3 раза тяжелее, чем ϕ - и ω -частицы. Υ -частицы приблизительно в 9 раз тяжелее, чем ϕ - и ω -частицы, и в 3 раза тяжелее, чем ψ -частицы.

Основной характерной чертой таких состояний молекулярного типа является то, что относительный импульс в любой бинарной системе очень

мал: ~ 100 МэВ/с. Поэтому мы имеем дело с низкоэнергетическими резонансами, требующими дальнейшего исследования.

Это дает основания сделать следующее предположение: трехмезонные (1^-) молекулярные состояния могут находиться в областях $27 \div 33$ ГэВ, $81 \div 100$ ГэВ (область W - и Z -бозонов), $240 \div 300$ ГэВ и т.д.

Наконец, интересно отметить, что молекулярные состояния в каналах трехчастичного распада существуют также для различных мезонных и барионных резонансов. Мы указываем здесь в качестве примера некоторые из них:

для $\eta(547)$ -распада — система $[[\pi\pi]_S\pi]_S$ с массой 556 МэВ,

для $\eta'(958)$ -распада — система $[[\pi\pi]_S\eta]_S$ с массой 938 МэВ,

для $N(1440)P_{11}$ -распада — система $[[N\pi]_P\pi]_S$ с массой 1420 МэВ,

для $N(1520)D_{13}$ -распада — система $[[N\pi]_P\pi]_P$ с массой 1522 МэВ,

для $(PP\pi)(2065)$ -распада $[161, 162]$ — система $[[pp]_S\pi]_S$ с массой 2076 МэВ.

10. ПАРАДИГМЫ ПОДОБИЯ

Из изложенного материала видно, что многие свойства адронных резонансов можно понять на основе глубокой физической аналогии с теорией α -распада, с теорией резонансных явлений в ядерной физике. Резонансы мы рассматриваем как результат возбуждения собственных колебаний взаимодействующих систем для случая их инфинитного движения. С понятием «автомодельность» предлагаемую закономерность (21) роднит то, что рассматриваются симметрии решений и свойства граничных условий. Соизмеримость длин волн рассеиваемых частиц с характерными размерами взаимодействующих или образующихся систем (или, другими словами, соизмеримость длин дебройлевских и комптоновских волн) приводит к квантованию импульса и простой формуле спектра масс резонансов типа серий атомных и ядерных линий. Тем самым установлено подобие спектров адронных резонансов, ядерных и атомных спектров.

Приведем еще один интереснейший пример, малоизвестный в физике высоких энергий. Мы имеем в виду физику так называемых металлических кластеров, обнаруженных сравнительно недавно — в 1984 г. Выяснилось, что атомы некоторых металлов образуют связанные системы, состоящие из огромного числа атомов (до 20000). В экспериментах [163] было показано, что в металлических кластерах существуют оболочки, причем с **такими же магическими числами, как в атомных ядрах и атомах**. Это открытие означает, что в природе существует еще одна малая система, обладающая средним полем. Сейчас можно считать общепринятым (по крайней мере,

большинство расчетов проведены в таком представлении), что металлические кластеры представляют собой систему валентных электронов, движущихся в среднем поле положительно заряженных ионов (см. обзоры [164—166] и оригинальные статьи [167, 168]). Наличие среднего поля и, как результат, наличие оболочечных эффектов приводит к тому, что металлические кластеры имеют ряд общих подобных свойств (спектров) как с адронными резонансами, так и с атомами, ядрами и твердым телом. Таким образом, металлические кластеры представляют собой уникальное явление, находящееся на стыке физики элементарных частиц, атомной и ядерной физики, а также физики твердого тела, кристаллографии, термодинамики, квантовой и классической статистической физики и т.д. Поэтому здесь следует ожидать появления новых интересных результатов (см. обзоры [164—166]). Например, в работе [165] уже сделана попытка проследить переход от атома к твердому телу и понять, на каком этапе металлический кластер представляет собой уже «эмбрион» твердого тела, несущий в себе его основные свойства.

Физическая природа такого подобия спектров большого числа разнообразных систем сейчас понятна. Оболочки в ядрах, атомах и металлических кластерах являются общим характерным свойством квантовых замкнутых систем, и сейчас считается общепринятой точка зрения, что оболочки появляются как результат возникновения замкнутых периодических орбит движения частицы в замкнутой полости. Эти орбиты размываются и запутываются из-за квантовых флуктуаций системы, и выживают только простейшие орбиты. Эти орбиты можно интерпретировать как колебания с близкими частотами и амплитудами. Когерентная интерференция этих амплитуд приводит к появлению эффекта биения результирующей амплитуды. В этом состоит физическая суть оболочек.

В связи с вышесказанным возникает вопрос о возможности существования оболочечных эффектов в распределении масс резонансов элементарных частиц. Представленные выше экспериментальные данные (см. рис.9), по всей видимости, не противоречат такой гипотезе. Однако эта гипотеза требует дальнейшей проверки.

Первоначальная теория атома водорода, по существу, была построена Бором по аналогии с планетарной Солнечной системой и называлась «планетарная теория атома водорода». Это было стартовой точкой развития современной квантовой теории или «волновой механики» по старой терминологии. Наоборот, по аналогии с теорией водородоподобных атомов сейчас начинают рассматривать Солнечную систему как волновую динамическую систему [169]. При этом оказалось, что спектр волновых частот Солнечной системы можно представить в форме, напоминающей схему спектроскопических уровней водородоподобного атома. Концепция волнового

резонанса Солнечной системы оказалась весьма успешной при описании ритмов аэродинамики (подробности см. в [169]).

Метод аналогии очень широко и успешно применяется при исследовании самых разнообразных явлений. Хорошо известна «тройная аналогия». Родственность процессов переноса теплоты (теплообмен), вещества (массообмен) и количества движения (гидродинамическое сопротивление) при определенных условиях проявляется в виде подобия полей скорости, температуры и концентрации. Во многих учебниках приводятся примеры электрогидродинамической и электротепловой аналогий. Электрическая аналогия является исключительно эффективным методом экспериментального изучения медленных тепловых или гидродинамических явлений. Замена исследуемого процесса его электрическим аналогом дает большие преимущества. Так, например, время изучения годичных колебаний температуры почвы, затрачиваемое в методе электрической аналогии, уменьшается на девять порядков. При этом метод дает прекрасное представление о всех характерных свойствах годичных колебаний температуры почвы.

Естественно, метод аналогии может быть применен только к тем явлениям, которые описываются одним и тем же уравнением и одинаковыми граничными условиями в безразмерном представлении. Другими словами, метод аналогии используется для исследования свойств малоизученного явления путем сопоставления с хорошо известным явлением, причем краевая задача в безразмерном представлении тождественна для обоих случаев. В тождественности математической формы краевой задачи может отражаться реальное единство физического механизма изучаемых явлений, как в случае «тройной аналогии», где все три сопоставляемых эффекта обусловлены одним и тем же процессом перемещения среды [170], если среда — вещество в предельно-газовом состоянии. В этих условиях реализуется чистая форма молекулярного переноса. Носителями служат молекулы, которые в процессе своего перемещения не испытывают никаких влияний и взаимодействуют только при соударениях. В такой обстановке все процессы переноса (поток тепла, поток вещества и поток количества движения) развиваются совершенно идентично. Поэтому должна иметь место строгая физическая аналогия. Тождественность безразмерных закономерностей есть отражение идентичности физических условий, единства физического механизма сопоставляемых процессов.

