«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1996, ТОМ 27, ВЫП.2

УДК 530.1:530.145:537:61

# ГАМИЛЬТОНОВ ПОДХОД В ТЕОРИИ КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕД СО СПОНТАННО НАРУШЕННОЙ СИММЕТРИЕЙ

*А.А.Исаев, М.Ю.Ковалевский, С.В.Пелетминский*

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»,
Харьков, Украина

На основе гамильтонова формализма рассмотрена динамика конденсированных сред со спонтанно нарушенной симметрией. Сформулирован метод получения скобок Пуассона динамических переменных, основанный на задании кинематической части лагранжиана и интерпретации внеинтегральных членов в вариации действия как генераторов канонических преобразований. Изучены дифференциальные законы сохранения, связанные с различными симметриями гамильтониана системы. Рассмотрены примеры канонических преобразований, играющих важную физическую роль, и получены их генераторы. Установлена связь гамильтонова и лагранжева подходов. В качестве конкретных физических объектов в обзоре изучена динамика жидких и квантовых кристаллов, многоподрешеточных магнетиков, сверхтекучих жидкостей ($^4$He, $^3$He–$B$), нематических эластомеров.

On the base of Hamiltonian formalism dynamics of condenced media with spontaneously broken symmetry is considered. The method for derivation of dynamic variables'Poisson brackets, based on the setting the Lagrangian kinematic part and interpretation of outside integral terms in the action variation as generators of canonical transformations, is formulated. Differential conservation laws, connected with different system Hamiltonian symmetry properties, have been studied. Examples of canonical transformations playing important physical role are considered and their generators are received. The connection between Hamiltonian and Lagrangian approaches is found. In the review as examples of specific physical objects the dynamics of liquid and quantum crystals, multisublattice magnetics, superfluid liquids ($^4$He, $^3$He–$B$), nematic elastomers is studied.

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время гамильтонов формализм является эффективным методом построения нелинейных динамических уравнений для различных физических систем. Гамильтонов подход сыграл важнейшую роль при создании квантовой механики [1,2] и квантовой теории поля [3—5]. Он также нашел широкое применение в теории точно интегрируемых систем [6—8] и при построении теории возмущений для слабовозмущенных нелинейных уравнений, когда в качестве нулевого приближения фигурирует точно интегрируемая задача [9]. В последнем случае эффективно используется метод усреднения, предложенный в работах [10,11], а также идея об иерархии пространственно-временных масштабов, которые лежат в основе современной кинетической теории [12]. Гамильтонов подход позволяет исследовать динамику как классических конденсированных сред, так и макроскопических квантовых объектов. Для классических конденсированных сред гамильтонов формализм разрабатывается для нормальных жидкостей [13,14], твердых тел [15—17], жидких кристаллов [18—20]. Указанный подход для квантовых конденсированных сред применялся к сверхтекучим жидкостям [21—24], магнетикам [25—27], квантовым кристаллам [28].

Основополагающую роль в гамильтоновом подходе играет определение скобок Пуассона (СП) динамических переменных. В случае конденсированных сред СП динамических переменных, в отличие от обычных механических систем, имеют нетривиальную структуру. Для нормальных физических систем сокращенное описание на гидродинамическом этапе эволюции строится на основе плотностей аддитивных интегралов движения, СП которых хорошо известны. При описании систем со спонтанно нарушенной симметрией вводятся дополнительные гидродинамические параметры, которые не связаны с законами сохранения, а обусловлены указанной нарушенной симметрией. Построение СП для этих переменных (как с плотностями аддитивных интегралов движения, так и между собой) и представляет основную проблему.

В [16] СП выводились на основе рассмотрения вариаций переменных при преобразованиях группы, соответствующих нарушенной симметрии системы. В ряде случаев СП выводились путем замены коммутаторов, которые вычислялись в квантовой механике, на СП. В предлагаемом подходе основополагающую роль при получении СП играет структура кинематической части действия (или лагранжиана); кинематическая часть определяется как часть, содержащая линейным и однородным образом временные производные от динамических переменных. Мы показываем, как могут быть получены СП для переменных различных физических систем, исходя из преобразований, оставляющих инвариантной кинематическую часть действия. При этом внеинтегральные члены в вариации действия интерпретируются как генераторы этих преобразований. Существенным моментом развиваемого подхода является введение дополнительных гидродинамических переменных в терминах величин, сопряженных плотностям аддитивных интегралов движения. Для выяснения структуры кинематической части лагранжиана важную роль играет построение операторов трансляций и их плотностей для различных физических полей, фигурирующих в действии.

На основе развитого подхода рассмотрены классические сплошные среды (теория упругости, гидродинамика, ряд фаз жидких кристаллов, нематические эластомеры), а также магнитоупорядоченные и сверхтекучие системы [29].

В случае классических сплошных сред, установив для них алгебру СП динамических переменных, мы всякий раз для описания рассматриваемого физического состояния выделяем из этой общей алгебры замкнутые подалгебры переменных данной системы. Замкнутая динамика получается при этом в предположении, что переменные, не входящие в подалгебру, являются циклическими (гамильтониан $H$ не зависит от таких переменных). Это позволяет на единой основе проследить, как могут быть получены известные уравнения теории упругости, гидродинамики, динамики жидкокристаллических фаз из общих уравнений динамики сплошных сред.

При изучении магнитоупорядоченных систем найдена общая алгебра СП, соответствующая магнетику с полным нарушением симметрии относительно спиновых вращений, и в качестве подалгебр выделены СП переменных, описывающих одноосный спиральный магнетик и антиферромагнетик. Также показано, как, исходя из выражения для кинематической части действия в терминах обобщенных координат и импульсов, могут быть получены СП для переменных квадрупольного магнетика. Далее рассмотрена динамика магнитоупругих сред, в число динамических переменных которых входят как переменные, соответствующие сплошным средам, так и переменные, соответствующие магнетизму.

При изучении систем с нарушенной фазовой инвариантностью нами рассмотрены случаи квантового кристалла, сверхтекучих фаз $^4$He, $^3$He–$B$, а также произведен учет спиновых степеней свободы в уравнениях динамики квантового кристалла (квантовые спиновые кристаллы).

Подчеркнем, что включение дополнительных термодинамических параметров, не связанных с законами сохранения (параметров порядка), в полную систему нелинейных гидродинамических уравнений не является тривиальной задачей. Для рассмотрения этих задач мы используем гамильтонов подход, который позволяет без потери физической ясности последовательно получать бездиссипативные уравнения гидродинамики, автоматически учитывающие требуемые свойства симметрии гамильтониана, а также находить плотности потоков аддитивных интегралов движения в терминах плотностей аддитивных интегралов движения. Остановимся теперь на основах развиваемого формализма.

## 1. ОСНОВЫ ФОРМАЛИЗМА

Представим лагранжиан системы в виде

$$L = L_k(\varphi, \dot{\varphi}) - H(\varphi) \equiv \int d^3x F_\alpha(x; \varphi)\, \dot{\varphi}_\alpha(x) - H(\varphi), \tag{1.1}$$

где $L_k(\varphi, \dot{\varphi})$ — кинематическая часть лагранжиана, $H(\varphi)$ — гамильтониан, $F_\alpha(x; \varphi(x'))$ — некоторый функционал динамических переменных $\varphi_\alpha(x)$. Рассмотрим бесконечно малые преобразования полевых переменных $\varphi_\alpha(x)$:

$$\varphi_\alpha(x, t) \to \varphi'_\alpha(x, t) = \varphi_\alpha(x, t) + \delta\varphi_\alpha(x, t) \tag{1.2}$$

(мы не будем далее явно выписывать аргумент $t$ в динамических переменных и их вариациях). Вариация действия $W = \int\limits_{t_1}^{t_2} L\, dt$, обусловленная преобразованиями (1.2), имеет вид

$$\delta W = G(t_2, \varphi) - G(t_1, \varphi) +$$
$$+ \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x' \delta\varphi_\beta(x') \left( \int d^3x J_{\beta\alpha}(x', x; \varphi)\, \dot{\varphi}_\alpha(x) - \frac{\delta H}{\delta\varphi_\beta(x')} \right), \tag{1.3}$$

где

$$G(t, \varphi) = \int d^3x F_\alpha(x, \varphi)\, \delta\varphi_\alpha(x); \quad J_{\alpha\beta}(x, x'; \varphi) = \frac{\delta F_\beta(x'; \varphi)}{\delta\varphi_\alpha(x)} - \frac{\delta F_\alpha(x; \varphi)}{\delta\varphi_\beta(x')}.$$

Из принципа стационарного действия следует, что уравнения для компонент поля $\varphi_\alpha(x)$ имеют вид

$$\dot{\varphi}_\alpha(x) = \int d^3x' J^{-1}_{\alpha\beta}(x, x'; \varphi) \frac{\delta H}{\delta\varphi_\beta(x')}. \tag{1.4}$$

Здесь обратная матрица $J^{-1}_{\alpha\beta}(x, x')$ определена равенством

$$\int d^3x'' J_{\alpha\nu}(x, x'') J^{-1}_{\nu\beta}(x'', x') = \delta_{\alpha\beta}\delta(x - x').$$

В силу антисимметрии $J_{\alpha\beta}(x, x')$ относительно перестановки $\alpha \leftrightarrow \beta$, $x \leftrightarrow x'$ матрица $J_{\alpha\beta}(x, x')$ является невырожденной только в случае четного числа переменных $\varphi_\alpha(x)$.

Определим СП произвольных функционалов $A$ и $B$ динамических переменных $\varphi_\alpha(x)$ равенством

$$\{A, B\} = \int d^3x d^3x' \frac{\delta A}{\delta\varphi_\alpha(x)} J^{-1}_{\alpha\beta}(x, x'; \varphi) \frac{\delta B}{\delta\varphi_\beta(x')}. \tag{1.5}$$

Тогда уравнения движения (1.4) примут гамильтонов вид

$$\dot{\varphi}_\alpha(x) = \{\varphi_\alpha(x), H\}. \tag{1.6}$$

Из определения (1.5), с учетом (1.3), следует, что СП произвольных функционалов $A$ и $B$ удовлетворяют соотношениям

$$\{A, B\} = -\{B, A\},\ \{AB, C\} = A\{B, C\} + B\{A, C\}$$

и тождеству Якоби

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0.$$

Последнее справедливо в силу равенства

$$\frac{\delta J_{\alpha\beta}(\varphi)}{\delta\varphi_\gamma(x)} + \frac{\delta J_{\beta\gamma}(\varphi)}{\delta\varphi_\alpha(x)} + \frac{\delta J_{\gamma\alpha}(\varphi)}{\delta\varphi_\beta(x)} = 0.$$

Отметим, что гамильтонова механика в произвольных переменных для систем с конечным числом степеней свободы изучалась Паули [30] (см. также [31]), где, в частности, были получены СП, аналогичные (1.5).

Рассмотрим конечные преобразования

$$\varphi_\alpha(x) \to \varphi'_\alpha(x) = \varphi'_\alpha(x; \varphi(x')). \tag{1.7}$$

Преобразования (1.7) называются каноническими, если выполнено условие

$$\int d^3x F_\alpha(x; \varphi)\, \delta\varphi_\alpha(x) - \int d^3x F_\alpha(x; \varphi')\, \delta\varphi'_\alpha(x) = \delta Q(\varphi). \tag{1.8}$$

Здесь $Q(\varphi)$ — некоторый функционал динамических переменных $\varphi_\alpha$, зависящий от структуры канонических преобразований. Так как соотношение (1.8) эквивалентно равенству

$$\frac{\delta Q}{\delta\varphi_\alpha(x)} = F_\alpha(x, \varphi) - \int d^3x_1 F_\lambda(x_1, \varphi') \frac{\delta\varphi'_\lambda(x_1)}{\delta\varphi_\alpha(x)}, \tag{1.9}$$

то, с учетом формулы

$$\frac{\delta^2 Q}{\delta\varphi_\alpha(x)\,\delta\varphi_\beta(x')} = \frac{\delta^2 Q}{\delta\varphi_\beta(x')\,\delta\varphi_\alpha(x)},$$

представим условие каноничности в виде

$$J_{\alpha\beta}(x, x'; \varphi) = \int d^3x_1 d^3x_2 \frac{\delta\varphi_\lambda'(x_1)}{\delta\varphi_\alpha(x)} \frac{\delta\varphi_\nu'(x_2)}{\delta\varphi_\beta(x')} J_{\lambda\nu}(x_1, x_2; \varphi'). \tag{1.10}$$

В случае бесконечно малых преобразований

$$\varphi_\alpha(x) \to \varphi_\alpha'(x) = \varphi_\alpha(x) + \delta\varphi_\alpha(x; \varphi(x'))$$

соотношение (1.9) принимает вид

$$\int d^3x' J_{\alpha\beta}(x, x'; \varphi)\,\delta\varphi_\beta(x') = \frac{\delta G}{\delta\varphi_\alpha(x)}, \qquad G = \delta Q + \int d^3x F_\alpha(x, \varphi)\,\delta\varphi_\alpha(x),$$

или, с учетом (1.5),

$$\delta\varphi_\alpha(x) = \{\varphi_\alpha(x), G\}, \tag{1.11}$$

где $G$ — генератор бесконечно малых канонических преобразований. Нетрудно проверить, что СП (1.5) инвариантны относительно канонических преобразований (1.7), (1.10).

Рассмотрим теперь преобразования (1.7), оставляющие инвариантной кинематическую часть лагранжиана. Такие преобразования удовлетворяют соотношению

$$F_\alpha(x; \varphi) = \int d^3x' F_\beta(x'; \varphi') \frac{\delta\varphi_\beta'(x'; \varphi)}{\delta\varphi_\alpha(x)},$$

и, согласно (1.9), являются каноническими с $Q(\varphi) = \mathrm{const}$. Для бесконечно малых преобразований последнее равенство запишется в виде (1.11) с генератором $G = \int d^3x F_\alpha(x; \varphi)\,\delta\varphi_\alpha(x)$, определяемым формулой (1.3). Интерпретация внеинтегральных членов в вариации действия как генераторов бесконечно малых преобразований для квантового случая впервые была приведена Швингером [3].

Расширение рассмотренного класса вариаций может быть достигнуто прибавлением к лагранжиану полной производной по времени от произвольного функционала $\chi(\varphi)$. Соответствующее уравнение для расширенного класса вариаций имеет вид

$$\int d^3x' J_{\alpha\beta}(x, x', \varphi)\,\delta\varphi_\beta(x') = \frac{\delta}{\delta\varphi_\alpha(x)}\left( G + \int d^3x' \frac{\delta\chi(\varphi)}{\delta\varphi_\beta(x')}\,\delta\varphi_\beta(x') \right).$$

Для конечных преобразований (1.7) условие инвариантности кинематической части лагранжиана с учетом неопределенности в выборе $L$:

$$L \to L' = L + \int d^3x \frac{\delta\chi(\varphi)}{\delta\varphi_\alpha(x)} \dot{\varphi}_\alpha(x)$$

запишется в виде

$$F_\alpha(x;\varphi) = \int d^3x' F_\beta(x';\varphi') \frac{\delta\varphi'_\beta(x';\varphi)}{\delta\varphi_\alpha(x)} + \frac{\delta\chi(\varphi')}{\delta\varphi_\alpha(x)} - \frac{\delta\chi(\varphi)}{\delta\varphi_\alpha(x)}. \qquad (1.12)$$

Преобразования (1.7), (1.12) являются каноническими с $Q = \chi(\varphi') - \chi(\varphi)$.

В рамках гамильтонова подхода могут быть просто сформулированы дифференциальные законы сохранения, связанные с различными свойствами симметрии гамильтониана. Уравнения движения для плотности произвольной физической величины $A = \int d^3x a(x)$ может быть представлено в виде

$$\dot{a}(x) = \{a(x), H\} \equiv \{A, \varepsilon(x)\} - \nabla_k a_k(x), \qquad (1.13)$$

где

$$a_k(x) = \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\lambda \{a(x+\lambda x'), \varepsilon(x-(1-\lambda)x')\}.$$

Если величина $A$ есть генератор $G$ группы симметрии гамильтониана, то уравнение (1.13) имеет вид дифференциального закона сохранения (см. ниже). При этом сам генератор $G$ не зависит от времени. Действительно,

$$\dot{G} = \{G, H\} = -\{H, G\} = -\delta H, \qquad (1.14)$$

где $\delta H$ — вариация гамильтониана, обусловленная преобразованиями (1.11). Отсюда, если $\delta H = 0$, то и $\dot{G} = 0$.

Полагая в формуле (1.13) $a(x) = \rho(x)$, где $\rho(x)$ — плотность вещества, и считая, что

$$\{M, \varepsilon(x)\} = 0, \qquad M \equiv \int d^3x\, \rho(x),$$

получим дифференциальный закон сохранения плотности массы:

$$\dot{\rho}(x) = -\nabla_k j_k(x), \quad j_k(x) = \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\lambda \{\rho(x+\lambda x'), \quad \varepsilon(x-(1-\lambda)x')\}. \, (1.15)$$

Здесь $j_k$ — плотность потока массы.

Если $a(x) = \pi_i(x)$, где $\pi_i(x)$ — плотность импульса, и плотность энергии удовлетворяет условию трансляционной инвариантности:

$$\{P_i(x), \varepsilon(x)\} = \nabla_i\, \varepsilon(x), \qquad P_i \equiv \int d^3x\, \pi_i(x),$$

то из (1.13) получим дифференциальный закон сохранения импульса:

$$\dot{\pi}_i(x) = -\nabla_k t_{ik}(x),$$

$$t_{ik}(x) = -\varepsilon(x)\,\delta_{ik} + \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\lambda\, \{\pi_i(x+\lambda x'), \varepsilon(x-(1-\lambda)x')\}. \tag{1.16}$$

Здесь $t_{ik}$ — тензор натяжений.

Положим в (1.13) $a(x) = s_\alpha(x)$, где $s_\alpha(x)$ — плотность спина. Если выполняется условие вращательной инвариантности плотности энергии относительно спиновых вращений

$$\{S_\alpha, \varepsilon(x)\} = 0, \qquad S_\alpha = \int d^3x s_\alpha(x),$$

то формула (1.13) приводит к закону сохранения:

$$\dot{s}_\alpha(x) = -\nabla_k j_{\alpha k}(x),$$

$$j_{\alpha k}(x) = \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\lambda \{s_\alpha(x+\lambda x'), \varepsilon(x-(1-\lambda)x')\}. \tag{1.17}$$

Здесь $j_{\alpha k}$ — плотность потока спина.

При $a(x) = \varepsilon(x)$ из (1.13) получим дифференциальный закон сохранения энергии:

$$\dot{\varepsilon}(x) = -\nabla_k q_k(x),$$

$$q_k(x) = \frac{1}{2}\int d^3x' x'_k \int_0^1 d\lambda \{\varepsilon(x+\lambda x'), \varepsilon(x-(1-\lambda)x')\}, \tag{1.18}$$

где $q_k$ — плотность потока энергии.

## 2. ДИНАМИКА КЛАССИЧЕСКИХ СПЛОШНЫХ СРЕД

Перейдем к рассмотрению динамики сплошных сред [32]. В терминах лагранжевых переменных $\xi_i$ положение частицы среды характеризуется функциями $x_k(\xi, t)$ (лагранжевы координаты $\xi_i$ можно рассматривать как координаты частицы в начальном положении, соответствующем недеформированному состоянию). Запишем лагранжиан системы в виде

$$L = L_k - \int d^3\xi \underline{\varepsilon}(\xi), \tag{2.1}$$

где $\underline{\varepsilon}(\xi) = \underline{\varepsilon}\left(\underline{\pi}(\xi); \frac{\partial x}{\partial \xi}\right)$ — плотность энергии, являющаяся функционалом производных $\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}$, $L_k$ — кинематическая часть лагранжиана:

$$L_k = \int d^3\xi\, \underline{\mathcal{L}}_k(\xi), \quad \underline{\mathcal{L}}_k(\xi) = \underline{\pi}_i(\xi)\, \dot{x}_i(\xi) \tag{2.2}$$

и $\underline{\pi}_i(\xi)$ — плотность импульса в лагранжевых переменных.

