

# МЕТОД КОМПЛЕКСНЫХ ЗНАЧЕНИЙ КУЛОНОВСКОЙ КОНСТАНТЫ СВЯЗИ В ФИЗИКЕ ЯДРА

*И.В.Поплавский*

Одесская государственная академия строительства и архитектуры,  
Одесса, Украина

В обзоре последовательно изложен метод, основанный на идее аналитического продолжения кулоновской константы связи в область комплексных значений, в рамках которого исследованы некоторые проблемы физики ядра.

The method based on the idea of the analytical continuation of the Coulomb coupling constant over the complex values range within of which some of nuclear physics problems were investigated was given in this review.

## ВВЕДЕНИЕ

Исследование связанных и резонансных состояний на основе уравнения Шредингера (УШ) представляет собой важную задачу теоретической физики. При решении многих проблем ядерной и атомной физики необходим одновременный учет короткодействующих и кулоновских сил. В данном обзоре изучены свойства систем, состоящих из двух частиц, взаимодействие между которыми обусловлено такими силами.

Учет дальнедействующих кулоновских сил значительно усложняет задачу. Поэтому ограничимся рассмотрением только сферически-симметричных потенциалов. Далее ради простоты использована система единиц, в которой  $\hbar = 2\mu = c = 1$  ( $\mu$  — приведенная масса системы). В основу работы положено парциальное УШ:

$$\Psi'' + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{a}{r} - V(r) \right] \Psi = 0, \quad (1)$$

где  $k = \sqrt{E}$  — импульс,  $E$  — энергия системы,  $l$  — орбитальный момент,  $V(r)$  — короткодействующий потенциал (например, эффективный потенциал ядерного взаимодействия), удовлетворяющий условию

$$\int_0^{\infty} r |V(r)| \exp(\alpha r) dr < \infty. \quad (2)$$

Кулоновская константа связи (ККС)  $a = zZa_0$  ( $a_0 = e^2$ ), где  $z$  и  $Z$  — заряды взаимодействующих частиц. Физическим значениям  $a_\Phi$  соответствуют целые значения  $z$  и  $Z$ . С помощью метода [1] нетрудно показать, что класс потенциалов (2) охватывает не только случай взаимодействия двух заряженных точечных частиц, но также и случай взаимодействия двух частиц в виде объемно-заряженных сфер с различными радиусами.

Пусть регулярное  $\varphi(l, a, k, r)$  и йостовские  $f(l, a, \pm k, r)$  решения уравнения (1) удовлетворяют граничным условиям

$$\lim_{r \rightarrow 0} \varphi(l, a, k, r) r^{-l-1} = 1, \quad (3)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(l, a, \pm k, r) \exp \left[ \pm i \left( kr - \frac{a}{2k} \ln 2kr \right) \right] = 1. \quad (4)$$

Тогда между ними существует связь

$$\varphi(l, a, k, r) = \frac{1}{2ik} [f(l, a, k) f(l, a, -k, r) - f(l, a, -k) f(l, a, k, r)], \quad (5)$$

где функции Йоста  $f(l, a, \pm k)$  определены с помощью вронскианов

$$f(l, a, \pm k) = W[f(l, a, \pm k, r), \varphi(l, a, k, r)], \quad (6)$$

и  $S$ -матрицу можно записать в виде

$$S(l, a, k) = \exp(i\pi l) \frac{f(l, a, k)}{f(l, a, -k)}. \quad (7)$$

В случае кулоновского потенциала ( $V \equiv 0$ )

$$\varphi_0(l, a, k, r) = (2ik)^{-l-1} M_{\frac{ia}{2k}, l+\frac{1}{2}}(2ikr), \quad f_0(l, a, \pm k, r) = \exp(a\pi/4k) \times$$

$$\times W_{\pm \frac{ia}{2k}, l+\frac{1}{2}}(\pm 2ikr), \quad f_0(l, a, \pm k) = \frac{\exp(a\pi/4k) \Gamma(2l+2)}{(\pm 2ik)^l \Gamma(l+1 \mp ia/2k)},$$

$$S_0(l, a, k) = \frac{\Gamma(l+1+ia/2k)}{\Gamma(l+1-ia/2k)}, \quad (8)$$

где  $M_{\frac{ia}{2k}, l+\frac{1}{2}}$ ,  $W_{\pm \frac{ia}{2k}, l+\frac{1}{2}}$  — функции Уиттекера, а  $\Gamma$  — гамма-функция Эйлера.

Видно, что энергия, орбитальный момент, ККС, константа связи  $g$  ядерного взаимодействия (если заменить в (1)  $V(r)$  на  $gV(r)$ ) входят в парциальное УШ в качестве параметров, физические значения которых вещественны (а для  $l$  и  $a$  они к тому же и дискретны). Ряд важных результатов, получен-

ных в теории рассеяния, связан с идеей аналитического продолжения некоторых из этих параметров в область комплексных значений. Было установлено, что конкретные аналитические свойства матрицы рассеяния в области комплексных значений параметра (например, характер и расположение особенностей) дают непосредственную информацию о физических состояниях системы.

Так, например, Редже предположил, что орбитальный момент может принимать комплексные значения [2]. Тогда каждому полюсу  $S$ -матрицы можно сопоставить функцию  $l = l(E)$ , которая при вещественных значениях  $E$  названа траекторией Редже. Было доказано, что одному и тому же движущемуся в  $l$ -плоскости с изменением энергии полюсу (траектории Редже) соответствуют несколько резонансов и связанных состояний, имеющих различные значения  $l$ . Вместе они образуют семейство состояний с одинаковыми внутренними квантовыми числами, то есть связанные состояния и резонансы можно описать единым образом с помощью траектории полюса  $S$ -матрицы в комплексной  $l$ -плоскости. При этом существенно, что в УШ сохраняются все величины (ККС, приведенная масса, потенциал  $V$ ), за исключением орбитального момента и энергии, в результате чего при взаимодействии двух фиксированных частиц  $x$  и  $y$  у системы  $x + y$  возникают связанные и резонансные состояния, расположенные на траектории Редже.

Аналитические свойства матрицы рассеяния в комплексной плоскости орбитального момента гораздо проще, чем в плоскости энергии или импульса. Например, в случае потенциала Юкавы  $S$ -матрица является мероморфной функцией в области  $\text{Re } \lambda > 0$  ( $\lambda = l + 1/2$ ). Изучение аналитических свойств нерелятивистской амплитуды рассеяния и  $S$ -матрицы в комплексной  $l$ -плоскости, предпринятое Редже, было затем использовано при создании феноменологических моделей для описания столкновений в физике высоких энергий. Однако те надежды, которые вначале связывали с этой теорией, впоследствии не оправдались.

Хотя метод комплексных орбитальных моментов строго доказан только для потенциального рассеяния, его приложения к нерелятивистским проблемам ядерных и атомных столкновений весьма ограничены. Это обусловлено тем, что для применения метода Редже необходимо для известного потенциала решить УШ и получить  $S$ -матрицу. Однако, к сожалению, точный вид потенциала  $V(r)$  до сих пор неизвестен. Тем не менее метод Редже находит некоторые применения в ядерном и атомном рассеянии. В частности, по уровням энергии составных ядер были построены траектории Редже и описаны легкие ядерные системы  $\alpha - \alpha$ ,  $\alpha - {}^{12}\text{C}$ ,  $\alpha - {}^{16}\text{O}$ ,  $p - {}^{12}\text{C}$ ,  $n - {}^{12}\text{C}$ ,  $p - {}^{16}\text{O}$  и  $n - {}^{16}\text{O}$  [3].

Аналитические свойства  $S$ -матрицы в комплексной плоскости константы связи ядерного взаимодействия исследованы в работах [4,5]. Введение в

УШ кулоновского потенциала приводит к трудностям при изучении аналитических свойств  $S$ -матрицы, так как в интегральных уравнениях, используемых для этой цели, свободные решения и ядра построены из кулоновских решений, которые не имеют универсальных представлений. Аналитические свойства ядерно-кулоновской  $S$ -матрицы в комплексной  $k$ -плоскости при  $l = 0$ ,  $a > 0$  для суперпозиции потенциалов Юкавы установлены в [6]. Однако наиболее полно и математически строго этот вопрос при  $l \geq 0$ ,  $a > 0$  для короткодействующих потенциалов рассмотрен в монографии [1].

Таким образом, до последнего времени были подробно изучены последствия аналитического продолжения в область комплексных значений всех параметров УШ, за исключением ККС. В этой связи представляется актуальным и интересным проведение аналогичного исследования в отношении ККС. Целью настоящего обзора является систематическое изложение метода, основанного на идее аналитического продолжения ККС в область комплексных значений и принципе зарядовой независимости ядерных сил, в рамках которого рассмотрены некоторые проблемы физики ядра.

Полезные физические результаты при аналитическом продолжении параметра  $a$  в область комплексных значений можно получить только в том случае, если (по аналогии с теорией Редже) в УШ сохраняются все величины (орбитальный момент, приведенная масса, потенциал), за исключением ККС и энергии. Иными словами, должен существовать именно *один потенциал*  $V(r)$ , который при фиксированном орбитальном моменте определяет  $S$ -матрицу для различных физических значений ККС и энергии, и *одна и та же приведенная масса*. Понятно, что в этом случае необходимо уже рассматривать не взаимодействие двух фиксированных заряженных частиц  $x$  и  $y$ , а взаимодействие двух таких совокупностей заряженных частиц  $X$  и  $Y$ , чтобы потенциал взаимодействия  $V(r)$  любой частицы из совокупности  $X$  с любой частицей из совокупности  $Y$  и приведенная масса системы, составленной из этих частиц, были одинаковыми, а значения ККС — различными. Подчеркнем, что в качестве  $X$  (или  $Y$ ) можно выбрать также и фиксированную заряженную частицу  $x$  (или  $y$ ).

Рассматриваемый здесь подход представляет не только математический, но и несомненный физический интерес, поскольку в ядерной и атомной физике существуют реальные системы, удовлетворяющие указанным выше условиям. Действительно, если в качестве  $X$  и  $Y$  взять изобарические мультиплеты, то приведенная масса системы, составленной из любого члена  $X$  и любого члена  $Y$ , практически постоянна, а потенциал взаимодействия между членами  $X$  и  $Y$ , согласно принципу зарядовой независимости ядерных сил, одинаков. Эти рассуждения сохраняют силу, если в качестве  $X$  (или  $Y$ ) рассматривать не мультиплет, а фиксированный заряженный кластер  $x$  (или  $y$ ). В качестве  $X$  (или  $Y$ ) можно использовать также изобары с одинаковыми спинами и четностями  $J^\pi$ , если они не содержат магические числа нейтро-

нов или протонов. В атомной физике указанным условиям удовлетворяют изоэлектронные атомы и ионы.

Здесь уместно сделать следующие два замечания по поводу метода комплексных значений ККС. Во-первых, работа по созданию теории комплексных значений орбитального момента интенсивно велась с 1959 г. примерно в течение 15 лет довольно большим количеством авторов и описана в многочисленной литературе. При этом в то время никто не обратил внимания на тот факт, что аналогичное исследование (по крайней мере, в математическом плане) можно провести для ККС. По-видимому, это было обусловлено тем, что не вполне понятным был физический смысл такого аналитического продолжения ККС в комплексную область. Действительно, в теории Редже в смысле физической интерпретации все ясно, так как речь идет о потенциальном взаимодействии двух фиксированных частиц  $x$  и  $y$ , в результате которого возникает несколько связанных и резонансных состояний составной системы  $x + y$  с различными орбитальными моментами, принадлежащих одной и той же траектории в  $l$ -плоскости. Психологический барьер, вероятно, состоял в том, что в случае комплексной  $a$ -плоскости значения ККС должны быть переменными, и поэтому УШ необходимо рассматривать уже не для двух фиксированных частиц  $x$  и  $y$  (как это обычно делают в квантовой механике), а для двух групп различных заряженных частиц  $X$  и  $Y$ . Трудность заключалась также в идентификации реальных физических систем (изобарических мультиплетов, ядер-изобар, изоэлектронных атомов и ионов), свойства которых можно описать на основе метода комплексных значений ККС. Во-вторых, исследование комплексной  $a$ -плоскости было начато после 1980 г., когда поток публикаций по «реджистике» практически прекратился, и почти все основные результаты теории комплексных значений ККС принадлежат автору настоящего обзора.

Ниже кратко изложено содержание обзора. В разд.1 рассмотрена совокупность вопросов, связанных с аналитической структурой матрицы рассеяния в комплексной плоскости ККС. В разд.2 сформулирована обратная задача квантовой теории рассеяния в новой постановке и установлена процедура восстановления потенциала взаимодействия между двумя изобарическими мультиплетами или между заряженным кластером и мультиплетом по фазовым сдвигам при фиксированных энергии и орбитальном моменте, но при различных значениях ККС. В разд.3 на основе метода комплексных значений ККС установлены закономерности разделения (распада) четно-четных изобар на фрагменты и предложены полуэмпирические формулы для оценки периодов полураспада  $\alpha$ -активных ядер. В разд.4 сформулированы закономерности разделения или распада членов изобарических мультиплетов и получены формулы для расчетов некоторых характеристик состояний атомных ядер.

## 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ КУЛОНОВСКОЙ КОНСТАНТЫ СВЯЗИ

В этом разделе рассмотрены последствия аналитического продолжения ККС в область комплексных значений. В частности, исследованы аналитические и асимптотические свойства регулярного и йостовского решений, функций Йоста и  $S$ -матрицы в комплексной плоскости ККС. Изучены свойства полюсов матрицы рассеяния в  $a$ -плоскости и дана их физическая интерпретация. Установлены ограничения сверху на число связанных состояний системы из двух частиц для заданной суперпозиции центробежного, кулоновского отталкивающего и ядерного потенциалов. Выяснено влияние зарядово-зависимого потенциала на поведение полюсов в  $a$ -плоскости. Исследовано пороговое поведение полюсов и предложена модификация теоремы Левинсона для комплексной  $a$ -плоскости. В рамках метода комплексных значений ККС решена задача о разделении «ядерного» фазового сдвига на чисто ядерный и ядерно-кулоновский интерференционный фазовые сдвиги. Изучено также поведение полюсов матрицы рассеяния в  $a$ -плоскости для случая кулоновского потенциала.

**1.1. Аналитические свойства функций Йоста и  $S$ -матрицы в комплексной плоскости ККС.** Для изучения аналитических свойств функций Йоста и  $S$ -матрицы необходимо перейти от УШ (1) с граничными условиями (3) и (4) к соответствующим интегральным уравнениям для  $\varphi(l, a, k, r)$  и  $f(l, a, -k, r)$ . Использование оценок [7] для  $\varphi_0(l, a, k, r)$ ,  $f_0(l, a, -k, r)$  и решение интегральных уравнений методом итераций приводит к следующим оценкам для  $\varphi(l, a, k, r)$  и  $f(l, a, -k, r)$ :

$$\begin{aligned}
 & |\varphi(l, a, k, r)| < A \left( \frac{r}{1+|k|r} \right)^{l+1} \times \\
 & \times \exp \left[ |\operatorname{Im} k| r + \frac{1}{2} \left| \operatorname{Im} \left( \frac{a}{k} \right) \right| \ln (1+|k|r) + AP(r) \right], \quad P(r) = \int_0^r \frac{r' |V(r')|}{1+|k|r'} dr', \\
 & |f(l, a, -k, r)| < B \left( \frac{|k|r}{1+|k|r} \right)^{-l} \times \\
 & \times \exp \left[ -(\operatorname{Im} k) r + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left( \frac{a}{k} \right) \ln (1+|k|r) + BQ(r) \right], \quad |\arg(-ik)| < \pi, \\
 & Q(r) = \int_r^\infty \frac{r' |V(r')|}{1+|k|r'} \exp \left\{ (|\operatorname{Im} k| - \operatorname{Im} k) r' + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \left[ \left| \operatorname{Im} \left( \frac{a}{k} \right) \right| + \operatorname{Im} \left( \frac{a}{k} \right) \right] \ln (1+|k|r') \right\} dr', \quad (9)
 \end{aligned}$$

где  $|k| \geq k_0$ ,  $k_0$  — сколь угодно малое положительное число,  $A$  и  $B$  — положительные постоянные, зависящие от  $l$  и  $k_0$  [8].

Тогда из (9) на основании (6) и (7) следует вывод: если потенциал удовлетворяет условию (2), то функция Йоста  $f(l, a, -k)$  аналитична во всей комплексной  $a$ -плоскости при значениях  $k \neq 0$  из области  $\text{Im } k > -\alpha/2$  с разрезом вдоль отрицательной мнимой  $k$ -полуоси от  $k = -i\alpha/2$  до  $k = 0$ , а матрица рассеяния  $S(l, a, k)$  при физических значениях  $l$  мероморфна в прямом произведении  $a$ -плоскости и полосы  $|\text{Im } k| < \alpha/2$  (исключая существенно особую точку при  $k = 0$ ) с разрезом вдоль мнимой оси  $k$  от  $k = -i\alpha/2$  до  $k = i\alpha/2$ . Полученный результат свидетельствует о том, что аналитическая структура  $S$ -матрицы в комплексной плоскости ККС значительно проще, чем в плоскостях импульса (энергии) или орбитального момента.

**1.2. Полюсы  $S$ -матрицы в комплексной плоскости ККС.** Известно, что ядерно-кулоновскую  $S$ -матрицу можно представить в виде

$$\begin{aligned} S(l, a, k) &= S_0(l, a, k) S_{\text{я}}(l, a, k) = S_0(l, a, k) \frac{f_{\text{я}}(l, a, k)}{f_{\text{я}}(l, a, -k)} = \\ &= S_0(l, a, k) \exp [2i \delta_l(a, k)] = S_0(l, a, k) \frac{\text{ctg } \delta_l(a, k) + i}{\text{ctg } \delta_l(a, k) - i}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $S_0(l, a, k)$  — матрица рассеяния для кулоновского потенциала, а  $f_{\text{я}}(l, a, \pm k)$  и  $S_{\text{я}}(l, a, k)$  — «ядерные» функции Йоста и  $S$ -матрица,  $\delta_l(a, k)$  — добавочный к кулоновскому «ядерный» фазовый сдвиг, обусловленный действием потенциала  $V(r)$  [7,9]. Поэтому  $S$ -матрица в комплексной  $a$ -плоскости имеет «ядерные» полюсы (полюсы мероморфной функции  $S_{\text{я}}(l, a, k)$ ) и бесконечное счетное множество кулоновских полюсов. Ограничимся пока исследованием поведения «ядерных» полюсов. Рассмотрим вещественный потенциал  $V(r)$ , для которого при вещественных значениях  $k$  из (1), граничных условий (3) и (4), а также из (7) следуют условия сопряжения

$$\varphi^*(l, a^*, k, r) = \varphi(l, a, k, r), \quad f^*(l, a^*, -k, r) = f(l, a, k, r),$$

$$f^*(l, a^*, -k) = f(l, a, k), \quad S^*(l, a^*, k) = S^{-1}(l, a, k). \quad (11)$$

Это значит, что если при вещественном  $k$  матрица рассеяния имеет в точке  $a$  полюс, то она имеет также в точке  $a^*$  нуль.