Для нас более привлекательны случаи, когда сопоставляемые процессы имеют разную физическую сущность. К ним относятся вышеупомянутые случаи **электротепловой и электрогидродинамической аналогий** (подробности см. в монографиях [170,171]). Таким образом, сопоставляемые процессы могут включать в себя явления различной физической природы. Единственный признак, по которому явления сводятся в одну и ту же группу для исследования с помощью метода аналогий, это тождественность без-

размерных представлений. Здесь возникают особого рода соответствия (тождественность всех безразмерных характеристик и их соотношений) между явлениями, сколь угодно далекими по своей физической природе. Процессы подобны (или не подобны) друг другу безотносительно к тому, одинаковы или различны они по своей физической природе.

Следовательно, при использовании метода аналогий возникает вопрос о критерии подобия. Другими словами, возникает вопрос о количественных характеристиках явления, вопрос масштабов соотнесения. Тождественность математической формы уравнений для сопоставляемых явлений в безразмерном представлении может и не обеспечить подобие этих явлений. Соответствующие граничные условия также должны быть тождественны. Во многих случаях можно выделить особое значение комплекса параметров (переменных) задачи, получившее название характеристического значения, в то время как непосредственно заданное значение выделяют как характерное. Равенство характеристического значения комплекса параметров его характерному значению есть необходимое условие подобия различных явлений. Поясним вышесказанное на примере критерия подобия Био [170,171] (случай переноса тепла от твердого тела к жидкости и наоборот), полученного из уравнения непрерывности на поверхности системы:

$$B_i = \frac{l}{\delta}, \quad (67)$$

где l — геометрический параметр, характерный размер системы. Параметр δ , представляющий собой комбинацию теплофизических параметров ($\delta = \lambda/\alpha$), называют характеристической длиной. Этот критерий соединяет в себе один параметр l , характеризующий геометрические свойства системы, и два теплофизических параметра, характеризующих интенсивность переноса тепла: α — от жидкости к твердому телу, λ — внутри тела. Важным обстоятельством для нас является возможность свести определение физических условий на границе тела к одной характеристической длине δ . Сопоставление этой длины с характерным размером l тела и приводит к новой форме критерия подобия Био.

Важнейшая особенность описываемой задачи заключается в том, что она формулируется в граничных условиях третьего рода. Следовательно, по постановке задачи температурные условия считаются известными только для окружающей среды.

Ниже попытаемся заимствовать идеи, изложенные в приведенной задаче теплообмена, для решения квантово-механических задач. Обычно используемые в квантовой теории граничные условия таковы, что бывает трудно напрямую применять здесь методы классической физики, в частности, методы подобия. Рассмотрим несколько примеров из квантовой теории.

Начнем с атома водорода. Электростатическая сила между протоном и электроном приводит к образованию связанных состояний атома водорода. Следуя Бору, потребуем равенства кулоновской и центробежной силы (теорема Эренфеста для записи уравнения движения электрона вдоль квазиклассической траектории):

$$\frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} = \frac{L^2}{mr^3} = \frac{n^2\hbar^2}{mr^3}. \quad (68)$$

При получении последнего соотношения мы воспользовались условием квантования Бора (4). Из равенства первого и последнего членов в (68) получаются допустимые значения r или боровские радиусы

$$r = \frac{L^2}{me^2} = \frac{n^2\hbar^2}{me^2} = n^2 a_0, \quad (69)$$

где a_0 по определению есть радиус первой боровской орбиты:

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = \alpha^{-1} \lambda_C = \lambda_D. \quad (70)$$

Следовательно, радиус первой боровской орбиты равен соответствующей длине дебройлевской волны электрона, а отношение длины комптоновской волны к длине дебройлевской волны равно постоянной тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c$. Далее из (68) легко получить следующие полезные соотношения:

$$\alpha = n \frac{\lambda_C}{\lambda_D} = n \frac{v}{c}, \quad (71)$$

$$\frac{r}{\lambda_D} = n. \quad (72)$$

Итак, комптоновские и дебройлевские волны играют фундаментальную роль в квантовании радиуса орбит атома водорода, причем такое квантование возможно только тогда, когда отношение длины комптоновской волны к длине дебройлевской волны (v/c) соизмеримо с постоянной тонкой структуры α . Отношение (72) может быть интерпретировано как параметр подобия для атома водорода, где r есть радиус боровской орбиты, играющий роль геометрических размеров системы (характерный радиус), а величина $\lambda_D = \hbar/P = \hbar/mv$, имеющая размерность длины, играет роль характеристического радиуса. Следовательно, отношение характерного радиуса к характеристическому есть рациональное (в данном случае целое) число, играющее роль параметра подобия в задаче квантования

атома водорода. Параметр подобия может быть переписан в другой форме $\propto \lambda_D / \lambda_C$, что очевидно.

В заключение рассматриваемого примера найдем энергию атома водорода, равную сумме кинетической и потенциальной энергий:

$$E = T + V = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{r} = -\frac{e^2}{2r} = -\frac{e^2}{2n^2 a_0}. \quad (73)$$

При получении этой формулы мы воспользовались соотношением (68).

Мы сознательно повторили боровский рецепт квантования атома водорода (сейчас известный как принцип соответствия), акцентируя внимание на возможности получения параметра подобия. Легко заметить, что при этом наблюдается аналогия с задачей теплообмена (уравнение непрерывности на поверхности твердого тела \Leftrightarrow равенство кулоновской и центробежной сил на боровской орбите). Отличие же заключается в том, что Бор в своих вычислениях использовал адиабатический инвариант Эренфеста (в данном случае угловой момент системы) и гипотезу его квантования. Далее, твердое тело имеет четко определенную физическую граничную поверхность, в то время как в случае атома водорода такой физической поверхности нет. Однако Бор определил «поверхность» атома водорода как квантованные орбиты, на которых имеет место равенство кулоновской и центробежных сил. Позже появление устойчивых квантованных орбит де Бройль интерпретировал как результат возникновения стоячих волн. Как видим, квантование атома водорода Бор провел на основе метода аналогий. Современное развитие идей Бора для изучения регулярного и хаотического движения замкнутых систем мы кратко обсуждали выше. Отметим еще раз хорошо известный факт, что Бор решил задачу квантования атома водорода в 1913 г. задолго до создания квантовой механики.

Для иллюстрации изложенных выше тезисов используем метод Бора для квантования открытых систем, в частности, для изучения свойств адронных резонансов. При этом мы будем проводить аналогию с теорией α -распада и теорией открытых электромагнитных резонаторов.

Рассмотрим P -волновое пион-нуклонное рассеяние. Как отмечалось выше, дальнедействующая часть эффективного пион-нуклонного притягивающего потенциала описывается формулой (58). Используя второй закон Ньютона для записи уравнения движения вдоль квазиклассической траектории (фактически, теорему Эренфеста)

$$\frac{m_\pi v^2}{r} = \frac{\partial U_{\text{eff}}^N}{\partial r}, \quad (74)$$

и боровское условие квантования углового момента

$$m_\pi v r = L, \quad (75)$$

а также учитывая релятивистские поправки в (75) ($m_\pi \rightarrow E_\pi$), получаем уравнение

$$L^2 = f_{\pi NN}^2 \frac{m + m_\pi}{\sqrt{s}} \frac{m}{m_\pi} \frac{P_\pi^2}{E_\pi} r_0 (1 + \alpha r_0) e^{-\alpha r_0} \equiv F^2(s, r_0), \quad (76)$$

