

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ  
В (2+1)-МЕРНЫХ ТЕОРИЯХ  
С ЧЕТЫРЕХФЕРМИОННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

**А.С.Вишивцев**, **Б.В.Магницкий**

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики, Москва

*В.Ч.Жуковский*

Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова, Москва

E-mail: zhukovsk@th180.phys.msu.su

*К.Г.Клименко*

Институт физики высоких энергий, Протвино, Московская обл.

E-mail: kklim@mx.ihep.su

ВВЕДЕНИЕ	1259
КРИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ГН ПРИ $T, \mu, H \neq 0$	1263
Случай $T, \mu \neq 0$ .	1264
Случай $H \neq 0$ . Эффект катализации.	1268
Случай $H, T \neq 0$ .	1271
Случай $H, \mu \neq 0$ .	1274
Обсуждение результатов.	1278
ГЛЮОННЫЙ КОНДЕНСАТ И ТРЕХМЕРНАЯ $(\bar{\psi}\psi)^2$ -ТЕОРИЯ ПОЛЯ	1279
Эффективный потенциал. Структура внешних полей.	1279
Внешнее хромомагнитное поле.	1282
Внешнее хромозлектрическое поле.	1284
Случай $H, T \neq 0$ .	1286
Случай $H, \mu \neq 0$ .	1288
Обсуждение результатов.	1290
ДИНАМИЧЕСКАЯ ГЕНЕРАЦИЯ ЧЛЕНА ЧЕРНА–САЙМОНСА В ОБОБЩЕННЫХ ЧЕТЫРЕХФЕРМИОННЫХ МОДЕЛЯХ	1292
Обобщение модели Гросса – Невье.	1293
Фазовая структура модели.	1296

Спектр масс модели.	1298
Некоторые частные случаи.	1300
Динамическая генерация члена ЧС.	1303
Структура вакуума в $(\bar{\psi}\lambda^a\psi)^2$ -теории.	1304
Динамическая генерация члена ЧС.	1307
Обсуждение результатов.	1309
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	1310
ПРИЛОЖЕНИЯ	1311
А. Алгебра $\gamma$ -матриц в трехмерии.	1311
В. Оценки на величину $F(0)$ из п.1.3.	1312
С. Свойства функций $\omega(\sigma)$ и $\varphi(\sigma)$ из п.2.4.	1313
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1315

# ДИНАМИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ В (2+1)-МЕРНЫХ ТЕОРИЯХ С ЧЕТЫРЕХФЕРМИОННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

*А.С.Вишивцев*, *Б.В.Магницкий*

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики, Москва

*В.Ч.Жуковский*

Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова, Москва

E-mail: zhukovsk@th180.phys.msu.su

*К.Г.Клименко*

Институт физики высоких энергий, Протвино, Московская обл.

E-mail: kklim@mx.ihep.su

В обзоре рассмотрены критические свойства простейших (2+1)-мерных моделей теории поля с четырехфермионным взаимодействием при наличии температуры, химического потенциала и внешних калибровочных полей. Показано, что внешнее магнитное поле является катализатором спонтанного нарушения симметрии. Хромомагнитный глюонный конденсат в КХД<sub>3</sub> также обладает способностью спонтанным образом нарушать киральную симметрию. В работе детально изучена термодинамика этих эффектов. Получены условия, при которых в трехмерных моделях типа Гросса – Неве возможны сверхпроводящие фазовые переходы, а также динамическая генерация члена Черна – Саймонса.

The critical behaviour of some of the (2+1) - dimensional models with four fermionic interactions at nonzero temperature, chemical potential and external gauge fields is investigated in this review. It is shown that external magnetic field is a good catalyst for the spontaneous breaking of symmetry. Chromomagnetic gluonic condensate in QCD also promotes the spontaneous breaking of chiral symmetry. The catalysis effect has been studied in detail in the presence of temperature and chemical potential. The existence of superconductive phase transitions in some three dimensional Gross – Neveu type models is proved. Sufficient conditions for the dynamical generation of the Chern – Simons term are derived.

## ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что в основе многих явлений природы лежат фазовые превращения. Поэтому задача по исследованию вакуума еще долго будет определяющей при выборе важнейших направлений развития современной физики, включая физику элементарных частиц (ФЭЧ). Следует отметить,

что существование ФЭЧ в настоящее время немислимо без феномена спонтанного нарушения симметрии, при котором также происходит перестройка основного состояния.

Прогресс в современной ФЭЧ в значительной мере основан на осознании принципов симметрии и, пожалуй, в еще большей степени на механизмах нарушения симметрии в моделях элементарных частиц. Одним из важных этапов построения калибровочной теории поля явилось понимание роли механизма Хиггса – спонтанного нарушения симметрии, сопровождаемого возникновением массы у калибровочных бозонов. Этот эффект положен в основу единой теории электрослабых взаимодействий, моделей Великого объединения и т.д. Вместе с тем одного этого механизма нарушения симметрии, который влечет за собой необходимость введения в теорию фундаментальных скалярных полей, явно недостаточно для построения последовательной теории. Существует еще один, динамический, способ нарушить симметрию спонтанным образом, впервые рассмотренный в работах [1]. В этом случае в качестве фундаментальных выступают спинорные поля, связанные состояния которых образуют бозоны. Динамический способ нарушения симметрии реализуется, как правило, в моделях с четырехфермионным взаимодействием, одной из особенностей которых является неперенормируемость в (3+1)-мерном пространстве-времени. (Справедливости ради нужно отметить, что для этих моделей существуют попытки провести осмысленные вычисления динамических величин вне рамок обычной теории возмущений, несмотря на их неперенормируемость [2].) В силу этого их удобно привлекать для построения эффективных моделей адронов [3]. Кроме того, динамическое нарушение киральной инвариантности с помощью четырехфермионных лагранжианов лежит в основе описания спиновых эффектов в физике сильных взаимодействий [4] и т.д.

Особо выделим цикл работ (см. обзор [5]) по изучению калибровочных теорий поля при наличии внешних сверхкритических кулоноподобных сил. Такая ситуация может возникнуть при столкновении тяжелых релятивистских ионов. Оказывается, что в этом случае также происходит динамическое нарушение симметрии, и фермионы приобретают массу.

С точки зрения построения последовательной КТП более интересными по сравнению с четырехмерными являются (1+1) - и (2+1)-мерные варианты четырехфермионных моделей. Лагранжиан одной из них, называемой моделью Гросса – Невье (ГН), имеет вид [6]:

$$L_{\psi} = \sum_{k=1}^N \bar{\psi}_k i \hat{\partial} \psi_k + \frac{g_0}{2N} \left( \sum_{k=1}^N \bar{\psi}_k \psi_k \right)^2. \quad (1)$$

В двумерии модель (1) перенормируема, очевидно, по теории возмущений, однако перенормируемость ее в (2+1)-мерном (трехмерном) пространстве-

времени была доказана сравнительно недавно [7] в рамках непертурбативного метода  $1/N$ -разложения. Двумерную модель ГН в силу ее простоты можно использовать для иллюстрации асимптотической свободы, спонтанного нарушения киральной инвариантности и других фундаментальных свойств квантовой хромодинамики. Однако интерес к этой модели обусловлен не только методическими, но и практическими соображениями, поскольку ее можно использовать для описания квазиодномерных проводящих соединений, получивших название пайерлсовских диэлектриков [8]. Свойства вакуума (1+1)-мерной модели ГН уже исследовались при ненулевых значениях температуры и химического потенциала [9–11], во внешних электрическом и гравитационном полях [12]. Недавно в целом ряде работ [13] фазовые превращения в этой теории поля были рассмотрены в двумерном пространстве-времени с топологией  $R^1 \times S^1$ .

Трехмерная модель ГН стала объектом изучения сравнительно недавно в связи с открытием явления высокотемпературной сверхпроводимости (ВТСП) (см. обзор [14]), а также необходимостью объяснения квантового эффекта Холла [15]. Эффект Холла наблюдается в плоских образцах, помещенных в сильное магнитное поле, а ВТСП происходит в материалах типа  $\text{La}_2\text{CuO}_4$ , в которых электроны проводимости сконцентрированы в плоскостях, образованных атомами Си и О. Вот почему в последнее десятилетие многие физики-теоретики интенсивно исследуют (2+1)-мерные теории поля, тем самым используя методы квантовой теории поля в физике конденсированных состояний. К наиболее модным сейчас моделям можно отнести трехмерную квантовую электродинамику, нелинейную  $\sigma$ -модель и особенно (2+1)-мерную модель ГН (1).

Дело в том, что в трехмерных теориях с четырехфермионным взаимодействием довольно надежно установлены факты спонтанного нарушения симметрии [7], а также динамической генерации масс полей, поэтому на основе моделей этого типа уже делались попытки объяснить явление ВТСП [16]. Кроме того, их можно использовать для описания свойств планарных антиферромагнетиков, т.к. некоторые решеточные твердотельные модели этих веществ в непрерывном пределе имеют лагранжианы вида (1) [17]. Как и любые другие трехмерные теории, модели типа ГН могут служить хорошей основой для объяснения физических процессов, происходящих в тонких пленках. Наконец, теория поля (1) является отличной лабораторией, позволяющей предсказывать новые эффекты четырехмерного мира.

Предлагаемый обзор посвящен систематическому изложению свойств вакуума некоторых (2+1)-мерных теорий с четырехфермионным взаимодействием в зависимости от  $T, \mu$  и внешних калибровочных полей, а также связанным с этим новым динамическим эффектом.

Ключевым моментом, объединяющим рассматриваемые здесь модели, является их общее свойство, которое можно продемонстрировать на следую-

щем простом примере. Рассмотрим систему свободных фермионов в  $R^{2+1}$  пространстве-времени, взаимодействующих с внешним однородным магнитным полем. Ее лагранжиан имеет вид

$$L = \bar{\psi}(i\hat{\partial} - e\hat{A} - m)\psi.$$

В безмассовом пределе для конденсата  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  можно получить

$$\lim_{m \rightarrow 0} \langle \bar{\psi}\psi \rangle = -eH/\pi.$$

(Этот же результат получается из метода эффективного потенциала и связи его абсолютного минимума с квазисредними Боголюбова [18], т.к. введенный в рассматриваемый лагранжиан массовый член фермионов явно нарушает киральную симметрию, а конденсат является квазисредней, которая в нашем случае не обращается в нуль при  $m \rightarrow 0$ .) Отсюда видно, что в присутствии внешнего однородного магнитного поля основное состояние квантово-полевой системы безмассовых фермионов в  $R^{2+1}$  вырождено, а киральная симметрия спонтанно нарушена. (Причины этого явления мы обсудим ниже.)

В разд.1 непертурбативным методом  $1/N$ -разложения детально исследуются критические свойства трехмерной теории Гросса – Невье при наличии внешнего магнитного поля, температуры  $T$  и химического потенциала  $\mu$ . Здесь описано неизвестное ранее явление динамического нарушения киральной и симметрии по ароматам сколь угодно малым внешним магнитным полем  $H$ . Построены фазовые портреты модели в переменных  $(T, \mu)$ ,  $(H, T)$  и  $(H, \mu)$ , а также найдены критические значения параметров, при которых происходит восстановление исходной симметрии. Кроме того, показано, что в плоскости  $(T, \mu)$  существует трикритическая точка, где кривая фазовых переходов первого рода превращается в критическую кривую второго рода.

В разд.2 доказано, что модель ГН с  $SU(3)$  фермионными полями точно решаема в главном порядке  $1/N$ -разложения во внешнем хромомагнитном поле. Данную модель можно рассматривать как трехмерный аналог теории, эффективно описывающей низкоэнергетическую область квантовой хромодинамики. Внешнее неабелево поле здесь выступает в качестве поля глюонного конденсата, на фоне которого идут процессы с участием кварков. Мы показали, что внешние постоянные хромомагнитные как абелевоподобные, так и неабелевы поля служат катализатором спонтанного нарушения киральной инвариантности. (Заметим, что выбор полей, моделирующих основное состояние КХД, не исчерпывается рассмотренными нами конфигурациями, что продемонстрировано в цикле работ [19,20], в которых детально обсуждаются (анти-)самодуальные поля, а также другие возможные конфигурации полей [21], являющихся решениями уравнений Янга – Миллса.) Следовательно, в КХД ненулевой хромомагнитный глюонный конденсат является одной из

причин нарушения киральной симметрии. Найдено также критическое значение температуры, при которой происходит восстановление киральной симметрии.

В разд.3 детально исследуются две трехмерные модели с более сложной структурой взаимодействия фермионов. Показано, что в них возможны как киральные фазовые переходы, так и переходы сверхпроводящего типа со спонтанным нарушением  $U(1)$ -группы. Кроме того, в этом разделе уделяется особое внимание возможности динамической генерации члена Черна – Саймонса (топологической массы калибровочного поля), благодаря которому у частиц появляются дробные спин и статистика. На примере этих моделей показано, что нарушение  $P$ -четности есть только необходимое, но не достаточное условие спонтанной генерации члена Черна – Саймонса. Обнаружен также эффект, когда параметром порядка теории (т.е. величиной, находящейся во взаимно однозначном соответствии со структурой вакуума) является топологическая масса калибровочного поля.

### 1. КРИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ГН ПРИ $T, \mu, H \neq 0$

В предлагаемом разделе будет исследоваться фазовая структура трехмерной модели Гросса – Невье при  $\mu, T, H \neq 0$ . Лагранжиан модели имеет вид (1), причем  $\partial = \partial_\mu \Gamma^\mu$ , где  $\Gamma^\mu - 4 \times 4$  матрицы, алгебра которых описана в приложении А, а каждое из  $N$  фермионных полей есть 4-компонентный спинор Дирака:

$$\psi_k = \begin{pmatrix} \psi_{1k} \\ \psi_{2k} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь  $k = 1, \dots, N$ , а  $\psi_{ik}$  ( $i = 1, 2$ ) – обычные двухкомпонентные спиноры Дирака. В этом случае лагранжиан (1) инвариантен относительно двух дискретных преобразований. Первое из них есть

$$\psi_k \rightarrow \Gamma^3 \psi_k; \quad k = 1, \dots, N \quad (3)$$

(где матрица  $\Gamma^3$  дана в приложении (А.8)) и переставляет местами поколения спиноров  $\psi_{1k}$  и  $\psi_{2k}$  из (2). (Симметрию относительно (3) называют еще ароматосимметрией.) Второе преобразование имеет вид

$$\psi_k \rightarrow \Gamma^5 \psi_k; \quad k = 1, \dots, N, \quad (4)$$

а  $\Gamma^5$  дана в формуле (А.9). Симметрию относительно (4) будем называть дискретной киральной симметрией, т.к.  $\Gamma^5 \sim \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^2 \Gamma^3$  и по виду формально совпадает с генератором киральных преобразований для спинорных полей в четырехмерном пространстве-времени.

Лагранжиан (1) инвариантен также относительно непрерывных преобразований вида

$$\psi_k \rightarrow \exp(i\alpha)\psi_k; \quad k = 1, \dots, N. \quad (5)$$

Фазовые свойства этой модели мы будем рассматривать в рамках лидирующего порядка  $1/N$ -разложения.

**1.1. Случай  $T, \mu \neq 0$ .** При нулевых значениях  $T, \mu$  лагранжиан (1) эквивалентен на уравнениях движения для поля  $\sigma$  следующему вспомогательному лагранжиану:

$$L_\sigma = \sum_{k=1}^N \left[ \bar{\psi}_k i \hat{\partial} \psi_k + \sigma \bar{\psi}_k \psi_k \right] - \frac{N\sigma^2}{2g_0}. \quad (6)$$

В терминах этого лагранжиана дискретные симметрии (3)–(4) преобразуются к виду

$$\psi_k \rightarrow \Gamma \psi_k, \quad \sigma \rightarrow -\sigma; \quad k = 1, \dots, N, \quad (7)$$

где  $\Gamma$  – одна из матриц  $\Gamma^3$  или  $\Gamma^5$ . Нетрудно показать, что в главном порядке  $1/N$ -разложения эффективный потенциал в эквивалентной вспомогательной модели (6) имеет вид [7, 22]:

$$\frac{1}{N} V_0(\sigma) = \frac{\sigma^2}{2g_0} - 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln(p^2 + \sigma^2). \quad (8)$$

Здесь интегрирование проводится по трехмерному евклидову пространству. Выражение (8) содержит ультрафиолетовые (УФ) расходимости, которые устраняются в результате проведения перенормировочной процедуры. Для этого предположим, что в (8)  $|p| < \Lambda$ , тогда нетрудно сосчитать

$$\frac{1}{N} V_0(\sigma) = \frac{\sigma^2}{2} \left( \frac{1}{g_0} - \frac{2\Lambda}{\pi^2} \right) + \frac{|\sigma|^3}{3\pi}. \quad (9)$$

Отсюда с помощью нормировочного условия

$$\left. \frac{d^2 V_{\text{eff}}}{d\sigma^2} \right|_{\sigma = m} = \frac{N}{g(m)}$$

можно показать, что

$$\frac{1}{g_0} - \frac{2\Lambda}{\pi^2} = \frac{1}{g(m)} - \frac{2m}{\pi} \equiv \frac{1}{g} \quad (10)$$

( $m$  – точка нормировки,  $g(m)$  – перенормированная константа связи), где введен новый параметр  $g$ , который не зависит ни от точки нормировки  $m$  (т.к.  $g_0$  не зависит от  $m$ ), ни от параметра УФ-обрезания  $\Lambda$  (т.к.  $g(m)$  не



зависит от  $\Lambda$ ). Подставляя (10) в (9), получаем конечное ренорминвариантное выражение для  $V_0(\sigma)$ :

$$\frac{1}{N}V_0(\sigma) = \frac{\sigma^2}{2g} + \frac{|\sigma|^3}{3\pi}. \quad (11)$$

Нетрудно видеть, что при  $g > 0$  абсолютный минимум функции (11) находится в нуле, поэтому дискретные симметрии (3)–(4) модели не нарушены. Если  $g < 0$ , то точка глобального минимума потенциала есть

$$\sigma_0 \equiv \langle \sigma \rangle = -\pi/g \equiv M, \quad (12)$$

в этом случае дискретные симметрии модели спонтанно нарушены, а фермионы динамически приобретают массу, равную  $M$  (12).

Предположим теперь, что наша система, описываемая лагранжианом (1) (или, что то же самое, лагранжианом (6)), помещена в термостат. В этом случае необходимо воспользоваться методами квантовой теории поля при конечной температуре, развитыми в работах [23]. Свойства системы в состоянии термодинамического равновесия определяются термодинамическим потенциалом  $\Omega(T, \mu)$ :

$$\beta V \Omega(T, \mu) = -\ln \text{Tr} \exp^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})}, \quad (13)$$

где  $\beta = 1/T$ ,  $V$  – двумерный объем системы,  $\hat{H}$  – ее гамильтониан,  $\hat{N}$  – генератор группы преобразований (5):

$$\hat{N} \sim \int d^2x \bar{\psi}(\vec{x}, t) \Gamma^0 \psi(\vec{x}, t),$$

$\Omega(T, \mu)$  – значение эффективного потенциала  $V_{T\mu}(\sigma)$  в точке глобального минимума. Для нахождения  $V_{T\mu}(\sigma)$  достаточно меру интегрирования по энергетической евклидовой переменной в (8) преобразовать по правилу [24]:

$$\int \frac{dp_0}{2\pi} f(p_0) \rightarrow T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(p_{0n}); \quad p_{0n} = (2n+1)\pi T - i\mu. \quad (14)$$

Теперь имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{N}V_{T\mu}(\sigma) = \frac{\sigma^2}{2g_0} - 2T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \ln [p_1^2 + p_2^2 + \sigma^2 + \pi^2 T^2 (2n+1)^2 - \\ - \mu^2 - 2i\mu\pi T(2n+1)]. \end{aligned} \quad (15)$$

Просуммировав в этом выражении по  $n$ , получаем

$$V_{T\mu}(\sigma) = V_0(\sigma) - \frac{NT}{2\pi} \int_0^{\infty} dx \ln [(1 + \exp[-\beta\sqrt{x + \sigma^2} - \beta\mu])(1 +$$

$$+ \exp [-\beta\sqrt{x + \sigma^2 + \beta\mu}] ], \quad (16)$$

где  $V_0(\sigma)$  – эффективный потенциал при нулевых значениях  $T, \mu$  (8) или (11).

Не теряя общности рассмотрения, мы будем далее исследовать эту функцию только при положительных значениях  $\sigma$ . Уравнение стационарности для (16) выглядит так:

$$\partial V_{T\mu}(\sigma)/\partial\sigma = N\sigma f_{T\mu}(\sigma) = 0, \quad (17)$$

где

$$f_{T\mu}(\sigma) = \frac{1}{g} + \frac{\sigma}{\pi} + \frac{T}{\pi} \ln [(1 + e^{-\beta\sigma - \beta\mu})(1 + e^{-\beta\sigma + \beta\mu})]. \quad (18)$$

Пусть  $T \neq 0$ . Функция  $f_{T\mu}(\sigma)$  монотонно возрастает на интервале  $(0, \infty)$ , причем  $f_{T\mu}(\infty) = \infty$ . Кроме того,

$$f_{T\mu}(0) = \frac{1}{g} + \frac{T}{\pi} \ln [(1 + e^{-\beta\mu})(1 + e^{\beta\mu})]. \quad (19)$$

Из (19) ясно, что при  $g > 0$   $f_{T\mu}(0) > 0$ , поэтому и  $f_{T\mu}(\sigma) > 0$ . В этом случае единственным решением уравнения стационарности (17) является точка  $\sigma = 0$ , которая есть статистическое среднее поля  $\sigma$ . Эта точка инвариантна относительно дискретных преобразований (7), поэтому и вакуум модели (здесь и далее под вакуумом при  $T, \mu \neq 0$  мы подразумеваем состояние термодинамического равновесия системы) также симметричен относительно этих преобразований при любых значениях  $\mu, T$ .

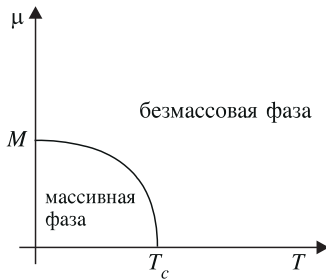


Рис. 1. Фазовый портрет модели Гросса – Невье при  $g < 0$  в переменных  $\mu, T$

Пусть теперь  $g < 0$  и, кроме того,  $T$  и  $\mu$  принимают такие значения, что  $f_{T\mu}(0) < 0$ . В этом случае из-за того, что  $f_{T\mu}(\sigma)$  монотонно возрастающая функция, обязательно существует единственная ненулевая точка  $\sigma_0$ , зависящая от  $T, \mu$ , такая, что  $f_{T\mu}(\sigma_0) = 0$ . Кроме того,  $f_{T\mu}(\sigma) \leq 0$  при  $\sigma \leq \sigma_0$ . Поэтому из (17) следует, что первая производная по  $\sigma$  функции  $V_{T\mu}(\sigma)$  отрицательна на интервале  $(0, \sigma_0)$ , т.е.  $V_{T\mu}(\sigma)$  убывает на этом интервале и, значит,  $V_{T\mu}(0) > V_{T\mu}(\sigma_0)$ . Таким образом, мы показали, что при  $g < 0$  и  $f_{T\mu}(0) < 0$  точка  $\sigma_0 \neq 0$  является глобальным минимумом потенциала (16), а симметрия (7) модели спонтанно нарушена. Легко видеть, что  $\sigma_0 \rightarrow 0$  при

$f_{T\mu}(0) \rightarrow 0$ . Очевидно, что при  $g < 0$  и  $f_{T\mu}(0) > 0$  уравнение стационарности (17) будет иметь только один корень  $\sigma = 0$ . Это означает, что при таких значениях  $T, \mu$ , когда  $f_{T\mu}(0)$  становится положительной величиной, симметрия модели относительно (7) восстанавливается. Заметим, что систематическое исследование фазовых переходов в физике конденсированного

состояния, а также в физике элементарных частиц и космологии было проведено в работах [25].