Перейдем в выражении (2.2) для плотности кинематической части $\underline{\mathcal{L}}_k(\xi)$ к эйлеровым переменным $x_k$. Для этого введем вектор смещения частиц сплошной среды:

$$x_i(t) = \xi_i + u_i(x, t). \tag{2.3}$$

Замечая, что

$$b_{ij}(x)\, \dot{x}_j = \dot{u}_i(x), \quad b_{ij}(x) = \delta_{ij} - \nabla_j u_i(x), \tag{2.4}$$

представим плотность кинематической части лагранжиана в виде

$$\mathcal{L}_k(x) = \pi_i(x)\, b_{ij}^{-1}(x)\, \dot{u}_j(x), \tag{2.5}$$

где $\pi_i(x) = \left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right| \underline{\pi}_i(\xi)$ — плотность импульса в эйлеровых переменных. С использованием данной кинематической части могут быть получены СП для переменных $u_i(x)$, $\pi_i(x)$. Нам, кроме того, для формулировки уравнения адиабатичности понадобятся СП, содержащие плотность энтропии $\sigma(x)$. Для нахождения этих СП перепишем кинематическую часть лагранжиана в виде

$$\mathcal{L}_k(x) = p_j(x)\, \dot{u}_j(x) - \sigma(x)\, \dot{\psi}(x), \tag{2.6}$$

где

$$p_j(x) = (\pi_i(x) - \sigma(x)\nabla_i\, \psi(x))\, b_{ij}^{-1}(x).$$

Переменная $\psi(x)$, которая является сопряженной к переменной $\sigma(x)$, введена в кинематическую часть лагранжиана формально и при написании уравнений движения будет считаться циклической (гамильтониан $H$ не зависит от $\psi$). Происхождение второго слагаемого в формуле (2.6) достаточно прозрачно, в то время как структура величины $p_j$ требует пояснения. Заметим, что плотность импульса $\pi_i(x)$ в (2.5) связана с трансляциями в пространстве переменных $u_i(x)$, $\pi_i(x)$. При введении новых переменных $\sigma(x)$, $\psi(x)$ плотность импульса $\pi_i(x)$ связана уже с трансляциями в полном пространстве переменных $u_i(x)$, $\pi_i(x)$, $\sigma(x)$, $\psi(x)$ и может быть представлена в виде

$$\pi_i(x) = \pi_i^*(x) + \pi_i^\sigma(x),$$

где $\pi_i^*(x)$ — плотность импульса, связанная с трансляциями в пространстве только переменных $u_i(x)$, $\pi_i(x)$, а $\pi_i^\sigma(x)$ — с трансляциями в пространстве $\sigma(x)$, $\psi(x)$. Величина $\pi_i^\sigma(x)$, как будет видно далее, равна

$$\pi_i^\sigma(x) = \sigma(x)\nabla_i\, \psi(x)$$

(эту формулу легко предугадать, заметив, что величины $\psi(x)$ и $-\sigma(x)$ являются обобщенными координатами и импульсами). Поэтому плотность импульса $\pi_i^*(x)$, связанная с трансляциями в пространстве переменных $u_i(x)$, $\pi_i(x)$, имеет вид

$$\pi_i^*(x) = \pi_i(x) - \sigma(x)\nabla_i\, \psi(x),$$

откуда и следует структура величины $p_j$ в (2.6). Приведенные соображения носят только наводящий характер и не являются строгими. Отметим, что, в соответствии с общим формализмом, для нахождения СП основных динамических переменных необходимо было бы найти обратную матрицу $J^{-1}_{\alpha\beta}$. Однако мы поступим иначе и будем придерживаться следующей схемы. Прежде всего, найдем какие-либо бесконечно малые канонические преобразования $\delta\varphi_\alpha(x;\varphi)$, оставляющие инвариантной кинематическую часть лагранжиана. Зная, с одной стороны, их явный вид, а с другой стороны, представляя $\delta\varphi_\alpha$ в виде (1.11)

$$\delta\varphi_\alpha(x) = \{\varphi_\alpha(x), G\}$$

с генератором

$$G = \int d^3x F_\alpha(x,\varphi)\,\delta\varphi_\alpha(x)$$

(мы придерживаемся здесь общих обозначений и для удобства еще раз выписываем формулы первого раздела), нетрудно, сравнивая левую и правую части формулы (1.11), найти СП различных динамических переменных.

В частности, легко видеть, что вариации

$$\delta p_i(x) = \delta\sigma(x) = 0, \qquad \delta u_i(x) = f_i(x), \qquad \delta\psi(x) = \chi(x) \tag{2.7}$$

(где функции $f_i(x)$, $\chi(x)$ не зависят от $u_i(x)$, $p_i(x)$, $\sigma(x)$, $\psi(x)$) оставляют инвариантной кинематическую часть лагранжиана (2.6). Представляя их в виде

$$\delta p_i(x) = \{p_i(x), G\}, \quad \delta u_i(x) = \{u_i(x), G\},$$

$$\delta\sigma(x) = \{\sigma(x), G\}, \quad \delta\psi(x) = \{\psi(x), G\}, \tag{2.8}$$

где $G$ — генератор преобразований (2.7), равный

$$G = \int d^3x(p_i(x) f_i(x) - \sigma(x)\,\chi(x)), \tag{2.9}$$

из (2.8), (2.9) получим СП:

$$\{u_i(x), p_j(x')\} = \delta_{ij}\,\delta(x - x'), \qquad \{\sigma(x), \psi(x')\} = \delta(x - x') \tag{2.10}$$

(мы выписываем только нетривиальные СП). Теперь могут быть найдены СП физических переменных $u_i(x)$, $\pi_i(x)$, $\sigma(x)$, $\psi(x)$. Как легко убедиться, из формул

$$\{\pi_i^*(x), \psi(x')\} = \{\pi_i^*(x), \sigma(x')\} = 0,$$

где

$$\pi_i^*(x) \equiv \pi_i(x) - \sigma(x)\nabla_i\,\psi(x) = p_j(x)\,b_{ji}(x),$$

следуют формулы

$$\{\pi_i(x), \sigma(x')\} = -\sigma(x)\nabla_i\,\delta(x - x'), \qquad \{\pi_i(x), \psi(x')\} = \nabla_i\,\psi(x)\,\delta(x - x'). \tag{2.11}$$

С учетом (2.10), для величин $\pi_i^\sigma(x) \equiv \sigma(x)\nabla_i\,\psi(x)$ имеем

$$\{\pi_i^\sigma(x), \pi_k^\sigma(x')\} = \pi_k^\sigma(x)\nabla_i'\,\delta(x - x') - \pi_i^\sigma(x')\nabla_k\,\delta(x - x').$$

Отсюда и из формулы

$$\{p_i(x), p_k(x')\} = 0$$

получим

$$\{\pi_i(x), \pi_k(x')\} = \pi_k(x)\nabla_i'\delta(x - x') - \pi_i(x')\nabla_k\,\delta(x - x'). \tag{2.12}$$

Первое из соотношений (2.10) приводит к равенству

$$\{u_i(x), \pi_k(x')\} = b_{ik}(x)\,\delta(x - x'). \tag{2.13}$$

Формулы (2.10)—(2.13) определяют систему нетривиальных СП континуума:

$$\{\sigma(x), \psi(x')\} = \delta(x - x'), \quad \{\pi_i(x), \sigma(x')\} = -\,\sigma(x)\nabla_i\,\delta(x - x'),$$

$$\{\pi_i(x), \psi(x')\} = \nabla_i\,\psi(x)\,\delta(x - x'), \quad \{u_i(x), \pi_k(x')\} = b_{ik}(x)\,\delta(x - x'),$$

$$\{\pi_i(x), \pi_k(x')\} = \pi_k(x)\nabla_i'\delta(x - x') - \pi_i(x')\nabla_k\,\delta(x - x'). \tag{2.14}$$

Учтем теперь, что, если $\tilde{\rho}$ — плотность вещества, отнесенная к единице недеформированного объема, то истинная плотность $\rho$ определяется формулой

$$\rho = \tilde{\rho}\,\det(b_{ij}). \tag{2.15}$$

Принимая во внимание (2.13), (2.15), найдем СП переменных $\rho(x)$, $\pi_i(x)$:

$$\{\pi_i(x), \rho(x')\} = \rho(x)\nabla_i'\delta(x - x'). \tag{2.16}$$

Перейдем к уравнениям динамики сплошной среды. Гамильтониан рассматриваемой системы в общем случае имеет вид

$$H = \int d^3x\,\varepsilon(x), \;\; \varepsilon(x) = \varepsilon(x;\, \sigma(x'), \pi_i(x'), b_{ij}\,(x')).$$

Здесь $\varepsilon(x)$ — плотность энергии в эйлеровых переменных, являющаяся функционалом величин $\sigma(x)$, $\pi_i(x)$, $b_{ij}\,(x)$ (переменная $\psi$ — циклическая) и связанная с плотностью энергии в лагранжевых переменных формулой

$$\varepsilon(x) = \left|\frac{\partial\xi}{\partial x}\right| \underline{\varepsilon}(\xi).$$

Отметим, что в силу свойства инвариантности $\varepsilon(x)$ относительно трансляций лагранжевых координат (которое будет предполагаться в дальнейшем, см. (3.12), (3.14)) плотность энергии $\varepsilon(x)$ зависит не от самих величин $u_i(x)$, а только от их производных $\partial u_i/\partial x_j$, или, что то же самое, от величин $b_{ij}\,(x)$. Поэтому удобно в качестве динамических переменных, наряду с остальными, выбрать непосредственно величины $b_{ij}\,(x)$. Их ненулевая СП с плотностью импульса $\pi_i(x)$ равна

$$\{b_{ij}\,(x), \pi_k(x')\} = -\,b_{ik}(x')\nabla_j\,\delta(x - x'). \tag{2.17}$$

Используя СП (2.14), (2.17), получим уравнения динамики сплошной среды в виде

$$\dot{\sigma}(x) = -\nabla_i\left(\sigma(x)\,\frac{\delta H}{\delta\pi_i(x)}\right), \quad \dot{b}_{ik}(x) = -\nabla_k\left(b_{ij}\,(x)\,\frac{\delta H}{\delta\pi_j\,(x)}\right),$$

$$\dot{\pi}_i(x) = -\pi_j(x)\nabla_i \frac{\delta H}{\delta \pi_j(x)} - \nabla_j \left( \pi_i(x) \frac{\delta H}{\delta \pi_j(x)} \right) -$$
$$- b_{ki}(x)\nabla_j \frac{\delta H}{\delta b_{kj}(x)} - \sigma(x)\nabla_i \frac{\delta H}{\delta \sigma(x)}. \tag{2.18}$$

Как правило, в теории сплошных сред вместо второго уравнения в (2.18) записывают уравнение непосредственно для вектора смещения

$$\dot{u}_i(x) = -b_{ij}(x) \frac{\delta H}{\delta \pi_j(x)}.$$

Если предположить, что гамильтониан системы обладает свойством галилеевской инвариантности

$$H = H_0 + V(b(x')), \qquad H_0 = \int d^3x \frac{\pi^2(x)}{2\rho(x)}, \tag{2.19}$$

то из (2.18) получим

$$\dot{\sigma}(x) = -\nabla_i \left( \sigma(x) \frac{\pi_i(x)}{\rho(x)} \right), \qquad \dot{b}_{ik}(x) = -\nabla_k \left( b_{ij}(x) \frac{\pi_j(x)}{\rho(x)} \right),$$
$$\dot{\pi}_i(x) = -\nabla_j \frac{\pi_i(x)\,\pi_j(x)}{\rho(x)} - b_{ki}(x)\nabla_j \frac{\delta V}{\delta b_{kj}(x)} - \sigma(x)\nabla_i \frac{\delta V}{\delta \sigma(x)}. \tag{2.20}$$

Если плотность энергии взаимодействия $v(x)$ $(V = \int d^3x v(x))$ зависит от величин $b(x)$, $\sigma(x)$ только локально: $v(x) = v(b(x), \sigma(x))$, то для последнего из уравнений (2.20) имеем

$$\dot{\pi}_i = -\nabla_j t_{ij}, \qquad t_{ij} = \frac{\pi_i \pi_j}{\rho} + b_{ki} \frac{\partial v}{\partial b_{kj}} + \left( -v + \sigma \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right) \delta_{ij}. \tag{2.21}$$

В дальнейшем нам понадобится свойство инвариантности гамильтониана сплошной среды относительно вращений, которое мы запишем в виде

$$\{\mathcal{L}_i, \varepsilon(x)\} = \varepsilon_{ikl} x_k \frac{\partial \varepsilon(x)}{\partial x_l}, \qquad \mathcal{L}_i = \int d^3x\, \varepsilon_{ikl} x_k \pi_l(x). \tag{2.22}$$

## 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Рассмотрим физическую интерпретацию некоторых преобразований, оставляющих инвариантной кинематическую часть лагранжиана. Пусть $x_i \to x_i' = x_i'(x)$ есть произвольное конечное преобразование, при котором вектор смещения преобразуется по закону

$$u_i(x, t) \to u_i'(x', t) = u_i(x, t) + x_i' - x_i \tag{3.1}$$

(закон (3.1) соответствует смещению частицы с лагранжевой координатой $\xi_i$ из точки $x_i$ в точку $x_i'$). Так как $\dot{u}_i'(x', t) = \dot{u}_i(x, t)$ (функции $x_i'(x)$ не зависят от $t$) и

$$b_{ij}'(x') = b_{is}(x) \frac{\partial x_s}{\partial x_j'}$$

(см. (2.4), (3.1)), то плотность кинематической части лагранжиана может быть записана в виде

$$\mathcal{L}_k = (\pi_i'(x') - \sigma'(x')\nabla_i'\psi'(x')) \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| b_{ij}'^{-1}(x')\, \dot{u}_j'(x') - \sigma'(x') \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \dot{\psi}'(x'),$$

где мы определили закон преобразования плотности импульса

$$\pi_i(x) \to \pi_i'(x') = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| \frac{\partial x_s}{\partial x_i'} \pi_s(x) \tag{3.2}$$

и величин $\psi(x)$, $\sigma(x)$:

$$\psi(x) \to \psi'(x') = \psi(x), \qquad \sigma(x) \to \sigma'(x') = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| \sigma(x) \tag{3.3}$$

таким образом, чтобы кинематическая часть $L_k$ лагранжиана была инвариантна относительно конечных преобразований $x_i \to x_i' = x_i'(x)$. В новых переменных для $L_k$ имеем

$$\begin{aligned} L_k &= \int d^3x' \{p_j'(x')\, u_j'(x') - \sigma'(x')\, \dot{\psi}'(x')\} = \\ &= \int d^3x \{p_j'(x)\, \dot{u}_j'(x) - \sigma'(x)\, \dot{\psi}'(x)\}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где

$$p_j'(x) = (\pi_i'(x) - \sigma'(x)\nabla_i\, \psi'(x))\, b_{ij}'^{-1}(x).$$

Из (3.4) следует, что вариации динамических переменных $u_i(x)$, $\pi_i(x)$, $\psi(x)$, $\sigma(x)$ при бесконечно малых преобразованиях $x_i \to x_i' = x_i + \chi_i(x)$, $|\chi_i(x)| << 1$, должны быть определены равенствами

$$\delta f(x) = f'(x) - f(x), \quad f = \{u_i, \pi_i, \psi, \sigma\}, \tag{3.5}$$

Принимая во внимание (3.1)—(3.3), для вариаций (3.5) получим

$$\delta u_i(x) = b_{ij}(x)\, \chi_j(x), \quad \delta\psi(x) = -\chi_i(x)\nabla_i\, \psi(x), \quad \delta\sigma(x) = -\nabla_i(\chi_i(x)\, \sigma(x)),$$

$$\delta\pi_i(x) = -\nabla_j\,(\chi_j\,(x)\,\pi_i(x)) - \pi_j\,(x)\nabla_i\,\chi_j\,(x). \tag{3.6}$$

Эти вариации, оставляющие инвариантной кинематическую часть функции Лагранжа, являются, согласно общей теории, бесконечно малыми каноническими преобразованиями, генератор которых равен

$$G = \int d^3x\pi_i(x)\,b_{ij}^{-1}(x)\,\delta u_j\,(x) = \int d^3x\pi_i(x)\,\chi_i(x). \tag{3.7}$$

Рассмотрим преобразования (3.6) при $\chi_i = \mathrm{const}$:

$$\delta u_i(x) = \chi_i - \chi_k\nabla_k\,u_i(x), \qquad \delta\psi(x) = -\,\chi_i(x)\nabla_i\,\psi(x),$$

$$\delta\sigma(x) = -\,\chi_i(x)\nabla_i\,\sigma(x), \qquad \delta\pi_i(x) = -\,\chi_j\,(x)\nabla_j\,\pi_i(x). \tag{3.8}$$

Вариации (3.8) соответствуют бесконечно малым трансляциям эйлеровых координат $\delta x_k = \chi_k$, $\delta\xi_k = 0$ (с учетом связи $\xi_i = x_i - u_i(x)$) с генератором

$$G = \chi_k P_k\,, \quad P_k = \int d^3x\,\pi_k(x). \tag{3.9}$$

Из (3.8), (3.9) найдем

$$\delta\varepsilon(x) = \{\varepsilon(x),\,G\} = -\,\chi_k\nabla_k\,\varepsilon(x), \tag{3.10}$$

и, следовательно, $\delta H = \delta(\int dx\,\varepsilon(x)) = 0$. Поэтому величина $P_k$, согласно (1.14), является интегралом движения и может интерпретироваться как импульс среды. С учетом (1.14), (3.10) дифференциальный закон сохранения для плотности импульса среды имеет вид (1.16). Если гамильтониан системы обладает галилеевской инвариантностью (см. (2.19)), то для тензора натяжений $t_{ik}$ получим

$$\begin{gathered} t_{ik} = t_{ik}^0 + t'_{ik}\,, \qquad t_{ik}^0 = \frac{\pi_i\pi_k}{\rho}\,, \\ t_{ik} = -v(x)\,\delta_{ik} + \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\lambda\{\pi_i(x+\lambda x'),\,v(x-(1-\lambda)x')\}. \end{gathered} \tag{3.11}$$

Рассмотрим теперь бесконечно малые преобразования (2.7) с $f_i = \mathrm{const}$, $\chi = 0$:

$$\delta u_i(x) = f_i\,, \quad \delta\psi(x) = 0, \quad \delta\pi_i(x) = 0, \quad \delta\sigma(x) = 0. \tag{3.12}$$

Так как $x_i = \xi_i + u_i(x)$, то этим преобразованиям отвечают трансляции лагранжевых координат $\delta\xi_i = -f_i(\delta x_i = 0)$. Генератор преобразований (3.12) имеет вид

$$G = f_i R_i, \quad R_i = \int d^3x p_i(x), \quad p_i(x) = \pi_j^*(x)\, b_{ji}^{-1}(x). \tag{3.13}$$

Поскольку для преобразований (3.12)

$$\delta\varepsilon(x) = \{\varepsilon(x), G\} = 0,$$

и, следовательно, $\delta H = 0$, то величина $R_i$ в выражении (3.13) для генератора трансляций лагранжевых координат является интегралом движения. Соответствующий дифференциальный закон сохранения имеет вид

$$\dot{p}_i(x) = -\nabla_k \tilde{\sigma}_{ik}(x),$$
$$\tilde{\sigma}_{ik}(x) = \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\lambda \{p_i(x + \lambda x'), \varepsilon(x - (1 - \lambda)x')\}. \tag{3.14}$$

Этот закон сохранения можно назвать законом сохранения обобщенного импульса (см. (2.6)). Покажем, что закон сохранения, связанный с трансляциями лагранжевых переменных, приводит к понятию импульса квазичастиц. Пусть среда содержит рассеивающий центр, импульс которого обозначим $q_i$. В этом случае величина $P_i = \int dx\, \pi_i(x)$ сохраняться не будет, а сохраняется величина $P_i + q_i$ (так как гамильтониан инвариантен относительно одновременного сдвига эйлеровых координат и координат частицы). Инвариантность же гамильтониана по отношению к трансляциям лагранжевых переменных будет формулироваться в прежнем виде. Поэтому величина $R_i$ будет интегралом движения. Представим ее в виде

$$R_i = P_i - \mathcal{P}_i, \quad \mathcal{P}_i = \int d^3x k_i(x), \quad k_i(x) = -\pi_j^*(x)\frac{\partial u_j(x)}{\partial \xi_i}.$$

Вследствие сохранения величины $R_i$ приходим к соотношению $\dot{P}_i = \dot{\mathcal{P}}_i$, а так как $\dot{P}_i + \dot{q}_i = 0$, то $\dot{q}_i + \dot{\mathcal{P}}_i = 0$. Поэтому величина $\mathcal{P}_i$, квадратичная по динамическим переменным $u_i(x)$, $\pi_i^*(x)$, может интерпретироваться как импульс квазичастиц. (Можно показать, что при квантовании изучаемой механической системы величина $\mathcal{P}_i$ превращается в оператор импульса фононов: $\mathcal{P}_i = \sum\limits_{kj} k_i c_j^+(k) c_j(k)$). Таким образом, изменение импульса среды совпадает с изменением суммарного импульса квазичастиц. Замечая, что $p_i(x) = \pi_i^*(x) - k_i(x)$ и учитывая формулы (3.11), (3.14), находим

$$\dot{k}_i(x) = -\nabla_k \sigma_{ik}(x),$$

где плотность потока импульса квазичастиц $\sigma_{ik}$ определяется соотношением

$$\sigma_{ik}(x) = -\varepsilon(x)\,\delta_{ik} + \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\lambda \{k_i(x+\lambda x'), \varepsilon(x-(1-\lambda)\,x')\}.$$

Из (3.8), (3.12) следует, что генератором преобразований трансляций

$$\delta u_i(x) = -\chi_k \nabla_k\, u_i(x), \qquad \delta\pi_i(x) = -\chi_k \nabla_k\, \pi_i(x),$$

$$\delta\psi(x) = -\chi_k \nabla_k\, \psi(x), \qquad \delta\sigma(x) = -\chi_k \nabla_k\, \sigma(x)$$

динамических переменных $u_i$, $\pi_i$, $\psi$, $\sigma$, рассматриваемых как полевые переменные, является величина $K = \chi_i \int d^3x k_i(x)$. Поэтому импульс квазичастиц совпадает с полевым импульсом.