устанавливающее взаимосвязь между константой $f_{\pi NN}$, параметром теории $r_0 = 0,86$ фм и массой P -резонанса $M(R) = \sqrt{s}$. При этом массы основных состояний адронов (т.е. стабильных частиц пиона и протона) считаются заданными. В этом случае оказывается, что если для двух наинизших P -волновых резонансов — $\Delta(1232)$ -резонанса и роуперовского резонанса $N^*(1440)$ в соответствии с общей идеологией фиксировать параметр $r_0 = 0,86$ фм, то мы немедленно воспроизводим пик ($\sqrt{s} = M_\Delta = 1232$ МэВ)

$$F(M_\Delta^2, r_0 = 0,86) = 0,97 \approx 1 = L. \quad (77)$$

Аналогично для роуперовского резонанса $N^*(1440)$ (т.е. P_{11} , $L = 1$ и $M_{N^*} = 1440$ МэВ) получаем

$$F(M_{N^*}^2, r_0 = 0,86) = 0,91 \approx 1 = L. \quad (78)$$

Это означает, что параметр $r_0 = 0,86$ фм имеет физический смысл аналога первой боровской орбиты для сильного взаимодействия. Интересно отметить, что, рассматривая параметр r_0 как функцию константы связи $f_{\pi NN}$ на основании уравнения (76), мы немедленно приходим к асимптотической оценке $r_0 \propto \ln(f_{\pi NN})$, неожиданно иллюстрирующей невозможность построения теории возмущений для стандартного эффективного гамильтониана взаимодействия

$$H_{\pi NN} = -\frac{f_{\pi NN}}{m_\pi} (\vec{\sigma} \cdot \Delta) (\vec{\tau} \cdot \vec{\phi}). \quad (79)$$

Спектр адронных резонансов квазимолекулярен в том смысле, что его гросс-структура формируется в поверхностной области родительских адронов, где конечные продукты уже сформированы и за счет взаимодействия в конечном состоянии образуют квазистационарные состояния молекулярного типа. Итак, волновые свойства материи являются важнейшими характеристиками макро- и микромира. Возникающие при этом резонансы (стоячие волны) в соответствующих системах обеспечивают их устойчивость и определяют их «время жизни».

11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как уже отмечалось во введении, в физике хорошо изучено относительно небольшое число «грубых» систем, интегральные свойства которых с разумной точностью описываются в простейших подходах, однако адекватность описания физической картины падает в процессе ее детализации. В физике классическим примером корректной работы с грубыми системами является теория дифракции, в которой определяющими параметрами задачи являются размер мишени и длина волны падающей частицы. Экспериментально наблюдаемая дифракционная картина практически не зависит от физических характеристик материала мишени и конкретной физической природы волны.

Дифракция относится к числу наиболее общих физических явлений, наблюдаемых во всех квазилинейных волновых системах как в классической, так и в квантовой физике. При этом во всех изученных случаях дифракции выполняются соотношения теории подобия и автомодельности: конечный результат с точностью до масштаба задачи определяется только соотношением размеров мишени и длины волны, причем эти величины всегда соизмеримы.

В работах [36-39] изложенная в настоящем обзоре дифракционная концепция описания адронных резонансов была сформулирована следующим образом: периодическое движение, преломление и интерференция дебройлевских волн в ограниченном объеме пространства отвечает за образование резонансов в любой квантовой системе. Если длина волны падающей частицы такова, что она возбуждает собственные колебания мишени, то возникает явление резонанса. В результате возникают хорошо локализованные волны, сосредоточенные на границе раздела двух сред (вакуума и распадающегося адрона). При возникновении подобной локализации решающую роль играют граничные условия. В настоящем обзоре мы рассмотрели граничное условие излучения, которое привело к асимптотическому квантованию импульса и позволило воспроизвести наблюдаемую в эксперименте gross-структуру спектра масс адронных резонансов.

Таким образом, в рамках излагаемой дифракционной теории адронных резонансов мы, фактически, сталкиваемся с задачей нахождения дискретного спектра сильновзаимодействующих элементарных частиц (т.е., по де Бройлю, дискретного набора собственных колебаний в волновой системе) для случая инфинитного движения. В хорошо исследованном в нерелятивистской квантовой механике случае финитного движения задача о нахождении дискретного спектра формулируется в виде уравнения Шредингера для связанных состояний. Для случая инфинитного движения, которому в волновой механике отвечает граничное условие в виде плосковолновой асимптотики, волновой оператор имеет дискретный спектр лишь в случае

постановки условия излучения на радиусе канала. Подобное обобщение теории дифракции на случай физики промежуточных энергий с формальной точки зрения эквивалентно R -матричной теории [15].

В рамках излагаемого дифракционного подхода ширины адронных резонансов были найдены на основании глубокой физической аналогии с теорией α -распада и оказались в хорошем согласии с имеющимися экспериментальными данными.

В заключение авторы хотели бы выразить благодарность Е.А.Строковскому, в соавторстве с которым были получены многие представленные в обзоре результаты, а также В.И.Фурману, В.Г.Неудачину, С.Г.Кадменскому и А.Н.Гальперину за многочисленные стимулирующие дискуссии. Один из авторов (Ф.А.Г.) хотел бы отдельно поблагодарить Кристофа Бергольца за то, что он обратил наше внимание на дармштадтский и АВС-эффекты, а также Ю.Н.Покотиловского за многочисленные обсуждения, связанные с этой тематикой. Кроме того, авторы (Ю.Л.Р.) хотели бы поблагодарить Конкурсный центр Санкт-Петербургского университета за финансовую поддержку наших исследований (грант 6.5-2041).

Наконец, авторы хотели бы отметить, что многие из предложенных в обзоре идей родились под влиянием работ А.М.Балдина.

12. ПРИЛОЖЕНИЕ

Чтобы получить асимптотическое условие квантования (21), рассмотрим граничное условие (18). Сферические функции Риккати — Ганкеля связаны с функциями Ганкеля соотношением

$$h_L^{(1)}(Pr) = \sqrt{\frac{\pi Pr}{2}} H_{L+\frac{1}{2}}^{(1)}(Pr).$$

Используя хорошо известные асимптотические разложения для функции Ганкеля и ее производной [172], можно получить выражения, равномерные при $|\arg Pr| \leq \pi - \epsilon$, $\epsilon > 0$:

$$H_{L+\frac{1}{2}}^{(1)}(Pr) \approx 2e^{-\frac{\pi i}{3}} \left(\frac{4\zeta}{1-z^2} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{Ai(\xi)}{(L+\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}}, \quad [H_{L+\frac{1}{2}}^{(1)}(Pr)]' \approx -4 \frac{e^{\frac{\pi i}{3}}}{z} \left(\frac{1-z^2}{4\zeta} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{Ai'(\xi)}{(L+\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}},$$

где $z = Pr/(L + \frac{1}{2})$, $\xi = e^{\frac{2\pi i}{3}} (L + \frac{1}{2})^{\frac{2}{3}} \zeta$, $\frac{2}{3} \zeta^{\frac{3}{2}} = \log \frac{1 + \sqrt{1-z^2}}{z} - \sqrt{1-z^2}$. Учитывая асимптотику для функции Эйри при больших ξ

$$Ai(\xi) \approx \frac{1}{2}\pi \frac{-1}{2} \xi^{-4} e^{-\frac{2}{3}\xi^3} (1 + O(\xi^{-1})), \quad Ai'(\xi) \approx -\frac{1}{2}\pi \frac{-1}{2} \xi^{-4} e^{-\frac{2}{3}\xi^3} (1 + O(\xi^{-1})),$$