Так как полюсы  $S$ -матрицы являются нулями функции  $f(l, a, -k)$ , то на основании (4) и (5) в точке полюса

$$\varphi(l, a, k, r) \sim \frac{f(l, a, k)}{2ik} \exp \left[ i \left( kr - \frac{a}{2k} \ln 2kr \right) \right], \quad (r \rightarrow \infty). \quad (12)$$

Если умножить уравнение (1) для  $\varphi(l, a, k, r)$  на  $\varphi^*(l, a, k, r)$ , вычесть из полученного комплексно-сопряженное уравнение и проинтегрировать выражение по  $r$  от 0 до  $\infty$ , то при вещественных  $k^2 \neq 0$  найдем

$$2i \operatorname{Im} a \int_0^{\infty} \frac{|\varphi(l, a, k, r)|^2}{r} dr = \lim_{r \rightarrow \infty} (\varphi^* \varphi' - \varphi'^* \varphi). \quad (13)$$

Согласно (12) при  $k^2 < 0$  ( $k = ik$ ,  $\kappa > 0$ ) правая часть (13) равна нулю. Следовательно,  $\operatorname{Im} a = 0$ , то есть полюсы расположены на вещественной  $a$ -оси. В [8, 10] показано, что эти полюсы простые.

Для исследования движения полюсов при изменении  $k^2 < 0$  продифференцируем по  $k^2$  левую часть (1) для  $\varphi(l, a, k, r)$ , умножим на  $\varphi(l, a, k, r)$  и вычтем (1), умноженное на  $(\partial\varphi(l, a, k, r)/\partial k^2)$ . Интегрирование полученного выражения по  $r$  от 0 до  $\infty$  в точке полюса с учетом (11), (12) и четности по  $k$  функции  $\varphi(l, a, k, r)$  приводит к результату

$$\frac{\partial a}{\partial k^2} = \int_0^{\infty} |\varphi(l, a, ik, r)|^2 dr \left( \int_0^{\infty} \frac{|\varphi(l, a, ik, r)|^2}{r} dr \right)^{-1} > 0. \quad (14)$$

Из (14) следует, что с увеличением  $k^2 < 0$  полюсы движутся вправо вдоль вещественной  $a$ -оси. Так как  $(\partial a/\partial k^2) > 0$  при любых  $k^2 < 0$ , то направление движения полюсов при  $k^2 \rightarrow -0$  не может измениться в процессе движения. Величина  $a(k)$  при этом принимает физические значения, то есть  $a(k) = a_{\Phi}$ . Из этого условия находим  $k_0 = ik_0$  и  $E_0 = -\kappa_0^2$ . Поскольку соответствующая волновая функция  $\varphi(l, a_{\Phi}, ik_0, r)$  квадратично-интегрируема, то при энергии  $E_0$  существует связанное состояние системы двух взаимодействующих заряженных частиц с ККС  $a_{\Phi}$  и орбитальным моментом  $l$ . При  $k^2 \rightarrow -\infty$  «ядерные» полюсы, по-видимому, переходят через точку  $a=0$  в левую  $a$ -полуплоскость и уходят на бесконечность вдоль отрицательной вещественной  $a$ -полуоси.

Рассмотрим случай вещественного  $k > 0$ . Покажем, что  $f(l, a, -k) \neq 0$  при вещественных  $a$ . Если  $f(l, a, -k) = 0$ , то на основании (5) и (11)  $\varphi(l, a, k, r) \equiv 0$ , что противоречит граничному условию (3). Поэтому при  $k > 0$  полюсы должны сойти с вещественной  $a$ -оси в комплексную  $a$ -плоскость. Тогда  $a(k) = \operatorname{Re} a(k) + i \operatorname{Im} a(k)$ , где  $\operatorname{Im} a(k) \geq 0$ . Предположим, что

$$\operatorname{Re} a(k) = a_{\Phi}, \quad |\operatorname{Im} a(k)| \ll 1. \quad (15)$$



Полюсу (15) соответствует физическое значение импульса и комплексное значение ККС. Перейдем к комплексной  $k$ -плоскости, выбрав комплексное значение  $k_0 = \text{Re } k_0 + i \text{Im } k_0$  таким образом, чтобы  $\text{Re } a(k_0) = a_\Phi$ ,  $\text{Im } a(k_0) = 0$ . Разлагая  $a(k)$  в ряд в окрестности  $k_0$  и ограничиваясь линейным членом разложения, получим

$$\text{Re } a(k) + i \text{Im } a(k) = a_\Phi + \frac{d \text{Re } a(k)}{dk} (k - k_0).$$

В данном выражении учтено, что  $a(k)$  — почти вещественная аналитическая функция в окрестности почти вещественных значений  $k_0$ . Тогда

$$\text{Re } k_0 = k + \frac{a_\Phi - \text{Re } a(k)}{(d \text{Re } a(k) / dk)}, \quad \text{Im } k_0 = - \frac{\text{Im } a(k)}{(d \text{Re } a(k) / dk)}.$$

Комплексному значению  $k_0$  соответствует комплексное значение энергии  $E = E_0 - i \Gamma / 2$ , где

$$E_0 = (\text{Re } k_0)^2 - (\text{Im } k_0)^2, \quad \Gamma = \frac{4 \text{Re } k_0 \text{Im } a(k)}{(d \text{Re } a(k) / dk)}. \quad (16)$$

Таким образом, при  $k > 0$  полюс, вещественная часть которого близка к физическому значению  $a_\Phi$ , а абсолютная величина мнимой части мала, при условии  $(d \text{Re } a(k) / dk) > 0$  (если  $\text{Im } a(k) > 0$ ) или  $(d \text{Re } a(k) / dk) < 0$  (если  $\text{Im } a(k) < 0$ ) описывает резонанс в системе двух взаимодействующих заряженных частиц с ККС  $a_\Phi$  и орбитальным моментом  $l$ .

При дополнительных условиях на потенциал можно получить более определенные сведения относительно расположения полюсов матрицы рассеяния в комплексной плоскости ККС [8,11]. Так, для обобщенного юкавского потенциала  $V(z)$ , допускающего аналитическое продолжение в правую полуплоскость  $z$  и удовлетворяющего условиям

$$\text{Re } V(ip) \leq 0, \quad |\text{Im } V(ip)| < N/\rho, \quad 0 \leq \rho < \infty, \quad (17)$$

доказано, что «ядерные» полюсы  $S$ -матрицы расположены в верхней  $a$ -полуплоскости в области  $\text{Re } a < N$ .

Область мероморфности  $S(l, a, k)$  имеет разрез вдоль мнимой  $k$ -оси от  $k = -i\alpha/2$  до  $k = i\alpha/2$ . Часть этого разреза (от  $k = 0$  до  $k = i\alpha/2$ ) обусловлена функцией  $f(l, a, k)$  и при вещественных значениях  $a$  накрывает в  $k$ -плоскости полюсы  $S$ -матрицы, соответствующие связанным состояниям. Поскольку  $f(l, a, -k)$  — аналитическая функция комплексных переменных  $a$  и  $k$  в области мероморфности  $S$ -матрицы с разрезом вдоль отрицательной мнимой  $k$ -оси от  $k = -i\alpha/2$  до  $k = 0$ , то по теореме о неявных функциях решение  $a = a_l(k)$  уравнения  $f(l, a, -k) = 0$  определяет  $a$  как аналитическую функцию  $k$  везде в указанной области за исключением точек, в которых

$(\partial f(l, a, -k) / \partial a) = 0$ . Последнее соответствует условию существования в  $a$ -плоскости кратных полюсов. При  $k^2 < 0$  вещественные  $a$ -полюсы простые. При  $k^2 > 0$  они переходят с вещественной  $a$ -оси в комплексную  $a$ -плоскость. Следует ожидать, что при этом кратность полюсов не возрастает и они остаются простыми. Во всяком случае, предположим, что это так. Поэтому  $a = a_f(k)$  при вещественных  $k^2$  представляет собой аналитическую функцию.

Особый интерес представляет траектория, описываемая в  $a$ -плоскости полюсом  $a_f(k)$  при  $-\alpha^2/4 < k^2 < \infty$ . Эта кривая представляет собой отображение в  $a$ -плоскость положительной мнимой  $k$ -оси от  $k = i\alpha/2$  до  $k = 0$  и положительной вещественной  $k$ -оси от  $k = 0$  до  $k = \infty$ . Такая траектория может дать полезную информацию о взаимодействии заряженных частиц.

Как отмечено ранее, теория комплексных значений ККС рассматривает взаимодействие между двумя группами заряженных частиц  $X$  и  $Y$ , обусловленное суперпозицией центробежного, кулоновского и короткодействующего потенциалов, в которой изменяется только ее кулоновская компонента. В результате такого взаимодействия между парами частиц из группы  $X$  и группы  $Y$  возникают связанные и резонансные состояния, принадлежащие группе заряженных частиц  $Q$ . Следовательно, эта теория (в соответствии с принципом зарядовой независимости ядерных сил) в области  $\text{Re } a > 0$  описывает кулоновские эффекты в системе  $X + Y \rightleftharpoons Q$ , где  $X$ ,  $Y$  и  $Q$  — изобарические мультиплеты. Заметим, что при определенных ограничениях (о которых будет сказано дальше) теория комплексных значений ККС справедлива и для ядер-изобар.

Если  $V(r)$  — обобщенный юкавский потенциал, удовлетворяющий условиям (17), то на основании предыдущих результатов можно установить следующие характерные свойства поведения траектории полюса. Для отталкивающего потенциала полюсов в области  $\text{Re } a > 0$  нет (связанные состояния и резонансы отсутствуют). Для притягивающего потенциала полюс, лежащий при  $k^2 < 0$  на вещественной оси  $a$ , с уменьшением  $|k^2|$  движется вправо, образуя связанные состояния с орбитальным моментом  $l$  в системе  $X + Y$  при каждом прохождении через физическое значение ККС. Если  $k^2 > 0$ , то полюс оставляет вещественную  $a$ -ось и переходит в первый квадрант  $a$ -плоскости. Полюс, вещественная часть которого равна физическому значению  $a_\Phi$ , а величина мнимой части мала, соответствует резонансу с орбитальным моментом  $l$  члена системы  $X + Y$  с ККС  $a_\Phi$ .

Для определения характера смещения полюсов в зависимости от силы потенциала, представленного в виде  $gV(r)$ , необходимо найти  $(\partial a / \partial g)$ . Из уравнения (1) при  $k^2 < 0$  следует, что

$$\frac{\partial a}{\partial g} = - \int_0^{\infty} V(r) |\varphi(l, a, ik, r)|^2 dr \left( \int_0^{\infty} \frac{|\varphi(l, a, ik, r)|^2}{r} dr \right)^{-1}. \quad (18)$$

Тогда на основании (18) можно сделать следующие выводы. Для слабых притягивающих потенциалов полюс оставляет вещественную  $a$ -ось, не достигнув даже первого физического значения  $a_{\text{Ф}}$ , и связанные состояния отсутствуют, что, однако, не исключает возможности появления при  $k^2 > 0$  резонансов. С увеличением силы притягивающего потенциала полюс все дальше продвигается вправо в области  $\text{Re } a > 0$ , что приводит к возникновению связанных и резонансных состояний со все большими физическими значениями ККС.

Таким образом, при заданном потенциале взаимодействия между мультиплетами  $X$  и  $Y$  возникающие связанные и резонансные состояния членов мультиплета  $Q$  расположены на одной и той же траектории  $a_l(k)$ , то есть их можно описать единым образом с помощью траектории полюса матрицы рассеяния в области  $\text{Re } a > 0$ . Следовательно, построение по экспериментальным данным такого рода траекторий в принципе позволяет посредством их интерполяции или экстраполяции предсказывать массы или энергии возбуждения членов изобарических мультиплетов.

**1.3. Число связанных состояний для заданной суперпозиции центробежного, кулоновского отталкивающего и ядерного потенциалов.** При отсутствии кулоновского потенциала в УШ (1) число связанных состояний  $n_l$  с орбитальным моментом  $l$  удовлетворяет хорошо известному неравенству Баргмана

$$n_l < \frac{1}{2l+1} \int_0^{\infty} r |V_-(r)| dr, \quad (19)$$

где  $V(r)$  — отрицательная часть ядерного потенциала  $V(r)$  [2].

В работе [12] стандартным методом [13] установлено аналогичное (19) ограничение сверху на число связанных состояний системы из двух частиц, когда в УШ помимо центробежного и ядерного присутствует отталкивающий кулоновский потенциал. В частности, показано, что число связанных состояний  $n_{la}$  системы с орбитальным моментом  $l$  и значением ККС  $a$  удовлетворяет неравенству

$$n_{la} < 2 \int_0^{\infty} r I_{2l+1}(2\sqrt{ar}) K_{2l+1}(2\sqrt{ar}) |V_-(r)| dr, \quad (20)$$

где  $I_{2l+1}$  и  $K_{2l+1}$  — модифицированные функции Бесселя, которые при  $l, a \geq 0$  вещественны и неотрицательны.

При  $a=0$  неравенство (20) автоматически переходит в неравенство (19). Очевидно, что включение отталкивающего кулоновского потенциала

может привести только к уменьшению числа связанных состояний и, следовательно, неравенство (19) сохраняет силу. Из оценки [9]

$$I_{2l+1}(2\sqrt{ar}) K_{2l+1}(2\sqrt{ar}) \leq [2(2l+1)]^{-1}$$

следует, что если в УШ присутствует отталкивающий кулоновский потенциал, то неравенство (20) дает более точную верхнюю границу для числа связанных состояний системы, чем неравенство Баргмана (19). При  $a \rightarrow \infty$  неравенство (20) принимает вид

$$n_{l\infty} < \frac{1}{2\sqrt{a}} \int_0^{\infty} \sqrt{r} |V_-(r)| dr.$$

Это значит, что при очень большом отталкивающем кулоновском потенциале связанные состояния отсутствуют, если отрицательная часть ядерного потенциала удовлетворяет условию  $\int_0^{\infty} \sqrt{r} |V_-(r)| dr < \infty$ . В [12] получена также следующая оценка для числа связанных состояний с орбитальным моментом  $l$  и ККС  $a$ , обладающих энергиями  $E \leq -k^2$ :

$$n_{la}(E \leq -k^2) < \frac{\Gamma(l+1+a/2k)}{2k \Gamma(2l+2)} \times \int_0^{\infty} M_{-\frac{a}{2k}, l+\frac{1}{2}}(2kr) W_{-\frac{a}{2k}, l+\frac{1}{2}}(2kr) |V_-(r)| dr. \quad (21)$$

Очевидно, что при  $k \rightarrow 0$  неравенство (21) переходит в неравенство (20).

Любой потенциал, для которого интегралы в правых частях (20) и (21) ограничены, приводит к конечному числу связанных состояний  $n_{la}$  и  $n_{la}(E \leq -k^2)$ . Полагая в (20) и (21)  $n_{la} = 1$  и  $n_{la}(E \leq -k^2) = 1$ , получим ограничения на потенциал, необходимые (но не достаточные) для существования по крайней мере одного связанного состояния с орбитальным моментом  $l$  и ККС  $a$ , обладающего энергией  $E \leq 0$  или  $E \leq -k^2$ .

Как было показано, на траектории полюса  $a_l(k)$ , являющейся решением уравнения  $f(l, a, -k) = 0$  при вещественных значениях  $k^2$ , расположены связанные и резонансные состояния мультиплета  $Q$ . Однако уравнение  $f(l, a, -k) = 0$  может иметь несколько решений при фиксированном  $l$ . Каждому такому решению (траектории) при определенных условиях соответствует мультиплет. Следовательно, возможно существование нескольких мультиплетов  $Q$  с одинаковыми спинами и четностями  $J^\pi$ , члены которых с одинаковыми проекциями изоспина  $T_z$  имеют различные массы или энергии возбуждения  $E_x$ .

Приведенные выше неравенства позволяют получить оценки для числа траекторий «ядерных» полюсов в  $a$ -плоскости, обусловленных потенциалом взаимодействия между  $X$  и  $Y$ , а значит, и для числа возникающих мультиплетов  $Q$  с  $J^\pi = \text{const}$ . Действительно, число траекторий с фиксированным орбитальным моментом  $l$ , расположенных на положительной вещественной  $a$ -полуоси и достигших при увеличении отрицательных значений  $E \leq -k^2$  точки  $a$ , равно числу связанных состояний  $n_{l\alpha}(E \leq -k^2)$ , определяемых неравенством (21). Очевидно также, что общее число траекторий, прошедших через точку  $a=0$  в правую  $a$ -полуплоскость, равно полному числу связанных состояний  $n_l = n_{l0}$ . Поэтому для общего числа траекторий  $a_l(k)$  с  $l = \text{const}$  в области  $\text{Re } a > 0$  справедлива оценка Баргмана (19).

**1.4. Влияние зарядово-зависимого потенциала на поведение полюсов  $S$ -матрицы в  $a$ -плоскости.** Для простоты ограничимся здесь рассмотрением системы  $x + Y \rightleftharpoons Q$ , где  $x$  — фиксированный заряженный кластер, а  $Y$  и  $Q$  — мультиплеты. Анализ упругого рассеяния нуклонов на ядре показал, что объяснение этого процесса возможно посредством включения в оптический потенциал зарядово-зависимого взаимодействия [14]. Следовательно, взаимодействие между  $x$  и членами  $Y$  с проекциями изоспина  $T_z$  можно описать с помощью суперпозиции центрального потенциала и потенциала симметрии:

$$V(r) + \frac{2T_z}{A} V_T(r) = V(r) + \left( 1 - \frac{2a}{za_0A} \right) V_T(r), \quad (22)$$

где  $z$  — заряд кластера  $x$ . Второе слагаемое в (22), представляющее собой малую поправку к центральному потенциалу  $V(r)$ , обусловлено различием массы нейтрона и протона, а также действием кулоновских сил.

Влияние зарядово-зависимого потенциала на поведение полюсов матрицы рассеяния в  $a$ -плоскости подробно исследовано в [15], где установлено следующее. Если взаимодействие между  $x$  и  $Y$  обусловлено потенциалом (22), то при  $k^2 < 0$  на вещественной положительной  $a$ -полуоси расположены простые «ядерные» полюсы  $S$ -матрицы, которые при физических значениях ККС соответствуют связанным состояниям системы  $x + Y$ . При увеличении  $k^2 < 0$  эти полюсы в зависимости от знака функции  $F_l(a, ik) = \int_0^\infty \left[ \frac{1}{r} - \frac{2V_T(r)}{za_0A} \right] |\varphi(l, a, ik, r)|^2 dr$  движутся влево (если  $F_l < 0$ ) или вправо (если  $F_l > 0$ ) со скоростью, обратно пропорциональной величине  $F_l$ . Присутствие потенциала  $V_T$  приводит к смещению полюсов, то есть к изменению энергии связанных состояний системы  $x + Y$ . При  $k^2 > 0$  полюсы

переходят в комплексную  $a$ -плоскость, где при указанных ранее условиях они соответствуют резонансам системы  $x + Y$ .