Результаты всего сказанного можно изобразить в виде фазового портрета модели в плоскости переменных  $T, \mu$ . На рис.1 изображена критическая кривая, которая задается уравнением  $f_{T\mu}(0) = 0$ . Она отделяет множество точек  $(T, \mu)$ , соответствующих фазе с массивными фермионами и спонтанным нарушением дискретных симметрий, от множества, которому соответствует безмассовая симметричная фаза теории. На критической кривой температура и химический потенциал связаны между собой соотношением

$$\mu(T) = T \ln K(T), \quad (20)$$

где

$$K(T) = -1 + \frac{1}{2} \exp(\beta M) + \sqrt{\left[-1 + \frac{1}{2} \exp(\beta M)\right]^2 - 1},$$

а  $M$  – масса фермионов при  $T, \mu = 0$ . Функция (20) обращается в нуль в точке  $T_c = M/(2 \ln 2)$ . Кроме того,  $\mu(0) = M$ ,  $\mu'(T_c) = -\infty$ ,  $\mu'(0) = 0$ . Отметим, что при пересечении критической кривой в теории происходит фазовый переход второго рода, т.к. параметр порядка – точка глобального минимума потенциала – на этой кривой является непрерывной функцией внешних параметров  $T, \mu$ .

До сих пор мы предполагали, что  $T \neq 0$ . При  $T = 0$  картина качественно иная. Здесь эффективный потенциал можно получить из (16) при  $T \rightarrow 0$ :

$$V_\mu(\sigma) = V_0(\sigma) - \frac{N}{6\pi} \Theta(\mu - \sigma)(\mu - \sigma)^2(\mu + 2\sigma), \quad (21)$$

где  $\Theta(x)$  – ступенчатая функция Хэвисайда, а уравнение стационарности имеет вид

$$\sigma \left[ \frac{1}{g} + \frac{\sigma}{\pi} + \frac{1}{\pi} \Theta(\mu - \sigma)(\mu - \sigma) \right] = 0.$$

Исследование потенциала (21) показывает, что при  $g > 0$  ни при каких значениях химического потенциала симметрии (7) не нарушаются. Однако если  $g < 0$ , то существует критическое значение химического потенциала  $\mu_c = M$ , ниже которого точкой глобального минимума функции  $V_\mu(\sigma)$  является  $\sigma_0 = M$ , а при  $\mu > \mu_c$  абсолютный минимум находится в нуле. Поскольку в точке  $\mu_c$  параметр порядка скачком меняет свое значение, то здесь мы имеем фазовый переход первого рода. Соответственно на фазовой диаграмме рис.1 точка  $(0, M)$  является трикритической точкой [26], поскольку в ней кривая фазовых переходов меняет свой характер с линии фазовых переходов первого рода на кривую фазовых переходов второго рода и наоборот.

**1.2. Случай  $H \neq 0$ . Эффект катализации.** Исследуем теперь критические свойства трехмерной модели ГН во внешнем постоянном магнитном поле  $H$  при  $T, \mu = 0$ . Лагранжиан модели в терминах вспомогательного скалярного поля  $\sigma(x)$  в этом случае имеет вид

$$L_\sigma = \sum_{k=1}^N \left[ \bar{\psi}_k (i\hat{\partial} - e\hat{A})\psi_k + \sigma \bar{\psi}_k \psi_k \right] - \frac{N\sigma^2}{2g_0}, \quad (22)$$

где  $\hat{A} \equiv A_\mu \Gamma^\mu$ ,  $e$  – заряд ферми-частиц, а векторный потенциал, соответствующий постоянному внешнему магнитному полю  $H$ , имеет вид  $A_{0,1} = 0$ ,  $A_2 = x_1 H$ . Напишем производящий функционал для функций Грина скалярного поля  $\sigma$ :

$$\exp \{iW(J)\} = \int D\bar{\psi} D\psi D\sigma \exp \left\{ i \int d^3x [L_\sigma + J(x)\sigma(x)] \right\}.$$

Проинтегрировав здесь по спинорным полям, получаем

$$\exp \{iW(J)\} = \int D\sigma \exp \left\{ i \int d^3x [L_{\text{eff}}(\sigma) + J(x)\sigma(x)] \right\},$$

где

$$\int d^3x L_{\text{eff}}(\sigma) = \int d^3x (-N\sigma^2/(2g_0)) - iN \text{Tr} \ln \Delta. \quad (23)$$

В этом выражении  $\Delta = i\hat{\partial} - e\hat{A} + \sigma$ . Предположим теперь, что поле  $\sigma$  не зависит от точек пространства-времени. Тогда в главном порядке  $1/N$ -разложения эффективный потенциал модели во внешнем магнитном поле имеет вид

$$V_{\text{eff}} \equiv V_H(\sigma) = -L_{\text{eff}}(\sigma),$$

то есть

$$V_H(\sigma) = \frac{N\sigma^2}{2g_0} + \frac{iN}{v} \text{Tr} \ln \Delta, \quad (24)$$

где  $v = \int d^3x$ . В работе [27] показано, что функция (24) симметрична относительно преобразования  $\sigma \rightarrow -\sigma$ , поэтому достаточно рассмотреть его свойства при  $\sigma \geq 0$ .

Обратимся сначала к причинной функции Грина оператора  $\Delta$ , которую можно представить следующим образом [29]:

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha\beta}^{-1}(x, t; x', t') = & -i\Theta(t - t') \sum_{\{n\}} \psi_{\{n\}\alpha}^{(+)}(x, t) \bar{\psi}_{\{n\}\beta}^{(+)}(x', t') + \\ & + i\Theta(t' - t) \sum_{\{n\}} \psi_{\{n\}\alpha}^{(-)}(x, t) \bar{\psi}_{\{n\}\beta}^{(-)}(x', t'). \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь  $\{n\} = (i, n, k)$ , где  $i = 1, 2$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $k$  – вещественное число:  $-\infty < k < \infty$ . Кроме того,  $\psi_{\{n\}}^{(\pm)}$  – это положительно- и отрицательно-частотные ортонормированные решения уравнения Дирака  $\Delta\psi = 0$ , которые имеют вид ( $T$  – символ транспонирования):

$$\begin{aligned} \psi_{1nk}^{(\pm)T}(x, t) &= \\ &= \exp(\mp i\varepsilon_n t + ikx_2) \left( \sqrt{\frac{\varepsilon_n \mp \sigma}{4\pi\varepsilon_n}} h_{n,k}(x_1), \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_n \pm \sigma}{4\pi\varepsilon_n}} h_{n-1,k}(x_1), 0, 0 \right), \\ \psi_{2nk}^{(\pm)T}(x, t) &= \\ &= \exp(\mp i\varepsilon_n t + ikx_2) \left( 0, 0, \sqrt{\frac{\varepsilon_n \pm \sigma}{4\pi\varepsilon_n}} h_{n,k}(x_1), \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_n \mp \sigma}{4\pi\varepsilon_n}} h_{n-1,k}(x_1) \right), \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$h_{n,k}(x_1) = \frac{(eH)^{1/4}}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{1/2}} \exp(-\xi^2/2) H_n(\xi), \quad (27)$$

$H_n(\xi)$  – полиномы Эрмита,  $\varepsilon_n = \sqrt{\sigma^2 + 2eHn}$ ,  $\xi = \sqrt{eH}(x_1 - k/(eH))$ . Функции (27) удовлетворяют условиям

$$\int dx_1 h_{n,k}^2(x_1) = \frac{1}{eH} \int dk h_{n,k}^2(x_1) = 1. \quad (28)$$

Кроме того, в формулах (26) предполагается, что  $h_{-1,k}(x_1) \equiv 0$ .

Теперь мы имеем материал, необходимый для вычисления величины

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} V_H(\sigma) = \frac{N\sigma}{g_0} + \frac{iN}{v} \text{Tr}(\Delta^{-1}). \quad (29)$$

Для этого сначала нужно избавиться от  $\Theta$ -функций в (25) по правилу

$$\mp \Theta(\pm t) \exp(\mp i\varepsilon_n t) f(\varepsilon_n) = \int \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{f(\pm\omega) \exp(-i\omega t)}{\omega \mp (\varepsilon_n - i0)}. \quad (30)$$

Подставляя затем полученное выражение для функции Грина в (29), имеем

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} V_H(\sigma) = \frac{N\sigma}{g_0} - \frac{iN\sigma}{2\pi^2 v} \int d^3x \int d\omega \int dk \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_{n-1,k}^2(x_1) + h_{n,k}^2(x_1)}{\omega^2 - \varepsilon_n^2 + i0}.$$

Здесь можно проинтегрировать по переменной  $k$  (см. (28)):

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} V_H(\sigma) = \frac{N\sigma}{g_0} - \frac{iN\sigma eH}{2\pi^2} \int d\omega \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{\omega^2 - \varepsilon_n^2 + i0}, \quad (31)$$

где  $s_n = 2 - \delta_{0n}$ . Перейдем в выражении (31) к евклидовой метрике, т.е. сделаем замену  $\omega \rightarrow i\omega$  и воспользуемся  $\alpha$ -представлением [28]. После интегрирования по  $\alpha$  и суммирования по  $n$  получим:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} V_H(\sigma) = \frac{N\sigma}{g_0} - \frac{NeH}{2\pi^{3/2}} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} \exp(-\alpha\sigma^2) \operatorname{cth}(eH\alpha). \quad (32)$$

Интегрируя обе части этого равенства по  $\sigma$  в пределах от  $\sigma$  до  $\infty$  и опуская несущественные, не зависящие от  $\sigma$  константы, найдем

$$V_H(\sigma) = \frac{N\sigma^2}{2g_0} + \frac{NeH}{4\pi^{3/2}} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^{3/2}} \exp(-\alpha\sigma^2) \operatorname{cth}(eH\alpha). \quad (33)$$

В этом выражении интеграл расходится на нижнем пределе. Сделав тождественные преобразования в (33), можно локализовать эту расходимость в эффективном потенциале при  $H = 0$ :

$$V_H(\sigma) = V_0(\sigma) + \frac{NeH}{4\pi^{3/2}} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^{3/2}} \exp(-\alpha\sigma^2) \left[ \operatorname{cth}(eH\alpha) - \frac{1}{eH\alpha} \right]. \quad (34)$$

Здесь

$$V_0(\sigma) \equiv \frac{N\sigma^2}{2g_0} + \frac{N}{4\pi^{3/2}} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^{5/2}} \exp(-\alpha\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{2g} + \frac{\sigma^3}{3\pi}. \quad (35)$$

Отметим, что формулу (34) для  $V_H(\sigma)$  можно вывести, используя метод собственного времени Швингера [30].

Эффективный потенциал (34) может быть записан и в более компактном виде [32]:

$$V_H(\sigma) = \frac{N\sigma^2}{2g} + \frac{NeH\sigma}{2\pi} - \frac{N(2eH)^{3/2}}{2\pi} \zeta\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sigma^2}{2eH}\right), \quad (36)$$

где  $\zeta(s, v)$  – обобщенная  $\zeta$ -функция Римана [33], а уравнение стационарности для него есть:

$$\frac{\partial V_H(\sigma)}{\partial \sigma} = \frac{N\sigma}{g} + \frac{NeH}{2\pi} - \frac{N\sigma\sqrt{2eH}}{2\pi} \zeta\left(\frac{1}{2}, \frac{\sigma^2}{2eH}\right) = 0. \quad (37)$$

При  $\sigma \rightarrow 0$  для  $\zeta$ -функции известно следующее разложение [34]:

$$\zeta\left(\frac{1}{2}, \frac{\sigma^2}{2eH}\right) = \frac{\sqrt{2eH}}{\sigma} + \operatorname{const} + o(\sigma/\sqrt{2eH}). \quad (38)$$

Подставляя его в (37), легко видеть, что уравнение стационарности не имеет решения  $\sigma = 0$  при  $H \neq 0$ . **Таким образом, во внешнем магнитном поле**

**обязательно спонтанно нарушены как ароматосимметрия (3), так и киральная (4) симметрия трехмерной модели Гросса–Невье независимо от знака константы связи  $g$ , при сколь угодно малом значении  $H$ .** Это явление называется эффектом катализации спонтанного нарушения симметрии внешним магнитным полем.

В работах [22,27] показано, что (37) имеет единственное решение  $\sigma_0(H)$ , свойства которого существенным образом зависят от  $H, g$ . Предположим, что  $g > 0$ , а внешнее поле слабое, т.е.  $eHg^2 \ll 1$ . Подставляя (38) в (37), в этом случае можно получить

$$\sigma_0(H) = egH/(2\pi) + \dots \quad (39)$$

(Более подробное обоснование этой асимптотики фермионной массы изложено в [27].)

Если  $g < 0$ , то  $\sigma_0(H) \rightarrow M$  при  $H \rightarrow 0$ , поэтому здесь нужно использовать следующее разложение [33] ( $x \equiv 2eH/(\sigma^2)$ ):

$$\zeta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{x}\right) = -2x^{-1/2} + \frac{1}{2}x^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^m B_{2n} \frac{\Gamma(2n-1/2)}{(2n)!} x^{2n-1/2} + O(x^{2m+3/2}). \quad (40)$$

Здесь  $B_{2n}$  — числа Бернулли:  $B_2 = 1/6, \dots$  С помощью (40) из (37) в этом случае можно получить

$$\sigma_0(H) = M\{1 + (eH)^2/(12M^4) + o((eH)^2/M^4)\}. \quad (41)$$

Рассмотрим теперь область больших значений внешнего магнитного поля. Основываясь на работах [27, 35], можно показать, что в этом случае

$$\sigma_0(H) \approx 0, 45\sqrt{eH}. \quad (42)$$

**1.3. Случай  $H, T \neq 0$ .** Исследуем теперь совместное влияние температуры и внешнего постоянного магнитного поля на фазовую структуру трехмерной модели ГН. Для получения эффективного потенциала в этом случае достаточно в формуле (31) сделать евклидов разворот  $\omega \rightarrow ip_0$ , а потом применить операцию (14). После несложных преобразований приходим к следующему выражению для  $V_{HT}(\sigma)$ :

$$V_{HT}(\sigma) = \frac{N\sigma^2}{2g_0} + \frac{NeHT}{2\pi} \sum_n \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha} \exp(-\alpha\sigma^2 - \alpha(2n+1)^2\pi^2T^2) \operatorname{cth}(eH\alpha). \quad (43)$$

Разобьем (43) на два слагаемых:

$$V_{HT}(\sigma) \equiv V_T(\sigma) + \tilde{V}_{TH}(\sigma), \quad (44)$$

где

$$V_T(\sigma) = \frac{N\sigma^2}{2g_0} + \frac{NT}{2\pi} \sum_n \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^2} \exp(-\alpha\sigma^2 - \alpha(2n+1)^2\pi^2T^2),$$

$$\tilde{V}_{HT}(\sigma) = \frac{NT}{2\pi} \sum_n \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^2} \exp(-\alpha\sigma^2 - \alpha(2n+1)^2\pi^2T^2) [eH\alpha \operatorname{cth}(eH\alpha) - 1].$$
(45)

Исследуем теперь функцию (44) на абсолютный минимум. Уравнение стационарности для нее имеет вид

$$\partial V_{TH}(\sigma)/\partial\sigma = N\sigma[f_T(\sigma) - F(\sigma)] = 0, \quad (46)$$

где  $f_T(\sigma)$  совпадает с  $f_{T\mu}(\sigma)$  (18) при  $\mu = 0$ , а  $NF(\sigma) = \partial\tilde{V}_{HT}(\sigma)/\partial\sigma$ :

$$F(\sigma) = \frac{T}{\pi} \sum_n \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha} \exp(-\alpha\sigma^2 - \alpha(2n+1)^2\pi^2T^2) [eH\alpha \operatorname{cth}(eH\alpha) - 1].$$
(47)

Из формулы (47) очевидно, что  $F(\sigma) > 0$  при  $\sigma \geq 0$ . Кроме того,  $F'(\sigma) < 0$ , т.е.  $F(\sigma)$  – монотонно убывающая функция на полуоси  $\sigma \geq 0$ . В приложении В показано, что  $F(0) = \operatorname{const} < \infty$ . Там же получены верхняя и нижняя оценки на величину  $F(0)$ , откуда ясно, что  $F(0) \rightarrow \infty$  при  $T \rightarrow 0$  и  $F(0) \rightarrow 0$  при  $T \rightarrow \infty$ . Из (46) видно, что для любых значений температуры, не равной нулю, всегда существует решение  $\sigma = 0$  этого уравнения. В зависимости от соотношения между  $f_T(0)$  и  $F(0)$  уравнение стационарности может иметь или не иметь ненулевых решений, которые, очевидно, удовлетворяют уравнению

$$f_T(\sigma) = F(\sigma). \quad (48)$$

Так, при достаточно малых  $T$ , когда  $f_T(0) < F(0)$ , уравнение (48) имеет единственное решение  $\sigma_0 \neq 0$  (единственность следует из того, что  $f_T(\sigma)$  – монотонно возрастающая, а  $F(\sigma)$  – монотонно убывающая функции). При этом очевидно, что  $f_T(\sigma) < F(\sigma)$ , если  $0 < \sigma < \sigma_0$ . Поэтому из (46) следует, что  $V'_{HT} < 0$  при  $0 < \sigma < \sigma_0$ . Таким образом, на интервале  $(0, \sigma_0)$  потенциал  $V_{HT}(\sigma)$  является монотонно убывающей функцией, т.е.  $V_{HT}(0) > V_{HT}(\sigma_0)$ , и его глобальный минимум находится в точке  $\sigma_0$ . Следовательно, в этом случае дискретные симметрии (3)–(4) модели спонтанно нарушены, а фермионы приобретают ненулевую массу  $\sigma_0$ .

При достаточно больших  $T$ , когда  $f_T(0) > F(0)$ , уравнение (48) не имеет решений, опять же из-за того, что  $f_T(\sigma)$  – монотонно возрастающая, а  $F(\sigma)$  – монотонно убывающая функции. В этом случае вакуум модели симметричен, а фермионы безмассовы. Таким образом, мы видим, что в плоскости  $(T, H)$  равенство

$$f_T(0) = F(0) \quad (49)$$



определяет критическую кривую  $l_c$ . Она отделяет область параметров  $(T, H)$ , соответствующих симметричному вакууму, от области, где дискретные симметрии (3)–(4) спонтанно нарушены. Если при изменении  $T$  и  $H$  мы пересекаем критическую кривую, то в модели происходит фазовый переход второго рода. Это легко понять, если учесть, что при  $f_T(0) \rightarrow F(0)$  решение уравнения стационарности  $\sigma_0$  стремится к нулю. Значит, эффективная масса фермиона на  $l_c$  – непрерывная функция параметров  $T, H$ , что является необходимым и достаточным условием фазового перехода второго рода.

Исследуем более подробно свойства критической кривой. Равенство (49) определяет температуру как некоторую функцию внешнего магнитного поля. Таким образом, в плоскости  $(T, H)$  критическая кривая может быть задана в виде

$$l_c = \{(H, T) : T = T_c(H)\}. \quad (50)$$

Функцию  $T_c(H)$  назовем критической температурой. Оценим ее поведение при больших и малых значениях  $H$ .

Предположим, что  $g > 0$ . Благодаря оценкам на величину  $F(0)$ , полученным в приложении В, критическая температура должна удовлетворять следующим неравенствам:

$$\Phi_1(T_c(H), H) > f_T(0) = F(0) > \Phi_2(T_c(H), H), \quad (51)$$

где  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  являются верхней (В.3) и нижней (В.5) оценками величины  $F(0)$  соответственно. Подставляя сюда вместо  $f_T(0)$  выражение (18) при  $\mu = 0$  и решая полученное неравенство при  $H \rightarrow \infty$ , находим

$$C_1\sqrt{eH} < T_c(H) < C_2\sqrt{eH}, \quad (52)$$

где  $C_{1,2}$  – некоторые известные константы (чтобы не загромождать текст несущественными дополнительными формулами, мы не приводим здесь  $C_{1,2}$  в явном виде). Из (52) следует, что при  $H \rightarrow \infty$

$$T_c(H) \sim C_3\sqrt{eH}, \quad (53)$$

а  $C_3$  для нас уже неизвестная константа. Решая (51) в области малых значений  $H$ , можно получить

$$C_4geH < T_c(H) < C_5geH. \quad (54)$$

Отсюда следует, что при  $H \rightarrow 0$

$$T_c(H) \sim C_6geH. \quad (55)$$

В последних формулах  $C_{4,5}$  – известные, а  $C_6$  – неизвестная константы. Фазовый портрет модели при  $g > 0$  изображен на рис.2.

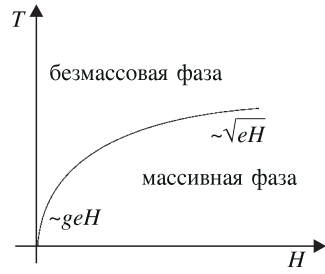


Рис. 2. Фазовый портрет модели Гросса – Невье при  $g > 0$  в переменных  $T, H$

Исследуем теперь критическую температуру при отрицательных  $g$ . Здесь при  $H \rightarrow \infty$   $T_c(H)$  пропорциональна  $\sqrt{eH}$  с неизвестным коэффициентом пропорциональности (рассмотрение аналогично случаю  $g > 0$ ). В области  $H \rightarrow 0$  получим асимптотику функции  $F(\sigma)$  [22]:

$$F(\sigma) = -\frac{(eH)^2}{12\pi\sigma} \frac{\partial}{\partial\sigma} \left[ \frac{1}{\sigma} \operatorname{th} \frac{\sigma}{2T} \right] + o((eH)^2). \quad (56)$$

Отсюда найдем величину  $F(0)$  и подставим ее в уравнение (49), решение которого при малом параметре  $eH$  имеет вид

$$T_c(H) = T_c + (eH)^2 / [T_c^3 288 \ln 2] + o((eH)^2), \quad (57)$$

где  $T_c = M/(2 \ln 2)$  – критическая температура при  $H = 0$  (см. п.1.1). Результаты проведенного анализа даны на рис.3, где представлен фазовый портрет трехмерной модели ГН при  $g < 0$ .