получаем

$$Ai'(\xi)/Ai(\xi) \approx -\xi^{1/2}.$$

Логарифмические производные в этом случае имеют вид

$$\left[H_{L+\frac{1}{2}}^{(1)}(Pr) \right]' / H_{L+\frac{1}{2}}^{(1)}(Pr) \Big|_{r=r_0+0} \approx -\sqrt{1-z^2}/z. \quad (A1)$$

Предположим, следуя работам [36-39], что для хорошо изолированных резонансов $f=0$. Рассмотрим этот случай. При $|Pr_0| \gg 1$ получаем

$$\left. \frac{[H_{L+\frac{1}{2}}^{(1)}(Pr)]'}{H_{L+\frac{1}{2}}^{(1)}(Pr)} \right|_{r=r_0+0} \approx \frac{1}{h_L^{(1)}(Pr)} \frac{dh_L^{(1)}(Pr)}{dr} \Big|_{r=r_0+0} = 0. \quad (A2)$$

Из (A1)-(A2) следует, что $Pr_0 \approx L + \frac{1}{2}$, и мы должны рассматривать асимптотические разложения вблизи каустической поверхности. При $z = O(1)$ и $(L + \frac{1}{2}) \gg 1$ можно использовать следующие асимптотики:

$$H_{L+\frac{1}{2}}^{(1)}(Pr) \approx (Ai(-\tau) - iBi(-\tau))/\nu, \quad [H_{L+\frac{1}{2}}^{(1)}(Pr)]' \approx -(Ai(-\tau) - iBi(-\tau))/\nu^2,$$

где $\tau = (Pr - L - 1/2)/\nu$, $\nu = ((L + 1/2)/2)^{\frac{1}{3}}$. Следовательно,

$$\left. \frac{1}{h_L^{(1)}(Pr)} \frac{dh_L^{(1)}(Pr)}{dr} \right|_{r=r_0+0} \approx \frac{1}{2r} \frac{P}{\nu} \frac{Ai'(-\tau) - iBi'(-\tau)}{Ai(-\tau) - iBi(-\tau)} \Big|_{r=r_0+0}.$$

Учитывая, что $(L + \frac{1}{2}) \gg 1$ и $z = O(1)$, имеем

$$\left. \frac{1}{h_L^{(1)}(Pr)} \frac{dh_L^{(1)}(Pr)}{dr} \right|_{r=r_0+0} \approx -\frac{2\nu^2}{r} \frac{Ai'(-\tau) - iBi'(-\tau)}{Ai(-\tau) - iBi(-\tau)} \Big|_{r=r_0+0}.$$

Используя соотношения между функциями Эйри, получим

$$\left. \frac{1}{h_L^{(1)}(Pr)} \frac{dh_L^{(1)}(Pr)}{dr} \right|_{r=r_0+0} \approx -\frac{2\nu^2}{r} e^{\frac{2\pi i}{3}} \frac{Ai'(\tau e^{-\frac{\pi i}{3}})}{Ai(\tau e^{-\frac{\pi i}{3}})} \Big|_{r=r_0+0} \approx 0.$$

Следовательно, $Ai'(\tau e^{-\frac{\pi i}{3}}) = 0$. Отсюда получаем

$$Pr_0 = L + \frac{1}{2} + e^{\frac{\pi i}{3}} \nu a'_s, \quad s = 1, 2, \dots,$$

где a'_s — нули A' (a'_s — действительно отрицательные числа).

Вопросы условий квантования резонансных состояний и функционального поведения резонансных волновых функций в пространстве в общем виде не исследованы. На начальном этапе эти вопросы могут быть изучены на модельных примерах. В этом приложении мы предполагаем для простоты, что внутренние волновые функции резонансных состояний являются решениями уравнения Шредингера с оптическим потенциалом — комплексной прямоугольной ямой

$$V(r) = \begin{cases} -(V_0 + iW_0) & r \leq r_0 \\ 0 & r > r_0 \end{cases}$$

Тогда $u_{in}(r) = j_L(Qr) = \sqrt{\frac{\pi Qr}{2}} J_{L+1/2}(Qr)$. Используя асимптотическое разложение $J_{L+\frac{1}{2}}(L+1/2 + \tau\nu) \approx Ai(-\tau)/\nu$ и известную оценку [173] для

функции Эйри $|Ai(x)| \leq (2\sqrt{\pi})^{-1} x^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}x^2}$ при $x > 0$, можно легко получить, что $j_L(Qr)$ экспоненциально уменьшается, когда Qr изменяется от $L+1/2$ до 0. Таким образом, внутри сферы $r \leq r_c$ ($r_c = (L+1/2)/Q$ — радиус каустической поверхности) волновая функция сконцентрирована внутри кольца $L+1/2 \leq Qr \leq Qr_0$, ширина которого приблизительно равна $\nu|a'_s|$. Это соответствует явлению волн «шепчущей галереи» (см. также [50,59]).

Далее потребуем, чтобы резонансные волновые функции имели максимумы на радиусе ямы $r = r_0$, то есть поставим следующие граничные условия:

$$h_L^{(1)'}(Pr_0) = 0. \quad (A3)$$

Тогда из условия равенства на границе логарифмических производных внутренних и внешних волновых функций

$$j'_L(Qr_0)h_L^{(1)}(Pr_0) - j_L(Qr_0)h_L^{(1)'}(Pr_0) = 0 \quad (A4)$$

следует, что

$$j'_L(Qr_0) = 0. \quad (A5)$$

Здесь $Q = \sqrt{-\frac{2m}{\hbar^2} V(r) + P^2}$. Граничное условие (A3) мы можем рассматривать как условие квантования асимптотического импульса P . Число корней уравнения (A3) равно $L + 1$. Обозначим их как $P_{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, L + 1$. С другой стороны, число корней уравнения (A5) бесконечно, обозначим их как $Q_{(n)}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Далее мы можем определить значения потенциалов по формуле

$$V_{(k,n)}(r) = \frac{\hbar^2}{2m} (P_{(k)}^2 - Q_{(n)}^2). \quad (\text{A6})$$

Таким образом, исходя только из граничных условий (A3) и (A5), мы имеем возможность вычислить неограниченную дискретную последовательность комплексных потенциалов $V_{(k,n)}$. В рассматриваемом примере мы использовали для простоты потенциалы прямоугольной ямы, и в этом случае задания граничных условий достаточно для определения параметров потенциала. При этом мы получаем эквивалентную неограниченную дискретную последовательность комплексных потенциалов. Физически эти потенциалы можно выбирать по числу нулей внутренних волновых функций $u_{in}(r)$ в области $0 < r \leq r_0$. Например, волновая функция $u_{in}(r)$ нижайшего по энергии резонансного состояния не должна иметь нулей, и так далее. В общем плане можно задать любую разумную с физической точки зрения функциональную форму для потенциала, а далее из граничных условий можно определить некоторые его параметры. Другими словами, задание граничных условий накладывает ограничения на параметры используемых потенциалов, и в этом смысле возникает самосогласованная задача описания резонансов. Такая процедура хорошо разработана в теории прямых ядерных реакций, мы отсылаем читателя к обзорным работам [174-176].