## 4. УПРУГОСТЬ. ГИДРОДИНАМИКА

Рассмотрим теперь, как могут быть получены уравнения теории упругости из общих динамических уравнений (2.20), (2.21) сплошной среды. Предположение об инвариантности гамильтониана системы относительно произвольных вращений решетки (см. (2.22)) приводит к тому, что плотность энергии взаимодействия будет зависеть от вполне определенных комбинаций матрицы $b_{ij}$. Поскольку при вращениях тела преобразуются координаты $x_k$, соответствующие положениям частиц среды в деформированном состоянии, а лагранжевы координаты $\xi_k$ остаются неизменными, то в качестве инвариантов могут быть выбраны величины

$$K_{ij} = \frac{\partial\xi_i}{\partial x_k}\frac{\partial\xi_j}{\partial x_k} = b_{ik}\,b_{jk}\,.$$

Таким образом, $\nu(x) = \nu(K_{ij}(x))$, и, как следствие общих уравнений (2.20), (2.21), получим уравнения движения в случае упругой среды:

$$\dot\sigma = -\nabla_i\left(\sigma\frac{\pi_i}{\rho}\right), \qquad \dot b_{ik} = -\nabla_k\left(b_{ij}\frac{\pi_j}{\rho}\right),$$

$$\dot\pi_i = -\nabla_j\, t_{ij}\,, \qquad t_{ij} = \frac{\pi_i\pi_j}{\rho} + 2b_{mi}\,b_{lj}\frac{\partial\nu}{\partial K_{ml}} + \left(-\nu + \sigma\frac{\partial\nu}{\partial\sigma}\right)\delta_{ij}\,. \tag{4.1}$$

Если плотность энергии взаимодействия зависит только от плотности $\rho(x)$, которая связана с инвариантами $K_{ij}$ соотношением

$$\rho = \tilde{\rho} \det (b_{ij}) = \tilde{\rho} \sqrt{\det (K_{ij})}$$

($\tilde{\rho}$ — плотность недеформированной среды), то из уравнений движения упругой среды получим обычные уравнения идеальной гидродинамики

$$\dot{\rho} + \nabla_k \pi_k = 0, \qquad \dot{\sigma} = -\nabla_i \left( \sigma \frac{\pi_i}{\rho} \right),$$
$$\dot{\pi}_i = -\nabla_k t_{ik}, \qquad t_{ik} = \frac{\pi_i \pi_k}{\rho} + p\, \delta_{ik}, \tag{4.2}$$

где

$$p = \rho \frac{\partial v}{\partial \rho} + \sigma \frac{\partial v}{\partial \sigma} - v. \tag{4.3}$$

Уравнения (4.2) могут быть также непосредственно выведены на основе алгебры СП переменных $\rho$, $\pi_i$, $\sigma$ (см. (2.12), (2.16) и первую формулу в (2.11)), которая является подалгеброй алгебры (2.14) переменных сплошной среды. Для получения (4.3) заметим, что, как известно из термодинамики, $p = -\omega$ ($\omega$ — плотность термодинамического потенциала Гиббса). В системе отсчета, движущейся вместе с жидкостью, справедливо термодинамическое равенство

$$\sigma = \frac{1}{T} (-\omega + \varepsilon - \mu \rho) \tag{4.4}$$

($\mu$ — химический потенциал). Учитывая, что

$$d\sigma = \frac{1}{T} (d\varepsilon - \mu d\rho),$$

получим

$$\mu = \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_{\sigma},$$

откуда, используя (4.4), придем к формуле (4.3). Если найдено решение уравнений (4.2) для переменных $\rho$, $\pi_k$, $\sigma$, то зависимость переменной $u_i$ от времени может быть восстановлена по известной зависимости от времени величин $\rho$, $\pi_k$:

$$\dot{u}_i = b_{ij} \frac{\pi_j}{\rho}.$$

## 5. ЖИДКИЕ КРИСТАЛЛЫ

В данном разделе будет показано, как могут быть получены СП для динамических переменных, описывающих состояние различных фаз жидких кристаллов [32]. При этом мы будем исходить из алгебры СП (2.14), (2.17), найденной при рассмотрении сплошных сред.

**5.1. Нематические жидкие кристаллы**. В нематической фазе жидких кристаллов происходит спонтанное нарушение вращательной инвариантности, поэтому, наряду с динамическими переменными, описывающими состояние изотропной жидкости, — плотностью массы $\rho$, плотностью импульса $\pi_k$, плотностью энтропии $\sigma$, необходимо рассмотреть также дополнительный параметр — единичный вектор $\mathbf{n}$ (директор), связанный с нарушением вращательной симметрии. Рассмотрим две возможности введения единичного вектора, одна из которых соответствует нематику с молекулами стержнеобразной формы, другая — нематику с дискообразными молекулами.

Пусть частицы среды состоят из молекул стержнеобразной формы. Тогда в состоянии равновесия можно задать некоторое семейство линий, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением стержней. Пусть $\xi_i = \xi_i(\alpha)$ — параметрические уравнения одной из линий этого семейства. Тогда направление стержней в каждой точке характеризуется вектором с координатами $\dfrac{d\xi_i}{d\alpha} \equiv a_i$. При деформации среды происходит изменение направлений молекул, и, следовательно, деформируются и линии семейства. Пусть $x_i = x_i(\alpha)$ — новые параметрические уравнения уже рассмотренной линии семейства после деформации. Тогда направление стержней в каждой точке после деформации характеризуется вектором $\dfrac{dx_i}{d\alpha} \equiv b_i$. Учитывая, что $x_i = x_i(\xi)$, легко видеть, что векторы $a_i$ и $b_i$ связаны соотношением

$$b_i = b_{ij}^{-1} a_j ,$$

где $b_{ij} \equiv \partial\xi_i/\partial x_j$ (см. (2.3), (2.4)). Отсюда следует, что единичный вектор, связанный с направлением стержней, может быть введен формулой

$$n_i = \frac{b_i}{b}, \qquad b_i = b_{ij}^{-1} a_j . \tag{5.1}$$

Здесь $a_i$ — некоторый постоянный вектор. Используя определение $b_{ij}$ (см. (2.4)) и СП (2.17), легко найти следующие СП:

$$\{\pi_i(x), b^{-1}_{sl}(x')\} = \delta(x-x')\nabla_i b^{-1}_{sl}(x) - \delta_{is} b^{-1}_{kl}(x')\nabla'_k \delta(x-x'). \qquad (5.2)$$

Из (5.2) следует СП для переменных $\pi_i(x)$, $n_i(x)$:

$$\{\pi_i(x), n_j(x')\} = \delta(x-x')\nabla_i n_j(x) - \delta^{\perp}_{ij}(x')\, n_k(x')\nabla'_k \delta(x-x'),$$
$$\delta^{\perp}_{ij}(x) \equiv \delta_{ij} - n_i(x)\, n_j(x). \qquad (5.3)$$

Скобки (5.3), наряду со скобками

$$\{\pi_i(x), \sigma(x')\} = -\sigma(x)\nabla_i \delta(x-x'), \qquad \{\pi_i(x), \rho(x')\} = \rho(x)\nabla'_i \delta(x-x'),$$
$$\{\pi_i(x), \pi_j(x')\} = \pi_j(x)\nabla'_i \delta(x-x') - \pi_i(x')\nabla_j \delta(x-x'), \qquad (5.4)$$

образуют алгебру переменных нематика со стержнеобразными молекулами (мы выписываем только нетривиальные СП). Подчеркнем, что исходя из способа введения величин $\rho(x)$, $n_i(x)$ (см. (2.15), (5.1)) следует, что эта алгебра является подалгеброй алгебры (2.14), (2.17) динамических переменных сплошной среды. Используя СП (5.3), (5.4) и предполагая, что плотность энергии системы имеет вид $\varepsilon(x) = \varepsilon(\sigma(x), \rho(x), \pi(x), n(x), \nabla n(x))$, получим динамические уравнения нематика с идеальными стержнеобразными молекулами (см. также [20]):

$$\dot\sigma = -\nabla_i\left(\sigma\frac{\pi_i}{\rho}\right), \qquad \dot\rho = -\nabla_k \pi_k;$$
$$\dot n_i = -\left(\frac{\pi_k}{\rho}\nabla_k\right) n_i + n_k \delta^{\perp}_{ij}\nabla_k \frac{\pi_j}{\rho}; \qquad (5.5)$$

$$\dot\pi_i = -\nabla_k t_{ik}, \qquad t_{ik} = p\,\delta_{ik} + \frac{\pi_i\pi_k}{\rho} + \nabla_i n_j \frac{\partial\varepsilon}{\partial\nabla_k n_j} - n_k \delta^{\perp}_{ij}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial n_j} - \nabla_l \frac{\partial\varepsilon}{\partial\nabla_l n_j}\right).$$

Если воспользоваться условием (2.22) вращательной инвариантности плотности энергии $\varepsilon(x)$, которое в данном случае представляется соотношением

$$\varepsilon_{ikj}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial n_k} n_j + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\nabla_s n_k}\nabla_s n_j + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\nabla_k n_s}\nabla_j n_s\right) = 0, \qquad (5.6)$$

то легко видеть, что дивергенцию $\nabla_k t_{ik}$ можно представить в виде дивергенции от следующего явно симметричного тензора $\tilde t_{ik}$:

$$\tilde t_{ik} = p\,\delta_{ik} + \frac{\pi_i\pi_k}{\rho} + \frac{1}{2}(g_{km}\nabla_i n_m + g_{im}\nabla_k n_m) -$$
$$-\frac{1}{2}(n_i h_k + n_k h_i) + \frac{1}{2}\nabla_m(g_{ik}n_m + g_{ki}n_m - g_{im}n_k - g_{km}n_i).$$

Здесь

$$g_{ik} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \nabla_i n_k}, \qquad h_i = \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial n_j} - \nabla_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial \nabla_k n_j} \right) \delta^{\perp}_{ij}.$$

Рассмотрим теперь нематик, состоящий из дискообразных молекул. Направление их ориентации задается единичным вектором нормали. Если ввести семейство поверхностей, касательные плоскости к которым в каждой точке совпадают с плоскостями дисков, то, как следует из предыдущего рассмотрения, два неколлинеарных вектора $d_i$, $f_i$, определяющих положение плоскости, могут быть представлены в виде $d_i = b^{-1}_{ij} m_j$, $f_i = b^{-1}_{ij} n_j$, где $m_i$, $n_i$ — некоторые постоянные неколлинеарные векторы, определяющие положение плоскости в недеформированном состоянии. Тогда вектор нормали к плоскости, натянутой на векторы $d_i$, $f_i$, равен $c_i = l_k \, \partial\xi_k / \partial x_i \equiv l_k b_{ki}$, где $l_k = (\mathbf{m} \times \mathbf{n})_k$, и, следовательно, единичный вектор нормали к плоскости дискообразной молекулы определяется формулой

$$n_i = \frac{c_i}{c}, \qquad c_i = l_k b_{ki}. \tag{5.7}$$

Здесь $l_k$ — произвольный постоянный вектор, определяющий направление директора в недеформированном состоянии. Используя определение $n_i$ и скобки (2.17), для переменных $\pi_i(x)$, $n_i(x)$ получим следующие СП:

$$\{\pi_i(x), n_j(x')\} = \delta(x - x')\nabla_i n_j(x) + \delta^{\perp}_{jk}(x')\, n_i(x')\nabla'_k \delta(x - x'). \tag{5.8}$$

СП (5.4), (5.8) образуют алгебру динамических переменных нематика с дискообразными молекулами, и эта алгебра является подалгеброй алгебры (2.14), (2.17) динамических переменных сплошной среды. Отметим, что обе скобки (5.3), (5.8) были найдены в [18] на основе использования законов преобразования контра- и ковариантных векторов при трансляциях. Предполагая опять, что $\varepsilon(x) = \varepsilon(\sigma(x), \rho(x), \pi(x), n(x), \nabla n(x))$, получим динамические уравнения нематика с дискообразными молекулами в виде

$$\dot\sigma = -\nabla_i \left( \sigma \frac{\pi_i}{\rho} \right), \qquad \dot\rho = -\nabla_k \pi_k,$$

$$\dot n_i = -\left( \frac{\pi_k}{\rho} \nabla_k \right) n_i - n_k \delta^{\perp}_{ij} \nabla_j \frac{\pi_k}{\rho},$$

$$\dot\pi_i = -\nabla_k t_{ik}, \; t_{ik} = p\,\delta_{ik} + \frac{\pi_i \pi_k}{\rho} + \nabla_i n_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial \nabla_k n_j} + n_i \delta^{\perp}_{jk} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial n_j} - \nabla_l \frac{\partial \varepsilon}{\partial \nabla_l n_j} \right). \tag{5.9}$$

Учитывая условие вращательной инвариантности для $\varepsilon(x)$, которое записывается в прежнем виде (5.6), преобразуем дивергенцию $\nabla_k t_{ik}$ к дивергенции от следующего явно симметричного тензора $\tilde{t}_{ik}$:

$$\tilde{t}_{ik} = p\,\delta_{ik} + \frac{\pi_i \pi_k}{\rho} + \frac{1}{2}(g_{km}\nabla_i n_m + g_{im}\nabla_k n_m) +$$

$$+ \frac{1}{2}(n_i h_k + n_k h_i) + \frac{1}{2}\nabla_m (g_{ik}n_m + g_{ki}n_m - g_{im}n_k - g_{km}n_i).$$

Отметим, что для нематика часть плотности энергии, связанная с зависимостью от единичного вектора $\mathbf{n}$ и обладающая свойством вращательной инвариантности, может быть записана в виде [33]:

$$\varepsilon(n) = \frac{1}{2}K_1(\nabla_i n_i)^2 + \frac{1}{2}K_2(\mathbf{n}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{n})^2 + \frac{1}{2}K_3(n_i \nabla_i n_k)^2. \qquad (5.10)$$

Для нематиков, состоящих из дискообразных молекул, как следует из определения (5.7), инвариант $\mathbf{n}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{n}$ равен нулю, и, следовательно, для рассматриваемого способа введения $\mathbf{n}$ это слагаемое должно быть опущено. Соотношение $\mathbf{n}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{n} = 0$ совместно с уравнениями движения (5.9) для вектора $n$, так как из них следует, что

$$\dot{w} = -\nabla_j\left(\frac{\pi_j}{\rho}w\right) + 2wn_i n_j \nabla_i \frac{\pi_j}{\rho}; \qquad w \equiv \mathbf{n}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{n}.$$

**5.2. Другие типы жидкокристаллического упорядочения**. Кратко остановимся на вопросе описания динамики других возможных жидкокристаллических состояний.

В холестерической фазе жидких кристаллов ее макроскопическая группа симметрии не содержит инверсии. Спонтанное нарушение трансляционной и вращательной симметрии состояния равновесия приводит к спиральному упорядочению директора в основном состоянии [33]. В соответствии с [20] динамика холестериков аналогична динамике нематиков; отличие проявляется в структуре разложения плотности энергии по градиентам директора. В силу сказанного выше плотность энергии холестерика может содержать нечетные по $\nabla$ слагаемые.

В смектических жидких кристаллах нарушена трансляционная инвариантность вдоль одного из направлений [33]. Согласно [19] для смектика в набор гидродинамических величин входит вместо директора смектическая переменная $W(x)$. Мы определим смектическую переменную $W(x)$ формулой $W(x) \equiv m_j \xi_j(x)$, где $m_j$ — произвольный постоянный вектор,

$\xi_j(x)$ — лагранжева координата частиц среды. Учитывая (2.3) и то, что $b_{ij} = \nabla_j \xi_i$, из (2.13) найдем скобку

$$\{\pi_k(x), \xi_i(x')\} = \delta(x - x')\nabla_k \xi_i . \tag{5.11}$$

Отсюда, сворачивая обе части (5.11) с вектором $m_i$, получим

$$\{\pi_k(x), W(x')\} = \delta(x - x')\nabla_k W(x). \tag{5.12}$$

Алгебра (5.4), (5.12) является основой для построения динамики смектика. Это построение вполне аналогично рассмотренному для случая нематика, где необходимо лишь учесть, что плотность энергии является функцией $\nabla_i W$: $\varepsilon(x) = \varepsilon(\sigma(x), \rho(x), \pi(x), \nabla W(x))$.

Дискотические жидкие кристаллы характеризуются спонтанным нарушением симметрии в двух направлениях. Имеются две дополнительные переменные $W_\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$, связанные с трансляционной инвариантностью, которые мы введем согласно формуле $W_\alpha(x) = m_i^\alpha \xi_i(x)$ (ср. со случаем смектика). СП плотности импульса $\pi_i(x)$ с величиной $W_\alpha(x)$ имеет вид

$$\{\pi_k(x), W_\alpha(x')\} = \delta(x - x')\nabla_i W_\alpha(x). \tag{5.13}$$

Дальнейшее построение уравнений гидродинамики дискотика проводится на основе алгебры (5.4), (5.13) по схеме, изложенной для нематиков, с учетом того, что $\varepsilon(x) = \varepsilon(\sigma(x), \rho(x), \pi(x), \nabla W_\alpha(x))$. Отметим, что как для смектика, так и для дискотика алгебры (5.4), (5.12) и (5.4), (5.13), соответственно, являются подалгебрами динамических переменных сплошной среды. Замкнутая динамика для переменных смектика или дискотика, как и во всех рассмотренных ранее случаях, получается из общего случая динамики сплошной среды, если считать переменные, не входящие в подалгебру, циклическими.

**5.3. Нематические эластомеры**. Здесь мы рассмотрим некоторые особенности динамики нематических жидкокристаллических эластомеров, синтезированных в начале 80-х годов [34]. В последнее время интерес к ним значительно возрос [35,36] благодаря новым возможностям в их экспериментальном получении [37,38]. Нематические эластомеры характеризуются спонтанным нарушением вращательной симметрии и симметрии относительно пространственных трансляций. С этими нарушенными симметриями связаны дополнительные гидродинамические переменные: директор $n_i$ (как в нематических жидких кристаллах) и вектор смещения $u_i$ (как в кристаллических твердых телах). Физически тот факт, что вектор смещения является динамической переменной, соответствует тому, что в нематических эластомерах существует некоторая решетка из полимерных цепочек, обладающая в гидродинамическом пределе (при $\omega \to 0$) конечным модулем сдвига. Для того чтобы директор был хорошо определенной гидродинамической переменной, необходимо, чтобы среднее расстояние между узлами соседних цепочек было достаточно большим, и, соответственно, связь между цепочками слабой.

Предполагая, что гамильтониан системы инвариантен относительно однородных поворотов (и, следовательно, зависимость плотности энергии от вектора смещения идет только через посредство величин $K_{ij}$, см. разд.4), представим его в виде

$$H = \int d^3x\, \varepsilon(x), \qquad \varepsilon = \frac{\pi^2}{2\rho} + v(\sigma, n_i, \nabla_j n_i, K_{ij}). \tag{5.14}$$

Алгебра СП динамических переменных системы может быть выписана на основе уже найденных скобок (2.14), (2.16), (5.3), (5.8) и имеет вид

$$\begin{gathered}\{\pi_i(x), \sigma(x')\} = -\sigma(x)\nabla_i\, \delta(x-x'),\\ \{b_{ij}(x), \pi_k(x')\} = -b_{ik}(x')\nabla_j\, \delta(x-x'),\end{gathered} \tag{5.15}$$

$$\begin{gathered}\{\pi_i(x), \rho(x')\} = \rho(x)\nabla'_i\, \delta(x-x'),\\ \{\pi_i(x), \pi_k(x')\} = \pi_k(x)\nabla'_i\, \delta(x-x') - \pi_i(x')\nabla_k\, \delta(x-x'),\end{gathered}$$

$$\{\pi_i(x), n_j(x')\} = \delta(x-x')\nabla_i n_j(x) - \delta^{\perp}_{ij}(x')\, n_k(x')\nabla'_k\, \delta(x-x'), \tag{5.15а}$$

$$\{\pi_i(x), n_j(x')\} = \delta(x-x')\nabla_i n_j(x) + \delta^{\perp}_{jk}(x')\, n_i(x')\nabla'_k\, \delta(x-x'). \tag{5.15б}$$

Скобки (5.15а) соответствуют стержнеобразным нематическим эластомерам, скобки (5.15б) — дискообразным. Уравнения низкочастотной динамики, соответствующие функционалу энергии (5.14) и СП (5.15), имеют вид

$$\begin{gathered}\dot\sigma = -\nabla_i\left(\sigma\frac{\pi_i}{\rho}\right), \qquad \dot b_{ik} = -\nabla_k\left(b_{ij}\frac{\pi_j}{\rho}\right), \qquad \dot\rho = -\nabla_k\pi_k,\\ \dot\pi_i = -\nabla_j t_{ij}, \qquad t_{ij} = p\,\delta_{ij} + \frac{\pi_i\pi_j}{\rho} + 2b_{mi}b_{lj}\frac{\partial v}{\partial K_{ml}} + \tilde t_{ij}(n),\end{gathered} \tag{5.16}$$

$$\dot n_i = -\left(\frac{\pi_k}{\rho}\nabla_k\right)n_i + n_k\,\delta^{\perp}_{ij}\,\nabla_k\frac{\pi_j}{\rho}, \tag{5.16а}$$

$$\dot n_i = -\left(\frac{\pi_k}{\rho}\nabla_k\right)n_i - n_k\,\delta^{\perp}_{ij}\,\nabla_j\frac{\pi_k}{\rho}. \tag{5.16б}$$

Здесь

$$\tilde{t}_{ik}(n) = \frac{1}{2}\,(g_{km}\nabla_i n_m + g_{im}\nabla_k n_m) \mp$$

$$\mp \frac{1}{2}\,(n_i h_k + n_k h_i) + \frac{1}{2}\,\nabla_m (g_{ik} n_m + g_{ki} n_m - g_{im} n_k - g_{km} n_i),$$

и верхний знак отвечает стержнеобразным молекулам, нижний — дискообразным. Конкретная структура функционала энергии $v = v(\sigma, n_i, \nabla_j n_i, K_{ij})$, который имеет достаточно громоздкий вид, приведена в [36].

## 6. МАГНЕТИК С ПОЛНЫМ НАРУШЕНИЕМ СИММЕТРИИ ОТНОСИТЕЛЬНО СПИНОВЫХ ВРАЩЕНИЙ

В данном и последующем разделах мы остановимся на изучении магнитоупорядоченных систем с нарушенной симметрией относительно спиновых вращений. Случай полного нарушения симметрии относительно спиновых вращений в магнитных средах впервые рассматривался в [39]. Линейные динамические уравнения для таких систем получены в [40,41], а их нелинейное обобщение дано в рамках метода феноменологических лагранжианов в [25,42], а также в гамильтоновом подходе в [16, 27]. Анализ возможных спектров спиновых волн проведен в [25,41,42] без учета процессов релаксации и в предположении, что состояние равновесия магнитных систем является трансляционно-инвариантным.

