«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1999, ТОМ 30, ВЫП. 5

УДК 514.7; 514.8

ПРОСТРАНСТВА С КОНТРАВАРИАНТНОЙ И КОВАРИАНТНОЙ АФФИННЫМИ СВЯЗНОСТЯМИ И МЕТРИКАМИ

С.Манов[*]

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

[*]Permanent address: Bulgarian Academy of Sciences, Institute for Nuclear Research and Nuclear Energy, Department of Theoretical Physics, Blvd. Tzarigradsko Chaussee 72, 1784 Sofia, Bulgaria E-mail address: smanov@inrne.bas.bg.

«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1999, ТОМ 30, ВЫП. 5

УДК 514.7; 514.8

ПРОСТРАНСТВА С КОНТРАВАРИАНТНОЙ И КОВАРИАНТНОЙ АФФИННЫМИ СВЯЗНОСТЯМИ И МЕТРИКАМИ

*С.Манов**

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В обзоре детально рассмотрена возможность введения на дифференцируемом многообразии пары контравариантной и ковариантной аффинных связностей, различающихся не только знаком. Теория пространств с такими парами связностей детально разработана здесь в объеме, необходимом для построения кинематики векторных полей и лагранжевой теории тензорных полей в таких пространствах. Введены оператор ковариантного дифференцирования и дифференциальный оператор Ли. Исследуется их действие на тензорные поля. В пространствах с разными связностями рассмотрено действие девиационного оператора, играющего существенную роль для уравнений девиации в гравитационной физике. Введены понятия ковариантной и контравариантной метрик с соответствующими им проективными метриками. Определено действие ковариантного оператора дифференцирования и дифференциального оператора Ли на этих метриках. Дана классификация переносов и перемещений метрик. Рассмотрены разложения ковариантной производной от метрики на основные структуры, имеющие отношение к связностям. Введен расширенный ковариантный дифференциальный оператор. Исследованы изменения элементарного объема под действием ковариантного оператора дифференцирования и дифференциального оператора Ли. Введены ковариантный оператор дифференцирования и дифференциальный оператор Ли, не изменяющие элементарный объем. Рассмотрены инвариантные операторы Ли и ковариантные дифференциальные операторы, действующие как изоморфизмы на контравариантные и ковариантные тензорные плотности.

The theory of spaces with different contravariant and covariant affine connections, whose components differ not only by sign, and metrics [$(\overline{L}_n, g)$-spaces] is worked out within the framework of the tensor analysis over differentiable manifolds and in a volume necessary for the further considerations of the kinematics of vector fields and the Lagrangian theory of tensor fields over $(\overline{L}_n, g)$-spaces. The possibility of introducing affine connections, whose components differ not only by sign, for contravariant and covariant tensor fields over differentiable manifolds with finite dimensions is discussed. The action of the deviation operator, having an important role for deviation equations in gravitational physics, is considered for the case of contravariant and covariant vector fields over differentiable manifolds with different affine connections (called $\overline{L}_n$-spaces). A deviation identity for contravariant vector fields is obtained. The notions covariant, contravariant, covariant projective and contravariant projective metric are introduced in $(\overline{L}_n, g)$-spaces. The action of the covariant and the Lie differential operator on the different type of metrics is found. The notions of symmetric covariant and contravariant (Riemannian) connection are determined and presented by means of the covariant and contravariant metric and the corresponding torsion tensors. The different types of relative tensor fields

*Permanent address: Bulgarian Academy of Sciences, Institute for Nuclear Research and Nuclear Energy, Department of Theoretical Physics, Blvd. Tzarigradsko Chaussee 72, 1784 Sofia, Bulgaria E-mail address: smanov@inrne.bas.bg.

(tensor densities) as well as the invariant differential operators acting on them are considered. The invariant volume element and its properties under the action of different differential operators are investigated.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящем обзоре рассматриваются дифференцируемые многообразия, на каждом из которых задана пара аффинных связностей. Одна из них относится к векторным (контравариантным векторным), а другая — к ковекторным (ковариантным векторным) полям, причем различаются эти связности не только знаком. Наряду со связностями на рассматриваемых многообразиях могут быть введены ковариантная и контравариантная метрики. Такие пространства обозначаются как $(\overline{L}_n, g)$-пространства и рассматриваются в качестве моделей пространства-времени. На основе дифференциально-геометрической структуры $(\overline{L}_n, g)$-пространств разработана кинематика векторных полей и динамика тензорных полей, полезные для математических моделей физических взаимодействий и, в частности, для описания гравитационного взаимодействия в современных теориях гравитации. Основные объекты в таких исследованиях можно расположить по следующей схеме.

Пространства с контравариантной и ковариантной
аффинными связностями и метриками
дифференциальные операторы,
ковариантный дифференциальный оператор,
дифференциальный оператор Ли,
оператор кривизны,
оператор девиации,
расширенный оператор,
аффинные связности, метрики,
специальные тензорные поля, тензорные плотности,
инвариантный элемент объема
|
Кинематические характеристики
контравариантных тензорных полей
относительная скорость *(скорость сдвига, вращения и расширения),*
относительное ускорение *(ускорение сдвига, вращения и расширения),*
уравнения девиации,
уравнения геодезических и автопараллельных линий,
переносы Ферми — Уолкера,
конформные переносы
|
Лагранжевы теории тензорных полей
лагранжева плотность,
вариационные методы,
уравнения Эйлера — Лагранжа,
тензоры энергии-импульса.

Здесь, однако, мы рассмотрим только вопросы из первой части вышеприведенной схемы, так что этот обзор является введением в теорию $(\overline{L}_n, g)$-пространств. В нем содержатся формулы, необходимые для развития механики тензорных полей и построения математических моделей динамических систем, которые описываются с помощью объектов, перечисленных в первой части схемы. Основные результаты, найденые для $(\overline{L}_n, g)$-пространств, могут быть специализированы для пространств с одной только связностью, но с ковариантной и контравариантной метриками. Такие пространства называют (L_n, g)-пространствами. Равным образом, их можно специализировать для (псевдо)римановых пространств как без кручения, так и с кручением (для V_n- и U_n-пространств). Большинство результатов записаны или в безындексной форме, или в координатном (голономном) или некоординатном (неголономном) базисах. Это сделано для того, чтобы читатель мог использовать эти результаты по своему усмотрению в той форме, которая ему понадобится в его собственных исследованиях. Главные выводы подытожены в последнем разделе.

$(\overline{L}_n, g)$-пространства имеют интересные свойства. Они могут быть использованы в теоретической физике вообще и в частности — в теории гравитации. В таких пространствах возможно введение несимметричной контравариантной аффинной связности для контравариантных тензорных полей и симметричной (Римана, Кристоффеля) для ковариантных тензорных полей. На этой основе мы можем рассматривать плоские пространства ($(\overline{M}_n, g)$-пространства) с кручением для векторных полей и без кручения для ковекторных полей. Аналогичным образом такие объекты связности можно ввести и в (псевдо)римановых пространствах ($(\overline{V}_n, g)$-пространствах).

1.1. Геометрия пространства-времени и дифференциальная геометрия. Дифференциальная геометрия развивалась в большой степени благодаря попыткам объяснить ее средствами разные типы физических взаимодействий. Созданная в начале 20-го века теория относительности основана на гипотезах ряда геометров о связи геометрии пространства-времени с физическими свойствами материальных систем (Лобачевский, Гаусс, Риман, Клиффорд). С другой стороны, она основана на гипотезах ряда физиков (Нордстрем, Эйнштейн, Фоккер и др.) о возможности описания физических систем с помощью дифференциальных геометрических структур [1–3].

Попытки развить и обобщить теорию относительности, а также установить ее связь с теориями негравитационных взаимодействий [1–3] базировались на использовании новых геометрических понятий и объектов (расслоенные пространства, неримановы геометрии [4,5], комплексные многообразия, неголономные базисы векторных и тензорных полей, пары метрик и связностей на многообразиях) [6–10]. Применялись различные методы с использованием новых дифференциальных геометрических структур на многообразиях (специальные векторные, тензорные, спинорные и другие поля). Проблемы, возникавшие при решении уравнений современных гравитационных теорий, способствовали открытию новых подходов к старым математическим моделям и привели к новым дифференциальным геометрическим методам [11, 12].

В течение последнего столетия математические модели пространства-времени эволюционировали от евклидовых и римановых до более сложных пространств с аффинными связностями и метриками [13–18]. На переходе от ньютоновской теории гравитации к эйнштейновской был сделан важный шаг к введению в теорию пространства-времени двух геометрических объектов — метрики и связности. Метрика определяет расстояние между двумя точками пространства-времени. Связность задает перенос геометрических объектов от одной точки пространства-времени к другой. В римановой геометрии связность определяется через метрику символами Кристоффеля. Этот факт, будучи основным в эйнштейновской теории гравитации (ЭТГ), явился основным и в других теориях гравитации, построенных в рамках римановой геометрии. Позднее теория гравитации развивалась в двух направлениях: в одном из них в пространстве-времени задаются две метрики (биметрическая теория гравитации) [19–21], в другом — задаются симметричная метрика и, независимо от нее, симметричная связность [22]. В последние годы вновь были сделаны попытки возродить идеи Вейля об использовании в теории гравитации симметричной метрики и, независимо от нее, несимметричной связности [15,23,24]. На многообразиях с такими объектами связность для ковекторных полей (дуальных к касательным векторным полям) отличается от связности для векторных (касательных) полей только знаком. Последний факт является следствием определения дуальных векторных базисов в дуальных векторных пространствах. При этом определение дуальности векторных базисов на многообразиях совпадает с алгебраическим определением их дуальности [25–28]. С одной стороны, вся современная дифференциальная геометрия построена как логически жесткая структура, одной из главных предпосылок которой является каноническое определение дуальных базисов в алгебраически дуальных векторных пространствах (с одинаковой размерностью) [10]. С другой стороны, возможность введения неканонического определения дуальных базисов в алгебраически дуальных векторных пространствах (с одинаковой конечной размерностью) была отмечена многими математиками [11], которые, однако, не использовали эту возможность для развития дифференциальных геометрических структур и их приложений. Каноническое определение дуальных базисов в алгебраически дуальных векторных пространствах так естественно входило в основания дифференциальной геометрии, что не замечалась возможность его изменения [12–15]. Но в последнее время при развитии математических моделей, описывающих гравитационное взаимодействие на классическом уровне, проявилась тенденция к использованию в теории гравитации пространств с метрикой и независимой от нее связностью. Заметим при этом, что геометрию таких пространств можно обобщить, прибегая к свободе выбора некоторых предпосылок в основаниях дифференциальной геометрии. Как было доказано, компоненты аффинной связности можно преобразовать к нулю как в отдельной точке, так и на наперед заданной кривой не только в римановых пространствах (где это обстоятельство связано с принципом эквивалентности в ЭТГ), но и в пространствах с одной аффинной связностью и метрикой, если подобрать специальный базис [18–20]. Последнее свойство аффинной связности означает, что принцип эквивалентности в ЭТГ можно рассматривать как физическую интерпретацию одного из следствий математического аппарата в ЭТГ. Следовательно, *каждое дифференцируемое многообразие с одной аффинной связностью и метрикой может быть использовано в качестве модели пространства-времени, причем принцип эквивалентности будет автоматически выполняться.* Но в $(\overline{L}_n, g)$-пространствах ситуация изменяется и в этом общем случае требуется дополнительное исследование.

Основные понятия дифференциальной геометрии — векторные, ковекторные и тензорные поля — определены в учебниках и специальных монографиях (см., например, [21–27]).

2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДУАЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ОПЕРАТОР СВЕРТКИ

Понятие алгебраического дуального векторного пространства может быть введено подобно [7], где два векторных пространства (исходное и дуальное к нему векторное пространство) являются двумя независимыми векторными пространствами одинаковой (конечной) размерности. Пусть X и X^* — два векторных пространства с одинаковой размерностью $\dim X = \dim X^* = n$. Пусть S — оператор (отображение), ставящий каждой паре элементов $u \in X$ и $p \in X^*$ элемент поля K (R или C), то есть

$$S : (u, p) \to z \in K, \quad u \in X, \quad p \in X^*. \tag{1}$$

Дефиниция. *Оператор (отображение)* S называется *оператором свертки* S, если он является билинейным симметричным отображением, то есть если выполняются следующие условия:

a) $S(u, p_1 + p_2) = S(u, p_1) + S(u, p_2)$, $\forall u \in X$, $\forall p_i \in X^*$, $i = 1, 2$;

b) $S(u_1 + u_2, p) = S(u_1, p) + S(u_2, p)$, $\forall u_i \in X$, $i = 1, 2$, $\forall p \in X^*$;

c) $S(\alpha u, p) = S(u, \alpha p) = \alpha S(u, p)$, $\alpha \in K$;

d) невырожденность: если $u_1, ..., u_n$ являются линейно независимыми элементами в X и $S(u_1, p) = 0$, ..., $S(u_n, p) = 0$, то p является нулевым элементом в X^*. Аналогично, если $p_1, ..., p_n$ являются линейно независимыми элементами в X^* и $S(u, p_1) = 0$, ... , $S(u, p_n) = 0$, то u является нулевым элементом в X;

e) симметричность: $S(u,p) = S(p,u)$, $\forall u \in X$, $\forall p \in X^*$.

Пусть $e_1, ..., e_n$ — произвольный базис в X, и пусть $e^1, ..., e^n$ — произвольный базис в X^*. Пусть $u = u^i e_i \in X$ и $p = p_k e^k \in X^*$. При этом из свойств (a) — (c) следует, что

$$S(u,p) = f^k{}_i . u^i . p_k, \tag{2}$$

где

$$f^k{}_i = S(e_i, e^k) = S(e^k, e_i) \in K. \tag{3}$$

Таким образом, результат действия оператора свертки S представляется в виде билинейной формы. Свойство невырожденности (d) означает невырожденность этой билинейной формы. Результат $S(u,p)$ отображения S можно определить в виде (3), произвольно выбирая числа $f^k{}_i \in K$, лишь бы определитель det $(f^k{}_i) \neq 0$. При этом условия (a) — (d) будут выполнены.

Дефиниция. *(Взаимно) дуальные алгебраические векторные пространства.* Пространства X и X^* называются (взаимно) дуальными, если задан действующий на них оператор свертки и они рассматриваются вместе с этим оператором (то есть набор (X, X^*, S) при условии dim $X = n = \dim X^*$ определяет два (взаимно) дуальных пространства X и X^*).

Это определение (взаимно) дуальных алгебраических пространств позволяет для данного векторного пространства X построить бесконечно много векторных пространств X^*, по-разному дуальных к X . Чтобы избежать такой неединственности, Ефимов и Розендорн [7] ввели понятие эквивалентности дуальных векторных пространств (что является дополнительным условием к определению (взаимно) дуальных пространств).

Эквивалентные дуальные к X векторные пространства. Пусть X_1^* и X_2^* — два n-мерных векторных пространства, дуальных к X. Если между ними существует линейный изоморфизм, такой, что

$$S(u,p) = S(u,p'), \quad \forall u \in X, \quad \forall p \in X_1^*, \quad p' \in X_2^*, \tag{4}$$

где p' есть элемент из X_2^*, который соответствует элементу p из X_1^* в согласии с упомянутым изоморфизмом, то X_1^* и X_2^* называются эквивалентно дуальными к X векторными пространствами.

Предложение. *Все линейные (векторные) пространства, дуальные к данному векторному пространству X, эквивалентны друг другу.*

Для доказательства этого предложения достаточно показать, что если для X и X^* произвольно задан оператор свертки S, то для произвольного базиса $e_1, ..., e_n \in X$ можно найти единственный дуальный к нему базис $e^1, ..., e^n$ в пространстве X^*, то есть $e^1, ..., e^n \in X^*$ может быть найден единственным образом, так что $S(e_i, e^k) = f^k{}_i$, где $f^k{}_i \in K$ — наперед заданные числа [28].

Это доказательство аналогично доказательству, предложенному Ефимовым и Розендорном [7] для частного случая $S = C : C(e_k, e^i) = g^i_k$, $g^i_k = 1$ для $k = i$, $g^i_k = 0$ для $k \neq i$. $C(e_k, e^i) = g^i_k$ означает, что дуальное к $\{e_k\}$ базисное векторное поле e^i ортогонально ко всем базисным векторам e_k, для которых $k \neq i$. Оператор свертки C соответствует каноническому подходу к понятию оператора (отображения) свертки

$$C(u, p) = C(p, u) = p(u) = p_i.u^i \ . \tag{5}$$

Новое определение алгебраических дуальных пространств фактически соответствует общему подходу к понятию дуальных пространств. Только в общем случае дуальный базисный вектор e^i не ортогонален к базисным векторам $e_k : S(e_k, e^i) = f^i{}_k \neq g^i_k$. Достаточно заметить, что для произвольного элемента $p \in X^*$ соответствующая линейная форма

$$S(u, p) = p_i.u^{\overline{i}} = p_i.f^i{}_k.u^k = p_{\overline{i}}.u^i \tag{6}$$

задана, где $p_1, ..., p_n$ — постоянные компоненты заданного вектора $p \in X^*$. Последнее равенство можно записать также в форме

$$S(u, p) = S(p, u) = p(u) = p_i.u^{\overline{i}} \ . \tag{7}$$

Замечание. Обобщение понятия алгебраически дуальных пространств в случае векторных полей на дифференцируемом многообразии тривиально. Векторные поля рассматриваются как сечения в векторных расслоениях на многообразии. Векторные базисы становятся зависимыми от точки многообразия, и числа $f^i{}_j$ рассматриваются как функции на многообразии.

Замечание. Если базисные векторы в касательном пространстве $T_x(M)$ в точке x многообразия M (dim $M = n$) являются координатными векторными полями ∂_i , а в дуальном (кокасательном) векторном пространстве $T^*_x(M)$ базис $\{dx^k\}$ определяется как дуальный к базису $\{\partial_i\}$, где dx^k являются дифференциалами координат x^k точки x в данной карте, то $S(\partial_i, dx^k) = f^k{}_i$ $[f^k{}_i \in C^r(M)]$. После умножения последнего равенства на $f_k{}^l$, приняв в расчет соотношение $f^k{}_i.f_k{}^l = g^l_i$, получим условие $S(\partial_i, f_k{}^l.dx^k) = g^l_i$, что эквивалентно результату действия оператора свертки C на векторы ∂_i и e^l, где $e^l = f^l{}_k.dx^k$. Новые векторы e^l в общем случае не являются дифференциалами координат x^l в $x \in M$. Они были бы дифференциалами новых координат $x^{l'} = x^{l'}(x^k)$, если бы соотношение $dx^{l'} = A_k{}^{l'}.dx^k$ согласовывалось с условием $e^l = dx^{l'}$ и $x^{l'} = \int dx^{l'}$. Аналогично в случае, когда $S(f^i_l.\partial_i, dx^k) = g^k_l$, новые векторы $e_l = f_l{}^i.\partial_i$ не являются вновь координатными векторными полями $\partial_{i'}$. Поля e_l были бы вновь координатными векторными полями, если бы при изменении координатной карты выполнялось в точке $x \in M$ условие $f_l{}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{l'}}$.

Таким образом, в определение алгебраических дуальных векторных полей на многообразиях посредством оператора свертки S, выступающего в качестве обобщения оператора свертки C, нужно вводить $f^i{}_j(x^k)$ взамен символа Кронекера g^i_j.

Оператор свертки S может быть легко обобщен до *мультилинейного* оператора свертки S.

3. КОНТРАВАРИАНТНАЯ И КОВАРИАНТНАЯ АФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ. КОВАРИАНТНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР

3.1. Аффинная связность. Ковариантный дифференциальный оператор. Хотя понятие аффинной связности можно определить различными способами, одно требуется неизменно: во всех определениях должно быть задано линейное отображение, которое каждому данному вектору векторного пространства над точкой x многообразия M сопоставляет соответствующий вектор из того же самого векторного пространства над той же точкой. Соответствующий вектор отождествляется с вектором векторного пространства над другой точкой многообразия M. Способ отождествления называется *переносом* из одной точки многообразия в другую.

Векторные и тензорные поля на дифференцируемом многообразии наделяются структурой линейного (векторного) пространства с помощью определения соответствующих операций в каждой точке многообразия.

Дефиниция. *Аффинная связность* на дифференцируемом многообразии M. Пусть $V(M)$ (dim $M = n$) — множество всех (гладких) векторных полей на многообразии M. Отображение $\nabla : V(M) \times V(M) \to V(M)$ с помощью $\nabla(u, w) \to \nabla_u w$, $u, w \in V(M)$, где ∇_u выступает в качестве ковариантного дифференциального оператора вдоль векторного поля u (определение см. ниже), называется *аффинной связностью* на многообразии M.

Дефиниция. *Ковариантный дифференциальный оператор (вдоль векторного поля u)*. Линейный дифференциальный оператор (отображение) ∇_u, обладающий следующими свойствами:

a) $\nabla_u(v + w) = \nabla_u v + \nabla_u w, \quad u, v, w \in V(M)$,

b) $\nabla_u(f.v) = (uf).v + f.\nabla_u v$, $f \in C^r(M)$, $r \geq 1$,

c) $\nabla_{u+v} w = \nabla_u w + \nabla_v w$,

d) $\nabla_{fu} v = f.\nabla_u v$,

e) $\nabla_u f = uf$, $f \in C^r(M)$, $r \geq 1$,

f) $\nabla_u(v \otimes w) = \nabla_u v \otimes w + v \otimes \nabla_u w$ (правило Лейбница), $\otimes$ означает тензорное произведение, называется *ковариантным дифференциальным оператором вдоль векторного поля u*.

