

ПЕРЕКРЫВАЮЩИЕСЯ РЕЗОНАНСЫ В МНОГОКАНАЛЬНЫХ РЕАКЦИЯХ

Т.С.Белозерова

Пермский государственный университет, Пермь

В.К.Хеннер

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Пермский государственный университет, Пермь

ВВЕДЕНИЕ. ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ	148
ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ, ПОЗВОЛЯЮЩИЕ ОПИСЫВАТЬ ПЕРЕКРЫВАЮЩИЕСЯ РЕЗОНАНСЫ	153
Перекрывающиеся резонансы в БВ-подходе в случае одного канала	153
K -матричный метод в случае перекрывающихся резонансов	154
Представление амплитуд резонансных реакций с помощью неэрмитова гамильтониана H	160
Представление амплитуд резонансных реакций через скалярные произведения векторов состояний	167
Прямой метод нахождения БВ-многоканальных амплитуд в случае двух перекрывающихся состояний	171
ПОСТРОЕНИЕ УНИТАРНОЙ S -МАТРИЦЫ БРЕЙТ-ВИГНЕРОВСКОГО ВИДА ДЛЯ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ РЕЗОНАНСОВ В МНОГОКАНАЛЬНЫХ РЕАКЦИЯХ	178
Метод и общие уравнения	178
Учет фона	188
Брэнчинги распадов в случае перекрывающихся резонансов	189
Построение векторов парциальных ширин	190
ПРОБЛЕМЫ СПЕКТРА ВОЗБУЖДЕНИЙ ЛЕГКИХ ВЕКТОРНЫХ МЕЗОНОВ И УНИТАРНОСТЬ S -МАТРИЦЫ ДЛЯ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ НЕУПРУГИХ РЕЗОНАНСОВ	196

Современная ситуация с ρ - и ω -мезонным и возбужденными состояниями	196
Анализ на основе формул БВ-типа	200
K -матричный анализ	203
Анализ с помощью неэрмитова гамильтониана	204
Обсуждение и интерпретация результатов анализов ρ' - и ω' -состояний	206
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	208
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	210

ПЕРЕКРЫВАЮЩИЕСЯ РЕЗОНАНСЫ В МНОГОКАНАЛЬНЫХ РЕАКЦИЯХ

Т.С.Белозерова

Пермский государственный университет, Пермь

В.К.Хеннер

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна
Пермский государственный университет, Пермь

Дан обзор существующих методов построения явно резонансной унитарной S -матрицы, с помощью которых можно описывать группы резонансов r_i с одинаковыми квантовыми числами при их перекрывании, когда $|E_{r_i} - E_{r_j}| \sim \Gamma_{r_i} + \Gamma_{r_j}$. Детально исследована связь между этими методами. Описание возбужденных состояний с помощью формул Брейта — Вигнера наиболее часто используется во многих задачах физики резонансов и ядерной физики, центральное место в обзоре занимает обсуждение задачи построения унитарной T -инвариантной многоканальной многорезонансной S -матрицы брейт-вигнеровского типа. В качестве актуального приложения рассматриваемых методов изучен спектр возбуждений векторных ρ - и ω -мезонов. Обсуждается возможность их интерпретации как кварк-антикварковых возбужденных состояний.

We review the existing methods of the construction of the directly resonant, unitary S matrix which give the possibility to describe the group of the resonances r_i with the same quantum numbers when $|E_{r_i} - E_{r_j}| \sim \Gamma_{r_i} + \Gamma_{r_j}$. The relations between these methods are investigated throughly. The descriptions of the resonances with the Breit-Wigner formulas are mostly often used in many problems of the physics of the resonances and the nuclear physics, and the central place of our review takes the discussion of the construction the unitarity, T -invariant, multichannel and multiresonant S -matrix of the Breit-Wigner kind. As the actual application of the described methods the spectrum of the excited ρ and ω mesons is studied. The discussion of the possibility to interpret them as the quark-antiquark excited states is considered.

1. ВВЕДЕНИЕ. ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ

Проблема перекрывающихся резонансов имеет долгую историю, как в ядерной физике, так и в физике элементарных частиц. При этом, особенно в случае нескольких связанных каналов рассеяния, условие унитарности

играет ключевую роль, так как корректное определение параметров резонансов возможно только при использовании унитарной матрицы рассеяния S .

Наиболее часто используемый способ записи парциальных амплитуд, в котором массы и ширины резонансов входят явным образом, — это формулы Брейта — Вигнера (БВ) [1] и их различные модификации. Именно такие простые и ясно интерпретируемые формулы используются в большинстве случаев при описании экспериментальных данных, а входящие в них величины E_r , Γ_r и парциальные ширины резонансов фигурируют в таблицах Particle Data Group. Феноменологический характер этих формул является, в какой-то мере, их положительной чертой, поскольку обуславливает их независимость от динамических моделей. С другой стороны, сопоставление с формулами типа БВ необходимо и в теоретических подходах, в рамках которых находятся спектр и свойства резонансов, например, потенциальных кварковых моделей.

Формулы БВ в случае одного резонанса и одного или нескольких каналов рассеяния исходно удовлетворяют условию унитарности. Дополнительная проблема возникает при построении явно унитарной S -матрицы в случае нескольких перекрывающихся резонансов с одинаковыми квантовыми числами, таких, что $|E_{r_i} - E_{r_j}| \sim \Gamma_{r_i} + \Gamma_{r_j}$. Очевидно, что в этом случае интерференция между резонансами является центральной частью анализа и ключом к интерпретации полученных результатов. Для учета этой интерференции обычно перед БВ-членами вводятся различные фазовые множители, рассматриваемые как свободные параметры. Однако и при введении фазовых множителей, и без них явным и неконтролируемым образом нарушается условие унитарности, которое является исходным мотивом при записи амплитуд в БВ-форме.

Первые теории, дающие унитарную S -матрицу БВ-типа и исходящие из определенных модельных представлений о структуре ядра, были созданы в работах [2,3]. Однако, несмотря на простоту постановки задачи, до недавнего времени отсутствовала явная и простая схема построения унитарной и T -инвариантной S -матрицы требуемого вида в случае более двух перекрывающихся резонансов при многоканальном рассеянии.

Чтобы сделать суть проблемы совершенно ясной, проиллюстрируем на простом примере одноканального рассеяния некорректность обычно используемого простейшего выражения для амплитуды рассеяния в виде суммы БВ-слагаемых в случае перекрывающихся резонансов.

Формула Брейта — Вигнера для амплитуды резонансного рассеяния на изолированном уровне с определенными квантовыми числами при пренебрежении фоном имеет вид

$$f = \frac{\Gamma_1/2}{E - E_1 + i\Gamma_1/2}. \quad (1.1)$$

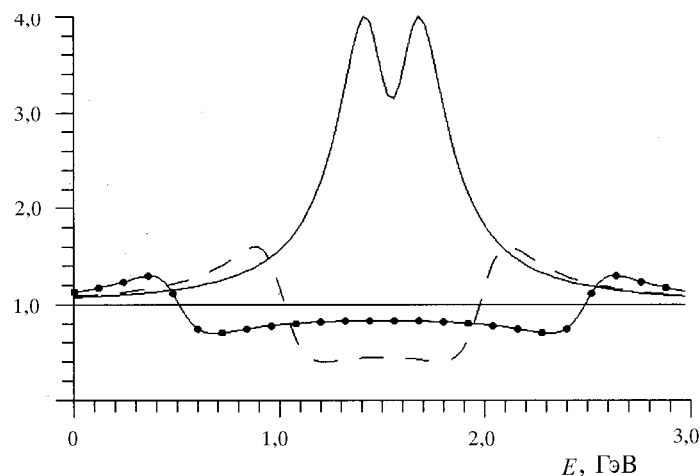


Рис.1. График $|S(E)|^2$, построенный для амплитуды (1.3): сплошная линия — $E_1 = 1,45$, $\Gamma_1 = 0,3$, $E_2 = 1,65$, $\Gamma_2 = 0,3$; штриховая линия — $E_1 = 1,00$, $\Gamma_1 = 0,3$, $E_2 = 2,00$, $\Gamma_2 = 0,3$; линия с точками — $E_1 = 0,50$, $\Gamma_1 = 0,3$, $E_2 = 2,5$, $\Gamma_2 = 0,3$

При этом условие унитарности для парциальной амплитуды

$$\text{Im} f = -|f|^2 \quad (1.2)$$

выполняется тождественно (именно это вместе с «резонансной» структурой формулы (1.1) и является основой для записи парциальных амплитуд рассеяния в виде формул БВ).

Использование в качестве амплитуды выражения

$$f = \sum_{n=1}^N \frac{\Gamma_n/2}{E - E_n + i\Gamma_n/2} \quad (1.3)$$

немедленно приводит к большому нарушению фундаментального равенства (1.2). Возьмем для иллюстрации конкретный пример с двумя резонансными состояниями. На рис.1 приведен график $|S(E)|^2$ ($S = I - 2if$), из которого видно, что $|S(E)|^2$ очень существенно отклоняется от унитарного значения 1 даже при сравнительно слабом перекрытии резонансов. Параметры резонансов (например, в ГэВ) приведены в подписи к рисунку.

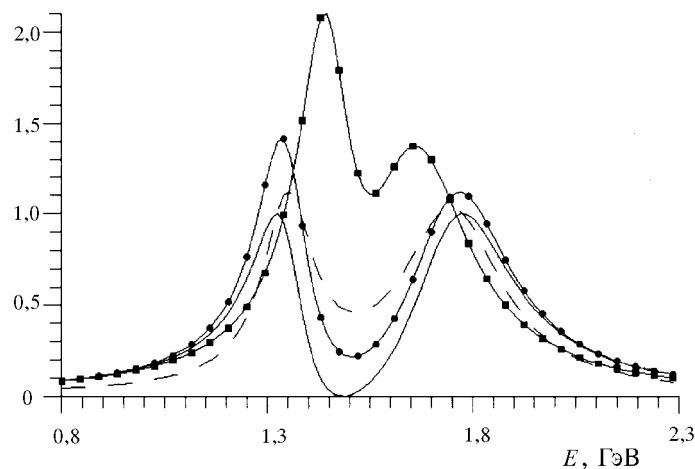


Рис.2. График $|f(E)|^2$ для $E_1 = 1,3$, $\Gamma_1 = 0,3$, $E_2 = 1,7$, $\Gamma_2 = 0,3$: сплошная линия — точная БВ-формула (2.2); штриховая линия — формула (1.3); линия с точками — формула (1.4). Линия с \blacksquare — график $|f(E)|^2$ для $E_1 = 1,4$, $\Gamma_1 = 0,15$, $E_2 = 1,6$, $\Gamma_2 = 0,3$, построенный по формуле (1.3)

Из рис.2 видно, что отклонение квадрата амплитуды $|f|^2$, вычисленной по формуле (1.3), от значений, вычисленных по формуле (2.2), сохраняющей унитарность (см. ниже), достигает 30% даже при сравнительно слабом перекрытии резонансов ($E_1 = 1,2$, $\Gamma_1 = 0,3$, $E_2 = 1,7$, $\Gamma_2 = 0,3$). При существенном перекрытии резонансов, как, например, в случае семейства векторных ρ' -мезонов ($E_{\rho'_1} \approx 1,45$, $\Gamma_{\rho'_1} \approx 0,35$, $E_{\rho'_2} \approx 1,65$, $\Gamma_{\rho'_2} \approx 0,35$; все величины приведены в ГэВ), отклонение достигает 100%.

Заметим, что иногда (в том числе в учебной литературе) предлагается вычислять квадрат амплитуды $|f|^2$ как сумму квадратов амплитуд отдельных резонансов, то есть

$$|f|^2 \approx \sum_{n=1}^N \left| \frac{\Gamma_n/2}{E - E_n + i\Gamma_n/2} \right|^2, \quad (1.4)$$

и в качестве аргумента приводится соображение, что интерференционные члены в этом случае некорректно учитывать как превышающие точность исходного выражения (1.3). Из рис.2 видно, что этот способ расчета неприемлем даже при хорошо разнесенных резонансах.

Существуют различные методы, позволяющие описывать перекрывающиеся состояния. Мы обсудим те из них, которые дают реальные конструктивные способы описания резонансов, позволяющие, например, обрабатывать экспериментальные данные. Во всех этих подходах параметры резонансов фигурируют явным образом. Мы рассмотрим как возможность сопоставления результатов этих методов друг с другом, так и их возможную интерпретацию в духе формул типа БВ, что является нетривиальной задачей.

Ведущими соображениями при анализе перекрывающихся резонансов являются унитарность и T -инвариантность матрицы рассеяния S , а также интерпретируемость параметров формул.

Наиболее строгий подход состоит в трактовке резонансов как полюсов парциальных амплитуд рассеяния на многосвязной римановой поверхности. Однако, в случае нескольких резонансов и большого числа каналов рассеяния, количество полюсов очень велико, и такой подход становится громоздким и малоприменимым. В случае многоканального рассеяния наиболее популярны N/D -матричный метод [4], который основывается на аналитических свойствах амплитуд рассеяния, и K -матричный метод [5]. В этих методах не возникают дополнительные сложности при описании близко расположенных, перекрывающихся резонансов, поскольку здесь унитарность сохраняется по построению. Мы рассмотрим K -матричный подход, но не будем обсуждать описание резонансов в N/D -методе по причине его меньшей популярности при анализе экспериментальных данных и необходимости учета динамических сингулярностей.

Достаточно простые задачи, например, два резонанса и один или несколько каналов рассеяния, которые мы обсуждаем для различных методов, позволят сделать выводы наглядными, а также помогут критически взглянуть на существующие подходы.

Кратко о структуре работы. Во втором разделе в пп.2.1—2.5 рассмотрены и сопоставлены существовавшие до недавнего времени методы, разработанные для описания перекрывающихся резонансов. В третьем разделе в п.3.1 приведен общий метод построения унитарной многоканальной многорезонансной S -матрицы БВ-типа. В п.3.2 описано включение фона в эту схему, в п.3.3 определены величины, играющие роль брэнчингов в случае перекрывающихся резонансов. С технической точки зрения построение такой S -матрицы нетривиально, и в п.3.4 приводится последовательная процедура ее получения для случаев двух и трех перекрывающихся резонансов и произвольного числа каналов. В четвертом разделе в качестве актуального примера приводится описание возбуждений векторных ρ - и ω -резонансов. Проблема установления спектра, свойств и кваркового состава этих ρ' - и ω' -состояний широко обсуждается в настоящее время, но все существующие описания экспериментальных данных опираются на формулы типа (1.3) и

существенно нарушают условие унитарности. В заключении кратко сформулированы основные проблемы, возникающие при использовании различных методов описания состояний, имеющих общие каналы распадов.

2. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ, ПОЗВОЛЯЮЩИЕ ОПИСЫВАТЬ ПЕРЕКРЫВАЮЩИЕСЯ РЕЗОНАНСЫ

2.1. Перекрывающиеся резонансы в БВ-подходе в случае одного канала. Для случая одного канала, когда имеет место чисто упругое рассеяние, И.С.Шапиро [6] (см. также [7]) использовал запись резонансной S -матрицы в виде произведения унитарных сомножителей, соответствующих отдельным резонансам, и экспоненциального множителя, связанного с нерезонансным фоном. Эта формула пригодна для любого числа уровней N , которые могут быть и перекрывающимися:

$$S(E) = e^{2i\delta_B} \prod_{n=1}^N \left(1 - i \frac{\Gamma_n}{E - E_n + i\Gamma_n/2} \right). \quad (2.1)$$

Здесь δ_B — фоновая фаза, то есть фаза потенциального рассеяния вдали от резонансов: $\lim_{E \rightarrow \infty} S(E) = e^{2i\delta_B}$.

Требования унитарности $S(E)S(E)^+ = I$ и T -инвариантности матрицы рассеяния S соблюдаются очевидным образом.

Амплитуду рассеяния $f = (1 - S)/2i$ можно записать в виде (для простоты выпишем только резонансную часть амплитуды):

$$f^{(R)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{\gamma_n}{E - E_n + i\Gamma_n/2}, \quad (2.2)$$

где γ_n — парциальная ширина n -го резонанса.

В работе [6] получена простая формула для коэффициентов γ_1, γ_2 для случая одного канала и двух резонансов:

$$\gamma_1 = \Gamma_1 \frac{E_1 - E_2 - i(\Gamma_1 + \Gamma_2)/2}{E_1 - E_2 + i(\Gamma_2 - \Gamma_1)/2}, \quad \gamma_2 = \Gamma_2 \frac{E_2 - E_1 - i(\Gamma_1 + \Gamma_2)/2}{E_2 - E_1 + i(\Gamma_1 - \Gamma_2)/2}. \quad (2.3)$$

Отсюда получаются полезные соотношения

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} e^{2i\varphi}, \quad \varphi = -\arctan \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{E_1 - E_2}$$

и

$$\frac{|\gamma_1|}{\Gamma_1} = \frac{|\gamma_2|}{\Gamma_2} = \left[\frac{(E_2 - E_1)^2 + i(\Gamma_2 + \Gamma_1)^2/4}{(E_2 - E_1)^2 + i(\Gamma_2 - \Gamma_1)^2/4} \right]^{1/2},$$

то есть модули вычетов γ_n не равны ширинам уровней.

Справедливо также правило сумм:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \Gamma_1 + \Gamma_2.$$

Формулы (2.2), (2.3) для случая двух резонансов и одного канала имеют ясную и легко интерпретируемую БВ-структуру, и мы используем их для сравнения с результатами других наиболее часто используемых методов. Ниже, в качестве простого примера, мы будем рассматривать с помощью разных методов задачу о системе двух резонансов, взаимодействующих с одним внешним каналом. Решение этой задачи позволит исследовать возможность интерпретации данных методов в духе формул БВ.

Из структуры формул (2.3) видно, что при достаточной разнесенности резонансов, когда $|E_1 - E_2| \gg \Gamma_1 + \Gamma_2$, комплексные константы γ_n переходят в обычные ширины Γ_n . То есть, как и следовало ожидать, простая сумма БВ-слагаемых (формула (1.3)) не противоречит условию унитарности, если резонансы очень далеко разнесены. Однако в случае даже очень слабо «перекрывающихся» резонансов (см. примеры из предыдущего раздела) коэффициенты γ_1 и γ_2 становятся комплексными и существенно отличаются от значений Γ_1 и Γ_2 , то есть матрица рассеяния S , построенная на основе формулы (1.3), будет существенно неунитарной.

2.2. К-матричный метод в случае перекрывающихся резонансов. Широко известным и часто используемым методом описания резонансных реакций является К-матричный метод.

К-матрица для случая N резонансов и M каналов имеет вид

$$K(E) = \sum_{r=1}^N \frac{\gamma_r \gamma_r^T}{E - \varepsilon_r}, \quad (2.4)$$

где ε_r — действительные полюсы К-матрицы, $\gamma_r = \{\gamma_{ri}\}_{i=1}^M$ — действительные векторы.

Матрица рассеяния S в области, достаточно удаленной от порогов, запишется с помощью K -матрицы следующим образом:

$$S(E) = \frac{I - iK(E)}{I + iK(E)} \equiv \frac{I - i \sum_{r=1}^N \frac{\gamma_r \gamma_r^T}{E - \varepsilon_r}}{I + i \sum_{r=1}^N \frac{\gamma_r \gamma_r^T}{E - \varepsilon_r}}. \quad (2.5)$$

S -матрица (2.5) унитарна и T -инвариантна, и с этой точки зрения использование метода K -матрицы корректно, независимо от того, как близко расположены резонансы с одинаковыми квантовыми числами.