Таким образом, метод комплексных значений ККС может быть использован и при нарушении принципа зарядовой независимости ядерных сил, которое учтено путем включения в потенциал зарядово-зависимого члена.

**1.5. Пороговое поведение полюсов  $S$ -матрицы в комплексной плоскости ККС.** Для исследования порогового поведения «ядерных» полюсов матрицы рассеяния в области  $\text{Re } a > 0$  [8,10] удобно ввести функцию

$$Z_l(a, E) = B_l(a, E) \left[ H(a, E) + \frac{2iC(a, E)}{S_{\alpha}(l, a, E) - 1} \right], \quad B_l(a, E) = E^l \prod_{n=1}^l \left( 1 + \frac{a^2}{4En^2} \right),$$

$$H(a, E) = a \left[ \Psi \left( \frac{ia}{2\sqrt{E}} \right) - \ln \left( \frac{ia}{2\sqrt{E}} \right) \right] - i\sqrt{E},$$

$$C(a, E) = \pi a \left[ \exp \left( \frac{\pi a}{\sqrt{E}} \right) - 1 \right]^{-1}, \quad (23)$$

где  $\Psi$  — пси-функция. Если потенциал удовлетворяет условию (2), то  $Z_l$  однозначна и мероморфна в прямом произведении  $a$ -плоскости и полосы  $|\text{Im } k| < \alpha/2$ . При физических значениях ККС на основании (10) из (23) следует, что

$$Z_l(a, E) = B_l(a, E) \{ C(a, E) [\text{ctg } \delta_l(a, E) - i] + H(a, E) \} =$$

$$= -\frac{1}{A_l} + \frac{1}{2} R_l E + \dots, \quad (24)$$

где  $A_l$  и  $R_l$  — «длина рассеяния» и «эффективный радиус». Выражение (24) представляет собой модифицированное разложение по эффективному радиусу [16], которое в отличие от обычного разложения справедливо не только для  $k > 0$ , но и для комплексных значений  $k$  из области  $|k| < \alpha/2$ , включающей начало координат. Таким образом, функция  $Z_l$  является естественным обобщением (24) для комплексных значений ККС, так как она регулярна и сохраняет свойство разложимости вблизи начала координат (за исключением точек, в которых  $S_{\alpha}(l, a, E) = 1$ , где она имеет полюсы).

Приближение (24) полезно тогда, когда в ряде по степеням  $E$  можно ограничиться небольшим числом членов. Быстрая сходимость этого ряда зависит от вида и от силы потенциала взаимодействия, от характера сингулярностей парциальной амплитуды и от величины энергии  $E$ . Условиями применимости разложения (24) являются  $|R_l/A_l| \ll 1$  и  $kR_l < 1$  [17]. Поскольку большие значения  $A_l$  соответствуют сильным потенциалам, то (24)

хорошо выполняется для короткодействующих потенциалов  $V$  с большими значениями константы связи.

Используя (23), представим «ядерную» матрицу рассеяния в виде

$$S_{\alpha}(l, a, E) = 1 + \frac{2iB_l(a, E) C(a, E)}{Z_l(a, E) - B_l(a, E) H(a, E)}$$

Отсюда с учетом обозначений (23) следует уравнение

$$Z_l[a_l(E), E] - E^l \prod_{n=1}^l \left[ 1 + \frac{a_l^2(E)}{4En^2} \right] \left\{ a_l(E) \left[ \Psi \left[ \frac{ia_l(E)}{2\sqrt{E}} \right] - \ln \left[ \frac{ia_l(E)}{2\sqrt{E}} \right] \right] - i\sqrt{E} \right\} = 0, \tag{25}$$

определяющее положение полюсов  $S$ -матрицы в комплексной  $a$ -плоскости.

Для изучения поведения полюса  $a_l(E)$  в окрестности существенно особой точки  $E = 0$  введем постоянные  $X_l = \frac{\partial Z_l}{\partial a_l} [a_l(0), 0]$  и  $Y_l = \frac{\partial Z_l}{\partial E} [a_l(0), 0]$ , которые вещественны, поскольку функция  $Z_l(a, E)$  вещественна на пороге. Заметим, что  $Z_l[a_l(0), 0] = 0$ , и пороговое значение полюса  $a_l(0) > 0$  вещественно. Если  $E < 0$ , то полюс лежит на вещественной положительной  $a$ -полуоси, то есть функции  $\Psi \left[ \frac{ia_l(E)}{2\sqrt{E}} \right]$  и  $\ln \left[ \frac{ia_l(E)}{2\sqrt{E}} \right]$  вещественны. Разлагая  $Z_l[a_l(E), E]$  вблизи точки  $[a_l(0), 0]$  и ограничиваясь линейным приближением, а также используя известные формулы для  $\Psi$ -функции [18], из (25) получим

$$X_l [a_l(E) - a_l(0)] + Y_l E - \frac{a_l^{2l-1}(0)E}{3(2)^{2l}(l!)^2} \approx 0. \tag{26}$$

Если  $E > 0$ , то полюс находится в комплексной  $a$ -плоскости, то есть функции  $\Psi \left[ \frac{ia_l(E)}{2\sqrt{E}} \right]$  и  $\ln \left[ \frac{ia_l(E)}{2\sqrt{E}} \right]$  комплексны. После разложения  $Z_l[a_l(E), E]$  в окрестности точки  $[a_l(0), 0]$  на основании (25) найдем

$$X_l [a_l(E) - a_l(0)] + Y_l E - \frac{a_l^{2l-1}(0)E}{3(2)^{2l}(l!)^2} - \frac{i\pi a_l^{2l+1}(0)}{(2)^{2l}(l!)^2} \exp \left[ -\frac{\pi a_l(0)}{\sqrt{E}} \right] \approx 0. \tag{27}$$

Тогда из (26) и (27) следует, что траектория полюса матрицы рассеяния имеет вид

$$a_l(E) \approx \begin{cases} c_1 + c_2 E, & E \leq 0, \\ c_1 + c_2 E + i c_3 \exp\left(-\frac{c_4}{\sqrt{E}}\right), & E \geq 0, \end{cases} \quad (28)$$

где  $c_i$  — вещественные постоянные ( $c_1, c_4 > 0$ ), зависящие от  $l$  и  $a_l(0)$ . Соотношение (28) имеет большое значение для рассмотренных в последующих разделах приложений.

**1.6. Асимптотика функций Йоста и  $S$ -матрицы для больших комплексных значений ККС.** Определение асимптотики решений УШ, функций Йоста и  $S$ -матрицы при больших комплексных значениях параметров представляет интерес в связи с решением обратной задачи квантовой теории рассеяния (ОЗКТР). Далее рассмотрен случай  $l=0$ , и для простоты записи в соответствующих выражениях опущено  $l$ , то есть вместо  $\varphi(l, a, k, r)$ ,  $f(l, a, \pm k, r)$ ,  $f(l, a, \pm k)$ ,  $S(l, a, k)$ ,  $\delta_l(a, k)$  использованы обозначения  $\varphi(a, k, r)$ ,  $f(a, \pm k, r)$ ,  $f(a, \pm k)$ ,  $S(a, k)$ ,  $\delta(a, k)$ . Предположим, что потенциал  $V(z)$  является аналитической функцией в  $z$ -плоскости и удовлетворяет следующим дополнительным (по отношению к (2)) условиям:

$$\int_0^{\infty} |\sqrt{z} V(z)| |dz| < \infty, \quad |zV(z)| < \infty. \quad (29)$$

Тогда, в соответствии с результатами [19], полученными с помощью квазиклассического метода ВКБ, решения УШ, функции Йоста и  $S$ -матрица при больших значениях  $|a|$  ведут себя как соответствующие функции свободного УШ:

$$\begin{aligned} \varphi(a, k, r) &\sim \varphi_0(a, k, r) \sim \frac{i^{-3/2}}{\sqrt{\pi}} a^{-3/4} r^{1/4} \cos\left(2\sqrt{-ar} - \frac{3\pi}{4}\right), \\ f(a, -k, r) &\sim f_0(a, -k, r) \sim \frac{i\sqrt{k}(-ia/2k)^{-(ia/2k)} a^{-1/4} r^{1/4} \exp[i(2\sqrt{-ar} - 3\pi/4)]}{\exp[(a\pi/4k) - (ia/2k)]}, \\ f(a, \pm k) &\sim f_0(a, \pm k) \sim \frac{\exp[(a\pi/4k) \mp (ia/2k)]}{\sqrt{2\pi} (\mp ia/2k)^{\mp (ia/2k) + (1/2)}}, \\ S(a, k) &\sim S_0(a, k) \sim (-1)^{(ia/2k) + (1/2)} (ia/2k)^{(ia/k)} \exp(-ia/k). \end{aligned} \quad (30)$$

**1.7. Представления для матрицы рассеяния в комплексной плоскости ККС.** Поскольку при  $k > 0$  и любых конечных комплексных значениях ККС функция  $S_{\gamma}(a, k)$  мероморфна, она не может иметь точки сгущения



полюсов внутри области мероморфности, то есть на конечных расстояниях  $|a|$ . Из п.1.6 и (10) следует равенство

$$\lim_{|a| \rightarrow \infty} [S_{\text{я}}(a, k) - 1] = 0. \tag{31}$$

Поэтому полюсы функции  $S_{\text{я}}(a, k)$  не могут иметь точку сгущения и на бесконечности. Следовательно, число  $n$  «ядерных» полюсов  $a_j(k)$  в комплексной  $a$ -плоскости конечно.

Рассмотрим интеграл

$$I = \oint_C \frac{S_{\text{я}}(a', k) - 1}{a' - a} da',$$

где в качестве контура интегрирования  $C$  выбрана окружность бесконечно большого радиуса с центром в точке  $a' = 0$ ; точка  $a$  находится внутри окружности  $C$  и не совпадает с полюсами  $a_j(k)$  функции  $S_{\text{я}}(a', k)$ . Вычислим  $I$  двумя способами. Во-первых, с помощью теории вычетов получим

$$I = 2\pi i \left[ S_{\text{я}}(a, k) - 1 + \sum_{j=1}^n \frac{S_{\text{я}j}(k)}{a_j(k) - a} \right],$$

где  $S_{\text{я}j}$  — вычет «ядерной»  $S$ -матрицы в полюсе  $a_j(k)$ . Во-вторых, выполняя интегрирование вдоль контура  $C$ , с учетом (31) найдем, что  $I = 0$ . Следовательно,

$$S_{\text{я}}(a, k) = \prod_{j=1}^n \frac{a - b_j(k)}{a - a_j(k)}, \tag{32}$$

где  $b_j(k)$  — комплексные числа, определяемые из уравнения

$$\prod_{j=1}^n [a - a_j(k)] - \prod_{j=1}^n [a - b_j(k)] + \sum_{j=1}^n S_{\text{я}j}(k) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n [a - a_i(k)] = 0$$

путем приравнивания нулю коэффициентов при одинаковых степенях  $a$ . После подстановки (32) в (10) с учетом (8) получим представление  $S$ -матрицы для  $l = 0$  и  $k > 0$  в комплексной  $a$ -плоскости:

$$S(a, k) = \frac{\Gamma(1 + ia/2k)}{\Gamma(1 - ia/2k)} \prod_{j=1}^n \frac{a - b_j(k)}{a - a_j(k)}. \tag{33}$$

Если при  $r \geq 0$  потенциал  $V(r)$  веществен, то в соответствии с (10) и (11) для вещественных значений  $a$  и  $k$

$$S_{\text{я}}(a, k) = \frac{f_{\text{я}}(a, k)}{f_{\text{я}}(a, -k)} = \exp [2i \delta(a, k)] = \prod_{j=1}^n \frac{a - a_j^*(k)}{a - a_j(k)}. \tag{34}$$

Выражение (34) позволяет определить поведение полюсов  $a_j(k)$  при  $k \rightarrow \infty$ . Действительно, полагая в (9)  $r=0$  и  $\text{Im } k=0$ , получим  $\lim_{k \rightarrow \infty} Q(0) = 0$ .

Тогда из равенства  $f(a, \pm k) = \lim_{r \rightarrow 0} f(a, \pm k, r)$  и оценок п.1.1 для  $l=0$  следует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{\text{я}}(a, \pm k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(a, \pm k)}{f_0(a, \pm k)} = 1,$$

то есть  $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{\text{я}}(a, k) = 1$ . Поэтому на основании (34) можно сделать вывод:

«ядерные» полюсы  $S$ -матрицы  $a_j(k)$  при  $k \rightarrow \infty$  либо попадают на вещественную  $a$ -ось, либо уходят на бесконечность, имея ограниченную мнимую часть.

### 1.8. Модификация теоремы Левинсона для комплексной $a$ -плоскости.

Одним из фундаментальных результатов квантовой теории рассеяния является теорема Левинсона, которая устанавливает связь между фазовым сдвигом при нулевой энергии и числом связанных состояний системы. Теорема Левинсона была доказана для различных типов потенциалов [20]. Оказалось возможным также получить соотношение типа теоремы Левинсона для полюсов Редже [21]. Аналогичный результат, устанавливающий связь между значением  $s$ -волнового фазового сдвига при нулевой энергии  $\delta(a, 0)$  и полюсами  $S$ -матрицы в  $a$ -плоскости [22], приведен ниже.

Рассмотрим класс аналитических потенциалов, удовлетворяющих условиям (2), (17) и (29). Пусть  $n_a$  — число полюсов  $S$ -матрицы, расположенных при  $k = +0$  на вещественной положительной  $a$ -полуоси справа от данного фиксированного значения ККС  $a$ . Тогда

$$\delta(a, 0) = \begin{cases} n_a \pi, & \text{если } a > 0 \text{ или } f_{\text{я}}(a, 0) \neq 0 \text{ при } a = 0, \\ (n_a + 1/2) \pi, & \text{если } f_{\text{я}}(a, 0) = 0 \text{ при } a = 0. \end{cases} \quad (35)$$

Соотношение (35) имеет место для «ядерных» фазовых сдвигов, характеризующих отличие рассеяния ядерно-кулоновским потенциалом от чисто кулоновского потенциала, и справедливо при любых вещественных значениях  $a > 0$ , а не только при физических. Оно имеет простую физическую интерпретацию. Действительно, каждому полюсу из числа  $n_a(k = +0)$  соответствует своя траектория, которая с уменьшением отрицательных значений  $E$  обязательно пройдет через  $a_{\text{я}}$ , лежащее слева на вещественной положительной  $a$ -полуоси. Следовательно, количество связанных состояний равно числу полюсов  $n_a$ .

**1.9. Разделение фазового сдвига на чисто ядерный и ядерно-кулоновский интерференционный фазовые сдвиги.** Выделение ядерно-кулоновского интерференционного (или чисто ядерного) фазового сдвига является важной задачей, необходимой для правильной интерпретации экспериментальных данных. Действительно, очень часто теоретические расчеты приходится сравнивать с экспериментально получаемой суммой чисто ядерного  $\delta_{\text{я}}$  и ядерно-кулоновского интерференционного  $\delta_{\text{и}}$  фазовых сдвигов. Несмотря на то, что проблема выделения  $\delta_{\text{я}}$  и  $\delta_{\text{и}}$  рассматривается уже давно [23], ясности в этом вопросе все еще нет. Ниже с помощью метода комплексных значений ККС проведено разделение фазового сдвига на чисто ядерный и ядерно-кулоновский интерференционный фазовые сдвиги (в однополюсном приближении, а также при малых значениях  $a$ ) [24].

В случае однополюсного приближения ( $n = 1$ ) для  $s$ -волны из (10) и (32) следует

$$\exp [2i \delta(a, k)] = \frac{a - b_1(k)}{a - a_1(k)}. \quad (36)$$

Если при физических значениях  $k$  известны комплексные фазовые сдвиги  $\delta(\pm a, k)$ , соответствующие рассеянию «частица<sub>1</sub> + частица<sub>2</sub>» и «частица<sub>1</sub> + античастица<sub>2</sub>» (или «античастица<sub>1</sub> + частица<sub>2</sub>»), то с помощью (36) можно определить  $a_1(k)$  и  $b_1(k)$ . Затем, положив в (36)  $a = 0$ , легко выделить чисто ядерный фазовый сдвиг  $\delta_{\text{я}}(k) = \delta(0, k)$ , и, следовательно, интерференционные фазовые сдвиги  $\delta_{\text{и}}^{\pm}(a, k) = \delta(\pm a, k) - \delta_{\text{я}}(k)$ :

$$\delta_{\text{я}}(k) = \frac{1}{2i} \ln \frac{b_1(k)}{a_1(k)}, \quad \delta_{\text{и}}^{\pm}(a, k) = \frac{1}{2i} \ln \frac{a_1(k)[\pm a - b_1(k)]}{b_1(k)[\pm a - a_1(k)]}. \quad (37)$$

С помощью соотношений (37) и решается задача о разделении  $\delta_{\text{я}}$  и  $\delta_{\text{и}}^{\pm}$  в однополюсном приближении.

Покажем, что в некоторых случаях можно приближенно определить  $\delta_{\text{я}}$  и  $\delta_{\text{и}}^{\pm}$ , не используя однополюсное приближение (36), а исходя только из экспериментальных данных. Для этого разложим «ядерные» фазовые сдвиги  $\delta(\pm a, k)$  в ряд по величине ККС:

$$\begin{aligned} \delta(\pm a, k) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^{(n)} \delta(\pm a, k)}{da^n} \right|_{a=0} (\pm a)^n = \\ &\approx \delta_{\text{я}}(k) + \left. \frac{d\delta(\pm a, k)}{da} \right|_{a=0} (\pm a). \end{aligned} \quad (38)$$

Разложение (38) можно применять лишь при  $|a| \ll \zeta$ , где  $\zeta$  — модуль наиболее близкого к началу координат «ядерного» полюса  $S$ -матрицы в

$a$ -плоскости. При этом  $\zeta > 0$ , так как «ядерная»  $S$ -матрица не имеет полюса в начале координат [11]. Другими словами,  $\delta(\pm a, k)$  аналитична в круге радиуса  $\zeta$  (зависящем, вообще говоря, от импульса  $k > 0$ ). В таком линейном приближении из (38) легко получить формулы, связывающие величины  $\delta_{\text{я}}$  и  $\delta_{\text{н}}^{\pm}$  с известными из эксперимента «ядерными» фазовыми сдвигами  $\delta(\pm a, k)$ :

$$\delta_{\text{я}}(k) \approx \frac{1}{2} [\delta(a, k) + \delta(-a, k)], \quad \delta_{\text{н}}^{\pm}(a, k) \approx \pm \frac{1}{2} [\delta(a, k) - \delta(-a, k)].$$

В отличие от (37) эти соотношения справедливы для произвольного орбитального момента.