Далее рассмотрим вещественные потенциалы, взяв реальные части вычисленных выше потенциалов $V_{(k,n)}(r)$:

$$\bar{V}_{(k,n)}(r) = \text{Re} V_{(k,n)}(r). \quad (\text{A7})$$

Найдем для них собственные значения $\bar{P}_{(k,n)}$, удовлетворяющие условию равенства логарифмических производных (A4). Значения $P_{(k)} r_0$, $-V_{(k,1)}$ и $\bar{P}_{(k,1)} r_0$ приведены в табл.17. Из таблицы видно, что

$$\bar{P}_{(1,1)} r_0 \approx L. \quad (\text{A8})$$

Таблица 17. Значения $P_{(k)r_0} - V_{(k,1)}$ и $\bar{P}_{(k,1)r_0}$ в случае $h_L^{(1)}(Pr_0) = 0$

L	Pr_0	$V_0 + iW_0$	\bar{P}_{r_0}
1	$\pm 0,866 - i0,500$	$394,3 \pm i48,6$	$0,979 - i0,356$
2	$\pm 1,807 - i0,702$	$684,7 \pm i142,4$	$1,991 - i0,426$
2	$- i1,60$	$983,3$	$1,191 - i0,081$
3	$\pm 2,758 - i0,843$	$1000,8 \pm i260,8$	$2,991 - i0,468$
3	$\pm 0,871 - i2,157$	$1606,2 \pm i210,7$	$1,028 - i2,143$
4	$\pm 3,715 - i0,954$	$1338,5 \pm i397,7$	$3,988 - i0,500$
4	$\pm 1,752 - i2,571$	$2260,3 \pm i505,6$	$2,024 - i2,539$
4	$- i2,949$	$2549,4$	$- i2,949$
5	$\pm 4,676 - i1,048$	$1695,0 \pm i549,7$	$4,938 - i0,527$
5	$\pm 2,644 - i2,908$	$2942,4 \pm i862,8$	$3,003 - i2,859$
5	$\pm 0,869 - i3,544$	$3522,7 \pm i345,5$	$0,991 - i3,546$
6	$\pm 5,641 - i1,129$	$2068,2 \pm i714,6$	$5,977 - i0,550$
6	$\pm 3,545 - i3,195$	$3650,1 \pm i1270,9$	$3,976 - i3,132$
6	$\pm 1,743 - i4,034$	$4524,7 \pm i788,9$	$1,956 - i4,039$
6	$- i4,285$	$4812,3$	$- i4,285$
7	$\pm 6,610 - i1,201$	$2455,8 \pm i891,7$	$6,972 - i0,571$
7	$\pm 4,452 - i3,448$	$4381,3 \pm i1722,4$	$4,944 - i3,371$
7	$\pm 2,623 - i4,454$	$5553,7 \pm i1311,0$	$2,907 - i4,463$
7	$\pm 0,868 - i4,897$	$6129,9 \pm i477,2$	$0,970 - i4,902$

Таким образом, исходя только из граничных условий мы получили условия квантования асимптотического импульса P (аналог квантования по Бору — Зоммерфельду) для резонансных состояний. Соответствующие волновые функции $\psi_{L=7}^{\text{orb}}(\bar{P}_{(1,1)}r)$ локализованы вблизи поверхности $r = r_0$ (см. рис.10), и мы можем интерпретировать $r = r_0$ как первую боровскую орбиту резонансного состояния с угловым моментом L .

Используя рекуррентные формулы для функций Риккати — Ганкеля и Риккати — Бесселя, преобразуем выражение (A4) к виду

$$j_L(Qr_0)h_{L+1}^{(1)}(Pr_0) - j_{L+1}(Qr_0)h_L^{(1)}(Pr_0) = 0. \quad (\text{A9})$$

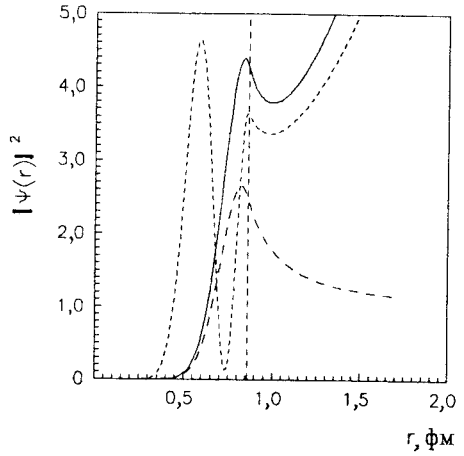
Поставим следующее граничное условие при $r = r_0$:

$$h_{L+1}^{(1)}(Pr_0) = 0. \quad (\text{A10})$$

Тогда

$$j_{L+1}(Qr_0) = 0. \quad (\text{A11})$$

Рис.10. Волновые функции $\psi_{L=7}^{\text{orb}}$ (сплошная кривая), $\psi_{L=7}^{\text{rad}}$ (короткий пунктир) и $\psi_{L=7}^{\text{cau}}$ (длинный пунктир)



Повторив изложенную выше процедуру, получим значения $P_{(k)}$, $Q_{(n)}$, $V_{(k,n)}$, $k = 1, 2, \dots, L+1$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяющие условиям (A9)-(A11), и вычислим $\bar{P}_{(k,n)}$ для вещественных потенциалов $\text{Re}\bar{V}_{(k,n)}(r)$. Результаты расчетов приведены в табл.18.

Таблица 18. Значения $P_{(k)r_0}$, $-V_{(k,1)}$ и $\bar{P}_{(k,1)r_0}$ в случае $h_{L+1}^{(1)}(Pr_0) = 0$

L	Pr_0	$V_0 + iW_0$	\bar{P}_{r_0}
1	$\pm 0,866 - i1,500$	$1947,8 \pm i145,8$	$1,465 - i0,606$
2	$\pm 1,754 - i1,839$	$2756,6 \pm i362,0$	$2,484 - i0,555$
2	$-i2,322$	$3042,1$	$1,715 - i0,230$
3	$\pm 2,657 - i2,104$	$3608,5 \pm i625,7$	$3,481 - i0,530$
3	$\pm 0,867 - i2,896$	$4184,7 \pm i281,8$	$2,280 - i0,134$
4	$\pm 3,572 - i2,325$	$4498,5 \pm i931,5$	$4,472 - i0,518$
4	$\pm 1,746 - i3,352$	$5370,7 \pm i655,4$	$3,003 - i0,103$
4	$-i3,647$	$5656,9$	$2,369 - i0,075$
5	$\pm 4,493 - i2,516$	$5423,2 \pm i1268,3$	$5,463 - i0,507$
5	$\pm 2,626 - i3,736$	$6596,5 \pm i1100,9$	$3,815 - i0,092$
5	$\pm 0,868 - i4,248$	$7170,8 \pm i413,5$	$2,689 - i0,0075$
6	$\pm 5,421 - i2,686$	$6379,8 \pm i1633,5$	$6,454 - i0,502$
6	$\pm 3,517 - i4,070$	$7859,0 \pm i1606,3$	$4,678 - i0,088$
6	$\pm 1,739 - i4,758$	$8719,6 \pm i926,9$	$3,229 - i0,0037$
6	$-i4,971$	$9010,4$	$2,504 - i0,00027$
7	$\pm 6,364 - i2,839$	$7365,9 \pm i2024,0$	$7,445 - i0,500$
7	$\pm 4,414 - i4,368$	$9155,9 \pm i2163,7$	$5,571 - i0,0865$
7	$\pm 2,616 - i5,205$	$10314,5 \pm i1527,9$	$3,895 - i0,0026$
7	$\pm 0,868 - i5,588$	$10888,2 \pm i544,0$	$2,582 - i0,168e-4$

Как видно из таблицы, с хорошей точностью выполняется условие квантования

$$\bar{P}_{(1,1)} r_0 \approx L + \frac{1}{2}. \quad (\text{A12})$$

Соответствующая волновая функция $\Psi_{L=7}^{\text{rad}}(\bar{P}_{(1,1)} r)$ для $L=7$ приведена на рис.10, и по сравнению с волновой функцией $\Psi_{L=7}^{\text{orb}}(\bar{P}_{(1,1)} r)$ она имеет один дополнительный нуль в области действия потенциала. Поэтому условие квантования (A12) мы назовем радиальным квантованием.