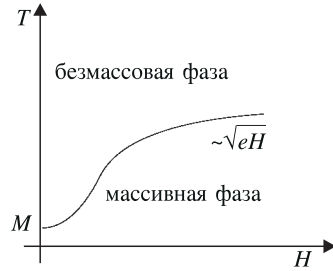


Рис. 3. Фазовый портрет модели Гросса – Невье при  $g < 0$  в переменных  $T, H$

**1.4. Случай  $H, \mu \neq 0$ .** Как и в предыдущих случаях, фазовая структура модели Гросса – Невье во внешнем постоянном магнитном поле и с ненулевым химическим потенциалом определяется с помощью эффективного потенциала. Чтобы его получить, можно стартовать из выражения (31). Предполагая на время, что вместе с  $H, \mu$  отлична от нуля и температура, необходимо там сделать евклидов разворот и интегрирование по  $\omega$  заменить на суммирование по мацубаровским частотам (см. (14)). Далее мы немного изменим тактику и, вместо того, чтобы суммировать по собственным значениям оператора Дирака (идя таким путем, мы посчитали эффективные потенциалы

в двух предыдущих случаях), просуммируем в полученном выражении по мацубаровским частотам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{N\partial\sigma} V_{H\mu T}(\sigma) = & \left\{ \frac{\sigma}{g_0} - \frac{eH\sigma}{2\pi} \sum_n \frac{s_n}{\varepsilon_n} \right\} + \\ & + \frac{eH\sigma}{2\pi} \sum_n \frac{s_n}{\varepsilon_n} \left[ \left[ 1 + e^{-\beta(\varepsilon_n + \mu)} \right]^{-1} + \left[ 1 + e^{-\beta(\varepsilon_n - \mu)} \right]^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (58)$$

Здесь  $\varepsilon_n = \sqrt{\sigma^2 + 2eHn}$ ,  $s_n = 2 - \delta_{0n}$ . Нетрудно видеть, что выражение в фигурных скобках в (58) с точностью до множителя  $N$  есть не что иное, как правая часть в (31). Следовательно, после интегрирования обеих частей равенства (58) в пределах от  $\sigma$  до  $\infty$  получаем спектральное представление для эффективного потенциала при  $H, T, \mu \neq 0$ :

$$V_{H\mu T}(\sigma) = V_H(\sigma) - \frac{NTeH}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \ln \left\{ \left[ 1 + e^{-\beta(\varepsilon_n + \mu)} \right] \left[ 1 + e^{-\beta(\varepsilon_n - \mu)} \right] \right\}, \quad (59)$$

где функция  $V_H(\sigma)$  дана в (34) или (36). Наконец, после перехода в (59) к пределу  $\beta \rightarrow \infty$ , получаем эффективный потенциал при  $H, \mu \neq 0, T = 0$ :

$$V_{H\mu}(\sigma) = V_H(\sigma) - \frac{eHN}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \Theta(\mu - \varepsilon_n)(\mu - \varepsilon_n), \quad (60)$$

уравнение стационарности для которого имеет вид

$$0 = \frac{\sigma}{g} + \frac{eH}{2\pi} - \frac{\sigma\sqrt{2eH}}{2\pi} \zeta\left(\frac{1}{2}, \frac{\sigma^2}{2eH}\right) + \frac{eH}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \Theta(\mu - \varepsilon_n) \frac{\sigma}{\varepsilon_n}. \quad (61)$$

Исследуем сначала на абсолютный минимум функцию (60) при  $g > 0$ . В первую очередь, покажем, что при  $\mu > \sigma_0(H)$ , где  $\sigma_0(H)$  – единственное решение уравнения стационарности (37) в случае  $\mu = 0, H \neq 0$ , в теории реализуется симметричная фаза. Для этого разобьем плоскость параметров  $(\mu, H)$  (при  $\mu, H \geq 0$ ) на области  $\Omega_n$ :

$$(\mu, H) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n; \quad \Omega_n = \{(\mu, H) : 2eHn \leq \mu^2 \leq 2eH(n+1)\}. \quad (62)$$

Очевидно, что в области  $\Omega_0$  вклад в уравнение (61) будет давать только первое слагаемое под знаком стоящей там суммы, в  $\Omega_1$  – отличны от нуля первое и второе слагаемые под знаком суммы и т.д. В дальнейшем нам понадобится очень важное разложение  $\zeta$ -функции Римана [34] ( $\vartheta = \sigma^2/(eH)$ ):

$$\zeta\left(\frac{1}{2}, \vartheta\right) = \sum_{i=0}^k (\vartheta + i)^{-1/2} - 2\sqrt{k + \vartheta} - \sum_{i=k}^{\infty} f_i(\vartheta), \quad (63)$$

где

$$f_i(\vartheta) = \frac{1}{2} \int_i^{i+1} \frac{(u-i)du}{(u+\vartheta)^{3/2}} > 0. \quad (64)$$

Предположим, что  $(\mu, H) \in \Omega_0$ . С учетом асимптотик (39) и (42) очевидно, что при достаточно малых и больших значениях  $H$  кривая  $\mu = \sigma_0(H)$  проходит через область  $\Omega_0$ . Следовательно, внутри  $\Omega_0$  есть точки, удовлетворяющие

условию  $\mu > \sigma_0(H)$ . В этом случае уравнение стационарности (61) с помощью формулы (63), в которую нужно подставить  $k = 0$ , можно привести к виду

$$\frac{\sigma}{f} + \frac{\sigma^2}{\pi} + \frac{\sigma\sqrt{2eH}}{2\pi} \sum_{i=0}^{\infty} f_i \left( \frac{\sigma^2}{2eH} \right) - \frac{eH}{2\pi} [1 - \Theta(\mu - \sigma)] = 0. \quad (65)$$

Это уравнение для  $\mu > \sigma$  имеет только одно решение  $\sigma_1 = 0$ . Если  $\mu \leq \sigma$ , то (65) формально совпадает с (37), что нетрудно видеть с помощью разложения (63), и будет иметь решение  $\sigma_0(H)$  только при  $\mu < \sigma_0(H)$ . Если же, как мы договорились вначале,  $\mu > \sigma_0(H)$ , то уравнение (65) не будет иметь решений, находящихся в области  $\mu \leq \sigma$ . Таким образом, для точек из  $\Omega_0$  при условии  $\mu > \sigma_0(H)$  соответствующий эффективный потенциал (60) имеет единственную стационарную точку  $\sigma_1 = 0$ . Аналогичные выкладки можно провести для любой области  $\Omega_n$ , поэтому справедливо следующее утверждение. Точкам плоскости  $(\mu, H)$ , лежащим выше кривой  $\mu = \sigma_0(H)$ , отвечает эффективный потенциал, у которого в  $\sigma_1 = 0$  располагается глобальный минимум, т.е. при  $\mu > \sigma_0(H)$  находится безмассовая, симметричная относительно дискретных преобразований (3)–(4) фаза теории.

Если  $\mu < \sigma_0(H)$ , то нетрудно показать, что у потенциала появляется еще одна стационарная точка  $\sigma_2 = \sigma_0(H)$ , в которой, вообще говоря, находится локальный минимум. Соответствующее ему основное состояние метастабильно до тех пор, пока мы не пересечем критическую кривую  $\mu = \mu_c(H)$ , которая находится из условия

$$V_{H\mu}(0) = V_{H\mu}(\sigma_0(H)). \quad (66)$$

Ниже этой кривой глобальный минимум переходит в точку  $\sigma_2 = \sigma_0(H) \neq 0$ , поэтому здесь стабильна фаза с массивными фермионами и спонтанно нарушенной симметрией (3)–(4), а безмассовая – метастабильна. В силу того, что параметр порядка при пересечении критической кривой скачком меняет свое значение, в модели происходит фазовый переход первого рода. Более детальный вид уравнения для критической кривой  $\mu = \mu_c(H)$  можно получить из (66) с учетом (60):

$$V_H(\sigma_0(H)) = V_H(0) - \frac{eHN}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \Theta(\mu - \sqrt{2eHn})(\mu - \sqrt{2eHn}). \quad (67)$$

Из вышеприведенных рассуждений ясно, что  $\mu_c(H)$  должна лежать под кривой  $\mu = \sigma_0(H)$ . Мы, однако, уже отмечали, что как при достаточно больших, так и при достаточно малых значениях  $H$  линия  $\mu = \sigma_0(H)$  находится в области  $\Omega_0$ . Значит, при этих значениях  $H$  и критическая кривая находится в  $\Omega_0$ .

и, следовательно, в уравнении (67) под знаком суммы необходимо оставить только первое слагаемое. В результате мы получаем вид кривой  $\mu = \mu_c(H)$  при достаточно больших и малых значениях  $H$ :

$$\mu_c(H) = \frac{2\pi}{eHN} [ V_H(0) - V_H(\sigma_0(H)) ]. \quad (68)$$

При малых значениях  $H$ , когда  $\sigma_0(H)$  мало, из (68) следует

$$\mu_c(H) \cong \frac{2\pi}{eHN} \frac{dV_H(0)}{d\sigma} \sigma_0(H) = \sigma_0(H). \quad (69)$$

При  $H \rightarrow \infty$  из (42) и (68) имеем

$$\mu_c(H) \sim \sqrt{eH}. \quad (70)$$

При отрицательных значениях константы связи  $g$  ситуация более неопределенная. Дело в том, что здесь уравнения стационарности имеют некоторые особенности, которые позволяют получить строгие результаты лишь при достаточно больших значениях магнитного поля.

Предположим, что  $(\mu, H) \in \Omega_0$  и  $g < 0$ . Рассмотрим уравнение (65). Тогда при  $\mu < \sigma$  оно может иметь решение  $\sigma_0(H)$  (при  $\mu < \sigma_0(H)$ ) или не иметь решений вовсе (при  $\mu > \sigma_0(H)$ ). В области  $\mu > \sigma$  уравнение (65), очевидно, имеет тривиальное решение  $\sigma = 0$ . Кроме того, из-за отрицательного значения  $g$  уравнение (65) может в общем случае иметь в этой области другие нетривиальные решения, отличные от  $\sigma_0(H)$ . В последнем случае процесс нахождения той стационарной точки, в которой потенциал имеет глобальный минимум, значительно усложняется. Чтобы этого избежать, мы выделим значения  $H$ , при которых уравнение (65) может иметь не более двух решений  $\sigma_1 = 0$  и  $\sigma_2 = \sigma_0(H)$ .

С этой целью вычислим интеграл  $f_0(\vartheta)$  (64) и представим (65) в виде

$$\frac{\sigma}{\pi} \left\{ -M + \frac{\sigma^2 + eH}{\sqrt{\sigma^2 + 2eH}} \right\} + \frac{\sigma\sqrt{2eH}}{2\pi} \sum_{i=1}^{\infty} f_i \left( \frac{\sigma^2}{2eH} \right) - \frac{eH}{2\pi} [ 1 - \Theta(\mu - \sigma) ] = 0, \quad (71)$$

где  $M = -\pi/g$ . Выражение в фигурных скобках в (71) положительно для всех  $\sigma \geq 0$ , если

$$2M^2 < eH. \quad (72)$$

Теперь, наложив на магнитное поле ограничение (72), мы можем сделать те же выводы о фазовой структуре модели в области  $\Omega_0$ , что были сделаны для случая  $g > 0$ . Можно показать, что уравнения стационарности потенциала  $V_{H\mu}(\sigma)$  для  $(\mu, H) \in \Omega_n$  ( $n > 0$ ) также имеют не более двух решений  $\sigma = 0$  и  $\sigma_0(H)$  при ограничении (72). В связи с этим можно утверждать,

что при  $g < 0$ ,  $eH > 2M^2$  в плоскости  $(\mu, H)$  существует критическая кривая  $\mu = \mu_c(H)$ , которая задается уравнением (67). В области  $\Omega_0$  она имеет, очевидно, вид (68), и поэтому  $\mu_c(H) \sim \sqrt{eH}$  при достаточно больших  $H$ . Эти выводы получаются аналогично случаю  $g > 0$ . К сожалению, о поведении критической кривой в области малых  $H$  при  $g < 0$  мы ничего не можем сказать, кроме того, что  $\mu_c(0) = M$  (см. п.1.1).

**1.5. Обсуждение результатов.** Здесь на основе работ [22, 27, 37, 41] рассмотрена фазовая структура трехмерной модели ГН при наличии температуры, химического потенциала и внешнего постоянного магнитного поля.

Нами получено точное выражение (20) для критической кривой этой модели при  $T, \mu \neq 0$  в главном порядке  $1/N$ -разложения, а также показано, что на этой фазовой диаграмме существует трикритическая точка. Эти результаты впервые опубликованы в [37] и впоследствии переоткрыты другими авторами [10, 38]. В [10], кроме того, было показано, что в  $D$ -мерных моделях ГН с  $2 < D < 3$  трикритическая точка уже не занимает положение на границе, а смещается внутрь области  $T, \mu \geq 0$ . Аналогичный результат для двумерной модели ГН получен в [11].

В рассматриваемом разделе было представлено новое свойство внешнего магнитного поля способствовать спонтанному нарушению различных симметрий [22, 27]. (В современной литературе это явление носит название эффекта катализации.) В терминах модели Гросса – Невье это означает, что при  $g > 0$  киральная и ароматосимметрия (3)–(4) спонтанно нарушаются любым, сколь угодно малым значением внешнего магнитного поля  $H$ . Кроме того, оно служит фактором, стабилизирующим фазу с нарушенными симметриями. Так, при  $g < 0$  трехмерная модель (1) находится в несимметричной фазе с массивными фермионами, а внешнее поле  $H$  только увеличивает массу ферми-частиц. (Влияние внешнего электрического поля на массивную фазу модели обратное [36], так как оно уменьшает массу фермионов до тех пор, пока при некотором значении  $E_c$  система не перейдет в безмассовую фазу.) Если предположить, что это качество магнитного поля сохраняется и в четырехмерном мире, то становится понятной одна из причин спонтанного нарушения киральной и других симметрий в физике элементарных частиц.

Влияние магнитного поля на трехмерную модель Гросса – Невье было также рассмотрено в работах [35, 39], в которых обсуждалась связь катализирующей роли магнитного поля с нулевыми модами оператора Дирака и модификацией инфракрасного режима. Этот эффект рассматривался также в [39] и получил дальнейшее развитие в ряде работ [40], где было показано, что эффект катализации наблюдается и в других моделях теории поля: в трехмерной квантовой электродинамике, в модели Намбу – Иона-Лазинио и др. В этих же работах было предложено объяснение эффекта катализации, который в  $R^{2+1}$  обусловлен только наличием внешнего магнитного поля (с которым взаимодействует спин фермионов, в результате чего решающим

образом меняется инфракрасный режим в системе) и не связан с наличием четырехфермионного взаимодействия в исходном лагранжиане.

Следует также заметить, что в предлагаемом обзоре указаны далеко не все внешние факторы, от которых может зависеть структура вакуума модели (1). Мы не рассматривали влияния нетривиальной топологии и кривизны пространства-времени, а также эффектов, связанных с конечным объемом, на фазовую структуру трехмерной модели ГН. Желающих ознакомиться с этим направлением исследований мы отсылаем к работам [42].

## 2. ГЛЮОННЫЙ КОНДЕНСАТ И ТРЕХМЕРНАЯ $(\bar{\psi}\psi)^2$ -ТЕОРИЯ ПОЛЯ

В предлагаемом разделе мы продолжим исследование критических свойств трехмерной модели Гросса – Невье с учетом влияния внешних неабелевых калибровочных полей, структура которых обсуждалась в работах [46–49]. При этом лагранжиан модели имеет вид

$$L_\psi = \bar{\psi}\Gamma^\mu(i\partial_\mu + eA_\mu^a\lambda_a/2)\psi + \frac{g_0}{2N}[\bar{\psi}\psi]^2, \quad (73)$$

где поле  $\psi$  – четырехкомпонентный спинор Дирака, которое можно поставить в соответствие кваркам. В этом случае  $e$  – константа взаимодействия кварков с глюонами,  $\Gamma_\mu$  –  $4 \times 4$ -матрицы, алгебру которых можно найти в приложении А. Кроме того, спинор  $\psi$  преобразуется по фундаментальным представлениям цветной группы  $SU(3)$  и группы  $SU(N)$ , которая носит вспомогательный характер и введена нами для того, чтобы в модели появился малый параметр  $1/N$  при  $N \rightarrow \infty$ . (Ради простоты у спиноров в (73) не указаны в явном виде групповые индексы, по которым там подразумевается суммирование.)  $\lambda_a$  – генераторы  $SU(3)$ -группы ( $a = 1, \dots, 8$ ),  $A_\mu^a$  – внешнее неабелево (цветное) калибровочное поле. Для простоты мы рассматриваем модель, инвариантную относительно дискретного кирального преобразования (4), хотя можно без труда исследовать и модель типа (73) с непрерывной киральной инвариантностью.

**2.1. Эффективный потенциал. Структура внешних полей.** Фазовый анализ модели (73) удобно проводить в терминах вспомогательного скалярного поля  $\sigma(x)$ . Для этого нужно ввести вспомогательный лагранжиан

$$L_\sigma = \bar{\psi}(i\hat{\partial} + \frac{1}{2}e\lambda^a\hat{A}^a)\psi - \frac{N\sigma^2}{2g_0} + \sigma\bar{\psi}\psi, \quad (74)$$

который на уравнениях движения эквивалентен  $L_\psi$  (73). Теперь по аналогии с предыдущим разделом (см. вывод формулы (24)) можно показать, что в

главном порядке  $1/N$ -разложения эффективный потенциал модели (73) во внешнем неабелевом поле имеет вид

$$V(\sigma) = \frac{N\sigma^2}{2g_0} + \frac{iN}{v} \text{Tr} \ln (\hat{\Pi} + \sigma), \quad (75)$$

где  $\hat{\Pi} = \Gamma^\mu (i\partial_\mu + eA_\mu^a \lambda_a/2)$ ,  $v = \int d^3x$ . С учетом тождества (матрица  $\Gamma^5$  дана в приложении А)

$$\hat{\Pi} + \sigma = \Gamma^5 \Gamma^5 (\hat{\Pi} + \sigma) = \Gamma^5 (-\hat{\Pi} + \sigma) \Gamma^5$$

эффективный потенциал (75) с точностью до несущественной, не зависящей от  $\sigma$  константы можно представить в следующем виде:

$$V(\sigma) = \frac{N\sigma^2}{2g_0} + \frac{iN}{2v} \text{Tr} \ln D, \quad (76)$$

где

$$D = (\hat{\Pi} + \sigma)(-\hat{\Pi} + \sigma) = \sigma^2 - \Pi_\mu \Pi^\mu - \frac{ie}{4} \Gamma^\mu \Gamma^\nu \lambda^a F_{\mu\nu}^a, \\ F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + e f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad \Pi_\mu = i\partial_\mu + \frac{1}{2} e \lambda^a A_\mu^a. \quad (77)$$

В формулах (75)–(77) поле  $\sigma$  уже не зависит от точек пространства-времени,  $f^{abc}$  – структурные константы группы  $SU(3)$ . Мы хотим исследовать трехмерную модель (73)–(74) во внешних постоянных: i) хромагнитном, ii) хромоэлектрическом полях. В случае (i) пусть, например,  $F_{12}^3 = -F_{21}^3 = H \neq 0$ , а остальные компоненты тензора  $F_{\mu\nu}^a$  равны нулю. При этом возможны два независимых выбора векторного поля  $A_\mu^a$ . В первом случае  $A_\mu^a$  есть абелевоподобный вектор-потенциал, с помощью которого моделировался вакуумный глюонный конденсат в работах [44, 45]:

$$A_\mu^a = H \delta_{\mu 2} x_1 \delta^{a 3}. \quad (78)$$

Здесь, однако, мы не будем останавливаться на выражении (78), так как при этом легко получить те же результаты, что и для модели Гросса – Невье во внешнем магнитном поле (см. предыдущий раздел). Во втором случае вектор-потенциал уже не зависит от точек пространства-времени:

$$A_\mu^a = \delta_\mu^a \sqrt{H/e} \quad (a = 1, \dots, 8; \mu = 0, 1, 2). \quad (79)$$

Этот случай качественно отличен от (78) потому, что здесь в явном виде выступает неабелева природа полей Янга – Миллса. Именно для калибровочного поля (79) ниже будет найден и исследован эффективный потенциал



(75)–(76) исходной модели. Особо подчеркнем, что современные теоретические исследования указывают на то, что в КХД при достаточно больших температурах стабильным является вакуум, в котором глюонный конденсат, вероятнее всего, имеет вид (78). Однако при достаточно низких температурах фоновое глюонное поле должно иметь неабелевы компоненты [47]. Следовательно, вектор-потенциал (79) является возможным претендентом на роль глюонного конденсата в истинном вакууме КХД при  $T = 0$ . Отметим, что подобная структура внешнего калибровочного поля и влияние его на различные физические процессы уже рассматривалась [46].

В случае (ii) предполагается, что единственными отличными от нуля компонентами тензора  $F_{\mu\nu}$  являются  $F_{01}^3 = -F_{10}^3 = E$ . Здесь также мы будем работать только с существенно неабелевым вектор-потенциалом, который по аналогии с (79) имеет вид

$$A_\mu^1 = (\sqrt{E/e}, 0, 0), \quad A_\mu^2 = (0, \sqrt{E/e}, 0); \quad A_\mu^a = 0; \quad a = 3, \dots, 8. \quad (80)$$

Дело в том, что случай с абелевоподобным калибровочным полем

$$A_\mu^a = -E\delta_{\mu 0}x_1\delta^{a3}$$

рассматривается аналогично случаю трехмерной модели Гросса – Невье во внешнем электрическом поле [36].

Теперь, переходя в (76) к импульсному пространству, без труда получаем

$$\frac{1}{N}V(\sigma) = \frac{\sigma^2}{2g_0} + \frac{i}{2(2\pi)^3} \text{Tr} \int d^3p \ln \tilde{D}(p), \quad (81)$$

где  $\text{Tr}$  означает след как по спинорным, так и по индексам  $SU(3)$ -группы;  $\tilde{D}(p)$  – фурье-образ оператора  $D$  из (77). Очевидно, что  $\tilde{D}(p)$  является матрицей в спинорном и цветовом пространствах, которая имеет три четырехкратно вырожденных собственных значения [50, 51]:

$$d_i(p) = E_i^2(\bar{p}) - p_0^2; \quad i = 1, 2, 3, \quad (82)$$

где  $E_i(\bar{p})$  не зависят от  $p_0$ . (В каждом из случаев (i) или (ii) величины (82) будут представлены ниже.) Подставляя (82) в (81) и интегрируя по переменной  $p_0$ , получаем

$$\frac{1}{N}V(\sigma) = \frac{\sigma^2}{2g_0} - 2 \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \sum_{i=1}^3 E_i(\bar{p}). \quad (83)$$

**2.2. Внешнее хромагнитное поле.** Предположим, что вакуумный глюонный конденсат задается вектор-потенциалом вида (79). В этом случае величины  $E_i(\vec{p})$  из (82) легко вычисляются [50, 52]:

$$E_1^2(\vec{p}) = \vec{p}^2 + \sigma^2; \quad \vec{p}^2 = p_1^2 + p_2^2;$$

$$E_{2,3}^2(\vec{p}) = \vec{p}^2 + \sigma^2 + \frac{eH}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(eH)^2 + 4eH\vec{p}^2}. \quad (84)$$

Подставляя (84) в (83), имеем ( $V \equiv V_H$ ):

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} V_H(\sigma) &= \frac{1}{N} V_0(\sigma) - \frac{|\sigma|^3}{3\pi} + \frac{(\sigma^2 + eH)^{3/2}}{3\pi} - \frac{eH}{4\pi} (\sigma^2 + eH)^{1/2} - \\ &- \frac{\sigma^2 \sqrt{eH}}{4\pi} \ln [ (\sqrt{eH} + \sqrt{\sigma^2 + eH}) / |\sigma| ], \end{aligned} \quad (85)$$

где

$$\frac{1}{N} V_0(\sigma) = \frac{\sigma^2}{2g_0} - \frac{3\sigma^2 \Lambda}{2\pi} + \frac{|\sigma|^3}{\pi} \quad (86)$$

– эффективный потенциал модели при  $H = 0$ ,  $\Lambda$  – параметр ультрафиолетового обрезания области интегрирования в (83). В силу симметричности функции (85) относительно отражения  $\sigma \rightarrow -\sigma$ , мы будем в дальнейшем рассматривать только область  $\sigma \geq 0$ . Как и в разд.1, функция (86) может быть перенормирована и приведена к ренормализационно-инвариантному виду

$$\frac{1}{N} V_0(\sigma) = \frac{\sigma^2}{2g} + \frac{\sigma^3}{\pi}, \quad (87)$$

где конечная константа связи  $g$  не зависит ни от точки нормировки, ни от  $\Lambda$ :

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{g_0} - \frac{3\Lambda}{\pi}.$$

Незначительное отличие потенциала (87) от аналогичной величины (11) объясняется наличием у фермионов (кварков) в модели (73) дополнительных цветовых степеней свободы. Поэтому в случае  $H = 0$  из (87) следует, что при  $g > 0$  абсолютный минимум функции  $V_0(\sigma)$  находится в нуле, а симметрия (4) не нарушена. При  $g < 0$  точка глобального минимума имеет вид

$$\sigma_0 = -\pi/3g \equiv M. \quad (88)$$

В этом случае киральная инвариантность (4) спонтанно нарушена, а кварки приобретают массу  $M$ .