Рассмотрение простой системы из двух резонансов и одного канала сразу позволяет увидеть, что параметры ε_r и векторы γ_r отличаются от масс E_r , ширин Γ_r и векторов парциальных ширин резонансов, входящих в формулы БВ-вида. Например, в полюсах $E = \varepsilon_r$ матрица рассеяния S принимает значение $S(\varepsilon_r) = -1$, однако, как следует из формул (2.2), (2.3), в точках резонансов E_r значения матрицы S равны, соответственно,

$$S(E_1) = -1 + i \frac{\Gamma_2}{E_1 - E_2 + i\Gamma_2/2}, \quad S(E_2) = -1 + i \frac{\Gamma_1}{E_2 - E_1 + i\Gamma_1/2}.$$

Выразим энергии E_r и ширины Γ_r резонансов через значения полюсов ε_r и векторы γ_r . В случае двух резонансов и одного канала $\gamma_1 = \gamma_{11}$, $\gamma_2 = \gamma_{21}$,

$$K_{11} = \frac{\gamma_{11}^2}{E - \varepsilon_1} + \frac{\gamma_{21}^2}{E - \varepsilon_2},$$

$$S_{11} = 1 - 2i \frac{E(\gamma_{11}^2 + \gamma_{21}^2) - \gamma_{11}^2 \varepsilon_2 - \gamma_{21}^2 \varepsilon_1}{E^2 - E[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - i(\gamma_{11}^2 + \gamma_{21}^2)] + \varepsilon_1 \varepsilon_2 - i(\gamma_{11}^2 \varepsilon_2 + \gamma_{21}^2 \varepsilon_1)}.$$

Если μ_1 и μ_2 — комплексные корни уравнения

$$E^2 - E[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - i(\gamma_{11}^2 + \gamma_{21}^2)] + \varepsilon_1 \varepsilon_2 - i(\gamma_{11}^2 \varepsilon_2 + \gamma_{21}^2 \varepsilon_1) = 0, \quad (2.6)$$

то амплитуду f_{11} можно представить как сумму БВ-слагаемых:

$$f_{11} = \frac{A_1}{E - \mu_1} + \frac{A_2}{E - \mu_2},$$

где

$$A_1 = \frac{\mu_1(\gamma_{11}^2 + \gamma_{21}^2) - \gamma_{11}^2 \varepsilon_2 - \gamma_{21}^2 \varepsilon_1}{\mu_1 - \mu_2},$$

$$A_2 = \frac{\mu_2(\gamma_{11}^2 + \gamma_{21}^2) - \gamma_{11}^2 \varepsilon_2 - \gamma_{21}^2 \varepsilon_1}{\mu_2 - \mu_1}.$$

Если параметры ε_1 , ε_2 , γ_{11} , γ_{21} найдены, например, в результате фитирования экспериментальных данных, то для нахождения значений энергий и ширин резонансов, входящих в формулы БВ, нужно найти корни μ_1 и μ_2 уравнения (2.6). Тогда действительные части этих корней можно интерпретировать как энергии резонансов E_1 и E_2 , а мнимые части ($-2\mu_1^y$ и $-2\mu_2^y$) — как ширины резонансов Γ_1 и Γ_2 соответственно:

$$E_1 = \mu_1^x = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 - (\gamma_{11}^2 + \gamma_{21}^2)^2 + W},$$

$$E_2 = \mu_2^x = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 - (\gamma_{11}^2 + \gamma_{21}^2)^2 + W},$$

$$\Gamma_1 = -2\mu_1^y = (\gamma_{11}^2 + \gamma_{21}^2) + \frac{\sqrt{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\gamma_{11}^2 - \gamma_{21}^2)}{\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 - (\gamma_{11}^2 + \gamma_{21}^2)^2 + W}},$$

$$\Gamma_2 = -2\mu_2^y = (\gamma_{11}^2 + \gamma_{21}^2) - \frac{\sqrt{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\gamma_{11}^2 - \gamma_{21}^2)}{\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 - (\gamma_{11}^2 + \gamma_{21}^2)^2 + W}},$$

где

$$W = \sqrt{[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\gamma_{11}^2 + \gamma_{21}^2)^2]^2 - 16(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 \gamma_{11}^2 \gamma_{21}^2}.$$

Из структуры этих формул видно, что $E_i \rightarrow \varepsilon_i$, $\Gamma_i \rightarrow \gamma_{i1}^2$, только если $|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \gg (\gamma_{11}^2 + \gamma_{21}^2)$. Однако в общем случае значения ε_1 , ε_2 и γ_{11}^2 , γ_{21}^2 уже нельзя интерпретировать как значения энергий E_1 , E_2 и ширин Γ_1 , Γ_2 .

Некорректность такой интерпретации иллюстрирует рис.3. Сплошной линией изображен график квадрата амплитуды $|f|^2$, вычисленной по точ-

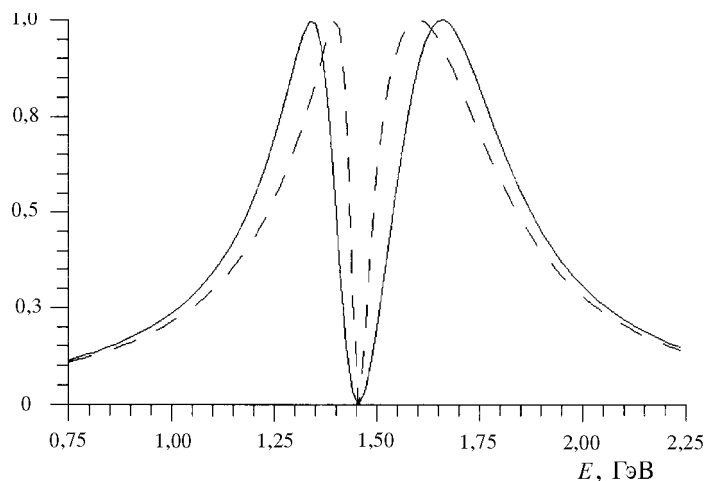


Рис.3. Сплошная линия — график $|f(E)|^2$ для $E_1 = 1,4$, $\Gamma_1 = 0,3$, $E_2 = 1,6$, $\Gamma_2 = 0,3$, построенный в БВ-методе по формуле (2.2); штриховая линия — график $|f(E)|^2$ для $\varepsilon_1 = 1,4$, $\gamma_1^2 = 0,3$, $\varepsilon_2 = 1,6$, $\gamma_2^2 = 0,3$ в K -матричном методе

ным формулам (2.2)—(2.3), штриховой — график квадрата амплитуды $|f|^2$, вычисленной с помощью K -матрицы со значениями параметров $\varepsilon_1 = E_1$, $\varepsilon_2 = E_2$, $\gamma_1^2 = \Gamma_1$, $\gamma_2^2 = \Gamma_2$.

Рассмотрим теперь систему из двух резонансов и M каналов и выразим энергии E_1 , E_2 и ширины Γ_1 , Γ_2 резонансов через полюсы ε_1 , ε_2 и действительные векторы γ_1 , γ_2 K -матрицы.

Запишем матрицу рассеяния S в виде суммы БВ-слагаемых:

$$S(E) = \frac{I - i \frac{\gamma_1 \gamma_1^T}{E - \varepsilon_1} - i \frac{\gamma_2 \gamma_2^T}{E - \varepsilon_2}}{I + i \frac{\gamma_1 \gamma_1^T}{E - \varepsilon_1} + i \frac{\gamma_2 \gamma_2^T}{E - \varepsilon_2}} = I - i \frac{C^{(1)}}{E - \mu_1} - i \frac{C^{(2)}}{E - \mu_2}, \quad (2.7)$$

где μ_1 и μ_2 — искомые комплексные энергии, а $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ — матрицы комплексных коэффициентов. Домножив обе части равенства (2.7) на зна-

менатель $(I + iK)$, а затем на произведение $(E - \varepsilon_1)(E - \varepsilon_2)(E - \mu_1)(E - \mu_2)$, получим

$$\begin{aligned} & -iC^{(1)}(E - \varepsilon_1)(E - \varepsilon_2)(E - \mu_2) - iC^{(2)}(E - \varepsilon_1)(E - \varepsilon_2)(E - \mu_1) + \\ & + 2\gamma_1\gamma_1^T(E - \varepsilon_2)(E - \mu_1)(E - \mu_2) + 2\gamma_2\gamma_2^T(E - \varepsilon_1)(E - \mu_1)(E - \mu_2) + \\ & + [\gamma_1\gamma_1^T(E - \varepsilon_2) + \gamma_2\gamma_2^T(E - \varepsilon_1)][C^{(1)}(E - \mu_2) + C^{(2)}(E - \mu_1)] = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Для того чтобы равенство (2.8) выполнялось тождественно по E , необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю коэффициенты при всех степенях E^k ($k = 0, \dots, 3$). Это приводит к системе матричных уравнений, из которых получаются выражения для матриц комплексных коэффициентов $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$:

$$\begin{aligned} C^{(1)} = & \frac{2}{\mu_2 - \mu_1} [(\mu_2 - \varepsilon_1 + iV_1)\gamma_1\gamma_1^T + \\ & + (\mu_2 - \varepsilon_2 + iV_2)\gamma_2\gamma_2^T + iV_{12}(\gamma_1\gamma_2^T + \gamma_2\gamma_1^T)], \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} C^{(2)} = & \frac{2}{\mu_2 - \mu_1} [-(\mu_1 - \varepsilon_1 + iV_1)\gamma_1\gamma_1^T - \\ & - (\mu_1 - \varepsilon_2 + iV_2)\gamma_2\gamma_2^T - iV_{12}(\gamma_1\gamma_2^T + \gamma_2\gamma_1^T)], \end{aligned} \quad (2.10)$$

где

$$\begin{aligned} V_1 = \gamma_1^T\gamma_1 = \sum_{i=1}^M \gamma_{1i}^2, \quad V_2 = \gamma_2^T\gamma_2 = \sum_{i=1}^M \gamma_{2i}^2, \\ V_{12} = \gamma_1^T\gamma_2 = \gamma_2^T\gamma_1 = \sum_{i=1}^M \gamma_{1i}\gamma_{2i}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

После достаточно громоздких преобразований получим выражения для значений μ_1 и μ_2 :

$$\mu_1 = \frac{b - (u + i\nu)}{2}, \quad \mu_2 = \frac{b + (u + i\nu)}{2},$$

где

$$b = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - i(V_1 + V_2),$$

$$u = \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}}, \quad v = \frac{y}{\sqrt{2(x + \sqrt{x^2 + y^2})}},$$

$$x = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2 - (V_2 - V_1)^2 - 4V_{12}^2,$$

$$y = -2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(V_2 - V_1).$$

Затем нужно вычислить корни μ_1 и μ_2 матричного уравнения (2.8), действительные и мнимые части этих корней дают, соответственно, энергии и ширины резонансов:

$$E_1 = \mu_1^x = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2 - (V_2 - V_1)^2 - 4V_{12}^2 + W},$$

$$E_2 = \mu_2^x = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2 - (V_2 - V_1)^2 - 4V_{12}^2 + W},$$

$$\Gamma_1 = -2\mu_1^y = (V_1 + V_2) - \frac{\sqrt{2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(V_2 - V_1)}{\sqrt{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2 - (V_2 - V_1)^2 - 4V_{12}^2 + W}},$$

$$\Gamma_2 = -2\mu_2^y = (V_1 + V_2) + \frac{\sqrt{2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(V_2 - V_1)}{\sqrt{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2 - (V_2 - V_1)^2 - 4V_{12}^2 + W}},$$

где

$$W = \sqrt{[(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2 + (V_2 - V_1)^2]^2 + 8V_{12}^2[V_1^2 + V_2^2 + 2(V_{12}^2 - V_1V_2) - (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2]}.$$

Из приведенных формул видно, что параметры, используемые в методе K -матрицы, полюсы ε_r и векторы γ_r , можно интерпретировать как энергии E_r и векторы парциальных ширин только в двух случаях:

1) при очень большой разнесенности резонансов, когда $|E_2 - E_1| \gg$

$$\gg \sum_{i=1}^M (\gamma_{1i}^2 + \gamma_{2i}^2);$$

2) при ортогональности векторов γ_1 и γ_2 $V_{12} = \sum_{i=1}^M \gamma_{1i} \gamma_{2i} = 0$, что в мето-

де K -матрицы в каком-то смысле отвечает отсутствию связи между уровнями.

В этих случаях

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \varepsilon_1 - iV_1, & C^{(1)} &= 2\gamma_1\gamma_1^T, \\ \mu_2 &= \varepsilon_2 - iV_2, & C^{(2)} &= 2\gamma_2\gamma_2^T, \end{aligned}$$

то есть

$$E_r = \varepsilon_r, \quad \Gamma_r = 2 \sum_{i=1}^M \gamma_{ri}^2,$$

и матрица рассеяния принимает вид

$$S(E) = I - 2i \sum_{r=1}^N \frac{\gamma_r \gamma_r^T}{E - E_r + i\Gamma_r/2}.$$

В случае нескольких резонансов ($N \geq 3$) приведение S -матрицы, полученной с помощью K -матричного метода, к сумме слагаемых типа БВ становится задачей чрезвычайно сложной (в частности, в случае N резонансов для определения физических значений энергий и ширин резонансов, т.е. полюсов S -матрицы, требуется решение комплексного матричного уравнения $(2N-1)$ -го порядка). Кроме того, при большом числе каналов K -матричный метод становится весьма громоздким и трудоемким для фитирования, поскольку для каждой экспериментальной точки и для каждого набора параметров требует обращения комплексной матрицы M -го порядка.

2.3. Представление амплитуд резонансных реакций с помощью неэрмитова гамильтониана H . Другой подход к описанию резонансных реакций при наличии перекрывающихся уровней был предложен в работе И.Ю.Кобзарева, Н.Н. Николаева, Л.Б.Окуня [8].

Рассмотрим систему N нестабильных перемешивающихся уровней, взаимодействующих с M внешними каналами. Каждому уровню r сопоставляется вектор ψ_r в N -мерном линейном пространстве и комплексное значение энергии $\varepsilon_r = E_r - i\Gamma_r/2$. Поведение такой системы полностью задано, если известна гамильтоновская матрица H_{ij} ($i, j = 1, \dots, N$). Временную эво-

люцию вектора состояния можно описать с помощью уравнения Шредингера с эффективным неэрмитовым гамильтонианом H :

$$ih \frac{d}{dt} \Psi(t) = H\Psi(t).$$

Векторы квазистационарных состояний являются собственными векторами матрицы H с комплексными собственными значениями

$$H\Psi_r = (E_r - i\Gamma_r/2) \Psi_r.$$

Произвольное состояние многоуровневой системы выражается через суперпозицию состояний Ψ_r :

$$\Psi(t) = \sum_{r=1}^N b_r \Psi_r \exp[-iE_r + \Gamma_r) t/h],$$

где b_r — коэффициенты разложения начального состояния $\Psi(0)$ по квазистационарным состояниям.

Матрицу H можно записать в виде

$$H = H^{(0)} - \frac{i}{2} \Gamma, \quad \text{где} \quad H^{(0)} = \frac{1}{2} (H + H^+), \quad \Gamma = i(H - H^+),$$

а $H^{(0)}$ и Γ — эрмитовы матрицы со следами

$$\text{Tr} H^{(0)} = \sum_{r=1}^N E_r, \quad \text{Tr} \Gamma = \sum_{r=1}^N \Gamma_r.$$

В этом случае унитарная резонансная S -матрица имеет вид $S = I - if$, где

$$f = A(E - H)^{-1} A^+$$

или

$$f_{ij} = \sum_{r=1}^N \sum_{g=1}^N A_{ir} (E - H)^{-1}_{rg} A_{jg}. \quad (2.12)$$

Здесь A_{ir} — амплитуда распада уровня r в канал i , A_{jg} — амплитуда образования уровня g в канале j .

Из условия унитарности матрицы S следует

$$i(f-f^+) = ff^+ \quad \text{или} \quad i(f-f^+)_{ij} = \sum_{r=1}^N f_{ir} f_{jr}^*. \quad (2.13)$$

Подставляя (2.12) в условие унитарности (2.13), получаем

$$i(f-f^+) = iA \left[\frac{1}{E-H} - \frac{1}{E-H^+} \right] A^+ = iA \frac{1}{E-H} (H-H^+) \frac{1}{E-H^+} A^+.$$

С другой стороны,

$$ff^+ = A \frac{1}{E-H} A^+ A \frac{1}{E-H^+} A_j^+$$

и видно, что условие унитарности (2.13) выполняется, если

$$A^+ A = i(H-H^+) = \Gamma.$$

Очевидно, что для выполнения условия T -инвариантности необходимо, чтобы матрица H была симметричной, а амплитуды A_{ri} действительными, то есть

$$H = H^T, \quad A^+ = A^T.$$

Тогда

$$S = I - iA(E-H)^{-1}A^T,$$

и условие унитарности принимает вид

$$AA^T = \Gamma \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^M A_{ri} A_{gi} = \Gamma_{rg}, \quad (r, g = 1, \dots, N). \quad (2.14)$$

Из соотношения (2.14) следует, что амплитуды A_{ri} зависят только от Γ_{rg} и не зависят от $H_{rg}^{(0)}$. Очевидно также, что распадная матрица Γ должна быть неотрицательной как матрица скалярных произведений действительных (M -компонентных) векторов A_r . Таким образом, MN элементов действительной матрицы A и $N(N+1)$ элементов матриц $H^{(0)}$ и Γ связаны $N(N+1)/2$ соотношениями (2.14), то есть данная модель содержит $MN + N(N+1)/2$ свободных параметров.

Для одного изолированного уровня матрица H имеет только один элемент $H_{11} = E_1 - i\Gamma_1/2$ — комплексное значение энергии, соответствующее нестабильному уровню. Амплитуда резонансной реакции в этом случае описывается с помощью обычной формулы Брейта — Вигнера

$$f_{ij} = \frac{A_{1i} A_{1j}}{E - E_1 + i\Gamma_1/2}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, M).$$

В случае нескольких уровней ($N > 1$), не имеющих связи друг с другом, матрица H диагональна, и амплитуды резонансных реакций описываются с помощью суммы выражений БВ

$$f_{ij} = \sum_{r=1}^N \frac{A_{ri} A_{rj}}{E - E_r + i\Gamma_r/2} \quad (i, j = 1, 2, \dots, M).$$

Заметим, что гамильтониан H не может быть диагональным в случае нескольких уровней ($N > 1$) и одного канала ($M = 1$), так как в этом случае векторы амплитуд A_r содержат только по одному элементу A_{r1} , и в соответствии с условием унитарности должно выполняться равенство $A_{r1} A_{g1} = \Gamma_{rg} = 0$ ($r \neq g$), что невозможно при $A_{r1} \neq 0$ и $A_{g1} \neq 0$.

Если имеется несколько перемешивающихся уровней, то выражение для амплитуды f_{ij} существенно отличается от суммы БВ-слагаемых. Рассмотрим, для примера, систему из двух уровней и M каналов. В этом случае

$$H = H^{(0)} - \frac{i}{2} \Gamma = \begin{pmatrix} H_{11} - i\Gamma_{11}/2 & \alpha^x - i\alpha^y/2 \\ \alpha^x - i\alpha^y/2 & H_{22} - i\Gamma_{22}/2 \end{pmatrix},$$

$$H^{(0)} = \begin{pmatrix} H_{11} & \alpha^x \\ \alpha^x & H_{22} \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \alpha^y \\ \alpha^y & \Gamma_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$f_{ij} = \sum_{r=1}^2 \sum_{g=1}^2 A_{ri} (E - H)^{-1} A_{gj} =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \{ A_{1i} A_{1j} (E - H_{22} + i\Gamma_{22}/2) + A_{2i} A_{2j} (E - H_{11} + i\Gamma_{11}/2) +$$

$$+ (A_{1i} A_{2j} + A_{2i} A_{1j}) (\alpha^x - i\alpha^y/2) \}, \quad (2.15)$$

где

$$\Delta = (E - H_{11} + i\Gamma_{11}/2)(E - H_{22} + i\Gamma_{22}/2) - (\alpha^x - i\alpha^y/2)^2.$$

Из условий унитарности следует, что

$$\begin{cases} |\mathbf{A}_1|^2 = \Gamma_{11} \\ |\mathbf{A}_2|^2 = \Gamma_{22} \\ (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = \alpha^y, \end{cases}$$

то есть длины действительных векторов \mathbf{A}_1 и \mathbf{A}_2 равны, соответственно, диагональным элементам Γ_{11} и Γ_{22} матрицы Γ , а параметр α^y равен их скалярному произведению.