Для адекватного описания термодинамики и кинетики систем со спонтанно нарушенной симметрией необходимо ввести в теорию дополнительные термодинамические параметры, которые не связаны с законами сохранения, а обусловлены физической природой фазы исследуемого состояния. Известно [43], что в случае систем с полным спонтанным нарушением симметрии относительно спиновых вращений этими динамическими величинами являются углы поворота $\varphi_\alpha$, осуществляющие параметризацию группы трехмерных вращений спинового пространства, или связанная с ними вещественная матрица поворота $a(\varphi)$ ($a\tilde{a} = 1$, здесь и далее под знаком ~ понимается операция транспонирования), которая в экспоненциальной параметризации имеет вид

$$a(\varphi) = \exp\,(-\varepsilon\varphi), \qquad (\varepsilon\varphi)_{\alpha\beta} \equiv \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varphi_\gamma\,. \tag{6.1}$$

С матрицей поворота $a(\varphi)$ сопоставляются правая $\underline{\omega}_{\alpha k}$ и левая $\omega_{\alpha k}$ дифференциальные формы Картана, определяемые соотношениями

$$\underline{\omega}_{\alpha k} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} a_{\beta\lambda} \nabla_k\, a_{\gamma\lambda}\,, \qquad \omega_{\alpha k} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} a_{\lambda\gamma} \nabla_k\, a_{\lambda\beta}\,. \tag{6.2}$$

Для получения алгебры СП динамических переменных магнетика запишем кинематическую часть лагранжиана в виде

$$L_k = \int d^3x\, \mathcal{L}_k(x), \quad \mathcal{L}_k(x) = -s_\alpha(x)\, \omega_\alpha(x), \tag{6.3}$$

где $\omega_\alpha$ — левая форма Картана, связанная с временной производной:

$$\omega_\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(\tilde{a}\dot{a})_{\gamma\beta}\,.$$

Найдем какие-либо преобразования, оставляющие кинематическую часть инвариантной. С этой целью рассмотрим вариации $\delta a_{\alpha\beta}$ матрицы поворота, для которых сохраняется условие ортогональности $\tilde{a}a = 1$:

$$\delta\tilde{a}a + \tilde{a}\,\delta a = 0,$$

Так как вариации $\delta a_{\alpha\beta}$ определяются тремя бесконечно малыми параметрами (например, вариациями углов $\varphi_\alpha$ в формуле (6.1)), то в качестве этих параметров можно принять величины

$$R_{\alpha\beta} = \tilde{a}_{\alpha\mu}\,\delta a_{\mu\beta}\,, \quad \tilde{R} = -R.$$

Вариация левой формы Картана для преобразований

$$\delta a = aR \tag{6.4}$$

равна

$$\delta\omega_\alpha = \dot{R}_\alpha + (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R})_\alpha\,, \quad R_\alpha \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}R_{\gamma\beta}\,. \tag{6.5}$$

Рассмотрим не зависящие от времени ($\dot{\mathbf{R}} = 0$) вариации (6.5), и, наряду с ними, преобразования плотности спина:

$$\delta\omega_\alpha = (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R})_\alpha\,, \quad \delta s_\alpha = (\mathbf{s}\times\mathbf{R})_\alpha\,. \tag{6.6}$$

Закон преобразования плотности спина определен таким образом, чтобы кинематическая часть лагранжиана была инвариантна относительно данного класса вариаций, $\delta L_k = 0$.

Генератор преобразований (6.4), (6.6), согласно общей теории, равен

$$G = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\int d^3x s_\alpha(x)\tilde{a}_{\gamma\mu}(x)\delta a_{\mu\beta}(x) = -\int d^3x s_\alpha(x)R_\alpha(x).$$

Представим канонические преобразования (6.4), (6.6) в виде

$$\delta a_{\alpha\beta}(x) = \{a_{\alpha\beta}(x), G\}, \quad \delta s_\alpha(x) = \{s_\alpha(x), G\}. \tag{6.7}$$

Выражая вариации $\delta a$, $\delta s$ через величину $R$:

$$\delta a_{\alpha\beta} = -a_{\alpha\rho}\varepsilon_{\rho\beta\gamma}R_\gamma\,, \quad \delta s_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}s_\beta R_\gamma$$

и сравнивая левую и правую части формул (6.7), в силу произвольности $R_\alpha$ найдем СП:

$$\{a_{\alpha\beta}(x), s_\gamma(x')\} = a_{\alpha\rho}(x)\, \varepsilon_{\rho\beta\gamma}\delta(x - x'), \qquad \{s_\alpha(x), s_\beta(x')\} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}s_\gamma(x)\, \delta(x - x'). \quad (6.8)$$

Для получения СП $\{a_{\alpha\beta}(x), a_{\mu\nu}(x')\}$ воспользуемся экспоненциальной параметризацией (6.1) матрицы поворота и, вычисляя производную $\dot{a}$ в величине $\omega_\alpha$, представим плотность кинематической части лагранжиана в виде

$$\mathcal{L}_k(x) = g_\lambda(x)\, \dot{\varphi}_\lambda(x), \qquad g_\lambda \equiv -\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}s_\alpha\left(\tilde{a}\frac{\partial a}{\partial\varphi_\lambda}\right)_{\gamma\beta}. \qquad (6.9)$$

Наряду с (6.9) рассмотрим также плотность кинематической части

$$\mathcal{L}'_k(x) = -\varphi_\lambda(x)\, \dot{g}_\lambda(x) \qquad (6.10)$$

(выражение (6.10) отличается от (6.9) полной производной по времени $(\varphi_\lambda{}^\bullet g_\lambda))$. Рассмотрим вариации

$$\delta\varphi_\lambda(x) = 0, \qquad \delta g_\lambda(x) = \chi_\lambda(x) \qquad (6.11)$$

(функции $\chi_\lambda$ не зависят от $\varphi_\lambda$, $g_\lambda$), оставляющие кинематическую часть инвариантной. Вариациям (6.11) соответствует генератор

$$G = -\int d^3x\, \varphi_\alpha(x)\, \chi_\alpha(x).$$

Поскольку

$$\delta\varphi_\alpha(x) = \{\varphi_\alpha(x), G\} = 0,$$

то отсюда получим

$$\{\varphi_\lambda(x), \varphi_\mu(x')\} = 0.$$

Из этой формулы, с учетом (6.1), следует, что

$$\{a_{\alpha\beta}(x), a_{\mu\nu}(x')\} = 0. \qquad (6.12)$$

Соотношение $\chi_\lambda(x) = \{g_\lambda(x), G\}$ автоматически выполняется в силу (6.8) и определения (6.9) величины $g_\lambda$.

Система СП (6.8), (6.12) образует алгебру для переменных магнетика с полным нарушением симметрии относительно спиновых вращений — плотности спина $s_\alpha(x)$ и матрицы поворота $a_{\alpha\beta}(x)$.

Рассмотрим теперь вопрос о построении генератора пространственных трансляций в пространстве переменных $s_\alpha(x)$, $a_{\alpha\beta}(x)$. Для конечных преобразований

$$x \to x' = x'(x)$$

определим закон преобразования динамических переменных $s_\alpha(x)$, $a_{\alpha\beta}(x)$ так, чтобы кинематическая часть лагранжиана оставалась инвариантной, $L_k(s(x), a(x)) = L_k(s(x'), a(x'))$:

$$s_\alpha(x) \to s'_\alpha(x') = \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| s_\alpha(x), \quad a_{\alpha\beta}(x) \to a'_{\alpha\beta}(x') = a_{\alpha\beta}(x). \tag{6.13}$$

Действительно, из (6.13) следует, что

$$\omega_{\alpha\beta}(x) \to \omega'_{\alpha\beta}(x') = \omega_{\alpha\beta}(x),$$

и поэтому

$$L_k = -\int d^3x' s'_\alpha(x')\, \omega'_\alpha(x') = -\int d^3x s'_\alpha(x)\, \omega'_\alpha(x). \tag{6.14}$$

Согласно (6.14), вариации динамических переменных $s$, $a$ при бесконечно малых преобразованиях $x_i \to x'_i = x_i + \delta x_i(x)$ должны быть определены равенствами

$$\delta s_\alpha(x) = s'_\alpha(x) - s_\alpha(x), \quad \delta a_{\alpha\beta} = a'_{\alpha\beta}(x) - a_{\alpha\beta}(x). \tag{6.15}$$

С учетом (6.13), для вариаций (6.15) получим

$$\delta s_\alpha(x) = -\nabla_k(s_\alpha(x)\, \delta x_k(x)), \quad \delta a_{\alpha\beta}(x) = -\,\delta x_k(x)\nabla_k\, a_{\alpha\beta}(x). \tag{6.16}$$

Генератор преобразований (6.16) имеет вид

$$G = -\frac{1}{2}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\int d^3x s_\alpha(x)(\tilde{a}\,\delta a)_{\gamma\beta} = \int d^3x s_\alpha(x)\, \omega_{\alpha k}(x)\, \delta x_k(x),$$

или

$$G = \int d^3x\, \pi^s_k(x)\, \delta x_k(x), \quad \pi^s_k \equiv s_\alpha \omega_{\alpha k}\,. \tag{6.17}$$

Величина $\pi^s_k(x)$, определяющая генератор пространственных трансляций в пространстве переменных $s,a$ , имеет смысл плотности импульса магнонов. Поскольку для канонических преобразований справедливо представление

$$\delta s_\alpha(x) = \{s_\alpha(x), G\}, \quad \delta a_{\alpha\beta}(x) = \{a_{\alpha\beta}(x), G\},$$

то, подставляя сюда выражения для вариаций (6.16), с учетом произвольности функций $\delta x_i(x)$, получим СП:

$$\begin{aligned}\{s_\alpha(x), \pi^s_k(x')\} &= s_\alpha(x')\nabla'_k\, \delta(x-x'),\\ \{a_{\alpha\beta}(x), \pi^s_k(x')\} &= -\,\delta(x-x')\nabla_k\, a_{\alpha\beta}(x).\end{aligned} \tag{6.18}$$

Для нахождения СП $\{\pi^s_k(x), \pi^s_l(\dot{x})\}$ запишем вариацию левой формы Картана при преобразованиях (6.16). Из определения (6.2) следует, что

$$\delta\omega_{\alpha k}(x) = -\,\delta x_l(x)\nabla_l\,\omega_{\alpha k}(x) - \omega_{\alpha l}(x)\nabla_k\,\delta x_l(x). \tag{6.19}$$

Отсюда, принимая во внимание выражение для $\pi^s_k$, получим

$$\delta\pi^s_k(x) = -\,\pi^s_l(x)\nabla_k\,\delta x_l(x) - \nabla_l(\pi^s_k(x)\,\delta x_l(x)).$$

Представляя, с другой стороны, вариацию $\delta\pi^s_k$ в виде

$$\delta\pi^s_k(x) = \{\pi^s_k(x), G\},\; G = \int d^3x\,\pi^s_l(x)\,\delta x_l(x) \tag{6.20}$$

и сравнивая левую и правую части формулы (6.20), в силу произвольности функций $\delta x_l(x)$, найдем СП:

$$\{\pi^s_k(x), \pi^s_l(x')\} = \pi^s_l(x)\nabla'_k\,\delta(x-x') - \pi^s_k(x')\nabla_l\,\delta(x-x'). \tag{6.21}$$

Как следует из (6.21), СП для плотности импульса магнонов имеют стандартный вид (см.(2.12)).

Плотность энергии рассматриваемой магнитной системы в общем случае представляет собой функционал спиновых плотностей $s_\alpha(x)$ и ортогональной матрицы поворота $a(x)$:

$$\varepsilon(x) = \varepsilon(x, s(x'), a(x')). \tag{6.22}$$

Уравнения движения, соответствующие СП (6.8), (6.12) и функциональному выражению (6.22), записываются в виде

$$\dot{s}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\delta H}{\delta s_\beta}s_\gamma + \frac{\delta H}{\delta a_{\rho\beta}}a_{\rho\gamma}\right), \quad \dot{a}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\rho}\,\varepsilon_{\rho\beta\gamma}\frac{\delta H}{\delta s_\gamma} \tag{6.23}$$

и являются обобщением уравнения Ландау — Лифшица на магнитные системы с полным спонтанным нарушением симметрии. Как следует из (6.23), в общем случае величина $S^2$ не сохраняется. Отметим, что из алгебры (6.8), (6.12) может быть выделена подалгебра СП только спиновых переменных $s_\alpha(x)$, что соответствует рассмотрению ферромагнетика. Замкнутая динамика для переменных $s_\alpha$ получается в предположении, что гамильтониан системы не зависит от матрицы поворота $a_{\alpha\beta}$. Формулировка гамильтонова подхода только для переменных $s_\alpha$, без привлечения матрицы поворота $a_{\alpha\beta}(\varphi)$, невозможна, так как в этом случае число независимых динамических переменных $s_\alpha$ является нечетным.

Запишем теперь уравнения динамики в локальной форме (в отличие от уравнений (6.23) в нелокальной форме). Мы будем предполагать, что плотность энергии является функцией величин $s$, $a$, $\nabla a$ или, что то же самое, функцией величин $s$, $a$, $\omega_k$:

$$\varepsilon(x; s(x'), a(x')) = \varepsilon(s(x), a(x), \omega_k(x)). \tag{6.24}$$

Кроме того, поскольку основные взаимодействия в системе носят обменный характер, будем считать, что плотность энергии инвариантна относительно однородных вращений в спиновом пространстве, описываемых матрицей $b$:

$$\varepsilon(x; bs(x'), a(x')\tilde{b}) = \varepsilon(x; s(x'), a(x')). \tag{6.25}$$

Из формулы (6.25) следует, что

$$\varepsilon(s, \omega_k, a) = \varepsilon(as, a\,\omega_k, 1) \equiv \varepsilon(\underline{s}, \underline{\omega}_k), \tag{6.26}$$

где $\underline{s} = as$, $\underline{\omega} = a\,\omega_k$. Принимая во внимание (6.2), (6.8), (6.12), получим соотношения

$$\{s_\alpha(x), \underline{\omega}_{\beta k}(x')\} = a_{\beta\alpha}(x')\nabla'_k\,\delta(x - x'), \qquad \{s_\alpha(x), \underline{s}_\beta(x')\} = 0,$$

приводящие к свойству инвариантности величин $\underline{s}$, $\underline{\omega}_k$ относительно глобальных поворотов:

$$\{S_\alpha, \underline{\omega}_{\beta k}(x)\} = \{S_\alpha, \underline{s}_\beta(x)\} = 0,$$

что соответствует свойству инвариантности плотности энергии (6.26):

$$\{S_\alpha, \varepsilon(x)\} = 0, \qquad S_\alpha = \int d^3x s_\alpha(x). \tag{6.27}$$

Формула (6.27) позволяет записать дифференциальный закон сохранения плотности спина $s_\alpha(x)$ в виде (1.17). Вычисляя СП в (1.17), с использованием (6.24), (6.8), (6.12), для плотности потока спина $j_{\alpha k}$ получим

$$j_{\alpha k} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega_{\alpha k}}.$$

Дифференциальный закон сохранения энергии рассматриваемой системы имеет вид (1.18). Вычисление СП в (1.18) приводит к следующему выражению для плотности потока энергии:

$$q_k = \frac{\partial\varepsilon}{\partial s_\alpha}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega_{\alpha k}}.$$

Ранее мы получили выражение для генератора бесконечно малых пространственных трансляций (6.16). Из формул (6.16), (6.19) следует условие трансляционной инвариантности плотности энергии:

$$\{P_k, \varepsilon(x)\} = \nabla_k \varepsilon(x), \qquad P_k \equiv \int d^3x s_\alpha \, \omega_{\alpha k}\,.$$

Отсюда для плотности импульса магнонов $\pi_k^s$ получим дифференциальный закон сохранения (1.16). Вычисление СП приводит к выражению

$$t_{ik} = -\left(\varepsilon - s_\alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_\alpha}\right)\delta_{ik} + \omega_{\alpha i}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega_{\alpha k}}\,.$$

Здесь $t_{ik}$ — плотность потока импульса магнонов (тензор натяжений).

Таким образом, динамические уравнения для магнетиков со спонтанно нарушенной симметрией в длинноволновом случае имеют вид

$$\dot{s}_\alpha = -\nabla_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega_{\alpha k}}\,, \qquad \dot{a}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\rho}\,\varepsilon_{\rho\beta\gamma}\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_\gamma}\,.$$

Отсюда и из (6.24) следует формула

$$\dot{\varepsilon} = -\nabla_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_\alpha}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega_{\alpha k}}\,,$$

что находится в соответствии с выражением для плотности потока энергии $q_k$.

В силу определения плотности энергии (6.26) целесообразно в качестве независимых переменных выбрать величины $\underline{s}$, $\underline{\omega}_k$. Тогда

$$\dot{\varepsilon} = -\nabla_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{s}_\alpha}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{\omega}_{\alpha k}}\,, \qquad \dot{a}_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\rho\gamma}a_{\rho\beta}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{s}_\gamma}\,,$$

$$\dot{\underline{s}}_\alpha = -\nabla_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{\omega}_{\alpha k}} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\underline{s}_\beta \frac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{s}_\gamma} + \underline{\omega}_{\beta k}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{\omega}_{\gamma k}}\right). \tag{6.28}$$

Из уравнения движения для матрицы $a$ в (6.28) следует уравнение движения для величины $\underline{\omega}_{\alpha k}$:

$$\dot{\underline{\omega}}_{\alpha k} = -\nabla_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{s}_\alpha} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\underline{\omega}_{\beta k}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{s}_\gamma}\,. \tag{6.29}$$

Уравнения (6.28) определяют динамические свойства системы в пренебрежении диссипативными процессами и описывают низкочастотную динамику многоподрешеточного магнетика с обменным взаимодействием, когда при достаточно больших временах благодаря сильному обмену формируются жесткие комплексы спинов, которые практически не деформируются и ориентация которых задается матрицей поворота $a$.

## 7. ОДНООСНЫЙ СПИРАЛЬНЫЙ МАГНЕТИК

Рассмотрим случай одноосного спирального магнетика, когда плотность энергии как функция вектора спина $\underline{s}_\alpha$ и величины $\underline{\omega}_{\alpha k}$ имеет вид

$$\varepsilon = \varepsilon(l_\alpha \underline{s}_\alpha, l_\alpha \underline{\omega}_{\alpha k}) \equiv \varepsilon(s, p_k), \tag{7.1}$$

где $l_\alpha$ — единичный вектор спонтанной «анизотропии», не зависящий от координат и времени (подчеркнем, что плотность энергии (7.1) по-прежнему инвариантна относительно спиновых вращений). Алгебра динамических переменных — компоненты спина $s$ вдоль оси анизотропии и вектора спирали $p_k$ — может быть получена, с учетом определения (7.1), из более общей алгебры переменных $\underline{s}_\alpha$, $\underline{\omega}_{\alpha k}$:

$$\{\underline{s}_\alpha(x), \underline{s}_\beta(x')\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\underline{s}_\gamma\delta(x-x'), \quad \{\underline{\omega}_{\alpha k}(x), \underline{\omega}_{\beta l}(x')\} = 0,$$

$$\{\underline{s}_\alpha(x), \underline{\omega}_{\beta k}(x')\} = \varepsilon_{\alpha\nu\beta}\,\underline{\omega}_{\nu k}(x)\,\delta(x-x') + \delta_{\alpha\beta}\nabla'_k\,\delta(x-x')$$

и имеет вид

$$\{s(x), p_k(x')\} = \nabla'_k\,\delta(x-x'), \quad \{s(x), s(x')\} = \{p_k(x), p_l(x')\} = 0.$$

Для величин $s, p_k$, согласно (6.28), (6.29), справедливы уравнения движения

$$\dot{s} = -\nabla_k \frac{\partial\varepsilon}{\partial p_k}, \qquad \dot{p}_k = -\nabla_k \frac{\partial\varepsilon}{\partial s}. \tag{7.2}$$

Поперечные значения спина $\underline{s}_\alpha^\perp$ и формы Картана $\underline{\omega}_{\alpha k}^\perp$, определяемые соотношениями

$$\underline{s}_\alpha = s l_\alpha + \underline{s}_\alpha^\perp, \qquad \underline{\omega}_{\alpha k} = l_\alpha p_k + \underline{\omega}_{\alpha k}^\perp,$$

удовлетворяют уравнениям вида

$$\dot{\underline{s}}_\alpha^\perp = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} l_\gamma \left( \underline{s}_\beta^\perp \frac{\partial\varepsilon}{\partial s} + \underline{\omega}_{\beta k}^\perp \frac{\partial\varepsilon}{\partial p_k} \right), \qquad \dot{\underline{\omega}}_{\alpha k}^\perp = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} l_\gamma \frac{\partial\varepsilon}{\partial s}\underline{\omega}_{\beta k}^\perp.$$

Используя ограничения, налагаемые на формы Картана $\underline{\omega}_{\alpha k}$ соотношениями Маурера — Картана

$$\nabla_k \underline{\omega}_{\alpha i} - \nabla_i \underline{\omega}_{\alpha k} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\underline{\omega}_{\beta k}\underline{\omega}_{\gamma i},$$

нетрудно получить равенства

$$\nabla_k p_i - \nabla_i p_k = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} l_\gamma \underline{\omega}^\perp_{\alpha k} \underline{\omega}^\perp_{\beta i},$$

$$\nabla_k \underline{\omega}^\perp_{\gamma i} - \nabla_i \underline{\omega}^\perp_{\gamma k} = (\delta_{\gamma\lambda} - l_\gamma l_\lambda) \varepsilon_{\lambda\alpha\beta} \underline{\omega}^\perp_{\alpha k} \underline{\omega}^\perp_{\beta i} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} (\underline{\omega}^\perp_{\alpha k} l_\beta p_i + \underline{\omega}^\perp_{\beta i} l_\alpha p_k). \quad (7.3)$$

Легко видеть, что последнее соотношение содержит тривиальное решение $\underline{\omega}^\perp_{\gamma i} = 0$, вследствие чего условие (7.3) для вектора спирали $p_k$ приобретает вид

$$\operatorname{rot} p = 0.$$

Для поперечной компоненты спина $\underline{s}^\perp_\alpha$ справедливо уравнение движения

$$\dot{\underline{s}}^\perp_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} l_\gamma \underline{s}^\perp_\beta \frac{\partial \varepsilon}{\partial s}. \quad (7.4)$$

Линеаризация уравнений (7.2), (7.4) около равновесных значений $s = s^0$, $p_k = p^0_k$ приводит к двум голдстоуновским [44]:

$$\omega_\pm(k) = k_i \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial p_i \partial s} \pm \sqrt{\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial s^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial p_i \partial p_l} k_i k_l}$$

и одной активационной $\omega^2 = \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial s} \right)^2$ модам.