Пусть  $H \neq 0$ . Следовательно, нужно исследовать на глобальный минимум функцию (85), стационарные точки которой удовлетворяют уравнению

$$\sigma \{A(H) + 4x - G_H(x)\} = 0, \quad (89)$$

где

$$A(H) = \frac{2\pi}{f\sqrt{eH}}, \quad x = \frac{\sigma}{\sqrt{eH}},$$

$$G_H(x) = \ln \left[ (1 + \sqrt{1+x^2})/x \right] - 2\sqrt{1+x^2}. \quad (90)$$

Нетрудно показать, что на интервале  $(0, \infty)$  функция  $G_H(x)$  монотонно убывает от  $+\infty$  до  $-\infty$ . Следовательно, в (89) выражение в фигурных скобках обращается в нуль в единственной точке  $x_0(H) \neq 0$ , а уравнение стационарности (89) имеет два решения, одно из которых есть  $\sigma = 0$ , а другое равно  $\sigma_0(H) = \sqrt{eH}x_0(H)$ . (Если бы внешнее поле было абелевоподобным, то, как показано в разд.1, уравнение стационарности не имело бы решения  $\sigma = 0$ .) С помощью (89) нетрудно видеть, что на интервале  $\sigma \in (0, \sigma_0(H))$  производная  $\partial V_H(\sigma)/\partial \sigma$  отрицательна. В силу этого абсолютный минимум функции  $V_H(\sigma)$  лежит в точке  $\sigma_0(H) \neq 0$ , а симметрия (4) спонтанно нарушена как при  $g < 0$ , так и при  $g > 0$  для любых значений внешнего хромагнитного поля  $H \neq 0$ . Таким образом, внешнее хромагнитное поле, как абелевоподобное, так и неабелево, является фактором, способствующим спонтанному нарушению киральной симметрии (4), а у фермионов при этом появляется ненулевая масса  $\sigma_0(H)$ .

Оценим теперь поведение динамически возникшей массы фермионов ( $\equiv \sigma_0(H)$ ) при больших и малых значениях  $H$ . Пусть  $k$  является решением уравнения  $4k = G_H(k)$ . Тогда при  $H \rightarrow \infty$  видно, что  $A(H) \rightarrow 0$ , т.е.  $x_0(H) \rightarrow k$ . Следовательно, при  $H \rightarrow \infty$

$$\sigma_0(H) \equiv \sqrt{eH}x_0(H) \rightarrow k\sqrt{eH}. \quad (91)$$

Асимптотика (91) не зависит от знака константы  $g$ . Для сравнения отметим, что в случае с внешним магнитным полем (см. п.1.2) масса фермионов качественно имеет такое же поведение при  $H \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим теперь малые значения  $H$ . Здесь необходимо выделить два случая. Пусть  $g > 0$ . Понятно, что уравнение, которому удовлетворяет  $x_0(H)$ , при  $H \rightarrow 0$  имеет вид

$$A(H) = -\ln x_0(H).$$

Отсюда нетрудно найти  $x_0(H)$  и  $\sigma_0(H)$  при  $H \rightarrow 0$ :

$$\sigma_0(H) \sim \sqrt{eH} \exp(-2\pi/(g\sqrt{eH})), \quad (92)$$

т.е. с убыванием  $H$  масса фермионов экспоненциально падает. Интересно отметить, что во внешнем магнитном поле масса фермионов убывает линейно, т.е. более медленно, при  $H \rightarrow 0$  (см. п.1.2).

Пусть  $g < 0$ . В этом случае при малых  $H$  параметр  $A(H)$  из (90) стремится к  $-\infty$ , следовательно, решение  $x_0(H)$  уравнения (89) стремится к

$+\infty$ . Используя в (89) асимптотику функции  $G_H(x)$  при больших  $x$ , нетрудно показать, что при  $H \rightarrow 0$

$$\sigma_0(H) = M\{1 + (eH)^2/(72M^4) + o((eH)^2/M^4)\}, \quad (93)$$

где  $M$  – масса фермионов при  $H = 0$  (см. (88)).

Таким образом, внешние как магнитное, так и хромагнитные, типа (78)–(79), поля вызывают в четырехфермионных моделях спонтанное нарушение киральной инвариантности.

**2.3. Внешнее хромоэлектрическое поле.** Поместим теперь исходную модель во внешнее постоянное хромоэлектрическое поле, вектор-потенциал которого имеет существенно неабелеву форму (80). Теперь величины  $E_{2,3}(\vec{p})$  из (82) имеют вид [51]:

$$E_{2,3}^2(\vec{p}) = \sigma^2 + \vec{p}^2 + eE/2 \pm \sqrt{eE(\sigma^2 + \vec{p}^2 + p_1^2)}, \quad (94)$$

а  $E_1(\vec{p})$  и  $\vec{p}^2$  определены в (84). С учетом этого эффективный потенциал (83) можно представить в следующем виде ( $V \equiv V_E$ ):

$$\begin{aligned} \frac{1}{N}V_E(\sigma) = & \frac{1}{N}V_0(\sigma) + \frac{1}{3\pi}(D_+^3 + D_-^3 - 2|\sigma|^3) - \\ & - \frac{B}{4\pi}(D_+ - D_-) - \frac{3eE}{16\pi}(D_+ + D_-) - \\ & - \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{4(CA - B^2) - C^2}{8\sqrt{C}} \ln \left[ \frac{\sqrt{C} + D_+ + D_-}{-\sqrt{C} + D_+ + D_-} \right]. \end{aligned} \quad (95)$$

Здесь потенциал  $V_0(\sigma)$  определен в (86)–(87) и

$$\begin{aligned} D_{\pm} &= \sqrt{(A \pm B)}, \quad A = \sigma^2 + eE/2, \\ B &= \sqrt{\sigma^2 eE}, \quad C = eE(1 + \cos^2 \varphi). \end{aligned} \quad (96)$$

При выводе (95) мы использовали полярную систему координат.

Исследуем теперь функцию (95) на абсолютный минимум на полуоси  $\sigma \geq 0$ . Нетрудно показать, что

$$\frac{1}{N} \frac{\partial V_E}{\partial \sigma} = \sigma \{H(\sigma) - G_E(\sigma)\}, \quad (97)$$

где

$$H(\sigma) = \frac{1}{g} + \frac{1}{\pi}(\sigma + D_+ + D_-),$$

$$G_E(\sigma) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{C - eE}{\sqrt{C}} \ln \left[ \frac{D_+ + D_- + \sqrt{C}}{D_+ + D_- - \sqrt{C}} \right]. \quad (98)$$

Очевидно, что  $H(\sigma)$  монотонно возрастает, а  $G_E(\sigma)$  монотонно убывает при  $\sigma \geq 0$ . Следовательно, в случае  $H(0) > G_E(0)$  уравнение стационарности  $\partial V_E / \partial \sigma = 0$  будет иметь единственное решение  $\sigma = 0$ , в котором потенциал  $V_E(\sigma)$  достигает своего наименьшего значения. Если же  $H(0) < G_E(0)$ , то появится еще одна точка стационарности  $\sigma_0(E) \neq 0$ , в которой у функции  $V_E(\sigma)$  будет глобальный минимум. Оценив численно величину  $G_E(0)$ , мы получим

$$H(0) - G_E(0) \cong \frac{1}{g} + \sqrt{eE} \cdot 0,2923... \quad (99)$$

Отсюда видно, что при положительных  $g$  неравенство  $H(0) > G_E(0)$  выполняется при любых значениях внешнего хромозлектрического поля  $E$ . В этом случае киральная инвариантность модели остается ненарушенной, а кварки – безмассовыми. (Напомним, что при  $g > 0$ , в отличие от хромозлектрического, сколь угодно малые значения внешнего хромоманнитного поля вызывают спонтанное нарушение киральной инвариантности.)

Рассмотрим более подробно случай  $g < 0$ . Из (99) следует, что при достаточно малых значениях  $E$   $H(0) < G_E(0)$ , т.е. модель находится в фазе со спонтанным нарушением киральной симметрии. Однако при достаточно больших значениях  $E$  мы будем иметь фазу с ненарушенной киральной инвариантностью. Переход из одной фазы в другую происходит при  $E = E_c$ :

$$eE_c = (g \cdot 0,2923...)^{-2} \cong M^2 \cdot 10,6730... \quad (100)$$

(Критическая напряженность хромозлектрического поля находится из условия, что правая часть (99) обращается в нуль.) В критической точке мы имеем фазовый переход второго рода.

Оценим теперь массу фермионов при  $0 < E \leq E_c$ . Это можно сделать, исходя из уравнения стационарности. В самом деле, нетрудно показать, что при  $E \rightarrow 0$

$$\sigma_0(E) = M(1 - (eE)^2 / (72M^4) + ...) \quad (101)$$

Однако вблизи критической точки ( $E \rightarrow E_c$ ):

$$\sigma_0(E) \cong \frac{e(E_c - E)}{\sqrt{eE_c}} \cdot 0,4591... \quad (102)$$

Наконец, отметим, что у эффективного потенциала (95) нет мнимой части. Следовательно, вакуум модели во внешнем хромозлектрическом поле (8) является стабильным состоянием. В отличие от этого во внешнем электрическом поле вакуум теории Гросса – Невье нестабилен [36].

**2.4. Случай  $H, T \neq 0$ .** Предположим теперь, что система, описываемая лагранжианом (73), помещена в термостат. Прежде чем представить соответствующий этому случаю эффективный потенциал, приведем потенциал (81) с учетом (82) к более удобному виду

$$\frac{1}{N}V(\sigma) = \frac{\sigma^2}{2g_0} + \frac{2i}{(2\pi)^3} \sum_{k=1}^3 \int d^3p \ln d_k(p). \quad (103)$$

Проводя далее вычисления, аналогичные представленным в п.1.1 при  $T, \mu \neq 0$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{N}V(\sigma) = \frac{\sigma^2}{2g_0} - 2 \sum_{k=1}^3 \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \{ E_k + \\ + T \ln [ 1 + \exp [-\beta(E_k + \mu)] ] + T \ln [ 1 + \exp [-\beta(E_k - \mu)] ] \}, \end{aligned} \quad (104)$$

где связь между  $E_k$  и  $d_k(p)$  дана соотношением (82). Предполагая теперь, что  $\mu = 0$  и полем глюонного конденсата является неабелево хромомagnetное поле, когда величины  $E_k(\vec{p})$  имеют вид (84), из (104) получаем после тривиальных преобразований выражение для эффективного потенциала при  $H, T \neq 0$  ( $V(\sigma) \equiv V_{HT}(\sigma)$ ):

$$\frac{1}{N}V_{HT}(\sigma) = \frac{1}{N}V_H(\sigma) - \sum_{i=1}^3 F_i(\sigma), \quad (105)$$

где

$$F_i(\sigma) = \frac{T}{\pi} \int_0^\infty dx \ln [ 1 + \exp [-\beta E_i(x)] ], \quad (106)$$

$x = \vec{p}^2$ , функция  $V_H(\sigma)$  определена в (85). Так как вся зависимость от компонент импульсов величины  $E_k(\vec{p})$  сводится к ее зависимости от комбинации  $\vec{p}^2$  (см. (84)), то в (106) мы приняли обозначение  $E_k(x) \equiv E_k(\vec{p})|_{\vec{p}^2=x}$ . Уравнение стационарности для функции (105) имеет вид

$$\sigma \{ \omega(\sigma) - \varphi(\sigma) \} = 0, \quad (107)$$

где

$$\begin{aligned} \omega(\sigma) = \frac{1}{g} + \frac{2\sigma}{\pi} + \frac{1}{\pi} \sqrt{\sigma^2 + eH} + \\ + \frac{2T}{\pi} \{ 2 \ln ( 1 + \exp [-\beta\sigma] ) + \ln ( 1 + \exp [-\beta\sqrt{\sigma^2 + eH}] ) \}, \end{aligned} \quad (108)$$

$$\varphi(\sigma) = \frac{\sqrt{eH}}{2\pi} \int_\sigma^{\sqrt{\sigma^2 + eH}} \frac{dE}{\sqrt{E^2 - \sigma^2}} \operatorname{th} \left( \frac{E}{2T} \right). \quad (109)$$

Очевидно, что  $\sigma = 0$  является решением уравнения (107). Некоторые свойства функций  $\omega(\sigma)$  и  $\varphi(\sigma)$  приведены в приложении С, где показано, что на интервале  $(0, \infty)$   $\omega'(\sigma) > \varphi'(\sigma)$ . Там же показано, что при  $\sigma \rightarrow \infty$   $\omega(\sigma) \sim 4\sigma/\pi$ ,  $\varphi(\sigma) \rightarrow 0$ . Отсюда следует, что, если  $\omega(0) < \varphi(0)$ , то в (108) выражение в фигурных скобках обращается в нуль в единственной точке  $\sigma_0 \neq 0$ , где функция  $V_{HT}(\sigma)$  имеет глобальный минимум. Следовательно, в этом случае киральная симметрия модели спонтанно нарушена, а фермионы динамическим образом приобретают массу  $\sigma_0$ . Если же  $\omega(0) > \varphi(0)$ , то фермионы безмассовы.

Таким образом, мы видим, что в плоскости параметров  $(T, H)$  равенство

$$\omega(0) = \varphi(0) \tag{110}$$

определяет критическую кривую  $l_c$ , которая отделяет множество параметров  $(T, H)$ , соответствующих симметричному основному состоянию, от области, где симметрия (4) спонтанно нарушена. Очевидно, что при пересечении критической кривой в модели происходит фазовый переход второго рода (ситуация, аналогичная случаю внешнего магнитного поля (см. п.1.3)). Критическая кривая может быть представлена в следующем виде:

$$l_c = \{ (T, H) : T = T_c(H) ; T, H \geq 0 \},$$

где функцию  $T_c(H)$  назовем критической температурой.

Чтобы исследовать эту функцию, удобно использовать переменные

$$t = \frac{\sqrt{eH}}{2T}, \quad h = \frac{2\pi}{g\sqrt{eH}}, \tag{111}$$

в терминах которых уравнение (110) имеет вид

$$h \equiv h(t) = \int_0^t d\tau \frac{th \tau}{\tau} - 2 - \frac{2}{t} [ 2\ln 2 + \ln (1 + \exp (-2t)) ]. \tag{112}$$

Преимущество параметров  $(t, h)$  заключается в том, что (112) дает в явном виде функциональную зависимость между ними. Из (112) видно, что  $h(t)$  является монотонно возрастающей от  $-\infty$  до  $+\infty$  функцией, когда  $t$  изменяется от нуля до  $+\infty$ . Следовательно, существует  $t_0 > 0$ , где  $h(t)$  обращается в нуль. Очевидно, что преобразование (111) переводит критическую кривую  $l_c$  во множество точек

$$L_+ = \{ (t, h) : h = h(t), t > t_0 \},$$

если  $g > 0$ , и во множество точек

$$L_- = \{ (t, h) : h = h(t), 0 < t < t_0 \},$$

если  $g < 0$ . При этом значения  $t \sim t_0$  на кривых  $L_{\pm}$  соответствуют большим значениям хромагнитного поля. Пределы  $t \rightarrow \infty$  на кривой  $L_+(g > 0)$  и  $t \rightarrow 0$  на кривой  $L_-(g < 0)$  соответствуют малым значениям внешнего поля  $H$ . Зная свойства функции  $h(t)$ , теперь нетрудно получить поведение критической температуры  $T_c(H)$  при больших и малых значениях  $H$ .

В самом деле, предел  $t \rightarrow t_0$ , когда  $h(t) \rightarrow 0$ , дает нам (см. (111))  $H \rightarrow \infty$  и

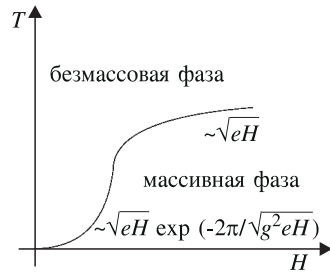
$$T_c(H) \sim \sqrt{eH} \tag{113}$$

как для положительных, так и для отрицательных значений константы связи  $g$ .

Пусть  $g > 0$  и  $t \rightarrow \infty$ . Эта часть кривой  $L_+$  соответствует малым значениям  $H$ . Нетрудно показать, что при  $t \rightarrow \infty$   $h(t) \sim \ln t$ . Выражая в этом соотношении  $h$  и  $t$  через  $T$  и  $H$  (см. (111)), имеем при  $H \rightarrow 0$

$$T_c(H) \sim \sqrt{eH} \exp(-2\pi / (g\sqrt{eH})). \tag{114}$$

Фазовый портрет модели в случае  $g > 0$  представлен на рис.4.



Пусть теперь  $g < 0$  и  $t \rightarrow 0$ . В этом случае мы также получаем ту часть кривой  $L_-$ , которая соответствует малым значениям  $H$ . Разлагая функцию (112) в ряд по малому параметру  $t$  и используя затем соотношения (111), нетрудно получить при  $H \rightarrow 0$

$$T_c(H) = T_c + (eH)^2 / [T_c^3 1728 \ln 2] + o((eH)^2), \tag{115}$$

где  $T_c$  – критическая температура при  $H = 0$ :

$$T_c = -\pi / [6g \ln 2].$$

Рис. 4. Фазовая структура модели (73) при  $g > 0$  во внешнем неабелевом хромагнитном поле

При  $g < 0$   $T_c(H)$  зависимость качественно имеет тот же вид, что и кривая, изображенная на рис.3.

**2.5. Случай  $H, \mu \neq 0$ .** В предлагаемом разделе мы исследуем фазовую структуру трехмерной модели Гросса – Невье с учетом внешнего хромагнитного поля и химического потенциала  $\mu$ , но при  $T = 0$ . В этом случае из (104) нетрудно получить выражение для эффективного потенциала модели ( $V(\sigma) \equiv V_{H\mu}(\sigma)$ ):

$$V_{H\mu}(\sigma) = V_H(\sigma) - \frac{N\Theta(\mu - \sigma)}{12\pi} B_1(\sigma) - \frac{N\Theta(\mu^2 - eH - \sigma^2)}{12\pi} B_2(\sigma). \tag{116}$$

Здесь  $\Theta(x)$  – ступенчатая функция Хэвисайда и

$$B_1(\sigma) = 4\mu^3 + 8\sigma^3 - 12\sigma^2\mu + 3\mu\sqrt{eH(\mu^2 - \sigma^2)} -$$



$$\begin{aligned}
 & -3\sigma^2\sqrt{eH}\ln [ (\mu + \sqrt{\mu^2 - \sigma^2})/\sigma ], \\
 B_2(\sigma) = & 2\mu^3 - 6\mu\sigma^2 + 4(\sigma^2 + eH)^{3/2} - 3\mu\sqrt{eH(\mu^2 - \sigma^2)} - \\
 & -3eH\sqrt{\sigma^2 + eH} + 3\sigma^2\sqrt{eH}\ln \left[ \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - \sigma^2}}{\sqrt{eH} + \sqrt{\sigma^2 + eH}} \right]. \quad (117)
 \end{aligned}$$

Функции  $B_i(\sigma)$  обладают свойством (при  $\mu^2 \geq eH$ ):

$$B_1(\mu) = B_2(\sqrt{\mu^2 - eH}) = 0. \quad (118)$$

Теперь из (116) легко получить уравнение стационарности:

$$\frac{\partial V_{H\mu}(\sigma)}{\partial \sigma} = 0 = \frac{\partial V_H(\sigma)}{\partial \sigma} - \frac{N\Theta(\mu - \sigma)}{12\pi} b_1(\sigma) - \frac{N\Theta(\mu^2 - eH - \sigma^2)}{12\pi} b_2(\sigma), \quad (119)$$

где  $b_i(\sigma) = \partial B_i(\sigma)/\partial \sigma$ . Отметим, что при выводе (119) мы не учитывали члены, пропорциональные  $\delta(\mu - \sigma)$  и  $\delta(\mu^2 - \sigma^2 - eH)$ . Очевидно, что они должны обратиться в нуль из-за соотношения (118).

Пусть  $H \neq 0$ . В п.2.2 было показано, что при  $\mu = 0$  эффективный потенциал  $V_H(\sigma)$  обязательно имеет глобальный минимум в точке  $\sigma_0(H) \neq 0$ , т.е. киральная инвариантность модели спонтанно нарушается под действием внешних хромагнитных полей. Пусть  $0 < \mu \ll \sigma_0(H)$ . С помощью (116) нетрудно получить, что в этом случае  $V_{H\mu} = V_H + \Delta V$ , где  $\Delta V = O(\mu^2)$ . Следовательно, при достаточно малых значениях  $\mu$  глобальный минимум эффективного потенциала по-прежнему будет находиться в точке  $\sigma_0(H)$ . Покажем, что при достаточно больших значениях  $\mu$  киральная инвариантность модели восстанавливается. Итак, пусть  $\mu \gg \sqrt{eH}, |g|$ . Разобьем полуось  $\sigma \geq 0$ , где необходимо решить уравнение (119), на три множества.

1) Пусть  $\sigma \geq \mu$ . В этом случае (119) имеет вид (89), т.е.  $\partial V_H/\partial \sigma = 0$ . Однако легко показать, что при достаточно больших  $\mu$  точки  $\sigma = 0$  и  $\sigma_0(H)$ , которые формально являются решениями уравнения (89), не удовлетворяют условию (1) и поэтому не являются корнями уравнения (119).

2) Пусть  $\sqrt{\mu^2 - eH} \leq \sigma \leq \mu$ . Здесь уравнение стационарности потенциала  $V_{H\mu}$  имеет вид

$$\sigma \left\{ \frac{2\pi}{g} + 4\mu + \sqrt{eH}\ln \left[ \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - \sigma^2}}{\sqrt{eH} + \sqrt{\sigma^2 + eH}} \right] \right\} = 0.$$

Нетрудно показать, что при достаточно больших значениях  $\mu$  это уравнение не имеет решений, удовлетворяющих условиям (2).

3) Пусть  $0 \leq \sigma \leq \sqrt{\mu^2 - eH}$ . В этом случае уравнение стационарности (119) выглядит так:

$$\sigma \{3\mu + \pi/g\} = 0.$$

Решением его при достаточно больших значениях  $\mu$  будет единственная точка  $\sigma = 0$ , которая удовлетворяет ограничениям (3).

Таким образом, мы показали, что при достаточно больших  $\mu$  из всего множества  $\sigma \geq 0$  только одна точка  $\sigma = 0$  является решением уравнения (119), в ней у потенциала (116) будет находиться абсолютный минимум. Это означает, что при фиксированных значениях  $H$  киральная симметрия (4) модели, спонтанно нарушенная при малых  $\mu$ , обязательно восстанавливается при достаточно больших значениях химического потенциала.

**2.6. Обсуждение результатов.** Как показано в предыдущем разделе, в абелевой теории эффект катализации обусловлен взаимодействием спина фермионов с магнитным полем. В неабелевой теории ситуация более сложная ввиду наличия изоспиновой степени свободы у частиц. В результате для абелевopodobной конфигурации магнитного поля мы эффективно приходим к случаю, рассмотренному выше (см. разд. 1), поскольку на классическом языке движения в изоспиновом и обычном пространствах разделяются. Для неабелевых конфигураций полей разделения движений не происходит, и на спектр частиц оказывают влияние как спин, так и изоспин частиц, а также их относительная ориентация. Именно эта ситуация и обсуждалась в предлагаемом разделе, написанном на основе [50—52].