Результат действия ковариантного дифференциального оператора $\nabla_u v$ часто, и даже как правило, называют *ковариантной производной векторного поля* v вдоль векторного поля u.

В заданной карте (координатной системе) по определению $\nabla_{e_\alpha} e_\beta$ в базисе $\{e_\alpha\}$ вычисляются компоненты $\nabla^\alpha_{\beta\gamma}$ аффинной связности ∇:

$$\nabla_{e_\alpha} e_\beta = \nabla^\gamma_{\alpha\beta}.e_\gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, ..., n \ . \tag{8}$$

$\{\nabla^\gamma_{\alpha\beta}\}$ преобразуются как линейные дифференциальные геометрические объекты $[21, 29]$.

Дефиниция. *Пространство с аффинной связностью.* Дифференцируемое многообразие M, наделенное аффинной связностью ∇, то есть пара (M, ∇), называется пространством с аффинной связностью.

3.2. Контравариантная и ковариантная аффинные связности. Действие ковариантного дифференциального оператора на контравариантное (касательное) координатное базисное векторное поле ∂_i на M вдоль другого контравариантного координатного базисного векторного поля ∂_j определяется аффинной связностью $\nabla = \Gamma$ с компонентами Γ^k_{ij}, которые в заданной карте определяются через выражение

$$\nabla_{\partial_j} \partial_i = \Gamma^k_{ij}.\partial_k \ . \tag{9}$$

Для некоординатного контравариантного базиса $e_\alpha \in T(M)$, $T(M) = \cup_{x \in M} T_x(M)$,

$$\nabla_{e_\beta} e_\alpha = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}.e_\gamma \ . \tag{10}$$

Дефиниция. *Контравариантная аффинная связность.* Аффинная связность $\nabla = \Gamma$, вводимая при действии ковариантного дифференциального оператора на контравариантные векторные поля, называется контравариантной аффинной связностью.

Действие ковариантного дифференциального оператора на ковариантное (дуальное к контравариантному базисному векторному полю) базисное векторное поле e^α $[e^\alpha \in T^*(M)$, $T^*(M) = \cup_{x \in M} T^*_x(M)]$ по направлению контравариантного (некоординатного) векторного поля e_β определяется аффинной связностью $\nabla = P$ с компонентами $P^\alpha_{\beta\gamma}$, задаваемыми выражением

$$\nabla_{e_\beta} e^\alpha = P^\alpha_{\gamma\beta}.e^\gamma \ . \tag{11}$$

Для координатного ковариантного базиса dx^i

$$\nabla_{\partial_j} dx^i = P^i_{kj}.dx^k \ . \tag{12}$$

Дефиниция. *Ковариантная аффинная связность*. Аффинная связность $\nabla = P$, вводимая при действии ковариантного дифференциального оператора на ковариантные векторные поля, называется ковариантной аффинной связностью.

Дефиниция. *Пространство с контравариантной и ковариантной аффинными связностями* ($\overline{L}_n$-пространство). Дифференцируемое многообразие, наделенное контравариантной Γ и ковариантной P аффинными связностями, называется пространством с контравариантной и ковариантной аффинными связностями.

Связь между двумя связностями Γ и P основывается на задаваемой оператором свертки S связи между двумя дуальными пространствами $T(M)$ и $T^*(M)$. Обычно между оператором свертки и оператором ковариантного дифференцирования задаются *коммутационные соотношения* в следующем виде:

$$S \circ \nabla_u = \nabla_u \circ S \ . \tag{13}$$

Если последнее операторное равенство взять в виде $\nabla_{\partial_k} \circ S = S \circ \nabla_{\partial_k}$ и применить его к тензорному произведению $dx^i \otimes \partial_j$ двух базисных векторных полей $dx^i \in T^*(M)$ и $\partial_j \in T(M)$, то получится равенство

$$f^i{}_{j,k} = \Gamma^l_{jk}.f^i{}_l + P^i_{lk}.f^l{}_j , \quad f^i{}_{j,k} := \partial_k f^i{}_j \text{ (в координатном базисе)}. \tag{14}$$

На это равенство можно посмотреть с двух разных точек зрения.

1. Если $P^i_{jk}(x^l)$ и $\Gamma^i_{jk}(x^l)$ заданы как функции координат на M, то рассматриваемое равенство выглядит как система уравнений для неизвестных функций $f^i{}_j(x^l)$. Решение этих уравнений определяет действие оператора свертки S на базисные векторные поля при заданных компонентах обеих связностей. Условия интегрируемости этих уравнений можно записать в виде

$$R^m{}_{jkl}.f^i{}_m + P^i{}_{mkl}.f^m{}_j = 0 \ , \tag{15}$$

где $R^m{}_{jkl}$ — компоненты контравариантного тензора кривизны, построенного с помощью контравариантной аффинной связности Γ, и $P^i{}_{mkl}$ — компоненты ковариантного тензора кривизны, построенного с помощью ковариантной аффинной связности P, причем $[R(\partial_i, \partial_j)]dx^k = P^k{}_{lij}.dx^l$, $[R(\partial_i, \partial_j)]\partial_k = R^l{}_{kij}.\partial_l$, $R(\partial_i, \partial_j) = \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j} - \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}$.

2. Если $f^i{}_j(x^l)$ рассматривать как заданные функции координат на M, то условия для $f^i{}_j$ определяют связь между компонентами контравариантной аффинной связности Γ и компонентами ковариантной аффинной связности P с помощью заранее определенного действия оператора свертки S на базисные векторные поля.

Если $S = C$, т.е. $f^i{}_j = g^i_j$, то условия для $f^i{}_j$ выполняются для всех $P = -\Gamma$, т.е.

$$P^i_{jk} = -\Gamma^i_{jk} \ . \tag{16}$$

Этот факт можно сформулировать следующим образом.

Предложение. *$S = C$ является достаточным условием для $P = -\Gamma$ ($P^i_{jk} = -\Gamma^i_{jk}$).*

Следствие. *Если $P \neq -\Gamma$, то $S \neq C$, т.е. если ковариантная связность P отличается от контравариантной связности Γ не только знаком, то оператор свертки S должен отличаться от канонического оператора свертки C (если S коммутирует с оператором ковариантного дифференцирования).*

Это следствие позволяет ввести отличающиеся друг от друга не только по знаку контравариантную и ковариантную аффинные связности с оператором свертки S, отличным от канонического оператора свертки C.

Если $f^i{}_j = e^{\varphi}.g^i_j$, где $\varphi \in C^r(M)$, $\varphi \neq 0$, то $P^i_{jk} = -\Gamma^i_{jk} + \varphi_{,k}.g^i_j$.

3.3. Ковариантные производные контравариантных тензорных полей . *Действие* ковариантного дифференциального оператора вдоль контравариантного векторного поля u называется *переносом вдоль контравариантного векторного поля u* (или *переносом вдоль u*).

Результат действия ковариантного дифференциального оператора на тензорное поле называется *ковариантной производной* этого тензорного поля.

Результат $\nabla_u V$ действия ∇_u на контравариантное тензорное поле V называется *ковариантной производной контравариантного тензорного поля V вдоль контравариантного векторного поля u* (или *ковариантной производной V вдоль u*).

Действие оператора ковариантного дифференцирования на контравариантные тензорные поля ранга > 1 можно описать тривиальным способом по правилу Лейбница, которому оператор подчиняется.

Так, действие оператора ∇_{∂_j} на тензорный базис $\partial_A = \partial_{j_1} \otimes ... \otimes \partial_{j_l}$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_j}\partial_A = \nabla_{\partial_j}[\partial_{j_1} \otimes ... \otimes \partial_{j_l}] = (\nabla_{\partial_j}\partial_{j_1} \otimes \partial_{j_2} ... \otimes \partial_{j_l}) + \\
+(\partial_{j_1} \otimes \nabla_{\partial_j}\partial_{j_2} \otimes ... \otimes \partial_{j_l}) + ... + (\partial_{j_1} \otimes ... \otimes \nabla_{\partial_j}\partial_{j_l}) = \\
= \Gamma^{i_1}_{j_1 j}.\partial_{i_1} \otimes ... \otimes \partial_{j_l} + ... + \Gamma^{i_l}_{j_l j}.\partial_{j_1} \otimes ... \otimes \partial_{i_l} = \\
= \left(\sum_{k=1}^{l} g^i_{j_k}.g^{i_k}_m.g^{i_1}_{j_1}.g^{i_2}_{j_2}...g^{i_{k-1}}_{j_{k-1}}.g^{i_{k+1}}_{j_{k+1}}...g^{i_l}_{j_l}. \right) .\Gamma^m_{ij}.(\partial_{i_1} \otimes ... \otimes \partial_{i_l}).
\end{aligned}$$

Если мы обозначим для краткости

$$S_{Am}{}^{Bi} = -\sum_{k=1}^{l} g^i_{j_k}.g^{i_k}_m.g^{i_1}_{j_1}.g^{i_2}_{j_2}...g^{i_{k-1}}_{j_{k-1}}.g^{i_{k+1}}_{j_{k+1}}...g^{i_l}_{j_l}, \tag{17}$$

$$\Gamma^B_{Aj} = -S_{Am}{}^{Bi}.\Gamma^m_{ij}, \quad A = j_1...j_l, \quad B = i_1...i_l, \tag{18}$$

то $\nabla_{\partial_j}\partial_A$ можно записать в виде

$$\nabla_{\partial_j}\partial_A = \Gamma^B_{Aj}.\partial_B = -S_{Am}{}^{Bi}.\Gamma^m_{ij}.\partial_B \ . \tag{19}$$

Величины $S_{Am}{}^{Bi}$ удовлетворяют следующим соотношениям:
a) $S_{Bi}{}^{Aj}.S_{Ak}{}^{Cl} = -g^l_i.S_{Bk}{}^{Cj}$, $\dim M = n$, $l = 1, ..., N$,
b) $S_{Bi}{}^{Bj} = -N.n^{N-1}.g^j_i$,
c) $S_{Bi}{}^{Ai} = -N.g^A_B$, где

$$g^A_B = g^{j_1}_{i_1}...g^{j_{m-1}}_{i_{m-1}}.g^{j_m}_{i_m}.g^{j_{m+1}}_{i_{m+1}}...g^{j_l}_{i_l} \tag{20}$$

определены как *мультисимволы Кронекера* ранга l,

$$\begin{aligned} g^A_B &= 1, \ \ i_k = j_k \quad (\text{для всех } k \text{ одновременно}) \\ &= 0, \ \ i_k \neq j_k, \quad k = 1, \ldots, l \ . \end{aligned} \tag{21}$$

Коваpиантную производную вдоль векторного поля u от контравариантного тензорного поля $V = V^A.\partial_A$ можно записать в координатном базисе в виде

$$\nabla_u V = (V^A{}_{,i} + \Gamma^A_{Bi}.V^B).u^i.\partial_A = V^A{}_{;i}.u^i.\partial_A \ , \tag{22}$$

где выражение

$$V^A{}_{;i} = V^A{}_{,i} + \Gamma^A_{Bi}.V^B \tag{23}$$

называется первой ковариантной производной компонент V^A контравариантного тензорного поля V по направлению контравариантного координатного базисного векторного поля ∂_i:

$$\nabla_{\partial_i} V = V^A{}_{;i}.\partial_A \ . \tag{24}$$

Аналогичным образом находим вторую ковариантную производную:

$$\nabla_\xi \nabla_u V = (V^A{}_{;j;i}.u^j + V^A{}_{;j}.u^j{}_{;i}).\xi^i.\partial_A = (V^A{}_{;j}.u^j)_{;i}.\xi^i.\partial_A \ ,$$

где

$$V^A{}_{;j;i} = (V^A{}_{;j})_{,i} + \Gamma^A_{Bi}.V^B{}_{;j} - \Gamma^k_{ji}.V^A{}_{;k} \tag{25}$$

является второй ковариантной производной компонент V^A векторного поля V. Отсюда следует

$$\nabla_\xi \nabla_u V - \nabla_u \nabla_\xi V = [(V^A{}_{;i;j} - V^A{}_{;j;i}).u^i.\xi^j + V^A{}_{;j}.(u^j{}_{;i}.\xi^i - \xi^j{}_{;i}.u^i)].\partial_A \ . \tag{26}$$

3.4. Ковариантные производные ковариантных тензорных полей . Ковариантную производную ковекторного поля можно записать (в координатном базисе) в виде

$$\nabla_u p = (p_{i,j} + P^k_{ij}.p_k).u^j.dx^i = p_{i;j}.u^j.dx^i, \quad p \in T^*(M). \tag{27}$$

Действие оператора ковариантного дифференцирования на ковариантные тензорные поля ранга > 1 обобщается тривиально с помощью правила Лейбница, которое применимо и к этому оператору. Вследствие этого действие оператора ∇_{∂_j} на базис $dx^A = dx^{j_1} \otimes ... \otimes dx^{j_l}$ можно записать в виде

$$\nabla_{\partial_j} dx^B = P^B_{Aj}.dx^A = -S_{Am}{}^{Bi}.P^m_{ij}.dx^A \ , \tag{28}$$

где $P^B_{Aj} = -S_{Am}{}^{Bi}.P^m_{ij}$.

Ковариантную производную ковариантного тензорного поля $W = W_A.dx^A = W_B.e^B$ можно записать (в координатном базисе) в виде

$$\nabla_u W = (W_{A,j} + P^B_{Aj}.W_B).u^j.dx^A = W_{A;j}.u^j.dx^A. \tag{29}$$

Вид ковариантной производной смешанного тензорного поля следует из того, как образуется производная контравариантного и ковариантного базисов тензорных полей, и из правила Лейбница (в координатном базисе):

$$\nabla_u K = \nabla_u(K^A{}_B.\partial_A \otimes dx^B) = K^A_{B;j}.u^j.\partial_A \otimes dx^B =$$

$$= (K^A{}_{B,j} + \Gamma^A_{Cj}.K^C{}_B + P^D_{Bj}.K^A{}_D).u^j.\partial_A \otimes dx^B. \tag{30}$$

Если *тензор Кронекера* определить в виде

$$\mathrm{Kr} = g^i_j.\partial_i \otimes dx^j = g^\alpha_\beta.e_\alpha \otimes e^\beta \ , \tag{31}$$

то компоненты контравариантной и ковариантной аффинных связностей будут отличаться друг от друга компонентами ковариантной производной тензора Кронекера, т.е.

$$\Gamma^i_{jk} + P^i_{jk} = g^i_{j;k}, \qquad \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + P^\alpha_{\beta\gamma} = g^\alpha_{\beta/\gamma}. \tag{32}$$

Замечание. *В специальном случае, когда $S = C$, и в каноническом подходе $g^i_{j;k} = 0$ ($g^\alpha_{\beta/\gamma} = 0$).*

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР ЛИ

Дифференциальный оператор Ли $\pounds_\xi$, т.е. производная Ли вдоль векторного поля ξ, является другим оператором, который можно построить с помощью векторного поля. Его определение можно рассматривать как обобщение понятия производной Ли тензорного поля [11, 21, 30, 31].

Дефиниция. $\pounds_\xi$:= *дифференциальный оператор Ли вдоль векторного поля* ξ с присущими ему свойствами.

a) $\pounds_\xi : V \to \overline{V} = \pounds_\xi V$, $V, \overline{V} \in \otimes^l(M)$.

b) $\pounds_\xi : W \to \overline{W} = \pounds_\xi W$, $W, \overline{W} \in \otimes_k(M)$.

c) $\pounds_\xi : K \to \overline{K} = \pounds_\xi K, \quad K,\ \overline{K} \in \otimes^l{}_k(M)$.

d) Линейный оператор по отношению к тензорным полям:

$\pounds_\xi(\alpha.V_1 + \beta.V_2) = \alpha.\pounds_\xi V_1 + \beta.\pounds_\xi V_2$, $\alpha, \beta \in F(R$ или $C)$, $V_i \in \otimes^l(M)$, $i = 1, 2$,

$\pounds_\xi(\alpha.W_1 + \beta.W_2) = \alpha.\pounds_\xi W_1 + \beta.\pounds_\xi W_2$, $W_i \in \otimes_k(M)$, $i = 1, 2$,

$\pounds_\xi(\alpha.K_1 + \beta.K_2) = \alpha.\pounds_\xi K_1 + \beta.\pounds_\xi K_2$, $K_i \in \otimes^l{}_k(M)$, $i = 1, 2$.

e) Линейный оператор по отношению к векторному полю ξ:

$\pounds_{\alpha.\xi+\beta.u} = \alpha.\pounds_\xi + \beta.\pounds_u$, $\alpha, \beta \in F(R$ или $C)$, $\xi, u \in T(M)$.

f) Дифференциальный оператор, действующий по правилу Лейбница:

$\pounds_\xi(S \otimes U) = \pounds_\xi S \otimes U + S \otimes \pounds_\xi U, \quad S \in \otimes^m q(M), \quad U \in \otimes^k_l(M)$.

g) Действие на функцию $f \in C^r(M)$, $r \geq 1$:

$\pounds_\xi f = \xi f, \quad \xi \in T(M)$.

h) Действие на векторное поле:

$\pounds_\xi u = [\xi, u]$, $\xi, u \in T(M)$, $[\xi, u] = \xi \circ u - u \circ \xi$,

$\pounds_\xi e_\alpha = [\xi, e_\alpha] = -\left(e_\alpha \xi^\beta - \xi^\gamma.C_{\gamma\alpha}{}^\beta\right).e_\beta$,

$\pounds_{e_\alpha} e_\beta = [e_\alpha, e_\beta] = C_{\alpha\beta}{}^\gamma.e_\gamma$, $C_{a\beta}{}^\gamma \in C^r(M)$,

$\pounds_\xi \partial_i = -\xi^j{}_{,i}.\partial_j$, $\pounds_{\partial_i}\partial_j = [\partial_i, \partial_j] = 0$.

i) Действие на ковариантное базисное векторное поле:

$\pounds_\xi e^\alpha = k^\alpha{}_\beta(\xi).e^\beta$, $\pounds_{e_\gamma} e^\alpha = k^\alpha{}_{\beta\gamma}.e^\beta$,

$\pounds_\xi dx^i = k^i{}_j(\xi).dx^j$, $\pounds_{\partial_k} dx^i = k^i{}_{jk}.dx^j$.

Действие дифференциального оператора Ли на ковариантное базисное векторное поле определяется его же действием на контравариантное базисное векторное поле и перестановочными соотношениями между дифференциальным оператором и оператором свертки S.

4.1. Производные Ли от контравариантных тензорных полей. Дифференциальный оператор Ли $\pounds_\xi$ вдоль векторного поля ξ является, как уже было сказано, еще одним оператором, который можно построить с помощью векторного поля. Это есть оператор, отображающий контравариантное тензорное поле V в контравариантное тензорное поле $\widetilde{V} = \pounds_\xi V$.

Действие дифференциального оператора Ли вдоль контравариантного векторного поля ξ называется *смещением вдоль векторного поля* ξ (или *смещением вдоль* ξ).

Результат действия $(\pounds_\xi V)$ дифференциального оператора Ли $\pounds_\xi$ на V называется *производной Ли от контравариантного тензорного поля* V *вдоль векторного поля* ξ (или *производной Ли от* V *вдоль* ξ).

Коммутатор двух дифференциальных операторов Ли

$$[\pounds_\xi, \pounds_u] = \pounds_\xi \circ \pounds_u - \pounds_u \circ \pounds_\xi \tag{33}$$

имеет следующие свойства.

a) Действие на функцию:

$$[\pounds_\xi, \pounds_u]f = (\pounds_\xi \circ \pounds_u - \pounds_u \circ \pounds_\xi)f = [\xi, u]f = (\pounds_\xi u)f = [\nabla_\xi, \nabla_u]f,$$
$$f \in C^r(M)\ ,\ \ r \geq 2.$$

b) Действие на векторное поле:

$$[\pounds_\xi, \pounds_u]v = (\pounds_\xi \circ \pounds_u - \pounds_u \circ \pounds_\xi)v = \pounds_\xi \pounds_u v - \pounds_u \pounds_\xi v =$$
$$= \pounds_v \pounds_u \xi = -\pounds_{\pounds_u \xi} v = \pounds_{\pounds_\xi u} v.$$

c) Тождество Якоби:

$$< [\pounds_\xi, [\pounds_u, \pounds_v]] > \equiv [\pounds_\xi, [\pounds_u, \pounds_v]] + [\pounds_v, [\pounds_\xi, \pounds_u]] + [\pounds_u, [\pounds_v, \pounds_\xi]] \equiv 0. \tag{34}$$

В разложении производной Ли от векторного поля u по базису ∂_i

$$\pounds_\xi u = [\xi, u] = (\pounds_\xi u^i).\partial_i = (\xi^k.u^i{}_{,k} - u^k.\xi^i{}_{,k}).\partial_i \tag{35}$$

величина

$$\pounds_\xi u^i = \xi^k.u^i{}_{,k} - u^k.\xi^i{}_{,k} \tag{36}$$

называется *производной Ли от компонент* u^i векторного поля u вдоль векторного поля ξ (или производной Ли от компонент u^i вдоль ξ) *в координатном базисе*.