## 8. АНТИФЕРРОМАГНЕТИК

Рассмотрим теперь случай [45], когда зависимость от матрицы поворота $a_{\alpha\beta}$ в гамильтониане системы содержится только посредством комбинации $\underline{l}_\beta a_{\beta\alpha} \equiv l_\alpha$ ($\underline{l}_\beta$ — некоторый постоянный вектор):

$$\varepsilon = \varepsilon(s_\alpha, \underline{l}_\beta a_{\beta\alpha}) \equiv \varepsilon(s_\alpha, l_\alpha). \quad (8.1)$$

Вектор антиферромагнетизма $l_\alpha$ и плотность спина $s_\alpha$ являются теми основными динамическими переменными, в терминах которых строится гидродинамическая (низкочастотная) теория антиферромагнетика. Алгебра переменных $s_\alpha$, $l_\alpha$ может быть получена, с учетом определения (8.1), из более общей алгебры (6.8), (6.12) переменных $a_{\alpha\beta}$, $s_\alpha$ и имеет вид

$$\{s_\alpha(x), s_\beta(x')\} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} s_\gamma(x) \delta(x - x'),$$
$$\{s_\alpha(x), l_\beta(x')\} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} l_\gamma(x) \delta(x - x'),$$
$$\{l_\alpha(x), l_\beta(x')\} = 0. \quad (8.2)$$

Полагая в (1.6) последовательно $\varphi_\alpha(x) = s_\alpha(x)$ и $\varphi_\alpha(x) = l_\alpha(x)$, получим уравнения движения для спина $s_\alpha$ и вектора антиферромагнетизма $l_\alpha$ в виде

$$\dot{s}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left( \frac{\delta H}{\delta s_\beta} s_\gamma + \frac{\delta H}{\delta l_\beta} l_\gamma \right),$$

$$\dot{l}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\delta H}{\delta s_\beta} l_\gamma. \tag{8.3}$$

Интегрирование уравнений (8.3) значительно упрощается в длинноволновом пределе, когда пространственные неоднородности динамических переменных малы. Отметим, что при получении алгебры (8.2) мы считали вектор антиферромагнетизма вектором произвольной длины. Такое описание эквивалентно описанию антиферромагнетика в терминах единичного вектора $l_\alpha$, если считать, что функционал энергии системы зависит от $l_\alpha$ только посредством отношения $l_\alpha / l$. В дальнейшем мы будем всюду явно предполагать $l_\alpha$ единичным вектором, $l_\alpha^2 = 1$. При этом, поскольку величина $l_\alpha^2$ является интегралом движения, СП (8.2) сохраняют свой вид и для случая $l_\alpha^2 = 1$. Считая, что плотность энергии является функцией величин $s_\alpha$, $l_\alpha$, $\nabla_k l_\alpha$ или, что то же самое, функцией величин $s_\alpha$, $l_\alpha$, $v_{\alpha k} \equiv - \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} l_\beta \nabla_k l_\gamma$:

$$\varepsilon(x, s(x'), l(x')) = \varepsilon(s(x), l(x), v_k(x)),$$

получим динамические уравнения в локальной форме. В силу того, что вариации величин $l_\alpha$, $v_{\alpha k}$ не являются независимыми:

$$l_\alpha \delta l_\alpha = 0, \qquad l_\alpha \delta v_{\alpha k} + v_{\alpha k} \delta l_\alpha = 0,$$

мы фиксируем производные $\dfrac{\partial a}{\partial l_\alpha}$, $\dfrac{\partial a}{\partial v_{\alpha k}}$ ($a$ — произвольная функция $s$, $l$, $v_k$) дополнительными требованиями

$$l_\alpha \frac{\partial a}{\partial l_\alpha} = 0, \qquad l_\alpha \frac{\partial a}{\partial v_{\alpha k}} = 0.$$

С учетом этого и с учетом формул (1.17), (1.18) представим динамические уравнения антиферромагнетика в длинноволновом пределе в виде

$$\dot{s}_\alpha = -\nabla_k \frac{\partial\varepsilon}{\partial v_{\alpha k}}, \qquad \dot{\varepsilon} = -\nabla_k \frac{\partial\varepsilon}{\partial s_\alpha}\frac{\partial\varepsilon}{\partial v_{\alpha k}}, \qquad \dot{l}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial\varepsilon}{\partial s_\beta} l_\gamma. \tag{8.4}$$

Отсюда следует, что

$$\dot{v}_{\alpha k} = -(\delta_{\alpha\beta} - l_\alpha l_\beta)\nabla_k \frac{\partial\varepsilon}{\partial s_\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial\varepsilon}{\partial s_\beta} v_{\gamma k}.$$

Полная система уравнений (8.4) определяет динамические свойства антиферромагнетиков в пренебрежении диссипативными процессами. Уравнения (8.4) допускают спиральные решения, для которых зависимость от координат и времени величин $s_\alpha(x)$, $l_\alpha(x)$ определяется формулами

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}, t) = \underline{\mathbf{s}}a(\mathbf{x}, t), \qquad \mathbf{l}(\mathbf{x}, t) = \underline{\mathbf{l}}a(\mathbf{x}, t), \tag{8.5}$$

где $\underline{\mathbf{s}}$, $\underline{\mathbf{l}}$ — некоторые постоянные векторы, и матрица $a(\mathbf{x}, t)$ имеет вид

$$a(\mathbf{x}, t) = \exp \varepsilon(\mathbf{p}\mathbf{x} - \underline{h}t)\, b. \tag{8.6}$$

Здесь

$$\varepsilon_{\alpha\nu} \equiv \varepsilon_{\mu\lambda\nu} n_\lambda, \qquad \underline{h}n_\lambda \equiv \frac{\partial\varepsilon}{\partial s_\lambda},$$

$n_\lambda$ — единичный вектор и $b$ — произвольная матрица поворота, не зависящая от координат и времени. Величина $p_k$ в (8.6) имеет смысл вектора спирали. Из уравнений (8.4) получим ограничения на независимые значения $p_k$, $\underline{s}_\alpha$, $\underline{l}_\alpha$, $\underline{v}_{\alpha k}$:

$$\varepsilon_{\alpha\rho\nu} n_\nu \left\{ \underline{s}_\rho \left( n_\lambda \frac{\partial\varepsilon}{\partial \underline{s}_\lambda} \right) - p_k \frac{\partial\varepsilon}{\partial \underline{v}_{\rho k}} \right\} = 0.$$

Отметим, что для спиральных решений (8.5), (8.6)

$$\underline{v}_{\alpha k} \equiv a_{\alpha\beta} v_{\beta k} = (\delta_{\alpha\beta} - \underline{l}_\alpha \underline{l}_\beta)\, n_\beta p_k.$$

Линеаризация уравнений (8.4) вблизи состояния равновесия $l_\alpha = l^0_\alpha$, $p_k = 0$, $s_\alpha = 0$ приводит к спектру спиновых волн [45]:

$$\omega^2 = c^2 k^2, \qquad c^2 = \frac{1}{12}\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial v_k^2}(\delta_{\alpha\beta} - l_\alpha l_\beta)\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial s_\alpha \partial s_\beta},$$

что совпадает с результатом работы [46].

## 9. МАГНЕТИК С КВАДРУПОЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ ПОРЯДКА

В этом разделе мы покажем, как, исходя из стандартного выражения для действия

$$W = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \, \{c_{\alpha\beta}(x) \, \dot{a}_{\beta\alpha}(x) - H(c, a)\} \tag{9.1}$$

($c_{\alpha\beta}$, $\alpha_{\alpha\beta}$ — динамические переменные, $H$ — гамильтониан), можно построить динамику магнитоупорядоченных систем с квадрупольным параметром порядка, связав формальные динамические переменные $c_{\alpha\beta}(x)$, $a_{\alpha\beta}(x)$ с физическими динамическими переменными, которые используются в теории магнетизма [47]. В отличие от предыдущего рассмотрения, в (9.1) под матрицей $a_{\alpha\beta}$ понимается матрица произвольного аффинного преобразования. Смысл употребления одного и того же обозначения будет ясен из дальнейшего изложения. Используя известные выражения для СП динамических переменных $a$, $c$:

$$\{a_{\alpha\beta}(x), a_{\mu\nu}(x')\} = \{c_{\alpha\beta}(x), c_{\mu\nu}(x')\} = 0,$$

$$\{a_{\alpha\beta}(x), c_{\mu\nu}(x')\} = \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}\delta(x - x'), \tag{9.2}$$

можно найти СП для физических динамических переменных квадрупольного магнетика.

Получим предварительно формулы, связывающие динамические переменные $a$, $c$ с динамическими переменными, имеющими непосредственный физический смысл. Введем спин системы как генератор однородных бесконечно малых вращений, характеризуемых углом $\delta\varphi_\alpha$. Так как при повороте, описываемом матрицей $b$, матрицы $a$ и $c$ преобразуются согласно равенствам

$$a \to a' = a\tilde{b}, \quad c \to c' = bc$$

(при этих преобразованиях остается инвариантной кинематическая часть действия $W_k = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \, c_{\alpha\beta}(x) \, \dot{a}_{\beta\alpha}(x)$), то, полагая $b = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon_{\mu\nu} \equiv \equiv \varepsilon_{\mu\lambda\nu} \, \delta\varphi_\lambda$, получим

$$\delta a_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\gamma\beta\nu} a_{\alpha\gamma} \delta\varphi_\nu, \qquad \delta c_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\gamma\alpha\nu} c_{\gamma\beta} \delta\varphi_\nu. \tag{9.3}$$

Легко видеть, что вариации (9.3) представимы в виде

$$\delta a_{\alpha\beta}(x) = \{a_{\alpha\beta}(x), G\}, \qquad \delta c_{\alpha\beta}(x) = \{c_{\alpha\beta}(x), G\},$$

где

$$G = \delta\varphi_\alpha \int d^3x \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} c_{\gamma\nu}(x)\, a_{\nu\beta}(x),$$

есть генератор преобразований (9.3). Записывая его в виде

$$G = \delta\varphi_\alpha \int d^3x s_\alpha(x),$$

для плотности спина $s_\alpha(x)$ получим выражение

$$s_\alpha(x) = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} c_{\gamma\nu}(x)\, a_{\nu\beta}(x). \tag{9.4}$$

В дальнейшем нам удобно будет ввести тензор $g_{\alpha\beta}$:

$$g_{\alpha\beta} = c_{\alpha\nu} a_{\nu\beta}. \tag{9.5}$$

Тогда плотность спина выражается через антисимметричную часть $g_{\alpha\beta}$:

$$s_\alpha(x) = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, g^a_{\gamma\beta}(x), \qquad g^a_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(g_{\mu\nu} - g_{\nu\mu}). \tag{9.6}$$

В свою очередь, как следует из (9.6), антисимметричная часть тензора $g_{\alpha\beta}$ однозначно определяется плотностью спина

$$g^a_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} s_\gamma.$$

Обозначая

$$g^s_{\alpha\beta} \equiv f_{\alpha\beta}, \qquad g^s_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} + g_{\beta\alpha}), \tag{9.7}$$

запишем

$$g_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} s_\gamma.$$

Таким образом, в качестве динамических переменных систем необходимо выбрать плотность спина $s_\alpha(x)$, матрицу $a_{\alpha\beta}(x)$ произвольных аффинных преобразований, а также симметричную матрицу $f_{\alpha\beta}(x)$ (в дальнейшем мы выясним, что матрица $f_{\alpha\beta}$ является матрицей квадрупольного момента). Учитывая представление (9.5) матрицы $g_{\alpha\beta}$ и формулы (9.2), легко получить следующую алгебру для переменных $a_{\alpha\beta}(x)$, $g_{\alpha\beta}(x)$:

$$\{a_{\alpha\beta}(x), g_{\mu\nu}(x')\} = \delta_{\beta\mu} a_{\alpha\nu}(x)\, \delta(x - x'),$$

$$\{g_{\alpha\beta}(x),\, g_{\mu\nu}(x')\} = (g_{\alpha\nu}(x)\,\delta_{\beta\mu} - g_{\mu\beta}(x)\,\delta_{\alpha\nu})\,\delta(x - x'). \tag{9.8}$$

Переменные $s_\alpha(x)$, $f_{\alpha\beta}(x)$ связаны с переменными $g_{\alpha\beta}(x)$ соотношениями (9.6), (9.7). Отсюда и из (9.8) найдем СП для динамических переменных $s_\alpha(x)$, $a_{\alpha\beta}(x)$ и $f_{\alpha\beta}(x)$:

$$\{f_{\alpha\beta}(x), f_{\mu\nu}(x')\} = \frac{1}{4}\,(\varepsilon_{\alpha\gamma\nu}\delta_{\beta\mu} + \varepsilon_{\beta\gamma\mu}\delta_{\alpha\nu} + \varepsilon_{\beta\gamma\nu}\delta_{\alpha\mu} + \varepsilon_{\alpha\gamma\mu}\delta_{\beta\nu})\, s_\gamma(x)\,\delta(x - x'),$$

$$\{s_\alpha(x), f_{\beta\gamma}(x')\} = (\varepsilon_{\alpha\beta\rho}\, f_{\gamma\rho}(x) + \varepsilon_{\alpha\gamma\rho}\, f_{\beta\rho}(x))\,\delta(x - x'),$$

$$\{s_\alpha(x),\, s_\beta(x')\} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} s_\gamma(x)\,\delta(x - x'), \tag{9.9}$$

$$\{a_{\alpha\beta}(x),\, s_\mu(x')\} = \varepsilon_{\beta\mu\rho} a_{\alpha\rho}(x)\,\delta(x - x'), \qquad \{a_{\alpha\beta}(x),\, a_{\mu\nu}(x')\} = 0,$$

$$\{a_{\alpha\beta}(x), f_{\mu\nu}(x')\} = \frac{1}{2}\,(\delta_{\beta\mu} a_{\alpha\nu}(x) + \delta_{\beta\nu} a_{\alpha\mu}(x))\,\delta(x - x'). \tag{9.10}$$

Первые три формулы (9.9) определяют подалгебру динамических переменных $s$, $f$. Приведем физическую интерпретацию этой подалгебры. С этой целью заменим, согласно общим правилам квантовой механики, динамические переменные $s_\alpha$, $f_{\alpha\beta}$ на операторы $\hat{s}_\alpha$, $\hat{f}_{\alpha\beta}$ и СП $\{\ldots,\ \ldots\}$ на коммутаторы $\frac{1}{i}\,[\ldots,\ \ldots]$. Тогда соотношения (9.9) примут вид

$$[\hat{f}_{\alpha\beta}(x), \hat{f}_{\mu\nu}(x')] = \frac{i}{4}\,(\varepsilon_{\alpha\gamma\nu}\delta_{\beta\mu} + \varepsilon_{\beta\gamma\mu}\delta_{\alpha\nu} + \varepsilon_{\beta\gamma\nu}\delta_{\alpha\mu} + \varepsilon_{\alpha\gamma\mu}\delta_{\beta\nu})\,\hat{s}_\gamma(x)\,\delta(x - x'),$$

$$[\hat{s}_\alpha(x), \hat{f}_{\beta\gamma}(x')] = i(\varepsilon_{\alpha\beta\rho}\,\hat{f}_{\gamma\rho}(x) + \varepsilon_{\alpha\gamma\rho}\hat{f}_{\beta\rho}(x))\,\delta(x - x'),$$

$$[\hat{s}_\alpha(x),\ \hat{s}_\beta(x')] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\hat{s}_\gamma(x)\,\delta(x - x').$$

Легко произвести реализацию этой алгебры на языке спиновых матриц, соответствующих спину $s = 1$ ($(s_\alpha)_{\mu\nu} = i\varepsilon_{\alpha\mu\nu}$), а именно

$$\hat{f}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\hat{s}_\alpha\hat{s}_\beta + \hat{s}_\beta\hat{s}_\alpha - \frac{2}{3}\,\delta_{\alpha\beta}\hat{s}^2\right). \tag{9.11}$$

Так как оператор $\hat{f}_{\alpha\beta}$ представляет собой оператор квадрупольного момента (см. [48]), то, исходя из этого, мы будем считать величину $f_{\alpha\beta}$ в формулах (9.9) матрицей квадрупольного момента спина $s = 1$, причем $\mathrm{Sp}\, f_{\alpha\beta} = f_{\alpha\alpha} = 0$ (соотношение $f_{\alpha\alpha} = 0$ совместно с подалгеброй (9.9)). Используя СП (9.9), получим уравнения динамики для величин $s_\alpha$, $f_{\alpha\beta}$ (квадрупольный магнетик):

$$\dot{s}_\alpha(x) = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\delta H}{\delta s_\beta(x)} s_\gamma(x) + 2\varepsilon_{\alpha\beta\rho} f_{\mu\rho}(x) \frac{\delta H}{\delta f_{\mu\beta}(x)},$$

$$\dot{f}_{\alpha\beta}(x) = \frac{1}{2} \frac{\delta H}{\delta f_{\gamma\nu}(x)} (\delta_{\gamma\beta}\varepsilon_{\nu\mu\alpha} + \delta_{\alpha\nu}\varepsilon_{\gamma\beta\mu}) s_\mu(x) +$$

$$+ (\varepsilon_{\beta\gamma\rho} f_{\alpha\rho}(x) + \varepsilon_{\alpha\gamma\rho} f_{\beta\rho}(x)) \frac{\delta H}{\delta s_\gamma(x)}.$$

Из общей алгебры (9.9), (9.10) можно выделить подалгебру динамических переменных $a_{\alpha\beta}$, $s_\alpha$ (величины $f_{\alpha\beta}$ в эту подалгебру не входят), которая совместна с дополнительным условием $a\tilde{a} = 1$. Эта подалгебра определяет низкочастотную динамику многоподрешеточного магнетика (см. разд.6).

Отметим, что квантово-механическая динамика квадрупольного магнетика со спином $s = 1$ изучалась в [49,50]. Однако там рассматривалась лишь динамика чистых состояний в терминах четырех независимых переменных. Мы же для описания динамики квадрупольного магнетика, с учетом представления (9.11), используем полный набор средних от восьми операторов $\hat{s}_\alpha$, $\hat{f}_{\alpha\beta}$, составляющих алгебру Ли $SU(3)$. Это согласуется с числом переменных, использованных в [51] при изучении основного состояния и спектра магнетика с одноионной анизотропией для спина $s = 1$.

## 10. СВЯЗЬ ГАМИЛЬТОНОВА И ЛАГРАНЖЕВА ФОРМАЛИЗМА

Как уже отмечалось ранее, динамические уравнения для магнитных систем с полным спонтанным нарушением симметрии относительно спиновых вращений формулировались с использованием модельных феноменологических лагранжианов [25,42]. В данном разделе мы получим уравнения динамики таких систем в лагранжевом подходе в общем виде, не используя каких-либо модельных предположений.

Лагранжев подход чрезвычайно удобен при формулировке свойств симметрии системы. Вводя в рассмотрение ту или иную симметрию, получим в явном виде интегралы движения для рассматриваемых магнитных систем.

Функция Лагранжа магнитных систем с полным нарушением симметрии относительно спиновых вращений является фунционалом матрицы поворота $a$, а также форм Картана $\omega_\alpha$, $\omega_{\alpha k}$:

$$L = \int dx\, \mathcal{L}\, (a(x),\ \omega(x),\ \omega_k(x)). \tag{10.1}$$

В обменном приближении плотность функции Лагранжа $\mathcal{L}$ инвариантна относительно правых однородных поворотов в спиновом пространстве

$$\mathcal{L}\, (\omega,\ \omega_k,\ a) = \mathcal{L}\, (\omega b,\ \omega_k b,\ ab), \tag{10.2}$$

где $b$ — произвольная матрица поворота. Полагая $b = \tilde{a}$, имеем

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\, (\underline{\omega},\ \underline{\omega}_k,\ 1) \equiv \mathcal{L}\, (\underline{\omega},\ \underline{\omega}_k).$$

Введем в рассмотрение величину $\underline{R}_\alpha$, связанную с вариацией матрицы поворота $\delta a$ соотношением

$$\underline{R}_\alpha = \frac{1}{2}\, \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(\delta a\tilde{a})_{\gamma\beta}.$$

Вариации форм Картана $\delta\underline{\omega}_\alpha$, $\delta\underline{\omega}_{\alpha k}$ в терминах введенной величины имеют вид

$$\delta\underline{\omega}_\alpha = \dot{\mathbf{R}}_\alpha + (\underline{\mathbf{R}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}})_\alpha, \qquad \delta\underline{\omega}_{\alpha k} = \nabla_k\, \underline{R}_\alpha + (\underline{\mathbf{R}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}}_k)_\alpha. \tag{10.3}$$

С учетом (10.3) запишем полную вариацию действия $W = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ :

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left\{ \frac{\partial}{\partial t}\left( \underline{R}_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\omega}_\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial t}\, (\mathcal{L}\, \delta t) \right\} +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x\, \underline{R}_\alpha \left\{ \left( \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}} \right)_\alpha + \left( \underline{\boldsymbol{\omega}}_k \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}_k} \right)_\alpha - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\omega}_\alpha} - \nabla_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\omega}_{\alpha k}} \right\}.$$

Полагая $\delta t = 0$ и $\delta a(t)\big|_{t_1} = \delta a(t)\big|_{t_2} = 0$, из принципа стационарного действия получим уравнения Лагранжа:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\omega}_\alpha} + \nabla_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\omega}_{\alpha k}} = \left( \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}} \right)_\alpha + \left( \underline{\boldsymbol{\omega}}_k \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}_k} \right)_\alpha. \tag{10.4}$$

Вблизи реального движения системы вариация действия имеет вид

$$\delta W = G(t_2) - G(t_1), \qquad G(t) \equiv \int d^3x \left( \underline{R}_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\omega}_\alpha} + \mathcal{L}\, \delta t \right). \tag{10.5}$$

Рассмотрим бесконечно малые преобразования, связанные с временными трансляциями. В этом случае $\delta W = 0$ (так как $L$ не зависит явно от времени $t$) и $\underline{R}_\alpha = -\underline{\omega}_\alpha \delta t$. Поэтому из (10.5) следует закон сохранения энергии

$$H = \int d^3x \left( -\mathcal{L} + \underline{\omega}_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\omega}_\alpha} \right) \equiv \int d^3x \varepsilon(x). \qquad (10.6)$$

При бесконечно малых пространственных трансляциях $\delta W = 0$, $\underline{R}_\alpha = -\underline{\omega}_{\alpha k}\,\delta x_k$. Соответствующий интеграл движения — импульс $P_k$ — имеет вид

$$P_k = -\int d^3x \underline{\omega}_{\alpha k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\omega}_\alpha}.$$

Рассмотрим бесконечно малые спиновые вращения. При этом $\delta a_{\gamma\lambda} = a_{\gamma\rho}\varepsilon_{\rho\lambda\sigma}\delta\varphi_\sigma$ и $\underline{R}_\alpha = -a_{\alpha\beta}\delta\varphi_\beta$. Соответствующая сохраняющаяся величина — спин $S_\alpha$ в терминах функции Лагранжа имеет вид

$$S_\alpha = -\int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_\alpha}.$$

Ввиду соотношения (10.6), плотность энергии $\varepsilon$ связана с плотностью функции Лагранжа равенством

$$\varepsilon(s, \omega_k, a) = -\mathcal{L}(\omega(s, \omega_k), \omega_k, a) - s_\alpha \omega_\alpha(s, \omega_k),$$

откуда следуют формулы

$$\left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_\alpha} \right)_{\omega_k} = -\omega_\alpha, \quad \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega_{\alpha k}} \right)_s = -\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_{\alpha k}} \right)_\omega = j_{\alpha k}.$$

Поэтому уравнения (10.4) эквивалентны системе уравнений

$$\dot{a}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}\varepsilon_{\rho\beta\lambda}\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_\lambda}, \qquad \dot{s}_\alpha = -\nabla_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega_{\alpha k}},$$

полученных ранее в рамках гамильтонова подхода.