Величина α^x не имеет ясной физической интерпретации и является дополнительным свободным параметром. Очевидно, что в обсуждаемой модели величина $\alpha = \alpha^x - i\alpha^y/2$ отражает вклад интерференции (перекрывания резонансов) в резонансное рассеяние. В частности, если $\alpha^x = \alpha^y = 0$ (т.е. матрица H диагональна), то амплитуда f сводится к обычной сумме БВ:

$$f_{ij} = \frac{A_{1i}A_{1j}}{E - E_1 + i\Gamma_1/2} + \frac{A_{2i}A_{2j}}{E - E_2 + i\Gamma_2/2}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, M).$$

В этом случае векторы \mathbf{A}_1 и \mathbf{A}_2 должны быть ортогональны (в M -мерном евклидовом пространстве), поскольку $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = \alpha^y = 0$. Но зависимость параметра α от разности $(E_2 - E_1)$ явным образом не определена.

В случае двух резонансов определитель Δ можно записать в виде

$$\Delta = (E - \mu_1)(E - \mu_2),$$

где μ_1 и μ_2 — комплексные собственные значения гамильтониана H . Хорошо видно, что в этом случае амплитуды f_{ij} можно представить как сумму БВ-членов:

$$f_{ij} = \frac{\gamma_1}{E - \mu_1} + \frac{\gamma_2}{E - \mu_2},$$

где

$$\gamma_1 = \frac{c\mu_1 + d}{\mu_1 - \mu_2}, \quad \gamma_2 = \frac{c\mu_2 + d}{\mu_2 - \mu_1},$$

$$c = A_{1i} A_{1j} + A_{2i} A_{2j},$$

$$d = -A_{1i} A_{1j} (H_{22} - i\Gamma_{22}/2) - A_{2i} A_{2j} (H_{11} - i\Gamma_{11}/2) +$$

$$+ (A_{1i} A_{2j} + A_{2i} A_{1j})(\alpha^x - i\alpha^y/2).$$

Собственные значения μ_1 и μ_2 гамильтониана H выражаются через параметры задачи следующим образом:

$$\mu_1 = \frac{b^x - u}{2} + i \frac{b^y - v}{2}, \quad \mu_2 = \frac{b^x + u}{2} + i \frac{b^y + v}{2},$$

где

$$b = (H_{11} + H_{22}) - i(\Gamma_{11} + \Gamma_{22})/2,$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(H_{11} - H_{22})^2 - (\Gamma_{11} - \Gamma_{22})^2/4 + 4(\alpha^x)^2 - (\alpha^y)^2 + \Gamma_{11}\Gamma_{22} + W},$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(H_{11} - H_{22})(\Gamma_{22} - \Gamma_{11}) - 4\alpha^x\alpha^y}{\sqrt{(H_{11} - H_{22})^2 - (\Gamma_{11} - \Gamma_{22})^2/4 + 4(\alpha^x)^2 - (\alpha^y)^2 + \Gamma_{11}\Gamma_{22} + W}},$$

$$W = \{[(H_{11} - H_{22})^2 - (\Gamma_{11} + \Gamma_{22})^2/4 + 4(\alpha^x)^2 - (\alpha^y)^2 + \Gamma_{11}\Gamma_{22}]^2 +$$

$$+ [(H_{11} - H_{22})(\Gamma_{22} - \Gamma_{11}) - 4\alpha^x\alpha^y]^2\}^{1/2}.$$

В случае двух резонансов и одного канала мнимая часть параметра α определена однозначно: $\alpha^y = \sqrt{\Gamma_{11}\Gamma_{22}}$ и, следовательно, матрица H обязательно недиагональна. Коэффициенты γ_1 и γ_2 в этом случае имеют вид

$$\gamma_1 = \frac{(\Gamma_{11} + \Gamma_{22})\mu_1 - \Gamma_{11}H_{22} - \Gamma_{22}H_{11} + 2\alpha^x\sqrt{\Gamma_{11}\Gamma_{22}}}{\mu_1 - \mu_2},$$

$$\gamma_2 = \frac{(\Gamma_{11} + \Gamma_{22})\mu_2 - \Gamma_{11}H_{22} - \Gamma_{22}H_{11} + 2\alpha^x\sqrt{\Gamma_{11}\Gamma_{22}}}{\mu_2 - \mu_1}. \quad (2.16)$$

Формулы для μ_1 , μ_2 и γ_1 , γ_2 содержат свободные параметры H_{11} , H_{22} , Γ_{11} , Γ_{22} и α^x . Например, на рис.4 показана зависимость $|f_{11}|^2$ от величины

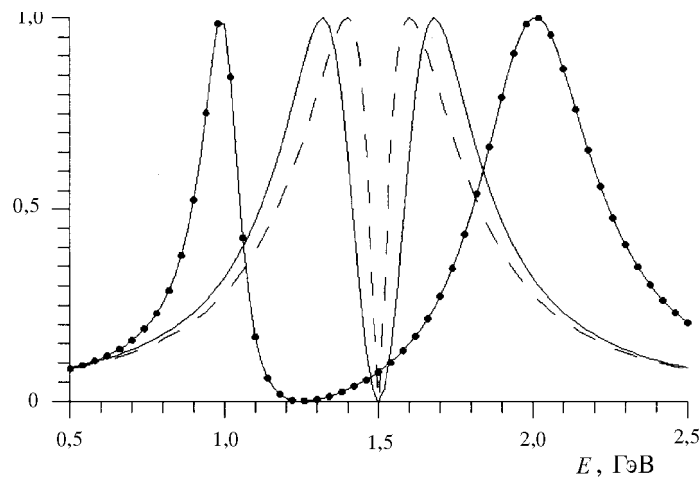


Рис.4. Сплошная линия — график $|f_{11}(E)|^2$ для $E_1 = 1,4$, $\Gamma_1 = 0,3$, $E_2 = 1,6$, $\Gamma_2 = 0,3$, построенный по формуле (2.2). График $|f_{11}(E)|^2$ для $H_{11} = 1,4$, $\Gamma_{11} = 0,3$, $H_{22} = 1,6$, $\Gamma_{22} = 0,3$, построенный по формуле (2.15); штриховая линия — $\alpha^x = 0$; линия с точками — $\alpha^x = 0,5$

параметра α^x при одних и тех же значениях H_{11} , H_{22} , Γ_{11} , Γ_{22} . Такая сильная зависимость от α^x положения максимума и ширины $|f_{11}|^2$, а следовательно, и соответствующего сечения рассеяния, очевидным образом показывает, что величины H_{11} , H_{22} и Γ_{11} , Γ_{22} нельзя интерпретировать как значения масс E_1 , E_2 и ширин Γ_1 , Γ_2 резонансов.

Для получения значений энергий и ширин резонансов нужно найти собственные значения μ_1 и μ_2 гамильтониана H , тогда

$$E_1 = \mu_1^x = \frac{H_{11} + H_{22}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{(H_{11} - H_{22})^2 - (\Gamma_{11} + \Gamma_{22})^2 / 4 + 4(\alpha^x)^2 + W},$$

$$E_2 = \mu_2^x = \frac{H_{11} + H_{22}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{(H_{11} - H_{22})^2 - (\Gamma_{11} + \Gamma_{22})^2 / 4 + 4(\alpha^x)^2 + W},$$

$$\Gamma_1 = -2\mu_1^y = \frac{\Gamma_{11} + \Gamma_{22}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(H_{11} - H_{22})(\Gamma_{22} - \Gamma_{11}) - 4\alpha^x \sqrt{\Gamma_{11}\Gamma_{22}}}{\sqrt{(H_{11} - H_{22})^2 - (\Gamma_{11} + \Gamma_{22})^2 + 4(\alpha^x)^2 + W}},$$

$$\Gamma_2 = -2\mu_2^y = \frac{\Gamma_{11} + \Gamma_{22}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(H_{11} - H_{22})(\Gamma_{22} - \Gamma_{11}) - 4\alpha^x \sqrt{\Gamma_{11}\Gamma_{22}}}{\sqrt{(H_{11} - H_{22})^2 - (\Gamma_{11} + \Gamma_{22})^2 + 4(\alpha^x)^2 + W}},$$

где

$$W = \{[(H_{11} - H_{22})^2 - (\Gamma_{11} + \Gamma_{22})^2 / 4 + 4(\alpha^x)^2]^2 +$$

$$+ [(H_{11} - H_{22})(\Gamma_{22} - \Gamma_{11}) - 4\alpha^x \sqrt{\Gamma_{11}\Gamma_{22}}]^2\}^{1/2}.$$

Из этих формул видно, что если параметр α^x достаточно отличается от нуля, то физические значения энергий и ширин резонансов E_r , Γ_r очень отличаются от элементов гамильтониана H_{rr} , Γ_{rr} .

Таким образом, даже в самом простом случае двух резонансов и одного канала для нахождения (комплексных) энергий и векторов парциальных ширин необходимо найти собственные значения двумерной комплексной матрицы H и вычислить векторы парциальных ширин по формулам (2.16). Поэтому, несмотря на то, что полученная с помощью данного метода матрица рассеяния S унитарна и T -инвариантна, интерпретация матричных элементов гамильтониана и сравнение их с формулами типа БВ затруднительны. Кроме того, этот метод является очень трудоемким, поскольку требует обращения N -мерной комплексной матрицы для каждого значения E и каждого набора параметров.

2.4. Представление амплитуд резонансных реакций через скалярные произведения векторов состояний. Если использовать собственные векторы Ψ_r гамильтониана H , то условие унитарности (2.14) можно записать в виде

$$(\varepsilon_r - \varepsilon_g)(\Psi_r, \Psi_g) = \sum_{i=1}^M A_{ri} A_{gi}, \quad (2.17)$$

где A_{ri} есть амплитуда распада состояния Ψ_r в канал i , а $\varepsilon_r = E_r - i\Gamma/2$.

Это соотношение было впервые написано Беллом и Штейнбергом [9] для случая $K^0 - \bar{K}^0$ -системы. Формула (2.17) непосредственно связывает неортогональность состояний Ψ_r и Ψ_g с наличием перекрывающихся кана-

лов распада. Согласно (2.17) степень неортогональности волновых функций для уровней r и g определяется скалярным произведением

$$(\Psi_r, \Psi_g) = \frac{\sum_{i=1}^M A_{ir} A_{ig}^*}{(\Gamma_r + \Gamma_g)/2 + i(E_r - E_g)}. \quad (2.18)$$

Здесь, как обычно, A_{ir} — амплитуды распада уровня r по каналам i , причем справедливо соотношение

$$\sum_{i=1}^M |A_{ir}|^2 = \Gamma_r. \quad (2.19)$$

Зависимость амплитуды резонансного рассеяния на перекрывающихся уровнях от величины (Ψ_r, Ψ_g) была изучена в работах В.Л.Любошица [7,10]. Эта зависимость имеет простую структуру, обусловленную резонансным характером амплитуды и условием унитарности.

Прежде всего, амплитуды резонансных процессов должны описываться суммой полюсных членов, соответствующих комплексным энергиям $\varepsilon_r = E_r - i\Gamma_r/2$. С другой стороны, в рамках БВ-схемы вычеты резонансных амплитуд факторизуются и пропорциональны парциальным амплитудам распада резонансного уровня. Это означает, что элементы S -матрицы имеют структуру

$$S_{ij} = \delta_{ij} - i \sum_{r=1}^N \frac{A_{ir} C_{jr}^*}{E - E_r + i\Gamma_r/2}, \quad (2.20)$$

где по своему смыслу коэффициенты C_{jr}^* представляют амплитуды образования нестабильных квазистационарных уровней. Простые вычисления показывают [7], что из условия унитарности $SS^+ = I$ автоматически следует система уравнений для амплитуд C_{jr} :

$$A_{ir} = \sum_{g=1}^N C_{ij} U_{gr} \quad (r = 1, \dots, M). \quad (2.21)$$

Здесь U_{gr} — элементы эрмитовой матрицы, составленной из скалярных произведений векторов квазистационарных состояний, которые определяются из (2.18).

Из соотношений (2.18) и (2.21) следует правило сумм

$$\sum_{r=1}^N \sum_{i=1}^M A_{ir} C_{ir}^* = \sum_{r=1}^N \Gamma_r. \quad (2.22)$$

Легко получить также аналог формулы (2.18) для амплитуд C_{ri} :

$$U_{gr}^{-1} = \frac{\sum_{i=1}^M C_{ir} C_{ig}^*}{(\Gamma_r + \Gamma_g)/2 + i(E_r - E_g)}. \quad (2.23)$$

Учет постоянного фона, связанного с потенциальным рассеянием и прямыми реакциями, сводится к умножению чисто резонансной матрицы $S^{(R)}$ на унитарную фоновую матрицу B , при этом

$$S_{ij} = B_{ij} - i \sum_{r=1}^N \frac{A_{ir} \tilde{C}_{jr}^*}{E - E_r + i\Gamma_r/2},$$

где A_{ri} , как и прежде, амплитуды распада квазистационарных состояний, а амплитуды \tilde{C}_{rj} определяются из соотношения

$$\tilde{C} = B^+ A U^{-1}.$$

Таким образом, должно выполняться равенство

$$\sum_{i=1}^M A_{ir}^* B_{ij} = \sum_{g=1}^N \tilde{C}_{jg}^* U_{gr}.$$

Очевидно, что в силу унитарности матрицы B можно в соотношении (2.23) заменить C на \tilde{C} :

$$U_{gr}^{-1} = \frac{\sum_{i=1}^M \tilde{C}_{ir} \tilde{C}_{ig}^*}{(\Gamma_r + \Gamma_g)/2 + i(E_r - E_g)}. \quad (2.24)$$

В качестве примера рассмотрим чисто упругое одноканальное рассеяние при наличии двух резонансов. В этом случае $\mathbf{A}_1 = A_{11}$, $\mathbf{A}_2 = A_{12}$, и из уравнения (2.19) следует, что

$$|A_{11}|^2 = \Gamma_1, \quad |A_{12}|^2 = \Gamma_2.$$

Элементы матрицы неортогональностей U следующие:

$$U_{11} = \frac{A_{11}A_{11}^*}{\Gamma_1} = 1,$$

$$U_{22} = \frac{A_{12}A_{12}^*}{\Gamma_2} = 1,$$

$$U_{12} = U_{21}^* = \frac{A_{12}A_{11}^*}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)/2 + i(E_2 - E_1)}.$$

Тогда

$$\Delta = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} = 1 - |U_{12}|^2 = \frac{(E_2 - E_1)^2 + (\Gamma_2 - \Gamma_1)^2/4}{(E_2 - E_1)^2 + (\Gamma_2 + \Gamma_1)^2/4},$$

и координаты векторов $\mathbf{C}_1 = C_{11}$ и $\mathbf{C}_2 = C_{12}$ определяются однозначно:

$$C_{11} = A_{11}U_{11}^{-1} + A_{12}U_{12}^{-1} = \frac{A_{11} - A_{12}U_{21}}{\Delta} =$$

$$= A_{11} \left[\frac{(E_1 - E_2)^2 - (\Gamma_2^2 - \Gamma_1^2)/4}{(E_1 - E_2)^2 + (\Gamma_2 - \Gamma_1)^2/4} + i \frac{\Gamma_2(E_1 - E_2)}{(E_1 - E_2)^2 + (\Gamma_2 - \Gamma_1)^2/4} \right],$$

$$C_{12} = A_{11}U_{12}^{-1} + A_{12}U_{22}^{-1} = \frac{A_{12} - A_{11}U_{12}}{\Delta} =$$

$$= A_{12} \left[\frac{(E_2 - E_1)^2 - (\Gamma_1^2 - \Gamma_2^2)/4}{(E_2 - E_1)^2 + (\Gamma_1 - \Gamma_2)^2/4} + i \frac{\Gamma_1(E_2 - E_1)}{(E_2 - E_1)^2 + (\Gamma_1 - \Gamma_2)^2/4} \right].$$

Отсюда получаем

$$A_{11}C_{12}^* = \Gamma_1 \frac{(E_1 - E_2)^2 - (\Gamma_2^2 - \Gamma_1^2)/4}{(E_1 - E_2)^2 + (\Gamma_2 - \Gamma_1)^2/4} - i \frac{\Gamma_1\Gamma_2(E_1 - E_2)}{(E_1 - E_2)^2 + (\Gamma_2 - \Gamma_1)^2/4},$$

$$A_{12}C_{11}^* = \Gamma_2 \frac{(E_2 - E_1)^2 - (\Gamma_1^2 - \Gamma_2^2)/4}{(E_2 - E_1)^2 + (\Gamma_1 - \Gamma_2)^2/4} - i \frac{\Gamma_1\Gamma_2(E_2 - E_1)}{(E_2 - E_1)^2 + (\Gamma_1 - \Gamma_2)^2/4},$$

что эквивалентно выражениям (2.2), (2.3).

Рассмотренный метод дает удобную вычислительную схему для случая одного канала и произвольного числа резонансов, позволяя записывать амплитуду рассеяния в виде суммы БВ-членов.

Очевидно, однако, что построенная модель не является T -инвариантной. Условие симметрии S -матрицы ($S_{ij} = S_{ji}$) приводит к дополнительным соотношениям:

$$B_{ij} = B_{ji}, \quad C_{ir}^* = Q_r A_{ir}. \quad (2.25)$$

К сожалению, нет реального и последовательного способа обеспечить выполнение последнего условия. Использование проекционных операторов [11] делает метод формально T -инвариантным, но практически неприменимым для использования.

Некоторые дополнительные предположения, упрощающие метод до конкретной модели, ведут к автоматическому выполнению условия (2.25). Например, оно будет выполняться, если считать, что координаты A_{ir} действительны и не зависят от уровня r . S -матрица в этом модельном случае будет иметь вид

$$S_{ij}^{(R)} = \delta_{ij} - iA_i A_j \sum_{r=1}^N \frac{Q_r}{E - E_r + i\Gamma_r/2},$$

где

$$Q_r = \sum_{g=1}^N U_{gr}^{-1},$$

$$U_{gr} = \frac{1}{(\Gamma_r + \Gamma_g)/2 + i(E_r - E_g)}.$$

Пример использования этого метода для перекрывающихся ρ' -состояний приведен в работе [14].

2.5. Прямой метод нахождения БВ-многоканальных амплитуд в случае двух перекрывающихся состояний. Еще один подход к описанию резонансных реакций для многоуровневой системы был предложен в работе [12].

Запишем S -матрицу рассеяния для группы из N резонансов, расположенных в энергетической области, достаточно удаленной от порогов и других резонансов, в явно БВ-форме (для простоты без учета фона):

$$S_{ij}(E) = \delta_{ij} - i \sum_{r=1}^N \frac{g_{ri} g_{rj}}{E - \epsilon_r}. \quad (2.26)$$

Здесь g_{ri} — комплексные парциальные ширины, $\varepsilon_r = E_r - i\Gamma_r/2$, а \mathbf{g}_r — комплексные векторы парциальных ширин*. Векторы \mathbf{g}_r не все независимы. Условия унитарности накладывают на значения g_{ri} $N(M+1)$ ограничений (при N резонансах и M открытых каналах).

В работе [12] эти ограничения и уравнения связи между векторами \mathbf{g}_r удалось получить (т.е. и развить сам метод) только для случая двух резонансов следующим способом.