И, наконец, интересен особый случай, когда каустическая поверхность для свободного движения продуктов распада резонанса совпадает с r_0 , тогда мы получаем следующее условие квантования:

$$P_{\text{cau}} r_0 = \sqrt{L(L+1)} \approx L + \frac{1}{2}. \quad (\text{A13})$$

Соответствующая функция $\Psi_{L=7}^{\text{cau}}(\bar{P}_{\text{cau}} r)$ приведена на рис.10.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Строчковский Е.А., Гареев Ф.А., Ратис Ю.Л. — ЭЧАЯ, 1993, т.24, с.603.
2. Гареев Ф.А., Строчковский Е.А., Ратис Ю.Л. — ЭЧАЯ, 1994, т.25, с.855.
3. Мигдал А.Б. — Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер. М.: Наука, 1983.
4. Мигдал А.Б., Воскресенский Д.Н., Саперштейн Э.Е., Троицкий М.А. — Пионные степени свободы в ядерном веществе. М.: Наука, 1991.
5. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. — Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.
6. Эрикссон Т., Вайзе В. — Пионы и ядра. М.: Наука, 1991.
7. Алхазов Г.Д., Анисович В.В., Волковицкий П.Э. — Дифракционное взаимодействие адронов с ядрами при высоких энергиях. Л.: Наука, 1991.
8. Балдин А.М., Гольданский В.И., Максименко В.М., Розенталь И.Л. — Кинематика ядерных реакций. М.: Атомиздат, 1968.
9. Индурайн Ф. — Квантовая хромодинамика. М.: Мир, 1986.
10. Gamov G.A. — Zeitschrift fur Physik, 1928, vol.51, p.204; vol.52, p.510.
11. Condon E.U., Guerny R.W. — Phys.Rev., 1929, vol.33, p.127.
12. Geiger H., Nuttall J.M. — Phil.Mag., 1911, vol.22, p.613.
13. Кадменский С.Г., Фурман В.И. — Альфа-распад и родственные ядерные реакции. М.: Энергоатомиздат, 1985.
14. Wigner E.P., Eisenbud L. — Phys.Rev., 1947, vol.72, p.29.
15. Lane A.M., Thomas R.G. — Rev. of Modern Physics, 1958, vol.30, p.257.
16. Kapur P.L., Peierls R.E. — Proc.Roy.Soc., 1938, vol.A166, p.277.

17. **Базь А.И., Зельдович Я.Б., Переломов А.М.** — Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М.: Наука, 1971.
18. **Бор О., Мотгельсон Б.** — Структура атомного ядра. М.: Мир, 1971, т.1, т.2. М.: Мир, 1977.
19. **Гареев Ф.А., Банг Е.** — ЭЧАЯ, 1980, т.11, с.813; **Bang E., Ershov S.N., Gareev F.A., Kazacha G.S.** — Nucl.Phys., 1980, vol.A339, p.89; 1978, vol.A309, p.381.
20. **Berggren T., Lind P.** — Phys.Rev., 1993, vol.C47, p.768.
21. **Lind P.** — Phys.Rev., 1993, vol.C47, p.1903.
22. **Пилькун Х.** — Физика релятивистских частиц. М.: Мир, 1983.
23. **Hohler G.** — πN Newsletter, 1994, No.9, p.1; **Hohler G., Schulte A.** — πN Newsletter, 1992, No.7, p.94.
24. **Review of Particle Properties** — Phys.Rev., 1994, vol.D50.
25. **Ландсберг Л.Г.** — ЯФ, 1994, т.57, с.47.
26. **Silvestre-Brack B., Semay C.** — Z.Physik, 1993, vol.C57, p.273.
27. **Троян Ю.А.** — ЭЧАЯ, 1993, т.24, с.683.
28. **Tatischeff V. et al.** — In: Proc. of the Xth Intern. Seminar on High Energy Physics Problems, Dubna, World Scientific, 1990, p.177; Invited talk presented at the XIIth Intern. Seminar on High Energy Physics Problems, Dubna, Russia, 1994.
29. **Komarov E.N.** — In: Proc. of the XIIth Intern. Seminar on High Energy Physics Problems, Dubna, 1994, p.321.
30. **Страковский И.И.** — ЭЧАЯ, 1991, т.22, с.615.
31. **Abashian A., Booth N.E., Crowe K.M.** — Phys.Rev.Lett., 1960, vol.5, p.258.
32. **Codino A., Plouin F.** — Preprint LNS/Ph/94-06, 1994.
33. **Vokemeyer H. et al.** — GSI Scientific Report 81-2, 1981, p.127; **Berderman E. et al.** — GSI Scientific Report 81-2, 1981, p.128.
34. **Давыдов А.С.** — Теория атомного ядра. М.: Физматгиз, 1958.
35. **Соловьев В.Г.** — Теория сложных ядер. М.: Наука, 1971.
36. **Ratis Yu.L., Gareev F.A.** — Preprint JINR E2-92-3, Dubna, 1992; In: Proc. of the Workshop on Gross Properties of Nuclei and Nuclear Excitation XX, Hirshegg, Austria, 1992.
37. **Ratis Yu.L., Gareev F.A.** — Preprint JINR E2-92-158, Dubna, 1992; In: Proc. of III International Symposium on Weak and Electromagnetic Interactions in Nuclei, Dubna, Russia, 1992. Singapore: World Scien., 1993, p.795.
38. **Gareev F.A. et al.** — Preprint JINR E2-92-474, Dubna, 1992; In: Proc. of the Intern. Conf. on Nuclear Structure and Nuclear Reactions at Low and Intermediate Energies, Dubna, Russia, 1992, p.272; In: Proc. of the Workshop on Gross Properties of Nuclei and Nuclear Excitation XXI, Hirshegg, Austria, 1993, p.197.
39. **Gareev F.A., Ratis Yu.L., Strokovsky E.A.** — Preprint JINR E2-93-426, Dubna, 1993; In: Proc. of the 7th Intern. Conf. on Nucl. Reaction Mechanisms, Varenna, June 6-11, 1994, p.621; In: Proc. of the 14th Intern. IUPAP Conf. on Few Body Problems in Physics, Williamsburg, May 26-31, 1994, p.365.
40. **Gareev F.A., Ratis Yu.L., Strokovsky E.A.** — Preprint JINR E2-94-131, Dubna, 1994; In: Proc. of the International Symposium «DUBNA DEUTRON-93», Dubna, September 14-18, 1993, E2-94-95, p.300.