С учетом сказанного, нами рассмотрено влияние вакуумного глюонного конденсата на фазовую структуру трехмерной модели ГН (в четырехмерии модели этого типа эффективно описывают динамику кварков при низких энергиях). В рамках четырехфермионных моделей глюонный конденсат не является динамической величиной, а, скорее, выступает как внешний параметр, который обычно отождествляется с внешним цветовым полем, например, вида (78)–(80), воздействующим на систему. Влияние абелевopodobных цветовых полей типа (78) на четырехфермионную модель (73) приводит к тем же результатам, что и воздействие внешнего магнитного поля, рассмотренное в предыдущем разделе, на обычную модель ГН, в которой у фермионов нет цветовых степеней свободы. Поэтому здесь этот случай отсутствует, и основное внимание мы затратили на исследование критических свойств теории (73) на фоне внешних неабелевых полей типа (79), (80). Дело в том, что в истинном вакууме КХД глюонный конденсат при низких температурах должен иметь существенно неабелеву форму [47], а поле (79) (или (80)) является хорошим кандидатом на эту роль [49]. Результаты нашего анализа следующие.

Пусть на исходную теорию (73) воздействует внешнее хромомагнитное поле (79). В этом случае модель точно решается при  $N \rightarrow \infty$ . Это означает, что в главном порядке  $1/N$ -разложения эффективный потенциал является суперпозицией элементарных функций. Это единственный пример теоретико-полевой модели, в которой воздействие внешнего поля может быть учтено точно (обычно используется теория возмущений по внешнему полю, т.е. процедура, которая накладывает ограничения на область применимости резуль-

татов вычислений), и отклик системы на хромоманнитное воздействие может быть изучен в широком диапазоне его значений.

Мы показали, что неабелево (а также абелевоподобное) хромоманнитное поле при  $g > 0$  вызывает спонтанное нарушение киральной инвариантности (4), а при  $g < 0$  оно еще больше стабилизирует несимметричный вакуум. Таким образом, чисто хромоманнитный глюонный конденсат вида (78), (79) может служить катализатором спонтанного нарушения киральной симметрии в квантовой хромодинамике. В п.2.2 определено поведение массы фермионов при  $H \rightarrow \infty$  (см. (91)), а также в области малых значений  $H$  (см. (92) при  $g > 0$  и (93) при  $g < 0$ ).

При воздействии на модель внешнего хромозлектрического поля  $E$  вида (80) киральная инвариантность остается ненарушенной при  $g > 0$ . Пусть константа связи  $g < 0$ . Тогда киральная симметрия, спонтанно нарушенная в области малых  $E$ , восстанавливается при достаточно больших значениях  $E$ . Мы нашли критическое значение хромозлектрического поля  $E_c$  (100), при котором происходит фазовый переход второго рода из упорядоченной фазы в неупорядоченную. Кроме того, найдено поведение массы кварков при  $E \rightarrow 0$ , а также в окрестности критического значения внешнего поля (см. п.2.3). Важно подчеркнуть следующую особенность неабелевого хромозлектрического конденсата. В этом случае основное состояние теории Гросса – Невье является стабильным состоянием (во внешнем абелевоподобном хромозлектрическом поле эффективный потенциал модели имеет мнимую часть [36], что говорит о нестабильном вакууме). Этот факт, на наш взгляд, можно трактовать как возможность существования отличных от нуля хромозлектрических компонент глюонного конденсата в КХД.

Пусть наряду с внешним неабелевым хромоманнитным полем отлична от нуля и температура. Тогда, как показано в п.2.4, существует критическая температура  $T_c(H)$ , при которой в модели происходит фазовый переход второго рода из кирально-неинвариантного в кирально-инвариантное состояние термодинамического равновесия. Критическая температура при  $H \rightarrow \infty$  пропорциональна  $\sqrt{eH}$ , а при  $H \rightarrow 0$  поведение  $T_c(H)$  приведено в формулах (114) (при  $g > 0$ ) и (115) (при  $g < 0$ ).

Наконец, был рассмотрен случай, когда отличны от нуля  $H$  и химический потенциал  $\mu$ . Здесь нам удалось доказать, что киральная инвариантность (4) модели, спонтанно нарушенная при малых значениях  $\mu$ , обязательно восстанавливается при достаточно больших  $\mu$ .

В реальном четырехмерном пространстве-времени воздействие внешних калибровочных полей на четырехфермионные модели также изучалось [53, 54]. В работах [53] авторы ограничились только абелевоподобными векторными потенциалами типа (78), а количество полученных ими результатов, конечно, значительно меньше по сравнению с трехмерным случаем. В [54] показано, что различные типы внешних хромоманнитных полей в модели

Намбу – Иона-Лазинию также приводят к спонтанному нарушению киральной симметрии.

### 3. ДИНАМИЧЕСКАЯ ГЕНЕРАЦИЯ ЧЛЕНА ЧЕРНА – САЙМОНСА В ОБОБЩЕННЫХ ЧЕТЫРЕХФЕРМИОННЫХ МОДЕЛЯХ

В предыдущих разделах уже была отмечена важность исследования трехмерных моделей с четырехфермионным взаимодействием в связи с их возможным непосредственным использованием при описании высокотемпературной сверхпроводимости (ВТСП). Существует, однако, еще один подход к построению теории ВТСП, в котором для объяснения этого явления привлекаются частицы с дробными спином и статистикой, т.к. даже идеальный газ таких частиц обладает сверхпроводящими свойствами [55]. В свою очередь, известно, что дробная статистика присуща только тем трехмерным полям, динамика которых определяется лагранжианами, содержащими так называемый член Черна – Саймонса (ЧС):

$$L_{CS} = G \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\mu A_\nu A_\lambda, \quad (120)$$

где  $A_\mu$  – векторное поле (см., например, обзор [56]). Следовательно, важно понимать механизмы возникновения членов ЧС в теории. Можно, конечно, просто добавить  $L_{CS}$  в исходный лагранжиан теории, однако физиков всегда интересовала возможность получить ту или иную величину динамическим путем, т.е. за счет радиационных поправок, т.к. в этом случае физические явления можно описывать меньшим количеством параметров. Отметим, что, даже если в затравочном лагранжиане модели член ЧС отсутствует, в теории с нарушенной  $P$ - и  $T$ -четностью в присутствии массивных фермионов он генерируется за счет квантовых поправок. При этом его величина может существенно зависеть как от конечных температуры и плотности, так и от внешнего поля. В однопетлевом приближении в этом можно убедиться, вычисляя поляризационный оператор (ПО) [57].

В силу того, что лагранжиан (120) не инвариантен относительно преобразования  $P$ -четности  $(t, x, y) \rightarrow (t, -x, y)$ , один из путей получения члена ЧС – динамическое нарушение  $P$ -инвариантности. Как было отмечено в [58], в рамках безмассовой трехмерной квантовой электродинамики не так легко нарушить  $P$ -четность. Поэтому большое внимание было уделено исследованию абелевых калибровочных теорий со скалярными полями [59], где было показано, что член ЧС может возникнуть спонтанным образом. Кроме того, авторы ряда работ [16, 60] пришли к выводу, что в простейших трехмерных моделях с четырехфермионным взаимодействием также возможно динамическое нарушение  $P$ -четности, приводящее в конечном счете к генерации члена ЧС.

В предлагаемом разделе продолжается исследование трехмерных теорий поля непertурбативным методом  $1/N$ -разложения. На этот раз мы рассмотрим две модели с обобщенным четырехфермионным взаимодействием, обращая особое внимание на достаточные условия динамической генерации члена ЧС.

**3.1. Обобщение модели Гросса – Невье.** Рассмотрим следующий лагранжиан:

$$L = \bar{\psi}_1 i \hat{\partial} \psi_1 + \bar{\psi}_2 i \hat{\partial} \psi_2 + \frac{\tilde{G}_1}{2N} [ (\bar{\psi}_1 \psi_1)^2 + (\bar{\psi}_2 \psi_2)^2 ] + \frac{\tilde{G}_2}{N} \bar{\psi}_1 \psi_1 \bar{\psi}_2 \psi_2 + \frac{\tilde{H}_1}{2N} [ (\bar{\psi}_1 \psi_2)^2 + (\bar{\psi}_2 \psi_1)^2 ] + \frac{\tilde{H}_2}{N} \bar{\psi}_1 \psi_2 \bar{\psi}_2 \psi_1. \quad (121)$$

Здесь  $\psi_{1,2}$  – два фундаментальных мультиплетта  $U(N)$ -группы, каждая компонента которых – двухкомпонентный спинор Дирака. Ради простоты в (121) мы опустили символ суммирования по индексам  $U(N)$ -группы, поэтому выражения типа  $\bar{\psi}_i \psi_j$  там следует понимать так:

$$\bar{\psi}_i \psi_j = \sum_{k=1}^N \bar{\psi}_{ik} \psi_{jk}.$$

В формуле (121) используются  $2 \times 2$   $\gamma$ -матрицы из приложения А. Необходимо отметить инвариантность этого лагранжиана относительно непрерывной  $U(1)$  калибровочной группы преобразований

$$U(1) : \psi_1 \rightarrow e^{i\alpha} \psi_1; \quad \psi_2 \rightarrow e^{i\alpha} \psi_2, \quad (122)$$

а также преобразования четности  $P$  и двух дискретных преобразований  $\Gamma^3$  и  $\Gamma^5$ :

$$\begin{aligned} P & : \psi_{1k}(t, x, y) \longleftrightarrow \gamma^1 \psi_{2k}(t, -x, y), \\ \Gamma^3 & : \psi_{1k}(t, x, y) \longleftrightarrow \psi_{2k}(t, x, y), \\ \Gamma^5 & : \psi_{1k}(t, x, y) \longleftrightarrow i \psi_{2k}(t, x, y). \end{aligned} \quad (123)$$

При изучении теории поля (121) удобно использовать другие обозначения. Построим из  $\psi_1$  и  $\psi_2$  еще один фундаментальный мультиплет  $\psi$   $U(N)$ -группы, в котором каждая компонента  $\psi_k$  будет уже четырехкомпонентным спинором Дирака (см. разд.1):  $\psi_k = \begin{pmatrix} \psi_{1k} \\ \psi_{2k} \end{pmatrix}$ ,  $k = 1, \dots, N$ . В терминах  $\psi$  лагранжиан (121) представим в виде

$$L = \bar{\psi} i \hat{\partial} \psi + \frac{G_1}{2N} (\bar{\psi} \psi)^2 + \frac{G_2}{2N} (\bar{\psi} \tau \psi)^2 + \frac{H_1}{2N} (i \bar{\psi} \Gamma^5 \psi)^2 + \frac{H_2}{2N} (i \bar{\psi} \Gamma^3 \psi)^2. \quad (124)$$

В выражении (124) опущен символ суммирования по индексам  $U(N)$ -группы. Однако здесь и ниже это суммирование подразумевается. В отличие от (121) лагранжиан (124) содержит  $4 \times 4$ -матрицы  $\Gamma^\mu, \Gamma^3, \Gamma^5$ , которые представлены в приложении А, а  $4 \times 4$ -матрица  $\tau$  имеет вид  $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Кроме того,

$$\tilde{G}_1 = G_1 + G_2; \quad \tilde{G}_2 = G_2 - G_1; \quad \tilde{H}_1 = H_1 - H_2; \quad \tilde{H}_2 = H_1 + H_2.$$

Дискретные преобразования (123) нетрудно переписать, используя четырех-компонентные спиноры

$$P : \psi(t, x, y) \rightarrow i\Gamma^1\Gamma^5\psi(t, -x, y); \quad \Gamma^5 : \psi \rightarrow \Gamma^5\psi; \quad \Gamma^3 : \psi \rightarrow \Gamma^3\psi.$$

Для исследования фазовой структуры модели (121)–(124) введем вспомогательный лагранжиан

$$\tilde{L} = \bar{\psi}i\hat{\partial}\psi + \sigma_1(\bar{\psi}\psi) + \sigma_2(\bar{\psi}\tau\psi) + \phi_1(i\bar{\psi}\Gamma^5\psi) + \phi_2(i\bar{\psi}\Gamma^3\psi) - \frac{N}{2} \sum_{k=1}^2 \left( \frac{\sigma_k^2}{G_k} + \frac{\phi_k^2}{H_k} \right), \quad (125)$$

где  $\sigma_i, \phi_k$  – вспомогательные вещественные, соответственно, скалярные и псевдоскалярные поля. Теории поля (124) и (125) эквивалентны между собой потому, что с помощью уравнений движения можно исключить поля  $\sigma_i, \phi_k$  из (125) и получить лагранжиан (124). Нетрудно показать, что относительно дискретных симметрий (123) вспомогательные поля преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} P : \sigma_1 &\rightarrow \sigma_1; \quad \sigma_2 \rightarrow -\sigma_2; \quad \phi_1 \rightarrow -\phi_1; \quad \phi_2 \rightarrow \phi_2; \\ \Gamma^5 : \sigma_1 &\rightarrow -\sigma_1; \quad \sigma_2 \rightarrow \sigma_2; \quad \phi_1 \rightarrow -\phi_1; \quad \phi_2 \rightarrow \phi_2; \\ \Gamma^3 : \sigma_1 &\rightarrow -\sigma_1; \quad \sigma_2 \rightarrow \sigma_2; \quad \phi_1 \rightarrow \phi_1; \quad \phi_2 \rightarrow -\phi_2. \end{aligned} \quad (126)$$

Исходя из выражения (125), можно найти эффективное действие теории, которое в однопетлевом приближении ( $\equiv$  в главном порядке  $1/N$ -разложения в модели (124)) имеет вид

$$S_{\text{eff}}(\sigma, \phi) = -N \sum_{k=1}^2 \left( \frac{\sigma_k^2}{2G_k} + \frac{\phi_k^2}{2H_k} \right) - i\text{Tr} \ln \hat{\Delta}, \quad (127)$$

где

$$\hat{\Delta} = i\hat{\partial} + \sigma_1 + \sigma_2\tau + i\phi_1\Gamma^5 + i\phi_2\Gamma^3.$$

Здесь поля  $\sigma_i, \phi_k$  зависят от точек пространства-времени. Чтобы получить эффективный потенциал модели, нужно воспользоваться определением

$$V(\sigma, \phi) = -S_{\text{eff}}(\sigma, \phi) |_{\sigma, \phi = \text{const}}, \quad (128)$$

в котором предполагается, что бозонные поля уже не зависят от координат. С помощью (127)–(128) можно найти следующее выражение для эффективного потенциала модели (124) в главном порядке  $1/N$ -разложения:

$$V(\sigma, \phi) = N \sum_{k=1}^2 \left( \frac{\sigma_k^2}{2G_k} + \frac{\phi_k^2}{2H_k} - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln(p^2 + M_k^2) \right), \quad (129)$$

где

$$M_{1,2} = |\sigma_2 \pm \sqrt{\sigma_1^2 + \phi_1^2 + \phi_2^2}|. \quad (130)$$

Формула (129) выводится аналогично тому, как был получен эффективный потенциал в работе [61]. Проинтегрируем в (129) по области  $0 \leq p^2 \leq \Lambda^2$ :

$$V(\sigma, \phi) = N \sum_{k=1}^2 \left[ \frac{\sigma_k^2}{2} \left( \frac{1}{G_k} - \frac{2\Lambda}{\pi^2} \right) + \frac{\phi_k^2}{2} \left( \frac{1}{H_k} - \frac{2\Lambda}{\pi^2} \right) + \frac{M_k^3}{6\pi} \right]. \quad (131)$$

Теперь, чтобы исключить из (131) параметр обрезания  $\Lambda$ , введем перенормированные константы связи с помощью нормировочных условий ( $i = 1, 2$ ):

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{\partial^2 V}{(\partial \sigma_i)^2} \Big|_{\sigma_i = m} &= \frac{1}{G_i} - \frac{2\Lambda}{\pi^2} + \frac{2m}{\pi} \equiv \frac{1}{g_i(m)}, \\ \frac{1}{N} \frac{\partial^2 V}{(\partial \phi_i)^2} \Big|_{\phi_i = m} &= \frac{1}{H_i} - \frac{2\Lambda}{\pi^2} + \frac{2m}{\pi} \equiv \frac{1}{h_i(m)}. \end{aligned} \quad (132)$$

Здесь необходимо пояснить, что в первом из равенств (132) берется значение функции  $\partial^2 V / (\partial \sigma_i)^2$  в точке  $\phi_{1,2} = 0$ ,  $\sigma_i = m$ ,  $\sigma_j = 0$  ( $i \neq j$ ). Во втором равенстве у точки нормировки функции  $\partial^2 V / (\partial \phi_i)^2$  отлична от нуля лишь компонента  $\phi_i = m$ . Соотношения (132) дают нам возможность переписать эффективный потенциал в терминах ультрафиолетово-конечных величин:

$$V(\sigma, \phi) = N \sum_{k=1}^2 \left[ \frac{g_k}{2} \sigma_k^2 + \frac{h_k}{2} \phi_k^2 + \frac{M_k^3}{6\pi} \right], \quad (133)$$

где

$$g_i = \frac{1}{g_i(m)} - \frac{2m}{\pi}, \quad h_j = \frac{1}{h_j(m)} - \frac{2m}{\pi}. \quad (134)$$

Напомним, что голые константы связи  $G_i$ ,  $H_j$  не зависят от нормировочной массы  $m$ . В силу этого из (132)–(134) следует, что константы  $g_i$ ,  $h_j$  также не зависят от  $m$ , т.е. эффективный потенциал (133) является ренормализационно-инвариантной величиной.

Таким образом, мы фактически продемонстрировали, что в главном порядке  $1/N$ -разложения модель (121) перенормируема. Полное доказательство

того, что теория поля (121) перенормируема, не является предметом нашего рассмотрения. Однако мы думаем, что это так и есть, опираясь на работы [7,62], в которых было доказано, что простейшие трехмерные модели с четырехфермионным взаимодействием перенормируемы в рамках непертурбативного метода  $1/N$ -разложения.

**3.2. Фазовая структура модели.** Здесь будет рассмотрена зависимость фазовой структуры модели от ренорминвариантных констант  $g_i, h_j$  (134). Для этого необходимо найти вакуумные средние вспомогательных полей, которые, как известно, определяются из точки глобального минимума эффективного потенциала. С этой целью напишем уравнения стационарности для функции (133):

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \sigma_1} &= N\sigma_1 \left[ g_1 + \frac{M_1 + M_2}{2\pi} + \frac{2\sigma_2^2}{\pi(M_1 + M_2)} \right] = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial \sigma_2} &= N\sigma_2 \left[ g_2 + \frac{M_1 + M_2}{2\pi} + \frac{2(\sigma_1^2 + \phi_1^2 + \phi_2^2)}{\pi(M_1 + M_2)} \right] = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial \phi_i} &= N\phi_i \left[ h_i + \frac{M_1 + M_2}{2\pi} + \frac{2\sigma_2^2}{\pi(M_1 + M_2)} \right] = 0.\end{aligned}\quad (135)$$

В последнем уравнении  $i = 1, 2$ . Далее необходимо найти все решения системы уравнений (135) и взять то из них, на котором потенциал принимает наименьшее значение. Тем самым будут найдены вакуумные средние  $\langle \sigma_i \rangle, \langle \phi_j \rangle$ . Чтобы не загромождать текст утомительными расчетами, мы не будем приводить здесь подробное решение этой системы, т.к. похожие уравнения исследовались в нашей работе [61]. Поэтому сразу представим точку глобального минимума потенциала, ее свойства симметрии, а также ее зависимость от констант  $g_i, h_j$ .

Разобьем плоскость констант связи  $(h_1, h_2)$  на три области:

$$I_1 = \{h_1, h_2 > 0\}, \quad I_2 = \{h_1 > h_2, h_2 < 0\}, \quad I_3 = \{h_1 < h_2, h_1 < 0\}, \quad (136)$$

и будем в дальнейшем использовать обозначения  $\langle \sigma_i \rangle \equiv \sigma_i, \langle \phi_j \rangle \equiv \phi_j$ .

Пусть  $(h_1, h_2) \in I_1$ . В этом случае константы связи  $(g_1, g_2)$  могут находиться в одной из трех областей:

$$a_1 = \{g_1, g_2 > 0\}, \quad b_1 = \{g_2 < 0, g_2 < g_1\}, \quad c_1 = \{g_1 < 0, g_2 > g_1\}, \quad (137)$$

где вакуумные средние имеют вид

$$\begin{aligned}(h_1, h_2) \in I_1, (g_1, g_2) \in a_1 &: \sigma_1 = \sigma_2 = \phi_1 = \phi_2 = 0, \\ (h_1, h_2) \in I_1, (g_1, g_2) \in b_1 &: \sigma_1 = \phi_{1,2} = 0, \sigma_2 = -\pi g_2, \\ (h_1, h_2) \in I_1, (g_1, g_2) \in c_1 &: \sigma_2 = \phi_{1,2} = 0, \sigma_1 = -\pi g_1.\end{aligned}$$



Пусть  $(h_1, h_2) \in I_2$ . Плоскость параметров  $(g_1, g_2)$  разбивается на три области:

$$a_2 = \{g_1, g_2 > h_2\}, \quad b_2 = \{g_2 < h_2, g_2 < g_1\}, \quad c_2 = \{g_1 < h_2, g_2 > g_1\}, \quad (138)$$

в которых вакуумные средние вспомогательных полей имеют вид

$$(h_1, h_2) \in I_2, \quad (g_1, g_2) \in a_2 : \sigma_1 = \sigma_2 = \phi_1 = 0, \phi_2 = -\pi h_2, \quad (139)$$

$$(h_1, h_2) \in I_2, \quad (g_1, g_2) \in b_2 : \sigma_1 = \phi_1 = \phi_2 = 0, \sigma_2 = -\pi g_2,$$

$$(h_1, h_2) \in I_2, \quad (g_1, g_2) \in c_2 : \sigma_2 = \phi_1 = \phi_2 = 0, \sigma_1 = -\pi g_1.$$

Пусть  $(h_1, h_2) \in I_3$ . В этом случае константы связи  $(g_1, g_2)$  обязаны находиться в одной из трех областей:

$$a_3 = \{g_1, g_2 > h_1\}, \quad b_3 = \{g_2 < h_1, g_2 < g_1\}, \quad c_3 = \{g_1 < h_1, g_2 > g_1\}, \quad (140)$$

в которых точка абсолютного минимума эффективного потенциала имеет вид

$$(h_1, h_2) \in I_3, \quad (g_1, g_2) \in a_3 : \sigma_1 = \sigma_2 = \phi_2 = 0, \phi_1 = -\pi h_1, \quad (141)$$

$$(h_1, h_2) \in I_3, \quad (g_1, g_2) \in b_3 : \sigma_1 = \phi_1 = \phi_2 = 0, \sigma_2 = -\pi g_2, \quad (142)$$

$$(h_1, h_2) \in I_3, \quad (g_1, g_2) \in c_3 : \sigma_2 = \phi_1 = \phi_2 = 0, \sigma_1 = -\pi g_1. \quad (143)$$

Таким образом, для любых фиксированных значений констант связи  $g_{1,2}$  и  $h_{1,2}$  мы можем указать точку глобального минимума эффективного потенциала, а также свойства симметрии основного состояния исходной теории. Для этого необходимо найти те из преобразований (122)–(123), относительно которых эта точка инвариантна.

Введем теперь новые обозначения. Пусть  $A_i$  – множество ( $i = 1, 2, 3$ ) значений констант связи  $g_k, h_l$  такое, что  $(g_1, g_2) \in a_i$  и  $(h_1, h_2) \in I_i$ . Здесь  $I_i$  определены в (136), а множества  $a_i$  нетрудно найти в формулах (137), (138) и (140), т.е.

$$A_i = \{g_1, g_2, h_1, h_2 : (g_1, g_2) \in a_i, (h_1, h_2) \in I_i\}. \quad (144)$$

Аналогично определим следующие множества параметров ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$B_i = \{g_1, g_2, h_1, h_2 : (g_1, g_2) \in b_i, (h_1, h_2) \in I_i\}, \quad (145)$$

$$C_i = \{g_1, g_2, h_1, h_2 : (g_1, g_2) \in c_i, (h_1, h_2) \in I_i\}. \quad (146)$$

Введем, наконец, еще два множества:

$$B = \bigcup_{i=1}^3 B_i, \quad C = \bigcup_{i=1}^3 C_i. \quad (147)$$

Из вышесказанного следует, что обобщенная четырехфермионная теория поля (121) описывает систему, которая может находиться в пяти различных фазовых состояниях, причем ни в одной из них непрерывная калибровочная симметрия (122) не нарушается.