В некоординатном базисе производная Ли может быть записана аналогично тому, как это было сделано в координатном базисе:

$$\pounds_\xi u = [\xi, u] = (\pounds_\xi u^\alpha).e_\alpha = (\xi^\beta.e_\beta u^\alpha - u^\beta.e_\beta \xi^\alpha + C_{\beta\gamma}{}^\alpha.\xi^\beta.u^\gamma).e_\alpha, \tag{37}$$

где

$$\pounds_\xi u^\alpha = \xi^\beta.e_\beta u^\alpha - u^\beta.e_\beta \xi^\alpha + C_{\beta\gamma}{}^\alpha.\xi^\beta.u^\gamma \tag{38}$$

называется *производной Ли от компонент* u^α *векторного поля* u *вдоль векторного поля* ξ *в некоординатном базисе* (или *производной Ли от компонент* u^α *вдоль* ξ).

Производная $\pounds_{e_\beta} u$ может быть записана в виде

$$\pounds_{e_\beta} u = (e_\beta u^\alpha - C_{\gamma\beta}{}^\alpha . u^\gamma).e_\alpha = u^\alpha{}_{//\beta}.e_\alpha = -\pounds_u e_\beta = (\pounds_{e_\beta} u^\alpha).e_\alpha \ , \quad (39)$$

где

$$\pounds_{e_\beta} u^\alpha = u^\alpha{}_{//\beta} = e_\beta u^\alpha - C_{\gamma\beta}{}^\alpha . u^\gamma \ . \quad (40)$$

Вторая производная Ли $\pounds_\xi \pounds_u v$ в некоординатном базисе будет иметь вид

$$\pounds_\xi \pounds_u v = [\xi^\beta . e_\beta(\pounds_u v^\alpha) - (\pounds_u v^\beta).e_\beta \xi^\alpha - C_{\gamma\beta}{}^\alpha .(\pounds_u v^\gamma).\xi^\beta].e_\alpha =$$
$$= (\pounds_\xi \pounds_u v^\alpha).e_\alpha, \quad (41)$$

где $\pounds_\xi \pounds_u v^\alpha = \xi^\beta . e_\beta(\pounds_u v^\alpha) - (\pounds_u v^\beta).e_\beta \xi^\alpha - C_{\gamma\beta}{}^\alpha .(\pounds_u v^\gamma).\xi^\beta$ называется *второй производной Ли компонент v^α вдоль u и ξ в некоординатном базисе*.

Действие дифференциального оператора Ли на контравариантное тензорное поле ранга $k > 1$ можно обобщить ввиду применимости правила Лейбница при действии этого оператора на базисы тензорных полей.

Результат действия оператора $\pounds_\xi$ на базис $\partial_A = \partial_{j_1} \otimes ... \otimes \partial_l$ можно найти с помощью уже известного соотношения $\pounds_\xi \partial_{j_k} = -\pounds_{\partial_{j_k}} \xi = -\xi^m{}_{,j_k}.\partial_m$. Затем берем $\pounds_\xi \partial_A = S_{Am}{}^{Bn}.\xi^m{}_{,n}.\partial_B$, и

$$\pounds_\xi V = \pounds_\xi(V^A.\partial_A) = (\pounds_\xi V^A).\partial_A = (\xi^k.V^A{}_{,k} + S_{Bk}{}^{Al}.V^B.\xi^k{}_{,l}).\partial_A, \quad (42)$$

где $\pounds_\xi V^A = \xi^k.V^A{}_{,k} + S_{Bk}{}^{Al}.V^B.\xi^k{}_{,l}$ есть *производная Ли от компонент V^A контравариантного тензорного поля V вдоль векторного поля ξ в координатном базисе* (или *производная Ли от компонент V^A вдоль ξ в координатном базисе*).

Для $\pounds_\xi \pounds_u V$ получаем

$$\pounds_\xi \pounds_u V = (\pounds_\xi \pounds_u V^A).\partial_A = [\xi^k(\pounds_u V^A)_{,k} + S_{Bk}{}^{Al}.(\pounds_u V^B).\xi^k{}_{,l}].\partial_A \ , \quad (43)$$

где выражение $\pounds_\xi \pounds_u V^A = \xi^k(\pounds_u V^A)_{,k} + S_{Bk}{}^{Al}.(\pounds_u V^B).\xi^k{}_{,l}$ называется *второй производной Ли от компонент V^A вдоль u и ξ в координатном базисе*.

Результат действия дифференциального оператора $\pounds_\xi$ на некоординатный базис e_A можно найти аналогично тому, как это было сделано для базиса координатного. Так как

$$\pounds_\xi e_\beta = -\xi^\alpha{}_{//\beta}.e_\alpha \ , \ \ \xi^\alpha{}_{//\beta} = e_\beta \xi^\alpha - C_{\gamma\beta}{}^\alpha .\xi^\gamma \ , \quad (44)$$

$$\pounds_\xi e_A = \pounds_\xi[e_{\alpha_1} \otimes ... \otimes e_{\alpha_l}] = (\pounds_\xi e_{\alpha_1} \otimes e_{\alpha_2} \otimes ... \otimes e_{\alpha_l}) +$$
$$+ (e_{\alpha_1} \otimes \pounds_\xi e_{\alpha_2} \otimes ... \otimes e_{\alpha_l}) + ... + (e_{\alpha_1} \otimes ... \otimes \pounds_\xi e_{\alpha_l}) = S_{A\alpha}{}^{B\beta}.\xi^\alpha{}_{//\beta}.e_B,$$
$$A = \alpha_1 ... \alpha_l \ , \ \ B = \beta_1 ... \beta_l \ , \ \ e_B = e_{\beta_1} \otimes ... \otimes e_{\beta_l} \ , \quad (45)$$

то

$$\pounds_\xi e_A = S_{A\alpha}{}^{B\beta}.\xi^\alpha{}_{//\beta}.e_B \quad \text{и} \quad \pounds_\xi V = \pounds_\xi(V^A.e_A) = (\pounds_\xi V^A).e_A =$$
$$= (\xi^\alpha.e_\alpha V^A + S_{B\alpha}{}^{A\beta}.V^B.\xi^\alpha{}_{//\beta}).e_A \ . \tag{46}$$

В явном виде выражения $S_{B\alpha}{}^{A\beta}.\xi^\alpha{}_{//\beta}$ можно представить в виде

$$S_{B\alpha}{}^{A\beta}.\xi^\alpha{}_{//\beta} = S_{B\alpha}{}^{A\beta}.e_\beta\xi^\alpha - S_{B\alpha}{}^{A\beta}.C_{\gamma\beta}{}^\alpha.\xi^\gamma \ , \tag{47}$$

и если мы введем сокращенные обозначения

$$C_{B\gamma}{}^A = S_{B\alpha}{}^{A\beta}.C_{\gamma\beta}{}^\alpha = -S_{B\alpha}{}^{A\beta}.C_{\beta\gamma}{}^\alpha \ , \tag{48}$$

$$S_{B\alpha}{}^{A\beta}.\xi^\alpha{}_{//\beta} = S_{B\alpha}{}^{A\beta}.e_\beta\xi^\alpha - C_{B\alpha}{}^A.\xi^\alpha \ , \tag{49}$$

то $\pounds_\xi V^A$ можно записать в форме

$$\pounds_\xi V^A = \xi^\alpha.e_\alpha V^A + S_{B\alpha}{}^{A\beta}.V^B.\xi^\alpha{}_{//\beta} =$$
$$= \xi^\alpha.e_\alpha V^A + S_{B\alpha}{}^{A\beta}.V^B.(e_\beta\xi^\alpha - C_{\gamma\beta}{}^\alpha.\xi^\gamma) =$$
$$= \xi^\alpha.(e_\alpha V^A - S_{B\beta}{}^{A\gamma}.V^B.C_{\alpha\gamma}{}^\beta) + S_{B\beta}{}^{A\gamma}.V^B.e_\gamma\xi^\beta =$$
$$= \xi^\alpha.V^A{}_{//\alpha} + S_{B\alpha}{}^{A\beta}.V^B.e_\beta\xi^\alpha \ . \tag{50}$$

$\pounds_\xi V^A$ называются *производными Ли от компонент V^A контравариантного тензорного поля V вдоль ξ в некоординатном базисе*. Здесь

$$V^A{}_{//\alpha} = e_\alpha V^A - S_{B\beta}{}^{A\gamma}.V^B.C_{\alpha\gamma}{}^\beta = e_\alpha V^A - C_{B\alpha}{}^A.V^B \ . \tag{51}$$

В некоординатном базисе выполняются следующие соотношения:

$$\pounds_{e_\alpha} V = V^A{}_{//\alpha}.e_A \ , \quad \pounds_{e_\alpha} e_A = - \ C_{A\alpha}{}^B.e_B \ . \tag{52}$$

Величина

$$S_{B\alpha}{}^{A\beta} = -\sum_{k=1}^{l} g^{i_1}_{j_1}...g^{i_{k-1}}_{j_{k-1}}.g^{i_k}_\alpha.g^\beta_{j_k}.g^{i_{k+1}}_{j_{k+1}}...g^{i_l}_{j_l} \ , \tag{53}$$

где $l = 1, ..., N$, $B = j_1...j_l$, $A = i_1...i_l$, называется *мультисимволом свертки ранга N*.

4.2. Связь между ковариантным дифференцированием и дифференцированием Ли. Действие оператора ковариантного дифференцирования и действие дифференциального оператора Ли на функции отождествляются с действием же векторного поля, участвующего в конструкции обоих операторов. Что касается векторного поля, то он действует как дифференциальный оператор на функции, заданные на дифференцируемом многообразии M, по правилу

$$\nabla_\xi f = \xi f = \pounds_\xi f = \xi^i . \partial_i f = \xi^\alpha . e_\alpha f \ , \quad f \in C^r(M) \ , \ \ \xi \in T(M) \ .$$

Если мы сравним производную Ли с ковариантной производной векторного поля в некоординатном (или координатном) базисе

$$\begin{gathered} \pounds_\xi u = (\pounds_\xi u^\alpha).e_\alpha = (\xi^\beta . e_\beta u^\alpha - u^\beta . e_\beta \xi^\alpha + C_{\beta\gamma}{}^\alpha . \xi^\beta . u^\gamma).e_\alpha \ , \\ \nabla_\xi u = (u^\alpha{}_{/\beta} . \xi^\beta).e_\alpha = (\xi^\beta . e_\beta u^\alpha + \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} . u^\gamma . \xi^\beta).e_\alpha \ , \end{gathered} \tag{54}$$

то увидим, что оба выражения имеют общую часть типа $\xi u^\alpha = \xi^\beta . e_\beta u^\alpha$, позволяющую установить связь между двумя производными.

После подстановки $e_\beta u^\alpha$ и $e_\beta \xi^\alpha$ из равенств $e_\beta u^\alpha = u^\alpha{}_{/\beta} - \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} . u^\gamma$ и $e_\beta \xi^\alpha = \xi^\alpha{}_{/\beta} - \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} . \xi^\gamma$ в выражение для $\pounds_\xi u$ получим

$$\begin{gathered} \pounds_\xi u^\alpha = u^\alpha{}_{/\beta} . \xi^\beta - \xi^\alpha{}_{/\beta} . u^\beta - T_{\beta\gamma}{}^\alpha . \xi^\beta . u^\gamma = \\ = u^\alpha{}_{/\beta} . \xi^\beta - (\xi^\alpha{}_{/\beta} - T_{\beta\gamma}{}^\alpha . \xi^\gamma).u^\beta, \end{gathered} \tag{55}$$

где

$$T_{\beta\gamma}{}^\alpha = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - C_{\beta\gamma}{}^\alpha = -T_{\gamma\beta}{}^\alpha, \tag{56}$$

$$\begin{gathered} \pounds_\xi u = (\pounds_\xi u^\alpha).e_\alpha = (u^\alpha{}_{/\beta} . \xi^\beta - \xi^\alpha{}_{/\beta} . u^\beta - T_{\beta\gamma}{}^\alpha . \xi^\beta . u^\gamma).e_\alpha = \\ = \nabla_\xi u - \nabla_u \xi - T(\xi, u) \ , \end{gathered} \tag{57}$$

причем

$$T(\xi, u) = T_{\beta\gamma}{}^\alpha . \xi^\beta . u^\gamma . e_\alpha = -T(u, \xi), \quad T(e_\beta, e_\gamma) = T_{\beta\gamma}{}^\alpha . e_\alpha \ . \tag{58}$$

Векторное поле $T(\xi, u)$ называется *векторным полем кручения*.

Если подставить равенство, следующее из выражения для $\pounds_u v^\beta$, а именно

$$v^\beta{}_{/\gamma} . u^\gamma - u^\beta{}_{/\gamma} . v^\gamma = \pounds_u v^\beta + T_{\alpha\gamma}{}^\beta . u^\alpha . v^\gamma \ , \tag{59}$$

в выражение

$$\begin{gathered} \nabla_u \nabla_v \xi - \nabla_v \nabla_u \xi = \\ = [(\xi^\alpha{}_{/\beta/\gamma} - \xi^\alpha{}_{/\gamma/\beta}).v^\beta . u^\gamma + \xi^\alpha{}_{/\beta} . (v^\beta{}_{/\gamma} . u^\gamma - u^\beta{}_{/\gamma} . v^\gamma)].e_\alpha, \end{gathered}$$

то получим

$$\nabla_u \nabla_v \xi - \nabla_v \nabla_u \xi =$$
$$= [(\xi^\alpha{}_{/\beta/\gamma} - \xi^\alpha{}_{/\gamma/\beta}).v^\beta.u^\gamma + \xi^\alpha{}_{/\beta}.(\pounds_u v^\beta + T_{\gamma\delta}{}^\beta.u^\gamma.v^\delta)].e_\alpha =$$
$$= [(\xi^\alpha{}_{/\beta/\gamma} - \xi^\alpha{}_{/\gamma/\beta}).v^\beta.u^\gamma + \xi^\alpha{}_{/\beta}.(\pounds_u v^\beta + T^\beta(u,v)].e_\alpha \ ,$$
$$T^\beta(u,v) = T_{\delta\gamma}{}^\beta.u^\delta.v^\gamma \ , \quad \nabla_{T(u,v)}\xi = \xi^\alpha{}_{/\beta}.T_{\gamma\delta}{}^\beta.u^\gamma.v^\delta.e_\alpha \ ,$$
$$\nabla_u \nabla_v \xi - \nabla_v \nabla_u \xi - \nabla_{\pounds_u v}\xi = (\xi^\alpha{}_{/\beta/\gamma} - \xi^\alpha{}_{/\gamma/\beta}).v^\beta.u^\gamma.e_\alpha + \nabla_{T(u,v)}\xi \ , \tag{60}$$

или

$$\nabla_u \nabla_v \xi - \nabla_v \nabla_u \xi - \nabla_{\pounds_u v}\xi - \nabla_{T(u,v)}\xi = (\xi^\alpha{}_{/\beta/\gamma} - \xi^\alpha{}_{/\gamma/\beta}).v^\beta.u^\gamma.e_\alpha \ ,$$
$$\nabla_{e_\gamma} \nabla_{e_\beta} \xi - \nabla_{e_\beta} \nabla_{e_\gamma} \xi - \nabla_{\pounds_{e_\gamma} e_\beta}\xi - \nabla_{T(e_\gamma, e_\beta)}\xi = (\xi^\alpha{}_{/\beta/\gamma} - \xi^\alpha{}_{/\gamma/\beta}).e_\alpha \ . \tag{61}$$

В координатном базисе векторное поле кручения имеет вид

$$T(\xi, u) = T_{kl}{}^i.\xi^k.u^l.\partial_i = (\Gamma^i_{lk} - \Gamma^i_{kl}).\xi^k.u^l.\partial_i \ , \tag{62}$$

$$T_{kl}{}^i = \Gamma^i_{lk} - \Gamma^i_{kl}, \qquad T(\partial_k, \partial_l) = T_{kl}{}^i.\partial_i \ . \tag{63}$$

Производную Ли $\pounds_\xi u$ можно написать теперь в виде

$$\begin{gathered} \pounds_\xi u = (\pounds_\xi u^i).\partial_i = (u^i{}_{;k}.\xi^k - u^k.\xi^i{}_{;k} - T_{kl}{}^i.\xi^k.u^l).\partial_i \ , \\ \pounds_\xi u^i = u^i{}_{;k}.\xi^k - u^k.\xi^i{}_{;k} - T_{kl}{}^i.\xi^k.u^l \ . \end{gathered} \tag{64}$$

Связь между ковариантной производной и производной Ли от контравариантного тензорного поля можно установить аналогично тому, как это было сделано в случае с векторным полем.

4.3. Производные Ли от ковариантных базисных векторных полей. *Производные Ли от ковариантных координатных базисных векторных полей.*

Перестановочные соотношения между дифференциальным оператором Ли $\pounds_\xi$ и оператором свертки S в случае базисных (как координатных, так и некоординатных) векторных полей можно написать в виде

$$\begin{gathered} \pounds_\xi \circ S(dx^i \otimes \partial_j) = S \circ \pounds_\xi(dx^i \otimes \partial_j) \ , \\ \pounds_\xi \circ S(e^\alpha \otimes e_\beta) = S \circ \pounds_\xi(e^\alpha \otimes e_\beta) \ , \end{gathered} \tag{65}$$

где

$$\begin{gathered} \pounds_\xi \circ S(dx^i \otimes \partial_j) = \xi f^i{}_j = f^i{}_{j,k}.\xi^k \ , \\ S \circ \pounds_\xi(dx^i \otimes \partial_j) = S(\pounds_\xi dx^i \otimes \partial_j) + S(dx^i \otimes \pounds_\xi \partial_j) \ . \end{gathered} \tag{66}$$

С помощью (невырожденной) обратной матрицы $(f^i{}_j)^{-1} = (f_j{}^i)$ и соотношений $f^i{}_k.f_j{}^k = g^i_j$, $f^k{}_i.f_k{}^j = g^j_i$, после умножения равенства для $k^i{}_l(\xi)$ на $f_m{}^j$ и суммирования по j выражение для $k^i{}_j(\xi)$ получается в следующем явном виде:

$$k^i{}_j(\xi) = f_j{}^l.\xi^k{}_{,l}.f^i{}_k + f_j{}^l.f^i{}_{l,k}.\xi^k \; . \tag{67}$$

Для $\pounds_{\partial_k} dx^i = k^i{}_j(\partial_k).dx^j = k^i_{jk}.dx^j$ получается, соответственно,

$$\begin{gathered} \pounds_{\partial_k} dx^i = k^i{}_{jk}.dx^j = f_j{}^l.f^i{}_{l,k}.dx^j \; , \\ k^i{}_{jk} = f_j{}^l.f^i{}_{l,k} \; . \end{gathered} \tag{68}$$

С другой стороны, из коммутационных соотношений между S и оператором ковариантного дифференцирования ∇_ξ следует связь между частными производными от $f^i{}_j$ и компонентами контравариантной и ковариантной связностей Γ и P:

$$f^i{}_{l,k} = P^i_{mk}.f^m{}_l + \Gamma^m_{lk}.f^i{}_m. \tag{69}$$

После подстановки последнего выражения для $k^i{}_j(\xi)$ и $k^i{}_{jk}$ соответствующие величины получаются в виде

$$k^i{}_j(\xi) = f_j{}^l.\xi^k{}_{,l}.f^i{}_k + (P^i_{jk} + f_j{}^l.\Gamma^m_{lk}.f^i{}_m).\xi^k \; , \tag{70}$$

$$k^i{}_j(\partial_k) = k^i{}_{jk} = P^i_{jk} + f_j{}^l.\Gamma^m_{lk}.f^i{}_m \; ,$$

$$\pounds_\xi dx^i = [f_j{}^l.\xi^k{}_{,l}.f^i{}_k + (P^i_{jk} + f_j{}^l.\Gamma^m_{lk}.f^i{}_m).\xi^k].dx^j \; , \tag{71}$$

$$\pounds_{\partial_k} dx^i = k^i{}_{jk}.dx^j = (P^i_{jk} + f_j{}^l.\Gamma^m_{lk}.f^i{}_m).dx^j \; . \tag{72}$$

Если мы обозначим

$$\xi^{\bar{i}}{}_{,\underline{j}} = f^i{}_k.\xi^k{}_{,l}.f_j{}^l \; , \qquad \Gamma^{\bar{i}}_{\underline{j}k} = f_j{}^l.\Gamma^m_{lk}.f^i{}_m \; , \tag{73}$$

то производные Ли от ковариантных координатных базисных векторных полей dx^i вдоль векторных полей ξ и ∂_k можно записать в следующем виде:

$$\pounds_\xi dx^i = [\xi^{\bar{i}}{}_{,\underline{j}} + (P^i_{jk} + \Gamma^{\bar{i}}_{\underline{j}k}).\xi^k].dx^j, \quad \pounds_{\partial_k} dx^i = (P^i_{jk} + \Gamma^{\bar{i}}_{\underline{j}k}).dx^j \; . \tag{74}$$

Производные Ли от ковариантных некоординатных базисных векторных полей. Аналогично случаю ковариантных координатных базисных векторных полей производные Ли от ковариантных некоординатных базисных векторных полей можно получить в виде

$$\begin{aligned} \pounds_\xi e^\alpha &= [\xi^{\overline{\alpha}}{}_{//\underline{\beta}} + (P^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^{\overline{\alpha}}_{\underline{\beta}\gamma}).\xi^\gamma].e^\beta = \\ &= [e_{\underline{\beta}}\xi^{\overline{\alpha}} + (P^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^{\overline{\alpha}}_{\underline{\beta}\gamma} + C_{\underline{\beta}\gamma}{}^{\overline{\alpha}}).\xi^\gamma].e^\beta \ , \end{aligned} \tag{75}$$

$$\pounds_{e_\gamma} e^\alpha = (P^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^{\overline{\alpha}}_{\underline{\beta}\gamma} + C_{\underline{\beta}\gamma}{}^{\overline{\alpha}}).e^\beta \ , \tag{76}$$

где

$$\begin{gathered} \xi^{\overline{\alpha}}{}_{//\underline{\beta}} = f^\alpha{}_\gamma.\xi^\gamma{}_{//\delta}.f_\beta{}^\delta = f^\alpha{}_\gamma.(e_\delta\xi^\gamma).f_\beta{}^\delta + f^\alpha{}_\gamma.C_{\delta\sigma}{}^\gamma.f_\beta{}^\delta.\xi^\sigma = \\ = e_{\underline{\beta}}\xi^{\overline{\alpha}} + C_{\underline{\beta}\sigma}{}^{\overline{\alpha}}.\xi^\sigma \ , \\ e_{\underline{\beta}}\xi^{\overline{\alpha}} = f^\alpha{}_\gamma.(e_\delta\xi^\gamma).f_\beta{}^\delta, \qquad C_{\underline{\beta}\sigma}{}^{\overline{\alpha}} = f^\alpha{}_\gamma.C_{\delta\sigma}{}^\gamma.f_\beta{}^\delta \ , \\ \Gamma^{\overline{\alpha}}_{\underline{\beta}\gamma} = f_\beta{}^\delta.\Gamma^\sigma_{\delta\gamma}.f^\alpha{}_\sigma. \end{gathered} \tag{77}$$

4.4. Производные Ли от ковариантных тензорных полей. Действие дифференциального оператора Ли на ковариантные векторные и тензорные поля определяется его же действием на ковариантные базисные векторные поля и на функции на M.