Сопоставим выражение (2.26) с K -матричной записью S -матрицы:

$$S(E) = I - i \sum_{r=1}^N \frac{\mathbf{g}_r \mathbf{g}_r^T}{E - \varepsilon_r} = \frac{I - i \sum_{r=1}^N \frac{\gamma_r \gamma_r^T}{E - \varepsilon_r}}{I + i \sum_{r=1}^N \frac{\gamma_r \gamma_r^T}{E - \varepsilon_r}}. \quad (2.27)$$

Домножив (2.27) на $\left(I + i \sum_{r=1}^N \frac{\gamma_r \gamma_r^T}{E - \varepsilon_r} \right)$, а затем на $\prod_{k=1}^N (E - \varepsilon_k)(E - \varepsilon_k)$, получим

$$\begin{aligned} & -i \sum_{r=1}^N \left[\mathbf{g}_r \mathbf{g}_r^T (E - \varepsilon_r) \prod_{k \neq r} (E - \varepsilon_k)(E - \varepsilon_k) \right] + \\ & + \sum_{r=1}^N \sum_{l=1}^N \left[\mathbf{g}_r \mathbf{g}_r^T \gamma_l \gamma_l^T (E - \varepsilon_l)(E - \varepsilon_r) \prod_{k \neq r, l} (E - \varepsilon_k)(E - \varepsilon_k) \right] = \\ & = -2i \sum_{l=1}^N \left[\gamma_l \gamma_l^T (E - \varepsilon_l) \prod_{k \neq l} (E - \varepsilon_k)(E - \varepsilon_k) \right]. \end{aligned}$$

Приравняв нулю коэффициент при степени $E^{(2N-1)}$, получаем матричное уравнение

$$\sum_{r=1}^N \mathbf{g}_r \mathbf{g}_r^T = 2 \sum_{r=1}^N \gamma_r \gamma_r^T. \quad (2.28)$$

*Векторы \mathbf{g}_r предполагаются не зависящими от энергии E . Однако если резонансы расположены вблизи порогов, то зависящие от энергии E кинематические множители могут быть разложены в ряд Тейлора, и описанные в данном и последующих разделах схемы могут быть воспроизведены с незначительными изменениями.

Домножая уравнение (2.28) справа последовательно на $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_N$, убеждаемся, что векторы являются линейными комбинациями векторов $\boldsymbol{\gamma}_r$ ($r = 1, \dots, N$):

$$\mathbf{g}_r = \sum_{i=1}^N a_{ri} \boldsymbol{\gamma}_i. \quad (2.29)$$

Подставив выражения (2.29) в (2.28), получим

$$\sum_{r=1}^N \sum_{i=1}^N a_{ri} \boldsymbol{\gamma}_i \sum_{j=1}^N a_{rj} \boldsymbol{\gamma}_j^T = 2 \sum_{r=1}^N \boldsymbol{\gamma}_r \boldsymbol{\gamma}_r^T$$

или

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A_{ij} \boldsymbol{\gamma}_i \boldsymbol{\gamma}_j^T = 0, \quad (2.30)$$

где A_{ij} — комплексные числа:

$$A_{ij} = \sum_{r=1}^N a_{ri} a_{rj} - 2\delta_{ij}.$$

При $N=2$ уравнение (2.30) сравнительно легко решается. Требуемые ограничения на векторы парциальных ширин имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= a\boldsymbol{\gamma}_1 + \sqrt{2-a^2} \boldsymbol{\gamma}_2, \\ \mathbf{g}_2 &= \pm \sqrt{2-a^2} \boldsymbol{\gamma}_1 - a\boldsymbol{\gamma}_2. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Положив $\beta = \pm \operatorname{Im} \sqrt{2-a^2} / \operatorname{Re} a$, получим

$$\mathbf{g}_2 = \frac{i}{2\beta} [(1+\beta^2) \mathbf{g}_1 - (1-\beta^2) \mathbf{g}_1^*], \quad (2.32)$$

$$\frac{\mathbf{g}_1^+ \mathbf{g}_1}{\Gamma_1} = \frac{\mathbf{g}_2^+ \mathbf{g}_2}{\Gamma_2} = \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \geq 1, \quad (2.33)$$

$$(\mathbf{g}_1^+, \mathbf{g}_2) = \frac{2\beta}{1-\beta^2} (\varepsilon_1^* - \varepsilon_2). \quad (2.34)$$

Область определения параметра β :

$$0 \leq \frac{4\beta^2}{(1-\beta^2)^2} \leq \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{|\varepsilon_1 - \varepsilon_2^*|^2} \leq 1. \quad (2.35)$$

Когда резонансы очень далеки друг от друга, параметр $\beta = 0$, и векторы \mathbf{g}_r становятся действительными. Подчеркнем, что β не является дополнительным параметром задачи. При найденных векторах парциальных ширин \mathbf{g}_r и энергиях $\varepsilon_r = E_r - i\Gamma_r/2$ параметр β определен однозначно и его фактическое значение неважно.

Для одного канала ($M=1$) в качестве свободных параметров можно взять значения E_1, E_2, Γ_1 и Γ_2 . Тогда значения β, g_{11}^x и g_{21}^x однозначно определяются из системы

$$\begin{aligned} (g_{11}^x)^2 &= \frac{\Gamma_1 - \beta^2\Gamma_2}{(1-\beta^2)^2}, \\ (g_{21}^x)^2 &= \frac{\Gamma_2 - \beta^2\Gamma_1}{(1-\beta^2)^2}, \\ g_{11}^x g_{21}^x &= \frac{2\beta}{(1-\beta^2)^2} (E_1 - E_2). \end{aligned}$$

Подставляя значения g_{11}^x и g_{21}^x из первых двух уравнений системы в третье уравнение, получаем биквадратное уравнение

$$\beta^4 - 2a\beta^2 + 1 = 0,$$

где

$$a = \frac{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + 4(E_1 - E_2)}{2\Gamma_1\Gamma_2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} g_{11}^x &= \frac{\Gamma_1 - (a - \sqrt{a^2 - 1})\Gamma_2}{(1 - a + \sqrt{a^2 - 1})^2}, \\ g_{21}^x &= \frac{\Gamma_2 - (a - \sqrt{a^2 - 1})\Gamma_1}{(1 - a + \sqrt{a^2 - 1})^2}, \end{aligned}$$

$$g_{11}^y = -(a - \sqrt{a^2 - 1}) g_{21}^x,$$

$$g_{21}^y = (a - \sqrt{a^2 - 1}) g_{11}^x.$$

Отсюда получаем

$$g_{11}g_{11} = \Gamma_1 \frac{(E_1 - E_2)^2 - (\Gamma_2^2 - \Gamma_1^2)/4}{(E_1 - E_2)^2 + (\Gamma_2 - \Gamma_1)^2/4} - i \frac{\Gamma_1 \Gamma_2 (E_1 - E_2)}{(E_1 - E_2)^2 + (\Gamma_2 - \Gamma_1)^2/4},$$

$$g_{21}g_{21} = \Gamma_1 \frac{(E_2 - E_1)^2 - (\Gamma_1^2 - \Gamma_2^2)/4}{(E_2 - E_1)^2 + (\Gamma_1 - \Gamma_2)^2/4} - i \frac{\Gamma_1 \Gamma_2 (E_2 - E_1)}{(E_2 - E_1)^2 + (\Gamma_1 - \Gamma_2)^2/4},$$

что эквивалентно выражениям (2.2), (2.3).

Как отмечалось выше, в работе [12] уравнения связи для векторов парциальных ширин, следующие из условия унитарности S -матрицы, были получены в явном виде только для случая двух резонансов ($N = 2$) и произвольного числа каналов M . При $N > 2$ описанный выше способ, основанный на сопоставлении с K -матрицей, не дает возможности получить векторы \mathbf{g}_r , так как система уравнений $A_{ij}(a_{rk}) = 0$ слишком сложна и не позволяет исключить векторы γ_k из соотношений (2.29).

В развитие работы [12] в статье [13] были получены явные ограничения на векторы парциальных ширин.

Если записать условие унитарности для матрицы S в виде

$$S^+(E^*) S(E) = S(E) S^+(E^*) = I, \quad (2.36)$$

что является аналитическим продолжением условия унитарности на комплексную плоскость, то результаты могут быть представлены более компактно.

Условие унитарности (2.36) для матрицы $S(E)$, представленной в виде суммы БВ-членов (2.26), можно записать следующим образом:

$$S^+(E^*) S(E) = B^+ B + \sum_{n=1}^N \frac{S^+(\epsilon_n^*) \mathbf{g}_n \mathbf{g}_n^T}{E - \epsilon_n} + \sum_{n=1}^N \frac{\mathbf{g}_n^* (\mathbf{g}_n^*)^T S(\epsilon_n^*)}{E - \epsilon_n^*}. \quad (2.37)$$

Это выражение можно легко получить, если заметить, что функция $[S^+(E^*) S(E) - B^+ B]$ является мероморфной функцией от E и стремится к

нулю при $|E| \rightarrow \infty$. Следовательно, ее можно записать как сумму вкладов полюсов с указанными постоянными вычетами.

Условие каузальности требует, чтобы все энергии резонансов ε_n лежали в нижней полуплоскости, а полные ширины Γ_n были положительными ($\Gamma_n > 0$). Соответственно, $S^+(E^*)$ не может иметь полюсов для E в нижней полуплоскости. Поскольку матрица $S^+(E^*)S(E) = 1$ не имеет полюсов, вычеты истинных полюсов при $E = \varepsilon_n$ и $E = \varepsilon_n^*$ должны обращаться в нуль, что дает

$$S^+(\varepsilon_n^*) \mathbf{g}_n \mathbf{g}_n^T = 0, \quad n = 1, \dots, N. \quad (2.38)$$

Условие (2.38) должно удовлетворяться как матричное уравнение. Это условие можно записать в виде

$$S^+(\varepsilon_n^*) \mathbf{g}_n = B^+ \mathbf{g}_n + i \sum_{m=1}^N \frac{\mathbf{g}_m (\mathbf{g}_m \mathbf{g}_n)}{\varepsilon_n - \varepsilon_m^*} = 0, \quad n = 1, \dots, N, \quad (2.39)$$

или

$$B \mathbf{g}_n = i \sum_{m=1}^N \frac{(\mathbf{g}_n^+ \mathbf{g}_m)}{\varepsilon_n^* - \varepsilon_m} \mathbf{g}_m, \quad n = 1, \dots, N. \quad (2.40)$$

Если ввести обозначение

$$\alpha_{nm} = \frac{i(\mathbf{g}_n^+ \mathbf{g}_m)}{\varepsilon_n^* - \varepsilon_m} = \alpha_{mn}^*, \quad (2.41)$$

то условия унитарности примут вид

$$B^+ B = B B^+ = I,$$

$$B \mathbf{g}_n = \sum_{m=1}^N \alpha_{nm} \mathbf{g}_m. \quad (2.42)$$

Как показано в работе [13], матрица α , составленная из комплексных скалярных параметров α_{nm} , ($n, m = 1, \dots, N$), должна быть ортогональной и эрмитовой, т.е.

$$\alpha \alpha^T = \alpha^T \alpha = I, \quad \alpha^+ = \alpha. \quad (2.43)$$

Такую ортогональную эрмитову матрицу α легко построить для случая двух резонансов и M каналов. Для этого достаточно просто решить систему уравнений

$$\alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22} = 0,$$

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 = 1,$$

$$\alpha_{22}^2 + \alpha_{21}^2 = 1.$$

Из эрмитовости матрицы α следует, что $\alpha_{21} = \alpha_{12}^*$, и, поскольку параметры α_{11} и α_{22} — положительные действительные числа, то, как видно из анализа системы, параметр α_{12} — чисто мнимый и $\alpha_{12} = i(\mathbf{g}_1^+ \mathbf{g}_2) / (\epsilon_1^* - \epsilon_2) = -\alpha_{21}^*$.

Требуемые ограничения на векторы парциальных ширин принимают вид:

$$B\mathbf{g}_1 = \sqrt{(1 + |\alpha_{12}|^2)} \mathbf{g}_1 + i|\alpha_{12}| \mathbf{g}_2,$$

$$B\mathbf{g}_2 = \sqrt{(1 + |\alpha_{12}|^2)} \mathbf{g}_2 - i|\alpha_{12}| \mathbf{g}_1.$$

Решение этих уравнений приводит к тем же выражениям для векторов парциальных ширин, что были получены в работе [12] и подробно рассмотрены в данном разделе.

Для случая трех резонансов в работе [13] приведен общий вид матрицы скалярных произведений α , зависящей от трех параметров: действительного угла θ и комплексного угла φ :

$$\alpha = \begin{pmatrix} \cosh \theta |\cos \varphi|^2 + |\sin \varphi|^2, & \cosh \theta \cos \varphi \sin^* \varphi - \sin \varphi \cos^* \varphi, & -i \sinh \theta \cos \varphi \\ \cosh \theta \sin \varphi \cos^* \varphi - \cos \varphi \sin^* \varphi, & \cosh \theta |\sin \varphi|^2 + |\cos \varphi|^2, & -i \sinh \theta \sin \varphi \\ i \sinh \theta \cos^* \varphi, & i \sinh \theta \sin^* \varphi, & \cosh \theta \end{pmatrix}.$$

Для получения векторов парциальных ширин необходимо еще решить достаточно громоздкую линейную систему N уравнений с $2N$ неизвестными вида (2.42) для того, чтобы выразить NM элементов этих векторов \mathbf{g}_n через другие NM элементов и параметры матрицы α . После этого нужно выбрать $NM - N(N-1)/2$ элементов, объявленных свободными параметрами, так, чтобы скалярные произведения $(\mathbf{g}_n^+ \mathbf{g}_m)$ были равны α_{nm} .

К сожалению, изложенный в работе [13] метод не дает процедуры, которую можно было бы использовать при построения векторов парциальных

ширин для случая более чем трех резонансов ($N > 3$), так как не предложен регулярный способ получения комплексной эрмитовой ортогональной матрицы α , зависящей от $N(N-1)/2$ свободных параметров.

3. ПОСТРОЕНИЕ УНИТАРНОЙ S -МАТРИЦЫ БРЕЙТ-ВИГНЕРОВСКОГО ВИДА ДЛЯ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ РЕЗОНАНСОВ В МНОГОКАНАЛЬНЫХ РЕАКЦИЯХ

3.1. Метод и общие уравнения. В предыдущем разделе мы провели обзор и сравнение реально используемых методов построения явно унитарной резонансной S -матрицы, а также рассмотрели возможность интерпретации этих методов в духе формул типа БВ.

Ниже мы приводим последовательную процедуру построения унитарной многоканальной многорезонансной S -матрицы БВ-вида для общего случая N резонансов и M внешних каналов. Изложение следует, в основном, работам [15,16].

Запишем матрицу рассеяния S группы из N резонансов в виде

$$S(E) = B - i \sum_{r=1}^N \frac{\mathbf{A}_r \mathbf{A}_r^T}{E - \epsilon_r}, \quad (3.1)$$

где B — матрица фона, соответствующая прямым нерезонансным реакциям, \mathbf{A}_r — комплексные векторы парциальных ширин, $\epsilon_r = E_r - i\Gamma_r/2$ — полюсы, отвечающие резонансам.

Требуется определить, какие условия нужно наложить на векторы \mathbf{A}_r и фон B , чтобы матрица S была унитарна и T -инвариантна, то есть $S^+(E) S(E) \equiv I$ и $S_{ij}(E) = S_{ji}(E)$ тождественно по E . Ясно, что матрица фона B должна удовлетворять таким же условиям.

Запишем условие унитарности с учетом представления (3.1):

$$S^+(E) S(E) = B^+ B + i \sum_{r=1}^N \left[B \frac{\mathbf{A}_r^+ (\mathbf{A}_r^+)^T}{E - \epsilon_r^*} - B + \frac{\mathbf{A}_r \mathbf{A}_r^T}{E - \epsilon_r} \right] +$$

$$+ \sum_{r=1}^N \sum_{l=1}^N \frac{\mathbf{A}_r^+ (\mathbf{A}_r^+)^T \mathbf{A}_l \mathbf{A}_l^T}{(E - \epsilon_r^*) (E - \epsilon_l)} \equiv I. \quad (3.2)$$

Для упрощения формул, включающих фон, воспользуемся удобными переменными работы [12]. Поскольку матрица B унитарна и симметрична, она может быть представлена в виде произведения $B = V e^{2i\beta} V^T$, где V — действительная ортогональная матрица собственных векторов матрицы B , а $e^{2i\beta}$ — диагональная матрица ее собственных значений, равных по модулю единице.

Положим $\tilde{B} = b b^T$, где $b = V e^{i\beta}$, и определим вектор $\mathbf{g}_r = b^+ \mathbf{A}_r$. Тогда $\mathbf{A}_r = b \mathbf{g}_r$, и матрица S может быть записана в виде $S = b \tilde{S} b^T$, где

$$\tilde{S}(E) = I - i \sum_{r=1}^N \frac{\mathbf{g}_r \mathbf{g}_r^T}{E - \varepsilon_r}. \quad (3.3)$$

Очевидно, что матрица $S(E)$ унитарна тогда и только тогда, когда унитарна матрица $\tilde{S}(E)$. Поэтому требуемые ограничения на векторы парциальных ширин мы будем получать из условия унитарности $\tilde{S}^+(E) \tilde{S}(E) \equiv I$.

Введем обозначение для скалярного произведения

$$V_{lr} = \mathbf{g}_l^+ \mathbf{g}_r = \sum_{k=1}^M g_{lk}^* g_{rk}.$$

Условие унитарности для матрицы $\tilde{S}(E)$ может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M \tilde{S}_{ik} \tilde{S}_{jk}^* &= \delta_{ij} - i \sum_{r=1}^N \frac{g_{ri} g_{rj}}{E - \varepsilon_r} + i \sum_{r=1}^N \frac{g_{ri}^* g_{rj}^*}{E - \varepsilon_r^*} + \\ &+ \sum_{l=1}^N \sum_{r=1}^N V_{lr} \frac{g_{ri} g_{lj}^*}{(E - \varepsilon_r)(E - \varepsilon_l^*)} \equiv \delta_{ij} \end{aligned} \quad (3.4)$$

или

$$i \sum_{r=1}^N \left[-\frac{g_{ri} g_{rj}}{E - \varepsilon_r} + \frac{g_{ri}^* g_{rj}^*}{E - \varepsilon_r^*} \right] + \sum_{l=1}^N \sum_{r=1}^N V_{lr} \frac{g_{ri} g_{lj}^*}{(E - \varepsilon_r)(E - \varepsilon_l^*)} \equiv 0. \quad (3.5)$$

Домножив тождество (3.5) на произведение $\prod_{k=1}^N (E - \varepsilon_k) (E - \varepsilon_k^*)$, получим

$$\begin{aligned} & i \sum_{r=1}^N [g_{ri}^* g_{rj}^* (E - \varepsilon_r) - g_{ri} g_{rj} (E - \varepsilon_r^*)] \prod_{k \neq r} (E - \varepsilon_k) (E - \varepsilon_k^*) + \\ & + \sum_{r=1}^N V_{rr} g_{ri} g_{rj}^* \prod_{k \neq r} (E - \varepsilon_k) (E - \varepsilon_k^*) + \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{l=r+1}^N [V_{lr} g_{ri} g_{lj}^* (E - \varepsilon_l) (E - \varepsilon_r^*) + \\ & + V_{rl} g_{li} g_{rj}^* (E - \varepsilon_l^*) (E - \varepsilon_r)] \prod_{k \neq l, r} (E - \varepsilon_k) (E - \varepsilon_k^*) = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Обозначим

$$B = \prod_{k=1}^N (E - \varepsilon_k) (E - \varepsilon_k^*) = \prod_{k=1}^N (E^2 - a_k E + b_k), \quad (3.7)$$

$$B_r = \prod_{k \neq r} (E - \varepsilon_k) (E - \varepsilon_k^*) = \prod_{k \neq r} (E^2 - a_k E + b_k), \quad (3.8)$$

$$B_{rl} = \prod_{k \neq r, l} (E - \varepsilon_k) (E - \varepsilon_k^*) = \prod_{k \neq r, l} (E^2 - a_k E + b_k), \quad (3.9)$$

где $a_k = 2\varepsilon_k^x$, $b_k = (\varepsilon_k^x)^2 + (\varepsilon_k^y)^2$ (здесь $\varepsilon_r^x = E_r$, $\varepsilon_r^y = -\Gamma_r/2$). Справедливо соотношение

$$B_r = B_{rl}(E^2 - a_l + b_l) = B_{rl}E^2 - a_l B_{rl}E + b_l B_{rl}.$$

Обозначим через $B_r^{(k)}$ коэффициент полинома B_r при степени k . Очевидно, что

$$B_r^{(k)} = B_{rl}^{(k-2)} - a_l B_{rl}^{(k-1)} + b_l B_{rl}^{(k)}.$$

Полином (3.6) с учетом (3.7)—(3.9) можно записать в виде

$$2 \sum_{r=1}^N B_r \operatorname{Im} [g_{ri} g_{rj} (E - \varepsilon_r^*)] + \sum_{r=1}^N B_r V_{rr} g_{ri} g_{rj}^* +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{l=r+1}^N B_{rl} \{V_{lr} g_{ri} g_{lj}^* [E^2 - E(\epsilon_l + \epsilon_r^*) + \epsilon_l \epsilon_r^*] + \\
 & \quad + V_{rl} g_{li} g_{rj}^* [E^2 - E(\epsilon_l^* + \epsilon_r) + \epsilon_l^* \epsilon_r]\} = 0. \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

Для того чтобы выполнялось условие унитарности (3.5), необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при всех степенях переменной E полинома (3.10) были равны нулю. Коэффициент при степени E^k имеет вид

$$\begin{aligned}
 & 2 \sum_{r=1}^N \{B_r^{(k-1)} \operatorname{Im} (g_{ri} g_{rj}) + B_r^{(k)} [-\epsilon_r^x \operatorname{Im} (g_{ri} g_{rj}) + \epsilon_r^y \operatorname{Re} (g_{ri} g_{rj})]\} + \\
 & \quad + \sum_{r=1}^N V_{rr} g_{ri} g_{rj}^* + \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{l=r+1}^N \{B_{rl}^{(k-2)} [V_{lr} g_{ri} g_{lj}^* + V_{lr}^* g_{li} g_{rj}^*] - \\
 & \quad - B_{rl}^{(k-1)} [V_{lr} g_{ri} g_{lj}^* (\epsilon_l + \epsilon_r^*) + V_{lr}^* g_{li} g_{rj}^* (\epsilon_l^* + \epsilon_r)] + \\
 & \quad + B_{rl}^{(k)} [V_{lr} g_{ri} g_{lj}^* \epsilon_l \epsilon_r^* + V_{lr}^* g_{li} g_{rj}^* \epsilon_l^* \epsilon_r]\} = 0. \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

Приравняем нулю коэффициент при степени $E^{(2N-1)}$. С учетом того, что B_r есть полином степени $(2N-2)$, а B_{rl} — полином степени $(2N-4)$, получаем

$$\sum_{r=1}^N B_r^{(2N-2)} \operatorname{Im} (g_{ri} g_{rj}) = 0.$$

Старший коэффициент полинома B_r равен единице. Отсюда получаем

$$\sum_{r=1}^N \operatorname{Im} (g_{ri} g_{rj}) = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{r=1}^N [g_{ri}^x g_{rj}^y + g_{ri}^y g_{rj}^x] = 0 \quad (i, j = 1, \dots, M). \quad (3.12)$$

Здесь \mathbf{g}_r^x и \mathbf{g}_r^y — действительные векторы, представляющие, соответственно, действительную и мнимую части комплексного вектора $\mathbf{g}_r = \mathbf{g}_r^x + i\mathbf{g}_r^y$.