Таким образом, метод комплексных значений ККС, учитывающий кулоновские эффекты при рассеянии частиц примерно одинаковой массы, является естественной основой для выделения чисто ядерного и ядерно-кулоновского интерференционного вкладов в «ядерный» фазовый сдвиг.

**1.10. Описание изоэлектронного ряда водорода с помощью траектории полюса  $S$ -матрицы в  $a$ -плоскости.** Особый интерес представляет случай притягивающего кулоновского поля ( $a < 0$  и  $V \equiv 0$  в уравнении (1)), что соответствует задаче о движении электрона в поле ядра (атом водорода, ион гелия  $\text{He}^+$  и другие водородоподобные ионы) или системе  $e^- + Y$ , где  $Y$  — ядра с зарядами  $Z = 1, 2, \dots$ . Приведенная масса такой системы равна массе электрона, ККС  $a_{\Phi} = -Za_0$ . В этом случае отсутствуют резонансы, однако и на примере связанных состояний можно наглядно продемонстрировать поведение полюсов  $S$ -матрицы в  $a$ -плоскости [25].

Уравнение (1) для кулоновского потенциала имеет точное решение, которому соответствует матрица рассеяния (8). Полюсы  $S$ -матрицы в  $a$ -плоскости определены теми значениями  $a$ , при которых

$$l + 1 + \frac{ia}{2k} = -n', \quad (39)$$

где  $n' = 0, 1, 2, \dots$ . Число  $n'$  совпадает с числом узлов радиальной волновой функции. Из (31) следует, что  $a_n(k) = 2ikn$ , где  $n = n' + l + 1$  — главное квантовое число. Поэтому траектория полюса в  $a$ -плоскости задана парой чисел  $n', l$  и описывает состояние с квантовыми числами  $nl$  для изоэлектронного ряда водорода. Например, если  $n' = l = 1$ , то траектория полюса соответствует состоянию  $3p$  водородоподобных ионов. Число траекторий, описываемых полюсами в  $a$ -плоскости при изменении вещественных значений  $k^2$ , бесконечно. Траектории полюсов с одинаковыми  $n$  (но с различными  $n'$  и  $l$ ) совпадают.

Если  $k^2 < 0$ ,  $k = ik(k > 0)$ , то  $a_n < 0$  и  $(da_n/dk) < 0$ , то есть полюс лежит на отрицательной вещественной  $a$ -полуоси и при уменьшении  $k$  движется

вправо вдоль этой полуоси. Когда при некотором  $k$  полюс проходит через физическое значение ККС  $a_\Phi(Z = 1, 2, \dots)$ , то у водородоподобного иона элемента с порядковым номером  $Z$  возникает связанное состояние с квантовыми числами  $nl$  и энергией  $E_n = -a_\Phi^2/4n^2$ .

Поскольку  $a_n(0) \equiv 0$ , начало координат в  $a$ -плоскости представляет собой точку сгущения полюсов. При  $k > 0$  полюс лежит на положительной мнимой полуоси  $a$  и с увеличением  $k$  движется вверх вдоль этой полуоси.

Подобный способ описания состояний с фиксированными квантовыми числами возможен и для других изоэлектронных рядов. Так, в работе [26] построены траектории полюса матрицы рассеяния в  $a$ -плоскости для состояний изоэлектронной последовательности натрия и путем их интерполяции вычислены неизвестные уровни энергии иона  $\text{Cl VII}$ . Следовательно, метод комплексных значений ККС можно с успехом использовать в атомной физике для определения энергий связанных состояний изоэлектронных рядов.

## 2. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ В НОВОЙ ПОСТАНОВКЕ

Решение обратной задачи квантовой теории рассеяния заключается в восстановлении потенциала взаимодействия по экспериментальным данным, включающим в различных вариантах фазовые сдвиги,  $S$ -матрицу, энергии и нормировочные константы связанных состояний, амплитуду рассеяния. Обратные задачи изучаются уже на протяжении более шестидесяти лет, в течение которых было опубликовано очень большое количество работ. При этом наиболее важные и фундаментальные результаты по обратным задачам в основном изложены в монографиях [20, 27—30].

До последнего времени были известны две традиционные постановки, в соответствии с которыми ОЗКТР имеет решение, если: 1) известны сдвиги фаз для одного значения углового момента при всех значениях энергии, энергии связанных состояний и нормировочные константы; 2) известны сдвиги фаз для всех значений угловых моментов при одной фиксированной энергии, то есть известна амплитуда рассеяния.

При решении ОЗКТР для различных типов уравнений, как правило, используют модификации или аналоги методов Гельфанда — Левитана или Марченко. При этом сложилась такая ситуация, что техника метода Крейна не нашла достаточного применения в исследованиях по ОЗКТР для более сложных типов уравнений.

В последние годы были продолжены в различных направлениях интенсивные исследования по обратным задачам. Если ранее основные результаты были получены для одномерных и одноканальных задач, то для по-

следних лет характерен переход к изучению более сложных систем — многоканальных, многомерных, многочастичных и с нелокальным взаимодействием [20].

Как отмечено выше, в традиционных подходах потенциал восстанавливают по экспериментальным данным при фиксированных физических значениях либо энергии, либо орбитального момента. Недавно рассмотрен более общий подход к решению обратной задачи, когда энергия и квадрат орбитального момента в исходных данных связаны линейной зависимостью [31].

В традиционных постановках обратной задачи предполагается, что величина ККС фиксирована, то есть речь идет о восстановлении потенциала взаимодействия между двумя фиксированными частицами  $x$  и  $y$ . Однако, если отказаться от этого предположения и считать значения ККС переменными, то можно сформулировать ОЗКТР в новой постановке, суть которой заключается в определении потенциала взаимодействия  $V(r)$  по фазовым сдвигам, взятым при фиксированных значениях энергии (импульса) и орбитального момента, но при различных физических значениях ККС. В этом случае *один и тот же потенциал  $V(r)$  должен описывать взаимодействие уже между двумя группами заряженных частиц  $X$  и  $Y$ , имеющих примерно одинаковую приведенную массу*. В соответствии с принципом зарядовой независимости ядерных сил такие группы частиц  $X$  и  $Y$  представляют собой изобарические мультиплеты (или ядра-изобары). Таким образом, в предложенном здесь новом подходе к ОЗКТР в принципе можно по экспериментальным данным восстановить потенциал взаимодействия между двумя мультиплетами (или между заряженным кластером и мультиплетом). Для решения обратной задачи в новой постановке необходимы результаты фазового анализа, учитывающего кулоновское или зарядовое расщепление фазовых сдвигов. Примеры такого рода фазового анализа для  $pN$ -взаимодействия в состоянии  ${}^1S_0$  и для  $\pi^+p$ -взаимодействия в состояниях  $S_{31}$ ,  $P_{33}$  приведены в [32,33].

В этом разделе в помощь интегрального (типа Гельфанда — Левитана) метода решена обратная задача в новой постановке, в результате чего по спектральной функции, заданной в  $a$ -плоскости, восстановлен комплексный потенциал взаимодействия, принадлежащий классу аналитических функций [24,34]. Приведены также формулы обобщенного варианта преобразований Дарбу — Крама — Крейна для случая, когда в УШ помимо центробежного и ядерного присутствует кулоновский потенциал [35].

**2.1. Соотношение полноты для набора решений УШ.** Рассмотрим УШ (1), где  $l = 0$ ,  $k > 0$  и ККС принимает комплексные значения. Предположим, что комплексный потенциал  $V(r)$  является аналитической функцией и удовлетворяет условиям (2) и (29). Тогда функции  $\varphi(a, k, r)$ ,  $f(a, \pm k, r)$ ,  $f(a, \pm k)$  аналитичны, а матрица рассеяния  $S(a, k)$  мероморфна в комплексной  $a$ -плос-

кости и представима в виде (33). Вследствие этого  $S$ -матрица при  $k > 0$  имеет в  $a$ -плоскости конечное число  $n$  «ядерных» полюсов. Количество этих полюсов и их положение в  $a$ -плоскости зависят от конкретного вида потенциала  $V(r)$ . Кроме того, на мнимой положительной оси  $a$  в точках  $2ik(n + 1)$ , где  $n = 0, 1, \dots$ , расположено бесконечное множество кулоновских простых полюсов. Таким образом, спектр в  $a$ -плоскости дискретен и состоит из бесконечного счетного множества точек  $a_j$ .

Основным моментом при решении обратной задачи является доказательство соотношения полноты. Для вывода этого соотношения рассмотрим интеграл

$$I_1 = \oint_C da \int_0^\infty \frac{h(r')}{\sqrt{rr'}} G(a, k; r, r') dr', \quad (40)$$

где  $h(r)$  — произвольная квадратично-интегрируемая функция, удовлетворяющая условию  $h(0) = 0$ ;

$$G(a, k; r, r') = \begin{cases} \frac{\varphi(a, k, r) f(a, -k, r')}{f(a, -k)}, & r \leq r', \\ \frac{\varphi(a, k, r') f(a, -k, r)}{f(a, -k)}, & r \geq r' \end{cases}$$

— функция Грина. В качестве контура интегрирования  $C$  возьмем окружность бесконечно большого радиуса  $R$  с центром в точке  $a = 0$ . Далее вычислим  $I_1$  двумя способами: во-первых, с помощью теории вычетов; во-вторых, интегрированием вдоль контура  $C$ .

Поскольку  $\varphi(a, k, r)$  и  $f(a, -k, r)$  аналитичны в  $a$ -плоскости, то полюсы подынтегрального выражения в формуле (40), расположенные в точках  $a = a_j$ , являются нулями функции  $f(a, -k)$  или полюсами  $S$ -матрицы. Напомним, что кулоновские полюсы простые. Учитывая соображения, изложенные в п.1.2, предположим, что «ядерные» полюсы также простые. Так как из УШ следует равенство

$$\left. \frac{\partial f(a, -k)}{\partial a} \right|_{a=a_j} = \frac{2ik}{f(a_j, k)} \int_0^\infty \frac{\varphi^2(a_j, k, r)}{r} dr, \quad (41)$$

то, используя (5) и (41), на основании теории вычетов найдем

$$I_1 = 2\pi i \int_0^\infty h(r') \left[ \sum_j C_j \frac{\varphi(a_j, k, r)}{\sqrt{r}} \frac{\varphi(a_j, k, r')}{\sqrt{r'}} \right] dr', \quad (42)$$

где нормировочные константы

$$C_j = \frac{2ik}{f(a_j, k)} \operatorname{Res}_{a=a_j} \frac{1}{f(a, -k)} =$$

$$= \frac{2ik}{f(a_j, k) \left. \frac{\partial f(a, -k)}{\partial a} \right|_{a=a_j}} = \left[ \int_0^\infty \frac{\varphi^2(a_j, k, r)}{r} dr \right]^{-1} \quad (43)$$

Теперь вычислим  $I_1$  вторым способом. Учитывая асимптотические формулы (30), а также известные соотношения для  $\delta$ -функции

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\exp(iRx)}{x} = i\pi \delta(x), \quad \delta(f(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|f'(x_n)|},$$

где  $x_n$  — простые полюсы функции  $f(x)$ , при интегрировании вдоль окружности бесконечно большого радиуса получим

$$I_1 = 2\pi i h(r). \quad (44)$$

Из (42) и (44) следует соотношение полноты

$$h(r) = \int_0^\infty h(r') \left[ \sum_j C_j \frac{\varphi(a_j, k, r)}{\sqrt{r}} \frac{\varphi(a_j, k, r')}{\sqrt{r'}} \right] dr',$$

которое с помощью интеграла Стильбеса можно записать в виде

$$\int_D \frac{\varphi(a, k, r)}{\sqrt{r}} \frac{\varphi(a, k, r')}{\sqrt{r'}} dp(a) = \delta(r - r'), \quad (45)$$

где  $D$  — область, включающая комплексную  $a$ -плоскость, а спектральная функция  $\rho(a)$  определяется выражением

$$\frac{dp(a)}{da} = \sum_j C_j \delta(a - a_j). \quad (46)$$

На основе УШ нетрудно установить соотношение

$$C_j \int_0^\infty \frac{\varphi(a_j, k, r) \varphi(a_j, k, r)}{r} dr = \delta_{jj'},$$

из которого в совокупности с (45) и (46) следует, что набор функций  $F_j(r) = (C_j/r)^{1/2} \varphi(a_j, k, r)$  образует на полуоси полную ортогональную и нормированную систему. Отметим, что ортогональны не функции  $F_j(r)$  и  $F_j^*(r)$  (как это обычно имеет место), а функции  $F_j(r)$  и  $F_{j'}(r)$ . Это связано с тем, что собственные значения  $a_j$  комплексны [36].

**2.2. Процедура решения обратной задачи по данным рассеяния при фиксированных физических значениях энергии и орбитального момента.** Легко проверить, что функции  $\Phi_{1,2}(a, k, r) = \varphi_{1,2}(a, k, r)/\sqrt{r}$  удовлетворяют дифференциальному уравнению



$$\left\{ r \frac{d^2}{dr^2} + \frac{d}{dr} + r[k^2 - V_{1,2}(r)] - a - (1/4r) \right\} \Phi_{1,2}(a, k, r) = 0 \quad (47)$$

и граничному условию  $\Phi_{1,2}(a, k, 0) = 0$ . Здесь  $\Phi_1(a, k, r)$  и  $\Phi_2(a, k, r)$  — решения уравнения (47) с известным (или опорным) потенциалом  $V_1(r)$  и неизвестным (восстанавливаемым) потенциалом  $V_2(r)$ .

Рассмотрим выражение

$$B(r, r') = \int_D \Phi_2(a, k, r) \Phi_1(a, k, r') d[\rho_2(a) - \rho_1(a)],$$

где  $\rho_1(a)$  и  $\rho_2(a)$  — спектральные функции, соответствующие потенциалам  $V_1(r)$  и  $V_2(r)$ . На основании (47)  $B(r, r')$  удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\begin{aligned} & \left\{ r \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} + r[k^2 - V_2(r)] - (1/4r) \right\} B(r, r') = \\ & = \left\{ r' \frac{\partial^2}{\partial r'^2} + \frac{\partial}{\partial r'} + r'[k^2 - V_1(r')] - (1/4r') \right\} B(r, r') \end{aligned} \quad (48)$$

с граничными условиями  $B(0, r') = B(r, 0) = 0$ .

Пусть  $\Phi_2(a, k, r)$  связано с  $\Phi_1(a, k, r)$  соотношением

$$\Phi_2(a, k, r) = \Phi_1(a, k, r) - \int_0^r B(r, r') \Phi_1(a, k, r') dr'. \quad (49)$$

После подстановки (49) в уравнение (47) с нижним индексом 2 с учетом (48) получим

$$\begin{aligned} & \left\{ r[V_2(r) - V_1(r)] + B(r, r) + r \frac{dB(r, r)}{dr} + r \frac{\partial B(r, r')}{\partial r} \Big|_{r'=r} \right\} \Phi_1(a, k, r) + \\ & + rB(r, r) \frac{d\Phi_1(a, k, r)}{dr} + \int_0^r \Phi_1(a, k, r') \left\{ r' \frac{\partial^2}{\partial r'^2} + \frac{\partial}{\partial r'} + \right. \\ & \left. + r'[k^2 - V_1(r')] - a - (1/4r') \right\} B(r, r') dr' = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

Из граничного условия для  $\Phi(a, k, r)$  следует, что

$$\begin{aligned} \Phi_1(a, k, r) & \underset{r \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{r}, \quad \frac{d\Phi_1(a, k, r)}{dr} \underset{r \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{r}}, \\ B(r, r') & \underset{r' \rightarrow 0}{\sim} \text{const} \cdot \sqrt{r'}, \quad \frac{\partial B(r, r')}{\partial r'} \underset{r' \rightarrow 0}{\sim} \frac{\text{const}}{2\sqrt{r'}}. \end{aligned} \quad (51)$$

Используя интегрирование по частям и формулы (51), легко установить равенство

$$\int_0^r \Phi_1(a, k, r') \left( r' \frac{\partial^2}{\partial r'^2} + \frac{\partial}{\partial r'} \right) B(r, r') dr' = \int_0^r B(r, r') \left( r' \frac{d^2}{dr'^2} + \frac{d}{dr'} \right) \times \\ \times \Phi_1(a, k, r') dr' + r \frac{\partial B(r, r')}{\partial r'} \Big|_{r'=r} \cdot \Phi_1(a, k, r) - rB(r, r) \frac{d\Phi_1(a, k, r)}{dr}. \quad (52)$$

Тогда после подстановки (52) в (50) и использования уравнения (47) с нижним индексом 1 получим

$$V_2(r) = V_1(r) - \frac{2}{\sqrt{r}} \frac{d}{dr} [\sqrt{r} B(r, r)]. \quad (53)$$

Теперь умножим (49) на  $\Phi_1(a, k, r')$  и проинтегрируем в области  $D$  по разности функций  $\rho_2(a) - \rho_1(a)$ . В результате получим интегральное уравнение типа Гельфанда — Левитана:

$$B(r, r') = A(r, r') - \int_0^r A(r', r'') B(r, r'') dr'', \quad (54)$$

симметричное ядро которого имеет вид

$$A(r, r') = \int_D \Phi_1(a, k, r) \Phi_1(a, k, r') d[\rho_2(a) - \rho_1(a)]. \quad (55)$$

Итак, установлена следующая процедура решения ОЗКРТ. По дискретному спектру в  $a$ -плоскости находим спектральную функцию. Из определения спектральной функции (46) следует, что в разности  $\rho_2(a) - \rho_1(a)$  кулоновские полосы взаимно сокращаются и

$$d[\rho_2(a) - \rho_1(a)] = \left[ \sum_{j_2} C_{j_2} \delta(a - a_{j_2}) - \sum_{j_1} C_{j_1} \delta(a - a_{j_1}) \right] da,$$

где  $a_{j_1}$  и  $a_{j_2}$  — «ядерные» полюсы, обусловленные потенциалами  $V_1$  и  $V_2$ .

Поэтому ядро (55) зависит только от «ядерных» полюсов, вырождено и содержит конечное число слагаемых. Вследствие этого определение  $B(r, r')$  из (54) сводится к решению системы линейных уравнений относительно некоторых функций. Затем, используя  $B(r, r')$ , по формулам (49) и (53) вычисляем регулярное решение  $\phi_2(a, k, r)$  и потенциал  $V_2(r)$ .

В [24] с помощью формул (43), (46), (49), (53)—(55) получено явное выражение для потенциала в однополюсном приближении и показано, что он конечен в нуле и на больших расстояниях убывает по закону  $(r^2 \ln r)^{-1}$ . Там же (в качестве иллюстрации применения метода для конкретных расче-

тов) в рамках однополюсного приближения матрицы рассеяния проведено восстановление квазипотенциала  $\pi^+ p$ -взаимодействия в состоянии  $S_{31}$  при двух фиксированных значениях энергии.