В координатном базисе производная Ли от ковекторного поля p вдоль векторного поля ξ может быть написана по-разному:

$$\begin{aligned} \pounds_\xi p &= \pounds_\xi(p_i.dx^i) = (\pounds_\xi p_i).dx^i = \\ &= [p_{i,k}.\xi^k + p_j.\xi^{\overline{j}}{}_{,\underline{i}} + p_j.(P^j_{ik} + \Gamma^{\overline{j}}_{\underline{i}k}).\xi^k].dx^i = \\ &= [p_{i;k}.\xi^k + \xi^{\overline{k}}{}_{;\underline{i}}.p_k + T_{k\underline{i}}{}^{\overline{j}}.p_j.\xi^k].dx^i \ , \end{aligned} \tag{78}$$

где

$$\begin{aligned} &\xi^{\overline{j}}{}_{;\underline{i}} = f^j{}_k.\xi^k{}_{;l}.f_i{}^l, \qquad T_{k\underline{i}}{}^{\overline{j}} = f^j{}_l.T_{km}{}^l.f_i{}^m, \\ &T_{ki}{}^j = \Gamma^j_{ik} - \Gamma^j_{ki} \ \ (\text{в координатном базисе}). \end{aligned} \tag{79}$$

В некоординатном базисе производная Ли $\pounds_\xi p$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \pounds_\xi p &= \pounds_\xi(p_\alpha.e^\alpha) = (\pounds_\xi p_\alpha).e^\alpha = \\ &= \{(e_\gamma p_\alpha + P^\beta_{\alpha\gamma}.p_\beta).\xi^\gamma + p_\beta.[e_{\underline{\alpha}}\xi^{\overline{\beta}} + (\Gamma^{\overline{\beta}}_{\underline{\alpha}\gamma} + C_{\underline{\alpha}\gamma}{}^{\overline{\beta}}).\xi^\gamma]\}.e^\alpha = \\ &= (p_{\alpha/\beta}.\xi^\beta + \xi^{\overline{\beta}}{}_{/\underline{\alpha}}.p_\beta + T_{\gamma\underline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}}.p_\beta.\xi^\gamma).e^\alpha \ , \end{aligned} \tag{80}$$

где

$$\xi^{\overline{\beta}}{}_{/\underline{\alpha}} = f^{\beta}{}_{\delta}.\xi^{\delta}{}_{/\gamma}.f_{\alpha}{}^{\gamma}, \quad T_{\gamma\underline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}} = f_{\alpha}{}^{\delta}.T_{\gamma\delta}{}^{\sigma}.f^{\beta}{}_{\sigma} ,$$
$$T_{\beta\gamma}{}^{\alpha} = \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} - C_{\beta\gamma}{}^{\alpha} \quad \text{(в некоординатном базисе)}. \tag{81}$$

Действие дифференциального оператора Ли на ковариантные тензорные поля определяется его же действием на базисные тензорные поля.

В координатном базисе

$$£_{\xi}W = £_{\xi}(W_A.dx^A) = (\xi W_A).dx^A + W_A.£_{\xi}dx^A =$$
$$= (£_{\xi}W_A).dx^A , \qquad W \in \otimes_k(M) ,$$
$$£_{\xi}dx^B = -k^m{}_n(\xi).S_{Am}{}^{Bn}.dx^A , \quad £_{\xi}dx^m = k^m{}_n(\xi).dx^n ,$$
$$£_{\xi}dx^B = [-\xi^{\overline{k}}{}_{,\underline{l}}.S_{Ak}{}^{Bl} - S_{Am}{}^{Bn}.(P^m_{nl} + \Gamma^{\overline{m}}_{\underline{nl}}).\xi^l].dx^A . \tag{82}$$

Обозначив

$$\widetilde{\Gamma}{}^B_{Ak} = -S_{Ai}{}^{Bj}.\Gamma^{\overline{i}}_{\underline{j}k} , \quad P^B_{Ak} = -S_{Ai}{}^{Bj}.P^i_{jk} , \tag{83}$$

можно записать $£_{\xi}W$ в виде

$$£_{\xi}W = (£_{\xi}W_A).dx^A =$$
$$= [\xi^k.W_{A\ ,k} - \xi^{\overline{k}}{}_{,\underline{l}}.S_{Ak}{}^{Bl}.W_B + (P^B_{Al} + \widetilde{\Gamma}^B_{Al}).W_B.\xi^l].dx^A , \tag{84}$$

где

$$£_{\xi}W_A = \xi^k.W_{A,k} - \xi^{\overline{k}}{}_{,\underline{l}}.S_{Ak}{}^{Bl}.W_B + (P^B_{Al} + \widetilde{\Gamma}{}^B_{Al}).W_B.\xi^l =$$
$$= \xi^k.W_{A;k} - S_{A\overline{k}}{}^{B\underline{l}}.W_B.(\xi^k{}_{;l} - T^k_{lj}.\xi^j) =$$
$$= \xi^k.W_{A;k} - S_{Ak}{}^{Bl}.W_B.(\xi^{\overline{k}}{}_{;\underline{l}} - T^{\overline{k}}_{\underline{l}j}.\xi^j) , \tag{85}$$

$$£_{\partial_j}W_A = W_{A,j} + (P^B_{Aj} + \widetilde{\Gamma}{}^B_{Aj}).W_B ,$$
$$£_{\partial_j}dx^B = -S_{Ai}{}^{Bl}.(P^i_{lj} + \Gamma^{\overline{i}}_{\underline{l}j}).dx^A = (P{}^B_{Aj} + \widetilde{\Gamma}{}^B_{Aj}).dx^A . \tag{86}$$

Вторая производная Ли от компонент W_A ковариантного тензорного поля W может быть записана в форме

$$£_{\xi}£_uW_A = \xi^k.(£_uW_A)_{,k} - \xi\overline{k}_{,\underline{l}}.S^{Bl}_{Ak}.£_uW_B + (P^B_{Al} + \widetilde{\Gamma}{}^B_{Al}).\xi^l.£_uW_B . \tag{87}$$

В некоординатном базисе $£_{\xi}W$ имеет вид

$$£_{\xi}W = (\xi W_A).e^A + W_B.(£_{\xi}e^B) = (£_{\xi}W_A).e^A , \tag{88}$$

где

$$
\begin{gathered}
\pounds_\xi W_A = \xi^\beta . e_\beta W_A - S_{A\alpha}{}^{B\beta} . W_B . e_{\underline{\beta}} \xi^{\overline{\alpha}} + (P^B_{A\gamma} + \widetilde{\Gamma}{}^B_{A\gamma} + \widetilde{C}_{A\gamma}{}^B) . W_B . \xi^\gamma \ , \\
\widetilde{\Gamma}{}^B_{A\gamma} = -S_{A\alpha}{}^{B\beta} . \Gamma^{\overline{\alpha}}_{\underline{\beta}\gamma} \ , \qquad \widetilde{C}_{A\gamma}{}^B = -S_{A\alpha}{}^{B\beta} . C_{\underline{\beta}\gamma}{}^{\overline{\alpha}} \ , \\
\pounds_{e_\beta} e^B = (P^B_{A\beta} + \widetilde{\Gamma}{}^B_{A\beta} + \widetilde{C}_{A\beta}{}^B) . e^A \ , \\
\pounds_{e_\beta} W_A = e_\beta W_A + (P^B_{A\beta} + \widetilde{\Gamma}{}^B_{A\beta} + \widetilde{C}_{A\beta}{}^B) . W_B \ .
\end{gathered}
\tag{89}
$$

Вторая производная Ли от W_A в некоординатном базисе имеет вид

$$
\begin{aligned}
\pounds_\xi \pounds_u W_A \quad = \quad & \xi^\beta . e_\beta (\pounds_u W_A) - S_{A\alpha}{}^{B\beta} . (\pounds_u W_B) . e_{\underline{\beta}} \xi^{\overline{\alpha}} + \\
& + (P^B_{A\gamma} + \widetilde{\Gamma}{}^B_{A\gamma} + \widetilde{C}_{A\gamma}{}^B) . \xi^\gamma . \pounds_u W_B \ .
\end{aligned}
\tag{90}
$$

Производные Ли от ковариантных базисных тензорных полей можно выразить через ковариантные производные от компонент векторного поля ξ и тензор кручения

$$
\pounds_\xi e^B = [-S_{A\alpha}{}^{B\beta} . \xi^{\overline{\alpha}}{}_{/\underline{\beta}} + P^B_{A\gamma} . \xi^\gamma + \widetilde{T}{}_{A\gamma}{}^B . \xi^\gamma] . e^A \ , \tag{91}
$$

где $\widetilde{T}{}_{A\gamma}{}^B = S_{A\alpha}{}^{B\beta} . T_{\underline{\beta}\gamma}{}^{\overline{\alpha}} = S_{A\overline{\alpha}}{}^{B\underline{\beta}} . T_{\beta\gamma}{}^\alpha$.

Производная $\pounds_\xi W_A$ тогда будет иметь вид

$$
\begin{gathered}
\pounds_\xi W_A = \xi^\beta . W_{A/\beta} - S_{A\overline{\alpha}}{}^{B\underline{\beta}} . W_B . (\xi^\alpha{}_{/\beta} - T_{\beta\gamma}{}^\alpha . \xi^\gamma) = \\
= \xi^\beta . W_{A/\beta} - S_{A\alpha}{}^{B\beta} . W_B . (\xi^{\overline{\alpha}}{}_{/\underline{\beta}} - T_{\underline{\beta}\gamma}{}^{\overline{\alpha}} . \xi^\gamma) \ .
\end{gathered}
\tag{92}
$$

Обобщение производных Ли на случай смешанных тензорных полей получается аналогично тому, как это было сделано для ковариантных производных от смешанных тензорных полей.

4.5. Классификация линейных переносов и смещений в зависимости от связи между контравариантной и ковариантной аффинными связностями. С помощью производных Ли от ковариантных базисных векторных полей мы можем разбить на классы возможные связи между компонентами Γ^i_{jk} $(\Gamma^\alpha_{\beta\gamma})$ контравариантной связности Γ и компонентами P^i_{jk} $(P^\alpha_{\beta\gamma})$ ковариантной аффинной связности P. На этой основе можно классифицировать линейные переносы, генерируемые оператором ковариантного дифференцирования, и смещения, генерируемые дифференциальным оператором Ли, в зависимости от коммутационных соотношений этих операторов с оператором свертки S. Результат классификации можно представить в виде следующей таблицы. Подобная классификация была предложена Схоутеном [29] и рассмотрена Шмутцером [32] на основе иных соображений.

Таблица 1. Соотношения между условиями для переносов и типами смещений

Условия для переносов	Типы смещений и переносов
	Перенос с произвольным смещением
$P^{\alpha}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\overline{\alpha}}_{\underline{\beta}\gamma} + C_{\underline{\beta}\gamma}{}^{\overline{\alpha}} = \overline{F}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}$	$\pounds_{e_\gamma} e^{\alpha} = \overline{F}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}.e^{\beta}$
$P^{i}_{jk} + \Gamma^{\overline{i}}_{\underline{j}k} = \overline{F}{}^{i}_{jk}$	$\pounds_{\partial_k} dx^{i} = \overline{F}{}^{i}_{jk}.dx^{j}$
	Перенос с коллинеарным смещением
$P^{\alpha}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\overline{\alpha}}_{\underline{\beta}\gamma} = \overline{A}_{\gamma}.g^{\alpha}_{\beta}$	$\pounds_{e_\gamma} e^{\alpha} = \overline{A}_{\gamma}.e^{\alpha} + C_{\underline{\beta}\gamma}{}^{\overline{\alpha}}.e^{\beta}$
$P^{i}_{jk} + \Gamma^{\overline{i}}_{\underline{j}k} = \overline{A}_{k}.g^{i}_{j}$	$\pounds_{\partial_k} dx^{i} = \overline{A}_{k}.dx^{i}$
	Перенос без смещения
$P^{\alpha}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\overline{\alpha}}_{\underline{\beta}\gamma} = 0$	$\pounds_{e_\gamma} e^{\alpha} = C_{\beta\gamma}{}^{\overline{\alpha}}.e^{\beta}$
$P^{i}_{jk} + \Gamma^{\overline{i}}_{\underline{j}k} = 0$	$\pounds_{\partial_k} dx^{i} = 0$

5. ОПЕРАТОР КРИВИЗНЫ. ТОЖДЕСТВА БИАНКИ

5.1. Оператор кривизны. Одним из хорошо известных операторов, конструируемых на дифференцируемых многообразиях с помощью ковариантного диффренциального оператора и дифференциального оператора Ли, является оператор кривизны.

Дефиниция. Оператор

$$R(\xi, u) = \nabla_\xi \nabla_u - \nabla_u \nabla_\xi - \nabla_{\pounds_\xi u} = [\nabla_\xi, \nabla_u] - \nabla_{[\xi, u]} \ , \quad \xi, u \in T(M) \ , \quad (93)$$

называется *оператором кривизны*.

1. Действие оператора кривизны на функцию класса $C^r(M)$, $r \geq 2$, на многообразии M:

$$[R(\xi, u)]f = 0, \quad f \in C^r(M), \quad r \geq 2 \ .$$

2. $[R(\xi, u)]fv = f.[R(\xi, u)]v, \quad f \in C^r(M), \quad r \geq 2, \quad v \in T(M)$.

3. Действие оператора кривизны на векторное поле:

$$\begin{aligned} [R(\xi, u)]v &= \nabla_\xi \nabla_u v - \nabla_u \nabla_\xi v - \nabla_{\pounds_\xi u} v = \\ &= [(v^{\delta}{}_{/\beta/\gamma} - v^{\delta}{}_{/\gamma/\beta}).u^{\beta}.\xi^{\gamma} + v^{\delta}{}_{/\alpha}.T_{\beta\gamma}{}^{\alpha}.\xi^{\beta}.u^{\gamma}].e_{\delta} = \\ &= [(v^{i}{}_{;j;k} - v^{i}{}_{;k;j}).u^{j}.\xi^{k} + v^{i}{}_{;j}.T_{kl}{}^{j}.\xi^{k}.u^{l}].\partial_i \ . \end{aligned} \quad (94)$$

Таким образом, для $\forall\, \xi \in (M)$ и $\forall\, u \in T(M)$ мы можем найти в координатном базисе соотношение

$$v^{i}{}_{;k;l} - v^{i}{}_{;l;k} = -\, v^{j}.R^{i}{}_{jkl} + v^{i}{}_{;j}.T_{kl}{}^{j} \ , \quad (95)$$

где величины

$$R^i{}_{jkl} = \Gamma^i_{jl,k} - \Gamma^i_{jk,l} + \Gamma^m_{jl}.\Gamma^i_{mk} - \Gamma^m_{jk}.\Gamma^i_{ml} \tag{96}$$

называются *компонентами (контравариантного) тензора кривизны (тензора Римана) в координатном базисе*.

4. Действие оператора кривизны на контравариантные тензорные поля.

Для $V = V^A.e_A = V^B.\partial_B$, $V \in \otimes^l(M)$ и базисов e_A и ∂_B, учитывая свойства величин $S_{Ak}{}^{Bl}$ и Γ^B_{Ai}, можно доказать следующие соотношения:

$$[R(\xi, u)](f.V) = f.[R(\xi, u)]V, \tag{97}$$

$$[R(\xi, u)]V = V^A.[R(\xi, u)]e_A = V^B.[R(\xi, u)]\partial_B \ , \tag{98}$$

$$[R(\partial_j, \partial_i)]\partial_A = R^B{}_{Aji}.\partial_B = -\, S_{Ak}{}^{Bl}.R^k{}_{lji}.\partial_B \ , \tag{99}$$

где

$$R^B{}_{Aji} = -\, S_{Ak}{}^{Bl}.R^k{}_{lji} \ , \qquad S_{Ak}{}^{Bl}{}_{,i} = 0 \ , \tag{100}$$

$$R^B{}_{Aji} = \Gamma^B_{Ai,j} - \Gamma^B_{Aj,i} + \Gamma^C_{Ai}.\Gamma^B_{Cj} - \Gamma^C_{Aj}.\Gamma^B_{Ci} \ , \tag{101}$$

$$[R(\xi, u)]V = -\ S_{Bk}{}^{Al}.V^B.R^k{}_{lij}.\xi^i.u^j.\partial_A \ . \tag{102}$$

С другой стороны, как это следует из явного выражения для $[R(\xi, u)]V$,

$$\begin{gathered} [R(\xi, u)]V = (V^A{}_{;i;j} - V^A{}_{;j;i} + V^A{}_{;k}.T_{ji}{}^k).u^i.\xi^j.\partial_A \ , \\ V^A{}_{;i;j} - V^A{}_{;j;i} = -\ S_{Bk}{}^{Al}.V^B.R^k{}_{lji} - T_{ji}{}^k.V^A{}_{;k} \ , \\ [R(\partial_j, \partial_i)] - \nabla_{T(\partial_j, \partial_i)}]V = (V^A{}_{;i;j} - V^A{}_{;j;i}).\partial_A \ . \end{gathered} \tag{103}$$

5. Действие оператора кривизны на ковекторные поля определяется его структурой и действием оператора ковариантного дифференцирования на ковариантное тензорное поле. В координатном базисе имеем

$$\begin{aligned} [R(\xi, u)]p &= (\nabla_\xi \nabla_u - \nabla_u \nabla_\xi - \nabla_{\pounds_\xi u})p = p_l.P^l{}_{ikj}.\xi^k.u^j.dx^i = \\ &= (p_{i;j;k} - p_{i;k;j} + T_{kj}{}^l.p_{i;l}).u^j.\xi^k.dx^i \ , \end{aligned} \tag{104}$$

$$[R(\partial_k, \partial_l)]dx^i = P^i{}_{jkl}.dx^j \ , \tag{105}$$

где величины

$$P^i{}_{jkl} = P^i_{jl,k} - P^i_{jk,l} + P^m_{jk}.P^i_{ml} - P^m_{jl}.P^i_{mk} = -P^i{}_{jlk} \tag{106}$$

называются компонентами *ковариантного тензора кривизны* в координатном базисе.

Специальный случай: $S = C : f^i{}_j = g^i_j : P^i_{jk} + \Gamma^i_{jk} = 0$.

$$P^i{}_{jkl} = -R^i{}_{jkl}\ . \tag{107}$$

В некоординатном базисе:

$$[R(\xi,u)]p = p_\delta.P^\delta{}_{\alpha\beta\gamma}.\xi^\beta.u^\gamma.e^\alpha =$$

$$= (p_{\alpha/\gamma/\beta} - p_{\alpha/\beta/\gamma} + T_{\beta\gamma}{}^\delta.p_{\alpha/\delta}).\xi^\beta.u^\gamma.e^\alpha\ , \tag{108}$$

$$P^\alpha{}_{\delta\beta\gamma} = e_\beta P^\alpha_{\delta\gamma} - e_\gamma P^\alpha_{\delta\beta} + P^\sigma_{\delta\beta}.P^\alpha_{\sigma\gamma} - P^\sigma_{\delta\gamma}.P^\alpha_{\sigma\beta} - C_{\beta\gamma}{}^\sigma.P^\alpha_{\delta\sigma}\ . \tag{109}$$

Величины $P^\alpha{}_{\delta\beta\gamma} = -P^\alpha{}_{\delta\gamma\beta}$ называются компонентами *ковариантного тензора кривизны* в некоординатном базисе.