Будем строить векторы \mathbf{g}_r так, чтобы их мнимые части \mathbf{g}_r^y являлись линейными комбинациями действительных частей \mathbf{g}_r^x :

$$\mathbf{g}_r^y = u_{r1}\mathbf{g}_1^x + u_{r2}\mathbf{g}_2^x + \dots + u_{rN}\mathbf{g}_N^x, \quad (r = 1, \dots, N). \quad (3.13)$$

Подставив выражение (3.13) в условие (3.12), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^N \left[g_{ri}^x \sum_{k=1}^N u_{rk} g_{kj}^x + g_{rj}^x \sum_{k=1}^N u_{rk} g_{ki}^x \right] = \\ & = 2 \sum_{r=1}^N u_{rr} g_{ri}^x g_{rj}^x + \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{k=r+1}^M (u_{rk} + u_{kr}) (g_{ri}^x g_{kj}^x + g_{ki}^x g_{rj}^x) = 0, \\ & \quad (i, j = 1, \dots, M). \end{aligned}$$

Таким образом, для того, чтобы коэффициент при степени $E^{(2N-1)}$ тождественно равнялся нулю, необходимо и достаточно, чтобы

$$u_{rr} = 0, \quad u_{rk} = -u_{kr}, \quad (3.14)$$

то есть матрица связи U — кососимметричная матрица. Равенство (3.13) определяет NM уравнений связи, которые зависят от $N(N-1)/2$ параметров — элементов u_{ij} матрицы U .

Приравняем нулю коэффициент при степени $(2N-2)$:

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{r=1}^N \{B_r^{(2N-3)} \operatorname{Im}(g_{ri} g_{rj}) - B_r^{(2N-2)} [\epsilon_r^x \operatorname{Im}(g_{ri} g_{rj}) - \epsilon_r^y \operatorname{Re}(g_{ri} g_{rj})]\} + \\ & + \sum_{r=1}^N B_r^{(2N-2)} V_{rr} g_{ri} g_{rj}^* + \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{l=r+1}^N \{B_{rl}^{(2N-4)} [V_{lr} g_{ri} g_{lj}^* + V_{lr}^* g_{li} g_{rj}^*] - \\ & - B_{rl}^{(2N-3)} [V_{lr} g_{ri} g_{lj}^* (\epsilon_l + \epsilon_r^*) + V_{lr}^* g_{li} g_{rj}^* (\epsilon_l^* + \epsilon_r)] + \\ & + B_{rl}^{(2N-2)} [V_{rl} g_{ri} g_{lj}^* \epsilon_l^* \epsilon_r^* + V_{lr}^* g_{li} g_{rj}^* \epsilon_l^* \epsilon_r]\} = 0. \end{aligned}$$

С учетом того, что

$$B_r^{(2N-3)} = -2 \sum_{k \neq r} \varepsilon_k^x = -\sum_{k \neq r} a_k,$$

$$B_r^{(2N-2)} = B_{rl}^{(2N-4)} = 1, \quad B_{rl}^{(2N-2)} = B_{rl}^{(2N-3)} = 0,$$

получим

$$2 \sum_{r=1}^N [-\sum_{k \neq r} a_k \operatorname{Im}(g_{ri} g_{rj}) + \varepsilon_r^y \operatorname{Re}(g_{ri} g_{rj}) - \varepsilon_r^x \operatorname{Im}(g_{ri} g_{rj})] +$$

$$+ \sum_{r=1}^N V_{rr} g_{ri} g_{rj}^* + \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{l=r+1}^N [V_{lr} g_{ri} g_{lj}^* + V_{lr}^* g_{ri} g_{rj}^*] = 0. \quad (3.15)$$

Запишем произведения $g_{ri} g_{rj}$, $g_{ri} g_{rj}^*$, $g_{ri} g_{lj}$ и $g_{li} g_{rj}^*$ с учетом представления (3.13):

$$g_{ri} g_{rj} = (g_{ri}^x g_{rj}^x - g_{ri}^y g_{rj}^y) + i(g_{ri}^x g_{rj}^y + g_{ri}^y g_{rj}^x) =$$

$$= [g_{ri}^x g_{rj}^x - \sum_{k=1}^N \sum_{\nu=1}^N u_{rk} u_{r\nu} g_{ki}^x g_{\nu j}^x] + i \sum_{k=1}^N u_{rk} [g_{ri}^x g_{kj}^x + g_{rj}^x g_{ki}^x],$$

$$g_{ri} g_{rj}^* = (g_{ri}^x g_{rj}^x + g_{ri}^y g_{rj}^y) + i(-g_{ri}^x g_{rj}^y + g_{ri}^y g_{rj}^x) =$$

$$= [g_{ri}^x g_{rj}^x + \sum_{k=1}^N \sum_{\nu=1}^N u_{rk} u_{r\nu} g_{ki}^x g_{\nu j}^x] + i \sum_{k=1}^N u_{rk} [-g_{ri}^x g_{kj}^x + g_{rj}^x g_{ki}^x], \quad (3.16)$$

$$g_{ri} g_{lj} = (g_{ri}^x g_{lj}^x + g_{ri}^y g_{lj}^y) + i(-g_{ri}^x g_{lj}^y + g_{ri}^y g_{lj}^x) =$$

$$= [g_{ri}^x g_{lj}^x + \sum_{k=1}^N \sum_{\nu=1}^N u_{rk} u_{l\nu} g_{ki}^x g_{\nu j}^x] + i \sum_{k=1}^N [-u_{lk} g_{ri}^x g_{kj}^x + u_{rk} g_{lj}^x g_{ki}^x],$$

$$g_{li} g_{rj}^* = (g_{li}^x g_{rj}^x + g_{li}^y g_{rj}^y) + i(-g_{li}^x g_{rj}^y + g_{li}^y g_{rj}^x) =$$

$$= [g_{li}^x g_{rj}^x + \sum_{k=1}^N \sum_{\nu=1}^N u_{lk} u_{r\nu} g_{ki}^x g_{\nu j}^x] + i \sum_{k=1}^N [-u_{rk} g_{li}^x g_{kj}^x + u_{lk} g_{rj}^x g_{ki}^x].$$

Для того чтобы коэффициент (3.15) при степени $E^{(2N-2)}$ был равен нулю, необходимо приравнять нулю коэффициенты при произведениях $g_{\mu i}^x g_{\nu j}^x$, ($\mu, \nu = 1, \dots, N$). Подставим (3.16) в уравнение (3.15) и приравняем нулю действительные и мнимые части этих коэффициентов (напомним, что $V_{lr} = V_{lr}^x + iV_{lr}^y = \mathbf{g}_l^+ \mathbf{g}_r$):

$$2\varepsilon_{\mu}^y - 2 \sum_{r \neq \mu} \varepsilon_{\mu}^y u_{r\mu}^2 + V_{\mu\mu} + \sum_{r \neq \mu} V_{rr} u_{r\mu}^2 + 2 \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{l=r+1}^N V_{lr}^x u_{r\mu} u_{l\mu} + 2 \sum_{r \neq \mu} V_{r\mu}^y u_{r\mu} = 0, \quad (3.17)$$

$$- 2 \sum_{r=1}^N \varepsilon_r^y u_{r\mu} u_{r\nu} + 2u_{\mu\nu}(\varepsilon_{\mu}^x - \varepsilon_{\nu}^x) + \sum_{r=1}^N V_{rr} u_{r\mu} u_{r\nu} + V_{\mu\nu}^x + \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{l=r+1}^N V_{lr}^x [u_{r\mu} u_{l\nu} + u_{l\mu} u_{r\nu}] + \sum_{r \neq \mu, \nu}^N [V_{r\mu}^y u_{r\nu} + V_{r\nu}^y u_{r\mu}] = 0, \quad (3.18)$$

$$u_{\nu\mu}(V_{\mu\mu} + V_{\nu\nu}) + V_{\nu\mu}^y + \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{l=r+1}^N V_{lr}^y [u_{r\mu} u_{l\nu} - u_{l\mu} u_{r\nu}] + \sum_{r \neq \mu, \nu}^N [V_{r\nu}^x u_{r\mu} + V_{r\mu}^x u_{r\nu}] = 0. \quad (3.19)$$

Таким образом, приравняв нулю коэффициент при степени $E^{(2N-2)}$, получаем систему N^2 уравнений, линейных относительно скалярных произведений V_{rr} , V_{lr}^x и V_{lr}^y : уравнений (3.17), $N(N-1)/2$ уравнений (3.18) и $N(N-1)/2$ уравнений (3.19). Коэффициенты при $g_{\mu i}^x g_{\nu j}^x$ и $g_{\nu i}^x g_{\mu j}^x$ совпадают, поскольку μ и ν входят в уравнения (3.18) и (3.19) симметрично.

Решив систему, получаем значения скалярных произведений

$$V_{rr} = -\frac{2}{S} [S + 2Q_r] \varepsilon_r^y, \quad (3.20)$$

$$V_{lr}^x = -\frac{2}{S} [F_{lr}(\varepsilon_l^x - \varepsilon_r^x) + G_{lr}(\varepsilon_l^y + \varepsilon_r^y)], \quad (3.21)$$

$$V_{lr}^y = -\frac{2}{S} [G_{lr}(\epsilon_l^x - \epsilon_r^x) - F_{lr}(\epsilon_l^y + \epsilon_r^y)],$$

$$r = 1, \dots, N; \quad l = r + 1, \dots, N, \quad (3.22)$$

где

$$S = 1 + \sum_{p=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} (-1)^p \sum_{i_1=1}^{N-2p+1} \sum_{i_2 > i_1}^{N-2p+2} \dots \sum_{i_{2p} > i_{2p-1}}^N \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_{2p} \\ i_1 & i_2 & \dots & i_{2p} \end{vmatrix},$$

$$Q_r = \sum_{p=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} (-1)^{p+1} \sum_{i_1=1}^{N-2p+2} \sum_{i_2 > i_1}^{N-2p+3} \dots \sum_{i_{2p-1} > i_{2p-2}}^N \begin{vmatrix} r & i_1 & i_2 & \dots & i_{2p-1} \\ r & i_1 & i_2 & \dots & i_{2p-1} \end{vmatrix},$$

$$(i_1, \dots, i_{2p-1} \neq r),$$

$$F_{lr} = u_{lr} + \sum_{p=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]-1} (-1)^p \sum_{i_1=1}^{N-2p+1} \sum_{i_2 > i_1}^{N-2p+2} \dots \sum_{i_{2p} > i_{2p-1}}^N \begin{vmatrix} l & i_1 & i_2 & \dots & i_{2p} \\ r & i_1 & i_2 & \dots & i_{2p} \end{vmatrix},$$

$$(i_1, \dots, i_{2p} \neq r, l),$$

$$G_{lr} = \sum_{p=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]-1} (-1)^{p+1} \sum_{i_1=1}^{N-2p+2} \sum_{i_2 > i_1}^{N-2p+3} \dots \sum_{i_{2p-1} > i_{2p-2}}^N \begin{vmatrix} l & i_1 & i_2 & \dots & i_{2p-1} \\ r & i_1 & i_2 & \dots & i_{2p-1} \end{vmatrix},$$

$$(i_1, \dots, i_{2p-1} \neq r, l).$$

Здесь

$$\begin{pmatrix} l & i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ r & i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{lr} & u_{li_1} & \dots & u_{li_k} \\ u_{i_1 r} & u_{i_1 i_1} & \dots & u_{i_1 i_k} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ u_{i_k r} & u_{i_k i_1} & \dots & u_{i_k i_k} \end{pmatrix}$$

— минор, составленный из элементов матрицы U , стоящих на пересечении строк с номерами l, i_1, i_2, \dots, i_k и столбцов с номерами r, i_1, i_2, \dots, i_k .

Система (3.13) и скалярные произведения (3.20)—(3.22) полностью определяют ограничения, накладываемые на искомые векторы парциальных ширин. Если векторы \mathbf{g}_r ($r = 1, \dots, N$) удовлетворяют соотношениям (3.13) и (3.20)—(3.22), то коэффициенты при младших степенях полинома (3.10) будут тождественно равны нулю.

Области изменения элементов матрицы U , связывающей действительные и мнимые части векторов парциальных ширин, определяются условиями

$$0 \leq \frac{F_{lr}^2 + G_{lr}^2}{(S + 2Q_r)(S + 2Q_l)} \leq \frac{\Gamma_r \Gamma_l}{4(E_r - E_l)^2 + (\Gamma_r + \Gamma_l)^2} \leq 1. \quad (3.23)$$

Из этих неравенств видно, что если резонансы хорошо разнесены, то область определения для элементов матрицы U уменьшается до нуля. В пределе при $u_{rl} \rightarrow 0$ для всех r и l векторы \mathbf{g}_r становятся действительными и взаимно ортогональными.

Длины векторов \mathbf{g}_r превосходят полные ширины Γ_r на величину, исчезающую, если резонансы хорошо разнесены:

$$\frac{|\mathbf{g}_r|^2}{\Gamma_r} = \frac{V_{rr}}{\Gamma_r} = 1 + 2 \frac{Q_r}{S}.$$

Для построенных таким способом векторов \mathbf{g}_r выполняется правило сумм

$$\sum_{r=1}^N \mathbf{g}_r^T \mathbf{g}_r = \sum_{r=1}^N \Gamma_r. \quad (3.24)$$

Для дальнейшего удобно записать ограничения (3.20)—(3.22) в терминах действительных и мнимых частей векторов парциальных ширин $\mathbf{g}_r = \mathbf{g}_r^x + i\mathbf{g}_r^y$. Для определения скалярных произведений действительных векторов получаем систему:

$$(\mathbf{g}_r^x, \mathbf{g}_r^x) + (\mathbf{g}_r^y, \mathbf{g}_r^y) = V_{rr},$$

$$(\mathbf{g}_l^x, \mathbf{g}_r^x) + (\mathbf{g}_l^y, \mathbf{g}_r^y) = V_{lr}^x,$$

или, с учетом представления (3.13),

$$(\mathbf{g}_r^x, \mathbf{g}_r^x) + \sum_{i \neq r} \sum_{j \neq r} u_{ri} u_{rj} (\mathbf{g}_i^x, \mathbf{g}_j^x) = V_{rr},$$

$$(\mathbf{g}_l^x, \mathbf{g}_r^x) + \sum_{i \neq l} \sum_{j \neq r} u_{li} u_{rj} (\mathbf{g}_i^x, \mathbf{g}_j^x) = V_{lr}^x.$$

Решив систему, получаем

$$(\mathbf{g}_r^x, \mathbf{g}_r^x) = \frac{2}{S^2} \{- (S + Q_r)^2 \varepsilon_r^y + \sum_{i \neq r} [2F_{ri} G_{ri} \varepsilon_i^x + (F_{ri}^2 - G_{ri}^2) \varepsilon_i^y]\}, \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{g}_l^x, \mathbf{g}_r^x) = & \frac{2}{S^2} \{F_{lr}[(S + Q_r) \varepsilon_r^x - (S + Q_l) \varepsilon_l^x] - G_{lr}[(S + Q_r) \varepsilon_r^y + (S + Q_l) \varepsilon_l^y] + \\ & + \sum_{i \neq l, r} [(F_{li} G_{ri} + F_{ri} G_{li}) \varepsilon_i^x + (F_{li} F_{ri} - G_{li} G_{ri}) \varepsilon_i^y]\}, \end{aligned}$$

$$r = 1, \dots, N; \quad l = r + 1, \dots, N. \quad (3.26)$$

При фитировании экспериментальных данных с целью определения параметров резонансов «рабочими» формулами являются соотношения (3.13) и (3.25)—(3.26), физическими параметрами служат массы и ширины резонансов, а также их векторы парциальных ширин (или брэнчинги распадов). Как мы видели, при перекрывании резонансов не все эти параметры независимы. Требования унитарности и T -инвариантности матрицы рассеяния S накладывают на них определенные ограничения. Несмотря на громоздкие формулы, определение параметров задачи является простой процедурой. Ниже, в п.3.4, мы рассмотрим, как пользоваться этой схемой.

В соотношения (3.13) входят $N(N - 1)/2$ вспомогательных (внутренних) параметров задачи — элементы матрицы U ($|u_{rl}| \leq 1$). В отличие от метода, описанного в п.2.3, где значения дополнительных параметров типа α явным образом содержатся в амплитудах f_{ij} , матричные элементы u_{ij} нужны лишь в процессе установления физических параметров и не входят в окончательные формулы для амплитуд. Действительные части векторов парциальных ширин \mathbf{g}_r^x связаны $N(N + 1)/2$ соотношениями (3.25)—(3.26), определяющими длины этих векторов и их взаимное расположение. Следовательно, из NM координат этих векторов свободными параметрами являются только $NM - N(N + 1)/2$ координат. Всего задача содержит $N(M + 1)$ свободных действительных параметров. При фитировании для каждого набора параметров следует проверять выполнение соотношения (3.23) и

неудачные шаги отбраковывать. Если число каналов M не меньше числа резонансов N , то построение системы векторов с заданным соотношением длин и углов не представляет затруднений. Если же $M < N$, задача усложняется необходимостью решать систему нелинейных алгебраических уравнений.