При бесконечно малых левых спиновых вращениях $\delta a_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\mu\rho}\delta\varphi_\rho a_{\mu\beta}$ и $\underline{R}_\alpha = -\delta\varphi_\alpha$. Если функция Лагранжа одновременно инвариантна относительно правых и левых спиновых вращений, то, согласно (10.2) и соотношения

$$\mathcal{L}(\omega, \omega_k, a) = \mathcal{L}(b\omega, b\omega_k, ba),$$

имеет место равенство

$$\left(\underline{\omega}\times\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\underline{\omega}}\right)_\alpha+\left(\underline{\omega}_k\times\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\underline{\omega}_k}\right)_\alpha=0,$$

и в рассматриваемой магнитной системе, помимо спина $S_\alpha$, сохраняется также величина

$$\underline{S}_\alpha=-\int d^3x\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\underline{\omega}_\alpha}\,.$$

В качестве конкретного примера феноменологического лагранжиана магнитных систем с полным спонтанным нарушением симметрии приведем лагранжиан, предложенный в работе [25]:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\,(a_{\alpha\beta}\,\underline{\omega}_\alpha\,\underline{\omega}_\beta+2b_\alpha\,\underline{\omega}_\alpha-c_{\alpha i,\,\beta k}\,\underline{\omega}_{\alpha i}\,\underline{\omega}_{\beta k}-2d_{\alpha k}\,\underline{\omega}_{\alpha k}),$$

где $a_{\alpha\beta}$, $b_\alpha$, $c_{\alpha i,\,\beta k}$, $d_{\alpha k}$ — некоторые феноменологические постоянные. Конкретная структура этих постоянных, соответствующая различным магнитным средам, приведена в [42].

## 11. МАГНИТОУПРУГИЕ СИСТЕМЫ

В разд. 1—5 мы рассмотрели алгебру СП переменных классической сплошной среды и, в качестве частных случаев, подалгебры этой общей алгебры, а также соответствующую этим скобкам динамику. Аналогичное рассмотрение проведено в разд.6—9 для ряда магнитоупорядоченных систем. В данном разделе будут изучены магнитоупругие системы, в число динамических переменных которых входят как переменные, соответствующие сплошным средам ($u_i(x)$, $\pi_i(x)$, $\sigma(x)$, $\psi(x)$), так и переменные, соответствующие магнетизму ($s_\alpha(x)$, $a_{\alpha\beta}(x)$).

Представим плотность кинематической части лагранжиана в виде

$$\mathcal{L}_k(x)=\pi_i^*(x)\,b_{ij}^{-1}(x)\dot{u}_j(x)-\sigma(x)\,\dot{\psi}(x)-s_\alpha(x)\,\omega_\alpha(x),\tag{11.1}$$

где

$$\pi_i^*=\pi_i-\sigma\nabla_i\,\psi-s_\alpha\omega_{\alpha i}\,.$$

Для формулы (11.1) могут быть сделаны те же пояснения, что и для формулы (2.6). Именно последнее слагаемое в (11.1) представляет собой плотность кинематической части лагранжиана для магнитных систем. Соответственно плотность импульса $\pi_i$ является генератором пространственных трансляций в пространстве переменных $u_i$, $\pi_i$, $\sigma$, $\psi$, $s_\alpha$, $a_{\alpha\beta}$, плотность импульса $\pi_i^\sigma=\sigma\nabla_i\,\psi$ — в пространстве переменных $\sigma$, $\psi$ и плотность импульса $\pi_i^s = s_\alpha \omega_{\alpha i}$ — в пространстве переменных $s_\alpha$, $a_{\alpha\beta}$ (см. (6.17)). Поэтому плотность импульса, связанная с трансляциями в пространстве переменных $u_i$, $\pi_i$, имеет вид

$$\pi_i^* = \pi_i - \sigma \nabla_i \psi - s_\alpha \omega_{\alpha i},$$

откуда и следует структура плотности кинематической части (11.1). Для получения СП переменных магнитоупругой среды перепишем плотность кинематической части лагранжиана в виде

$$\mathcal{L}_k(x) = p_j(x)\, \dot{u}_j(x) - \sigma(x)\, \dot{\psi}(x) - s_\alpha(x)\, \omega_\alpha(x),$$

где

$$p_j = (\pi_i - \sigma \nabla_i \psi - s_\alpha \omega_{\alpha i})\, b_{ij}^{-1} \equiv \pi_i^* b_{ij}^{-1}. \tag{11.2}$$

Тогда, рассматривая вариации (2.7), (6.4), (6.6), оставляющие кинематическую часть лагранжиана инвариантной, найдем СП (2.10), (6.8), (6.12), в которых теперь обобщенный импульс $p_j$ определяется формулой (11.2). Из формул

$$\{\pi_i^*(x), \psi(x')\} = \{\pi_i^*(x), \sigma(x')\} = \{\pi_i^*(x), s(x')\} = \{\pi_i^*(x), a(x')\} = 0$$

и СП (6.18) следуют соотношения (2.11) и СП

$$\{\pi_i(x), a_{\alpha\beta}(x')\} = \delta(x - x')\, \nabla_i\, a_{\alpha\beta}(x),$$
$$\{\pi_i(x), s_\alpha(x')\} = -\, s_\alpha(x)\, \nabla_i\, \delta(x - x').$$

В свою очередь, из формул

$$\{p_i(x), p_j(x')\} = 0,$$
$$\{\pi_i^b(x), \pi_k^b(x')\} = \pi_k^b(x)\, \nabla_i'\, \delta(x - x') - \pi_i^b(x')\, \nabla_k\, \delta(x - x'),\ b = (\sigma, s)$$

найдем СП (2.12). Объединяя полученные результаты вместе, запишем алгебру СП динамических переменных магнитоупругой среды в виде

$$\{\pi_i(x), \sigma(x')\} = -\, \sigma(x)\, \nabla_i\, \delta(x - x'), \qquad \{\pi_i(x), \psi(x')\} = \delta(x - x')\, \nabla_i\, \psi(x),$$
$$\{\sigma(x), \psi(x')\} = \delta(x - x'), \qquad \{u_i(x), \pi_k(x')\} = b_{ik}(x)\, \delta(x - x'),$$
$$\{\pi_i(x), \pi_k(x')\} = \pi_k(x) \nabla_i'\, \delta(x - x') - \pi_i(x') \nabla_k\, \delta(x - x'),$$
$$\{\pi_i(x), a_{\alpha\beta}(x')\} = \delta(x - x')\, \nabla_i\, a_{\alpha\beta}(x),$$
$$\{\pi_i(x), s_\alpha(x')\} = -\, s_\alpha(x)\, \nabla_i\, \delta(x - x'),$$
$$\{s_\alpha(x), s_\beta(x')\} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} s_\gamma(x)\, \delta(x - x'),$$
$$\{s_\alpha(x), a_{\beta\gamma}(x')\} = \varepsilon_{\alpha\gamma\rho} a_{\beta\rho}(x)\, \delta(x - x') \tag{11.3}$$

(здесь выписаны только нетривиальные СП). Как и в случае сплошных сред, переменная $\psi$ будет считаться циклической. Предполагая, что гамильтониан системы инвариантен относительно пространственных трансляций, представим его в виде

$$H = \int d^3x\varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) = \varepsilon(x;\, \sigma(x'),\, \pi_i(x'),\, b_{ij}(x'),\, s_\alpha(x'),\, a_{\alpha\beta}(x')). \tag{11.4}$$

Уравнения движения для переменных магнитоупругой среды, соответствующие (11.3), (11.4), имеют вид

$$\dot\sigma(x) = -\nabla_i\left(\sigma(x)\frac{\delta H}{\delta\pi_i(x)}\right), \quad \dot u_i(x) = -b_{ij}(x)\frac{\delta H}{\delta\pi_j(x)},$$

$$\dot\pi_i(x) = -\pi_j(x)\nabla_i\frac{\delta H}{\delta\pi_j(x)} - \nabla_j\left(\pi_i(x)\frac{\delta H}{\delta\pi_j(x)}\right) - b_{ki}(x)\nabla_j\frac{\delta H}{\delta b_{kj}(x)} - \sigma(x)\nabla_i\frac{\delta H}{\delta\sigma(x)} -$$

$$- s_\alpha(x)\nabla_i\frac{\delta H}{\delta s_\alpha(x)} + \frac{\delta H}{\delta a_{\alpha\beta}(x)}\nabla_i a_{\alpha\beta}(x),$$

$$\dot s_\alpha(x) = -\nabla_i\left(s_\alpha(x)\frac{\delta H}{\delta\pi_i(x)}\right) + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\delta H}{\delta s_\beta(x)}s_\gamma(x) + \frac{\delta H}{\delta a_{\rho\beta}(x)}a_{\rho\gamma}(x)\right),$$

$$\dot a_{\alpha\beta}(x) = -\frac{\delta H}{\delta\pi_i(x)}\nabla_i a_{\alpha\beta}(x) + a_{\alpha\rho}(x)\,\varepsilon_{\rho\beta\gamma}\frac{\delta H}{\delta s_\gamma(x)}. \tag{11.5}$$

Структура уравнений (11.5) значительно упрощается в длинноволновом пределе, когда пространственные неоднородности динамических переменных малы. Считая, что плотность энергии является функцией величин $\sigma$, $\pi_i$, $b_{ik}$, $s_\alpha$, $a_{\alpha\beta}$, $\nabla_k a_{\alpha\beta}$ (или, что то же самое, не $\nabla a_{\alpha\beta}$, а левой формы Картана $\omega_{\alpha k}$), получим динамические уравнения в локальной форме. Если предположить, что плотность энергии обладает свойством инвариантности относительно спиновых вращений, $\{S_\alpha, \varepsilon(x)\} = 0$, то мы получим дифференциальный закон сохранения плотности спина $s_\alpha(x)$ с потоком $j_{\alpha k}$, определяемым формулой (1.17). Вычисление СП в (1.17) дает

$$\dot s_\alpha = -\nabla_k j_{\alpha k}, \quad j_{\alpha k} = s_\alpha\frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_k} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega_{\alpha k}}. \tag{11.6}$$

Дифференциальный закон сохранения плотности энергии имеет вид (1.18). На основе алгебры (11.3) найдем

$$\dot\varepsilon = -\nabla_k q_k, \quad q_k = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_k}\left(\sigma\frac{\partial\varepsilon}{\partial\sigma} + \pi_l\frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_l} + s_\alpha\frac{\partial\varepsilon}{\partial s_\alpha}\right) +$$

$$+\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega_{\alpha k}}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_\alpha}+\omega_{\alpha i}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_i}\right)+b_{ij}\frac{\partial \varepsilon}{\partial b_{ik}}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_j}. \tag{11.7}$$

Наконец, если плотность энергии $\varepsilon(x)$ обладает свойством трансляционной инвариантности, $\{P_i, \varepsilon(x)\}=\nabla_i\,\varepsilon(x)$, то отсюда получим дифференциальный закон сохранения плотности импульса (1.16). Вычисление СП приводит к следующему результату:

$$\dot{\pi}_i=-\nabla_k\,t_{ik}, \qquad t_{ik}=p\,\delta_{ik}+\pi_i\frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_k}+\omega_{\alpha i}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega_{\alpha k}}+b_{ji}\frac{\partial \varepsilon}{\partial b_{jk}},$$

$$p\equiv-\varepsilon+\sigma\frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma}+\pi_l\frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_l}+s_\alpha\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_\alpha}. \tag{11.8}$$

Здесь $t_{ik}$ — тензор натяжений.

Если плотность энергии $\varepsilon(x)$ не зависит от матрицы поворота $a_{\alpha\beta}$, то уравнения движения (11.6)—(11.8) совпадают с соответствующими уравнениями движения в [52], если в последних пренебречь влиянием электромагнитных полей.

Для плотности энергии, инвариантной относительно спиновых вращений, имеем (см. (6.26)):

$$\varepsilon(\ldots, s, \omega_k, a)=\varepsilon(\ldots, \underline{s}, \underline{\omega}_k)$$

(мы выписываем зависимость только от переменных, которые меняются при рассматриваемых преобразованиях), и поэтому целесообразно в качестве независимых переменных выбрать правые величины $\underline{s}$, $\underline{\omega}_k$. Тогда, используя СП (11.3), получим уравнения динамики магнитоупругой среды в длинноволновом пределе в виде

$$\dot{\sigma}=-\nabla_k\left(\sigma\frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_k}\right), \qquad \dot{\pi}_i=-\nabla_k\left(p\,\delta_{ik}+\pi_i\frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_k}+\underline{\omega}_{\alpha i}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{\omega}_{\alpha k}}+b_{ji}\frac{\partial \varepsilon}{\partial b_{jk}}\right),$$

$$\dot{b}_{ik}=-\nabla_k\left(b_{ij}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_j}\right), \qquad \dot{\underline{s}}_\alpha=-\nabla_k\left(\underline{s}_\alpha\frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_k}+\frac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{\omega}_{\alpha k}}\right)+\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\underline{s}_\beta\frac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{s}_\gamma}+\underline{\omega}_{\beta k}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{\omega}_{\gamma k}}\right),$$

$$\dot{\underline{\omega}}_{\alpha k}=-\nabla_k\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{s}_\alpha}+\underline{\omega}_{\alpha l}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_l}\right)+\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\underline{\omega}_{\beta k}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{s}_\gamma}+\underline{\omega}_{\gamma l}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_l}\right), \tag{11.9}$$

где

$$p\equiv-\varepsilon+\sigma\frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma}+\pi_l\frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_l}+\underline{s}_\alpha\frac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{s}_\alpha}$$

— давление. Полная система уравнений (11.9) определяет динамические свойства магнитоупругой среды в пренебрежении диссипативными процессами.

## 12. КВАНТОВЫЙ КРИСТАЛЛ

До сих пор мы рассматривали нормальные системы. Теперь мы перейдем к изучению сверхтекучих систем, для которых равновесное состояние является состоянием со спонтанно нарушенной симметрией относительно фазовых преобразований. Вначале мы рассмотрим получение алгебры СП перемённых квантового кристалла, затем из этой алгебры выделим подалгебру, отвечающую сверхтекучему $^4$He. Далее мы учтем влияние спиновых степеней свободы и опишем динамику квантового спинового кристалла, в основном состоянии которого нарушены инвариантность относительно спиновых вращений, а также трансляционная и фазовая инвариантности. Здесь в качестве подалгебры будет выделена алгебра СП переменных сверхтекучего $^3$He–$B$.

Рассмотрим квантовый кристалл. Явление сверхтекучести квантового кристалла [53] связано с возможностью двух видов движения. Первый из них — движение узлов решетки, характерное для твердого тела, второй тип — перенос массы квазичастицами при неподвижных узлах решетки, характерный для сверхтекучей жидкости. Линейные уравнения динамики квантового кристалла в феноменологическом подходе были получены в [53], их нелинейному обобщению посвящены работы [54,55]. Мы получим нелинейные уравнения динамики квантового кристалла, основываясь на гамильтоновом подходе.

Переменными, описывающими нарушение фазовой и трансляционной инвариантности равновесного состояния квантового кристалла, являются сверхтекучая фаза $\phi(x)$ и вектор смещения узлов решетки $u_i(x)$ в конфигурационном пространстве. Поэтому плотность энергии $\varepsilon(x)$ в общем случае представляет собой функционал переменных: сверхтекучей фазы $\phi(x)$, вектора смещения и плотностей энтропии $\sigma(x)$, массы $\rho(x)$, импульса $\pi_i(x)$:

$$\varepsilon(x) = \varepsilon(x;\ \sigma(x'),\ \rho(x'),\ \pi_i(x'),\ \phi(x'),\ u_i(x')). \tag{12.1}$$

Получим теперь СП динамических переменных системы. Предварительно сделаем следующее замечание. Как известно [56], в механике сплошных сред переменные $\rho(x)$ и $u_i(x)$ не являются независимыми, а связаны соотношением

$$\rho = \tilde{\rho} \det \| \delta_{ij} - \nabla_j u_i \| , \tag{12.2}$$

где $\tilde{\rho}$ — плотность недеформированного вещества. Однако, поскольку мы рассматриваем квантово-кристаллическую фазу, для которой число атомов и число узлов решетки не совпадают [53], переменные $\rho(x)$ и $u_i(x)$ должны рассматриваться как независимые, для которых соотношение (12.2) уже не выполняется. Поэтому и СП для этих переменных также должны задаваться независимо.

Запишем плотность кинематической части лагранжиана в виде

$$\mathcal{L}_k(x) = \pi_i^* \, b_{ij}^{-1} \dot{u}_j(x) - \sigma(x)\,\dot{\psi}(x) - \rho(x)\,\dot{\phi}(x), \tag{12.3}$$

где

$$\pi_i^* = \pi_i - \sigma\nabla_i\,\psi(x) - \rho\nabla_i\,\phi.$$

Выражение (12.3) строится аналогично тому, как это делается в случае классических сплошных сред (см. пояснение к включению слагаемого $\sigma\dot{\psi}$). Именно последнее слагаемое в (12.3) представляет собой учет влияния сверхтекучести; соответственно, в плотности импульса $\pi_i^*$, связанной с пространственными трансляциями в пространстве переменных $u_i$, $\pi_i$, необходимо вычесть дополнительно слагаемое $\rho\nabla_i\,\phi$. Для получения СП, так же, как и для классических сплошных сред, нужно рассмотреть вариации (2.7) с обобщенным импульсом $p_j = \pi_i^* b_{ij}^{-1}$ и, наряду с ними, вариации

$$\delta\rho(x) = 0, \qquad \delta\phi(x) = g(x).$$

Этим вариациям соответствует генератор

$$G = \int d^3x (p_i f_i - \sigma\chi - \rho g).$$

Производя дальнейшие вычисления, аналогичные вычислениям в разд.2, придем к следующей алгебре СП переменных квантового кристалла:

$$\{\pi_i(x), u_k(x')\} = -(\delta_{ik} - \nabla_i\,u_k(x))\,\delta(x-x'), \qquad \{\pi_i(x), \sigma(x')\} = -\sigma(x)\nabla_i\,\delta(x-x'),$$

$$\{\pi_i(x), \rho(x')\} = -\rho(x)\nabla_i\,\delta(x-x'), \qquad \{\pi_i(x), \phi(x')\} = \delta(x-x')\nabla_i\,\phi(x),$$

$$\{\pi_i(x), \psi(x')\} = \delta(x-x')\nabla_i\,\psi(x), \qquad \{\sigma(x), \psi(x')\} = \{\rho(x), \phi(x')\} = \delta(x-x'),$$

$$\{\pi_i(x), \pi_k(x')\} = \pi_k(x)\nabla'_i\,\delta(x-x') - \pi_i(x')\nabla_k\,\delta(x-x'). \tag{12.4}$$

Переменная $\psi$ всюду далее будет считаться циклической. Отметим, что, в силу свойства инвариантности $\varepsilon(x)$ относительно глобальных фазовых преобразований и пространственных трансляций, плотность энергии $\varepsilon(x)$

зависит не от самих величин $\phi(x)$, $u_i(x)$, а только от их производных $\nabla_i \phi \equiv p_i$, $\nabla_k u_i$ (или, в последнем случае, от величин $b_{ik} = \delta_{ik} - \nabla_k u_i$):

$$\varepsilon(x) = \varepsilon(x, \sigma(x'), \rho(x'), \pi_i(x'), p_i(x'), b_{ik}(x')). \tag{12.5}$$

Вектор $p$ имеет смысл сверхтекучего импульса. Поэтому удобно в качестве динамических переменных, наряду с остальными переменными, выбрать непосредственно величины $p_i$ и $b_{ik}$. Используя СП (12.4), получим нелокальные динамические уравнения квантового кристалла в виде

$$\dot{\sigma}(x) = -\nabla_k \left( \sigma \frac{\delta H}{\delta \pi_k} \right), \quad \dot{\rho} = -\nabla_k \left( \rho \frac{\delta H}{\delta \pi_k} + \frac{\delta H}{\delta p_k} \right),$$

$$\dot{\pi}_i = -\sigma \nabla_i \frac{\delta H}{\delta \sigma} - \pi_j \nabla_i \frac{\delta H}{\delta \pi_j} - \nabla_j \left( \pi_i \frac{\delta H}{\delta \pi_j} \right) - \rho \nabla_i \frac{\delta H}{\delta \rho} - p_i \nabla_j \frac{\delta H}{\delta p_j} - b_{ki} \nabla_j \frac{\delta H}{\delta b_{kj}},$$

$$\dot{p}_i = -\nabla_i \left( p_j \frac{\delta H}{\delta \pi_j} + \frac{\delta H}{\delta \rho} \right); \quad \dot{b}_{ik} = -\nabla_k \left( b_{ij} \frac{\delta H}{\delta \pi_j} \right). \tag{12.6}$$

Структура уравнений (12.6) значительно упрощается в длинноволновом пределе, когда пространственные неоднородности динамических переменных малы. Считая, что плотность энергии является функцией величин $\sigma$, $\rho$, $\pi_i$, $p_i$, $b_{ik}$, запишем динамические уравнения в локальной форме. Воспользуемся для этого результатами первого раздела. Для плотности энергии, удовлетворяющей условию $\{M, \varepsilon(x)\} = 0$, $\int d^3x \, \rho(x)$, получим дифференциальный закон сохранения плотности массы (1.15). Используя (12.4), для плотности потока массы $j_k$ найдем

$$j_k = \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_k} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k}. \tag{12.7}$$

Вычисление СП в (1.16), (1.18) приводит к следующим выражениям для плотностей потоков энергии $q_k$ и импульса $t_{ik}$ :

$$q_k = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_k} \left( \sigma \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} + \pi_l \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_l} \right) + \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} + p_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_i} \right) + b_{ij} \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_{ik}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_j},$$

$$t_{ik} = p\, \delta_{ik} + \pi_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_k} + p_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} + b_{ji} \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_{jk}}, \quad p \equiv -\varepsilon + \sigma \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} + \pi_l \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_l} + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}. \tag{12.8}$$

Таким образом, уравнения динамики квантовых кристаллов в длинноволновом пределе имеют вид

$$\dot{\sigma} = -\nabla_k\left(\sigma\frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_k}\right), \quad \dot{\rho} = -\nabla_k\left(\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_k} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial p_k}\right),$$

$$\dot{\pi}_i = -\nabla_k\left(p\,\delta_{ik} + \pi_i\frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_k} + p_i\frac{\partial\varepsilon}{\partial p_k} + b_{ji}\frac{\partial\varepsilon}{\partial b_{jk}}\right),$$

$$\dot{p}_i = -\nabla_i\left(p_j\frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_j} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right), \quad \dot{b}_{ik} = -\nabla_k\left(b_{ij}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_j}\right). \tag{12.9}$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями, полученными ранее феноменологическим путем в [54] и на основе микроскопического подхода в [55].