Для ковариантного тензорного поля $W = W_A.dx^A = W_C.e^C \in \otimes_k(M)$ имеем соотношение

$$W_{A;i;j} - W_{A;j;i} = S_{Am}{}^{Bn}.W_B.P^m{}_{nij} + W_{A;l}.T_{ij}{}^l \tag{110}$$

в координатном базисе и соотношение

$$W_{A/\beta/\gamma} - W_{A/\gamma/\beta} = S_{A\alpha}{}^{B\delta}.W_B.P^\alpha{}_{\delta\beta\gamma} + W_{A/\delta}.T_{\beta\gamma}{}^\delta \tag{111}$$

в некоординатном базисе.

5.2. Тождества Бианки. Если мы напишем цикл действия оператора кривизны на векторные поля:

$$< [R(\xi,u)]v >= [R(\xi,u)]v + [R(v,\xi)]u + [R(u,v)]\,\xi \tag{112}$$

и приведем в явном виде каждое слагаемое в этом цикле, а затем воспользуемся оператором ковариантного дифференцирования и дифференциальным оператором Ли, то после некоторых (не таких уж и трудных) расчетов мы сможем найти тождества типа

$$\begin{gathered}[R(\xi,u)]\,v + [R(v,\xi)]\,u + [R(u,v)]\,\xi \equiv \\ \equiv T(T(\xi,u),v) + T(T(v,\xi),u) + T(T(u,v),\xi) + \\ + (\nabla_\xi T)(u,v) + (\nabla_v T)(\xi,u) + (\nabla_u T)(v,\xi)\ ,\end{gathered} \tag{113}$$

или

$$< [R(\xi, u)]\, v > \equiv < T(T(\xi, u), v) > + < (\nabla_\xi T)(u, v) > \ . \tag{114}$$

Эти тождества называются *тождествами Бианки первого типа* (или *типа 1*), где

$$< T(T(\xi, u), v) > \equiv T(T(\xi, u), v) + T(T(v, \xi), u) + T(T(u, v), \xi) \ ,$$
$$< (\nabla_\xi T)(u, v) > \equiv \ (\nabla_\xi T)(u, v) + \ (\nabla_v T)(\xi, u) + \ (\nabla_u T)(v, \xi) \ ,$$
$$\nabla_\xi [T(u, v)] = (\nabla_\xi T)(u, v) + T(\nabla_\xi u, v) + T(u, \nabla_\xi v) \ .$$

С помощью оператора кривизны и оператора коваринтного дифференцирования можно построить новый оператор $(\nabla_w R)(\xi, u)$ в следующем виде:

$$(\nabla_w R)(\xi, u) = [\nabla_w, R(\xi, u)] - R(\nabla_w \xi, u) - R(\xi, \nabla_w u) \ , \tag{115}$$

где

$$[\nabla_w, R(\xi, u)] = \nabla_w \circ R(\xi, u) - R(\xi, u) \circ \nabla_w \ , \quad w, \xi, u \in T(M) \ .$$

Оператор $(\nabla_w R)(\xi, u)$ имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned}(\nabla_w R)(\xi, u) = \nabla_w \nabla_\xi \nabla_u - \nabla_w \nabla_u \nabla_\xi + \nabla_u \nabla_\xi \nabla_w - \nabla_\xi \nabla_u \nabla_w + \\ + \ \nabla_u \nabla_{\nabla_w \xi} - \ \nabla_{\nabla_w \xi} \nabla_u + \ \nabla_{\nabla_w u} \nabla_\xi - \ \nabla_\xi \nabla_{\nabla_w u} + \\ + \nabla_{\pounds_\xi u} \nabla_w - \nabla_w \nabla_{\pounds_\xi u} + \nabla_{\pounds_\xi \nabla_w u} - \nabla_{\pounds_u \nabla_w \xi} \ .\end{aligned} \tag{116}$$

Этот оператор подчиняется так называемому *тождеству Бианки второго типа* (или *типа 2*)

$$< (\nabla_w R)(\xi, u) > \equiv < R(w, T(\xi, u)) > \ , \tag{117}$$

где

$$< (\nabla_w R)(\xi, u) > \equiv \ (\nabla_w R)(\xi, u) + (\nabla_u R)(w, \xi) + (\nabla_\xi R)(u, w) \ ,$$
$$< R(w, T(\xi, u)) > \equiv \ R(w, T(\xi, u)) + R(u, T(w, \xi)) + R(\xi, T(u, w)) \ .$$

Тождество Бианки типа 2 можно записать как в координатном, так и в некоординатном базисе в виде следующего тождества для компонент контравариантного тензора кривизны:

$$R^i{}_{j<kl;m>} \equiv R^i{}_{j<kn} . T_{lm>}{}^n \equiv - R^i{}_{jn<k} . T_{lm>}{}^n \ , \tag{118}$$

где

$$R^i{}_{j<kl;m>} \equiv R^i{}_{jkl;m} + R^i{}_{jmk;l} + R^i{}_{jlm;k} \ ,$$
$$R^i{}_{j<kn}.T_{lm>}{}^n \equiv R^i{}_{jkn}.T_{lm}{}^n + R^i{}_{jmn}.T_{kl}{}^n + R^i{}_{jlr}.T_{mk}{}^r \ . \tag{119}$$

Для коммутатора

$$[\nabla_w, R(\xi,u)] = \nabla_w \circ R(\xi,u) - R(\xi,u) \circ \nabla_w$$

выполняется следующее коммутационное тождество:

$$< [\nabla_w, R(\xi,u)] > \equiv - < R(w, \pounds_\xi u) > \ , \tag{120}$$

где

$$< [\nabla_w, R(\xi,u)] > \equiv [\nabla_w, R(\xi,u)] + [\nabla_u, R(w,\xi)] + [\nabla_\xi, R(u,w)] \ ,$$
$$< R(w, \pounds_\xi u) > \equiv R(w, \pounds_\xi u) + R(u, \pounds_w \xi) + R(\xi, \pounds_u w) \ . \tag{121}$$

Оператор кривизны и тождества Бианки применимы к дифференцируемым многообразиям с одной аффинной связностью. Они могут также найти применение при изучении характеристик дифференцируемых многообразий с аффинными связностями и метриками. Структура оператора кривизны приводит к конструкции другого оператора, называемого оператором девиации.

6. ОПЕРАТОР ДЕВИАЦИИ

Учитывая структуру *оператора кривизны*

$$R(\xi,u) = \nabla_\xi \nabla_u - \nabla_u \nabla_\xi - \nabla_{\pounds_\xi u} = [\nabla_\xi, \nabla_u] - \nabla_{[\xi,u]} \ , \tag{122}$$

коммутатор $[\nabla_w, R(\xi,u)]$ $[w, \xi, u \in T(M)]$ можно представить в виде

$$[\nabla_w, R(\xi,u)] = [\nabla_w, \pounds\Gamma(\xi,u)] + [\nabla_w, [\nabla_\xi, \nabla_u]] - [\nabla_w, [\pounds_\xi, \nabla_u]] \ , \tag{123}$$

где

$$\pounds\Gamma(\xi,u) = \pounds_\xi \nabla_u - \nabla_u \pounds_\xi - \nabla_{\pounds_\xi u} = [\pounds_\xi, \nabla_u] - \nabla_{[\xi,u]} \ . \tag{124}$$

Оператор $\pounds\Gamma(\xi,u)$ появляется здесь как новый оператор, построенный с помощью дифференциального оператора Ли и оператора ковариантного дифференцирования [33–36].

Дефиниция. Оператор $\pounds\Gamma(\xi,u)$ называется *оператором девиации*. Он имеет следующие свойства:

1. Действие оператора девиации на функцию f:

$[\pounds\Gamma(\xi, u)]\, f = 0,\ f \in C^r(M),\ r \geq 2.$

2a. Действие оператора девиации на контравариантное векторное поле:

$[\pounds\Gamma(\xi, u)]\,(fv) = f[\pounds\Gamma(\xi, u)]\, v,\ \xi, u, v \in T(M),$

$[\pounds\Gamma(\xi, u)]v = v^\beta[\pounds\Gamma(\xi, u)]e_\beta = v^j[\pounds\Gamma(\xi, u)]\partial_j = u^\gamma v^\beta[\pounds\Gamma(\xi, e_\gamma)]e_\beta =$ $= u^j v^i[\pounds\Gamma(\xi, \partial_j)]\partial_i.$

Связь между действиями оператора девиации и оператора кривизны на векторное поле можно представить в виде

$$[\pounds\Gamma(\xi, u)]v = [R(\xi, u)]v + [\nabla_u\nabla_v - \nabla_{\nabla_u v}]\xi- \\ -T(\xi, \nabla_u v) + \nabla_u[T(\xi, v)]\ . \tag{125}$$

В координатном базисе $[\pounds\Gamma(\xi, \partial_l)]\partial_k$ имеет вид

$$[\pounds\Gamma(\xi, \partial_l)]\partial_k = [\xi^i{}_{;k;l} - R^i{}_{klj}.\xi^j + (T_{jk}{}^i.\xi^j)_{;l}].\partial_i = (\pounds_\xi\Gamma^i_{kl}).\partial_i\ , \tag{126}$$

где

$$\nabla_{\partial_j}[T(\xi, \partial_i)] - T(\xi, \nabla_{\partial_j}\partial_i) = (T_{li}{}^k.\xi^l)_{;j}.\partial_k\ .$$

Величина $\pounds_\xi\Gamma^i_{kl}$ называется *производной Ли контравариантной аффинной связности* вдоль векторного поля ξ. Она может быть записана также в виде

$$\pounds_\xi\Gamma^i_{kl} = \xi^i{}_{,k,l} + \xi^j.\Gamma^i_{kl,j} - \xi^i{}_{,j}.\Gamma^j_{kl} + \xi^j{}_{,k}.\Gamma^i_{jl} + \xi^j{}_{,l}.\Gamma^i_{kj}\ . \tag{127}$$

С помощью $\pounds_\xi\Gamma^i_{kl}$ выражение для $[\pounds\Gamma(\xi, u)]v$ можно представить в виде

$$[\pounds\Gamma(\xi, u)]v = v^k.u^l.(\pounds_\xi\Gamma^i_{kl}).\partial_i = \\ = [\xi^i{}_{;k;l}.v^k.u^l - R^i{}_{klj}.v^k.u^l.\xi^j + (T_{jk}{}^i.\xi^j)_{;l}.v^k.u^l].\partial_i\ . \tag{128}$$

На этом пути вторую ковариантную производную $\nabla_u\nabla_v\xi$ векторного поля ξ можно записать с помощью оператора девиации:

$$\nabla_u\nabla_v\xi = ([R(u, \xi)]v) + \nabla_\xi\nabla_u v - \pounds_\xi(\nabla_u v) - \nabla_u[T(\xi, v)] + [\pounds\Gamma(\xi, u)]v = \\ = ([R(u, \xi)]v) + \nabla_\xi\nabla_u v - \nabla_u\pounds_\xi v - \nabla_{\pounds_\xi u}v - \nabla_u[T(\xi, v)]\ . \tag{129}$$

При $v = u$ последнее тождество называется *обобщенным тождеством для девиации* [33]. Оно используется для анализа уравнений девиации в пространствах с аффинной связностью и метрикой (L_n-пространства, U_n-пространства и V_n-пространства), где уравнения девиации рассматриваются с точки зрения их структуры и решений [37–41], и в качестве теоретической основы для детектора гравитационных волн в (псевдо)римановых пространствах без кручения (V_n-пространства) [42–48]. Уравнения девиации Синга и Шилда и их обобщение для $(\overline{L}_n, g)$-пространств рассмотрено в [28].

2б. Действие оператора девиации на контравариантное тензорное поле

$$\begin{gathered}[\pounds\Gamma(\xi,u)]V = u^{\gamma}.V^{A}.[\pounds\Gamma(\xi,e_{\gamma})]e_{A} = u^{\gamma}.V^{B}.(\pounds_{\xi}\Gamma^{A}_{B\gamma}).e_{A} = \\ = -(S_{B\alpha}{}^{A\beta}.V^{B}.\pounds_{\xi}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}.u^{\gamma})e_{A}\ , \qquad V\in\otimes^{k}(M)\ ,\end{gathered} \tag{130}$$

где

$$\begin{gathered}\pounds_{\xi}\Gamma^{A}_{B\gamma} = -S_{B\alpha}{}^{A\beta}.\pounds_{\xi}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\ , \\ ([\pounds\Gamma(\xi,u)]e_{B}) = (\pounds_{\xi}\Gamma^{A}_{B\gamma}).u^{\gamma}.e_{A} = \\ = -S_{B\alpha}{}^{A\beta}.[\xi^{\alpha}{}_{/\beta/\gamma} - R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}.\xi^{\delta} + (T_{\delta\beta}{}^{\alpha}.\xi^{\delta})_{/\gamma}].u^{\gamma}.e_{A}\ .\end{gathered} \tag{131}$$

3. Оператор девиации удовлетворяет тождеству, аналогичному тождеству Бианки первого типа для тензора кривизны:

$$\begin{gathered}\langle[\pounds\Gamma(\xi,u)]v\rangle \equiv \langle(\nabla_{\xi}\nabla_{u} - \nabla_{\nabla_{\xi}u})v\rangle + \langle T(T(\xi,u),v)\rangle - \\ -\langle T(u,\nabla_{\xi}v)\rangle\ ,\ \xi,u,v\in T(M)\ ,\end{gathered} \tag{132}$$

где

$$\begin{gathered}\langle[\pounds\Gamma(\xi,u)]v\rangle = [\pounds\Gamma(\xi,u)]v + [\pounds\Gamma(v,\xi)]u + [\pounds\Gamma(u,v)]\xi\ , \\ \langle(\nabla_{\xi}\nabla_{u} - \nabla_{\nabla_{\xi}u})v\rangle = (\nabla_{\xi}\nabla_{u} - \nabla_{\nabla_{\xi}u})v + (\nabla_{v}\nabla_{\xi} - \nabla_{\nabla_{v}\xi})u + \\ +(\nabla_{u}\nabla_{v} - \nabla_{\nabla_{u}v})\xi\ , \\ \langle T(u,\nabla_{\xi}v)\rangle = T(u,\nabla_{\xi}v) + T(v,\nabla_{u}\xi) + T(\xi,\nabla_{v}u)\ .\end{gathered} \tag{133}$$

В некоординатном базисе это тождество принимает вид

$$\begin{gathered}(\pounds_{\xi}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}).v^{\alpha}.u^{\beta} + (\pounds_{u}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}).\xi^{\alpha}.v^{\beta} + (\pounds_{v}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}).u^{\alpha}.\xi^{\beta} \equiv \\ \equiv \xi^{\gamma}{}_{/\alpha/\beta}.v^{\alpha}.u^{\beta} + u^{\gamma}{}_{/\alpha/\beta}.\xi^{\alpha}.v^{\beta} + v^{\gamma}{}_{/\alpha/\beta}.u^{\alpha}.\xi^{\beta} + \\ +T_{\langle\alpha\beta}{}^{\kappa}T_{\kappa\delta\rangle}{}^{\gamma}.v^{\alpha}.\xi^{\beta}.u^{\delta} - \\ -T_{\alpha\beta}{}^{\gamma}.(u^{\alpha}.v^{\beta}{}_{/\delta}.\xi^{\delta} + v^{\alpha}.\xi^{\beta}{}_{/\delta}.u^{\delta} + \xi^{\alpha}.u^{\beta}{}_{/\delta}.v^{\delta})\ .\end{gathered} \tag{134}$$

Коммутатор оператора ковариантного дифференцирования с оператором девиации удовлетворяет следующему тождеству:

$$\langle[\nabla_{w},\pounds\Gamma(\xi,u)]\rangle \equiv \langle[\nabla_{w},[\pounds_{\xi},\nabla_{u}]]\rangle - \langle R(w,\pounds_{\xi}u)\rangle\ , \tag{135}$$

где

$$\begin{gathered}
\langle[\nabla_w, \pounds\Gamma(\xi,u)]\rangle = [\nabla_w, \pounds\Gamma(\xi,u)] + [\nabla_u, \pounds\Gamma(v,\xi)] + [\nabla_\xi, \pounds\Gamma(u,v)], \\
\langle[\nabla_w, [\pounds_\xi, \nabla_u]]\rangle = [\nabla_w, [\pounds_\xi, \nabla_u]] + [\nabla_u, [\pounds_w, \nabla_\xi]] + [\nabla_\xi, [\pounds_u, \nabla_w]] \ , \\
\langle R(w, \pounds_\xi u)\rangle = R(w, \pounds_\xi u) + R(u, \pounds_w \xi) + R(\xi, \pounds_u w) \ , \\
\xi, u, w \in T(M).
\end{gathered}$$

4. Действие оператора девиации на ковекторные поля определяется его структурой и особенно дифференциальным оператором Ли.

В некоординатном базисе

$$[\pounds\Gamma(\xi, e_\gamma)]e^\alpha = \pounds_\xi \nabla_{e_\gamma} e^\alpha - \nabla_{e_\gamma} \pounds_\xi e^\alpha - \nabla_{\pounds_\xi e_\gamma} e^\alpha = (\pounds_\xi P^\alpha_{\beta\gamma}).e^\beta \ , \tag{136}$$

где

$$\begin{aligned}
\pounds_\xi P^\alpha_{\beta\gamma} \quad = \quad & \xi^\delta.e_\delta P^\alpha_{\beta\gamma} + P^\alpha_{\delta\gamma}.e_{\underline{\beta}}\xi^{\overline{\delta}} + P^\alpha_{\delta\gamma}.(P^\delta_{\beta\rho} + \Gamma^{\overline{\delta}}_{\underline{\beta}\rho} + C_{\underline{\beta}\rho}{}^{\overline{\delta}}).\xi^\rho - \\
& - e_\gamma(e_{\underline{\beta}}\xi^{\overline{\alpha}}) - e_\gamma[(P^\alpha_{\beta\rho} + \Gamma^{\overline{\alpha}}_{\underline{\beta}\rho} + C_{\underline{\beta}\rho}{}^{\overline{\alpha}}).\xi^\rho] - \\
& - P^\delta_{\beta\gamma}.[e_{\underline{\delta}}\xi^{\overline{\alpha}} + (P^\alpha_{\delta\rho} + \Gamma^{\overline{\alpha}}_{\underline{\delta}\rho} + C_{\underline{\delta}\rho}{}^{\overline{\alpha}}).\xi^\rho] + \\
& + P^\alpha_{\beta\delta}.(e_\gamma\xi^\delta - C_{\rho\gamma}{}^\delta.\xi^\rho) \ ,
\end{aligned} \tag{137}$$

$$e_{\underline{\beta}}\xi^{\overline{\delta}} = f_\beta{}^\sigma.e_\sigma\xi^\kappa.f^\delta{}_\kappa \ , \qquad \Gamma^{\overline{\delta}}_{\underline{\beta}\rho} = f^\delta{}_\kappa.f_\beta{}^\sigma.\Gamma^\kappa_{\sigma\rho} \ . \tag{138}$$

Выражение для $\pounds_\xi P^\alpha_{\beta\gamma}$ можно записать также в виде

$$\pounds_\xi P^\alpha_{\beta\gamma} = -P^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}.\xi^\delta - \xi^{\overline{\alpha}}{}_{/\underline{\beta}/\gamma} + T_{\underline{\beta}\delta}{}^{\overline{\alpha}}.\xi^\delta{}_{/\gamma} + T_{\underline{\beta}\delta}{}^{\overline{\alpha}}{}_{/\gamma}.\xi^\delta \ . \tag{139}$$

$\pounds_\xi P^\alpha_{\beta\gamma}$ называется *производной Ли компонент $P^\alpha_{\beta\gamma}$ ковариантной аффинной связности P в некоординатном базисе.*

Специальный случай: $S = e^\varphi.C : f^\alpha{}_\beta = e^\varphi.g^\alpha_\beta, \quad f^i{}_j = e^\varphi.g^i_j, \quad f_i{}^j = e^{-\varphi}.g^j_i$.

$$\pounds_\xi P^i_{jk} = -P^i{}_{jkl}.\xi^l - \xi^i{}_{;j;k} + T_{jl}{}^i.\xi^l{}_{;k} + T_{jl}{}^i{}_{;k}.\xi^l \ . \tag{140}$$

Производная Ли компонент ковариантной аффинной связности P может быть полезной при изучении уравнений девиации для ковекторных полей.

7. ПРОДОЛЖЕННЫЙ КОВАРИАНТНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР. ПРОДОЛЖЕННАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

Если Γ^i_{jk} являются компонентами контравариантной аффинной связности, Γ и P^i_{jk} — компонентами ковариантной аффинной связности P в заданном (здесь координатном) базисе в $(\overline{L}_n, g)$-пространстве, то $\overline{\Gamma}{}^i_{jk}$ и $\overline{P}{}^i_{jk}$ являются компонентами (в том же самом базисе) новой контравариантной аффинной связности $\overline{\Gamma}$ и новой ковариантной аффинной связности $\overline{P}$ соответственно:

$$\overline{\Gamma}{}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \overline{A}{}^i{}_{jk}, \quad \overline{P}{}^i_{jk} = P^i_{jk} - \overline{B}{}^i{}_{jk},$$
$$\overline{A} = \overline{A}{}^i{}_{jk}.\partial_i \otimes dx^j \otimes dx^k, \;\; \overline{B} = \overline{B}{}^i{}_{jk}.\partial_i \otimes dx^j \otimes dx^k, \;\; \overline{A}\,, \overline{B} \in \otimes^1{}_2(M).$$

$\overline{\Gamma}$ и $\overline{P}$ соответствуют новому (продолженному по отношению к ∇_u, $u \in T(M)$) ковариантному дифференциальному оператору ${}^e\nabla_u$:

$$\begin{aligned} {}^e\nabla_{\partial_k}\partial_j &= \overline{\Gamma}{}^i_{jk}.\partial_i, & {}^e\nabla_{e_\beta} e_\alpha &= \overline{\Gamma}{}^\gamma_{\alpha\beta}.e_\gamma, \\ {}^e\nabla_{\partial_k} dx^i &= \overline{P}{}^i_{jk}.dx^j, & {}^e\nabla_{e_\gamma} e^\alpha &= \overline{P}{}^\alpha_{\beta\gamma}.e^\beta, \end{aligned}$$

с теми же свойствами, что и ковариантный дифференциальный оператор ∇_u.