3.2. Учет фона. Определив векторы парциальных ширин \mathbf{g}_r и записав их в виде $g_{rk} = e^{i\varphi_{rk}} |g_{rk}|$, получим матрицу рассеяния (3.3):

$$\tilde{S}_{ij} = \delta_{ij} - i \sum_{r=1}^N e^{i(\varphi_{ri} + \varphi_{rj})} \frac{|g_{ri}| \cdot |g_{rj}|}{E - \varepsilon_r}.$$

Обе матрицы \tilde{S} и $S = b\tilde{S}b^T$ унитарны по построению. Если фоновая матрица диагональна, то есть

$$B_{ij} = \delta_{ij} e^{2i\beta_i} \quad (i, j = 1, \dots, M),$$

то $A_{rk} = e^{i\beta_k} g_{rk}$ ($r = 1, \dots, N$; $k = 1, \dots, M$), и матрица рассеяния S может быть представлена в виде

$$S_{ij} = e^{i(\beta_i + \beta_j)} \left[\delta_{ij} - i \sum_{r=1}^N e^{i(\varphi_{ri} + \varphi_{rj})} \frac{|g_{ri}| \cdot |g_{rj}|}{E - \varepsilon_r} \right].$$

Фазовые сдвиги β_i в данном методе могут быть функциями энергии. В простейшем случае, когда фон можно считать упругим и не зависящим от энергии, мы имеем M действительных параметров β_i . При фитировании экспериментальных данных матрицу B можно построить, например, следующим образом. Выберем в качестве свободных параметров M действительных чисел $\beta_i \in [0, 2\pi)$ и $M(M-1)/2$ углов вращения $\psi_k \in [0, 2\pi)$. Тогда ортогональная матрица V может быть получена как произведение

$$V = R_1 \cdot R_2 \cdot \dots \cdot R_{M(M-1)/2},$$

где матрица $R_k = \{r_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^M$ отличается от единичной лишь элементами

$$r_{pp}^{(k)} = r_{qq}^{(k)} = \cos \psi_k, \quad r_{pq}^{(k)} = -r_{qp}^{(k)} = \sin \psi_k$$

$$(p = 1, \dots, M; q = p + 1, \dots, M).$$

Если фоновая матрица B недиагональна ($B = bb^T$, $b = Ve^{i\beta}$), то появляется $M(M+1)/2$ дополнительных свободных параметров: M действительных переменных β_i и $M(M-1)/2$ элементов ортогональной матрицы V .

Очевидно, что фоновая матрица B зависит только от числа каналов и не зависит от числа резонансов.

3.3. Брэнчинги распадов в случае перекрывающихся резонансов. В случае N неперекрывающихся резонансов и M внешних каналов амплитуду рассеяния можно представить в виде

$$f = \sum_{r=1}^N \frac{\mathbf{A}_r \mathbf{A}_r^T}{E - E_r + i\Gamma_r/2}.$$

Здесь \mathbf{A}_r — действительные векторы парциальных ширин, причем из условия унитарности следует, что

$$\sum_{i=1}^M A_{ri}^2 = \Gamma_r.$$

Определив брэнчинг распада r -го резонанса в i -й канал как

$$B_{ri} = \frac{A_{ri}^2}{\Gamma_r}, \quad (3.27)$$

амплитуду рассеяния можно записать в виде

$$f_{ij} = \sum_{r=1}^N \frac{\Gamma_r \sqrt{B_{ri} B_{rj}}}{E - E_r + i\Gamma_r/2}. \quad (3.28)$$

Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^M B_{ri} = \frac{\sum_{i=1}^M A_{ri}^2}{\Gamma_r} = 1.$$

В случае перекрывающихся резонансов амплитуда рассеяния имеет вид

$$f = \sum_{r=1}^N \frac{\mathbf{g}_r \mathbf{g}_r^T}{E - E_r + i\Gamma_r/2},$$

с комплексными векторами парциальных ширин \mathbf{g}_r . По аналогии с (3.27) брэнчингом распада r -го резонанса в i -й канал будем называть величину

$$B_{ri} = \frac{|g_{ri}|^2}{|\mathbf{g}_r|^2} = \frac{|g_{ri}|^2}{\sum_{k=1}^M |g_{rk}|^2}. \quad (3.29)$$

Тогда $|g_{ri}| = |\mathbf{g}_r| \sqrt{B_{ri}}$ и

$$f_{ij} = \sum_{r=1}^N e^{i(\varphi_{ri} + \varphi_{rj})} \frac{|\mathbf{g}_r|^2 \sqrt{B_{ri} B_{rj}}}{E - E_r + i\Gamma_r/2}. \quad (3.30)$$

3.4. Построение векторов парциальных ширин. Несмотря на то, что формулы для скалярных произведений выглядят достаточно сложными, построение векторов парциальных ширин при $M \geq N$ выполняется с помощью достаточно простой и регулярной процедуры. В этом разделе мы подробно рассмотрим способы получения векторов парциальных ширин для случаев одного, двух и трех резонансов.

Поскольку фоновая матрица B зависит только от числа каналов и не зависит от числа резонансов, мы будем считать, для простоты, что $B = I$.

Один резонанс. В случае одного изолированного резонанса ($N = 1$) и M открытых каналов матрица рассеяния $S(E)$ представляется обычным выражением Брейта — Вигнера:

$$S_{ij} = \delta_{ij} - i \frac{g_{1i} g_{1j}}{E - \varepsilon_1} \quad (i, j = 1, \dots, M).$$

Параметрами данной модели являются значения E_1, Γ_1 ($\varepsilon_1 = E_1 - i\Gamma_1/2$) и вектор \mathbf{g}_1 . Требование унитарности матрицы S накладывает на эти параметры ($M + 1$) ограничение.

$$g_{1i}^y \equiv 0 \quad (i = 1, \dots, M),$$

$$(\mathbf{g}_1^x, \mathbf{g}_1^x) = -2\varepsilon_1^y = \Gamma_1,$$

то есть $\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_1^x$ — действительный вектор длины Γ_1 .

Если в качестве свободных параметров выбрать массу резонанса E_1 , ширину Γ_1 и $(N - 1)$ координату вектора \mathbf{g}_1 , например $g_{11}, \dots, g_{1, M-1}$, то последняя координата g_{1M} определится из уравнения

$$\Gamma_1 = \sum_{i=1}^M g_{1i}^2.$$

Два резонанса. В случае двух резонансов ($N = 2$) и M внешних каналов матрица рассеяния $S(E)$ задается выражением

$$S_{ij} = \delta_{ij} - i \frac{g_{1i} g_{1j}}{E - \varepsilon_1} - i \frac{g_{2i} g_{2j}}{E - \varepsilon_2} \quad (i, j = 1, \dots, M).$$

Параметрами задачи являются значения $\varepsilon_1 = E_1 - i\Gamma_1/2$, $\varepsilon_2 = E_2 - i\Gamma_2/2$ и два вектора комплексных парциальных ширин $\mathbf{g}_1 = \{g_{1i}\}_{i=1}^M$ и $\mathbf{g}_2 = \{g_{2i}\}_{i=1}^M$. Требование унитарности матрицы S накладывает на них $2(M + 1)$ ограничение.

Матрица U , связывающая действительные и мнимые части векторов \mathbf{g}_1 и \mathbf{g}_2 , в случае двух резонансов будет иметь вид

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix},$$

то есть

$$\mathbf{g}_1^y = -\alpha \mathbf{g}_2^x, \quad \mathbf{g}_2^y = \alpha \mathbf{g}_1^x. \quad (3.31)$$

Подставляя параметр α в формулы (3.25), (3.26), получим выражения для длин векторов \mathbf{g}_1^x , \mathbf{g}_2^x и их скалярного произведения:

$$\begin{aligned} (\mathbf{g}_1^x, \mathbf{g}_1^x) &= \frac{\Gamma_1 - \alpha^2 \Gamma_2}{(1 - \alpha^2)^2}, & (\mathbf{g}_2^x, \mathbf{g}_2^x) &= \frac{\Gamma_2 - \alpha^2 \Gamma_1}{(1 - \alpha^2)^2}, \\ (\mathbf{g}_2^x, \mathbf{g}_1^x) &= \frac{2\alpha}{(1 - \alpha^2)^2} (E_1 - E_2), \end{aligned} \quad (3.32)$$

что совпадает с результатом, полученным в работе [12] другим способом.

Параметр α не вполне произволен, но ограничен условием

$$0 \leq \frac{4\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} \leq \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{|\varepsilon_1 - \varepsilon_2^*|^2} \leq 1.$$

Три резонанса. В случае трех резонансов ($N = 3$) и M открытых каналов матрица рассеяния $S(E)$ задается выражением

$$S_{ij} = \delta_{ij} - i \frac{g_{1i} g_{1j}}{E - \varepsilon_1} - i \frac{g_{2i} g_{2j}}{E - \varepsilon_2} - i \frac{g_{3i} g_{3j}}{E - \varepsilon_3}, \quad (i, j = 1, \dots, M). \quad (3.33)$$

Матрица U , связывающая действительные и мнимые части векторов \mathbf{g}_1 , \mathbf{g}_2 и \mathbf{g}_3 , в случае трех резонансов будет иметь вид

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\beta \\ \alpha & 0 & -\gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix},$$

то есть

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1^y &= -\alpha \mathbf{g}_2^x - \beta \mathbf{g}_3^x, & \mathbf{g}_2^y &= \alpha \mathbf{g}_1^x - \gamma \mathbf{g}_3^x, \\ \mathbf{g}_3^y &= \beta \mathbf{g}_1^x + \gamma \mathbf{g}_2^x. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Подставляя параметры α , β , γ в формулы (3.25), (3.26), получим необходимые для построения векторов \mathbf{g}_1 , \mathbf{g}_2 и \mathbf{g}_3 скалярные произведения

$$\begin{aligned} (\mathbf{g}_1^x, \mathbf{g}_1^x) &= \frac{2}{S^2} [2\alpha\beta\gamma(\varepsilon_3^x - \varepsilon_2^x) - \varepsilon_1^y(1 - \gamma^2)^2 + \varepsilon_2^y(\alpha^2 - \beta^2\gamma^2) + \varepsilon_3^y(\beta^2 - \alpha^2\gamma^2)], \\ (\mathbf{g}_2^x, \mathbf{g}_2^x) &= \frac{2}{S^2} [2\alpha\beta\gamma(\varepsilon_1^x - \varepsilon_3^x) + \varepsilon_1^y(\alpha^2 - \beta^2\gamma^2) - \varepsilon_2^y(1 - \beta^2)^2 + \varepsilon_3^y(\gamma^2 - \alpha^2\beta^2)], \\ (\mathbf{g}_3^x, \mathbf{g}_3^x) &= \frac{2}{S^2} [2\alpha\beta\gamma(\varepsilon_2^x - \varepsilon_1^x) + \varepsilon_1^y(\beta^2 - \alpha^2\gamma^2) + \\ &+ \varepsilon_2^y(\gamma^2 - \alpha^2\beta^2) - \varepsilon_3^y(1 - \alpha^2)^2], \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{g}_1^x, \mathbf{g}_2^x) &= \frac{2}{S^2} \{ \alpha[\varepsilon_1^x(1 - \gamma^2) - \varepsilon_2^x(1 - \beta^2) - \varepsilon_3^x(\beta^2 - \gamma^2)] + \\ &+ \beta\gamma[-\varepsilon_1^y(1 - \gamma^2) - \varepsilon_2^y(1 - \beta^2) + \varepsilon_3^y(1 + \alpha^2)] \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{g}_1^x, \mathbf{g}_3^x) &= \frac{2}{S^2} \{ \beta [\varepsilon_1^x (1 - \gamma^2) - \varepsilon_2^x (\alpha^2 - \gamma^2) - \varepsilon_3^x (1 - \alpha^2)] + \\
 &\quad + \alpha \gamma [\varepsilon_1^y (1 - \gamma^2) - \varepsilon_2^y (1 + \beta^2) + \varepsilon_3^y (1 - \alpha^2)] \}, \\
 (\mathbf{g}_2^x, \mathbf{g}_3^x) &= \frac{2}{S^2} \{ \gamma [-\varepsilon_1^x (\alpha^2 - \beta^2) + \varepsilon_2^x (1 - \beta^2) - \varepsilon_3^x (1 - \alpha^2)] + \\
 &\quad + \alpha \beta [\varepsilon_1^y (1 + \gamma^2) - \varepsilon_2^y (1 - \beta^2) - \varepsilon_3^y (1 - \alpha^2)] \}, \quad (3.36)
 \end{aligned}$$

где $S = 1 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2$.

Параметры α , β , γ не вполне произвольны, но ограничены условиями, выполнение которых следует проверять на каждом шаге процедуры фитирования:

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \frac{4(\alpha^2 + \beta^2 \gamma^2)}{(1 + \alpha^2)^2 - (\beta^2 - \gamma^2)^2} \leq \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{|\varepsilon_1 - \varepsilon_2^*|^2} \leq 1, \\
 0 &\leq \frac{4(\beta^2 + \alpha^2 \gamma^2)}{(1 + \beta^2)^2 - (\alpha^2 - \gamma^2)^2} \leq \frac{\Gamma_1 \Gamma_3}{|\varepsilon_1 - \varepsilon_3^*|^2} \leq 1, \\
 0 &\leq \frac{4(\gamma^2 + \alpha^2 \beta^2)}{(1 + \gamma^2)^2 - (\alpha^2 - \beta^2)^2} \leq \frac{\Gamma_2 \Gamma_3}{|\varepsilon_2 - \varepsilon_3^*|^2} \leq 1. \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

Формула (3.33) содержит $3(M + 1)$ комплексных параметров: энергии $\varepsilon_r = E_r - i\Gamma_r/2$ и векторы парциальных ширин $\mathbf{g}_r = \{g_{ri}\}_{i=1}^M$, ($r = 1, 2, 3$). Условие унитарности вводит три дополнительных параметра α , β , γ и накладывает $3(M + 2)$ ограничения — уравнения (3.34) и (3.35), (3.36). Таким образом, остается $3(M + 1)$ действительных свободных параметров, которые можно выбирать различным образом.

Пусть $M = 1$ (один открытый канал). Число свободных параметров равно 6.

Если в качестве этих свободных параметров взять значения E_r, Γ_r , то параметры α , β , γ однозначно определяются из системы

$$\frac{4(\alpha^2 + \beta^2 \gamma^2)}{(1 + \alpha^2)^2 - (\beta^2 - \gamma^2)^2} = \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{|\varepsilon_1 - \varepsilon_2^*|^2},$$

$$\frac{4(\beta^2 + \alpha^2\gamma^2)}{(1 + \beta^2)^2 - (\alpha^2 - \gamma^2)^2} = \frac{\Gamma_1\Gamma_3}{|\epsilon_1 - \epsilon_3^*|^2},$$

$$\frac{4(\gamma^2 + \alpha^2\beta^2)}{(1 + \gamma^2)^2 - (\alpha^2 - \beta^2)^2} = \frac{\Gamma_2\Gamma_3}{|\epsilon_2 - \epsilon_3^*|^2}.$$

Координаты $g_{11}^x, g_{21}^x, g_{31}^x$ определяются из соотношений

$$g_{11}^x = \sqrt{\Gamma_1 \frac{1 + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{1 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}},$$

$$g_{21}^x = \sqrt{\Gamma_2 \frac{1 + \alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2}{1 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}},$$

$$g_{31}^x = \sqrt{\Gamma_3 \frac{1 - \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{1 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}}.$$

Координаты мнимых частей векторов \mathbf{g}_i определяются из равенств (3.34).

Пусть $M = 2$ (два открытых канала). Число свободных параметров равно 9.

Если в качестве этих свободных параметров выбрать значения E_r, Γ_r и α, β, γ , то координаты векторов $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ определяются однозначно из соотношений (3.35) и (3.36). Обозначим

$$\mathbf{g}_1^x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_2^x = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_3^x = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда значения x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2$) определяются из системы

$$x_1^2 + x_2^2 = (\mathbf{g}_1^x, \mathbf{g}_1^x), \quad y_1^2 + y_2^2 = (\mathbf{g}_2^x, \mathbf{g}_2^x), \quad z_1^2 + z_2^2 = (\mathbf{g}_3^x, \mathbf{g}_3^x),$$

$$x_1y_1 + x_2y_2 = (\mathbf{g}_1^x, \mathbf{g}_2^x), \quad x_1z_1 + x_2z_2 = (\mathbf{g}_1^x, \mathbf{g}_3^x), \quad y_1z_1 + y_2z_2 = (\mathbf{g}_2^x, \mathbf{g}_3^x).$$

Значения скалярных произведений $(\mathbf{g}_k^x, \mathbf{g}_l^x)$ выражаются через параметры E_r, Γ_r и α, β, γ (см. формулы (3.35), (3.36)). Естественно, параметры E_r, Γ_r и α, β, γ должны удовлетворять ограничениям (3.37).

Пусть имеется $M > 2$ внешних каналов.

Число свободных параметров равно $3(M + 1)$. Их можно выбирать различными способами. Например, в качестве свободных параметров можно взять значения E_r, Γ_r и α, β, γ . Тогда для определения $3M$ координат векторов \mathbf{g}_r^x остается $3(M - 2)$ свободных параметра, которые можно задать как углы поворота: $(M - 3)$ углов поворота $\psi_1, \dots, \psi_{M-3}$ вектора \mathbf{g}_3^x вокруг осей $\mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_M$; $(M - 2)$ углов поворота $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{M-2}$ гиперплоскости векторов $\mathbf{g}_2^x, \mathbf{g}_3^x$ вокруг осей $\mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_M$ и $(M - 1)$ угол поворота $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{M-1}$ всех векторов \mathbf{g}_i^x вокруг осей координат.

Пусть для определенности $M = 4$. Координаты искомых векторов частичных ширин можно вычислять, например, следующим образом. Положим

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где

$$c_1 = \sqrt{(\mathbf{g}_1^x, \mathbf{g}_1^x)},$$

$$d_1 = \frac{(\mathbf{g}_1^x, \mathbf{g}_2^x)}{c_1}, \quad d_2 = \sqrt{(\mathbf{g}_2^x, \mathbf{g}_2^x) - d_1^2},$$

$$e_1 = \frac{(\mathbf{g}_1^x, \mathbf{g}_3^x)}{c_1}, \quad e_2 = \frac{(\mathbf{g}_2^x, \mathbf{g}_3^x) - d_1 c_1}{d_2}, \quad e_3 = \sqrt{(\mathbf{g}_3^x, \mathbf{g}_3^x) - e_1^2 - e_2^2}.$$

Вычислим векторы \mathbf{q}_r (поворот векторов \mathbf{p}_r вокруг плоскости $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$):

$$\mathbf{q}_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \psi_1 & \sin \psi_1 \\ 0 & 0 & -\sin \psi_1 & \cos \psi_1 \end{pmatrix} \mathbf{p}_r.$$

Вычислим векторы \mathbf{s}_r (поворот векторов \mathbf{q}_r вокруг плоскостей $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ и $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4)$):

$$\mathbf{s}_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta_1 & \sin \delta_1 & 0 \\ 0 & -\sin \delta_1 & \cos \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta_2 & 0 & \sin \delta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin \delta_2 & 0 & \cos \delta_2 \end{pmatrix} \mathbf{q}_r.$$

Наконец, векторы \mathbf{g}_r^x получатся как результат поворота векторов \mathbf{s}_r вокруг плоскостей $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4)$ и $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$:

$$\mathbf{g}_r^x = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & 0 & \sin \varphi_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_2 & 0 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} \cos \varphi_3 & 0 & 0 & \sin \varphi_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_3 & 0 & 0 & \cos \varphi_3 \end{pmatrix} \mathbf{s}_r.$$

Таким образом, шесть параметров $\psi_1, \delta_1, \delta_2, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и соотношения (3.35), (3.36) полностью определяют координаты векторов \mathbf{g}_r^x . Координаты векторов \mathbf{g}_r^y определяются с помощью соотношений (3.34).

Этот алгоритм непосредственно обобщается на случай большего числа резонансов. Задача с четырьмя резонансами возникает, например, при изучении семейства ρ' -мезонов, мы рассмотрим ее в следующем разделе.