41. Матвеев В.А., Мурадян Р.М., Тавхелидзе А.Н. — ТМФ, 1973, т.15, с.332; Lett. Nuovo Cim., 1972, vol.5, p.907.
42. Baldin A.M. — Nucl.Phys., 1985, vol.A447, p.203; Препринт ОИЯИ P2-94-463, Дубна, 1994.
43. Beth E., Uhlenbeck G.E. — Physica, 1937, vol.4, p.915.
44. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. — Статистическая физика. М.; 1963.
45. Thomson J.J. — Proc. Lond. Math. Soc., 1884, vol.15(1), p.197.
46. Peierls R.E. — Proc. Roy. Soc., 1959, vol.A253, p.16.
47. Humbelt J., Rosenfeld L. — Nucl.Phys., 1961, vol.A26, p.329.
48. Nussenzveig H.M. — Causality and Dispersion Relations. New York, 1972.
49. Фок В.А. — Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Советское радио, 1970.
50. Вайнштейн Л.А. — Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Советское радио, 1966.
51. Зельдович Я.Б. — ЖЭТФ, 1961, т.12, с.542.
52. Ньютон Р. — Теория рассеяния волн и частиц. М.: Мир, 1969.
53. Wigner E.P. — Phys.Rev., 1955, vol.98, p.145.
54. Bohm A. — Quantum Mechanics. 3rd Ed., Springer, 1993.
55. Гольдбергер М., Ватсон К. — Теория столкновений. М.: Мир, 1967.
56. Teshigawara M., Kato K., Filippov G.F. — Prog. Theor. Phys., 1994, vol.92, p.79.
57. Muller J., Burgdorfer J., Noid D. — Phys.Rev., 1992, vol.A45, p.1471.
58. Cayley A. — Phil. Trans. Roy. Soc., 1857, vol.147, p.273; Collected Works, 1957, vol.145, p.336.
59. Бабич В.М., Булдырев В.С. — Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972.
60. Rayleigh (Struut J.W.) — Phil. Mag., 1910, vol.20, p.1001; Рэлей — Теория звука. М.: Гостехиздат, 1944.
61. Ваганов Р.Б., Каценеленбаум Б.З. — Основы теории дифракции. М.: Наука, 1982.
62. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. — Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
63. Постон Т., Стюарт И. — Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980.
64. Gutzwiller M.C. — Chaos in Classical and Quantum Mechanics. New York: Springer, 1990.
65. Keller J.V. — Ann. Phys., New York, 1958, vol.4, p.180.
66. Keller J.V., Rubinow S.I. — Ann. Phys., New York, 1960, vol.9, p.24.
67. Einstein A. — Verh. Dtsch. Phys. Ges., 1917, vol.19, p.82.
68. Маслов В.П. — Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Наука, 1988.
69. Маслов В.П., Федорюк М.В. — Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976.
70. Littlejohn R.G., Robbins J.M. — Phys. Rev., 1987, vol.A36, p.2953; Phys. Rev. Lett., 1987, vol.58, p.1388.
71. Струтинский В.М., Магнер А.Г. — ЭЧАЯ, 1976, т.7, с.356.
72. Ballian R., Bloch C. — Ann. Phys., 1974, vol.85, p.514.
73. Feshbach H., Lomon E.L. — Ann. Phys., New York, 1964, vol.29, p.19; 1968, vol.48, p.94.

74. Симонов Ю.А. — ЯФ, 1982, т.36, с.722; 1983, т.38, с.1542.
75. Jaffe R.L., Low F.E. — Phys.Rev., 1979, vol.D19, p.2105.
76. Gonzalez P., LaFrance P., Lomon E.L. — Phys.Rev., 1987, vol.D35, p.2142.
77. Барашенков В.С. — Сечение взаимодействия элементарных частиц. М.: Наука, 1966.
78. Flaminio V. et al. — CERN-HERA-84-01, CERN, Geneva, 1989.
79. Watson K.M. — Phys.Rev., 1952, vol.88, p.1163.
80. Мигдал А.Б. — ЖЭТФ, 1955, т.28, с.3.
81. Gareev F.A., Ratis Yu.L., Korovin P.P. et al. — ЯФ, 1994, т.57, с.1020.
82. Gareev F.A., Ratis Yu.L., Korovin P.P. et al. — ЯФ, 1994, т.57, с.1440.
83. Gareev F.A. et al. — In: Proc. of the Intern. Conf. on Spin and Isospin in Nuclear Interactions, Telluride, March 11-15, 1991, ed. by S.W.Wissinik et al., Plenum Press, New York, 1991, p.445.
84. Gareev F.A., Ratis Yu.L., Semtchenkov A.G. et al. — ЯФ, 1994, т.57, с.1411.
85. Hofstadter R.— Nuclear and Nucleon Structure. Benjamin Press, 1963.
86. Дрелл С., Захариазен Ф. — Электромагнитная структура нуклонов. М.: ИЛ, 1962.
87. Федянин В.К. — Электромагнитная структура ядер и нуклонов. М.: Высшая школа, 1967.
88. Bogolubov P.N. — Ann. Inst. Henri Poincare, 1968, vol.8, p.163.
89. Дорохов А.Е., Кочелев Н.И. — ЯФ, 1990, т.52, с.214.
90. Ратис Ю.Л., Гареев Ф.А. — Препринт ОИЯИ Р4-95-15, Дубна, 1995.
91. Попов В.С., Мур В.Д., Сергеев А.В. — ЖЭТФ, 1991, т.100, с.20.
92. Мур В.Д., Попов В.С. — Письма в ЖЭТФ, 1990, т.51, с.499; Phys. Lett., 1991, vol.A157, p.185.
93. Buck V., Merchant A.C., Perez S.M. — Phys.Rev.Lett., 1990, vol.65, p.2975.
94. Browne E., Firestone R.B. — Table of Radioactive Isotopes. New York: Wiley, 1986.
95. Кадменский С.Г., Ратис Ю.Л., Фурман В.И., Хлебостроев В.Г. — ЯФ, 1978, т.27, с.630.
96. Кадменский С.Г., Ратис Ю.Л., Рыбак К.С., Фурман В.И., — ЯФ, 1978, т.27, с.906.
97. Yokosawa A. — Jour. of Phys. Soc. of Japan, Suppl., 1985, vol.55, p.251.
98. Locher M.F., Sainio M.E., Svarc A. — Adv. Nucl. Phys., 1986, vol.17, p.42.
99. Батурин В.Н. и др. — Препринт ЛИЯФ 1750, Ленинград, 1991.
100. Троян Ю.А., Печенов В.Н. — ЯФ, 1993, т.56, с.191. Troyan Yu.A. et al. — In: Proc. of the 10 Int. Seminar on High Energy Phys. Problems, September, 1990; Singapor: World Scien., 1991, p.149; Препринт ОИЯИ Р2-86-35, Дубна, 1986.
101. Баренблат Г.И. — Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеиздат, 1982.
102. Седов Л.И. — Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука. 1987.
103. Birkhoff G. — Hydrodynamics. A study in logic, fact and similitude. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1960.
104. Weizsacker C.F. — Z.Phys., 1935, Bd 96, p.431.