Если выбрать тензоры $\overline{A}$ и $\overline{B}$ с определенными заранее свойствами, то можно найти $\overline{\Gamma}$ и $\overline{P}$ с заранее заданными характеристиками. Например, можно найти связность $\overline{P}$, для которой ${}^e\nabla_u g = 0$, $\forall u \in T(M)$, $g \in \otimes_2(M)$, хотя $\nabla_u g \neq 0$ для ковариантной аффинной связности P. С другой стороны, $\overline{A}{}^i{}_{jk}$ и $\overline{B}{}^i{}_{jk}$ связаны друг с другом на основе коммутационных соотношений между операторами ${}^e\nabla_u$ и ∇_u с оператором свертки S. Из

$$\nabla_u \circ S = S \circ \nabla_u, \qquad {}^e\nabla_u \circ S = S \circ\ {}^e\nabla_u,$$

получаем

$$(S \circ {}^e\nabla_{\partial_k})(\partial_j \otimes dx^i) = \Gamma^l_{jk}.f^i{}_l - \overline{A}{}^l{}_{jk}.f^i{}_l + P^i_{lk}.f^l{}_j - \overline{B}{}^i{}_{lk}.f^l{}_j,$$

$$({}^e\nabla_{\partial_k} \circ S)(\partial_j \otimes dx^i) = {}^e\nabla_{\partial_k}(S(\partial_j \otimes dx^i)) = {}^e\nabla_{\partial_k}(f^i{}_j) = \partial_k(f^i{}_j) = f^i{}_{j,k}.$$

Следовательно,

$$f^i{}_{j,k} = \Gamma^l_{jk}.f^i{}_l - \overline{A}{}^l{}_{jk}.f^i{}_l + P^i_{lk}.f^l{}_j - \overline{B}{}^i{}_{lk}.f^l{}_j.$$

Так как равенство $(\nabla_{\partial_k} \circ S)(\partial_j \otimes dx^i) = (S \circ \nabla_{\partial_k})(\partial_j \otimes dx^i)$ приводит к отношению $f^i{}_{j,k} = \Gamma^l_{jk}.f^i{}_l + P^i_{lk}.f^l{}_j$, то мы получаем связь между $\overline{A}{}^i{}_{jk}$ и $\overline{B}{}^i{}_{jk}$ в виде $\overline{A}{}^l{}_{jk}.f^i{}_l + \overline{B}{}^i{}_{lk}.f^l{}_j = 0$.

Следовательно, $\overline{B}^i{}_{jk} = -\overline{A}^l{}_{mk}.f^i{}_l.f_j{}^m = -\overline{A}^{\overline{i}}{}_{\underline{j}k}$ и $\overline{A}^i{}_{jk} = -\overline{B}^m{}_{lk}.f^l{}_j.f_m{}^i = -\overline{B}^{\underline{i}}{}_{\overline{j}k}$.

Мы можем записать ${}^e\nabla_{\partial_k}$ в виде ${}^e\nabla_{\partial_k} = \nabla_{\partial_k} - \overline{A}_{\partial_k}$, где $\overline{A}_{\partial_k} = \overline{A}^i{}_{jk}.\partial_i \otimes dx^j$.

Оператор ${}^e\nabla_u$ можно также записать в виде ${}^e\nabla_u = \nabla_u - \overline{A}_u$, где $\overline{A}_u = \overline{A}^i{}_{jk}.u^k.\partial_i \otimes dx^j$.

Здесь $\overline{A}_u$ появляется как смешанное тензорное поле второго ранга; но оно действует на тензорные поля как ковариантный дифференциальный оператор, потому что оператор ${}^e\nabla_u$ определен как ковариантный дифференциальный оператор с теми же свойствами, какие имеет ковариантный дифференциальный оператор ∇_u.

Дефиниция. *Продолженный к ∇_u ковариантный дифференциальный оператор.* Линейный дифференциальный оператор ${}^e\nabla_u : v \to {}^e\nabla_u v = \widetilde{v}$, $v, \widetilde{v} \in \otimes^k{}_l(M)$, со свойствами ∇_u.

Из свойств операторов ${}^e\nabla_u$ и ∇_u следуют свойства оператора $\overline{A}_u$:

$$\overline{A}_u : v \to \overline{A}_u v \ , \quad u \in T(M) \ , \qquad v, \overline{A}_u v \in \otimes^k{}_l(M) \ .$$

a) $\overline{A}_u(v + w) = \overline{A}_u v + \overline{A}_u w$, $v, w \in \otimes^k{}_l(M)$.
b) $\overline{A}_u(f.v) = f.\overline{A}_u v$, $\ f \in C^r(M)$.
c) $\overline{A}_{u+v} w = \overline{A}_u w + \overline{A}_v w$.
d) $\overline{A}_{f.u} v = f.\overline{A}_u v$.
e) $\overline{A}_u f = 0$.
f) $\overline{A}_u(v \otimes w) = \overline{A}_u v \otimes w + v \otimes \overline{A}_u w$, $v \in \otimes^k{}_l(M)$, $w \in \otimes^m{}_r(M)$.
g) $\overline{A}_u \circ S = S \circ \overline{A}_u$ (коммутационное соотношение с оператором свертки S).

Все свойства оператора $\overline{A}_u$ определяются свойствами операторов ${}^e\nabla_u$ и ∇_u, выступающих здесь в виде хорошо определенных ковариантных дифференциальных операторов. Действительно, $\overline{A}_u$ можно определить как $\overline{A}_u = \nabla_u - {}^e\nabla_u$. Если $\overline{A}_u$ есть заданное смешанное тензорное поле, то ${}^e\nabla_u$ можно построить единственным образом.

На основе изложенных выше суждений мы можем сформулировать следующее предложение.

Предложение. *Каждому ковариантному дифференциальному оператору ∇_u и заданному тензорному полю $\overline{A}_u \in \otimes^1{}_1(M)$, действующему как ковариантный дифференциальный оператор на тензорное поле в $(\overline{L}_n, g)$-пространстве, соответствует продолженный ковариантный дифференциальный оператор ${}^e\nabla_u = \nabla_u - \overline{A}_u$.*

Оператор $\overline{A}_u$, в согласии со свойством (c): $\overline{A}_{u+v} = \overline{A}_u + \overline{A}_v$, должен быть линейным относительно аргумента u. С другой стороны, $\overline{A}_u$, будучи смешанным тензорным полем второго ранга, может быть представлен, учитывая существование в $(\overline{L}_n, g)$-пространстве контравариантной и ковариантной метрик $\overline{g}$ и g соответственно, в виде $\overline{A}_u = \overline{g}(A_u)$, где A_u есть ковариантное тензорное поле второго ранга, построенное с помощью тензорного поля C и векторного поля u таким образом, что A_u линейно зависит от u. Во всяком случае, имеются три возможности построить ковариантное тензорное поле второго ранга A_u, линейно зависящее от аргумента u, т.е. $A_u = C(u) = C_{ij}(u).dx^i \otimes dx^j$, где

1. $A_u = C(u) = A(u) = A_{ij\overline{k}}.u^k.dx^i \otimes dx^j$, $A = A_{ijk}.dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \in \otimes_3(M)$, $u \in T(M)$.

2. $A_u = C(u) = \nabla_u B = B_{ij;k}.u^k.dx^i \otimes dx^j$, $B = B_{ij}.dx^i \otimes dx^j \in \otimes_2(M)$, $u \in T(M)$.

3. $A_u = C(u) = A(u) + \nabla_u B$, $A(u) = A_{ij\overline{k}}.u^k.dx^i \otimes dx^j$, $A = A_{ijk}.dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \in \otimes_3(M)$, $u \in T(M)$; $\nabla_u B = B_{ij;k}.u^k.dx^i \otimes dx^j$, $B = B_{ij}.dx^i \otimes dx^j \in \otimes_2(M)$, $u \in T(M)$.

Продолженный ковариантный дифференциальный оператор ${}^e\nabla_u = \nabla_u - \overline{A}_u$ может удовлетворять добавочным условиям, определяющим структуру смешанного тензорного поля $\overline{A}_u$ (действующего на тензорные поля как ковариантный дифференциальный оператор). Можно предъявить условия к оператору ${}^e\nabla_u$, приводящие к определенным свойствам тензорного поля $\overline{A}_u$, и, наоборот, можно предъявить условия к тензорному полю $\overline{A}_u$, приводящие к определенным свойствам оператора ${}^e\nabla_u$.

8. МЕТРИКИ

Понятие оператора свертки было введено с условием, что он действует на два вектора, принадлежащих двум различным векторным пространствам одинаковой размерности, приложенным к точке дифференцируемого многообразия M, и сопоставляет им функцию на M. Если же оператор свертки действует на два вектора, принадлежащих одному и тому же векторному пространству, то такой оператор связан с понятием метрики.

Дефиниция. *Метрика.* Оператор свертки S, действующий на два вектора одного и того же векторного пространства и отображающий их на элемент поля F (R или C).

Дефиниция. *Метрика на дифференцируемом многообразии M.* Оператор свертки S, действующий на два векторных поля, чьи векторы в каждой заданной точке $x \in M$ принадлежат одному и тому же векторному пространству, т.е. $S : (u, v) \to S(u, v) \in C^r(M)$, $u_x, v_x \in N_x(M)$.

8.1. Ковариантная метрика

Дефиниция. *Ковариантная метрика.* Оператор свертки S, действующий на два (контравариантных) векторных поля на многообразии M, чье *действие* отождествляется с *действием* ковариантного симметричного тензорного поля ранга два на двух векторных полях, т.е.

$$S(u,v) \equiv g(u,v) := S(g,q) = S(g,u \otimes v) = S(g \otimes (u \otimes v)) \ , \quad q = u \otimes v. \tag{141}$$

Тензор $g = g_{\alpha\beta}.e^{\alpha}.e^{\beta} = g_{ij}.dx^i.dx^j$ называется *ковариантным метрическим тензорным полем (ковариантной метрикой)*, и $g(x) = g_x \in \otimes_{2/x}(M)$ называется *ковариантным метрическим тензором (ковариантной метрикой)* в точке $x \in M$.

a) Действие ковариантной метрики на два векторных поля в координатном базисе

$$g(u,v) = g_{kl}.f^k{}_i.f^l{}_j.u^i.v^j = g_{\overline{ij}}u^i.v^j = g_{kl}.u^{\overline{k}}.v^{\overline{l}} = u_l.v^{\overline{l}} = u_{\overline{j}}.v^j,$$
$$g_{\overline{ij}} = f^k{}_i.f^l{}_j.g_{kl} \ , \qquad u^{\overline{k}} = f^k{}_i.u^i,$$
$$u_{\overline{j}} = g_{\overline{ij}}.u^i, \qquad u_l = g_{kl}.u^{\overline{k}} = g_{\overline{kl}}.u^k. \tag{142}$$

Замечание. *$g(u,v)$ называется также скалярным произведением векторных полей u и v на многообразии M. Когда $v = u$, то*

$$g(u,u) = g_{\overline{\alpha\beta}}.u^{\alpha}.u^{\beta} = g_{\alpha\beta}.u^{\overline{\alpha}}.u^{\overline{\beta}} = u_{\overline{\alpha}}.u^{\alpha} = u_{\alpha}.u^{\overline{\alpha}} = \tag{143}$$
$$:= u^2 = \pm \mid u \mid^2 := \pm\, l_u^2, \tag{144}$$

и $g(u,u) = u^2 = \pm\, l_u^2$ называется также квадратом длины векторного поля u.

b) Действие ковариантной метрики на векторное поле u можно определить с помощью оператора свертки S в координатном базисе следующим образом:

$$g(u) := S^j{}_k(g,u) = S^j{}_k(g_{ij}.dx^i.dx^j, u^k.\partial_k) =$$
$$= g_{ij}.u^k.S^j{}_k(dx^i.dx^j, \partial_k) = g_{ij}.u^k.f^j{}_k.dx^i =$$
$$= g_{i\overline{k}}.u^k.dx^i = g_{ij}.u^{\overline{j}}.dx^i = u(g), \ g_{i\overline{k}} = g_{ij}.f^j{}_k \ . \tag{145}$$

Замечание. *Краткое обозначение $u(g)$ эквивалентно аббревиатуре $(u)(g) := S(u,g)$. Это не следует рассматривать как результат действия векторного поля u на g. Такое действие u на g (пока) не определено.*

Действие ковариантной метрики g на векторное поле u, рассматриваемое в индексной форме (в заданном базисе), называется *опусканием индексов* с помощью g. В результате действия g на вектор $u \in T(M)$ получается ковекторное поле $g(u) \in T^*(M)$. На основании этого g можно определить как линейное отображение (оператор), которое отображает каждый элемент из

$T(M)$ на соответствующий элемент из $T^*(M)$, т.е. $g : u \to g(u) \in T^*(M)$, $u \in T(M)$.

Ковариантная симметричная аффинная связность. В некоординатном базисе ковариантная аффинная связность P будет иметь вид

$$P^{\gamma}_{\alpha\beta} = \overline{P}{}^{\gamma}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}.U_{\alpha\beta}{}^{\gamma} \ , \tag{146}$$

где

$$\overline{P}{}^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(P^{\gamma}_{\alpha\beta} + P^{\gamma}_{\beta\alpha} + C_{\alpha\beta}{}^{\gamma}) \ ,$$
$$U_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = P^{\gamma}_{\alpha\beta} - P^{\gamma}_{\beta\alpha} - C_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = -U_{\beta\alpha}{}^{\gamma} \ . \tag{147}$$

Компоненты ковариантной производной от ковариантного метрического тензорного поля g можно представить с помощью ковариантной симметричной аффинной связности. Если

$$g_{\alpha\beta;\gamma} = e_{\gamma}g_{\alpha\beta} + \overline{P}^{\delta}_{\alpha\gamma}.g_{\delta\beta} + \overline{P}^{\delta}_{\beta\gamma}.g_{\alpha\delta} \tag{148}$$

есть ковариантная производная компонент $g_{\alpha\beta}$ ковариантного метрического тензора g по отношению к ковариантной симметричной аффинной связности $\overline{P}$ в некоординатном базисе, то

$$g_{\alpha\beta/\gamma} = g_{\alpha\beta;\gamma} + \frac{1}{2}\left(U_{\alpha\gamma}{}^{\delta}.g_{\delta\beta} + U_{\beta\gamma}{}^{\delta}.g_{\alpha\delta}\right) \ . \tag{149}$$

С другой стороны, компоненты ковариантной симметричной аффинной связности $\overline{P}^{\delta}_{\alpha\beta}$ можно записать в виде

$$g_{\delta\gamma}.\overline{P}^{\delta}_{\alpha\beta} = -\{\alpha\beta,\gamma\} + K_{\alpha\beta\gamma} + C_{\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{2}(g_{\delta\alpha}.U_{\beta\gamma}{}^{\delta} + g_{\delta\beta}.U_{\alpha\gamma}{}^{\delta}) =$$
$$= -\{\alpha\beta,\gamma\} + C_{\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{2}(g_{\alpha\gamma;\beta} + g_{\beta\gamma;\alpha} - g_{\alpha\beta;\gamma}) \ , \tag{150}$$

где

$$\{\alpha\beta,\gamma\} = \frac{1}{2}(e_{\alpha}g_{\beta\gamma} + e_{\beta}g_{\alpha\gamma} - e_{\gamma}g_{\alpha\beta}) \ ,$$
$$K_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\gamma/\beta} + g_{\beta\gamma/\alpha} - g_{\alpha\beta/\gamma}) \ ,$$
$$C_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(g_{\delta\alpha}.C_{\beta\gamma}{}^{\delta} + g_{\delta\beta}.C_{\alpha\gamma}{}^{\delta} + g_{\delta\gamma}.C_{\alpha\beta}{}^{\delta}) \ . \tag{151}$$

С помощью последних выражений $P^{\gamma}_{\alpha\beta}$ можно представить в виде

$$g_{\delta\gamma}.P^{\delta}_{\alpha\beta} = -\{\alpha\beta,\gamma\} + K_{\alpha\beta\gamma} + U_{\alpha\beta\gamma} + C_{\alpha\beta\gamma} \ , \tag{152}$$

где

$$U_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(g_{\delta\alpha}.U^{\delta}_{\beta\gamma} + g_{\delta\beta}.U^{\delta}_{\alpha\gamma} + g_{\delta\gamma}.U^{\delta}_{\alpha\beta}) \ . \tag{153}$$

В специальном случае, когда накладывается условие $g_{\alpha\beta;\gamma} = 0$, можно доказать следующее предложение.

Предложение. *Необходимым и достаточным условием для* $g_{\alpha\beta;\gamma} = 0$ *является условие*

$$g_{\delta\gamma}.\overline{P}{}^{\delta}_{\ \alpha\beta} = -\{\alpha\beta, \gamma\} + C_{\alpha\beta\gamma}. \tag{154}$$

Доказательство немедленно следует из (150).

В координатном базисе ковариантная производная от компонент g_{ij} аналогичным образом может быть представлена с помощью компонент P^{i}_{jk} ковариантной симметричной аффинной связности в следующем виде:

$$g_{ij;k} = g_{ij,k} + \overline{P}{}^{l}_{\ ik}.g_{lj} + \overline{P}{}^{l}_{\ jk}.g_{il} + \frac{1}{2}(U^{l}_{ik}.g_{lj} + U^{l}_{jk}.g_{il}) =$$

$$= g_{ij/k} + \frac{1}{2}(U^{l}_{ik}.g_{lj} + U^{l}_{jk}.g_{il}) \ , \tag{155}$$

где

$$g_{ij/k} = g_{ij,k} + \overline{P}{}^{l}_{\ ik}.g_{lj} + \overline{P}{}^{l}_{\ jk}.g_{il} \ . \tag{156}$$

Действие дифференциального оператора Ли на ковариантную метрику. В координатном базисе $\pounds_{\xi} g$ принимает вид

$$\pounds_{\xi} g = (\pounds_{\xi} g_{ij}).dx^{i}.dx^{j} =$$

$$= [g_{ij;k}.\xi^{k} + g_{kj}.\xi^{\overline{k}}{}_{;\underline{i}} + g_{ik}.\xi^{\overline{k}}{}_{;\underline{j}} + (g_{kj}.T_{l\underline{i}}{}^{\overline{k}} + g_{ik}.T_{l\underline{j}}{}^{\overline{k}}).\xi^{l}].dx^{i}.dx^{j} \ . \tag{157}$$

Следующие соотношения также выполняются:

$$\pounds_{\xi}[g(u, v)] = \xi[g(u, v)] = (\pounds_{\xi} g)(u, v) + g(\pounds_{\xi} u, v) + g(u, \pounds_{\xi} v),$$

$$\pounds_{\xi}[g(u)] = (\pounds_{\xi} g)(u) + g(\pounds_{\xi} u), \quad \xi, u, v \in T(M). \tag{158}$$

Действие дифференциального оператора Ли называется *смещением вдоль векторного поля*. На основе таких смещений метрического тензорного поля g можно определить понятия произвольного (неметрического) смещения вдоль, квазипроективного смещения вдоль, конформные движения и (просто) движения и рассмотреть их аналогично в (L_n, g)-пространствах. Здесь мы только определим различные типы таких смещений.

1. Произвольные (неметрические) смещения вдоль:

$$\pounds_\xi g = q_\xi, \quad \forall \xi \in T(M), \quad q_\xi \in \otimes_{\rm sym2}(M).$$

2. Квазипроективные смещения вдоль:

$$\pounds_\xi g = \frac{1}{2}[p \otimes g(\xi) + g(\xi) \otimes p] \ , \quad \xi \in T(M), \qquad p \in T^*(M).$$

3. Конформно-инвариантные смещения вдоль (конформные движения) :

$$\pounds_\xi g = \lambda . g, \qquad \lambda \in C^r(M) \ , \qquad \xi \in T(M).$$

4. Изометрические смещения вдоль (движения):

$$\pounds_\xi g = 0, \qquad \xi \in T(M).$$

Для всех типов смещений вдоль можно найти изменения скалярного произведения двух контравариантных векторных полей, так же, как и изменения длины тех же полей, и использовать их аналогично как в (L_n, g)-пространствах.

8.2. Ковариантная проективная метрика. Если задано ковариантное метрическое поле g и существует векторное поле u, квадрат длины которого $g(u, u) = e \neq 0$, то можно построить ковариантное тензорное поле, ортогональное векторному полю u. Оно обладает свойствами, аналогичными свойствам ковариантного тензорного поля g при действии на векторные поля в каждом ортогональном к $u(x) = u_x \in T_x(M)$ подпространстве $T_x^{\perp u}(M)$ в $T_x(M)$, где $(T_x^{\perp u}(M) = \{\xi_x\} : g_x(\xi_x, u_x) = 0)$, $g_x \in \otimes_{{\rm sym}2/x}(M)$.