4. ПРОБЛЕМЫ СПЕКТРА ВОЗБУЖДЕНИЙ ЛЕГКИХ ВЕКТОРНЫХ МЕЗОНОВ И УНИТАРНОСТЬ S-МАТРИЦЫ ДЛЯ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ НЕУПРУГИХ РЕЗОНАНСОВ

4.1. Современная ситуация с ρ - и ω -мезонными возбужденными состояниями. В качестве важного и актуального примера использования обсуждаемых методов мы проанализируем спектр возбуждений ρ - и ω -мезонов. Более детальное описание можно найти в работах [17—20].

Понимание и интерпретация экспериментального спектра резонансов легких мезонов есть необходимое условие для поисков мезонов, не явля-

ющихся возбуждениями системы, состоящей из кварка и антикварка $q\bar{q}$. Кроме того, изучение спектра «обычных» $q\bar{q}$ радиальных и орбитальных возбуждений легких мезонов, состоящих из u -, d - и s -кварков, определение их масс, ширин и мод распадов само по себе является важной задачей.

Выделенная роль в физике частиц векторных мезонов с $J^{PC} = 1^{--}$ ($I^G = 0^-, 1^+$ — изоскалярных и изовекторных) делает задачу изучения спектра их возбуждений особенно важной. Давно известно, что простейшая модель векторной доминантности (ВДМ) плохо описывает данные выше 1 ГэВ по e^+e^- -аннигиляции, $\pi\pi$ -рассеянию и фоторождению. Так, полные сечения e^+e^- -аннигиляции в два или четыре пиона существенно выше получающихся в ВДМ, и в этих сечениях, и в упругой амплитуде p -волны $\pi\pi$ -рассеяния наблюдаются нерегулярности в области энергий от 1,2 до 2,0 ГэВ.

Существование $\rho'(1600)$ было твердо установлено много лет назад, но в течение долгого времени оставалась неопределенность в значениях его параметров. Позже было обнаружено, что энергетическая область около 1600 МэВ содержит по крайней мере два изовекторных $J^{PC} = 1^{--}$ резонанса. В работах [21—23] было показано, что существование двух резонансов с массами 1,46 и 1,70 ГэВ и ширинами, соответственно, 0,31 и 0,40 ГэВ позволяет получить хорошее описание экспериментальных данных по e^+e^- -аннигиляции и по фоторождению с 2π - и 4π -конечными состояниями. Схожий спектр был получен А.Б.Говорковым [24] при изучении процесса $e^+e^- \rightarrow \pi^0\omega$, в котором были обнаружены широкие (ширины порядка 0,3 ГэВ) резонансы с массами 1,45, 1,86 и 1,99 ГэВ. Значения масс и ширин этих частиц позже уточнялось, но современная точка зрения состоит в том, что в районе бывшего $\rho'(1600)$ -возбуждения есть по меньшей мере два новых изовекторных $J^{PC} = 1^{--}$ широких состояния, существование которых можно считать достаточно твердо установленным, и они занесены в таблицы Particle Data Group [25]. То же самое можно сказать и об изоскалярных ω' -мезонах — $\omega'(1440)$ и $\omega'(1600)$.

Долгую и сложную историю имеет и другое возможное ρ -возбуждение с массой в области 1,1 ÷ 1,3 ГэВ. Первые заключения о его существовании [26] основывались на существенном превышении сечения процесса $e^+e^- \rightarrow \omega\pi^0$ относительно предсказаний ВДМ. Кроме того, это возбуждение было замечено в реакции $\gamma p \rightarrow p e^+e^-$ [24]. Наконец, анализ пионных и $\pi^0\omega$ электромагнитных формфакторов [28,29] в энергетической области до 1,4 ГэВ также приводил к необходимости учета состояния 1,25 ГэВ. Однако одновременно существовали и описания всех этих экспериментальных данных без $\rho'(1250)$ -мезона.

Сравнительно недавно группа LASS в SLAC провела амплитудный анализ [30,31] $\pi^+\pi^-$ -системы в процессе $K^-p \rightarrow \pi^+\pi^-A$. Этот анализ показывает значительный вклад p -волны, который был хорошо описан БВ-резонансом с массой $(1,266 \pm 0,014)$ ГэВ. В контексте $q\bar{q}$ -модели это состояние наиболее естественно интерпретируется как первое радиальное возбуждение ρ -мезона.

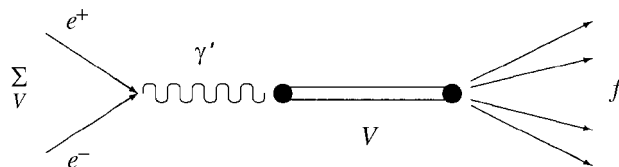
После опубликования этих результатов в работе [32] были вновь проанализированы данные по процессу $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ с учетом состояния группы LASS в дополнение к двум состояниям, установленным более ранними исследованиями [21—23]. Этот повторный анализ привел к слишком малой парциальной ширине возможного $\rho'(1266)$ для e^+e^- -канала, чтобы интерпретировать его как радиальное возбуждение ρ -мезона. В связи с этим встает вопрос, является ли $\rho'(1266)$ $q\bar{q}$ -состоянием.

Отметим, что все эти исследования проведены с использованием формул Брейта — Вигнера, т.е. амплитуды записывались как суммы БВ-слагаемых, соответствующих каждому резонансу.

Очевидно, что интерференция между обсуждаемыми широкими резонансами является основной проблемой анализа и интерпретации. Для учета этой интерференции обычно вводят фазовые множители для БВ-членов, которые либо полагаются равными плюс или минус единице [21—23,24], либо рассматриваются как свободные параметры [30,31]. Выбор этих фазовых множителей достаточно произволен и, например, как отмечается в [33], «загадочно и не имеет рационального объяснения», что при описании процесса $e^+e^- \rightarrow \eta\pi^+\pi^-$ следует применять правило знаков $++$ для ρ - и ρ'_1 -состояний, тогда как для всех других процессов, вовлеченных в анализ, надо использовать для этих состояний фазовые множители $+ -$. Однако очень важно, что все такие подходы (как с фазовыми множителями, так и без них) в случае широких перекрывающихся резонансов нарушают унитарность матрицы рассеяния, которая является изначальным мотивом при использовании любых формул БВ-типа. Ниже мы приводим анализы семейств векторных ρ' - и ω' -мезонов, сохраняющие унитарность.

Все анализы, старые и новые, базируются на модели векторной доминантности, в которой e^+e^- -аннигиляция описывается прямым взаимодействием промежуточного γ -кванта с векторными мезонами с константами $V - \gamma$ связи f_V^{-1} ($V = \rho, \omega, \phi, \psi$) и дальнейшим распадом векторных мезонов в конечное состояние f . Эти процессы изображаются диаграммой на рис.5.

Приведем несколько формул, которые будут полезны для сопоставления результатов различных анализов. Полное сечение в случае только одного


 Рис.5. e^+e^- -аннигиляция в модели векторной доминантности

изолированного промежуточного V -резонанса, удаленного от порога реакции, задается выражением

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow f} = 4\pi\alpha \left(\frac{e}{f_V} \right)^2 \frac{m_V^2}{s} \frac{m_V \Gamma_V B_f^V}{(s - m_V^2)^2 + (m_V \Gamma_V)^2}, \quad (4.1)$$

где s — квадрат энергии в с.и., α — постоянная тонкой структуры, m_V — масса векторного мезона, Γ_V — его полная ширина, $B_f^V = \Gamma_f^V / \Gamma_V$ — брэнчинг распада в конечное состояние, Γ_f^V — соответствующая парциальная ширина.

Предыдущую формулу можно переписать в виде

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow f} = \frac{12\pi}{s} \frac{m_V^2 \Gamma_V^2 B_i^V B_f^V}{(s - m_V^2)^2 + (m_V \Gamma_V)^2}, \quad (4.2)$$

где $B_i^V = \Gamma_{V \rightarrow e^+e^-} / \Gamma_V$. Сечение в пике (при $[m] = \text{ГэВ}$) имеет значение:

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow f} = \frac{12\pi}{m_V^2} B_i^V B_f^V 3,89 \cdot 10^5 \text{ нб.}$$

Например, для $\sigma_{e^+e^- \rightarrow 2\pi}$ при $B_1^{\rho} = 6,5 \text{ кэВ}/150 \text{ МэВ} \approx 4,33 \cdot 10^{-5}$, $B_{2\pi}^{\rho} \approx 0,99$ получаем в ρ -мезонном пике $\sigma_{e^+e^- \rightarrow 2\pi} \approx 1100 \text{ нб}$, что с учетом поправок, связанных с ρ - ω -смешиванием, близко к экспериментальному значению.

Экспериментальные данные для e^+e^- -аннигиляции, позволяющие обсуждать [33] существование семейства векторных ρ' -мезонов, состоят из набора полных сечений $e^+e^- \rightarrow 2\pi$, $2\pi^+2\pi^-$, $\pi^+\pi^-2\pi^0$, $\omega\pi^0$ и $\eta\pi^+\pi^-$. Многоканальное условие унитарности подключает к этому набору p -волну $\pi\pi$ -рассеяния.

Другие каналы распадов ρ' -мезонов, кроме входящих в начальные и конечные состояния этих реакций, практически отсутствуют, что означает малость брэнчингов распадов ρ' -состояний в другие каналы. Таким образом, ограничение каналами e^+e^- , 2π , $2\pi^+2\pi^-$, $\pi^+\pi^-2\pi^0$, $\omega\pi^0$ и $\eta\pi^+\pi^-$ является хорошим приближением. Аналогично формулируется задача о ω' -мезонах, основные каналы распадов которых — e^+e^- , $\rho\pi$ и $\omega\pi^+\pi^-$ (состояния, включающие странные частицы, практически отсутствуют [33]). В обеих задачах (о ρ' -мезонах и ω' -мезонах) значение индекса $i = 1$ в амплитудах f_{ij} отвечает начальному состоянию e^+e^- (или промежуточному γ -кванту). Значение $i = 2$ в задаче о ρ' -мезонах отвечает состоянию $\pi^+\pi^-$, индекс $j = 2, 3, 4, 5, 6$ отвечает, соответственно, конечным состояниям $\pi^+\pi^-$, $\pi^+\pi^+\pi^-\pi^-$, $\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$, $\pi^0\omega$ и $\eta\pi^+\pi^-$. Индекс r , нумерующий резонансы, соответствует ρ (с учетом ρ - ω -смешивания) и двум или трем ρ' -мезонам. В задаче об ω' -мезонах индекс $j = 2, 3$ отвечает конечным состояниям $\rho\pi$ и $\omega\pi^+\pi^-$ и индекс r отвечает ω - ϕ «хвосту» и двум или трем ω' -резонансам. Детали вычислений сечений аннигиляции с учетом пороговых факторов можно найти в работах [17,18,20].

4.2. Анализ на основе формул БВ-типа. Метод построения унитарной многоканальной и многорезонансной S -матрицы БВ-типа для общего случая M открытых каналов и N резонансов описан в предыдущем разделе. Матрица рассеяния задается выражением $S(E) = I - iF$, где F — матрица парциальных амплитуд рассеяния:

$$f_{ij} = \sum_{r=1}^N \frac{m_r \Gamma_r g_{ri} g_{rj}}{s - m_r^2 + im_r \Gamma_r} = \sum_{r=1}^N e^{i(\varphi_{ri} + \varphi_{rj})} \frac{m_r \Gamma_r |g_{ri}| |g_{rj}|}{s - m_r^2 + im_r \Gamma_r}. \quad (4.3)$$

Для облегчения сопоставления приводимых ниже результатов с другими анализами мы используем переменную $s = E^2$, при этом векторы \mathbf{g}_r безразмерны.

Очень кратко приведем результаты для ρ' -резонансов, необходимые для понимания физической ситуации при сопоставлении с ω' -состояниями. Для выяснения ситуации с $\rho'(1250)$ -мезоном в работе [17] проведен анализ перечисленных выше экспериментальных данных с учетом трех ρ' -резонансов. В табл.1 приведены результаты для их масс и ширин, в табл.2 приведены значения брэнчингов $B_{ri} = g_{ri} g_{ri}^* / |\mathbf{g}_r|^2$. В случае, когда резонансы хорошо разнесены, векторы парциальных ширин становятся действительными, и это равенство превращается в формулу $B_{ri} = \Gamma_{ri} / \Gamma_r$, поэтому величины

$B_{ri} \Gamma_r$ можно использовать как аналоги значений обычных парциальных ширин Γ_{ri} . (Например, $\Gamma_{\rho'_1 \rightarrow e^+e^-} = 10^{-5} \cdot 350 \text{ МэВ} = 3,5 \text{ кэВ}$.) Брэнчинги распада $\rho'(1250)$ (в наших обозначениях ρ'_3)-состояния в e^-e^+ и адронные каналы сравнимы с брэнчингами более высоких состояний, что снимает наиболее сильное возражение против возможности рассматривать $\rho'(1250)$ -мезон как $q\bar{q}$ -возбуждение. Заметим, однако, что фит с тремя ρ' лишь слегка лучше, чем фит с двумя ρ' -состояниями. Уместно отметить, что процедура унитаризации вносит большую жесткость в выражения для амплитуд: брэнчинги не произвольны, эмпирический подбор фазовых множителей невозможен и т.д. Все это делает одновременное описание шести процессов достаточно сложной задачей.

Перейдем к обсуждению ω' -состояний. Анализы, проведенные во многих работах (отметим, в частности, [24,34]), дают широкие состояния ω'_1 и ω'_2 с массами, близкими двум соответствующим ρ' -состояниям, и, возможно, состояние ω'_3 , соответствующее ρ'_3 . Значения χ^2 при сохраняющем унитарность описании [18] процессов $e^-e^+ \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ и $e^-e^+ \rightarrow \omega\pi^+\pi^-$ в случаях двух и трех состояний ω' близки и равны приблизительно 1,6/d.f. Поэтому мы не можем сделать определенное заключение о существовании ρ'_3 - и ω'_3 -мезонов и только обсудим ниже возможность их соответствия $q\bar{q}$ -схеме. Для экономии места и для последующего сравнения с результатами других методов (см. ниже пп.4.3 и 4.4) мы обсуждаем анализ и приводим результаты, в основном, для случая двух ω' -состояний, детальные результаты для трех состояний приведены в работе [18].

Полезно коротко привести алгоритм метода в простом случае двух резонансов. Действительные и мнимые части комплексных векторов парциальных ширин \mathbf{g}_1 и \mathbf{g}_2 связаны соотношениями (3.31):

$$\mathbf{g}_1^y = -\alpha\mathbf{g}_2^x, \quad \mathbf{g}_2^y = \alpha\mathbf{g}_1^x.$$

Кроме того, длины векторов \mathbf{g}_1^x и \mathbf{g}_2^x и угол между ними заданы формулами (3.32):

$$V_{11}^x = (\mathbf{g}_1^x, \mathbf{g}_1^x) = \frac{2}{(1-\alpha^2)^2} \left(1 - \alpha^2 \frac{m_2\Gamma_2}{m_1\Gamma_1} \right),$$

$$V_{22}^x = (\mathbf{g}_2^x, \mathbf{g}_2^x) = \frac{2}{(1-\alpha^2)^2} \left(1 - \alpha^2 \frac{m_1\Gamma_1}{m_2\Gamma_2} \right),$$

$$V_{12}^x = (\mathbf{g}_2^x, \mathbf{g}_1^x) = \frac{2\alpha}{(1 - \alpha^2)^2} \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{\sqrt{m_1 m_2 \Gamma_1 \Gamma_2}}.$$

Таким образом, из параметров $m_1, m_2, \Gamma_1, \Gamma_2, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$, фигурирующих в формулах (4.3), остается 8 свободных действительных параметров, в качестве которых удобно выбрать значения масс m_1, m_2 , полных ширин Γ_1, Γ_2 , значение параметра α , две координаты вектора \mathbf{g}_1^x (g_{11}^x и g_{13}^x) и одну координату вектора \mathbf{g}_2^x (g_{21}^x).

Значения координат g_{12}^x, g_{22}^x и g_{23}^x определяются из системы

$$(g_{11}^x)^2 + (g_{12}^x)^2 + (g_{13}^x)^2 = V_{11}^x,$$

$$(g_{21}^x)^2 + (g_{22}^x)^2 + (g_{23}^x)^2 = V_{22}^x,$$

$$g_{11}^x g_{21}^x + g_{12}^x g_{22}^x + g_{13}^x g_{23}^x = V_{21}^x,$$

решение которой есть

$$g_{12}^x = \sqrt{V_{11}^x - (g_{11}^x)^2 - (g_{13}^x)^2},$$

$$g_{23}^x = \frac{g_{13}^x (V_{11}^x - g_{11}^x g_{21}^x) \pm g_{12}^x W}{(g_{12}^x)^2 + (g_{13}^x)^2},$$

$$g_{22}^x = \frac{V_{11}^x - g_{11}^x g_{21}^x - g_{13}^x g_{23}^x}{g_{12}^x},$$

где

$$W = \sqrt{[V_{22}^x - (g_{21}^x)^2] [(g_{12}^x)^2 + (g_{13}^x)^2] - [V_{11}^x - g_{11}^x g_{21}^x]^2}.$$

В результате фитирования экспериментальных данных, приведенных на рис.6 и 7 ($\chi^2/\text{d.f.} = 1,60$ и примерно такое же значение χ^2 в двух других методах ниже), были получены следующие значения масс и полных ширин (в ГэВ):

$$m_{\omega'_1} = 1,450, \quad \Gamma_{\omega'_1} = 0,200,$$

$$m_{\omega'_2} = 1,616, \quad \Gamma_{\omega'_2} = 0,199.$$

Векторы парциальных ширин $\mathbf{g}_{\omega'_i}$ и брэнчинги распадов приведены в табл.3.

4.3. К-матричный анализ. Унитарная S -матрица имеет в этом анализе вид

$$S(s) = \frac{I - iK(s)}{I + iK(s)} \equiv \frac{I - i \sum_{r=1}^{N=2} \frac{\gamma_r \gamma_r^T}{s - \varepsilon_r}}{I + i \sum_{r=1}^{N=2} \frac{\gamma_r \gamma_r^T}{s - \varepsilon_r}}. \quad (4.5)$$

Свободными параметрами метода в случае двух резонансов и трех открытых каналов являются действительные значения положений полюсов ε_1 и ε_2 , а также действительные трехкомпонентные векторы γ_1 и γ_2 .

Фитирование экспериментальных данных приводит к следующим значениям (ε_r и γ_r^2 в ГэВ²):

$$\varepsilon_1 = 1,364, \quad \varepsilon_2 = 1,620,$$

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0,0012 \\ 0,5664 \\ 0,4196 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0,0009 \\ 0,2920 \\ 0,4379 \end{pmatrix}.$$

Как обсуждалось выше, эти величины нельзя интерпретировать как массы и парциальные ширины резонансов. Предварительно K -матричные выражения амплитуд рассеяния следует представить в виде суммы БВ-слагаемых, то есть в виде

$$S(E) = I - i \frac{m_{\omega'_1} \Gamma_{\omega'_1} C^{(1)}}{s - m_{\omega'_1}^2 + im_{\omega'_1} \Gamma_{\omega'_1}} - i \frac{m_{\omega'_2} \Gamma_{\omega'_2} C^{(2)}}{s - m_{\omega'_2}^2 + im_{\omega'_2} \Gamma_{\omega'_2}},$$

и выразить затем массы $m_{\omega'_1}$, $m_{\omega'_2}$ и ширины $\Gamma_{\omega'_1}$, $\Gamma_{\omega'_2}$ резонансов через значения ε_1 , ε_2 и компоненты векторов γ_1 , γ_2 (см. формулы п.2.2).

Это приводит к значениям (все величины в ГэВ):

$$m_{\omega'_1} = 1,422, \quad \Gamma_{\omega'_1} = 0,407,$$

$$m_{\omega'_2} = 1,569, \quad \Gamma_{\omega'_2} = 0,125. \quad (4.6)$$

Полученные в результате факторизации коэффициентов $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ при БВ-членах векторы парциальных ширин $\mathbf{g}_{\omega'_i}$ и брэнчинги распадов приведены в табл.4.