Таким образом, ОЗКТР в новой постановке имеет ясный физический смысл, и предложенный метод ее решения при наличии достаточного количества экспериментальных фазовых сдвигов, полученных с учетом их кулоновского расщепления, можно использовать для восстановления потенциала взаимодействия заряженного кластера с мультиплетом или потенциала взаимодействия между двумя мультиплетами. Отметим, что ОЗКТР в новой постановке исследована также в [37], где рассмотрен другой (алгебраический) способ решения задачи.

**2.3. Обобщенные преобразования Дарбу — Крама — Крейна.** Нахождение точных решений УШ в замкнутой аналитической форме представляет не только общий, но и специальный интерес, поскольку эти решения и соответствующие им потенциалы можно использовать в качестве базисных при решении ОЗКТР. Хорошо известно, что УШ имеет точные решения в классе элементарных или специальных функций для ряда простейших потенциалов — линейного или квадратичного по  $r$ , центробежного, кулоновского и т.д. Использование формализма ОЗКТР значительно расширило возможности получения точных решений УШ в классе так называемых баргмановских потенциалов, которые соответствуют заданию  $S$ -матрицы в различных постановках ОЗКТР как рациональной функции от импульса, орбитального момента, величины ККС [38].

Еще одним эффективным методом построения точных решений УШ являются формулы, получившие название преобразований Дарбу — Крама — Крейна [20]. Эти преобразования позволяют по известному решению  $\varphi_1$  УШ с потенциалом  $V_1$  определить точное решение  $\varphi_2$  с соответствующим ему потенциалом  $V_2$ . Ниже приведен обобщенный вариант преобразований Дарбу — Крама — Крейна для суперпозиции центробежного, кулоновского и ядерного потенциалов.

Рассмотрим УШ (1) для вещественных значений параметров  $E = k^2$ ,  $\lambda = l + 1/2$  и  $a$ . Пусть функции  $\varphi_1(E_0, \lambda_0, a_0, r)$ ,  $\varphi_1(E, \lambda, a, r)$  удовлетворяют УШ с известным потенциалом  $V_1(r)$  и, соответственно, с фиксированными  $(E_0, \lambda_0, a_0)$  и с произвольными  $(E, \lambda, a)$  значениями параметров, а  $\varphi_2(E_0, \lambda_0, a_0, r)$ ,  $\varphi_2(E, \lambda, a, r)$  удовлетворяют УШ, соответственно, с параметрами  $(E_0, \lambda_0, a_0)$ ,  $(E, \lambda, a)$  и с неизвестным потенциалом  $V_2(r)$ . Предположим, что  $V_{1,2}(r)$  — непрерывные функции на интервале  $\alpha < r < \beta$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — некоторые числа. Тогда, согласно [35], справедливо следующее утверждение.

Если на интервале  $(\alpha, \beta)$   $\varphi_1(E_0, \lambda_0, a_0, r) \neq 0$ ,  $Ar^2 + Br + C \neq 0$  ( $A, B$  и  $C$  — вещественные числа) и спектральные параметры  $E, \lambda, a$  удовлетворяют произвольной линейной зависимости вида

$$\frac{E - E_0}{-A} = \frac{\lambda^2 - \lambda_0^2}{C} = \frac{a - a_0}{B}, \quad (56)$$

то формулы

$$\varphi_2(E_0, \lambda_0, a_0, r) = \frac{q(r)}{\varphi_1(E_0, \lambda_0, a_0, r)},$$

$$\varphi_2(E, \lambda, a, r) = \frac{q(r)W[\varphi_1(E_0, \lambda_0, a_0, r), \varphi_1(E, \lambda, a, r)]}{\varphi_1(E_0, \lambda_0, a_0, r)}, \quad (57)$$

где

$$q(r) = \frac{C_1 r}{\sqrt{|Ar^2 + Br + C|}}, \quad (58)$$

$W$  — вронсиан,  $C_1$  — произвольная постоянная, определяют на этом интервале решения УШ с не зависящим от значений  $E, \lambda$  и  $a$  потенциалом

$$V_2(r) = V_1(r) - 2 \frac{d^2}{dr^2} \ln \varphi_1(E_0, \lambda_0, a_0, r) -$$

$$- 2 \frac{q'(r)}{q(r)} \frac{d}{dr} \ln \varphi_1(E_0, \lambda_0, a_0, r) + \frac{q''(r)}{q(r)}. \quad (59)$$

Если  $\varphi_1(E_0, \lambda_0, a_0, r) = 0$  или  $Ar^2 + Br + C = 0$ , то в преобразованных решениях (57) и потенциалах (59) появляются сингулярности. Семейство потенциалов  $V_2(r)$  зависит от шести параметров  $E_0, \lambda_0, a_0, A, B$  и  $C$ . Уравнение (56) определяет прямую в  $(E, \lambda^2, a)$ -пространстве, проходящую через точку с координатами  $(E_0, \lambda_0^2, a_0)$  и имеющую направляющие коэффициенты  $-A, C, B$ . Поэтому, изменяя значения параметров  $E_0, \lambda_0, a_0, A, B$  и  $C$ , получим разные  $V_2(r)$  и соответствующие им решения  $\varphi_2(E, \lambda, a, r)$  со значениями  $E, \lambda$  и  $a$  на прямых в  $(E, \lambda^2, a)$ -пространстве, проходящих через точку  $(E_0, \lambda_0^2, a_0)$ . Многократное применение формулы преобразования (56)—(59) позволяет получать новые потенциалы  $V_2(r)$  и соответствующие им точные решения.

Рассмотрим частные случаи.

- 1)  $\lambda = \text{const}, a = \text{const}, E \neq \text{const}$ , т.е.  $C = B = 0, A \neq 0$ .
- 2)  $E = \text{const}, a = \text{const}, \lambda \neq \text{const}$ , т.е.  $A = B = 0, C \neq 0$ .

- 3)  $E = \text{const}$ ,  $\lambda = \text{const}$ ,  $a \neq \text{const}$ , т.е.  $A = C = 0$ ,  $B \neq 0$ .
- 4)  $a = \text{const}$ ,  $E \neq \text{const}$ ,  $\lambda \neq \text{const}$ , т.е.  $B = 0$ ,  $A \neq 0$ ,  $C \neq 0$ .
- 5)  $\lambda = \text{const}$ ,  $E \neq \text{const}$ ,  $a \neq \text{const}$ , т.е.  $C = 0$ ,  $A \neq 0$ ,  $B \neq 0$ .
- 6)  $E = \text{const}$ ,  $\lambda \neq \text{const}$ ,  $a \neq \text{const}$ , т.е.  $A = 0$ ,  $C \neq 0$ ,  $B \neq 0$ .

В соответствии с (56) в случаях 1, 2 и 3 прямые, на которых получаем точные решения, расположены в  $(E, \lambda^2, a)$ -пространстве параллельно, соответственно, осям  $E$ ,  $\lambda^2$  и  $a$ , а в случаях 4, 5 и 6 — на плоскостях, перпендикулярных, соответственно, осям  $a$ ,  $\lambda^2$  и  $E$ .

Формулы преобразования (56)—(59) в случае 1 сводятся к обычным преобразованиям Дарбу — Крама — Крейна [20], а в случаях 2 и 4 — к формулам, полученным в работах [38] и [39]. Отметим, что формулы преобразования для частных случаев 3, 5 и 6 впервые получены в [35].

Как указано выше, точные решения УШ и соответствующие им баргмановские потенциалы можно также определить и методом ОЗКТР. В связи с этим случаям 1—6 соответствуют различные постановки ОЗКТР, являющиеся частными случаями обобщенного подхода к ОЗКТР, когда исходные данные рассеяния заданы при физических значениях параметров  $E$ ,  $\lambda$  и  $a$ , расположенных на прямой в  $(E, \lambda^2, a)$ -пространстве [40]. Если частные постановки 1 и 2 ОЗКТР хорошо известны и изучены [20,29], то ОЗКТР в постановке 3 рассмотрена относительно недавно в работах [24,34,37]. ОЗКТР в постановке 4 исследована в [31]. Заметим, что ОЗКТР в постановках 5 и 6 в литературе еще не рассмотрена.

### 3. ЗАКОНОМЕРНОСТИ РАЗДЕЛЕНИЯ ИЛИ РАСПАДА ИЗОБАР НА ФРАГМЕНТЫ

Теория комплексных значений ККС описывает кулоновские эффекты в системах  $x + Y \rightleftharpoons Q$  или  $X + Y \rightleftharpoons Q$  ( $x$  — заряженный кластер, а  $X$ ,  $Y$  и  $Q$  — изобарические мультиплеты), так как приведенная масса системы  $x + Y$  или  $X + Y$  практически постоянна, а потенциал взаимодействия между  $x$  и  $Y$  или  $X$  и  $Y$  обусловлен суперпозицией центробежного, кулоновского отталкивающего и ядерного потенциалов, в которой изменяется только ее кулоновская компонента. Эти условия выполняются также и в случае, когда  $x$  — заряженный кластер, а  $Y$  и  $Q$  — ядра-изобары в состояниях с одинаковыми спинами и четностями ( $(J^\pi)_Y = \text{const}$  и  $(J^\pi)_Q = \text{const}$ ).

Предположим, что ядерное взаимодействие, являющееся в действительности многочастичной проблемой, можно свести к проблеме двух тел. В соответствии с этим изобары  $Q$  далее будем рассматривать как связанные

или резонансные состояния, возникающие при взаимодействии кластера  $x$  с изобарами  $Y$ . При этом энергии разделения ( $E_x < 0$ ) или распада ( $E_x > 0$ ) изобар  $Q$  на фрагменты  $x$  и  $Y$  равны

$$E_x = M_Q - M_x - M_Y, \quad (60)$$

где  $M_Q$ ,  $M_Y$  и  $M_x$  — избытки массы изобар  $Q$ ,  $Y$  и кластера  $x$ .

В п.1.2 показано, что связанные состояния и резонансы изобар  $Q$  расположены на траектории  $a_l(E_x)$  полюса матрицы рассеяния в  $a$ -плоскости. Так, полюс, лежащий при  $E_x < 0$  на вещественной положительной полуоси  $a$ , с увеличением  $E_x$  движется вправо, образуя связанные состояния с орбитальным моментом  $l$  и энергией  $E_x$  изобар  $Q$  при каждом прохождении через  $a_\Phi$ . При  $E_x > 0$  полюс  $a_l(E_x)$  переходит в комплексную  $a$ -плоскость. Если  $\text{Re } a_l(E_x) = a_\Phi$ , а  $\text{Im } a_l(E_x)$  мала, то полюс  $a_l(E_x)$  соответствует резонансу изобары  $Q$  с орбитальным моментом  $l$ , значением ККС  $a_\Phi$ , энергией  $E_x$  и шириной  $\Gamma_x$ , определяемой формулой (16). В используемых здесь обозначениях эта формула имеет вид

$$\Gamma_x = \frac{2 \text{Im } a_l(E_x)}{\left( \frac{d \text{Re } a_l(E_x)}{dE_x} \right)}. \quad (61)$$

Для определения параметров связанных и резонансных состояний системы  $x + Y \rightleftharpoons Q$  в рамках теории комплексных значений ККС необходимо: 1) задать потенциал взаимодействия между  $x$  и  $Y$ , 2) решить УШ с этим потенциалом и найти  $S$ -матрицу, 3) построить траекторию  $a_l(E_x)$  полюса матрицы рассеяния в  $a$ -плоскости, 4) по траектории полюса указанным способом определить энергии  $E_x$  связанных и резонансных состояний, а также ширины  $\Gamma_x$  резонансов.

Однако сделать это трудно главным образом по той причине, что потенциал взаимодействия между  $x$  и  $Y$  либо вообще не известен, либо не точно известен. Поэтому на практике (например, в теории Редже) используют так называемые полуэмпирические траектории полюса. Для построения таких траекторий можно воспользоваться зависимостью (28), где теперь вместо  $E$  следует писать  $E_x$ . В рамках теории комплексных значений ККС вычислить постоянные  $c_i$  в (28) невозможно. Однако их нетрудно определить по экспериментальным значениям параметров связанных и резонансных состояний, принадлежащих траектории  $a_l(E_x)$ .

С помощью (28) и (61) легко установить закономерности разделения или распада изобар  $Q$ . Так как на основании (28) физические значения ККС линейно зависят от  $E_x \geq 0$ , то энергии разделения (распада) изобар  $Q$  на фрагменты  $x$  и  $Y$  эквидистантны. Кроме того, из (28) и (61) при  $E_x > 0$  следует соотношение

$$\lg \Gamma_x = B - (D/\sqrt{E_x}), \quad B = \lg(2c_3/c_2), \quad D = c_4 \lg e, \quad (62)$$

связывающее энергии распада  $E_x$  и парциальные ширины  $\Gamma_x$  резонансов изобар  $Q$ , расположенных на траектории полюса  $a_l(E_x)$ .

В основу теории комплексных значений ККС положено два предположения: постоянство приведенной массы системы  $x + Y$  и существование именно одного потенциала взаимодействия между кластером  $x$  и изобарами  $Y$ . Расчеты показывают, что приведенная масса изменяется незначительно. Однако потенциал ядерного взаимодействия между  $x$  и  $Y$  из-за оболочечных эффектов может резко изменяться. Существенную роль при этом могут играть также замкнутые оболочки изобар  $Q$ . Поэтому зависимости (28) и (62) должны выполняться для изобар  $Y$  и  $Q$ , не содержащих ядра с числом нейтронов или протонов вблизи заполненных оболочек. В противном случае они могут нарушаться, что должно приводить к «уходу» таких ядер-изобар с траектории полюса (28). Изложенные соображения позволяют сформулировать следующие утверждения.

1) Если изобары  $Q$  и  $Y$  со спинами и четностями  $(J^\pi)_Q = \text{const}$  и  $(J^\pi)_Y = \text{const}$  не содержат ядра с числами нейтронов или протонов вблизи заполненных оболочек, то энергии разделения (распада)  $E_x$  родительских изобар  $Q$  на заряженный кластер  $x$  и соответствующие дочерние изобары  $Y$  эквидистантны (правило эквидистантности).

2) Если изобары  $Q$  и  $Y$  со спинами и четностями  $(J^\pi)_Q = \text{const}$  и  $(J^\pi)_Y = \text{const}$  не содержат ядра с числами нейтронов или протонов вблизи заполненных оболочек, то энергии распада  $E_x$  и соответствующие им парциальные ширины распада  $\Gamma_x$  родительских изобар  $Q$  на заряженный кластер  $x$  и соответствующие дочерние изобары  $Y$  удовлетворяют соотношению  $\lg \Gamma_x = B - (D/\sqrt{E_x})$ , имеющему сходство с законом Гейгера — Нетолла (ГН).

Настоящий раздел посвящен проверке этих закономерностей и описанию способов оценки неизвестных значений некоторых ядерных характеристик.

**3.1. Эквидистантность энергий разделения (распада) четно-четных изобар.** Для проверки эквидистантности  $E_x$  в работах [8,41] в качестве изобар  $Q$  были выбраны четно-четные ядра в основных состояниях ( $J^\pi = 0^+$ ), в

качестве фрагментов  $x$  — протон, дипротон (как единая частица с удвоенным зарядом и массой протона),  $\alpha$ -частица и ядро  $^{14}\text{C}$ , а в качестве  $Y$  — соответствующие изобары в основных состояниях. Графики зависимостей  $E_p$ ,  $E_{2p}$ ,  $E_\alpha$  и  $E_{^{14}\text{C}}$  от числа нейтронов подтверждают приближенную эквидистантность  $E_x$  [8], поскольку точки (ядра) укладываются на систему прямых линий, если изобары  $Q$  и  $Y$  не содержат магические числа нейтронов или протонов. В этих случаях для ядер одной и той же изобары  $Q$  наблюдается закономерность — по мере уменьшения числа нейтронов в ядре величина  $E_x$  растет по линейному закону, так как увеличение процентного содержания протонов в ядре повышает относительную роль кулоновской энергии. Заметим, что эквидистантность  $E_x$  имеет место и для более тяжелых фрагментов, чем ядро  $^{14}\text{C}$  [8].

Очевидно, что путем интерполяции или ближней экстраполяции установленной закономерности можно надежно оценивать величины  $E_x$  для известных или неизвестных ядер. Таким способом в [8,41] были вычислены неизвестные значения  $E_p$ ,  $E_{2p}$ ,  $E_\alpha$  и  $E_{^{14}\text{C}}$  для большого числа ядер, которые в целом хорошо согласуются с результатами других работ.

Изучение ультранейтронодефицитных ядер представляет большой интерес, так как в областях, близких к границам нуклонной стабильности, можно ожидать появления таких видов распада, как протонная и двупротонная радиоактивность. Для четно-четных изобар с  $A = 70 \div 84$ ,  $128 \div 136$ ,  $224 \div 248$  оказалось возможным провести далекую экстраполяцию значений  $E_p$  и  $E_{2p}$  в область ультранейтронодефицитных ядер, поскольку ядра этих изобар  $Q$  и соответствующих им изобар  $Y$  не содержат магические числа нейтронов или протонов. Идентифицированные таким способом участки границы  $p$ - и  $2p$ -устойчивости приведены в [41]. Там же для группы неизвестных четно-четных ядер проведен анализ величин  $E_{2p} > 0$  с целью оценки возможности  $2p$ -распада.

Если известен избыток массы дочернего (родительского) ядра, то по формуле (60) можно вычислить избыток массы родительского (дочернего) ядра. В [42] путем интерполяции или ближней экстраполяции значений  $E_p$ ,  $E_{2p}$ ,  $E_\alpha$  и  $E_{^{14}\text{C}}$  с помощью (60) найдены избытки массы 52 неизвестных пока ядер и проведены оценки точности вычислений. Такой способ определения массы ядер неприменим в тех случаях, когда существенны оболочечные эффекты. Его достоинствами являются хорошая точность, простота вычислений и возможность взаимного контроля оценок массы одного и того же ядра по различным фрагментам  $x$ .



**3.2. Закон ГН для четно-четных изобар.** Соотношение (62) в настоящее время можно проверить только на примере  $\alpha$ -распада, хотя в связи с открытием новых типов радиоактивности с испусканием кластеров в обозримом будущем может появиться возможность его проверки для более тяжелых фрагментов  $x$ . Применим полученный ранее результат к  $\alpha$ -распаду ядер-изобар  $Q$ , находящихся в основных состояниях с  $J^\pi = \text{const}$ . Каждое  $\alpha$ -радиоактивное родительское ядро  $Q$  будем рассматривать как резонансное состояние составного ядра — системы «дочернее ядро +  $\alpha$ -частица», которая со временем распадается на дочернее ядро и  $\alpha$ -частицу. Поскольку изобары  $Q$  обладают одинаковыми  $J^\pi$  и эффективный потенциал взаимодействия между  $\alpha$ -частицей и дочерними ядрами  $Y$  одинаков, то соответствующие им в  $a$ -плоскости полюсы  $S$ -матрицы расположены на одной и той же траектории полюса (28). Если учесть, что период полураспада  $T = \ln 2 / \Gamma_x$ , то зависимость (62) можно записать в виде

$$\lg T = C + (D/\sqrt{E}), \quad C = \lg \left( \frac{c_2 \ln 2}{2c_3} \right), \quad (63)$$

где  $E$  — энергия  $\alpha$ -распада. Соотношения (62) и (63) представляют собой закон ГН для изобар с одинаковыми  $J^\pi$ . В рамках формализма комплексной  $a$ -плоскости зависимость (62) можно интерпретировать как отображение по формуле (61) траектории полюса  $S$ -матрицы (28) на плоскость  $(E_x^{-1/2}, \lg \Gamma_x)$  [43].