1) Если константы связи находятся в области  $A_1$ , то исходная симметрия не нарушена, и вакуумные средние вспомогательных полей равны нулю.

2) В области констант связи  $B$  вакуумные средние имеют вид (142). С помощью (126) нетрудно показать, что здесь мы имеем фазу только с нарушением  $P$ -четности.

3) Пусть мы находимся в области  $C$  (147). Здесь вакуум  $P$  четен, но спонтанно нарушены  $\Gamma^5$ - и  $\Gamma^3$ -симметрии. Вакуумные средние полей имеют вид (143).

4) Предположим, что константы связи принадлежат множеству  $A_2$ . В этом случае вспомогательные поля имеют вакуумные средние вида (139), а основное состояние теории  $P$ - и  $\Gamma^5$ -инвариантно. При этом, однако, спонтанно нарушена  $\Gamma^3$ -симметрия.

5) Остановимся, наконец, на ситуации, когда константы связи находятся в области  $A_3$ . Здесь мы имеем фазу, в которой спонтанно нарушены как  $P$ -четность, так и киральная симметрия  $\Gamma^5$ , а вакуумные средние полей даны в (141). Это один из наиболее интересных результатов предлагаемого раздела, т.к. во всех простейших четырехфермионных моделях [7, 16, 60] такая фаза отсутствует.

**3.3. Спектр масс модели.** В силу того, что в модели происходит спонтанное нарушение некоторых симметрий, и часть вспомогательных полей приобретают ненулевые вакуумные средние, фермионы становятся массивными. Легче всего это заметить, если в (125) сделать сдвигу:  $\sigma_i \rightarrow \sigma_i + \langle \sigma_i \rangle$ ,  $\phi_j \rightarrow \phi_j + \langle \phi_j \rangle$ , т.к. при этом в лагранжиане появится фермионный массовый член. В зависимости от того, в какой из фаз находится теория, массовый член фермионов имеет вид

$$\begin{aligned}
 A_2 & : -\pi h_2(i\bar{\psi}\Gamma^3\psi) = -i\pi h_2(\bar{\psi}_1\psi_2 - \bar{\psi}_2\psi_1), \\
 A_3 & : -\pi h_1(i\bar{\psi}\Gamma^5\psi) = \pi h_1(\bar{\psi}_1\psi_2 + \bar{\psi}_2\psi_1), \\
 B & : -\pi g_2(\bar{\psi}\tau\psi) = -\pi g_2(\bar{\psi}_1\psi_1 + \bar{\psi}_2\psi_2), \\
 C & : -\pi g_1(\bar{\psi}\psi) = -\pi g_1(\bar{\psi}_1\psi_1 - \bar{\psi}_2\psi_2), \tag{148}
 \end{aligned}$$

а в фазе  $A_1$ , очевидно, фермионы безмассовы. Значение массы ферми-полей в каждой из вышеперечисленных фаз нетрудно найти с помощью (148).

Чтобы найти спектр масс бозонов в главном порядке  $1/N$ -разложения, обратимся к эффективному действию (127). Известно, что оно является производящим функционалом одночастично-неприводимых (1ЧН) функций Грина бозонных полей. Следовательно, для того, чтобы найти 1ЧН функцию

Грина, например, двух  $\sigma_1$  полей, необходимо дважды продифференцировать  $S_{\text{eff}}$  по полю  $\sigma_1$  и в полученном выражении приравнять все поля их вакуумным средним.

Рассмотрим фазу  $C$ , в которой  $\langle \sigma_1 \rangle \neq 0$ , а вакуумные средние остальных полей равны нулю (чтобы избежать введения дополнительных математических символов, мы будем каждую фазу обозначать так же, как и соответствующую ей область констант связи). В этом случае

$$\Gamma_{\sigma_1\sigma_1}(x, y) \equiv \frac{\delta^2 S_{\text{eff}}(\sigma, \phi)}{N \delta\sigma_1(x) \delta\sigma_1(y)} = -i \text{Tr} \left[ \hat{\Delta}_{xy}^{-1} \hat{\Delta}_{yx}^{-1} \right] + \frac{\delta(x-y)}{G_1}, \quad (149)$$

где

$$\left( \hat{\Delta}^{-1} \right)_{xy}^{\alpha\beta} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[ \frac{\hat{p} + \langle \sigma_1 \rangle}{\langle \sigma_1 \rangle^2 - p^2} \right]^{\alpha\beta} \exp(ip(x-y)). \quad (150)$$

Символ  $\text{Tr}$  означает след по спинорным индексам. Можно показать, что фурье-образ функции (149) имеет вид

$$\Gamma_{\sigma_1\sigma_1}(p) = \frac{4 \langle \sigma_1 \rangle^2 - p^2}{2\pi \sqrt{-p^2}} \Gamma(p), \quad \Gamma(p) = \text{arctg} \left[ \frac{\sqrt{-p^2}}{2 \langle \sigma_1 \rangle} \right]. \quad (151)$$

Здесь, как и в (150), импульсное пространство имеет метрику Минковского. Аналогично можно показать, что в этой фазе

$$\Gamma_{\sigma_2\sigma_2}(x, y) = \frac{\delta(x-y)}{G_2} - i \text{Tr} \left[ \tau \hat{\Delta}_{xy}^{-1} \tau \hat{\Delta}_{yx}^{-1} \right],$$

$$\Gamma_{\phi_2\phi_2}(x, y) = \frac{\delta(x-y)}{H_2} + i \text{Tr} \left[ \Gamma^3 \hat{\Delta}_{xy}^{-1} \Gamma^3 \hat{\Delta}_{yx}^{-1} \right],$$

$$\Gamma_{\phi_1\phi_1}(x, y) = \frac{\delta(x-y)}{H_1} + i \text{Tr} \left[ \Gamma^5 \hat{\Delta}_{xy}^{-1} \Gamma^5 \hat{\Delta}_{yx}^{-1} \right],$$

что соответствует следующему импульсному представлению этих функций ( $k=1,2$ ):

$$\Gamma_{\sigma_2\sigma_2}(p) = g_2 - g_1 + \frac{4 \langle \sigma_1 \rangle^2 - p^2}{2\pi \sqrt{-p^2}} \Gamma(p), \quad (152)$$

$$\Gamma_{\phi_k\phi_k}(p) = h_k - g_1 + \frac{\sqrt{-p^2}}{2\pi} \Gamma(p). \quad (153)$$

Отметим, что в этой, а также других фазах исходной модели, смешанные 1ЧН функции Грина двух полей ( $\Gamma_{\sigma_1\sigma_2}$ ,  $\Gamma_{\sigma_1\phi_1}$  и т.д.) равны нулю. Функции, обратные к величинам (151)–(153), являются пропагаторами соответствующих бозонных полей. Хорошо известно, что сингулярности пропагаторов по

переменной  $p^2$  определяют спектр масс бозонов. Аналитические свойства функций, похожих на (151)–(153), исследовались в [7], откуда следует, что для констант связи из области

$$\tilde{C} = \{ h_1 \geq g_1, h_2 \geq g_1, g_2 \geq g_1 \}$$

эти функции не обращаются в нуль при  $p^2 < 0$ . Так как  $\tilde{C} \supset C$  (см. (147)), то очевидно, что в фазе  $C$  у пропагаторов отсутствует тахионная сингулярность. Также можно показать, что скалярное поле  $\sigma_1$  соответствует стабильной частице с удвоенной массой фермиона, которая есть  $\langle \sigma_1 \rangle$ . Частица  $\sigma_2$  является псевдоскалярным резонансом, которому соответствует полюс пропагатора на втором листе его области аналитичности. Полям  $\phi_{1,2}$  соответствуют два стабильных связанных состояния фермионов с ненулевой энергией связи. Одна из этих частиц – скаляр ( $\phi_1$ ), другая – псевдоскаляр ( $\phi_2$ ).

Чтобы получить 1ЧН двухточечные функции Грина в фазе  $B$ , где только  $\langle \sigma_2 \rangle \neq 0$ , нужно в формулах (151)–(153) сделать замену  $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2, g_1 \leftrightarrow g_2$ .

Если же мы находимся в одной из фаз  $A_{2,3}$ , где  $\langle \phi_i \rangle \neq 0$ , а вакуумные средние полей  $\phi_j, \sigma_{1,2}$  равны нулю ( $i \neq j$ ), то следующая замена обозначений в формулах (151)–(153)  $\sigma_1 \leftrightarrow \phi_i, \sigma_2 \leftrightarrow \phi_j, g_1 \leftrightarrow h_i, g_2 \leftrightarrow h_j$  даст нам двухточечные 1ЧН функции Грина в соответствующей фазе теории. Спектр масс бозонов в фазах  $B, A_2, A_3$  может быть описан так же, как и в фазе  $C$ . Кроме того, в них отсутствуют тахионы.

Наконец, отметим, что в фазе  $A_1$ , где фермионы безмассовы, пропагаторы бозонных полей имеют сингулярность типа  $\sqrt{-p^2}$ , что указывает на присутствие безмассовых бозонов в спектре масс теории.

**3.4. Некоторые частные случаи.** В этом разделе мы рассмотрим условия, при которых исходная модель (121)–(124) инвариантна относительно непрерывных симметрий. Прежде всего, отметим, что без всяких ограничений теория симметрична относительно следующей калибровочной группы:

$$U(1) : \psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi. \quad (154)$$

Эта симметрия остается ненарушенной при любых значениях констант связи. Если наложить на параметры модели ограничения, то в теории появятся дополнительные непрерывные симметрии. Рассмотрим несколько случаев.

а) Предположим, что голые константы связи  $G_2, H_2$  произвольны, а

$$G_1 = H_1 \quad (155)$$

(следовательно,  $g_1 = h_1 \equiv g$ ). Тогда, кроме  $U(1)$  (154), теория будет инвариантна относительно киральной группы преобразований:

$$U_5(1) : \psi \rightarrow \exp(i\alpha\Gamma^5)\psi \equiv \begin{pmatrix} \cos \alpha \psi_1 + \sin \alpha \psi_2 \\ \cos \alpha \psi_2 - \sin \alpha \psi_1 \end{pmatrix}. \quad (156)$$

Из п.3.2 следует, что в этом случае в модели будут реализованы только фазы  $A_1, A_2, B$  и  $C$  (фаза  $A_3$  кирально-эквивалентна фазе  $C$ , т.е. вакуумные средние вида (141) с помощью преобразования из группы (156) можно привести к виду (143)). Соответствующие этим фазам области констант связи  $(g, g_2, h_2)$  обозначим как  $A_{15}, A_{25}, B_5, C_5$ , где

$$A_{15} = \{g, h_2, g_2 > 0\}, \quad A_{25} = \{g, g_2 > h_2; h_2 < 0\}, \quad C_5 = \{h_2, g_2 > g; g < 0\}, \quad (157)$$

а область  $B_5$  образует те значения констант связи, которые не принадлежат множествам (157). Нетрудно видеть, что только  $C_5$  находится на границе области  $C$  (147), а множества  $A_{15}, A_{25}, B_5$  лежат внутри соответствующих областей  $A_1, A_2, B$  (144)–(147).

Теперь очевидно, что в исходной модели со связью (155) непрерывная киральная инвариантность (156) спонтанно нарушена только в фазе  $C$ , при этом, как следует из предыдущего раздела, пропагатор поля  $\phi_1$  сингулярен в точке  $p^2 = 0$  (см. (153) при  $g_1 = h_1$ ), т.е. в теории появляется голдстоуновская частица массы нуль.

б) Если  $G_1 = H_2$ , а  $G_2, H_1$  – произвольны, то в модели дополнительно к  $U(1)$  (154) возникнет еще одна непрерывная симметрия:

$$U_3(1) : \psi \rightarrow \exp(i\alpha\Gamma^3)\psi. \quad (158)$$

Этот случай можно описать аналогично (а), поэтому мы не будем на нем подробно останавливаться.

в) Если мы хотим, чтобы модель была инвариантна относительно преобразований из группы  $U(1) \times U_\tau(1)$ , где

$$U_\tau(1) : \psi \rightarrow \exp(i\alpha\tau)\psi, \quad (159)$$

то необходимо наложить связь  $H_1 = H_2 \equiv H$ . При этом, очевидно, двухкомпонентные спиноры и вспомогательные поля преобразуются следующим образом:

$$U_\tau(1) : \psi_1 \rightarrow e^{i\alpha}\psi_1; \quad \psi_2 \rightarrow e^{-i\alpha}\psi_2; \quad (\phi_1 - i\phi_2) \rightarrow \exp(-2i\alpha)(\phi_1 - i\phi_2) \quad (160)$$

(поля  $\sigma_i$  инвариантны относительно преобразования (159)). Ясно, что в этом случае модель также точно решается в лидирующем порядке  $1/N$ -разложения, и каждый без труда может (используя результаты предыдущих разделов) представить ее фазовый портрет, который состоит из четырех фаз  $A_1, A_2, B, C$ . (Вакуумное среднее  $\langle \phi_1 \rangle \neq 0$  фазы  $A_3$  может быть преобразовано с помощью (160) в  $\langle \phi_2 \rangle \neq 0$ , т.е. в вакуумное среднее бозонных полей фазы  $A_2$ . Следовательно, эти фазы унитарно эквивалентны друг другу относительно преобразований (159), поэтому  $A_3$  мы не включаем в фазовый портрет модели при указанном выше ограничении на константы связи.) С помощью (160)

нетрудно видеть, что в фазе  $A_2$  симметрия  $U_\tau(1)$  спонтанно нарушена. При  $H = 0$  получается теория, которая уже исследовалась в связи с явлением высокотемпературной сверхпроводимости [16, 60], однако в ней  $U_\tau(1)$ -симметрия никоим образом не нарушается.

г) Есть еще один класс моделей вида

$$L_{VP} = \bar{\psi}i\hat{\partial}\psi + V(\bar{\psi}\Gamma^\mu\psi)^2 + P(\bar{\psi}\Gamma^\nu\tau\psi)^2, \quad (161)$$

инвариантных относительно  $U_\tau(1)$ . Этот лагранжиан также является частным случаем обобщенной модели (121)–(124) при  $N = 1$ , т.е. когда спиноры  $\psi, \psi_1, \psi_2$  не имеют индексов  $U(N)$ -группы. В самом деле, используя преобразования Фирца (А.6) для двухкомпонентных спиноров Дирака (см. приложение А), нетрудно показать, что

$$L_{VP} = \bar{\psi}_1i\hat{\partial}\psi_1 + \bar{\psi}_2i\hat{\partial}\psi_2 - 3(V + P)[(\bar{\psi}_1\psi_1)^2 + (\bar{\psi}_2\psi_2)^2] + \\ + (P - V)[4\bar{\psi}_1\psi_2\bar{\psi}_2\psi_1 + 2\bar{\psi}_1\psi_1\bar{\psi}_2\psi_2]. \quad (162)$$

Вводя теперь голые константы  $G_i, H_j$  (см. (124)), имеем для лагранжиана (162)  $H_2 = H_1, G_2 = H_1 + G_1$ . Следовательно, при описании фазовой структуры модели достаточно знать величины параметров  $h_1$  и  $g_1$ . Тогда при  $h_1 > 0, g_1 > 0$  будет фаза  $A_1$ , при  $h_1 > 0, g_1 < 0$  – фаза  $C$ , при  $h_1 < 0, g_1 < 0$  – фаза  $B$ , и при  $h_1 < 0, g_1 > 0$  мы получаем фазу  $A_2$  со спонтанным нарушением  $U_\tau(1)$ -инвариантности.

д) Наконец, возможна ситуация, когда теория инвариантна относительно преобразований из группы  $U(2)$ :

$$U(2) : \psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \rightarrow U \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \quad (163)$$

(В (163)  $U$  есть  $2 \times 2$  унитарные матрицы.) Нетрудно видеть, что в этом случае  $G_1 = H_1 = H_2 \equiv H$ , т.е., как следует из определений (132)–(134),  $g_1 = h_1 = h_2 \equiv h$ . Таким образом, здесь мы имеем всего две независимые константы связи, поэтому фазовый портрет модели выглядит особенно просто. Так, безмассовая фаза реализуется при  $g_2, h > 0$ . Модель находится в фазе  $B$ , когда константы связи удовлетворяют соотношениям  $g_2 < 0, h > g_2$ . При этом  $U(2)$ -симметрия остается ненарушенной. Если  $h < 0$  и  $g_2 > h$ , то мы имеем фазу  $C$ , в которой  $U(2)$ -симметрия спонтанно нарушается до  $U(1) \times U_\tau(1)$ , а в спектре масс теории присутствуют голдстоуновские бозоны. Остальные свойства модели, находящейся в одной из фаз  $B$  или  $C$ , остаются неизменными и приведены в предыдущих разделах.

Если в лагранжиане (161) положить  $P = 0$ , то получится теория с вектор-векторным взаимодействием фермионов. При  $N = 1$  она является частным случаем обобщенной модели Гросса – Невье (121)–(124), в которой

$G_1 = H_1 = H_2 \equiv H, G_2 = 2H$ , т.е. имеется  $U(2)$ -инвариантность. Очевидно, что здесь, кроме  $A_1$ , возможна только фаза  $B$  без нарушения  $U(2)$ -инвариантности.

**3.5. Динамическая генерация члена ЧС.** Продолжим исследование обобщенной модели (121) и рассмотрим условия, при которых в ней возможна спонтанная генерация члена Черна – Саймонса (120). Для этого сделаем глобальную непрерывную калибровочную симметрию (122) локальной, т.е. введем в теорию векторное калибровочное поле  $A_\mu$ , лагранжиан взаимодействия которого с фермионами имеет вид

$$L_{\text{int}} \sim \bar{\psi} \Gamma^\mu \psi A_\mu \equiv (\bar{\psi}_1 \gamma^\mu \psi_1 + \bar{\psi}_2 \gamma^\mu \psi_2) A_\mu.$$

Мы будем предполагать, что полный лагранжиан системы не содержит кинетического члена Максвелла для калибровочного поля, т.е.

$$L_{\text{tot}} = L + L_{\text{int}}, \quad (164)$$

где  $L$  дан в (121). Предположим далее, что константы взаимодействия находятся в областях  $B$  или  $C$  (147), где только поля  $\sigma_i$  могут иметь ненулевые вакуумные средние. Сделав в (164) сдвигу  $\sigma_i \rightarrow \sigma_i + \langle \sigma_i \rangle$ , мы получаем в  $L_{\text{tot}}$  массовый фермионный член диагонального вида

$$L_{\text{tot}} = \sum_{k=1}^2 \bar{\psi}_k (i\hat{\partial} + m_k) \psi_k + \dots \quad (165)$$

Здесь  $m_k$  обозначает массу  $k$ -го спинорного мультиплетта. Опираясь на этот лагранжиан, которому будут соответствовать правила Фейнмана с массивными фермионными пропагаторами, можно найти радиационные поправки к эффективному действию, имеющие слагаемое, пропорциональное  $A_\mu^2$ :

$$S_{\text{eff}} = \int d^3 p \tilde{A}_\mu(-p) \pi^{\mu\nu} \tilde{A}_\nu(p) + \dots, \quad (166)$$

где  $\tilde{A}_\mu(p)$  – фурье-образ поля  $A_\mu(x)$ ,  $\pi^{\mu\nu}$  – поляризованный оператор калибровочного поля, который в однопетлевом приближении при малых значениях импульсов имеет вид

$$\pi^{\mu\nu} \sim \varepsilon^{\mu\nu\alpha} p_\alpha \sum_{k=1}^2 \text{sign } m_k. \quad (167)$$

Подставляя (167) в (166) и переходя в координатное представление, получаем член ЧС, который генерируется динамическим образом, т.е. с помощью радиационных поправок:

$$S_{CS} \sim (\text{sign } m_1 + \text{sign } m_2) \int d^3 x \varepsilon^{\mu\nu\alpha} A_\mu \partial_\nu A_\alpha. \quad (168)$$

Отсюда видно, что в фазе  $B$  модели, где  $m_1 = m_2$  (см.(148)) и  $P$ -четность спонтанно нарушена, член ЧС не равен нулю, однако в фазе  $C$ , где массы фермионов противоположны по знаку,  $S_{CS} = 0$ .

Обратимся теперь к случаю, когда константы связи лежат в областях  $A_{2,3}$  (144). Здесь спонтанно возникает фермионный массовый член недиагонального вида (см.(148)), поэтому формула (168) неприменима. В этом случае можно сделать унитарное преобразование фермионных полей:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

которое, например, для области  $A_3$  имеет вид  $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ . В терминах спиноров  $f_i$  массовые члены модели в фазах  $A_{2,3}$  будут уже диагональными, но с противоположными знаками масс. Поэтому член ЧС не возникает динамическим образом ни в  $A_2$ -, ни в  $A_3$ -фазе согласно формуле (168).

Следовательно, мы имеем пример явления, когда  $P$ -четность спонтанно нарушена (в фазе  $A_3$ ), но член ЧС не генерируется.

**3.6. Структура вакуума в  $(\bar{\psi}\lambda^a\psi)^2$ -теории.** В предлагаемом подразделе будет исследована в главном порядке  $1/N$ -разложения фазовая структура трехмерной четырехфермионной теории поля вида

$$L_\psi = i\bar{\psi}\hat{\partial}\psi + m\bar{\psi}\psi + g(\bar{\psi}\lambda^a\psi)^2/(2N), \quad (169)$$

где

$$\bar{\psi}\psi = \sum_{i,\alpha} \bar{\psi}_{i\alpha}\psi_{i\alpha}, \quad \bar{\psi}\lambda^a\psi = \sum_{i,\alpha} \bar{\psi}_{i\alpha}\lambda_{\alpha\beta}^a\psi_{i\beta}. \quad (170)$$

Здесь суммирование по  $i$  идет от 1 до  $N$ , а по  $\alpha, \beta$  — от 1 до  $K$ , причем для всех фиксированных значений  $i$  и  $\alpha$   $\psi_{i\alpha}$  — двухкомпонентный спинор Дирака,  $\lambda^a$  — генераторы  $SU(K)$ -группы ( $a = 1, \dots, K^2 - 1$ ). Таким образом,  $\psi$  преобразуется по фундаментальным представлениям  $U(N)$ - и  $U(K)$ -групп, а теория (169), не являющаяся частным случаем обобщенной модели (121), инвариантна относительно  $U(N) \times U(K)$ . Все вычисления мы будем проводить в главном порядке  $1/N$ -разложения. При этом подразумевается, что ранг  $U(N)$ -группы — очень большая величина (т.е.  $1/N$  — малый параметр). Структура лагранжиана (169) такова, что  $U(N)$ -инвариантность теории не нарушается ни при каких значениях  $m$  и  $g$ . Поэтому, когда мы будем говорить об остаточной симметрии вакуума, всегда будем подразумевать еще его инвариантность относительно  $U(N)$ .