4.4. Анализ с помощью неэрмитова гамильтониана. Поведение системы двух нестабильных перемешивающихся уровней, имеющих общие каналы распадов, определяется в этом методе гамильтонианом

$$H = H^{(0)} - \frac{i}{2} \Gamma = \begin{pmatrix} H_{11} - i\Gamma_{11}/2 & \alpha^x - i\alpha^y/2 \\ \alpha^x - i\alpha^y/2 & H_{22} - i\Gamma_{22}/2 \end{pmatrix}.$$

Амплитуды рассеяния задаются выражением:

$$f_{ij} = \sum_{r=1}^2 \sum_{g=1}^2 A_{ir} (E - H)_{rg}^{-1} A_{jg}.$$

При анализе ω' -состояний (два резонанса, три канала распада, матрица A состоит из двух трехкомпонентных столбцов — действительных векторов \mathbf{A}_1 и \mathbf{A}_2) в качестве свободных параметров выбирались значения элементов гамильтониана $H_{11}, H_{22}, \Gamma_{11}, \Gamma_{22}, \alpha^x$, а также две координаты вектора \mathbf{A}_1 (A_{11}, A_{13}) и две координаты вектора \mathbf{A}_2 (A_{21}, A_{22}). Параметр α^y и координаты \mathbf{A}_{12} и \mathbf{A}_{23} определялись из условий унитарности:

$$\begin{cases} |\mathbf{A}_1|^2 = \Gamma_{11} \\ |\mathbf{A}_2|^2 = \Gamma_{22} \\ (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = \alpha^y. \end{cases}$$

Фитирование экспериментальных данных приводит к следующему гамильтониану и векторам \mathbf{A}_r (H и A^2 в ГэВ):

$$H = \begin{pmatrix} 1,3730 - i 0,2620/2 & 0,00003 - i 0,1866/2 \\ 0,00003 - i 0,1866/2 & 1,6142 - i 0,1501/2 \end{pmatrix}.$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0,0011 \\ 0,4005 \\ 0,3185 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0,0008 \\ 0,2043 \\ 0,3292 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения μ_1 и μ_2 матрицы H , тогда их действительные части есть энергии (массы) резонансов $E_{\omega'_1}$ и $E_{\omega'_2}$, а мнимые части равны, с точностью до знака, полуширинам $\Gamma_{\omega'_1}/2$ и $\Gamma_{\omega'_2}/2$ (см. формулы в п.2.3).

Получаем (все величины в ГэВ):

$$\begin{aligned}
 m_{\omega'_1} &= 1,412, & \Gamma_{\omega'_1} &= 0,288, \\
 m_{\omega'_2} &= 1,576, & \Gamma_{\omega'_2} &= 0,124.
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

Запишем теперь амплитуды рассеяния в виде суммы БВ-слагаемых:

$$f_{ij} = \frac{C_{ij}^{(1)}}{E - E_{\omega'_1} + i\Gamma_{\omega'_1}/2} + \frac{C_{ij}^{(2)}}{E - E_{\omega'_2} + i\Gamma_{\omega'_2}/2}.
 \tag{4.8}$$

Полученные в результате факторизации коэффициентов $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ векторы парциальных ширин (в другой нормировке, чем в предыдущих методах, так как в формулах (4.8) используется энергия E) $g_{\omega'_i}$ и брэнчинги распадов приведены в табл.5.

Таблица 1. Параметры ρ' -возбуждений для системы трех ρ' -мезонов (массы и ширины приведены в ГэВ)

Мезон	Масса	Ширина
ρ'_1	1,438	0,350
ρ'_2	1,657	0,346
ρ'_3	1,238	0,347

Таблица 2. Брэнчинги распадов (в процентах) для системы трех ρ' -мезонов

Канал	Состояние	ρ'_1	ρ'_2	ρ'_3
1	e^+e^-	0,00100	0,00077	0,0080
2	$\pi^+\pi^-$	5,204	10,193	1,227
3	$\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$	47,777	7,209	60,796
4	$\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$	16,163	45,250	26,262
5	$\omega\pi^0$	18,818	13,554	6,829
6	$\eta\pi^+\pi^-$	12,037	23,793	4,885

Таблица 3. Векторы парциальных ширин $g_{\omega'_1}$ и $g_{\omega'_2}$ и брэнчинги распадов ω' -мезонов, полученные с помощью прямого метода нахождения БВ многоканальных амплитуд

Канал	Состояние	$ g_{\omega'_1 i} $	$\Phi_{\omega'_1 i}$	$B_{\omega'_1 i}(\%)$	$ g_{\omega'_2 i} $	$\Phi_{\omega'_2 i}$	$B_{\omega'_2 i}(\%)$
1	e^+e^-	0,0018	29,91°	0,0002	0,0021	- 17,94°	0,0003
2	$\rho\pi$	0,9795	15,89°	65,81	0,7057	- 33,20°	34,16
3	$\omega\pi\pi$	0,7060	37,79°	34,19	0,9797	- 13,51°	65,84

Таблица 4. Векторы парциальных ширин $g_{\omega'_1}$ и $g_{\omega'_2}$ и брэнчинги распадов ω' -мезонов, полученные с помощью K -матричного метода

Канал	Состояние	$ g_{\omega'_1 i} $	$\Phi_{\omega'_1 i}$	$B_{\omega'_1 i}(\%)$	$ g_{\omega'_2 i} $	$\Phi_{\omega'_2 i}$	$B_{\omega'_2 i}(\%)$
1	e^+e^-	0,0023	8,86°	0,0003	0,0013	- 50,51°	0,0003
2	$\rho\pi$	0,9861	4,82°	57,307	0,4679	- 65,99°	38,171
3	$\omega\pi\pi$	0,8511	14,05°	42,693	0,5955	- 37,09°	61,829

Таблица 5. Векторы парциальных ширин $g_{\omega'_1}$ и $g_{\omega'_2}$ и брэнчинги распадов ω' -мезонов, полученные с помощью неэрмитова гамильтониана

Канал	Состояние	$ g_{\omega'_1 i} $	$\Phi_{\omega'_1 i}$	$B_{\omega'_1 i}(\%)$	$ g_{\omega'_2 i} $	$\Phi_{\omega'_2 i}$	$B_{\omega'_2 i}(\%)$
1	e^+e^-	0,0014	10,87°	0,0005	0,0008	- 40,35°	0,0004
2	$\rho\pi$	0,4726	7,22°	55,789	0,2398	- 52,17°	33,417
3	$\omega\pi\pi$	0,4207	16,55°	44,210	0,3385	- 28,77°	66,583

4.5. Обсуждение и интерпретация результатов анализов ρ' - и ω' -состояний. Сравнивая результаты описания ω' -мезонов с помощью трех методов, видим, что параметры, исходно фигурирующие в двух последних методах, существенно отличаются от физических масс и ширин резонансов, а эти величины могут достаточно сильно зависеть от выбранного метода. Отметим, однако, что выводы, сформулированные ниже, справедливы для результатов всех трех анализов.

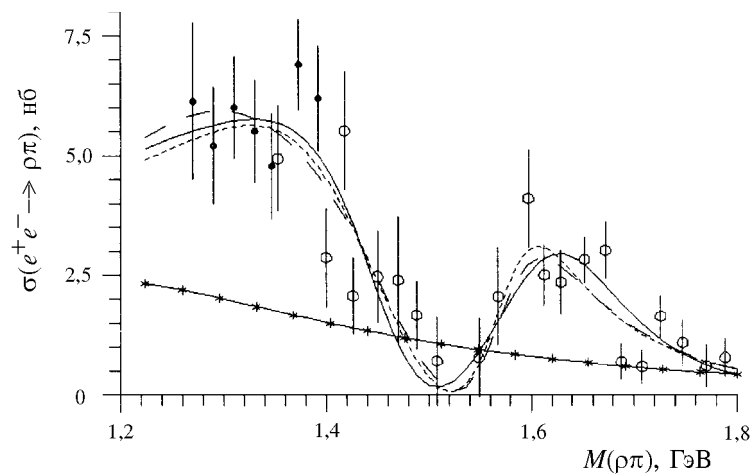


Рис.6. Сечение процесса $e^+e^- \rightarrow \rho\pi$. Сплошная линия — прямой БВ-метод; штриховая линия — K -матричный метод; точечная линия — метод неэрмитова гамильтониана. Линия, помеченная (*), — вклад ω - и ϕ -мезонов. Экспериментальные данные взяты из работ [33] — (●), [34] — (○)

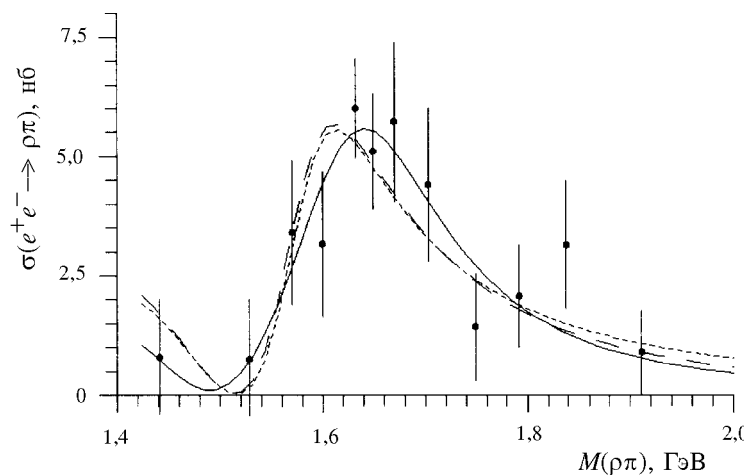


Рис.7. Сечение процесса $e^+e^- \rightarrow \omega\pi$. Сплошная линия — прямой БВ-метод; штриховая линия — K -матричный метод; точечная линия — метод неэрмитова гамильтониана. Экспериментальные данные [35] для реакции $e^+e^- \rightarrow \omega\pi^+\pi^-$ умножены на коэффициент 1,5 для учета ненаблюдаемого состояния $\omega\pi^0\pi^0$

В кварковых моделях ожидаемые соотношения для парциальных ширин лептонных распадов ρ' - и ω' -состояний следующие: $\Gamma_{\rho'_i \rightarrow e^+e^-} : \Gamma_{\omega'_i \rightarrow e^+e^-} = 9 : 1$. Соответственно для адронных распадов ожидаемые соотношения: $\Gamma_{\rho'_i \rightarrow \omega\pi} : \Gamma_{\omega'_i \rightarrow \rho\pi} = 1 : 3$. Наши результаты находятся в очень хорошем согласии с этими предсказаниями. Важно, что мы не пытались хоть сколько-нибудь «удерживать» эти соотношения, и неожиданным для нас результатом была степень их выполнения. Большое отклонение от этих соотношений в анализе [33] было важным аргументом против включения всех ρ' - и ω' -состояний в $q\bar{q}$ -схему.

Однако вопрос об интерпретации результатов не так прост. Например, массы первых радиального S - и орбитального D -возбуждений $q\bar{q}$ -системы $m_{\rho'_S} = 1,45$ ГэВ и $m_{\rho'_D} = 1,66$ ГэВ, найденные в [35], близки к нашим $m_{\rho'_1}$ и $m_{\rho'_2}$. Существенно, однако, что оба ρ'_1 и ρ'_2 , как и ρ'_3 , имеют достаточно большие значения лептонных ширин, тогда как для D -состояний с учетом релятивистских поправок оценка этих ширин составляет доли кэВ. Расхождение не так уж и велико, и с учетом модельной зависимости кварковых схем наши вычисления, выполненные с помощью унитарной S -матрицы, показывают, что нет чрезвычайно весомых аргументов против интерпретации всех трех ρ' - и трех ω' -мезонов как $q\bar{q}$ -возбуждений. Однако отмеченное выше расхождение и довольно плотное расположение этих резонансов по массе, если считать их все радиальными возбуждениями, дает и основание считать [33], что некоторые из них «лишние» среди $q\bar{q}$ -состояний. Природа таких возможных состояний не вполне ясна, поскольку схемы смешивания $q\bar{q}$ -состояний с гибридными или четырехкварковыми состояниями очень модельно зависимы [36].

Дальнейший прогресс в этой области связан, прежде всего, с улучшением экспериментальных данных и их корректным анализом, необходимостью достаточно точного нахождения лептонных и адронных ширин ρ' - и ω' -резонансов и совершенствованием кварковых моделей, включающих смешивание состояний $q\bar{q}$ с более сложными состояниями.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Один из основных выводов состоит в том, что при описании резонансов, имеющих общие каналы распадов, необходимо использовать методы, сохраняющие унитарность матрицы рассеяния. Традиционно в анализах наиболее часто применяются формулы типа Брейта — Вигнера, но простое использование суммы обычных БВ-выражений для каждого перекрывающе-

гося резонанса может приводить к очень значительному нарушению условия унитарности. Это нарушение велико, даже если резонансы кажутся достаточно далеко разнесенными. Поэтому термин «перекрывающиеся» несколько условен, и при изучении таких резонансов всегда необходимо использование строгих и несколько более изощренных, чем для одиночных резонансов, методов.

Несколько ранее мы предложили, и в настоящем обзоре достаточно подробно описали, метод построения унитарной T -инвариантной S -матрицы БВ-вида для случая нескольких перекрывающихся резонансов при многоканальном рассеянии. В качестве примера необходимости использования унитарных амплитуд рассеяния в работе [17] был проведен анализ ρ' -состояний с использованием простой суммы БВ-членов. Значения масс и ширин резонансов близки к значениям, полученным при использовании унитаризационной процедуры, качество фита примерно такое же, однако матрица рассеяния S существенно неунитарна, и отклонение некоторых элементов $(SS^\dagger)_{ij}$ от 1 или 0 достигает 100%.

Мы продемонстрировали, что параметры резонансов, получаемые при описании физической ситуации с помощью разных методов, могут существенно отличаться друг от друга. Необходимо учитывать, что величины, обозначаемые одинаково в разных методах, являются на самом деле разными в случае нескольких резонансов. Так, параметры, фигурирующие в K -матричном методе в формуле (4.5), не являются массами и ширинами резонансов. Это не должно удивлять, так как этот метод изначально применялся для анализов типа эффективного радиуса [5], а формула (4.5) была записана затем лишь потому, что в случае одного резонанса она эквивалентна БВ-выражению для амплитуды.

Таким образом, необходимо знать формулы «пересчета» параметров от одного метода к другому. Такой переход от K -матричного метода и метода неэрмитова гамильтониана к унитаризованным БВ-амплитудам в принципе возможен, хотя и очень сложен. Например, в задаче о ρ и трех ρ' -мезонах для перевода K -матричного представления амплитуды рассеяния к виду суммы БВ-членов пришлось бы решать комплексное матричное уравнение 7-го порядка. Обратный переход еще более сложен и практически невозможен.

Кроме того, уже для случая трех каналов распадов K -матричный и гамильтонов методы очень громоздки при фитировании, поскольку, в частности, для каждой экспериментальной точки и для каждого набора параметров требуют обращения комплексных матриц. Это не только вопрос трудоемкости, но он приводит к появлению локальных минимумов, что очень опасно при фитировании. Так, при описании ω' -мезонов K -матричный и гамильтонов методы дали существенно другие значения полных ширин, чем

прямой БВ-метод, и даже заранее зная значения ширин резонансов, очень трудно найти соответствующие им значения параметров K -матричного и гамильтонова методов.

Для корректной интерпретации результатов анализа в любом случае необходимо сравнение с унитарными БВ-выражениями. Поэтому прямой метод нахождения БВ-амплитуд в случае нескольких многоканальных резонансов имеет существенные преимущества, поскольку не требует никаких дополнительных сложных преобразований.

Нам представляется, что предложенный прямой метод построения S -матрицы БВ-вида для многоканальных перекрывающихся резонансов может быть полезен для многих задач в физике частиц и ядерной физике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Breit G., Wigner E.P. — Phys.Rev., 1936, v.49, p.519.
2. Wigner E.P., Eisenbud L. — Phys.Rev., 1947, v.72, p.29.
3. Feshbach H. — Ann. Phys., 1958, v.5, p.537.
4. Bjorken D. — Phys. Rev. Lett., 1960, v.4, p.473.
5. Dalitz R.H. — Strange Particles and Strong Interactions. Oxford University Press, 1962; Dalitz R.H., Tuan S. — Ann.Phys., 1960, v.3, p.307.
6. Шапиро И.С. — Перекрывающиеся уровни и гигантские резонансы. В сб.: «Проблемы современной ядерной физики». М.: Наука, 1971, с.273—285.
7. Любошиц В.Л. — Сообщение ОИЯИ, P2-5328, Дубна, 1970.
8. Кобзарев И.Ю., Николаев Н.Н., Окунь Л.Б. — ЯФ, 1969, т.10, с.864; Кобзарев И.Ю. — Материалы VII Зимней школы ЛИЯФ, Л., 1972, ч.2, с.298—312.
9. Bell J.S., Steinberger J. — Proc. of the Intern. Conf. on Elementary Particles. Oxford, 1965.
10. Любошиц В.Л. — Материалы XIX Зимней школы ЛИЯФ, Л., 1984, ч.1, с.33—97.
11. Simonius M. — Nucl. Phys. A, 1974, v.218, p.53.
12. McVoy K.W. — Ann Phys., 1969, v.54, p.552.
13. Durand L. — Phys. Rev. D, 1976, v.14, p.14.
14. Henner V.K., Wolfson D.N. — Nuovo Cimento A, 1994, v.107, p.2511.
15. Хеннер В.К., Белозерова Т.С. — Сообщение ОИЯИ, P4-95-115, Дубна, 1995.
16. Хеннер В.К., Белозерова Т.С. — ЯФ, 1997, т.60, вып.12, с.2180.
17. Хеннер В.К., Белозерова Т.С. — Сообщение ОИЯИ, P4-95-116, Дубна, 1995.
18. Хеннер В.К., Белозерова Т.С. — Сообщение ОИЯИ, P4-95-117, Дубна, 1995.
19. Хеннер В.К., Белозерова Т.С. — ЯФ, 1996, т.59, с.1915.
20. Хеннер В.К., Белозерова Т.С. — ЯФ, 1998, т.61, вып.1, с.128.
21. Donnachie A., Mirzae H. — Zeit. Phys. C, 1987, v.33, p.407.
22. Donnachie A., Clegg A.B. — Zeit. Phys. C, 1987, v.34, p.257.
23. Donnachie A., Clegg A.B. — Zeit. Phys. C, 1989, v.42, p.663.
24. Говорков А.Б. — ЯФ, 1988, т.48, с.237; ЯФ, 1991, т.55, с.1035.
25. Phys. Rev. D, 1994, v.50, part 1.
26. Conversi M. et al. — Phys. Lett. B, 1974, v.52, p.493.

27. **Bartalucci S. et al.** — Nuovo Cimento A, 1979, v.49, p.207.
28. **Хеннер В.К.** — ЯФ, 1983, т.37, с.1134.
29. **Budnev N.N., Budnev V.M., Serebryakov V.V.** — Phys. Lett. B, 1977, v.70, p.365.
30. **Aston D. et al.** — Preprint SLAC-PUB 5392, 1990; Preprint SLAC-PUB 5697, 1991; Preprint SLAC-PUB 5721, 1991.
31. **Dunwoodie W., Rensing P., Liang-Ping Chen.** — Preprint SLAC-PUB 5675, 1991.
32. **Donnachie A., Clegg A.B.** — Phys. Lett. B, 1991, v.269, p.450.
33. **Clegg A.B., Donnachie A.** — Preprint Univ. of Manchester, M/C-TH 93/21, 1993; Zeit. Phys. C, 1994, v.62, p.455.
34. **Donnachie A., Clegg A.B.** — Preprint CERN-TH 5210, 1988.
35. **Godfrey S., Isgur N.** — Phys. Rev. D, 1985, v.32, p.189.
36. **Donnachie A., Kalashnikova Yu.S.** — Preprint Univ. of Manchester, M/C-TH 93/02, 1993.
37. **Aulchenko V.M. et al.** — Preprint INP-86-106, Novosibirsk, 1986.
38. **Baldini-Ferrolì R.** — Proc. Had. Phys. at Intermediate Energy. Elsevier, 1987.
39. **Cordier A. et al.** — Phys. Lett.B, 1981, v.106, p.155.