В [44,45] на основе данных по  $\alpha$ -распаду [46] проведено сравнение закона ГН для изобар с экспериментом. Установлено, что если четно-четные изобары не содержат ядра с магическими числами нейтронов или протонов, то  $\lg T$  линейно зависит от  $E^{-1/2}$ . При этом наблюдаемые отклонения от зависимости (63) обусловлены именно оболочечной структурой ядра. В [44] путем экстраполяции закона ГН (63) сделаны оценки неизвестных величин периодов полураспада для группы тяжелых нейтронодефицитных четно-четных ядер.

**3.3. Полуэмпирические формулы для описания периодов полураспада  $\alpha$ -активных тяжелых четно-четных ядер.** Одним из первых успешных применений квантовой механики к ядерной физике явилась классическая теория  $\alpha$ -распада, предложенная в 1928 г. Гамовым и независимо Кондоном и Герни, в которой с помощью представлений о туннельном эффекте дано теоретическое обоснование закона ГН. С 1928 г. большое число авторов работало над этой проблемой, либо улучшая математические приближения, либо учитывая различные физические эффекты, которые поначалу не были приняты во внимание. По известным причинам теоретические формулы для определения периодов полураспада  $\alpha$ -активных ядер недостаточно точны.

Отличие вычисленных по этим формулам значений  $T$  от экспериментальных часто достигает нескольких порядков. Поэтому для оценки периодов полураспада обычно используют гораздо более точные полуэмпирические формулы. обстоятельное обсуждение достоинств и недостатков этих формул, а также сравнение точности их выполнения проведено в [47]. Разработка полуэмпирических методов вычисления периодов полураспада продолжалась и в последние годы [48]. Ниже приведен вывод новых полуэмпирических формул для периодов полураспада тяжелых четно-четных ядер.

Если для некоторых совокупностей ядер значения  $C$  и  $D$  в (63) являются постоянными, то эти ядра укладываются на систему гладких прямых линий (прямых ГН) плоскости  $(E^{-1/2}, \lg T)$ . Проверка выполнимости закона ГН обычно заключается в подборе и идентификации таких групп ядер, которые достаточно хорошо располагались бы на прямых ГН. Первоначально (из-за отсутствия необходимого количества данных) справедливость закона ГН проверяли только на радиоактивных рядах. В дальнейшем по мере появления новых экспериментальных данных возникли дополнительные возможности проверки закона ГН. Так, например, в [46] и [49] на экспериментальном материале доказана справедливость закона ГН для основных состояний четно-четных изотопов и изотонов. Отклонения от закона ГН в этих случаях наблюдаются только для ядер с числом нуклонов, близким к магическим числам. Следовательно, на основании предыдущего можно сделать вывод: закон ГН (63) справедлив для основных состояний четно-четных изобар, изотопов и изотонов при условии, что они не содержат магические числа нуклонов.

Далее ограничимся рассмотрением области тяжелых ядер с  $Z > 82$  и  $N > 126$ , где имеется достаточно большое количество  $\alpha$ -активных четно-четных ядер. Тогда любое  $\alpha$ -активное ядро  ${}^A_Z X_N$  одновременно принадлежит изобарической ( $A = \text{const}$ ), изотопической ( $Z = \text{const}$ ) и изонейтронной ( $N = \text{const}$ ) прямой ГН, то есть оно расположено в точке пересечения этих прямых. Вследствие этого соотношение (63) для изобар, изотопов, изотонов соответственно можно представить в виде

$$\lg T = (\alpha_1 A + \alpha_2) + (\beta_1 A + \beta_2) E^{-1/2}, \quad (64)$$

$$\lg T = (\alpha_1 Z + \alpha_2) + (\beta_1 Z + \beta_2) E^{-1/2}, \quad (65)$$

$$\lg T = (\alpha_1 N + \alpha_2) + (\beta_1 N + \beta_2) E^{-1/2}. \quad (66)$$

Заметим, что в основе полуэмпирических формул работы [50] лежит соотношение (65). Рассматривая теперь попарные линейные комбинации (64)—(66), получим следующие выражения для логарифмов периодов полураспада:

$$\lg T = (\alpha_1 A + \alpha_2 N + \alpha_3) + (\beta_1 A + \beta_2 N + \beta_3) E^{-1/2}, \quad (67)$$

$$\lg T = (\alpha_1 Z + \alpha_2 N + \alpha_3) + (\beta_1 Z + \beta_2 N + \beta_3) E^{-1/2}, \quad (68)$$

$$\lg T = (\alpha_1 A + \alpha_2 Z + \alpha_3) + (\beta_1 A + \beta_2 Z + \beta_3) E^{-1/2}. \quad (69)$$

При этом параметры  $\alpha_i, \beta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) в (67)—(69) принимают различные значения.

В табл.1 представлены найденные по данным [46] методом наименьших квадратов значения  $\alpha_i, \beta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Соотношения (67)—(69), где энергии распада выражены в мегаэлектронвольтах, периоды полураспада — в секундах, представляют собой искомые полуэмпирические формулы для периодов полураспада. Для оценки точности выполнения (67)—(69) при найденных значениях параметров по формуле  $\sigma = \left[ \left( \sum_{i=1}^n \delta_i^2 \right) / n \right]^{1/2}$ , где  $\delta_i =$

$= \lg (T_i / T_i^{\text{exp}})$ , а  $n$  — число случаев ( $n = 60$ ), определены среднеквадратичные отклонения вычисленных по формулам (67)—(69) значений  $\lg T$  от их экспериментальных значений  $\lg T^{\text{exp}}$ , которые приведены в табл.1. Значения  $\sigma$  свидетельствуют о достоверности и хорошей точности выполнения (67)—(69). При этом наиболее точной является формула (69) ( $\sigma = 0,19$ ). Для нее значения  $|\delta_i|$  распределяются следующим образом: для 28 ядер они находятся в интервале  $0 + 0,1$ , для 19 ядер — в интервале  $0,1 + 0,2$ , для 7 ядер — в интервале  $0,2 + 0,3$  и для 6 ядер значения  $|\delta_i|$  превышают 0,3. Эти результаты указывают на очень хорошую точность выполнения соотношения (69).

Так как  $A = Z + N$ , то формулы (67) и (68) можно свести к формуле (69), где параметры  $\alpha_i, \beta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) будут принимать уже различные значения.

**Таблица 1. Параметры  $\alpha_i, \beta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и среднеквадратичные отклонения  $\sigma$  вычисленных по формулам (67)—(69) значений логарифмов периодов полураспада от их экспериментальных значений**

| Формула | $\alpha_1$             | $\alpha_2$            | $\alpha_3$ | $\beta_1$             | $\beta_2$ | $\beta_3$ | $\sigma$ |
|---------|------------------------|-----------------------|------------|-----------------------|-----------|-----------|----------|
| (67)    | 0,5824                 | - 1,2504              | - 9,1375   | - 0,7212              | 2,6712    | - 71,6069 | 0,37     |
| (68)    | 0,4895                 | - 0,1827              | - 70,6508  | - 0,2997              | 0,5421    | 92,6265   | 0,25     |
| (69)    | $-2,793 \cdot 10^{-2}$ | $1,446 \cdot 10^{-2}$ | - 47,7094  | $1,309 \cdot 10^{-2}$ | 1,1966    | 32,1976   | 0,19     |

**Таблица 2. Вычисленные по формуле (69)  
значения периодов полураспада  
группы тяжелых четно-четных  $\alpha$ -активных ядер**

| Ядро              | $T$                   | Ядро              | $T$                   | Ядро              | $T$     |
|-------------------|-----------------------|-------------------|-----------------------|-------------------|---------|
| $^{234}\text{Th}$ | $6 \cdot 10^{12}$ лет | $^{254}\text{Cm}$ | $2 \cdot 10^9$ лет    | $^{260}\text{No}$ | 30 мин  |
| $^{236}\text{Th}$ | $5 \cdot 10^{15}$ лет | $^{256}\text{Cm}$ | $7 \cdot 10^{11}$ лет | $^{262}\text{No}$ | 7 ч     |
| $^{238}\text{Th}$ | $3 \cdot 10^{18}$ лет | $^{238}\text{Cf}$ | 2 с                   | $^{264}\text{No}$ | 5 сут   |
| $^{240}\text{U}$  | $2 \cdot 10^{12}$ лет | $^{256}\text{Cf}$ | $9 \cdot 10^3$ лет    | $^{266}\text{No}$ | 100 сут |
| $^{242}\text{U}$  | $6 \cdot 10^{16}$ лет | $^{258}\text{Cf}$ | $8 \cdot 10^5$ лет    | $^{268}\text{No}$ | 30 лет  |
| $^{228}\text{Pu}$ | 30 мс                 | $^{260}\text{Cf}$ | $10^8$ лет            | $^{258}\text{Ku}$ | 70 мс   |
| $^{230}\text{Pu}$ | 10 с                  | $^{242}\text{Fm}$ | 0,1 с                 | $^{260}\text{Ku}$ | 0,8 с   |
| $^{246}\text{Pu}$ | $2 \cdot 10^{11}$ лет | $^{244}\text{Fm}$ | 0,5 с                 | $^{262}\text{Ku}$ | 7 с     |
| $^{248}\text{Pu}$ | $2 \cdot 10^{10}$ лет | $^{258}\text{Fm}$ | 90 сут                | $^{264}\text{Ku}$ | 1 мин   |
| $^{250}\text{Pu}$ | $3 \cdot 10^{13}$ лет | $^{260}\text{Fm}$ | 7 лет                 | $^{266}\text{Ku}$ | 10 мин  |
| $^{234}\text{Cm}$ | 1 мин                 | $^{262}\text{Fm}$ | 300 лет               | $^{268}\text{Ku}$ | 3 ч     |
| $^{236}\text{Cm}$ | 1 ч                   | $^{264}\text{Fm}$ | $10^4$ лет            | $^{270}\text{Ku}$ | 5 сут   |
| $^{252}\text{Cm}$ | $10^7$ лет            | $^{258}\text{No}$ | 2 мин                 | $^{272}\text{Ku}$ | 3 года  |

Это обусловлено тем, что формулы (67), (68), (69) представляют собой принципиально различные аппроксимации для логарифмов периодов полураспада, поскольку они основаны на линейных комбинациях соотношений (64) и (66), (65) и (66), (64) и (65), выражающих закон ГН для изобар и изотонов, изотопов и изотонов, изобар и изотопов. Формулы (64), (65) и (66) выполняются с различной точностью. Поэтому точность выполнения (67), (68) и (69) также будет различна.

В табл.2 помещены вычисленные по формуле (69) значения периодов полураспада. Исползованные при расчетах значения энергий  $\alpha$ -распада взяты из систематики [51]. Результаты табл.2 близки к данным [51], полученным другим методом. Итак, полуэмпирические соотношения (67)—(69) зависят от сравнительно небольшого числа параметров и могут быть использованы для достаточно надежных оценок значений периодов полураспада тяжелых четно-четных  $\alpha$ -активных ядер.

#### 4. ЗАКОНОМЕРНОСТИ РАЗДЕЛЕНИЯ ИЛИ РАСПАДА НА ФРАГМЕНТЫ ЧЛЕНОВ ИЗОБАРИЧЕСКИХ МУЛЬТИПЛЕТОВ

Пусть энергии разделения (распада)  $Q$  на  $X$  и  $Y$  или  $Q$  на  $x$  и  $Y$  равны

$$E = M(Q) - M(X) - M(Y), \quad E = M(Q) - M(x) - M(Y), \quad (70)$$

где  $M(Q)$ ,  $M(X)$ ,  $M(Y)$  и  $M(x)$  — избытки массы членов мультиплетов  $Q$ ,  $X$ ,  $Y$  и кластера  $x$ . Тогда из (28) и (61) следуют утверждения [52,53]:

1. Для любых двух возможных способов разделения (распада) членов мультиплета  $Q$  на фрагменты, принадлежащие мультиплетам  $X$  и  $Y$ , изменение энергии разделения (распада) прямо пропорционально изменению физического значения ККС.

2. Энергии разделения (распада) членов мультиплета  $Q$  на заряженный кластер  $x$  и члены соответствующего дочернего мультиплета  $Y$  эквидистантны (правило эквидистантности).

3. Энергии распада  $E$  и соответствующие им парциальные ширины распада  $\Gamma$  членов мультиплета  $Q$  на фрагменты  $X$  и  $Y$  или на фрагменты  $x$  и  $Y$  удовлетворяют соотношению

$$\lg \Gamma = B - (D/\sqrt{E}), \quad (71)$$

где  $B$  и  $D$  — постоянные.

В этом разделе проведена проверка достоверности сформулированных выше положений и установлены соотношения между основными характеристиками членов изобарического мультиплета.

**4.1. Сравнение с экспериментом.** В последние годы выполнено большое количество работ по идентификации и систематике членов изобарических мультиплетов. Эти результаты в компактном и удобном виде представлены в [54], где приведены массы членов мультиплетов с  $A \leq 60$ . Данные [54] позволяют сравнить с экспериментом некоторые теоретические закономерности разделения (распада) мультиплетов на фрагменты. Далее для мультиплета с массовым числом  $A$ , изоспином  $T$ , спином и четностью  $J^\pi$  использовано обозначение  $(A, T, J^\pi)$ .

На рис.1 изображена зависимость ККС от энергии для следующих процессов разделения  $Q$  на  $X$  и  $Y$ :

- 1)  $(32, 2, 0^+) \rightarrow (12, 2, 0^+) + (20, 2, 0^+)$ ,
- 2)  $(32, 1, 1^+) \rightarrow (8, 2, 0^+) + (24, 2, 0^+)$ ,
- 3)  $(32, 2, 0^+) \rightarrow (8, 2, 0^+) + (24, 2, 0^+)$ ,
- 4)  $(32, 2, 0^+) \rightarrow (9, 3/2, 3/2^-) + (23, 3/2, 5/2^+)$ ,
- 5)  $(32, 2, 0^+) \rightarrow (8, 1, 2^+) + (24, 2, 0^+)$ ,
- 6)  $(32, 2, 0^+) \rightarrow (8, 1, 2^+) + (24, 1, 4^+)$ .

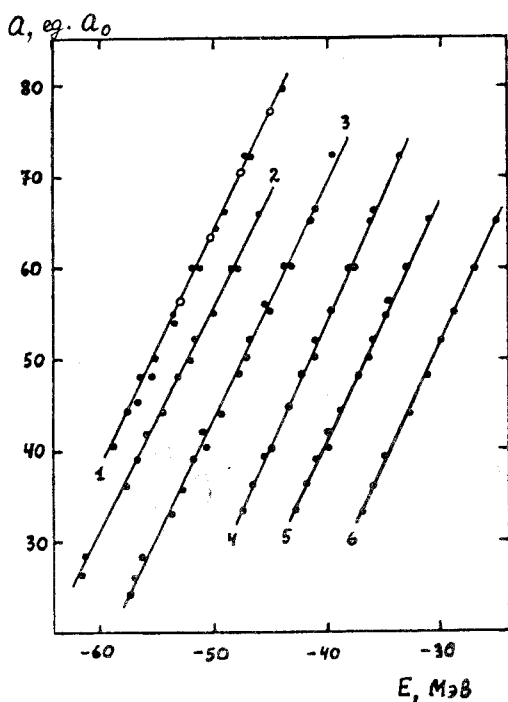
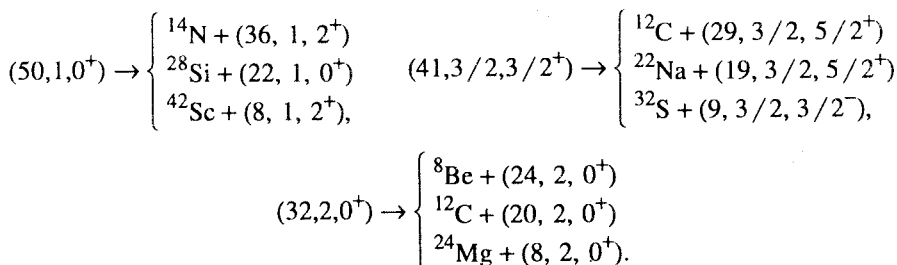


Рис.1. Зависимость ККС от энергии разделения. Точками отмечены экспериментальные значения, прямые получены с помощью метода наименьших квадратов (см. пояснения в тексте)

Цифры 1—6 на рис.1 соответствуют этим случаям. Прямые линии на рис.1 подтверждают линейную зависимость  $a$  от  $E$ , то есть утверждение 1.

Эта закономерность позволяет оценивать массы членов мультиплетов. Поясним это на примере определения неизвестной массы ядра  $^{12}\text{N}$  ( $T_z = -1$ ), принадлежащей квинтету ( $12, 2, 0^+$ ). Используя найденную методом наименьших квадратов для случая 1 траекторию полюса  $a(E) = 198,0946 + 2,6835 \cdot E$ , по  $a$

вычисляем значения  $E$  для четырех возможных вариантов разделения на фрагменты, одним из которых является  $^{12}\text{N}$  (кружки на прямой 1 рис.1). Затем по известным массам  $^{32}\text{P}$ ,  $^{32}\text{S}$ ,  $^{32}\text{Cl}$ ,  $^{32}\text{Ag}$  и  $^{20}\text{O}$ ,  $^{20}\text{F}$ ,  $^{20}\text{Ne}$ ,  $^{20}\text{Na}$  членов квинтетов ( $32, 2, 0^+$ ) и ( $20, 2, 0^+$ ) с помощью (70) для четырех способов разделения находим значения избытков массы  $^{12}\text{N}$ , равные 29,923; 29,87; 29,755 и 29,535 МэВ. Значение избытка массы  $^{12}\text{N}$ , вычисленное по изобарической массовой формуле, составляет 29,585(12) МэВ [54]. На рис.2 по данным [54] построены графики зависимости энергии разделения от проекции изоспина для следующих способов разделения  $Q$  на фрагменты  $x$  и  $Y$ :



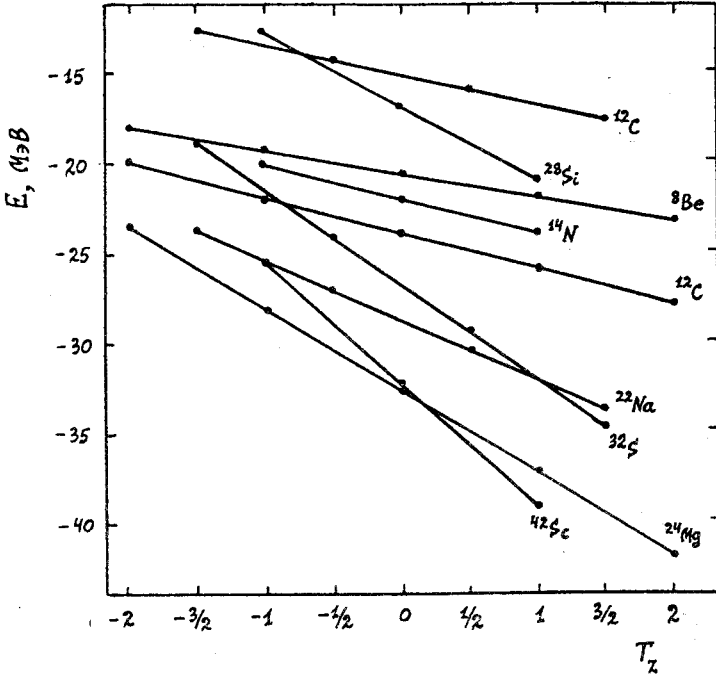


Рис.2. Зависимость энергии разделения членов триплета (50, 1, 0<sup>+</sup>), квартета (41, 3/2, 3/2<sup>+</sup>) и квинтета (32, 2, 0<sup>+</sup>) от проекции изоспина (см. пояснения в тексте)

Прямые линии на рис.2 подтверждают правило эквидистантности 2. На рис.1 и 2 ради краткости приведено ограниченное число графиков, свидетельствующих о справедливости утверждений 1 и 2. Однако анализ экспериментальных данных [54] показал, что эти закономерности носят общий характер и выполняются с хорошей точностью (особенно правило эквидистантности) для мультиплетов с  $A \leq 60$ .