Чтобы получить эффективный потенциал исходной модели, удобно воспользоваться эквивалентной теорией со вспомогательными скалярными полями

$$L_\sigma = i\bar{\psi}\hat{\partial}\psi + m\bar{\psi}\psi + \sigma^a(\bar{\psi}\lambda^a\psi) - N(\sigma^a)^2/(2g) =$$



$$= i\bar{\psi}\hat{\partial}\psi + m\bar{\psi}\psi + \bar{\psi}\varphi\psi - N\text{Tr}(\varphi^2)/(4g), \quad (171)$$

где  $\varphi = \sigma^a \lambda^a$ ,  $\text{Tr} \varphi = 0$ . (С помощью уравнений движения легко исключить  $\sigma^a$  из (171) и получить в результате  $L_\psi$  (169).) Можно показать (см. [63]), что в теории (171) эффективный потенциал в главном порядке  $1/N$ -разложения имеет вид

$$\frac{2\pi}{N}V(\varphi) = \sum_{i=1}^K \left\{ \frac{a}{2}\varphi_i^2 + \frac{1}{3}|\varphi_i + m|^3 \right\}, \quad (172)$$

где  $a = \pi/g$ , а переменные  $\varphi_i$  удовлетворяют условию

$$\varphi_1 + \dots + \varphi_K = 0. \quad (173)$$

При выводе (172) мы использовали размерную регуляризацию, достоинство которой в трехмерном пространстве-времени состоит в том, что регуляризованное выражение для эффективного потенциала в лидирующем порядке  $1/N$ -разложения не содержит ультрафиолетовых расходимостей. В силу этого голые константы связи  $g$  и масса  $m$  являются конечными величинами.

С учетом результатов работы [63], а также численных расчетов, проделанных нами для значений  $N \leq 1000$ , можно сказать, что в безмассовом случае ( $m = 0$ ) глобальный минимум потенциала (172) обладает  $U(n) \times U(n)$ -симметрией для  $K = 2n$  или  $U(n+1) \times U(n)$  для  $K = 2n+1$ , если  $g < 0$ . Если  $g > 0$ , то исходная  $U(K)$ -инвариантность модели не нарушается.

Теперь обсудим свойства потенциала (172) в массивном случае. С этой целью введем безразмерные величины, поделив обе части выражения (172) на  $m^3$ :

$$\frac{2\pi}{m^3 N}V(w) = \sum_{i=1}^K \left\{ \frac{b}{2}(w_i - 1)^2 + \frac{1}{3}|w_i|^3 \right\}, \quad (174)$$

где  $b = a/m$ ,  $w_i = 1 + \varphi_i/m$ . Новые переменные, очевидно, удовлетворяют соотношению

$$w_1 + \dots + w_K = K. \quad (175)$$

Из (174) следуют уравнения стационарности для  $V(w)$  ( $i = 1, \dots, K-1$ ):

$$bw_i - bw_K + |w_i|w_i - |w_K|w_K = 0. \quad (176)$$

При выводе (176) в качестве независимых переменных использовались первые  $(K-1)$  компонент  $w_i$ , а  $w_K$  определена условием (175).

Пусть  $b > 0$  (т.е.  $g > 0$ ). Решая уравнения (175)–(176), легко показать, что в этом случае функция  $V(w)$  имеет только одну стационарную точку  $\Omega_K = (1, \dots, 1)$ , в которой у нее находится глобальный минимум. Очевидно, что  $\Omega_K$  соответствует  $U(K)$ -симметрии основного состояния теории (169).

Теперь рассмотрим случай  $b < 0$  (т.е.  $g < 0$ ). Покажем прежде всего, что произвольная точка  $\Omega = (w_1, \dots, w_K)$ , где все  $w_i$  удовлетворяют (175)–(176), имеет не более трех различных компонент.

Этот факт непосредственно следует из уравнений (176), решая которые, можно установить, что для произвольного фиксированного  $i < K$  соответствующая компонента  $w_i$  стационарной точки  $\Omega$  может принимать одно из трех значений (при этом, не теряя общности, мы предполагаем, что  $w_K > 0$ ):

$$\tilde{w}_1 = w_K, \tilde{w}_2 = -b - w_K, \tilde{w}_3 = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - bw_K - w_K^2} \quad (177)$$

при  $0 < w_K < -b$ , или

$$\tilde{w}_1, \tilde{w}_3, \tilde{w}_4 = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - bw_K - w_K^2} \quad (178)$$

при  $-b < w_K < -b(1 + \sqrt{2})/2$ . При других положительных значениях  $w_K$  все компоненты  $w_i$  равны  $w_K$ . Для определения компоненты  $w_K$  соответствующей точки стационарности нужно использовать условие (175).

Для нахождения точки глобального минимума потенциала мы применим следующую процедуру. Сначала с помощью (177), (178) необходимо построить всевозможные точки стационарности с двумя, а также с тремя различными компонентами, каждый раз определяя  $w_K$  из условия (175). Потом найти значения функции  $V(w)$  на каждой из этих точек и определить ту из них, в которой  $V$  принимает наименьшее значение. Естественно, что с ростом  $K$  количество точек стационарности потенциала  $V(w)$  значительно возрастает. Поэтому мы ограничились несколькими значениями  $K$ . Опуская детали вычислений, приведем лишь конечные результаты.

а) Пусть  $K = 2$ . Из системы уравнений (175), (176) следует, что глобальный минимум функции (174) находится в точке

$$\Omega_{11} = \left( 1 + \frac{b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4}, 1 - \frac{b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4} \right),$$

если  $b < -2$ . В этом случае исходная  $U(2)$ -симметрия спонтанно нарушается до  $U(1) \times U(1)$ . Если же  $b > -2$ , то симметрия остается ненарушенной.

б) Пусть  $K = 3$ . Численные расчеты (в этом и последующих случаях) показывают, что при  $b < b_3^* = -1,5388\dots$  точка глобального минимума есть  $\Omega_{21} = (x_1, x_1, y_1)$ , где  $y_1 = 3 - 2x_1$  и

$$x_1 = -[3(b - 4) - \sqrt{9b^2 - 12b - 36}]/10.$$

Очевидно, что  $\Omega_{21}$ , а значит и вакуум модели, обладает  $U(2) \times U(1)$ -симметрией. При  $b > b_3^*$  теория  $U(3)$  инвариантна.

в) Пусть  $K = 4$ . В этом случае при  $b < b_4^* = -4,0694\dots$  глобальный минимум потенциала достигается в точке  $\Omega_{22} = (x_2, x_2, y_2, y_2)$ , где  $y_2 = 2 - x_2$  и

$$x_2 = 1 - \frac{b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4}.$$

Ясно, что в этой области значений параметра  $b$  симметрия модели спонтанно нарушена до  $U(2) \times U(2)$ .

При  $b_4^* < b < b_4^{**} = -1,3572\dots$  абсолютный минимум функции (174) располагается в точке  $\Omega_{31} = (x_3, x_3, x_3, y_3)$ , где  $y_3 = 4 - 3x_3$

$$x_3 = \frac{6 - b}{5} + \frac{1}{5}\sqrt{b^2 - 2b - 4}.$$

Очевидно, что  $\Omega_{31}$  инвариантна относительно  $U(3) \times U(1)$ -группы. При  $b > b_4^{**}$  исходная  $U(4)$ -симметрия не нарушается.

г) Наконец, для  $K = 5$  модель находится в  $U(3) \times U(2)$  симметричной фазе, если  $b < b_5^* = -2,5300\dots$ . При значениях  $b_5^* < b < b_5^{**} = -1,2654\dots$  вакуумное состояние обладает инвариантностью относительно группы  $U(4) \times U(1)$ . В то же время исходная  $U(5)$ -симметрия не нарушается при  $b > b_5^{**}$ . Соответствующие этим фазам точки глобального минимума эффективного потенциала имеют вид

$$U(3) \times U(2) : \Omega_{32} = (x_4, x_4, x_4, y_4, y_4); y_4 = (5 - 3x_4)/2,$$

$$x_4 = [15 - 5b + \sqrt{25b^2 - 20b - 100}]/13,$$

$$U(4) \times U(1) : \Omega_{41} = (x_5, x_5, x_5, x_5, y_5); y_5 = 5 - 4x_5,$$

$$x_5 = [40 - 5b + \sqrt{25b^2 - 60b - 100}]/34,$$

$$U(5) : \Omega_5 = (1, 1, 1, 1, 1).$$

Подводя итог, можно сказать, что при  $K > 3$  фазовая структура в массивной модели (169) гораздо богаче, чем в безмассовом случае.

**3.7. Динамическая генерация члена ЧС.** Здесь мы рассмотрим возможность использования модели (169) для динамической генерации топологической массы векторного поля, которой в лагранжиане соответствует член ЧС вида (120). С этой целью введем минимальным образом взаимодействие статистического векторного поля  $A_\mu$  со спинорными полями. Модифицированный лагранжиан (171) примет вид:

$$L_\sigma \rightarrow \tilde{L}\sigma = \bar{\psi}i(\hat{\partial} + ie\hat{A})\psi + m\bar{\psi}\psi + \bar{\psi}\varphi\psi - N\text{Tr}(\varphi^2)/(4g), \quad (179)$$

Модель (179) в главном порядке  $1/N$ -разложения обладает таким же эффективным потенциалом, что и модель (169)–(171). Следовательно, результаты предыдущего раздела применимы к теории (179), и можно утверждать,

что вакуумные средние скалярных полей  $\langle \varphi_{\alpha\beta} \rangle$  из  $\tilde{L}_\sigma$  в общем случае отличны от нуля, т.е. они совпадают с координатами точки глобального минимума эффективного потенциала. Сделаем в (179) замену переменных  $\varphi_{\alpha\beta} \rightarrow \varphi_{\alpha\beta} + \langle \varphi_{\alpha\beta} \rangle$ . С учетом того, что  $\langle \varphi_{\alpha\beta} \rangle = \text{diag} (\varphi_1, \dots, \varphi_K)$ , массовый член фермионов примет вид

$$\tilde{L}_\sigma = (\dots) + \sum_{i=1}^K (m + \varphi_i) \bar{\psi}_i \psi_i, \quad (180)$$

где указано в явном виде только суммирование по индексам  $U(K)$ -группы, а суммирование по индексам  $U(N)$ -группы подразумевается. Отсюда видно, что в главном порядке  $1/N$ -разложения  $i$ -й мультиплет спинорных полей имеет массу  $M_i = m + \varphi_i$ , которая, вообще говоря, отлична от затравочной массы  $m$  исходного лагранжиана. Очевидно, что значения  $M_i$  существенным образом зависят от свойств вакуума теории, т.е. от того, в какой фазе она находится.

Исходя из лагранжиана (180), можно показать (см. п.3.5), что в главном порядке по  $N$  в теории поля (179), (180) динамическим образом возникает член ЧС вида (120), где

$$G = e^2 \sum_{i=1}^K \text{sign} (m + \varphi_i) \equiv e^2 \tilde{G}. \quad (181)$$

Параметр  $\tilde{G}$  непосредственно связан как с топологической массой векторного поля, так и со значениями дробных спина и статистики полей материи.

Предположим сначала, что  $m = 0$ . В этом случае при  $K = 2n$  член ЧС не будет генерироваться вовсе. Этот факт легко понять, если принять во внимание вид точки глобального минимума потенциала, которая имеет одинаковое количество отрицательных и положительных компонент [63]. Если  $K = 2n + 1$ , то в  $U(n+1) \times U(n)$  симметричной фазе теории член ЧС обязательно возникает динамическим образом, несмотря на то, что в безмассовой фазе он отсутствует.

Более интересна ситуация в массивном случае ( $m \neq 0$ ). Здесь параметр статистики  $\tilde{G}$ , как следует из (181) и результатов п.3.6, принимает в зависимости от фазы теории следующие значения:  $K, K - 2, \dots, K - 2n$  ( $n = K/2$  для четных и  $n = (K - 1)/2$  для нечетных  $K$ ). Причем  $\tilde{G} = K$  в фазе с максимальной симметрией  $U(K)$  и  $\tilde{G}$  - минимально (т.е. нуль или единица) в фазе с минимальной симметрией (для четных  $K = 2n : U(n) \times U(n)$  или  $U(n+1) \times U(n)$  для нечетных  $K = 2n + 1$ ). Важно отметить, что значения  $\tilde{G}$  и возможные группы симметрии вакуума теории находятся во взаимно однозначном соответствии. Зная статистику частиц (или их спин), можно назвать группу инвариантности вакуума и наоборот.

Таким образом, сделаем следующие выводы.

1) Вместо набора вакуумных средних скалярных полей  $\langle \varphi_{\alpha\beta} \rangle$  в теории достаточно иметь лишь один параметр порядка, который возникает динамическим образом, — это параметр статистики  $\tilde{G}$  (181).

2) Переход от одной фазы теории к другой сопровождается скачкообразным изменением (трансмутацией) статистики и спина полей материи.

Следует заметить, что все вышеперечисленное относится к массивной теории поля (169)–(171), взаимодействующей с векторным полем и, строго говоря, для случаев  $K \leq 5$ . Однако, в силу своей очевидности, эти результаты, по-видимому, справедливы и для значений  $K > 5$ .

**3.8. Обсуждение результатов.** В предлагаемом разделе на основе работ [61, 63, 66] исследовались две трехмерные четырехфермионные модели нестандартного вида. Первую модель (121)–(124) мы назвали обобщенной моделью ГН в силу того, что при  $G_1 \neq 0$ ;  $G_2, H_1, H_2 = 0$  она совпадает с обычной теорией Гросса – Невье из разд.1. Лагранжиан (121) симметричен относительно дискретных  $P, \Gamma^3, \Gamma^5$ -преобразований (123). Здесь показано, что обобщенная теория может существовать в пяти разных фазах, среди которых две –  $A_2$  и  $A_3$  – не были ранее замечены в простейших моделях типа Гросса – Невье. В фазе  $A_2$  спонтанно нарушена только  $\Gamma^3$ -симметрия, а в фазе  $A_3$  нарушены  $P$  и  $\Gamma^5$  одновременно. Основное состояние последней фазы своими свойствами напоминает вакуум КХД, где спонтанно нарушены как киральная, так и  $CP$ -инвариантности.

Спектр масс бозонов теории (121), в отличие от простейших моделей ГН, содержит стабильные частицы с нетривиальной энергией связи, а также резонансы с конечным временем жизни.

Нами были рассмотрены некоторые частные случаи, среди которых теория с вектор-векторной связью ферми-полей, а также модель (при  $H_1 = H_2$ ) с непрерывной глобальной  $U_\tau(1)$ -симметрией (160), которая спонтанно нарушается в фазе  $A_2$ .

Предположим, что поля  $\psi_1$  и  $\psi_2$  описывают частицы с противоположным электрическим зарядом. Тогда генератор  $U_\tau(1)$ -группы по физическому смыслу является оператором электрического заряда теории. При этом можно сказать, что в рамках обобщенной модели (121) существуют как киральные фазовые переходы (когда нарушается  $\Gamma^5$ -инвариантность), так и фазовые переходы сверхпроводящего типа. В последнем случае калибровочная группа электрического заряда  $U_E(1) \equiv U_\tau(1)$  спонтанно нарушается (фаза  $A_2$  модели (121)–(124) при  $H_1 = H_2$  (см. п.3.4)), и в теории появляются скалярные заряженные частицы  $\phi \sim \bar{\psi}_1 \psi_2$  (аналог куперовских пар в обычной теории сверхпроводимости).

Мы также показали, что в модели (121) член ЧС возникает динамическим образом только в фазе  $B$ , когда спонтанно нарушена  $P$ -четность. Кроме того, в п.3.5 доказано, что нарушение  $P$ -четности не является достаточным

условием генерации члена ЧС (в фазе  $A_3$   $P$ -четность нарушена, однако член ЧС в теории отсутствует).

Во второй модели, исследованной здесь непертурбативным методом  $1/N$ -разложения, спинорные поля имеют внутренние степени свободы, соответствующие  $U(K)$ -симметрии ( $U(N)$ -группу при  $N \rightarrow \infty$  мы в расчет не принимаем, т.к. она носит вспомогательный характер). Модель имеет те же физические основания для ее рассмотрения, что и другие трехмерные теории. Однако есть и дополнительные мотивы.

Недавно в работе [64] было высказано предположение, что электрический заряд имеет топологическую природу. Эта идея проверялась, в частности, в рамках калибровочной теории, основанной на лагранжиане (169). При этом для авторов была очень существенной возможность спонтанного нарушения исходной  $U(K)$ -симметрии до  $U(K-1) \times U(1)$ . Последний факт у них является результатом анализа уравнений Дайсона – Швингера, которым должны удовлетворять массы ферми-частиц модели (169) [65]. По нашему мнению, метод уравнений Дайсона – Швингера не является надежной основой для фазового анализа теории поля с достаточно громоздкой структурой лагранжиана взаимодействия. Дело в том, что массовые уравнения здесь имеют, как правило, несколько решений, из которых очень трудно выбрать соответствующее основному состоянию теории. Мы исследовали вакуумные свойства модели (169) более адекватным методом – методом эффективного потенциала и показали, что основное состояние может быть  $U(K-1) \times U(1)$  инвариантным только в массивной теории (169).

В конце раздела в модели (169) минимальным образом учтено взаимодействие полей материи  $\psi$  с векторным статистическим полем  $A_\mu$  и рассмотрена возможность динамической генерации члена ЧС, благодаря которому статистика полей  $\psi$  сразу становится дробной. Здесь показано, что в массивном случае ( $m \neq 0$ ) вместо многокомпонентной точки глобального минимума потенциала в качестве параметра порядка можно использовать только один параметр — топологическую массу векторного поля (коэффициент перед членом ЧС). При переходе из одной фазы в другую статистика частиц скачком меняет свое значение.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предлагаемом обзоре детально изучены критические свойства некоторых трехмерных с четырехфермионным взаимодействием моделей теории поля с учетом внешних воздействий (температуры, магнитных полей и т.д.), существенным образом влияющих на структуру вакуума.

В результате такого рассмотрения в нашей работе обнаружены неизвестные ранее динамические эффекты. Так, мы показали, что внешнее магнит-

ное поле обладает способностью спонтанным образом нарушать симметрию [22,27,41] (сейчас этот эффект носит название эффекта катализации спонтанного нарушения симметрии во внешнем магнитном поле). Кроме того, здесь доказано, что и хромомагнитный глюонный конденсат в КХД также является катализатором спонтанного нарушения киральной инвариантности [50–52]. Отметим, что эффект катализации спонтанного нарушения симметрии внешними калибровочными полями стоит в общем ряду с хорошо исследованными эффектами, производимыми (анти-)самодуальными полями [20]. Источник у всех этих явлений общий – модификация инфракрасного режима из-за взаимодействия спина фермиона с внешним калибровочным полем.

На основе исследования радиационных поправок к эффективному действию в работе получены достаточные условия динамического возникновения члена Черна – Саймонса [63, 66], играющего важную роль в анионной теории высокотемпературной сверхпроводимости. Наконец, продемонстрирована принципиальная возможность существования в трехмерных четырехфермионных моделях, кроме киральных, еще и фазовых переходов сверхпроводящего типа [61]. (В последнем случае нарушается калибровочная  $U(1)$ -симметрия.)

Авторы признательны Н.Ф. Клименко за подготовку рукописи статьи, а также Российскому фонду фундаментальных исследований за финансовую поддержку по проекту 98-02-16690.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

**А. Алгебра  $\gamma$ -матриц в трехмерии.** Двухкомпонентные спиноры Дирака в трехмерном пространстве-времени реализуют неприводимое двумерное представление группы Лоренца. В этом случае  $2 \times 2$ -матрицы  $\gamma$  имеют вид

$$\gamma^0 = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = i\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Эти матрицы обладают свойствами

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 2g^{\mu\nu}; \quad [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -2i\varepsilon^{\mu\nu\alpha} \gamma_\alpha; \quad \gamma^\mu \gamma^\nu = -i\varepsilon^{\mu\nu\alpha} \gamma_\alpha + g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.2})$$

где  $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$ ,  $\gamma_\alpha = g_{\alpha\beta} \gamma^\beta$ ,  $\varepsilon^{012} = 1$ . Кроме того,

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha) = -2i\varepsilon^{\mu\nu\alpha}. \quad (\text{A.3})$$

Матричные элементы  $\gamma$ -матриц удовлетворяют тождествам Фирца:

$$(\gamma^\mu)_{mn} (\gamma_\mu)_{\dot{m}\dot{n}} = \frac{3}{2}(1)_{m\dot{n}}(1)_{\dot{m}n} - \frac{1}{2}(\gamma^\nu)_{m\dot{n}}(\gamma_\nu)_{\dot{m}n}, \quad (\text{A.4})$$

где  $m, n, \dot{m}, \dot{n} = 1, 2$ , и суммирование в формуле (А.4) по индексам  $\mu, \nu$  от 0 до 2 подразумевается. Из (А.4) следует

$$\bar{\psi}_1 \gamma^\mu \psi_2 \bar{\psi}_3 \gamma_\mu \psi_4 = -\frac{3}{2} \bar{\psi}_1 \psi_4 \bar{\psi}_3 \psi_2 + \frac{1}{2} \bar{\psi}_1 \gamma^\nu \psi_4 \bar{\psi}_3 \gamma_\nu \psi_2, \quad (\text{А.5})$$

где  $\psi_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) – произвольные антикоммутирующие двухкомпонентные спиноры. Если в правой части (А.5) еще раз использовать тождество Фирца (А.4), то получится

$$\bar{\psi}_1 \gamma^\mu \psi_2 \bar{\psi}_3 \gamma_\mu \psi_4 = -2\bar{\psi}_1 \psi_4 \bar{\psi}_3 \psi_2 - \bar{\psi}_1 \psi_2 \bar{\psi}_3 \psi_4. \quad (\text{А.6})$$

С помощью этого соотношения вектор-векторная связь между спинорами легко преобразуется в скаляр-скалярную связь.

В последнее время для спинорных полей очень часто используют приводимое четырехмерное представление группы Лоренца. Соответствующие ему гамма-матрицы имеют вид  $\Gamma^\mu = \text{diag}(\gamma^\mu, -\gamma^\mu)$ , где  $\gamma^\mu$  даны в (А.1). Нетрудно показать, что ( $\mu, \nu = 0, 1, 2$ ):

$$\text{Tr}(\Gamma^\mu \Gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}; \quad \Gamma^\mu \Gamma^\nu = \sigma^{\mu\nu} + g^{\mu\nu};$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\Gamma^\mu, \Gamma^\nu] = \text{diag}(-i\varepsilon^{\mu\nu\alpha} \gamma_\alpha, -i\varepsilon^{\mu\nu\alpha} \gamma_\alpha). \quad (\text{А.7})$$

Размерность алгебры матриц, действующих в четырехмерном спинорном пространстве, равна 16, и образующими этой алгебры выступают  $\Gamma^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2$ ) и антикоммутирующая с ними матрица  $\Gamma^3$ :

$$\Gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{А.8})$$

где  $I$  – единичная  $2 \times 2$ -матрица. Существует еще одна матрица, которая антикоммутирует со всеми  $\Gamma^\mu$  и с  $\Gamma^3$ . Она имеет вид

$$\Gamma^5 = i \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{А.9})$$

**В. Оценки на величину  $F(0)$  из п.1.3.** Сделаем в формуле (47) замену переменных:  $eH\alpha = \tau$ ,  $\sigma^2 = eH\tilde{\sigma}^2$ ,  $T^2 = eH\tilde{T}^2$ . Тогда

$$F(\sigma) = \frac{T}{\pi} \sum_n \int_0^\infty d\tau \exp(-\tau\tilde{\sigma}^2 - \tau(2n+1)^2\pi^2\tilde{T}^2) [\text{cth } \tau - 1/\tau]. \quad (\text{В.1})$$

Пусть  $\varphi(\tau) = [\text{cth } \tau - 1/\tau]$ . Очевидно, что  $\varphi'(\tau) > 0$ , следовательно,  $\varphi(\tau)$  – монотонно возрастающая функция. Теперь, устремляя  $\tau$  к бесконечности,



имеем  $\varphi(\tau) < 1$  на всей полуоси  $0 \leq \tau < \infty$ . С учетом этого из (В.1) получаем

$$\begin{aligned} F(\sigma) &< \frac{T}{\pi} \sum_n \int_0^\infty d\tau \exp(-\tau\tilde{\sigma}^2 - \tau(2n+1)^2\pi^2\tilde{T}^2) = \\ &= \frac{T}{\pi} \sum_n (\tilde{\sigma}^2 + (2n+1)^2\pi^2\tilde{T}^2)^{-1} = \frac{eH}{2\pi\sigma} \operatorname{th}(\sigma/2T), \end{aligned} \quad (\text{В.2})$$

где при выводе последнего равенства в (В.2) мы использовали формулу суммирования [32]:

$$\sum_{n \geq 0} [(2n+1)^2 + a^2]^{-1} = \frac{\pi}{4a} \operatorname{th}(\pi a/2).$$

Из (В.2) видно, что при  $\sigma \rightarrow 0$

$$F(0) < \frac{eH}{4\pi T} \equiv \Phi_1(T, H). \quad (\text{В.3})$$

Отсюда следует, что при  $T \neq 0$   $F(0) = \text{const} < \infty$ ; при  $T \rightarrow \infty$   $F(0) \rightarrow 0$  ( $H$  фиксировано).