105. Ландау Л.Д. — ЖЭТФ, 1956, т.30, с.1058.
106. Носов В.Г. — Макроскопические квантовые эффекты в атомных ядрах. М.: Атомиздат, 1980.
107. Лукьянов В.К., Титов А.И. — Известия АН СССР, сер. физ., 1990, т.54, с.2082.
108. Glozman L.Ya., et al. — J.Phys.G: Nucl.Part.Phys., 1994, vol.20, p.49.
109. LaFrance P. et al. — Preprint СТР 2133, 1993; Lomon E. — J.Physique 51 Supple, Colloque, 1990, vol.C6, p.363.
110. Bazhanskij I.I. et al.—Preprint JINR P2-88-501, Dubna, 1988.
111. Гареев Ф.А., Ратис Ю.Л., Казача Г.С. — Препринт ОИЯИ P2-95-82, Дубна, 1995.
112. Едогоров С.О. и др. — Препринт ФТИ 141-91-ФВЭ, Ташкент, 1991.
113. Andreev V.P. et al. — Z.Phys., 1987, vol.A327, p.363.
114. Ohashi Y. et al. — Phys.Rev., 1987, vol.C36, p.2422.
115. Ball J. et al. — Phys.Rev.Lett., 1994, vol.B320, p.206.
116. Абрамов Б.М. и др. — ЯФ, 1994, т.57, с.850.
117. Покопиловский Ю.Н. — ЭЧАЯ, 1993, т.24, с.5.
118. Griffin J.J. — Phys.Rev., 1993, vol.47, p.351.
119. Samios N.P. et al. — Phys.Rev.Lett., 1962, vol.9, p.139.
120. Brock I.C. et al. — Phys.Rev., 1991, vol.D43, p.1448.
121. Foster M. et al. — Phys.Rev., 1964, vol.B138, p.812.
122. Abdivaliev A. et al. — Nucl.Phys., 1980, vol.B168, p.385.
123. Plouin F. — In: Proc. of the Workshop on Production and Decay of Light Mesons, 3-4 March 1988, Paris, ed. by P.Fleury. Singapore: World Scien., 1988, p.114.
124. Anderson J.A. et al. — Phys.Rev.Lett., 1961, vol.6, p.365; Stonehill D. et al. — Phys.Rev.Lett., 1961, vol.6, p.624; Erwin A. et al. — Phys.Rev.Lett., 1961, vol.6, p.628.
125. Maglic B. et al. — Phys.Rev.Lett., 1961, vol.7, p.178.
126. Pevsner A. et al. — Phys.Rev.Lett., 1961, vol.7, p.421.
127. Ivanishin Yu.I. et al. — Preprint JINR E1-93-155, Dubna, 1993.
128. Иванишин Ю.И. и др. — Сообщение ОИЯИ P2-83-727, Дубна, 1983.
129. Besson D., Skwarniski T. — Ann.Rev.Nucl.Part.Sci., 1993, vol.43, p.333.
130. Wu Q.W. et al. — Phys.Lett., 1993, vol.B301, p.307.
131. Ying Z. et al. — Phys.Rev., 1992, vol.C45, p.528.
132. Galonsky A. et al. — In: Proc. of CORINNE II — International Workshop on Multi-particle Correlations and Nuclear Reactions, Nantes, France September 6-10, 1994.
133. Александров Д.В. и др. — Письма в ЖЭТФ, 1994, т.59, с.301.
134. Koinig I. et al. — Z.Phys., 1993, vol.A346, p.153.
135. Salabura P. et al. — Phys.Lett., 1990, vol.B245, p.153.
136. Koening W. et al. — Phys.Lett., 1989, vol.B218, p.12.
137. Sakai M. et al.—In: Proc. on Nuclear Physics in Our Times, Saniebel Island, FL, November 17-21, 1992.
138. Danzmann K. et al. — Phys.Rev.Lett., 1987, vol.59, p.1885; 1987, vol.62, p.2353.
139. Bargholtz Chr. et al. — J.Phys., 1987, vol.G13, p.L265; Phys.Rev., 1990, vol.C40, p.1188; Erb K.A. et al. — Phys.Lett., 1986, vol.B181, p.52.

140. **Jaffe R.L.** — *Phys.Rev.*, 1977, vol.D15, p.267; 1979, vol.D17, p.1444.
141. **Gareev F.A., Kazacha G.S., Ratis Yu.L. et al.** — Preprint JINR E2-95-9, Dubna, 1995.
142. **Бровкин Л.Ю. и др.** — *ЯФ*, 1993, т.56, с.762.
143. **Алешин Ю.Д., Гузавин В.М.** — *ЯФ*, 1992, т.55, с.3255.
144. **Aleev A.N. et al.** — *Zeitschrift fur Physik*, 1984, vol.25C, p.205.
145. **Balatz M. et al.** — Preprint IHEP 93-5, Protvino, 1993.
146. **Karnauchov V.M. et al.** — *Phys.Lett.*, 1992, vol.B281, p.148; *ЯФ*, 1994, т.57, с.841.
147. **Shahbazian E.A. et al.** — In: Proc. of the IXth Intern. Seminar on High Energy Physics Problems, Dubna, 1988, D1,2-86-668, p.337.
148. **Aleev A.N. et al.** — Preprint JINR D1-92-534, Dubna, 1992.
149. **Borquin M. et al.** — *Phys.Lett.*, 1986, vol.B172, с.113.
150. **Бармин В.В. и др.** — *ЯФ*, 1994, т.57, с.1724.
151. **Abdinov O.V. et al.** — Preprint JINR P1-86-11, Dubna, 1986.
152. **Baldin A.M. et al.** — Proc. of the Xth Intern. Seminar on High Energy Physics Problems, Dubna, 1990, p.110. CERN-PPE/91-110, July 9, 1991.
153. **Barnes T.** — Preprint ORNL-CCIP-93-11/RAL-93-065, Oak Ridge, 1993.
154. **Antoniazzi L. et al.** — FERMILAB-PUB 92/265 E E705, 1993.
155. **Волошин М.В., Окунь Л.Б.** — Письма в ЖЭТФ, 1976, т.23, с.369.
156. **Weinstein J., Isgur N.** — *Phys.Rev.Lett.*, 1982, vol.48, p.659.
157. **Besson D., Skwarnicki T.** — Preprint CLNS 93/1239 SMU HEP 93-13, 1993.
158. **Butler F. et al.** — Preprint CLNS 93/1234 CLEO 93-17, 1993.
159. **Heintz U. et al.** — *Phys.Rev.*, 1992, vol.D46, p.1928.
160. **Besson D. et al.** — *Phys.Rev.Lett.*, 1985, vol.54, p.381.
161. **Schepkin M., Zaboronsky O., Clement H.** — *Zeitschrift für Physik*, 1993, vol.A345, p.407.
162. **Efremenko Yu.V. et al.** — Preprint ITEP 4-94, 1994, Moscow.
163. **Knight W.D. et al.** — *Phys.Rev.Lett.*, 1984, vol.52, p.2141; *Phys.Rev.*, 1985, vol.B31, p.2539; vol.B32, p.1366; **Katakuse I. et al.** — *Int. J.Mass Spectr. and Ion Proces.*, 1986, vol.67, p.229; vol.69, p.109.
164. **De Heer W.A. et al.** — *Solid State Phys.*, 1987, vol.40, p.93.
165. **Bjornholm S.** — *Contemp.Phys.*, 1990, vol.31, p.309.
166. **Несеренко В.О.** — ЭЧАЯ, 1992, т.23, с.1665.
167. **Nishioka H.** — *Z.Phys.*, 1991, vol.D19, p.19.
168. **Nishioka H., Hansen K., Mottelson B.** — *Phys.Rev.*, 1990, vol.B42, p.9377.
169. **Чечельницкий А.М.** — Экстремальность, устойчивость, резонансность в астеродинамике и космонавтике. М.: Машиностроение, 1980; Доклады АН СССР, 1988, т.303, с.1082.
170. **Гухман А.А.** — Введение в теорию подобия. М.: Высшая школа, 1973.
171. **Гухман А.А.** — Применение теории подобия к исследованию процессов тепло-массообмена. М.: Высшая школа, 1967.
172. **Abramovitz M., Stegun I.** — *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover Publications, 1964.

173. **Olver F.** — Asymptotics and Special Functions. Academic Press, 1974.
174. **Банг Е., Бунаков В.Е., Гареев Ф.А., Шульц Г.** — ЭЧАЯ, 1974, т.5, с.263.
175. **Банг Е., Гареев Ф.А., Иванова С.П.** — ЭЧАЯ, 1978, т.9, с.286.
176. **Bang J., Gareev F.A., Pinkston W.T., Vaagen J.** — Phys.Reports, 1985, vol.195, p.253.
177. **Декарт Р.** — Рассуждение о методе с приложениями. Диоптрика, метеоры, геометрия. М.: Изд-во АН СССР, 1953.