Правило эквидистантности дает возможность предсказывать массы (уровни энергии) членов мультиплета. В табл.3 приведены результаты вычисления неизвестной массы ядра  $^{12}\text{N}$  ( $T_z = -1$ ), принадлежащей квинтету (12, 2, 0<sup>+</sup>). При этом рассмотрены следующие пять вариантов разделения квинтета  $Q$  на фрагменты  $x$  и  $Y$ :

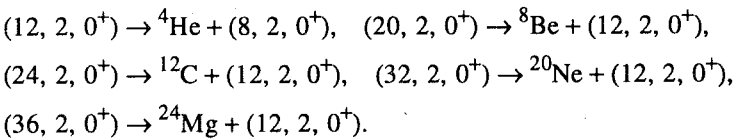


Таблица 3. Вычисление массы ядра  $^{12}\text{N}$ , принадлежащей квинтету  $(12, 2, 0^+)$ , по правилу эквидистантности энергий разделения (распада)

| Ядро            | Способ разделения на фрагменты                              | $M - A$ , МэВ |            |
|-----------------|---|---------------|------------|
|                 |   | По (70)       | [54]       |
| $^{12}\text{N}$ | $^{12}\text{N} \rightarrow ^4\text{He} + ^8\text{B}$        | 29,606        | 29,585(12) |
|                 | $^{20}\text{Na} \rightarrow ^8\text{Be} + ^{12}\text{N}$    | 29,61         |            |
|                 | $^{24}\text{Al} \rightarrow ^{12}\text{C} + ^{12}\text{N}$  | 29,594        |            |
|                 | $^{32}\text{Cl} \rightarrow ^{20}\text{Ne} + ^{12}\text{N}$ | 29,607        |            |
|                 | $^{36}\text{K} \rightarrow ^{24}\text{Mg} + ^{12}\text{N}$  | 29,569        |            |

Для каждого из этих вариантов путем интерполяции линейной зависимости  $E$  от  $T_Z$  для родительского квинтета  $Q$  в точку  $T_Z = -1$  определена энергия разделения  $E$ , а затем по формуле (70) вычислена масса ядра  $^{12}\text{N}$ , которая близка к массе, полученной по изобарической массовой формуле [54].

К достоинствам предложенного способа расчета массы можно отнести хорошую точность, простоту вычислений и возможность взаимного контроля оценок величины неизвестной массы одного и того же члена мультиплета в результате использования (как в рассмотренном выше примере) различных вариантов разделения (распада) родительского мультиплета на кластер и соответствующий дочерний мультиплет. Таким методом с помощью правила эквидистантности в серии работ [52,55—58] вычислено очень большое количество неизвестных значений энергии возбуждения и массы легких, средних и тяжелых ядер.

По мере продвижения в область средних и тяжелых ядер энергии  $E$  становятся положительными, что является необходимым условием распада. Для проверки утверждения 3 необходимы: 1) идентификация в области средних или тяжелых ядер не менее трех членов мультиплета, 2) результаты измерений энергий распада  $E$  этих членов мультиплета и соответствующих им парциальных ширин распада  $\Gamma$ . К сожалению, из-за отсутствия такого рода экспериментальных данных в настоящее время нет возможности проверить соотношение (71) или закономерность 3.



**4.2. Рекуррентные соотношения между массами и разностями кулоновских энергий членов изобарического мультиплета.** Изотопическая инвариантность сильного взаимодействия в ядрах-изобарах проявляется в существовании аналоговых состояний. Такие состояния ядер образуют изобарический мультиплет  $(A, T, J^\pi)$ . Переход от одного члена мультиплета к другому, не меняя изоспин  $T$ , изменяет его проекцию  $T_z$ . Поэтому у ядер, принадлежащих мультиpletу, должны существовать энергетические уровни одинаковой структуры, что позволяет по известным массам или энергиям возбуждения одних членов мультиплета оценивать аналогичные характеристики остальных его членов.

Это можно сделать, например, с помощью изобарической массовой формулы [54]:

$$M(n) = \sum_{m=0}^k C_{m+1} T_z^m(n), \quad T_z(n) = T + 1 - n, \quad (72)$$

где  $M(n)$  — избыток массы члена мультиплета с номером  $n$  (в качестве первого члена выбран родительский член мультиплета с  $T_z = T$ ). Изобарическая массовая формула связывает массы  $2T + 1$  членов мультиплета с изоспином  $T$ . Обычно в формуле (72) полагают значения коэффициентов  $C_{m+1}$  при  $m = 3, 4, \dots, k$  равными нулю. Тогда по известным массам первых членов мультиплета можно определить коэффициенты  $C_1, C_2$  и  $C_3$  изобарической массовой формулы, а затем по этой же формуле вычислить массы остальных его членов.

Ниже на основе правила эквидистантности получены новые соотношения между массами и разностями кулоновских энергий членов изобарического мультиплета [59]. Пусть в результате взаимодействия между заряженным кластером  $x$  и членами мультиплета  $Y$  возникают связанные и резонансные состояния, являющиеся членами мультиплета  $Q$ . Тогда энергии разделения (распада) членов мультиплета  $Q$  на фрагменты  $x$  и  $Y$  равны

$$E(n) = M_Q(n) - M_x - M_Y(n), \quad n = 1, 2, \dots, \min(2T_Q + 1, 2T_Y + 1), \quad (73)$$

где  $M_Q(n), M_Y(n)$  — избытки массы членов мультиплетов  $Q, Y$  с номерами  $n, M_x$  — избыток массы кластера  $x$ , а  $T_Q, T_Y \geq 1$  — изоспины мультиплетов  $Q, Y$ . Поэтому правило эквидистантности энергий разделения (распада) членов мультиплета можно записать в виде

$$\frac{E(n) - E(k)}{n - k} = \frac{E(n) - E(k - 1)}{n - k + 1} = \alpha, \quad k = 2, 3, \dots, n - 1; \quad k < n;$$

$$n = 3, 4, \dots, \min(2T_Q + 1, 2T_Y + 1), \quad (74)$$

где  $\alpha$  — постоянная. Комбинируя (74), нетрудно получить следующие соотношения для энергий разделения (распада):

$$E(n) - (-1)^k \sum_{j=1}^k a_{kj}(n) E(j) = 0, \quad a_{kj}(n) = (-1)^j \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \frac{n-i}{|j-i|}. \quad (75)$$

При этом коэффициенты  $a_{kj}(n)$  удовлетворяют равенствам

$$\sum_{j=1}^k j^m a_{kj}(n) = (-1)^k [n^m - \delta_{km} f_k(n)], \quad f_k(n) = \prod_{i=1}^k (n-i),$$

$$\delta_{km} = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m, \end{cases} \quad m = 0, 1, \dots, k. \quad (76)$$

Подстановка (73) в (75) с использованием (76) при  $m = 0$  приводит к формулам, связывающим избытки массы членов любых двух мультиплетов  $Q$  и  $Y$ :

$$[M_Q(n) - M_Y(n)] - (-1)^k \sum_{j=1}^k a_{kj}(n) [M_Q(j) - M_Y(j)] = 0. \quad (77)$$

Тогда из (77) следуют соотношения между избытками массы членов мультиплетета

$$M(n) - (-1)^k \sum_{j=1}^k a_{kj}(n) M(j) - \gamma_{k+1} = 0, \quad k = 2, 3, \dots, n - 1;$$

$$k < n; \quad n = 3, 4, \dots, 2T + 1; \quad T \geq 1, \quad (78)$$

где  $\gamma_{k+1}$  — постоянные. Для определения  $\gamma_{k+1}$  подставим (72) в (78) и используем равенства (76) при  $m = 0, 1, \dots, k$ . В результате получим

$$\gamma_{k+1} = (-1)^k C_{k+1} f_k(n), \quad k = 2, 3, \dots, n - 1, \quad (79)$$

где  $C_{k+1}$  — зависящие от  $k$  постоянные, значения которых можно найти по экспериментальным данным. С учетом (79) рекуррентные соотношения (78) примут окончательный вид:

$$M(n) - (-1)^k \sum_{j=1}^k a_{kj}(n) M(j) - (-1)^k C_{k+1} f_k(n) = 0,$$

$$k = 2, 3, \dots, n - 1; \quad k < n; \quad n = 3, 4, \dots, 2T + 1; \quad T \geq 1. \quad (80)$$

Важную информацию о ядерных конфигурациях дают разности кулоновских энергий (или кулоновские смещения энергий) членов изобарического мультиплета. По определению разность кулоновских энергий соседних членов мультиплета с номерами  $j$  и  $j - 1$  равна

$$\Delta E_c(j, j - 1) = M(j) - M(j - 1) + \Delta_{nH},$$

где  $\Delta_{nH}$  — разность массы нейтрона и водорода. Следовательно,

$$M(j) = M(1) - (j - 1)\Delta_{nH} + \sum_{i=2}^j \Delta E_c(i, i - 1). \quad (81)$$

Для вывода соотношений между разностями кулоновских энергий членов мультиплета запишем (80) для  $M(n - 1)$ :

$$M(n - 1) - (-1)^k \sum_{j=1}^k a_{kj} (n - 1) M(j) - (-1)^k C_{k+1} f_k(n - 1) = 0. \quad (82)$$

Тогда, рассматривая разность между формулами (80) и (82), на основании (81), (76) при  $m = 0, 1$  и равенства

$$f_k(n) - f_k(n - 1) = \frac{k f_k(n)}{n - 1}$$

найдем рекуррентные соотношения между разностями кулоновских энергий членов мультиплета:

$$\begin{aligned} \Delta E_c(n, n - 1) - (-1)^k \sum_{j=2}^k [a_{kj}(n) - a_{kj}(n - 1)] \left[ \sum_{i=2}^j \Delta E_c(i, i - 1) \right] - \\ - (-1)^k C_{k+1} \frac{k f_k(n)}{n - 1} = 0, \quad k = 2, 3, \dots, n - 1; \\ k < n; \quad n = 3, 4, \dots, 2T + 1; \quad T \geq 1. \end{aligned} \quad (83)$$

Поскольку в настоящее время идентифицированы массы не более пяти членов мультиплетов [54,60], запишем для наглядности соотношения (80) и (83) при  $k = 2, 3, 4$  в явном виде:

$$\begin{aligned} M(n) - (n - 1)M(2) + (n - 2)M(1) - (n - 1)(n - 2)C_3 = 0, \\ \Delta E_c(n, n - 1) - \Delta E_c(2, 1) - 2(n - 2)C_3 = 0, \\ k = 2; \quad n = 3, 4, \dots, 2T + 1; \\ M(n) - \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)M(3) + (n - 1)(n - 3)M(2) - \\ - \frac{1}{2}(n - 2)(n - 3)M(1) + (n - 1)(n - 2)(n - 3)C_4 = 0, \end{aligned} \quad (84)$$

$$\Delta E_c(n, n-1) - (n-2)\Delta E_c(3,2) + (n-3)\Delta E_c(2,1) + 3(n-2)(n-3)C_4 = 0, \\ k=3; \quad n=4,5,\dots, 2T+1; \quad (85)$$

$$M(n) - \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)M(4) + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)(n-4)M(3) - \\ - \frac{1}{2}(n-1)(n-3)(n-4)M(2) + \frac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4)M(1) - \\ - (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)C_5 = 0,$$

$$\Delta E_c(n, n-1) - \frac{1}{2}(n-2)(n-3)\Delta E_c(4,3) + (n-2)(n-4)\Delta E_c(3,2) - \\ - \frac{1}{2}(n-3)(n-4)\Delta E_c(2,1) - 4(n-2)(n-3)(n-4)C_5 = 0, \\ k=4; \quad n=5,6,\dots, 2T+1. \quad (86)$$

Постоянная  $C_{k+1}$  является коэффициентом формулы (72) при  $T_z^k(n)$ . Согласно расчетам [54], коэффициенты  $C_{k+1}$  при  $2 \leq k \leq 4$  принимают очень близкие значения для различных мультиплетов. Это позволяет найти  $C_{k+1}$  с помощью метода наименьших квадратов. Для вычисления  $C_{k+1}$  использованы данные [54,60] по массам членов мультиплетов с  $T \geq 1$ . Полученные на основании (80) величины  $C_{k+1}$  приведены в табл.4 и представляют собой усредненные по всем мультиплетам значения коэффициента изобарической массовой формулы при  $T_z^k(n)$ . Таким образом, формулы (80) и (83) (или (84)—(86)), где избытки массы и разности кулоновских энергий выражены в мегаэлектронвольтах, совместно с численными значениями  $C_{k+1}$  из табл.4 являются искомыми рекуррентными соотношениями линейного типа между массами и разностями кулоновских энергий членов мультиплетов с изоспинами  $T \geq 1$ .

Для оценки точности выполнения (80) и (83) (или (84)—(86)) при найденных  $C_{k+1}$  по формуле  $\sigma = \left[ \left( \sum_{i=1}^N \delta_i^2 \right) / N \right]^{1/2}$ , где  $\delta_i$  — значения левой части (80), а  $N$  — число случаев, вычислены среднеквадратичные отклонения от нуля левой части (80), которые представлены в табл.4. Так как соотношения (83) непосредственно следуют из (80), то они выполняются с той же точностью, что и массовые формулы (80). Значения  $\sigma$  свидетельствуют о достоверности и хорошей точности выполнения правила эквидистантности (74), соотношений для энергий разделения (распада) (75) и рекуррентных соотношений (80) и (83) при указанных в табл.4 значениях  $k$  и  $n$ . Заметим, что по мере появления новых экспериментальных данных по

Таблица 4. Значения  $C_{k+1}$  и среднеквадратичные отклонения  $\sigma$  от нуля левой части (80) и (83)

| $k$                   | $n$ | $T$    | $N$ | $C_{k+1}$ , МэВ       | $\sigma$ , кэВ |
|-----------------------|-----|--------|-----|-----------------------|----------------|
| 2                     | 3   | 1      | 61  | 0,2274                | 111            |
|                       |     | 3/2    | 24  |                       | 49             |
|                       |     | 2      | 16  |                       | 105            |
|                       |     | 3,4,22 | 4   |                       | 162            |
|                       | 4   | 3/2    | 29  |                       | 139            |
|                       |     | 2      | 5   |                       | 117            |
|                       |     | 5      | 11  |                       | 214            |
| В целом               |     |        | 150 |                       | 122            |
| 3                     | 4   | 3/2    | 23  | $1,019 \cdot 10^{-3}$ | 37             |
|                       |     | 2      | 5   |                       | 38             |
|                       | 5   | 11     | 133 |                       |                |
| В целом               |     |        | 39  |                       | 77             |
| 4                     | 5   | 2      | 5   | $3,846 \cdot 10^{-4}$ | 120            |
| Для всех мультиплетов |     |        | 194 |                       | 114            |

массам членов мультиплетов значения  $C_{k+1}$  из табл.4 нуждаются в уточнении. Кроме того, в результате определения массы шестого и последующих членов мультиплетов станет возможным расширение области использования формул (80) и (83), поскольку можно будет найти значения  $C_{k+1}$  при  $k > 4$ .

Если известны массы первых  $k$  членов мультиплета, то с помощью (80) легко определить массы остальных его членов. Соотношения (83) дают возможность по известным разностям кулоновских энергий для первых  $k$  членов мультиплета получить разности кулоновских энергий между остальными членами этого же мультиплета. При этом одни и те же избытки массы и разности кулоновских энергий можно вычислить несколькими способами, используя в (80) и (83) различные допустимые комбинации значений  $k$  и  $n$ . В [59] приведены найденные по данным [54] и формулам (80) и (83) неизвестные значения избытков массы и разностей кулоновских энергий членов легких мультиплетов.

Преимущества соотношений (80) по сравнению с изобарической массовой формулой (72) заключаются в следующем. Во-первых, при использовании изобарической массовой формулы для определения массы членов

мультиплета сначала необходимо найти ее коэффициенты. Формулы (80) устанавливают непосредственную связь между массами членов мультиплета. Во-вторых, изобарическая массовая формула со своими коэффициентами описывает массы членов только данного мультиплета. Соотношения (80) носят более общий и универсальный характер в том смысле, что они справедливы для любых мультиплетов.

**4.3. Соотношения между массами основных состояний зеркальных ядер.** По мере развития теории строения ядра и появления различных ядерных моделей получено довольно большое число полуэмпирических массовых формул различного качества. Разработка новых методов определения массы ядер, далеких от полосы стабильности, интенсивно продолжалась и в последние годы [61]. Применяемые для решения этой проблемы подходы сильно отличаются друг от друга по точности полученных соотношений и по числу используемых параметров. В некоторых работах число параметров достигает нескольких сотен. В других работах используется небольшое число параметров. При этом в наиболее точных методах среднеквадратичные отклонения расчетных масс от экспериментальных обычно составляют  $190 + 310$  кэВ [62].

Среди прочих выделим здесь методы определения массы ядер, основанные на принципе изотопической инвариантности ядерных сил. Из изотопической инвариантности следует, что волновые функции зеркальных ядер совпадают с точностью до замены нейтронов на протоны и наоборот. Следовательно, их состояния (в том числе и основные) принадлежат одному и тому же изобарическому мультиpletу и обладают очень схожими свойствами. Поэтому по известной массе нейтроноизбыточного ядра можно, в принципе, вычислить неизвестную массу зеркального нейтронодефицитного ядра.