Теперь оценим снизу величину  $F(0)$ . Из (В.1) видно, что все члены этого ряда – положительные величины. В силу этого, отбрасывая все слагаемые, кроме того, который соответствует  $n = 0$ , имеем

$$\begin{aligned} F(0) &> \frac{T}{\pi} \int_0^\infty d\tau \exp(-\tau\pi^2\tilde{T}^2) [\operatorname{cth} \tau - 1/\tau] > \\ &> \frac{T}{\pi} \int_1^\infty d\tau \exp(-\tau\pi^2\tilde{T}^2) \varphi(\tau) > \frac{CT}{\pi} \int_1^\infty d\tau \exp(-\tau\pi^2\tilde{T}^2), \end{aligned} \quad (\text{В.4})$$

где  $C = \varphi(1)$ . Вычисляя последний интеграл в (В.4), имеем

$$F(0) > \frac{CeH}{T\pi^3} \exp\left(-\frac{\pi^2 T^2}{eH}\right) \equiv \Phi_2(T, H). \quad (\text{В.5})$$

Отсюда видно, что  $F(0) \rightarrow \infty$  при фиксированном значении внешнего магнитного поля и  $T \rightarrow 0$ .

**С. Свойства функций  $\omega(\sigma)$  и  $\varphi(\sigma)$  из п.2.4.** Рассмотрим некоторые свойства функций  $\omega(\sigma)$  и  $\varphi(\sigma)$ , определенных в формулах (108) и (109) соответственно. Покажем сначала, что  $\omega'(\sigma) \geq \varphi'(\sigma)$  на интервале  $(0, \infty)$ . Из (108) очевидно, что ( $\beta = 1/T$ ):

$$\omega'(\sigma) = \frac{2}{\pi} \operatorname{th}(\beta\sigma/2) + \frac{\sigma}{\pi\tilde{\sigma}} \operatorname{th}(\beta\tilde{\sigma}/2), \quad (\text{С.1})$$

где  $\tilde{\sigma} = \sqrt{\sigma^2 + eH}$ . Представим функцию (109) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi}{\sqrt{eH}} \varphi(\sigma) = \\ & = \int_{\sigma}^{\tilde{\sigma}} \frac{dE}{\sqrt{E^2 - \sigma^2}} [\operatorname{th}(\beta E/2) - \operatorname{th}(\beta \sigma/2)] + \operatorname{th}(\beta \sigma/2) \int_{\sigma}^{\tilde{\sigma}} \frac{dE}{\sqrt{E^2 - \sigma^2}}. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Это выражение более удобно для дифференцирования по  $\sigma$ , чем (109):

$$\begin{aligned} \varphi'(\sigma) &= \frac{\sigma \sqrt{eH}}{2\pi} \int_{\sigma}^{\tilde{\sigma}} \frac{dE}{(E^2 - \sigma^2)^{3/2}} [\operatorname{th}(\beta E/2) - \operatorname{th}(\beta \sigma/2)] + \\ &+ \frac{\sigma}{2\pi \tilde{\sigma}} \operatorname{th}(\beta \tilde{\sigma}/2) - \frac{\tilde{\sigma}}{2\pi \sigma} \operatorname{th}(\beta \sigma/2). \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Первое слагаемое в правой части (C.3) можно оценить, используя неравенство ( $x > x_0$ ):

$$\operatorname{th} x - \operatorname{th} x_0 < [\operatorname{th} x_0]'(x - x_0). \quad (\text{C.4})$$

В результате имеем

$$\varphi'(\sigma) < \tilde{\varphi}'(\sigma) \equiv \frac{\beta(\tilde{\sigma} - \sigma)}{4\pi \operatorname{ch}^2(\beta \sigma/2)} + \frac{\sigma}{2\pi \tilde{\sigma}} \operatorname{th}(\beta \tilde{\sigma}/2) - \frac{\tilde{\sigma}}{2\pi \sigma} \operatorname{th}(\beta \sigma/2). \quad (\text{C.5})$$

Введем две новые функции:

$$A(\sigma) \equiv \omega'(\sigma) - \frac{\sigma}{2\pi \tilde{\sigma}} \operatorname{th}(\beta \tilde{\sigma}/2) = \frac{\sigma}{2\pi \tilde{\sigma}} \operatorname{th}(\beta \tilde{\sigma}/2) + \frac{2}{\pi} \operatorname{th}(\beta \sigma/2), \quad (\text{C.6})$$

$$\tilde{A}(\sigma) \equiv \tilde{\varphi}'(\sigma) - \frac{\sigma}{2\pi \tilde{\sigma}} \operatorname{th}(\beta \tilde{\sigma}/2) = -\frac{\beta \sigma}{4\pi \operatorname{ch}^2(\beta \sigma/2)} - \frac{\tilde{\sigma} [\operatorname{sh}(\beta \sigma) - \beta \sigma]}{8\pi \sigma \operatorname{ch}^2(\beta \sigma/2)}. \quad (\text{C.7})$$

Очевидно, что  $A(\sigma) \geq 0$ ,  $\tilde{A}(\sigma) \leq 0$  (в силу того, что выражение в квадратных скобках в (C.7) положительно) для всех  $\sigma$  из интервала  $(0, \infty)$ , т.е.  $A(\sigma) \geq \tilde{A}(\sigma)$ . Тогда из определений (C.6)–(C.7) и неравенства (C.5) следует, что

$$\omega'(\sigma) \geq \tilde{\varphi}'(\sigma) > \varphi'(\sigma) \quad (\text{C.8})$$

для всех  $\sigma \in (0, \infty)$ .

Теперь рассмотрим поведение функций  $\omega(\sigma)$  и  $\varphi(\sigma)$  при  $\sigma \rightarrow \infty$ . Из (108) нетрудно показать, что при  $\sigma \rightarrow \infty$

$$\omega(\sigma) \sim 4\sigma/\pi. \quad (\text{C.9})$$

Для функции  $\varphi(\sigma)$  опять удобно использовать представление (С.2), откуда, с учетом неравенства (С.4), имеем

$$\varphi(\sigma) < \frac{\beta\sqrt{eH}}{4\pi \operatorname{ch}^2(\beta\sigma/2)} \int_{\sigma}^{\tilde{\sigma}} \frac{dE(E-\sigma)}{\sqrt{E^2-\sigma^2}} + \frac{\sqrt{eH}}{2\pi} \operatorname{th}\left(\frac{\beta\sigma}{2}\right) \ln \left[ \frac{\sqrt{eH} + \tilde{\sigma}}{\sigma} \right]. \quad (\text{С.10})$$

Так как  $\varphi(\sigma) > 0$ , то из (С.10) следует, что при  $\sigma \rightarrow \infty$   $\varphi(\sigma) \rightarrow 0$ . Соотношения (С.8)–(С.10) позволяют нам сформулировать важное утверждение: если  $\omega(0) < \varphi(0)$ , то уравнение  $\omega(\sigma) = \varphi(\sigma)$  имеет единственное решение  $\sigma_0(H) \neq 0$ . В самом деле, пусть  $\alpha(\sigma) \equiv \omega(\sigma) - \varphi(\sigma)$ . Тогда из (С.8)–(С.10) видно, что  $\alpha(\sigma)$  монотонно возрастающая функция на интервале  $(0, \infty)$ , причем  $\alpha(\infty) = \infty$ . Если  $\alpha(0) < 0$ , то, очевидно, существует единственная точка на оси  $\sigma$ , в которой  $\alpha(\sigma)$  обратится в нуль.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nambu Y., Jona-Lasinio G. — Phys. Rev., 1961, v.122, p.345;  
Вакс В.Г., Ларкин А.И. — ЖЭТФ, 1961, т.40, с.282; с.1392;  
Арбузов Б.А., Тавхелидзе А.Н., Фаустов Р.Н. — ДАН СССР, 1961, т.139, с.345.
2. Арбузов Б.А., Филиппов А.Т. — ЖЭТФ, 1965, т.49, с.990;  
Arbuzov B.A., Filippov A.T. — Nuovo Cim., 1965, v.38, p.798;  
Куликов А.В., Рочев В.Е. — ЯФ, 1984, т.39, с.457; т.40, с.526.
3. Волков М.К. — ЭЧАЯ, 1986, т.17, с.433; 1993, т.24, с.81;  
Волков М.К., Первушин В.Н. — Существенно нелинейные квантовые теории, динамические симметрии и физика мезонов. М.: Атомиздат, 1978;  
Гусьнин В.П., Миранский В.А. — ЖЭТФ, 1992, т.101, с.414;  
Андрианов А.А., Андрианов В.А. — ТМФ, 1993, т.94, с.6.
4. Troshin S.M., Tyurin N.E. — Phys. Rev., 1995, v.D52, p.3862.
5. Миранский В.А., Фомин П.И. — ЭЧАЯ, 1985, т.16, с.49.
6. Gross D.J., Neveu A. — Phys. Rev., 1974, v.D10, p.3235.
7. Rosenstein B., Warr B.J., Park S.H. — Phys. Rep., 1991, v.205, p.59.
8. Криве И.В., Рожавский А.С. — УФН, 1987, т.152, с.33.
9. Jacobs L. — Phys. Rev., 1974, v.D10, p.3956;  
Dittrich W., Englert V.G. — Nucl.Phys., 1981, v.B179, p.85;  
Осипов В.А., Федянин В.К. — ТМФ, 1987, т.73, с.393;  
Клименко К.Г. — ТМФ, 1988, т.75, с.226;  
Вшивцев А.С., Жуковский В.Ч., Магницкий Б.В. — Вестн.Моск.ун-та (Физика.Астрономия), 1990, т.31, с.22;  
Chodos A., Minakata H. — Phys. Lett., 1994, v.A191, p.39; Nucl. Phys., 1997, v.B490, p.687.
10. Inagaki T., Kouno T., Muta T. — Int.J.Mod.Phys., 1995, v.A10, p.2241.
11. Wolff U. — Phys. Lett., 1985, v.B157, p.303.
12. Kawati S., Konisi G., Miyata H. — Phys. Rev., 1983, v.D28, p.1537;  
Бухбиндер И.Л., Кириллова Е.Н. — Изв.вузов (Физика), 1989, т.32, No. 6, с.44.

13. **Kim S.K., Namgung W., Soh K.S., Yee J.H.** — Phys. Rev., 1987, v.D36, p.3172;  
**Song D.Y., Kim J.K.** — Phys. Rev., 1990, v.D41, p.3165;  
**Ravndal F., Wotzasek C.** — Phys. Lett., 1990, v.B249, p.266;  
**Huang S., Schreiber B.** — Nucl. Phys., 1994, v.B426, p.644;  
**Вшивцев А.С., Клименко К.Г., Магницкий Б.В.** — ЯФ, 1996, т.59, с.557;  
**Вшивцев А.С., Кисунько А.Г., Клименко К.Г., Перегудов Д.В.** — Препринт ИФВЭ-ОТФ 96-58, Протвино, 1996.
14. **Davydov A.S.** — Phys. Rep., 1990, v.190, p.191.
15. **Quantum Hall Effect**, Eds. Pringle R.E. and Girvin S.M. — Springer-Verlag, New York, 1987.
16. **Semenoff G., Wijewardhana L.** — Phys. Rev.Lett., 1989, v.63, p.2633;  
**Semenoff G., Weiss N.** — Phys. Lett., 1990, v.B250, p.117;  
**Dorey N., Mavromatos N.** — Phys. Lett., 1990, v.B250, p.107;  
**Kovner A., Rosenstein B.** — Phys. Rev., 1990, v.B42, p.4748;  
**Carena M., Clark T.E., Wagner C.E.M.** — Nucl.Phys., 1991, v.B356, p.117;  
**Mackenzie R., Panigrahi P.K., Sakhi S.** — Int.J.Mod.Phys., 1994, v.A9, p.3603.  
**Гусьнин В.П., Локтев В.М., Шовковский И.А.** — ЖЭТФ, 1995, т.107, с.2007.
17. **Affleck I.** — Nucl.Phys., 1986, v.B265, p.409.
18. **Боголюбов Н.Н.** — Избранные труды по статистической физике. М.: Изд. МГУ, 1979.
19. **Leutwyler H.** — Phys. Lett., 1980, v.B96, p.154; Nucl. Phys., 1981, p.129.
20. **Burdanov Ja.V., Efimov G.V., Nedelko S.N., Solunin S.A** — Phys. Rev., 1996, v.D54, p.4483;  
**Efimov G.V., Nedelko S.N.** — Phys. Rev., 1995, v.D51, p.174; Erlangen — Nuernberg Univ. preprint FAU- TP3-96/9, 1996.
21. **Симонов Ю.А.** — УФН, 1996, т.166, с.337.
22. **Klimenko K.G.** — Z.Phys., 1992, v.C54, p.323.
23. **Dolan L., Jackiw R.** — Phys. Rev., 1974, v.D9, p.3320;  
**Weinberg S.** — Phys. Rev., 1974, v.D9, p.3357;  
**Bernard C.W.** — Phys. Rev., 1974, v.D9, p.3312;  
**Васильев А.Н.** — Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. Ленинград: Изд-во Ленинградского университета, 1976;  
**Weinberg S.** — In: Understanding the Fundamental Constituents of Matter. Ed. by A.Zichichi, Plenum Press, New York and London, 1976;  
**Kapusta J.I.** — Finite-Temperature Field Theory. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989;  
**Фрадкин Е.С.** — Труды ФИАН, М.: Наука, 1965, т.29, с.7;  
**Morley P.D., Kislinger M.B.** — Phys. Rep., 1979, v.51, p.63;  
**Midorikawa S.** — Prog.Theor.Phys., 1982, v.67, p.661.
24. **Matsubara T.A.** — Prog.Theor.Phys., 1955, v.14, p.351.
25. **Лифшиц И.М.** — Избранные труды. М.: Наука, 1994;  
**Киржниц Д.А.** — Письма в ЖЭТФ, 1972, т. 15, с.745;  
**Kirzhnits D.A., Linde A.D.,** — Phys. Lett., 1972, v.B42, p.471; Ann. Phys., 1976, v.101, p.195;  
**Umezawa H., Matsumoto H., Tachiki M.** — Thermofield Dynamics and Condensed States, North-Holland Pub. Co., Amsterdam, 1982.
26. **Анисимов М.А., Городецкий Е.Е., Запрудский В.М.** — УФН, т.133, с.103;  
**Паташинский А.З., Покровский В.Л.** — Флуктуационная теория фазовых переходов. М.: Наука, 1982.
27. **Клименко К.Г.** — ТМФ, 1991, т.89, с.211.
28. **Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.** — Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1976.

29. **Тернов И.М., Халилов В.Р., Родионов В.Н.** — Взаимодействие заряженных частиц с сильным электромагнитным полем. М.: Изд-во МГУ, 1982;  
**Гитман Д.М., Фрадкин Е.С., Шварцман Ш.М.** — Квантовая электродинамика с нестабильным вакуумом. М.: Наука, 1991.
30. **Schwinger J.** — *Phys. Rev.*, 1951, v.82, p.664.
31. **Dittrich W.** — *Fortsch.Phys.*, 1978, v.26, No.5, p.289.
32. **Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.** — Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981.
33. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** — Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974, т.1,2.
34. **Уиттекер Е.Т., Ватсон Г.Н.** — Курс современного анализа. Л.–М.: ГТТИ, 1934, т.2.
35. **Криве И.В., Нафтулин С.А.** — ЯФ, 1991, т.54, с.1471.
36. **Клименко К.Г.** — ТМФ, 1991, т.89, с.388.
37. **Klimenko K.G.** — *Z.Phys.*, 1988, v.C37, p.457.
38. **Rosenstein B., Warr B.J., Park S.H.** — *Phys. Rev.*, 1989, v.D39, p.3088.
39. **Gusynin V.P., Miransky V.A., Shovkovy I.A.** — *Phys. Rev.Lett.*, 1994, v.73, p.3499.
40. **Cangemi D., D'Hoker E., Dunne G.V.** — *Phys. Rev.*, 1995, v.D51, p.2513;  
**Parwani R.R.** — *Phys. Lett.*, 1995, v.B358, p.101;  
**Das A., Hott M.** — preprint UR-1419, ER-40685-868, hep-th/9504086;  
**Gusynin V.P., Miransky V.A., Shovkovy I.A.** — *Phys. Lett.*, 1995, v.B349, p.477;  
**Dittrich W., Gies H.** — *Phys. Lett.*, 1997, v.B392, p.182.
41. **Клименко К.Г.** — ТМФ, 1992, т.90, с.3;  
**Вшивцев А.С., Клименко К.Г., Магницкий Б.В.** — Письма в ЖЭТФ, 1995, т.62, с.265;  
ТМФ, 1996, т.106, с.390.
42. **Song D.Y.** — *Phys. Rev.*, 1993, v.D48, p.3925;  
**Kim D.K., Han Y.D., Koh I.G.** — *Phys. Rev.*, 1994, v.D49, p.6943;  
**Elizalde E., Odintsov S.D., Shil'nov Yu.I.** — *Mod.Phys. Lett.*, 1994, v.A9, p.913;  
**Inagaki T., Mukaigawa S. Muta T.** — *Phys. Rev.*, 1995, v.D52, p.4267;  
**Kanemura S., Sato H.-T.** — *Mod.Phys. Lett.*, 1996, v.A11, p.785;  
**Gitman D.M., Odintsov S.D., Shil'nov Yu.I.** — *Phys. Rev.*, 1996, v.D54, p.2968.
43. **Baskaran G., Anderson P.W.** — *Phys. Rev.*, 1988, v.B37, p.580;  
**Wiegmann P.V.** — *Phys. Rev.Lett.*, 1988, v.60, p.821;  
**Ferretti G., Rajeev S.G., Yang Z.** — *Int.J.Mod.Phys.*, 1992, v.A7, p.7989.
44. **Matinyan S.G., Savvidy G.K.** — *Nucl.Phys.*, 1978, v.B134, p.539;  
**Nielsen N.K., P.Olesen P.** — *Nucl.Phys.*, 1978, v.B144, p.376; 1979, v.B160, p.380;  
**Ambjorn J., Olesen P.** — *Nucl.Phys.*, 1980, v.B170, p.60, p.265.
45. **Trottier H.D.** — *Phys. Rev.*, 1991, v.D44, p.464.
46. **Brown L.S., Weisberger W.I.** — *Nucl.Phys.*, 1979, v.B157, p.285;  
**Saito T., Shigemoto K.** — *Progr.Theor.Phys.*, 1980, v.63, p.256;  
**Вшивцев А.С., Жуковский В.Ч., Старинец А.О.** — Известия вузов (Физика), 1992, т.35, No. 11, с.65.
47. **Кабо А., Шабад А.Е.** — Труды ФИАН, 1988, т.192, с.153.
48. **Багров В.Г., Вшивцев А.С., Кетов С.В.** — Дополнительные главы математической физики (Калибровочные поля). Томск: Изд-во Томского ун-та, 1990.
49. **Вшивцев А.С., Жуковский В.Ч., Семенов О.Ф., Татаринцев А.В.** — Известия вузов (Физика), 1987, т.30, No. 2, с.12.

50. Klímenko K.G., Vshítsev A.S., Magnitsky B.V. — Nuovo Cim., 1994, v.A107, p.439.
51. Вшивцев А.С., Клименко К.Г., Магницкий Б.В. — ЯФ, 1994, т.57, с.2260.
52. Klímenko K.G., Vshítsev A.S., V.V.Magnitsky B.V. — In: Proc. of the BANFF/CAP Workshop on Thermal Field Theory, ed. by F.C.Khanna et al., Singapore: World Scientific, 1994, p.273. Вшивцев А.С., Клименко К.Г., Магницкий Б.В. — ТМФ, 1994, т.101, с.391.
53. Ebert D., Volkov M.K. — Phys. Lett., 1991, v.B272, p.86;  
Klevansky S.P., Lemmer R.H. — Phys. Rev., 1991, v.D39, p.3478;  
Faber M., Ivanov A.N., Nagy M., Troitskaya N.I. — Mod.Phys. Lett., 1993, v.A8, p.335.
54. Ebert D., Zhukovsky V.Ch. — Mod. Phys. Lett., 1997, v.A12, p.2567; hep-ph/9701323.
55. Laughlin R.B. — Phys. Rev.Lett., 1988, v.60, p.2677.
56. Gerbert P.S. — Int.J.Mod.Phys., 1991, v.A6, p.173.
57. Deser S., Jackiw R., Templeton S. — Ann. Phys., 1982, v.140, p.372;  
Kao Y.C. — Phys. Rev., 1993, v.D47, p.730;  
Kao Y.C., Suzuki I. — Phys. Rev., 1985, v.D31, p.2137;  
Цейтлин В.Ю. — ЯФ, 1989, т.49, с.712; Письма в ЖЭТФ, 1992, т.55, с.673;  
Жуковский К.В., Эминов П.А. — Известия вузов (Физика), 1995, т.5, с.61; ЯФ, 1996, т.59, с.1265; Phys. Lett., 1995, v.B359, p.155.  
Борисов А.В., Жуковский К.В. — Вестн. Моск. ун-та (Физика, Астрономия), 1997, №1, с.74.
58. Appelquist T., Bowick M.J., Karabali D., Wijewardhana L.C.R. — Phys. Rev., 1986, v.D33, p.3704, p.3774;  
Stam K. — Phys. Rev., 1986, v.D34, p.2517.
59. Хлебников С.Ю. — Письма в ЖЭТФ, 1990, т.51, с.69;  
Chen Y.-H., Wilczek F. — Int.J.Mod.Phys., 1989, v.B3, p.117;  
Латинский С.М., Сорокин Д.П. — Письма в ЖЭТФ, 1991, т.53, с.177.
60. Gomes M., Rivelles V.O., A.J. da Silva — Phys. Rev., 1990, v.D41, p.1363;  
Carena M., Clark T.E., Wagner S.E.M. — Phys. Lett., 1991, v.B259, p.128;  
M.Carena, In: Proc. of Particle and Fields' 91, Univ. of British Columbia, Vancouver, BC, Canada, Aug. 17–22, 1991.
61. Klímenko K.G. — Z.Phys., 1993, v.C57, p.175.
62. Krasnikov N.V., Kyatkin A.B. — Mod.Phys. Lett., 1991, v.A6, p.1315.
63. Клименко К.Г. — ТМФ, 1992, т.92, с.166.
64. Kovner A., Rosenstein B. — Int.J.Mod.Phys., 1992, v.A7, p.7419.
65. Kovner A., Elieser D. — Phys. Lett., 1990, v.B246, p.119.
66. Клименко К.Г. — ТМФ, 1993, т.95, с.42;  
Вшивцев А.С., Клименко К.Г., Татаринцев А.В. — ЯФ, 1996, т.59, с.367.