Отметим, что формулы (12.8) для плотностей потоков могут быть записаны в компактной форме, если ввести плотность термодинамического потенциала

$$\omega = Y_a\,\zeta_a - \sigma, \quad a = (0, i, 4); \quad \zeta_a = (\varepsilon, \pi_i, \rho), \tag{12.10}$$

где $Y_a$ — термодинамические силы, определенные согласно равенствам

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\sigma} \equiv \frac{1}{Y_0}, \quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_i} \equiv -\frac{Y_i}{Y_0}, \quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} \equiv -\frac{Y_4}{Y_0}. \tag{12.11}$$

Из формул (12.10), (12.11) следует, что

$$\frac{\partial\omega}{\partial Y_a} = \zeta_a,$$

и, так как $\omega = \omega(Y_a, p_i, b_{ik})$, второе начало термодинамики имеет вид

$$d\omega = \zeta_a dY_a + \frac{\partial\omega}{\partial p_i}dp_i + \frac{\partial\omega}{\partial b_{ik}}db_{ik}. \tag{12.12}$$

С учетом (12.8), (12.12) представим плотности потоков в виде

$$\zeta_{ak} = -\frac{\partial}{\partial Y_a}\frac{\omega Y_k}{Y_0} + \frac{\partial\omega}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial Y_a}\frac{Y_4 + Y_i p_i}{Y_0} + \frac{\partial\omega}{\partial b_{jk}}\frac{\partial}{\partial Y_a}\frac{b_{jl}Y_l}{Y_0}. \tag{12.13}$$

Здесь $\zeta_{0k} \equiv q_k$, $\zeta_{ik} \equiv t_{ik}$, $\zeta_{4k} \equiv j_k$. Динамика плотностей аддитивных интегралов движения и параметров, описывающих нарушенную симметрию, определяется, согласно (12.9), (12.13), уравнениями

$$\dot{\zeta}_a = -\nabla_k\,\zeta_{ak}, \quad \dot{p}_i = \nabla_i\left(\frac{Y_4 + Y_j p_j}{Y_0}\right), \quad \dot{b}_{ik} = \nabla_k\left(b_{ij}\frac{Y_j}{Y_0}\right).$$

С целью интерпретации термодинамических сил $Y_a$ запишем основное термодинамическое тождество для плотности энергии $\varepsilon = \varepsilon(\sigma, \rho, \pi_k, p_i, b_{ik})$:

$$d\varepsilon = Td\sigma + \mu d\rho + v_k d\,\pi_k + \frac{\partial\varepsilon}{\partial p_i}dp_i + \frac{\partial\varepsilon}{\partial b_{ik}}db_{ik}, \tag{12.14}$$

где $T$ — температура, $\mu$ — химический потенциал, $v_k$ — нормальная скорость. Из (12.11), (12.14) следует, что

$$T = \frac{1}{Y_0}, \quad v_i = -\frac{Y_i}{Y_0}, \quad \mu = -\frac{Y_4}{Y_0}.$$

Пусть рассматриваемая система обладает свойством галилеевской инвариантности. Тогда термодинамический потенциал $\omega$ зависит лишь от следующих комбинаций термодинамических сил $Y_a$ [55]:

$$\omega = \omega(Y_0', Y_k', Y_4', b_{ik}),$$

$$Y_0' = Y_0, \quad Y_k' = Y_k + Y_0\frac{p_k}{m}, \quad Y_4' = Y_4 + Y_k p_k + Y_0\frac{p^2}{2m}. \tag{12.15}$$

С учетом (12.15) для плотностей потоков получим выражения

$$j_k = \frac{1}{m}\frac{\partial\omega}{\partial Y_k'} + \frac{p_k}{m}\frac{\partial\omega}{\partial Y_4'},$$

$$t_{ik} = -\frac{\omega}{Y_0}\delta_{ik} + \frac{p_i p_k}{m}\frac{\partial\omega}{\partial Y_4'} + \frac{p_i}{m}\frac{\partial\omega}{\partial Y_k'} - \frac{Y_k}{Y_0}\frac{\partial\omega}{\partial Y_i'} + \frac{b_{ji}}{Y_0}\frac{\partial\omega}{\partial b_{jk}},$$

$$q_k = -\frac{Y_4 + Y_l p_l}{mY_0}\pi_k - \frac{Y_k}{Y_0^2}\left(\sigma - Y_l\frac{\partial\omega}{\partial Y_l'}\right) - \frac{b_{jl}Y_l}{Y_0^2}\frac{\partial\omega}{\partial b_{jk}}. \tag{12.16}$$

Формулы (12.16) совпадают с аналогичными выражениями в [55].

## 13. СВЕРХТЕКУЧИЙ $^4$He

В равновесном состоянии сверхтекучего $^4$He нарушена фазовая инвариантность. Плотность энергии $\varepsilon(x)$ является функционалом плотностей энтропии $\sigma(x)$, массы $\rho(x)$, импульса $\pi_i(x)$ и сверхтекучей фазы $\phi(x)$:

$$\varepsilon(x) = \varepsilon(x;\, \sigma(x'), \rho(x'), \pi_i(x'), \phi(x')). \tag{13.1}$$

Алгебра динамических переменных сверхтекучего $^4$He образует подалгебру алгебры (12.4) переменных квантового кристалла и определяется формулами:

$$\{\pi_i(x), \sigma(x')\} = -\sigma(x)\nabla_i\,\delta(x-x'), \quad \{\pi_i(x), \rho(x')\} = -\rho(x)\nabla_i\,\delta(x-x'),$$

$$\{\pi_i(x), \phi(x')\} = \delta(x-x')\nabla_i\,\phi(x), \quad \{\pi_i(x), \psi(x')\} = \delta(x-x')\nabla_i\,\psi(x),$$

$$\{\sigma(x), \psi(x')\} = \{\rho(x), \phi(x')\} = \delta(x-x'),$$

$$\{\pi_i(x), \pi_k(x')\} = \pi_k(x)\nabla'_i\,\delta(x-x') - \pi_i(x')\nabla_k\,\delta(x-x'). \tag{13.2}$$

Приведем здесь интерпретацию величин $x_i$ и $u_i$, введенных во втором разделе. Поскольку там речь шла о нормальной системе, то величины $x_i$ и $u_i$ имели соответственно смысл эйлеровых координат и вектора смещения частиц среды. В случае сверхтекучего $^4$He требуется сделать пояснение, к какой компоненте относятся эти переменные. Прежде всего, нормальная скорость определяется формулой

$$v_i(x) = \frac{\delta H}{\delta\pi_i(x)}\,. \tag{13.3}$$

Уравнение движения для вектора смещения было получено нами ранее (см. (2.18)), и, с учетом (13.3), оно имеет вид

$$\dot{u}_i = b_{ij}\,v_j\,. \tag{13.4}$$

Определим функцию $x = x(\xi, t)$ неявным образом с помощью равенства

$$x_i(\xi, t) = \xi_i + u_i(x(\xi, t), t). \tag{13.5}$$

Дифференцирование обеих частей формулы (13.5) по времени приводит к соотношению

$$\dot{u}_i = b_{ij}\,\dot{x}_j\,. \tag{13.6}$$

Отсюда, сравнивая равенства (13.4) и (13.6), получим

$$b_{ij}\,\dot{x}_j = b_{ij}\,v_j\,,$$

и, следовательно,

$$\dot{x}_j = v_j\,.$$

Таким образом, заключаем, что функция $x_i(\xi, t)$, которая определяется соотношением (13.5), и величина $u_i$ представляют собой, соответственно, эйлерову координату и вектор смещения частиц нормальной компоненты.

Если переменная $\psi$ — циклическая, то локальные уравнения динамики, соответствующие СП (13.2), имеют вид

$$\dot{\sigma} = -\nabla_k \left( \sigma \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_k} \right), \quad \dot{\rho} = -\nabla_k \left( \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_k} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} \right),$$

$$\dot{\pi}_i = -\nabla_k \left( p\, \delta_{ik} + \pi_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_k} + p_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} \right), \quad \dot{p}_i = -\nabla_i \left( p_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_j} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right), \tag{13.7}$$

где

$$p = -\varepsilon + \sigma \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} + \pi_l \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_l} + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}$$

— давление и $p_i = \nabla_i \phi$ — сверхтекучий импульс.

Отметим следующее интересное обстоятельство. Если плотность энергии $\varepsilon(x)$ содержит зависимость от переменной $\psi$, то в правой части уравнения движения для плотности энтропии появляется дополнительный член. Действительно, в предположении, что

$$\varepsilon(x; \ldots, \psi(x')) = \varepsilon(\ldots, \nabla\psi(x)),$$

и, следовательно,

$$\frac{\delta H}{\delta \psi} = -\nabla_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial \nabla_k \psi},$$

получим

$$\dot{\sigma} = -\nabla_k \left( \sigma \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_k} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \nabla_k \psi} \right).$$

Второй член в скобках может быть не связан с движением нормальной компоненты, и в выражении для плотности потока энтропии, как следствие, появляется слагаемое, обусловленное сверхтекучим движением.

## 14. КВАНТОВЫЙ СПИНОВЫЙ КРИСТАЛЛ

При рассмотрении динамики квантовых кристаллов мы не учитывали влияние спиновых степеней свободы, что может быть существенным для квантового твердого $^3$He. Имея в виду, что в сверхтекучих жидких фазах $^3$He имеет место спонтанное нарушение симметрии относительно однородных спиновых вращений, мы рассмотрим случай полного нарушения спиновой инвариантности (параметр, описывающий такое нарушение, — вещественная матрица поворота), что соответствует $B$-фазе $^3$He. Иными словами, мы рассмотрим квантовый спиновый кристалл, в равновесном состоянии которого одновременно нарушены фазовая, трансляционная и спиновая инвариантности [28].

В случае, если в основном состоянии не происходит полного нарушения симметрии относительно спиновых вращений, то спиновая динамика квантового кристалла описывается в терминах только плотности спина в рамках хорошо известного уравнения Ландау — Лифшица с конвекционным членом [52].

Динамическими переменными квантового спинового кристалла с нарушенной симметрией относительно спиновых вращений являются плотности энтропии $\sigma(x)$, массы $\rho(x)$, импульса $\pi_i(x)$ и спина $s_\alpha(x)$, а также ортогональная матрица поворота $a_{\alpha\beta}(x)$, сверхтекучая фаза $\phi(x)$ и вектор смещения $u_i(x)$. Поэтому плотность энергии $\varepsilon(x)$ в общем случае представляет собой функционал этих переменных:

$$\varepsilon(x) = \varepsilon(x;\, \sigma(x'),\, \rho(x'),\, \pi_i(x'),\, s_\alpha(x'),\, a_{\alpha\beta}(x'),\, \phi(x'),\, u_i(x')). \qquad (14.1)$$

Плотность кинематической части лагранжиана квантового спинового кристалла записывается в виде (см. (6.3), (12.3))

$$\mathcal{L}_k(x) = \pi_i^*(x)\, b_{ij}^{-1}(x)\dot{u}_j(x) - \sigma(x)\,\dot{\psi}(x) - \rho(x)\,\dot{\phi}(x) - s_\alpha(x)\,\omega_\alpha(x), \qquad (14.2)$$

где

$$\pi_i^* = \pi_i - \sigma\nabla_i\,\psi - \rho\nabla_i\,\phi - s_\alpha\,\omega_{\alpha i}\,.$$

Плотности кинематической части лагранжиана (14.2) соответствует следующая алгебра СП динамических переменных:

$$\{\pi_i(x),\, u_k(x')\} = -\,(\delta_{ik} - \nabla_i\, u_k(x))\,\delta(x-x'), \qquad \{\pi_i(x),\, \psi(x')\} = \nabla_i\,\psi(x)\,\delta(x-x'),$$

$$\{\pi_i(x),\, \sigma(x')\} = -\,\sigma(x)\nabla_i\,\delta(x-x'),\ \{\pi_i(x),\, \rho(x')\} = -\rho(x)\nabla_i\,\delta(x-x'),$$

$$\{\pi_i(x),\, s_\alpha(x')\} = -\,s_\alpha(x)\nabla_i\,\delta(x-x'), \qquad \{\pi_i(x),\, a_{\alpha\beta}(x')\} = \delta(x-x')\nabla_i\,a_{\alpha\beta}(x),$$

$$\{\pi_i(x),\, \pi_k(x')\} = \pi_k(x)\nabla_i'\,\delta(x-x') - \pi_i(x')\nabla_k\,\delta(x-x'), \qquad (14.3)$$

$$\{\pi_i(x),\, \phi(x')\} = \delta(x-x')\nabla_i\,\phi(x), \qquad \{\rho(x),\, \phi(x')\} = \{\sigma(x),\, \psi(x')\} = \delta(x-x'),$$

$$\{s_\alpha(x),\, s_\beta(x')\} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}s_\gamma(x)\,\delta(x-x'), \qquad \{s_\alpha(x),\, a_{\beta\gamma}(x')\} = \varepsilon_{\alpha\gamma\beta}a_{\beta\rho}(x)\,\delta(x-x').$$

Отметим, что в силу свойства инвариантности $\varepsilon(x)$ относительно глобальных фазовых преобразований и пространственных трансляций плотность энергии $\varepsilon(x)$ зависит не от самих величин $\phi(x)$, $u_i(x)$, а только от их производных $\nabla_i\,\phi \equiv p_i$, $\nabla_k\,u_i$ (или, в последнем случае, от величин $b_{ik} \equiv \delta_{ik} - \nabla_k\,u_i$):

$$\varepsilon(x) = \varepsilon(x;\ \sigma(x'),\ \rho(x'),\ \pi_i(x'),\ s_\alpha(x'),\ a_{\alpha\beta}(x'),\ p_i(x'),\ b_{ik}(x')). \qquad (14.4)$$

Вектор $p$ имеет смысл сверхтекучего импульса. Поэтому удобно в качестве динамических переменных, наряду с остальными переменными, выбрать непосредственно величины $p_i$ и $b_{ik}$. Используя СП (14.3) и общее функциональное выражение (14.4), получим нелокальные динамические уравнения квантового спинового кристалла в виде:

$$\dot{\sigma}(x) = -\nabla_k\left(\sigma\frac{\delta H}{\delta\pi_k}\right), \qquad \dot{\rho} = -\nabla_k\left(\rho\frac{\delta H}{\delta\pi_k} + \frac{\delta H}{\delta p_k}\right),$$

$$\dot{\pi}_i = -\sigma\nabla_i\frac{\delta H}{\delta\sigma} - \pi_j\nabla_i\frac{\delta H}{\delta\pi_j} - \nabla_j\left(\pi_i\frac{\delta H}{\delta\pi_j}\right) - s_\alpha\nabla_i\frac{\delta H}{\delta s_\alpha} +$$

$$+\frac{\delta H}{\delta a_{\alpha\beta}}\nabla_i a_{\alpha\beta} - \rho\nabla_i\frac{\delta H}{\delta\rho} - p_i\nabla_j\frac{\delta H}{\delta p_j} - b_{ki}\nabla_j\frac{\delta H}{\delta b_{kj}},$$

$$\dot{s}_\alpha = -\nabla_i\left(s_\alpha\frac{\delta H}{\delta\pi_i}\right) + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\delta H}{\delta s_\beta}s_\gamma + \frac{\delta H}{\delta a_{\rho\beta}}a_{\rho\gamma}\right), \qquad (14.5)$$

а также уравнения для параметров, описывающих нарушенную симметрию:

$$\dot{a}_{\alpha\beta} = -\frac{\delta H}{\delta\pi_i}\nabla_i a_{\alpha\beta} + a_{\alpha\rho}\,\varepsilon_{\rho\beta\gamma}\frac{\delta H}{\delta s_\gamma},$$

$$\dot{p}_i = -\nabla_i\left(p_j\frac{\delta H}{\delta\pi_j} + \frac{\delta H}{\delta\rho}\right), \qquad \dot{b}_{ik} = -\nabla_k\left(b_{ij}\frac{\delta H}{\delta\pi_j}\right). \qquad (14.6)$$

Приведенные уравнения динамики (14.5), (14.6) и общее функциональное выражение для плотности энергии (14.4) описывают неравновесные свойства квантового спинового кристалла с произвольным характером пространственных неоднородностей. Считая, что плотность энергии является функцией вида

$$\varepsilon(x) = \varepsilon(\sigma(x),\ \rho(x),\ \pi_i(x),\ p_i(x),\ b_{ik}(x),\ s_\alpha(x),\ \omega_{\alpha k}(x)), \qquad (14.7)$$

получим динамические уравнения в локальной форме. Используя формулы (1.15)—(1.18), для плотностей потоков массы, спина, энергии и импульса найдем

$$j_k = \rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_k} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial p_k}, \qquad j_{\alpha k} = s_\alpha\frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_k} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega_{\alpha k}},$$

$$q_k = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_k}\left(\sigma\frac{\partial\varepsilon}{\partial\sigma} + \rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} + \pi_l\frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_l} + s_\alpha\frac{\partial\varepsilon}{\partial s_\alpha}\right) + \frac{\partial\varepsilon}{\partial p_k}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} + p_i\frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_i}\right) +$$

$$+\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega_{\alpha k}}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial s_\alpha} + \omega_{\alpha i}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_i}\right) + b_{ij}\frac{\partial\varepsilon}{\partial b_{ik}}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_j}, \tag{14.8}$$

$$t_{ik} = p\,\delta_{ik} + \pi_i\frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_k} + p_i\frac{\partial\varepsilon}{\partial p_k} + \omega_{\alpha i}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega_{\alpha k}} + b_{ji}\frac{\partial\varepsilon}{\partial b_{jk}},$$

$$p \equiv -\varepsilon + \sigma\frac{\partial\varepsilon}{\partial\sigma} + \pi_l\frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_l} + \rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} + s_\alpha\frac{\partial\varepsilon}{\partial s_\alpha}.$$

Здесь $p$ — давление. Полагая, что плотность энергии по-прежнему удовлетворяет свойству вращательной инвариантности (6.25) в спиновом пространстве, имеем

$$\varepsilon(\ldots, s, \omega_k, a) = \varepsilon(\ldots, as, a\omega_k, 1) \equiv \varepsilon(\ldots, \underline{s}, \underline{\omega}_k).$$

Поэтому целесообразно в качестве независимых переменных выбрать, наряду с остальными, величины $\underline{s}$, $\underline{\omega}_k$. Тогда, вычисляя плотности потоков в новых переменных с использованием алгебры СП (14.3), получим уравнения динамики квантовых спиновых кристаллов в длинноволновом пределе в виде

$$\dot\sigma = -\nabla_k\left(\sigma\frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_k}\right), \qquad \dot\rho = -\nabla_k\left(\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_k} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial p_k}\right),$$

$$\dot\pi_i = -\nabla_k\left(p\,\delta_{ik} + \pi_i\frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_k} + p_i\frac{\partial\varepsilon}{\partial p_k} + \underline{\omega}_{\alpha i}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\underline{\omega}_{\alpha k}} + b_{ji}\frac{\partial\varepsilon}{\partial b_{jk}}\right),$$

$$\dot{\underline{s}}_\alpha = -\nabla_k\left(\underline{s}_\alpha\frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_k} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\underline{\omega}_{\alpha k}}\right) + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\underline{s}_\beta\frac{\partial\varepsilon}{\partial\underline{s}_\gamma} + \underline{\omega}_{\beta k}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\underline{\omega}_{\gamma k}}\right), \tag{14.9}$$