Результаты п.4.2 позволяют легко получить соотношения между массами зеркальных ядер [63]. Действительно, после подстановки (81), (84) для  $\Delta E_c(n, n-1)$  в (80) и использования (76) при  $m = 0, 1, 2$  найдем

$$M(n) - M(1) + (n-1)[\Delta_{nH} - \Delta E_c(2,1)] - C_3[(n-1)(n-2) - \delta_{k2} f_k(n)] - (-1)^k C_{k+1} f_k(n) = 0. \quad (87)$$

Положим теперь в (87)  $n = 2T + 1$  и введем новые, более удобные значения для массы зеркальных ядер и разности кулоновских энергий между вторым и первым членами мультиплета:

$$M(1) = M(A, T), \quad M(2T+1) = M(A, -T), \quad \Delta E_c(2,1) = \Delta E_c(A; T-1, T).$$

В итоге получим следующие соотношения между массами зеркальных ядер:

$$M(A, -T) - M(A, T) + 2T [\Delta_{\text{нн}} - \Delta E_c(A; T - 1, T) - C_3[2T(2T - 1) - \delta_{k2} f_k(2T + 1)] - (-1)^k C_{k+1} f_k(2T + 1) = 0, \quad k = 2, 3, \dots, 2T. \quad (88)$$

Если учесть также, что разность кулоновских энергий  $\Delta E_c(A; T - 1, T)$  линейно зависит от  $(Z + 0,5)A^{-1/3}$  [54], то (88) можно переписать в виде

$$M(A, -T) - M(A, T) - [a_k(Z + 0,5)A^{-1/3} + b_k]T - c_k[2T(2T - 1) - \delta_{k2} f_k(2T + 1)] - d_k(-1)^k f_k(2T + 1) = 0, \quad k = 2, 3, \dots, 2T, \quad (89)$$

где  $Z$  — заряд первого члена мультиплет (ядра  $(A, T)$ );  $a_k, b_k, c_k, d_k$  — зависящие от  $k$  параметры. Соотношения (89) в общем случае устанавливают связь между массами изобар-аналоговых (как основных, так и возбужденных) состояний зеркальных ядер. Однако далее ограничимся рассмотрением только основных состояний, то есть под  $M(A, \pm T)$  будем понимать значения избытков массы основных состояний зеркальных ядер  $(A, T)$  и  $(A, -T)$ .

Для определения значений параметров использованы экспериментальные данные по массам основных состояний зеркальных ядер [64]. В настоящее время в области  $A \geq 17$  известны массы 95 пар зеркальных ядер с изоспинами  $T = 1/2 - 5/2$  (контрольная группа). В табл.5 представлены определенные по массам ядер контрольной группы методом наименьших квадратов значения параметров в формуле (89) при различных  $k$ . Математическая структура соотношений (89) приводит для ядер из контрольной группы (с  $T_{\text{max}} = 5/2$ ) к их совпадению при значениях  $k = 2$  и  $k = 6, 7, \dots, 2T - 1$ . Для оценки точности выполнения (89) при найденных значениях параметров для ядер контрольной группы вычислены среднеквад-

Таблица 5. Значения параметров  $a_k, b_k, c_k, d_k$  и среднеквадратичные отклонения  $\sigma$  от нуля левой части формулы (89) при различных  $k$

| $k$             | $a_k$ , МэВ | $b_k$ , МэВ | $c_k$ , МэВ | $d_k$ , МэВ | $\sigma$ , кэВ |
|-----------------|-------------|-------------|-------------|-------------|----------------|
| 2               | 2,7379      | - 3,0336    | 0           | 0,239       | 257            |
| 3               | 2,7419      | - 2,9462    | 0,1909      | - 0,0135    | 252            |
| 4               | 2,4484      | - 1,2271    | 0,1709      | 0,0064      | 554            |
| 5               | 2,4653      | - 1,3163    | 0,1707      | - 0,0104    | 576            |
| 6,7,..., 2T - 1 | 2,7379      | - 3,0336    | 0,239       | 0           | 257            |
| 2T              | 2,7357      | - 2,6736    | 0,1751      | - 0,0045    | 294            |

ратичные отклонения от нуля левой части (89) (табл.5). Видно, что наиболее точной является формула (89) при  $k = 3$  ( $\sigma = 252$  кэВ). По этой формуле в [63] определены значения избытков массы для 135 неизвестных нейтронодефицитных ядер с  $T \leq 5/2$ . Приведенные там для избытков массы результаты хорошо согласуются с результатами [61].

Итак, соотношения (89) достоверны и при  $k = 2, 3, 6, 7, \dots, 2T$  выполняются с точностью, характерной для наилучших современных методов определения массы ядер. Они достаточно просты и зависят от малого числа параметров (трех или четырех). Кроме того, формулы (89) позволяют осуществлять взаимный контроль оценок неизвестных значений избытков массы ядер путем использования при расчетах различных значений  $k$ .

**4.4. Среднеквадратичные зарядовые радиусы членов изобарического мультиплетта.** Важной характеристикой атомных ядер, описывающей пространственное распределение заряда, являются среднеквадратичные зарядовые радиусы (СЗР). В настоящее время точность измерений распределения зарядов настолько высока, что позволяет определить отличия СЗР в ядрах-изобарах. Прямые измерения СЗР можно производить, если время жизни основных и возбужденных состояний ядер достаточно велико (порядка нескольких часов и более). Поэтому существует много феноменологических и теоретических моделей для вычисления СЗР. Ниже описан еще один метод определения СЗР как основных, так и возбужденных состояний атомных ядер, основанный на использовании разности кулоновских энергий между членами изобарического мультиплетта [65].

В [66] для кулоновской энергии ядер с массовыми числами  $A \geq 20$  получена формула

$$E_c = cZ(Z-1)/\langle r^2 \rangle^{1/2}, \quad (90)$$

где  $\langle r^2 \rangle^{1/2}$  — СЗР,  $c = 0,64145$  фм · МэВ. Если  $Z$  — заряд первого члена мультиплетта,  $\langle r^2(n) \rangle^{1/2}$  — СЗР члена мультиплетта с номером  $n$ , то в соответствии с (90) кулоновские энергии членов мультиплетта с номерами 1 и  $n$  выражаются формулами

$$E_c(1) = cZ(Z-1)\langle r^2(1) \rangle^{-1/2}, \quad E_c(n) = c(Z+n-1)(Z+n-2)\langle r^2(n) \rangle^{-1/2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta E_c(n,1) &= E_c(n) - E_c(1) = \\ &= c[(Z+n-1)(Z+n-2)\langle r^2(n) \rangle^{-1/2} - Z(Z-1)\langle r^2(1) \rangle^{-1/2}]. \end{aligned} \quad (91)$$

Так как

$$\Delta E_c(n,1) = M(n) - M(1) + (n-1)\Delta_{nH},$$

то из (91) следуют соотношения между СЗР членов мультиплетта с номерами  $n$  и 1:



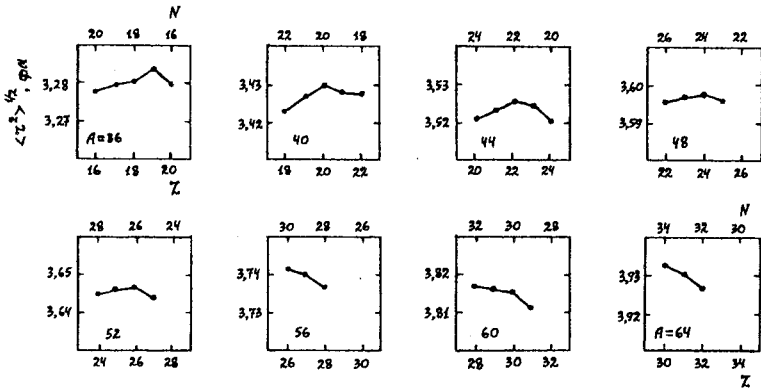


Рис.3. Зависимость СЗР членов 4p-квинтетов с  $36 \leq A \leq 64$  от числа протонов и нейтронов

$$\langle r^2(n) \rangle^{1/2} = (Z + n - 1)(Z + n - 2) \{ Z(Z - 1) \langle r^2(1) \rangle^{-1/2} + c^{-1} [M(n) - M(1) + (n - 1)\Delta_{nH}] \}^{-1}, \quad n = 2, 3, \dots, 2T + 1. \quad (92)$$

Поскольку из эксперимента известны значения СЗР только для первых членов мультиплетов, проверка (92) в настоящее время невозможна. Однако соотношения (92) можно использовать для оценок значений СЗР членов мультиплетов с  $n > 1$ . Так, в [65,67] по известным значениям  $\langle r^2(1) \rangle^{1/2}$  [68] вычислены СЗР членов изобарических 4p-квинтетов с  $36 \leq A \leq 64$ , а также членов мультиплетов с изоспинами 3 и 4. На рис.3 представлены зависимости СЗР членов квинтетов от числа протонов и нейтронов, которые явно указывают на влияние оболочечной структуры ядра. Действительно, СЗР членов квинтетов, как правило, уменьшаются, если они содержат магические (субмагические) числа не только протонов, но также и нейтронов. Это согласуется с данными [69] по основным состояниям ядер.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в обзоре изложен новый подход к исследованию связанных и резонансных состояний двухчастичных систем, основанный на предположении о том, что ККС может принимать не только физические, но также и комплексные значения. В атомной физике теория комплексных значений ККС описывает изоэлектронные атомные и ионные системы, а в физике ядра — изобары и изобарические мультиплеты. Метод комплексных значений ККС позволил установить закономерности разделения (распада)

изобар и изобарических мультиплетов на фрагменты, а также сформулировать и решить ОЗКТР в принципиально новой постановке, которая имеет ясный физический смысл.

Развитый метод пригоден не только для анализа общих свойств двух-частичных систем, но и для конкретных расчетов. Так, в обзоре на основе теоретических результатов описаны новые полуэмпирические методы вычисления следующих ядерных характеристик: периодов полураспада  $\alpha$ -активных ядер, энергий возбуждения, разностей кулоновских энергий и СЗР членов изобарических мультиплетов. Кроме того, указаны эффективные способы: разделения фазового сдвига на чисто ядерный и ядерно-кулоновский интерференционный фазовые сдвиги, нахождения новых точных решений УШ и построения по фазовым сдвигам потенциалов взаимодействия двух частиц. Следовательно, метод комплексных значений ККС по количеству приложений и важности полученных результатов в физике ядра оказался не менее полезным и продуктивным, чем предложенный ранее Редже метод комплексных значений орбитального момента.

В заключение автор выражает глубокую благодарность М.Н.Попушою за многочисленные обсуждения и ценные замечания, а также Н.М.Кукуевой за помощь в оформлении обзора.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ментковский Ю.Л. — Частица в ядерно-кулоновском поле. М.: Энергоатомиздат, 1982.
2. Де Альфаро В., Редже Т. — Потенциальное рассеяние: Пер. с англ. М.: Мир, 1966.
3. Shastri C.S., Satpathy R.K. — Proc. Indian Nath. Sci. Acad., 1981, vol. A47, No.4, p.373.
4. Ломсадзе Ю.М., Химич И.В., Шуба И.М. — Изв. вузов. Физика, 1965, т.8, № 3, с.86.
5. Conisi G., Ogimoto T. — Progr. Theor. Phys., 1963, vol.29, No.6, p.908.
6. Cornille H., Martin A. — Nuovo Cimento, 1962, vol.26, No.2, p.298.
7. Bertero M., Viano G.A. — Nucl. Phys., 1967, vol. B1, No.6, p.317.
8. Поплавский И.В. — Докторская диссертация. Одесса, 1989; Укр. физ. журн., 1983, т.28, № 11, с.1631.
9. Klarsfeld S. — Nuovo Cimento, 1967, vol.A48, No.4, p.1059.
10. Поплавский И.В., Шиян А.А. — Укр. физ. журн., 1984, т.29, № 11, с.5.
11. Поплавский И.В. — Укр. физ. журн., 1985, т.30, № 8, с.1141.
12. Поплавский И.В. — Изв. АН СССР, сер. физ., 1987, т.51, № 1, с.97.
13. Ситенко А.Г. — Теория рассеяния. Киев: Вища школа, 1975.
14. Ситенко А.Г. — Теория ядерных реакций. М.: Энергоатомиздат, 1983.
15. Поплавский И.В. — Укр. физ. журн., 1989, т.34, № 8, с.1170.
16. Van Haeringen H., Kok L.P. — Czech. J. Phys., 1982, vol.B32, No.3, p.307.

17. **Никитиу Ф.** — Фазовый анализ в физике ядерных взаимодействий: Пер. с рум. М.: Мир, 1983.
18. **Абрамовитц М., Стиган И.** — Справочник по специальным функциям: Пер. с англ. М.: Наука, 1979.
19. **Поплавский И.В.** — Укр. физ. журн., 1984, т.29, № 7, с.977.
20. **Захарьев Б.Н., Сузько А.А.** — Потенциалы и квантовое рассеяние. М.: Энергоиздат, 1985.
21. **Ciafaloni M.** — Nuovo Cimento, 1963, vol.29, No.2, p.420.
22. **Поплавский И.В.** — Укр. физ. журн., 1987, т.32, № 4, с.485.
23. **Бабилов В.В.** — Метод фазовых функций в квантовой механике. М.: Наука, 1976.
24. **Поплавский И.В., Шиян А.А.** — Ядерная физика, 1986, т.44, вып.4, с.952.
25. **Поплавский И.В.** — Изв. вузов. Физика, 1982, т.25, № 4, с.21.
26. **Поплавский И.В.** — Оптика и спектроскопия, 1988, т.65, вып.4, с.782.
27. **Агранович З.С., Марченко В.А.** — Обратная задача теории рассеяния. Харьков: Изд. ХГУ, 1960.
28. **Марченко В.А.** — Спектральная теория операторов Штурма — Лиувилля. Киев: Наукова думка, 1972.
29. **Шадан К., Сабатье П.** — Обратные задачи в квантовой теории рассеяния: Пер. с англ. М.: Мир, 1980.
30. **Левитан Б.М.** — Обратные задачи Штурма — Лиувилля. М.: Наука, 1984.
31. **Захарьев Б.Н., Рудяк Б.В.** — Препринт ОИЯИ Р4-84-759, Дубна, 1984.
32. **Mac Gregor M.H. et al.** — Phys. Rev., 1969, vol.182, No.5, p.1714.
33. **Carter J.R. et al.** — Nucl. Phys., 1973, vol.B58, No.2, p.378.
34. **Поплавский И.В.** — Укр. физ. журн., 1984, т.29, № 8, с.1148.
35. **Поплавский И.В.** — ТМФ, 1986, т.69, № 3, с.475.
36. **Lopez S.A., Saavedra I.** — Nucl. Phys., 1966, vol.87, No.1, p.65.
37. **Попушой М.Н.** — Укр. физ. журн., 1984, т.29, № 1, с.21; ТМФ, 1985, т.63, № 3, с.340; Изв. АН СССР, сер. физ., 1991, т.55, № 1, с.109.
38. **Захарьев Б.Н. и др.** — ЭЧАЯ, 1982, т.13, вып.6, с.1284.
39. **Rudyak V.V. et al.** — Phys. Scripta, 1984, vol.29, No.6, p.515.
40. **Попушой М.Н.** — ТМФ, 1986, т.69, № 3, с.466; Изв. АН СССР, сер. физ., 1988, т.52, № 1, с.150.
41. **Поплавский И.В.** — Ядерная физика, 1988, т.47, вып.3, с.657.
42. **Поплавский И.В.** — Изв. АН СССР, сер. физ., 1988, т.52, № 1, с.144.
43. **Поплавский И.В., Попушой М.Н.** — Изв. АН СССР, сер. физ., 1985, т.49, № 1, с.88.
44. **Поплавский И.В., Попушой М.Н.** — Ядерная физика, 1985, т.42, вып.6, с.1363.
45. **Поплавский И.В., Попушой М.Н.** — Изв. АН СССР, сер. физ., 1986, т.50, № 1, с.47,52.
46. **Roenaru D.N., Ivascu M.** — Rev. Roum. Phys., 1983, vol.28, No.4, p.309.
47. **Roenaru D.N. et al.** — Preprint JINR E4-83-858, Dubna, 1983.
48. **Трофимов Ю.Н.** — Ядерная физика, 1990, т.51, вып.3, с.676;  
**Brown V. Alex.** — Phys. Rev., 1992, vol.C46, No.2, p.811.
49. **Поплавский И.В.** — Ядерная физика, 1987, т.45, вып.2, с.383.
50. **Viola V.E., Seaborg G.T.** — J. Inorg. Nucl. Chem., 1966, vol.28, No.4, p.741.

51. Горбачев В.В., Замятнин Ю.С., Лбов А.А. — Основные характеристики изотопов тяжелых элементов. М.: Атомиздат, 1975.
52. Поплавский И.В. — Ядерная физика, 1988, т.48, вып.6, с.1642.
53. Поплавский И.В. — Изв. АН СССР, сер. физ., 1989, т.53, № 1, с.85.
54. Antony M.S. et al. — Atom. Data and Nucl. Data Tables, 1985, vol.33, No.3, p.447; Phys. Rev., 1984, vol.C30, No.4, p.1286.
55. Поплавский И.В. — Ядерная физика, 1989, т.49, вып.2, с.408; 1990, т.51, вып.5, с.1258; 1990, т.52, вып.4, с.979.
56. Поплавский И.В. — Изв. АН СССР, сер. физ., 1990, т.54, № 1, с.20; 1991, т.55, № 1, с.66.
57. Поплавский И.В. — Изв. вузов. Физика, 1990, т.33, № 3, с.98; 1991, т.34, № 10, с.9.
58. Поплавский И.В. — Укр. физ. журн., 1989, т.34, № 4, с.501; 1992, т.37, № 8, с.1136.
59. Поплавский И.В. — Ядерная физика, 1993, т.56, вып.6, с.23.
60. Antony M.S. et al. — Atom. Data and Nucl. Data Tables, 1988, vol.40, No.1, p.9.
61. Atom. Data and Nucl. Data Tables. Ed. P.E.Haustein, 1988, vol.39, No.2.
62. Авотина М.П. и др. — Ядерная физика, 1992, т.55, вып.12, с.3189; Preprint FTI No.1602, St. Petersburg, 1993.
63. Поплавский И.В., Попушой М.Н. — Ядерная физика, 1996, т.59, №3, с.46.
64. Wapstra A.H. et al. — Atom. Data and Nucl. Data Tables, 1988, vol.39, No.2, p.281.
65. Поплавский И.В. — Изв. АН СССР, сер. физ., 1992, т.56, № 1, с.73.
66. Солин Л.М. и др. — Ядерная физика, 1989, т.50, вып.9, с.642.
67. Поплавский И.В. — Укр. физ. журн., 1991, т.36, № 11, с.1614.
68. Antony M.S., Britz J. — Nuovo Cimento, 1987, vol.A97, No.2, p.255.
69. Antony M.S., Britz J. — Universite L. Pasteur, CRN/PN 86-03, Strasbourg, 1986.