Дефиниция. *Ковариантная проективная метрика.* Ковариантная метрика, ортогогональная к заданному неизотропному (ненулевому) векторному полю u $[e = g(u, u) \neq 0]$, т.е. ковариантная метрика h_u, удовлетворяющая условию $h_u(u) = u(h_u) = 0$ и построенная с помощью ковариантной метрики g и u в виде

$$h_u = g - \frac{1}{g(u, u)} . g(u) \otimes g(u) = g - \frac{1}{e} . g(u) \otimes g(u) \ . \tag{159}$$

Свойства ковариантной проективной метрики следуют из ее построения и из свойств ковариантной метрики g:

a) $h_u(u) = u(h_u) = 0$, $[g(u)](u) = g(u, u) = e$.

b) $h_u(u, u) = 0$.

c) $h_u(u, v) = h_u(v, u) = 0$, $\forall v \in T(M)$.

8.3. Контравариантная метрика

Дефиниция. *Контравариантная метрика.* Оператор свертки S, действующий на два ковекторных поля на многообразии M, чье *действие* отождествляется с *действием* контравариантного симметричного тензорного поля ранга 2 на векторные поля, т.е.

$$S(p,q) \equiv \overline{g}(p,q) := S(\overline{g}, w) := S(\overline{g}, p \otimes q) = S(\overline{g} \otimes (p \otimes q)) \ , \ \ w = p \otimes q \ .$$

Тензорное поле $\overline{g} = g^{\alpha\beta}.e_\alpha.e_\beta = g^{ij}.\partial_i.\partial_j$ называется *контравариантным метрическим тензорным полем (контравариантной метрикой).* $\overline{g}(x) = = \overline{g}_x \in \otimes^2_x(M)$ называется *контравариантным метрическим тензором* в точке $x \in M$.

Свойства контравариантной метрики определяются свойствами оператора свертки и отождествлением его с контравариантным симметричным тензорным полем ранга 2. На этом основании можно доказать следующие свойства.

a) Действие контравариантной метрики на два ковариантных векторных поля в координатном базисе

$$\overline{g}(p,q) = g^{kl}.f^i{}_k.f^j{}_l.p_i.q_j = g^{\overline{ij}}.p_i.q_j = g^{kl}.p_{\overline{k}}.q_{\overline{l}} = p^{\overline{j}}.q_j = p_k.q^{\overline{k}} \ ,$$
$$p_{\overline{k}} = f^i{}_k.p_i \ , \qquad q_{\overline{l}} = f^j{}_l.q_j \ , \qquad p^{\overline{j}} = g^{\overline{ji}}.p_i \ .$$

(Когда $q = p$, то $\overline{g}(p,p) = p^2 = \pm \mid p \mid^2$ называется *квадратом длины* ковекторного поля p.)

b) Действие контравариантной метрики $\overline{g}$ на ковариантное векторное поле

$$\overline{g}(p) = p(\overline{g}) = g^{ij}.p_k.f^k{}_j.\partial_i = g^{ij}.p_{\overline{j}}.\partial_i = g^{i\overline{k}}.p_k.\partial_i = p^i.\partial_i \ ,$$
$$g^{i\overline{k}} = g^{il}.f^k{}_l \ , \qquad p^i = g^{ij}.p_{\overline{j}} = g^{i\overline{j}}.p_j \ .$$

Действие контравариантной метрики $\overline{g}$ на ковекторное поле p в заданном базисе называется *поднятием индексов* с помощью контравариантной метрики. В результате этого действия получается векторное поле $\overline{g}(p)$. На этом основании $\overline{g}$ можно определить как линейное отображение (оператор), которое отображает элемент из $T^*(M)$ в элемент из $T(M)$:

$$\overline{g} : p \to \overline{g}(p) \in T(M) \ , \quad p \in T^*(M) \ .$$

Связь между контравариантной и ковариантной метриками можно определить согласно условиям

$$\overline{g}[g(u)] = u \ , \qquad u \in T(M) \ , \qquad g[\overline{g}(p)] = p \ , \qquad p \in T^*(M) \ . \qquad (160)$$

В координатном базисе эти условия принимают вид

$$g^{ij}.g_{\overline{jk}} = g^i_k \ , \ g_{ij}.g^{\overline{jk}} = g^k_i \ . \tag{161}$$

Из последних выражений следует, что

$$g[\overline{g}] = g_{ij}g^{\overline{ij}} = n \ , \quad \overline{g}[g] = g^{\overline{ij}}.g_{ij} = n \ , \qquad \dim M = n \ . \tag{162}$$

Контравариантная симметричная аффинная связность. Из преобразований компонент контравариантной аффинной связности следует, что величины

$$\frac{1}{2}(\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha} - C_{\alpha\beta}{}^{\gamma}) \text{ или } \frac{1}{2}(\Gamma^k_{ij} + \Gamma^k_{ji})$$

преобразуются таким же образом и сами составляют контравариантную аффинную связность. Этот факт обычно используется для представления контравариантной аффинной связности через ее симметричную и антисимметричную части в следующем виде:

$$\Gamma^k_{ij} = \overline{\Gamma}{}^k_{ij} - \frac{1}{2}T_{ij}{}^k \ , \qquad \overline{\Gamma}{}^k_{ij} = \frac{1}{2}(\Gamma^k_{ij} + \Gamma^k_{ji}) \ , \quad T_{ij}{}^k = \Gamma^k_{ji} - \Gamma^k_{ij}$$
$$\text{(в координатном базисе)} \ ,$$
$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \overline{\Gamma}{}^{\gamma}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}T_{\alpha\beta}{}^{\gamma} \ , \qquad \overline{\Gamma}{}^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha} - C_{\alpha\beta}{}^{\gamma}) \ ,$$
$$T_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = \Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha} - \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} - C_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$$
$$\text{(в некоординатном базисе)} \ . \tag{163}$$

Величины $\overline{\Gamma}^k_{ij}$ ($\overline{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta}$) называются компонентами *контравариантной симметричной аффинной связности* в координатном (соответственно, в некоординатном) базисе.

Компоненты ковариантной производной от контравариантного метрического поля $\overline{g}$ могут быть представлены с помощью контравариантной симметричной аффинной связности. Если мы введем обозначения

$$g^{\alpha\beta}{}_{;\gamma} = e_{\gamma}g^{\alpha\beta} + \overline{\Gamma}{}^{\alpha}_{\delta\gamma}.g^{\delta\beta} + \overline{\Gamma}{}^{\beta}_{\delta\gamma}.g^{\alpha\delta} \quad \text{(в некоординатном базисе)} \ ,$$
$$g^{ij}{}_{/k} = g^{ij}{}_{,k} + \overline{\Gamma}{}^{i}_{lk}.g^{lj} + \overline{\Gamma}{}^{j}_{lk}.g^{il} \qquad \text{(в координатном базисе)} \ , \tag{164}$$

где $g^{\alpha\beta}{}_{;\gamma}$ являются ковариантными производными компонент контравариантного метрического тензора $\overline{g}$ по отношению к контравариантной симметричной аффинной связности $\overline{\Gamma}$ в некоординатном базисе, то

$$g^{\alpha\beta}{}_{/\gamma} = g^{\alpha\beta}{}_{;\gamma} - \frac{1}{2}(T_{\delta\gamma}{}^{\alpha}.g^{\delta\beta} + T_{\delta\gamma}{}^{\beta}.g^{\alpha\delta}) \ . \tag{165}$$

Компоненты контравариантной симметричной аффинной связности можно представить через $g^{\alpha\beta}\ _{/\kappa}.g^{\kappa\gamma}$ в следующем виде:

$$g^{\alpha\delta}.g^{\beta\kappa}.\overline{\Gamma}\,^{\gamma}_{\delta\kappa} = \overline{K}\,^{\alpha\beta\gamma} - \{^{\alpha\beta,\gamma}\} - \overline{C}\,^{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{2}g^{\gamma\delta}(g^{\beta\kappa}T_{\kappa\delta}{}^{\alpha} + g^{\alpha\kappa}T_{\kappa\delta}{}^{\beta}) \ , \quad (166)$$

где

$$\{^{\alpha\beta,\gamma}\} = \frac{1}{2}(g^{\alpha\kappa}.e_\kappa g^{\beta\gamma} + g^{\beta\kappa}.e_\kappa g^{\alpha\gamma} - g^{\gamma\kappa}.e_\kappa g^{\alpha\beta}) \ ,$$

$$\overline{K}\,^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(g^{\alpha\gamma}\ _{/\kappa}.g^{\beta\kappa} + g^{\beta\gamma}\ _{/\kappa}.g^{\alpha\kappa} - g^{\alpha\beta}\ _{/\kappa}.g^{\gamma\kappa}) \ ,$$

$$\overline{C}\,^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(g^{\gamma\delta}.g^{\beta\kappa}.C_{\kappa\delta}\ ^{\alpha} + g^{\gamma\delta}.g^{\alpha\kappa}.C_{\kappa\delta}\ ^{\beta} + g^{\alpha\delta}.g^{\beta\kappa}.C_{\delta\kappa}\ ^{\gamma}) \ . \quad (167)$$

Скобки $\{^{\alpha\beta,\gamma}\}$ называются *символами Кристоффеля первого рода* для контравариантной симметричной аффинной связности в некоординатном базисе.

Компоненты $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ контравариантной аффинной связности Γ можно записать с помощью введенных обозначений в виде

$$g^{\alpha\delta}.g^{\beta\kappa}.\Gamma^{\gamma}_{\delta\kappa} = -\{^{\alpha\beta,\gamma}\} + \overline{K}^{\alpha\beta\gamma} - \overline{T}^{\alpha\beta\gamma} - \overline{C}^{\alpha\beta\gamma} \ , \quad (168)$$

где

$$\overline{T}^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(g^{\gamma\delta}.g^{\beta\kappa}.T_{\kappa\delta}{}^{\alpha} + g^{\gamma\delta}.g^{\alpha\kappa}.T_{\kappa\delta}{}^{\beta} + g^{\alpha\delta}.g^{\beta\kappa}.T_{\delta\kappa}{}^{\gamma}) \ . \quad (169)$$

Учитывая следующие связи между компонентами ковариантной метрики, компонентами контравариантной метрики и их производными

$$g_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}.g^{\beta\gamma} = g^{\gamma}_{\alpha}, \quad g_{\overline{\alpha}\overline{\delta}}.e_\kappa g^{\delta\gamma} = -g^{\delta\gamma}.e_\kappa(g_{\overline{\alpha}\overline{\delta}}),$$

$$g_{\overline{\alpha}\overline{\delta}}.g^{\gamma\delta}\ _{/\kappa} = -g^{\gamma\delta}.g_{\overline{\alpha}\overline{\delta}/\kappa}, \quad g_{\overline{\alpha}\overline{\delta}/\kappa} = f^{\gamma}{}_{\alpha}.f^{\beta}_{\delta}.g_{\gamma\beta/\kappa}, \quad (170)$$

мы можем представить компоненты контравариантной аффинной связности Γ в некоординатном базисе:

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \{^{\ \gamma}_{\alpha\beta}\} - \overline{K}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} - \overline{S}_{\alpha\beta}\ ^{\gamma} - \overline{C}_{\alpha\beta}\ ^{\gamma} \ , \quad (171)$$

где

$$\{^{\ \gamma}_{\alpha\beta}\} = \frac{1}{2}g^{\gamma\delta}[e_\beta(g_{\overline{\alpha}\overline{\delta}}) + e_\alpha(g_{\overline{\beta}\overline{\delta}}) - e_\delta(g_{\overline{\alpha}\overline{\beta}})] = -g_{\overline{\alpha}\overline{\rho}}.g_{\overline{\beta}\overline{\sigma}}.\{^{\rho\sigma,\gamma}\},$$

$$\overline{K}^{\gamma}_{\alpha\beta} = -g_{\overline{\alpha}\overline{\rho}}.g_{\overline{\beta}\overline{\sigma}}.\overline{K}\,^{\rho\sigma\gamma}, \ \overline{S}^{\gamma}_{\alpha\beta} = -g_{\overline{\alpha}\overline{\rho}}.g_{\overline{\beta}\overline{\sigma}}.\overline{T}\,^{\rho\sigma\gamma}, \ \overline{C}^{\gamma}_{\alpha\beta} = -g_{\overline{\alpha}\overline{\rho}}.g_{\overline{\beta}\overline{\sigma}}.\overline{C}\,^{\rho\sigma\gamma}. \quad (172)$$

Скобки $\left\{{\gamma \atop \alpha\beta}\right\}$ называются *обобщенными символами Кристоффеля второго рода* для контравариантной связности в некоординатном базисе.

Аналогично, если заданы контравариантные и ковариантные метрические поля, ковариантная аффинная связность может быть представлена в следующем виде:

$$P^{\gamma}_{\alpha\beta} = -\underline{\left\{{\gamma \atop \alpha\beta}\right\}} + \underline{K}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} + \underline{U}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} + \underline{C}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} \ , \tag{173}$$

где

$$\begin{aligned} \underline{\left\{{\gamma \atop \alpha\beta}\right\}} &= g^{\overline{\gamma\sigma}}.\{\alpha\beta, \gamma\} \ , & \underline{K}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} &= g^{\overline{\gamma\sigma}}.K_{\alpha\beta\sigma} \ , \\ \underline{U}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} &= g^{\overline{\gamma\sigma}}.U_{\alpha\beta\sigma} \ , & \underline{C}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} &= g^{\overline{\gamma\sigma}}.C_{\alpha\beta\sigma} \ . \end{aligned} \tag{174}$$

Подчеркнутые скобки $\underline{\left\{{\gamma \atop \alpha\beta}\right\}}$ называются *обобщенными символами Кристоффеля второго рода* для ковариантной симметричной аффинной связности в некоординатном базисе.

Такие же выражения можно получить и в координатном базисе.

В специальном случае, когда накладываются условия $g^{\alpha\beta}{}_{;\gamma} = 0$, т.е. когда ковариантные производные контравариантной метрики по отношениию к контравариантной симметричной аффинной связности равняются нулю, компоненты этой связности $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \left\{{\gamma \atop \alpha\beta}\right\} - \overline{C}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$.

Последнее выражение является необходимым и достаточным условием для того, чтобы выполнялось равенство $g^{\alpha\beta}{}_{;\gamma} = 0$. В координатном базисе такое условие (чтобы выполнялось равенство $g^{ij}{}_{/k} = 0$) принимает следующий вид: $\overline{\Gamma}^{k}_{ij} = \left\{{k \atop ij}\right\}$.

На основании связей, существующих между ковариантной производной контравариантного тензорного метрического поля и ковариантной же производной ковариантного тензорного метрического поля, а именно:

$$\nabla_\xi g = -g(\nabla_\xi \overline{g})g, \quad (\nabla_\xi \overline{g})[g(u)] = -\overline{g}[(\nabla_\xi g)(u)], \quad \forall\xi, \forall u \in T(M),$$

$$\nabla_\xi \overline{g} = -\overline{g}(\nabla_\xi g)\overline{g}, \quad (\nabla_\xi g)[\overline{g}(p)] = -g[(\nabla_\xi \overline{g})(p)],$$
$$\forall\xi \in T(M), \quad \forall p \in T^*(M),$$

можно доказать, что существует взаимно однозначное соответствие между переносами метрик g и $\overline{g}$. *Каждый перенос ковариантного тензорного метрического поля g индуцирует соответствующий перенос контравариантного тензорного метрического поля $\overline{g}$ и наоборот.*

8.4. Контравариантная проективная метрика. Понятие контравариантной проективной метрики по отношению к неизотропному (ненулевому) контравариантному векторному полю u можно ввести двумя различными путями:

a) вводя контравариантную проективную метрику по определению

$$h^u = \overline{g} - \frac{1}{g(u,u)}.u \otimes u = \overline{g} - \frac{1}{e}.u \otimes u \ , \quad e = g(u,u) \neq 0 \ ; \qquad (175)$$

b) вводя ее, отправляясь от уже известной нам ковариантной проективной метрики и учитывая при этом соотношения между ковариантной и контравариантной метриками:

$$h^u = \overline{g}(h_u)\overline{g} = \overline{g} - \frac{1}{e}.u \otimes u, \quad \overline{g}(g)\overline{g} = \overline{g}, \quad \overline{g}(g(u) \otimes g(u))\overline{g} = u \otimes u \ . \qquad (176)$$

h^u называется *контравариантной проективной метрикой* по отношению к неизотропному векторному полю u.

Свойства контравариантной проективной метрики определяются ее структурой.

9. ТОЖДЕСТВА БИАНКИ ДЛЯ КОВАРИАНТНОГО ТЕНЗОРА КРИВИЗНЫ

9.1. Тождество Бианки первого типа для ковариантного тензора кривизны. Существование контравариантной и ковариантной метрик позволяет рассмотреть действие оператора кривизны на ковекторное поле $g(v) = g_{\alpha\beta}.v^{\overline{\beta}}.e^{\alpha} = g_{ij}.v^{\overline{j}}.dx^i$, построенное с помощью ковариантной метрики g и векторного поля v.

Тождество

$$< \overline{g}\{([R(\xi,u)]g)(v)\} > \equiv < \overline{g}([R(\xi,u)][g(v)]) > - < [R(\xi,u)]v > \equiv$$
$$\equiv < \overline{g}([R(\xi,u)][g(v)]) > - < T(T(\xi,u),v) > - < (\nabla_\xi T)(u,v) > \qquad (177)$$

называется *тождеством Бианки первого типа (типа 1) для ковариантного тензора кривизны*.

В координатном базисе тождество Бианки первого типа записывается в виде

$$P^l{}_{<ijk>} \equiv -g^{m\overline{n}}.R^{\overline{l}}{}_{m<ij}.g_{k>n} \ , \qquad (178)$$

$$R^l{}_{<ijk>} \equiv -g^{l\overline{m}}.g_{mn}.P^n{}_{<\overline{i}jk>} \equiv T_{<ij}{}^l{}_{;k>} + T_{<ij}{}^m.T_{mk>}{}^l \ . \qquad (179)$$

Очевидно, что вид тождества Бианки первого типа для компонент ковариантного тензора кривизны не так прост, как вид тождества Бианки для компонент контравариантного тензора кривизны.

9.2. Тождество Бианки второго типа для ковариантного тензора кривизны. Действие оператора $(\nabla_w R)(\xi, u)$ можно расширить до действия на ковариантные векторные и тензорные поля аналогично тому, как это делается в случае контравариантных векторных и тензорных полей. Используя соотношение

$$\nabla_w\{[R(\xi,u)]p\} = [(\nabla_w R)(\xi,u)]p + [R(\nabla_w \xi, u)]p + \\ +[R(\xi,\nabla_w u)]p + [R(\xi,u)](\nabla_w p), \quad w,\xi,u \in T(M), \quad p \in T^*(M), \tag{180}$$

мы можем найти тождество

$$< (\nabla_w R)(\xi,u) > p \equiv < R(w, T(\xi,u)) > p, \tag{181}$$

где

$$< (\nabla_w R)(\xi,u) > p = [(\nabla_w R)(\xi,u)]p + [(\nabla_u R)(w,\xi)]p + [(\nabla_\xi R)(u,w)]p,$$

$$< R(w,T(\xi,u)) > p = [R(w,T(\xi,u))]p + [R(u,T(w,\xi))]p + [R(\xi,T(u,w))]p. \tag{182}$$

Тождество (181) называется *тождеством Бианки второго типа (типа 2) для ковариантного тензора кривизны*.

В координатном базисе тождество Бианки второго типа записывается в виде

$$\begin{aligned} P^i{}_{j<kl;m>} &= P^i{}_{jkl;m} + P^i{}_{jmk;l} + P^i{}_{jlm;k} \equiv P^i{}_{j<kn}.T_{lm>}{}^n = \\ &= P^i{}_{jkn}.T_{lm}{}^n + P^i{}_{jmn}.T_{kl}{}^n + P^i{}_{jlr}.T_{mk}{}^r. \end{aligned} \tag{183}$$

10. ИНВАРИАНТНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ОБЪЕМА

10.1. Дефиниция и свойства. Понятие элемента объема на многообразии M можно обобщить до понятия инвариантного элемента объема [14].