где

$$p = -\varepsilon + \sigma\frac{\partial\varepsilon}{\partial\sigma} + \pi_l\frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_l} + \rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} + \underline{s}_\alpha\frac{\partial\varepsilon}{\partial\underline{s}_\alpha},$$

и уравнения для параметров, описывающих нарушенную симметрию:

$$\dot a_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\rho\gamma}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\,\underline{s}_\gamma} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_i}\underline{\omega}_{\gamma i}\right)a_{\rho\beta},$$

$$\dot{p}_i = -\nabla_i\left(p_j\frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_j} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right), \quad \dot{b}_{ik} = -\nabla_k\left(b_{ij}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_j}\right). \tag{14.10}$$

Следствием уравнений (14.9), (14.10) является дифференциальный закон сохранения плотности энергии:

$$\dot{\varepsilon} = -\nabla_k\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_k}\left(\sigma\frac{\partial\varepsilon}{\partial\sigma} + \rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} + \pi_l\frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_l} + \underline{s}_\alpha\frac{\partial\varepsilon}{\partial\underline{s}_\alpha}\right) + \frac{\partial\varepsilon}{\partial p_k}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} + p_i\frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_i}\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\underline{\omega}_{\alpha k}}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\underline{s}_\alpha} + \underline{\omega}_{\alpha i}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_i}\right) + b_{ij}\frac{\partial\varepsilon}{\partial b_{ik}}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_j}\right]. \tag{14.11}$$

Для компактной записи плотностей потоков (14.8) введем термодинамический потенциал $\omega$:

$$\omega = Y_a\zeta_a - \sigma, \quad a = (0, i, \alpha, 4); \quad \zeta_a = (\varepsilon, \pi_i, s_\alpha, \rho), \tag{14.12}$$

где $Y_a$ — термодинамические силы, определяемые формулами

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\sigma} \equiv \frac{1}{Y_0}, \quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_i} \equiv -\frac{Y_i}{Y_0}, \quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial s_\alpha} \equiv -\frac{Y_\alpha}{Y_0}, \quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} \equiv -\frac{Y_4}{Y_0} \tag{14.13}$$

($\omega' = -\omega/Y_0$— потенциал Гиббса). С учетом (14.12), (14.13) имеем

$$\frac{\partial\omega}{\partial Y_a} = \zeta_a,$$

и второе начало термодинамики для потенциала $\omega$ записывается в виде

$$d\omega = \zeta_a dY_a + \frac{\partial\omega}{\partial p_i}dp_i + \frac{\partial\omega}{\partial b_{ik}}db_{ik} + \frac{\partial\omega}{\partial\omega_{\alpha k}}d\omega_{\alpha k}. \tag{14.14}$$

Из (14.8), (14.14) следует, что

$$\zeta_{ak} = -\frac{\partial}{\partial Y_a}\frac{\omega Y_k}{Y_0} + \frac{\partial\omega}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial Y_a}\frac{Y_4 + Y_i p_i}{Y_0} + \frac{\partial\omega}{\partial b_{jk}}\frac{\partial}{\partial Y_a}\frac{b_{jl}Y_l}{Y_0} +$$

$$+ \frac{\partial\omega}{\partial\omega_{\alpha k}}\frac{\partial}{\partial Y_a}\frac{Y_\alpha + Y_l\omega_{\alpha l}}{Y_0}. \tag{14.15}$$

Динамика плотностей аддитивных интегралов движения $\zeta_a$ и параметров, описывающих нарушенную симметрию, определяется уравнениями

$$\dot{\zeta}_a = -\nabla_k\zeta_{ak}, \quad \dot{p}_i = \nabla_i\left(\frac{Y_4 + Y_j p_j}{Y_0}\right), \quad \dot{b}_{ik} = \nabla_k\left(b_{ij}\frac{Y_j}{Y_0}\right),$$

$$\dot{a}_{\alpha\beta} = \frac{1}{Y_0}\,(Y_i\,\nabla_i\,a_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\rho\gamma}Y_\gamma\,a_{\rho\beta}).$$

С целью интерпретация термодинамических сил $Y_a$ запишем основное термодинамическое тождество для плотности энергии

$$d\varepsilon = Td\,\sigma + \mu d\rho + v_k d\,\pi_k + h_\alpha ds_\alpha + \frac{\partial\varepsilon}{\partial p_i}\,dp_i + \frac{\partial\varepsilon}{\partial b_{ik}}\,db_{ik} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega_{\alpha k}}\,d\omega_{\alpha k}\,. \quad (14.16)$$

Здесь $h_\alpha$ — подмагничивающее поле. Из (14.13), (14.16) получим

$$T = \frac{1}{Y_0}, \quad v_i = -\frac{Y_i}{Y_0}, \quad \mu = -\frac{Y_4}{Y_0}, \quad h_\alpha = -\frac{Y_\alpha}{Y_0}\,.$$

Пусть рассматриваемая система обладает свойством галилеевской инвариантности. Тогда термодинамический потенциал $\omega$ зависит лишь от следующих комбинаций термодинамических сил $Y_a$ [55]:

$$\omega = \omega(Y'_o\,, Y'_k\,, Y'_\alpha\,, Y'_4\,, b_{ik}\,, \omega_{\alpha k}),$$

$$Y'_0 = Y_0, \quad Y'_k = Y_k + Y_0\,\frac{p_k}{m}, \quad Y'_\alpha = Y_\alpha, \quad Y'_4 = Y_4 + Y_k p_k + Y_0\,\frac{p^2}{2m}\,.$$

Замечая, что

$$\frac{\partial\omega}{\partial p_l} = \frac{Y_0}{m}\,\frac{\partial\omega}{\partial Y'_l} + \left(Y_l + Y_0\,\frac{p_l}{m}\right)\frac{\partial\omega}{\partial Y'_4}\,, \qquad \frac{\partial\omega}{\partial Y'_l} + p_l\,\frac{\partial\omega}{\partial Y'_4}\,,$$

найдем выражения для плотностей потоков

$$j_k = \frac{1}{m}\,\frac{\partial\omega}{\partial Y'_k} + \frac{p_k}{m}\,\frac{\partial\omega}{\partial Y'_4}\,, \qquad j_{\alpha k} = -\frac{Y_k}{Y_0}\,\frac{\partial\omega}{\partial Y'_\alpha} + \frac{1}{Y_0}\,\frac{\partial\omega}{\partial\omega_{\alpha k}}\,,$$

$$t_{ik} = -\frac{\omega}{Y_0}\,\delta_{ik} + \frac{p_i p_k}{m}\,\frac{\partial\omega}{\partial Y'_4} + \frac{p_i}{m}\,\frac{\partial\omega}{\partial Y'_k} - \frac{Y_k}{Y_0}\,\frac{\partial\omega}{\partial Y'_i} + \frac{\omega_{\alpha i}}{Y_0}\,\frac{\partial\omega}{\partial\omega_{\alpha k}} + \frac{b_{ji}}{Y_0}\,\frac{\partial\omega}{\partial b_{jk}}\,,$$

$$q_k = -\frac{Y_4 + Y_l p_l}{mY_0}\,\pi_k - \frac{Y_k}{Y_0^2}\left(\sigma - Y_l\,\frac{\partial\omega}{\partial Y'_l}\right) - \frac{b_{jl}Y_l}{Y_0^2}\,\frac{\partial\omega}{\partial b_{jk}} - \frac{Y_\alpha + Y_l\,\omega_{\alpha l}}{Y_0^2}\,\frac{\partial\omega}{\partial\omega_{\alpha k}}\,.$$

При этом второй закон термодинамики запишется в виде

$$Td\sigma = d\varepsilon + \frac{Y'_k}{Y_0}\,d\pi_k + \frac{Y'_\alpha}{Y_0}\,ds_\alpha + \frac{Y'_4}{Y_0}\,d\,\rho - \frac{1}{Y_0}\,\frac{\partial\omega}{\partial\omega_{\alpha k}}\,d\omega_{\alpha k} - \frac{1}{Y_0}\,\frac{\partial\omega}{\partial b_{ik}}\,db_{ik}\,.$$

## 15. СВЕРХТЕКУЧИЙ $^3$He–$B$

В случае сверхтекучей $B$-фазы $^3$He происходит спонтанное нарушение симметрии относительно фазовых преобразований и спиновых вращений. Параметрами, описывающими это нарушение, служат сверхтекучая фаза $\phi(x)$ и ортогональная матрица поворота $a_{\alpha\beta}(x)$. Соответственно, плотность энергии является функционалом вида

$$\varepsilon(x) = \varepsilon(x;\, \sigma(x'), \rho(x'), \pi_i(x'), \phi(x'), s_\alpha(x'), a_{\alpha\beta}(x')). \tag{15.1}$$

СП динамических переменных сверхтекучей $B$-фазы $^3$He образуют подалгебру алгебры (14.3) СП квантового спинового кристалла. Для них имеем

$$\{\pi_i(x), \psi(x')\} = \delta(x-x')\nabla_i\, \psi(x),$$

$$\{\pi_i(x), \sigma(x')\} = -\,\sigma(x)\nabla_i\, \delta(x-x'), \qquad \{\pi_i(x), \rho(x')\} = -\,\rho(x)\nabla_i\, \delta(x-x'),$$

$$\{\pi_i(x), s_\alpha(x')\} = -\,s_\alpha(x)\nabla_i\, \delta(x-x'), \qquad \{\pi_i(x), a_{\alpha\beta}(x')\} = \delta(x-x')\nabla_i\, a_{\alpha\beta}(x),$$

$$\{\pi_i(x), \phi(x')\} = \delta(x-x')\nabla_i\, \phi(x), \qquad \{\rho(x), \phi(x')\} = \{\sigma(x), \psi(x')\} = \delta(x-x'),$$

$$\{s_\alpha(x), s_\beta(x')\} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}s_\gamma(x)\, \delta(x-x'), \qquad \{s_\alpha(x), a_{\beta\gamma}(x')\} = \varepsilon_{\alpha\gamma\rho}a_{\beta\rho}(x)\, \delta(x-x'),$$

$$\{\pi_i(x), \pi_k(x')\} = \pi_k(x)\nabla'_i\, \delta(x-x') - \pi_i(x')\nabla_k\, \delta(x-x'). \tag{15.2}$$

В силу глобальной фазовой инвариантности зависимость плотности энергии (15.1) от фазы $\phi(x)$ выражается только посредством величины $p_i \equiv \nabla_i\, \phi$. Нелокальные уравнения динамики для плотностей аддитивных интегралов движения сверхтекучего $^3$He–$B$ имеют вид

$$\dot\sigma(x) = -\nabla_k\left(\sigma\frac{\delta H}{\delta\pi_k}\right), \qquad \dot\rho = -\nabla_k\left(\rho\frac{\delta H}{\delta\pi_k} + \frac{\delta H}{\delta p_k}\right),$$

$$\dot\pi_i = -\,\pi_j\,\nabla_i\frac{\delta H}{\delta\pi_j} - \nabla_j\left(\pi_i\frac{\delta H}{\delta\pi_j}\right) - \sigma\nabla_i\frac{\delta H}{\delta\sigma} - s_\alpha\nabla_i\frac{\delta H}{\delta s_\alpha} +$$

$$+\frac{\delta H}{\delta a_{\alpha\beta}}\nabla_i\, a_{\alpha\beta} - \rho\nabla_i\frac{\delta H}{\delta\rho} - p_i\,\nabla_j\frac{\delta H}{\delta p_j}, \tag{15.3}$$

$$\dot s_\alpha = -\nabla_i\left(s_\alpha\frac{\delta H}{\delta\pi_i}\right) + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\delta H}{\delta s_\beta}s_\gamma + \frac{\delta H}{\delta a_{\rho\beta}}a_{\rho\gamma}\right),$$

а уравнения для параметров, описывающих нарушенную симметрию,

$$\dot{a}_{\alpha\beta} = -\frac{\delta H}{\delta \pi_i} \nabla_i a_{\alpha\beta} + a_{\alpha\rho}\, \varepsilon_{\rho\beta\gamma} \frac{\delta H}{\delta s_\gamma},$$

$$\dot{p}_i = -\nabla_i \left( p_j \frac{\delta H}{\delta \pi_j} + \frac{\delta H}{\delta \rho} \right). \tag{15.4}$$

В длинноволновом пределе

$$\varepsilon(x) = \varepsilon(\sigma(x),\, \rho(x),\, \pi_i(x),\, p_i(x),\, s_\alpha(x),\, a_{\alpha\beta}(x),\, \omega_{\alpha k}(x)),$$

и плотности потоков интегралов движения согласно (1.15)—(1.18) равны

$$j_k = \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_k} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k}; \quad j_{\alpha k} = s_\alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_k} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega_{\alpha k}},$$

$$q_k = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_k} \left( \sigma \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} + \pi_l \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_l} + s_\alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_\alpha} \right) + \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} + p_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_i} \right) +$$

$$+ \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega_{\alpha k}} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_\alpha} + \omega_{\alpha i} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_i} \right), \tag{15.5}$$

$$t_{ik} = p\, \delta_{ik} + \pi_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_k} + p_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} + \omega_{\alpha i} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega_{\alpha k}},$$

$$p \equiv -\varepsilon + \sigma \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} + \pi_l \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_l} + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} + s_\alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_\alpha}.$$

Если плотность энергии инвариантна относительно спиновых вращений, то

$$\varepsilon(\ldots, s, \omega_k, a) = \varepsilon(\ldots, \underline{s}, \underline{\omega}_k). \tag{15.6}$$

Локальные уравнения движения для сверхтекучей $B$-фазы $^3$He, соответствующие плотности энергии (15.6), имеют вид

$$\dot{\sigma} = -\nabla_k \left( \sigma \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_k} \right), \quad \dot{\rho} = -\nabla_k \left( \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_k} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} \right),$$

$$\dot{\pi}_i = -\nabla_k \left( p\, \delta_{ik} + \pi_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_k} + p_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} + \underline{\omega}_{\alpha i} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{\omega}_{\alpha k}} \right),$$

$$\dot{\underline{s}}_\alpha = -\nabla_k \left( \underline{s}_\alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_k} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{\omega}_{\alpha k}} \right) + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \left( \underline{s}_\beta \frac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{s}_\gamma} + \underline{\omega}_{\beta k} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{\omega}_{\gamma k}} \right), \tag{15.7}$$

а уравнения для параметров, описывающих нарушенную симметрию,

$$\dot{a}_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\rho\gamma}\left( \frac{\partial\varepsilon}{\partial \underline{s}_{\gamma}} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_i}\underline{\omega}_{\gamma i} \right) a_{\rho\beta},$$

$$\dot{p}_i = -\nabla_i \left( p_j \frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_j} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} \right). \qquad (15.8)$$

Уравнения (15.7), (15.8) совпадают с полученными ранее в работе [43].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, нами построен систематический метод получения СП динамических переменных, основанный на задании кинематической части лагранжиана и интерпретации внеинтегральных членов в вариации действия как генераторов канонических преобразований. При построении кинематической части лагранжиана параметры порядка определяются в терминах величин, сопряженных плотностям аддитивных интегралов движения. В рассмотренном нами подходе плотность энтропии является динамической переменной, что требует введения дополнительной сопряженной переменной (переменная $\psi$), которая, однако, не входит в уравнения движения вследствие предположения об ее цикличности. Важную роль при написании кинематической части лагранжиана играет определение операторов пространственного сдвига, связанных с различными физическими полями, входящими в лагранжиан, такими как энтропийное поле, поля фаз параметров порядка и т.д. На основе развитого подхода удалось рассмотреть с единой точки зрения самые разнообразные физические системы, начиная с классических сплошных сред и заканчивая макроскопическими квантовыми объектами (различные магнитоупорядоченные системы, сверхтекучие жидкости, квантовые кристаллы). Общность рассмотрения достигается благодаря как универсальности данного формализма, так и использованию приема выделения подалгебр СП динамических переменных из более общей алгебры с дальнейшим предположением о цикличности переменных, не входящих в подалгебру.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дирак П.** — Принципы квантовой механики. М.: Наука, 1979.
2. **Дирак П.** — Лекции по квантовой механике. М..: Мир, 1968.
3. **Швингер Ю.** — Квантовая кинематика и динамика. М.: Наука, 1992; **Schwinger J.** — Phys. Rev., 1951, vol.82, p.914; Phys. Rev., 1953, vol.91, p.713.
4. **Гитман Д.М., Тютин И.В.** — Каноническое квантование полей со связями. М.: Наука, 1986.

5. **Ахиезер А.И., Пелетминский С.В.** — Поля и фундаментальные взаимодействия. Киев: Наукова думка, 1986.
6. **Захаров В.Е., Манков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.** — Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
7. **Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д.** — Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
8. **Переломов А.М.** — Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М.: Наука, 1990..
9. **Дубровин Б.А., Новиков С.П.** — УМН, 1989, т.44, с.29.
10. **Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.** — Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
11. **Уизем Дж.** — Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
12. **Боголюбов Н.Н.** — Проблемы динамической теории в статистической физике. М.: Гостехиздат, 1946.
13. **Лэмб Х.** — Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1947.
14. **Дубровин Б.А., Новиков С.П.** — ДАН СССР, 1983, т.270, №4.
15. **Голдстейн Г.** — Классичееская механика. М.: Наука, 1975.
16. **Dzyaloshinsky I.E., Volovick G.E.** — Ann. Phys., 1980, vol.125, p.67.
17. **Вирченко Ю.П., Пелетминский С.В.** — В сб.: Проблемы физической кинетики и физики твердого тела. Киев: Наукова думка, 1990, с.63.
18. **Воловик Г.Е.** — Письма в ЖЭТФ, 1980, т.31, с.297.
19. **Воловик Г.Е., Кац Е.И.** — ЖЭТФ, 1981, т.81, с.240.
20. **Кац Е.И., Лебедев В.В.** — Динамика жидких кристаллов. М.: Наука, 1988.
21. **Leggett A.J.** — Rev. Mod. Phys., 1975, vol.47, p.331.
22. **Покровский В.Л., Халатников И.М.** — Письма в ЖЭТФ, 1976, т.23, с.653.
23. **Лебедев В.В., Халатников И.М.** — ЖЭТФ, 1978, т.75, с.2312.
24. **Воловик Г.Е., Доценко В.С. (мл.)** — ЖЭТФ, 1980, т.78, с.132.
25. **Волков Д.В., Желтухин А.А.** — Изв. АН СССР. Сер. физ., 1980, т.44, с.1487.
26. **Голо В.Л.** — ЖЭТФ, 1981, т.81, с.942.
27. **Ковалевский М.Ю., Пелетминский С.В., Шишкин А.Л.** — УФЖ, 1991, т.36, с.245.
28. **Исаев А.А., Ковалевский М.Ю.** — ФНТ, 1994, т.20, с.1125.
29. **Isayev A.A., Kovalevsky M.Yu., Peletminsky S.V.** — Preprint of International Centre for Theoretical Physics, 1994, IC/94/329, p.35.
30. **Pauli W.** — Nuovo Cim., 1953, vol.10, p.648.
31. **Бакай А.С., Степановский Ю.П.** — Адиабатические инварианты. Киев: Наукова думка, 1981.
32. **Isayev A.A., Kovalevsky M.Yu., Peletminsky S.V.** — Mod. Phys. Lett. B, 1994, vol.8, p.677.
33. **Де Жен П.Ж.** — Физика жидких кристаллов. М.: Мир, 1977.
34. **Finkelmann H., Kock H.J., Rehage G.** — Makromol. Chem. Rap Commun., 1981, vol.2, p.317.
35. **Deeg F.W., Diercksen K., Schwalb G. et al.** — Phys. Rev. B, 1991, vol.44, p.2830.
36. **Brand H.R., Pleiner H.** — Physica A, 1994, vol.208, p.359.
37. **Kupfer J., Finkelmann H.** — Makromol. Chem. Rap. Commun., 1991, vol.12, p.717.

38. **Legge C.H., Davis F.J., Mitchell G.R.** — J. Phys. II (France), 1991, vol.1, p.1253.
39. **Волков Д.В., Желтухин А.А., Блиох Ю.П.** — ФТТ, 1971, т.13, с.1668.
40. **Halperin B.I., Saslow W.M.** — Phys. Rev. B, 1977, vol.16, p.2154.
41. **Saslow W.M.** — Phys. Rev. B, 1980, vol.22, p.1174.
42. **Андреев А.Ф., Марченко В.И.** — УФН, 1980, т.130, с.39.
43. **Maki K.** — Phys. Rev. B, 1975, vol.11, p.4264.
44. **Ковалевский М.Ю., Пелетминский С.В., Рожков А.А.** — ТМФ, 1988, т.75, с.85.
45. **Исаев А.А., Ковалевский М.Ю., Пелетминский С.В.** — ТМФ, 1993, т.95, с.58.
46. **Halperin B.I., Hohenberg P.C.** — Phys. Rev., 1969, vol.188, p.898.
47. **Исаев А.А., Ковалевский М.Ю., Пелетминский С.В.** — ФММ, 1994, т.77, с.20.
48. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** — Квантовая механика. М.: Наука, 1989.
49. **Островский В.С.** — ЖЭТФ, 1986, т.91, с.1690.
50. **Локтев В.М., Островский В.С.** — ФНТ, 1994, т.20, с.983.
51. **Онуфриева Ф.П.** — ЖЭТФ, 1984, т.86, с.1691.
52. **Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В.** — Спиновые волны. М.: Наука, 1967.
53. **Андреев А.Ф., Лифшиц И.М.** — ЖЭТФ, 1969, т.56, с. 2057.
54. **Saslow W.M.** — Phys. Rev. B, 1977, vol.15, p.173.
55. **Лавриненко Н.М., Пелетминский С.В.** — ТМФ, 1986, т.66, с.314.
56. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** — Теория упругости. М.: Наука, 1987.