Дефиниция. *Элемент объема на многообразии* M $(\dim M = n)$ определяется как

$$d^{(n)}x = d^{(n)}x = dx^1 \wedge ... \wedge dx^n \quad \text{(в координатном базисе)},$$
$$dV_n = e^1 \wedge ... \wedge e^n \quad \text{(в некоординатном базисе)}.$$

Свойства элемента объема можно представить в следующем виде:

$$d^{(n)}x = \frac{1}{n!}.\varepsilon_A.\omega^A = \frac{1}{n!}.\varepsilon_A.d\widehat{x}^A, \qquad d^{(n')}x' = J^{-1}.d^{(n)}x,$$
$$dV_n = \frac{1}{n!}.\varepsilon_A.\omega^A = \frac{1}{n!}.\varepsilon_A.\widehat{e}^A, \qquad dV'_n = J^{-1}.dV_n, \tag{184}$$

где $J = \det(A_{\alpha'}{}^{\alpha}) = \det(\partial x^i/\partial x^{i'})$, $dV'_n = e^{1'} \wedge ... e^{n'}$, $\varepsilon_A = \varepsilon_{i_1 ... i_n}$, $\omega^A = = dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_n}$, ε_A есть символ Леви — Чивита [14],

$$\varepsilon_{A'}.\omega^{A'} = J^{-1}.\varepsilon_A.\omega^A \ , \ \varepsilon_A.\omega^A = J.\varepsilon_{A'}.\omega^{A'},$$

$$\varepsilon_{A'}.d\widehat{x}^{\,A'} = J^{-1}.\varepsilon_A.d\widehat{x}^{\,A} \ , \ \varepsilon_A.d\widehat{x}^{\,A} = J.\varepsilon_{A'}.d\widehat{x}^{\,A'},$$

$$d^{(n)}x = \frac{1}{n!}.\varepsilon_A.\omega^A = J.\frac{1}{n!}.\varepsilon_{A'}.\omega^{A'} = \frac{1}{n!}.J.\varepsilon_{A'}.d\widehat{x}^{\,A'}.$$

Элемент объема преобразуется так же, как тензорная плотность веса $\omega = -\frac{1}{2}$. Следовательно, чтобы построить инвариантный элемент объема (сохраняющий свою форму и независимый от выбора вполне антисимметричного тензорного базиса), необходимо элемент объема умножить на тензорную плотность веса $\omega = \frac{1}{2}$ и ранга 0. Так как ковариантное метрическое тензорное поле связано с основными характеристиками векторных (и ковекторных) полей и определяет собой понятия (такие, как длина вектора, косинус угла между двумя векторами), которые в евклидовой геометрии относятся к понятию элемента объема, то ковариантная метрическая тензорная плотность $\widetilde{Q}_g$ веса $\omega = \frac{1}{2}$ и ранга 0 $((\widetilde{Q}_g =\mid d_g \mid^{\frac{1}{2}}))$ является подходящим множителем к элементу объема [14].

Дефиниция. *Инвариантный элемент объема $d\omega$ на многообразии M* $(\dim M = n)$ равен

$$d\omega = \sqrt{-d_g}.d^{(n)}x := \frac{1}{n!}.\varepsilon_A.\overline{\omega}^A, \quad \overline{\omega}^A = \sqrt{-d_g}.\,\omega^A, \quad d_g < 0$$

(инвариантный элемент объема в координатном базисе),

$$d\omega = \sqrt{-d_g}.dV_n, \quad d_g < 0$$

(инвариантный элемент объема в некоординатном базисе).

Из того, как преобразуется величина $\sqrt{-d_g}$: $\sqrt{-d'_g} = \pm J.\sqrt{-d_g}$ при переходе от одной координатной карты к другой, следует, что при таком переходе инвариантный элемент объема сохраняет свою форму: $d\omega' = \pm\, d\omega$, где

$$d\omega' = \sqrt{-d'_g}.d^{(n')}x' \ \text{(в координатном базисе)},$$

$$d\omega' = \sqrt{-d'_g}.dV'_n \ \text{(в некоординатном базисе)}. \tag{185}$$

Замечание. *Знак $(-)$ при $\pm\, d\omega$ можно опустить вследствие одинаковой конфигурации (порядка, ориентации) базисных векторных полей в старом и в новом тензорных базисах.*

Из определения инвариантного элемента объема вытекает следующая связь с его структурой:

$$d\omega' = \frac{1}{n!}.\sqrt{-d'_g}.\varepsilon_{A'}.\omega^{A'} = \frac{1}{n!}.\sqrt{-d_g}.\varepsilon_A.d\omega^A = d\omega \ . \tag{186}$$

10.2. Действие оператора ковариантного дифференцирования на инвариантный элемент объема. Действие оператора ковариантного дифференцирования на инвариантный элемент объема определяется его действием на элементы, из которых построен инвариантный элемент объема (символ Леви — Чивита, полностью антисимметричный тензорный базис, метрическая тензорная плотность). Из $d\omega = \frac{1}{n!}.\varepsilon_A.\overline{\omega}^A$ и $\nabla_\xi(d\omega)$ следует

$$\nabla_\xi(d\omega) = \nabla_\xi\left[\frac{1}{n!}.(\varepsilon_A.\overline{\omega}^A)\right] = \frac{1}{n!}[(\xi\varepsilon_A).\overline{\omega}^A + \varepsilon_A.\nabla_\xi\overline{\omega}^A] \ . \tag{187}$$

$\nabla_\xi(d\omega)$ получается в виде

$$\nabla_\xi(d\omega) = \frac{1}{2}.\overline{g}[\nabla_\xi g].\frac{1}{n!}.\varepsilon_A.\overline{\omega}^A = \frac{1}{2}.\overline{g}[\nabla_\xi g].d\omega \ . \tag{188}$$

$\nabla_\xi(d\omega)$ называется *ковариантной производной инвариантного элемента объема* $d\omega$ вдоль векторного поля ξ.

10.3. Действие дифференциального оператора Ли на инвариантный элемент объема. Действие дифференциального оператора Ли на инвариантный элемент объема определяется аналогично действию оператора ковариантного дифференцирования:

$$\pounds_\xi(d\omega) = \frac{1}{n!}.\pounds_\xi(\varepsilon_A.\overline{\omega}^A) = \frac{1}{n!}[(\xi\varepsilon_A).\overline{\omega}^A + \varepsilon_A.\pounds_\xi\overline{\omega}^A] = \frac{1}{n!}.\varepsilon_A.\pounds_\xi\overline{\omega}^A \ . \tag{189}$$

После некоторых вычислений для $\pounds_\xi(d\omega)$ получаем

$$\pounds_\xi(d\omega) = \frac{1}{n!}.\varepsilon_A.\frac{1}{2}.\overline{g}[\pounds_\xi g].\overline{\omega}^A = \frac{1}{2}.\overline{g}[\pounds_\xi g].\frac{1}{n!}.\varepsilon_A.\overline{\omega}^A \ ,$$

$$\pounds_\xi(d\omega) = \frac{1}{2}.\overline{g}[\pounds_\xi g].d\omega \ . \tag{190}$$

$\pounds_\xi(d\omega)$ называется *производной Ли инвариантного элемента объема* $d\omega$ вдоль векторного поля ξ.

Специальный случай: метрические переносы $(\nabla_\xi g = 0) : \nabla_\xi(d\omega) = 0$.

Специальный случай: изометрические смещения вдоль (движения) $(\pounds_\xi g = 0) : \pounds_\xi(d\omega) = 0$.

В случаях, когда требуется в качестве дополнительного условия сохранение объема, можно ввести новый ковариантный дифференциальный оператор или новый дифференциальный оператор Ли, которые не изменяют инвариантного элемента объема, т.е. действуют на $d\omega$ аналогично тому, как действуют операторы ∇_ξ и $\pounds_\xi$ на постоянные функции.

10.4. Ковариантный дифференциальный оператор, сохраняющий инвариантный элемент объема. Вариация инвариантного элемента объема $d\omega$ при действии на него ковариантного дифференциального оператора ∇_ξ

$$\nabla_\xi(d\omega) = \frac{1}{2}.\overline{g}[\nabla_\xi g].d\omega$$

позволяет ввести новый ковариантный дифференциальный оператор ${}^\omega\nabla_\xi$, сохраняющий инвариантный элемент объема.

Дефиниция. Оператор ${}^\omega\nabla_\xi$ есть *ковариантный дифференциальный оператор, сохраняющий инвариантный элемент объема* $d\omega$ вдоль векторного поля ξ:

$${}^\omega\nabla_\xi = \nabla_\xi - \frac{1}{2}.\overline{g}[\nabla_\xi g] \ .$$

Свойства ${}^\omega\nabla_\xi$ определяются свойствами ковариантного дифференциального оператора и существованием ковариантного метрического тензорного поля g, связанного с его контравариантным метрическим тензорным полем $\overline{g}$.

a) Действие на инвариантный элемент объема $d\omega$:

$${}^\omega\nabla_\xi(d\omega) = 0. \tag{191}$$

Это следует из определения ${}^\omega\nabla_\xi$ и (188).

b) Действие на базисные векторные поля:

$${}^\omega\nabla_{\partial_j}\partial_i = \left(\Gamma^k_{ij} - \frac{1}{2}.g^{\overline{lm}}.g_{lm;j}.g^k_i\right).\partial_k \ . \tag{192}$$

c) Действие на базисные ковекторные поля:

$${}^\omega\nabla_{\partial_j}dx^i = \left(P^i_{kj} - \frac{1}{2}.g^{\overline{lm}}.g_{lm;j}.g^i_k\right).dx^k \ . \tag{193}$$

d) Действие на функцию f на многообразии M:

$${}^\omega\nabla_\xi f = \xi f - \frac{1}{2}.\overline{g}[\nabla_\xi g].f, \quad f \in C^r(M), \ \ r \geq 1 \ . \tag{194}$$

Если мы введем краткие обозначения

$$Q_\beta = \overline{g}[\nabla_{e_\beta} g] = g^{\overline{\gamma}\overline{\delta}}.g_{\gamma\delta/\beta} \ , \qquad Q_j = \overline{g}[\nabla_{\partial_j} g] = g^{\overline{kl}}.g_{kl;j} \ , \tag{195}$$

$$Q = Q_\beta.e^\beta = Q_j.dx^j \ , \tag{196}$$

$$ {}^{\omega}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}.g^{\gamma}_{\alpha}.Q_{\beta} \ , \quad {}^{\omega}P^{\alpha}_{\gamma\beta} = P^{\alpha}_{\gamma\beta} - \frac{1}{2}.g^{\alpha}_{\gamma}.Q_{\beta} \ , \tag{197} $$

$$ Q_{\xi} = \overline{g}[\nabla_{\xi} g] = Q_{\beta}.\xi^{\beta} = Q_{j}.\xi^{j} = 2._{c}\theta_{\xi} \ , \tag{198} $$

то ${}^{\omega}\nabla_{\xi}$, (192) и (193) сможем записать в виде

$$ {}^{\omega}\nabla_{\xi} = \nabla_{\xi} - \frac{1}{2}.Q_{\xi} \ , \tag{199} $$

$$ {}^{\omega}\nabla_{e_{\beta}} e_{\alpha} = {}^{\omega}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}.e_{\gamma} \ , \quad {}^{\omega}\nabla_{\partial_j}\partial_i = {}^{\omega}\Gamma^{k}_{ij}.\partial_k \ , \tag{200} $$

$$ {}^{\omega}\nabla_{e_{\beta}} e^{\alpha} = {}^{\omega}P^{\alpha}_{\gamma\beta}.e^{\gamma} \ , \qquad {}^{\omega}\nabla_{\partial_j} dx^{i} = {}^{\omega}P^{i}_{kj}.dx^{k} \ . \tag{201} $$

Величины ${}^{\omega}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ называются компонентами *контравариантной аффинной связности* ${}^{\omega}\Gamma$, сохраняющей инвариантный элемент объема $d\omega$ в некоординатном базисе. Величины ${}^{\omega}P^{\gamma}_{\alpha\beta}$ называются компонентами *ковариантной аффинной связности* ${}^{\omega}P$, сохраняющей инвариантный элемент объема $d\omega$ в некоординатном базисе.

Так как ${}^{\omega}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ и ${}^{\omega}P^{\gamma}_{\alpha\beta}$ отличаются от $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ и $P^{\gamma}_{\alpha\beta}$, соответственно, на компоненты смешанного тензорного поля $\frac{1}{2}.g^{\gamma}_{\alpha}.Q_{\beta}$ ранга 3, то ${}^{\omega}\Gamma$ и ${}^{\omega}P$ преобразуются так же, как аффинные связности Γ и P соответственно.

Действие оператора ${}^{\omega}\nabla_{\xi}$ на векторное поле u можно записать в виде

$$ {}^{\omega}\nabla_{\xi} u = \nabla_{\xi} u - \frac{1}{2}.Q_{\xi}.u \ . \tag{202} $$

Если рассматривать u как касательный вектор к кривой $x^{i}(\tau)$, т.е.

$$ u = \frac{d}{d\tau} = u^{\alpha}.e_{\alpha} = u^{i}.\partial_{i} \ , \quad u^{i} = \frac{dx^{i}}{d\tau} \ , \tag{203} $$

$$ u^{\alpha} = A_{i}{}^{\alpha}.u^{i} = A_{i}{}^{\alpha}.\frac{dx^{i}}{d\tau} \ , \quad e_{\alpha} = A_{\alpha}{}^{k}.\partial_{k} \ , \quad A_{i}{}^{\alpha}.A_{\alpha}{}^{k} = g^{k}_{i} \ , \tag{204} $$

а параметр τ рассматривать как функцию другого параметра λ (со взаимно однозначным соответствием между τ и λ), т.е. положить

$$ \tau = \tau(\lambda) \ , \quad \lambda = \lambda(\tau) \ , \tag{205} $$

$$ u = \frac{d}{d\tau} = \frac{d\lambda}{d\tau}.\frac{d}{d\lambda} = \frac{d\lambda}{d\tau}.v \ , \ v = \frac{d}{d\lambda} \ , \tag{206} $$

то ${}^{\omega}\nabla_{\xi}u$ можно выразить через векторное поле v и $\nabla_{\xi}v$ в виде

$$
{}^{\omega}\nabla_{\xi}u = \frac{d\lambda}{d\tau}.\nabla_{\xi}v + \left[\xi\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right) - \frac{1}{2}.Q_{\xi}.\frac{d\lambda}{d\tau}\right].v\ . \tag{207}
$$

Если добавить условие на связь между λ и τ:

$$
\xi\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right) - \frac{1}{2}.Q_{\xi}.\frac{d\lambda}{d\tau} = 0\ , \tag{208}
$$

то для произвольного векторного поля ξ существует решение $\lambda = \lambda(\tau)$:

$$
\lambda = \lambda_0 + \lambda_1.\int\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int Q_i.dx^i\right)\right].d\tau\ ,\ \ Q_i = Q_i(x^k)\ ,\ \ \lambda_0, \lambda_1 = \text{const}, \tag{209}
$$

а связь между ${}^{\omega}\nabla_{\xi}u$ и $\nabla_{\xi}v$ получается в виде

$$
{}^{\omega}\nabla_{\xi}u = \frac{d\lambda}{d\tau}.\nabla_{\xi}v = \left[\lambda_1.\exp\left(\frac{1}{2}\int Q_i.dx^i\right)\right].\nabla_{\xi}v\ ,\quad \lambda_1 = \text{const}. \tag{210}
$$

Из последнего выражения следует, что существует возможность сопоставить действие ${}^{\omega}\nabla_{\xi}$ на векторное поле u (в виде касательного векторного поля на заданной кривой) с действием ∇_{ξ} на векторное поле v, получающееся из векторного поля u в результате замены параметра на кривой. Если векторное поле v переносится параллельно вдоль ξ, задаваемое оператором ковариантного дифференцирования ∇_{ξ} ($\nabla_{\xi}v = 0$), то векторное поле u переносится параллельно вдоль ξ, задаваемое оператором ${}^{\omega}\nabla_{\xi}$ (${}^{\omega}\nabla_{\xi}u = 0$).

Действие оператора ${}^{\omega}\nabla_{\xi}$ на метрическое тензорное поле g можно представить в виде

$$
{}^{\omega}\nabla_{\xi}g = \nabla_{\xi}g - \frac{1}{2}.Q_{\xi}.g\ . \tag{211}
$$

После свертки обеих компонент ${}^{\omega}\nabla_{\xi}g$ с $\overline{g}$, т.е. для $\overline{g}[{}^{\omega}\nabla_{\xi}g] = g^{\overline{\alpha}\overline{\beta}}.({}^{\omega}\nabla_{\xi}g)_{\alpha\beta}$, получается равенство

$$
\overline{g}[{}^{\omega}\nabla_{\xi}g] = \left(1 - \frac{n}{2}\right).Q_{\xi}. \tag{212}
$$

След свободной части выражения ${}^{\omega}\nabla_{\xi}g$, равной

$$
{}^{\underline{\omega}}\nabla_{\xi}g = {}^{\omega}\nabla_{\xi}g - \frac{1}{n}.\overline{g}[{}^{\omega}\nabla_{\xi}g].g\ , \tag{213}
$$

с учетом (212) можно записать в виде

$$
{}^{\underline{\omega}}\nabla_\xi g = {}^{\omega}\nabla_\xi g + \frac{n-2}{2n}.Q_\xi.g \ . \tag{214}
$$

Используя это выражение, ${}^{\omega}\nabla_\xi g$ можно представить через его свободную часть и через след его свободной части:

$$
{}^{\omega}\nabla_\xi g = {}^{\underline{\omega}}\nabla_\xi g - \frac{n-2}{2n}.Q_\xi.g \ , \tag{215}
$$

где $\overline{g}[{}^{\underline{\omega}}\nabla_\xi g] = 0$.

Специальный случай: $\dim M = n = 2: \ {}^{\omega}\nabla_\xi g = {}^{\underline{\omega}}\nabla_\xi g$, $\overline{g}[{}^{\omega}\nabla_\xi g] = 0$.

Специальный случай: $\dim M = n = 4: \ {}^{\omega}\nabla_\xi g = {}^{\underline{\omega}}\nabla_\xi g - \frac{1}{4}.Q_\xi.g$.

Ковариантный дифференциальный оператор, сохраняющий инвариантный элемент объема, *не подчиняется правилу Лейбница*, когда действует на тензорное произведение $Q \otimes S$ двух тензорных полей Q и S:

$$
{}^{\omega}\nabla_\xi(Q \otimes S) = {}^{\omega}\nabla_\xi Q \otimes S + Q \otimes {}^{\omega}\nabla_\xi S + \frac{1}{2}.Q_\xi.Q \otimes S \ ,
$$

$$
Q \in \otimes^k{}_l(M) \ , \ S \in \otimes^m{}_r(M) \ . \tag{216}
$$

10.5. Бесследовый ковариантный дифференциальный оператор. Перенос Вейля. Пространство Вейля. Проблема описания гравитационного взаимодействия и объединения его с другими типами взаимодействия на дифференцируемых многообразиях с аффинной связностью и метрикой ((L_n, g)-пространства) стимулирует [1] введение аффинной связности с соответствующим ковариантным дифференциальным оператором ${}^{s}\nabla_\xi$, построенным с помощью ∇_ξ и Q_ξ:

$$
{}^{s}\nabla_\xi = \nabla_\xi - \frac{1}{n}.Q_\xi \ , \qquad \dim M = n \ . \tag{217}
$$

Действие оператора ${}^{s}\nabla_\xi$ на ковариантное метрическое тензорное поле g определяется как

$$
{}^{s}\nabla_\xi g = \nabla_\xi g - \frac{1}{n}.Q_\xi.g \ , \tag{218}
$$

с условием

$$
\overline{g}\,[{}^{s}\nabla_\xi g] = 0 \ . \tag{219}
$$

На основе этого соотношения ковариантный дифференциальный оператор ${}^{s}\nabla\xi$ называется *свободным ковариантным дифференциальным оператором без следа*.

Если перенос метрики g при ковариантном дифференциальном операторе без следа ${}^s\nabla_\xi$ подчиняется условию

$$ {}^s\nabla_\xi g = 0 \ , \tag{220} $$

эквивалентному условию для $\nabla_\xi g$:

$$ \nabla_\xi g = \frac{1}{n}.Q_\xi.g \ , \tag{221} $$

то перенос называется *переносом Вейля.*

Ковекторное поле (см. (196)) и

$$ \overline{Q} = \frac{1}{n}.Q \tag{222} $$

называется *ковекторным полем Вейля*.

Дифференцируемое многообразие M $(\dim M = n)$ с аффинной связностью и метрикой, на котором для каждого ковекторного поля $\xi \in T(M)$ перенос метрики g является переносом Вейля, называется *пространством Вейля с кручением* (*или пространством Вейля — Картана*) Y_n [1].

Свободный ковариантный дифференциальный оператор без следа ${}^s\nabla_\xi$ связан следующим образом с ковариантным дифференциальным оператором ${}^\omega\nabla_\xi$, сохраняющим инвариантный элемент объема $d\omega$:

$$ {}^\omega\nabla_\xi = {}^s\nabla_\xi - \frac{n-2}{2n}.Q_\xi = \nabla_\xi - \frac{1}{2}.Q_\xi \ . \tag{223} $$

Действия двух операторов, ${}^\omega\nabla_\xi$ и ${}^s\nabla_\xi$, идентичны, если $\dim M = n = 2$ $(Q_\xi \neq 0)$ или если $Q_\xi = 0$.

Компоненты $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ аффинной связности Γ можно выразить через компоненты аффинных связностей, соответствующих операторам ${}^\omega\nabla_\xi$ и ${}^s\nabla_\xi$.

$\nabla_{e_\beta} e_\alpha$ можно записать в виде

$$ \nabla_{e_\beta} e_\alpha = \frac{1}{2}(\nabla_{e_\alpha} e_\beta + \nabla_{e_\beta} e_\alpha - [e_\alpha, e_\beta]) - \frac{1}{2}.T(e_\alpha, e_\beta) \ , \tag{224} $$

чему соответствует представление $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ в виде

$$ \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} + \Gamma^\gamma_{\beta\alpha} - C_{\alpha\beta}{}^\gamma) - \frac{1}{2}.T_{\alpha\beta}{}^\gamma = \overline{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}.T_{\alpha\beta}{}^\gamma \ . \tag{225} $$

Если обозначить

$$ {}^g\nabla_{e_\beta} e_\alpha = \frac{1}{2}(\nabla_{e_\alpha} e_\beta + \nabla_{e_\beta} e_\alpha - [e_\alpha, e_\beta]) = \overline{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}.e_\gamma \ , \tag{226} $$

$$
{}^{s}\nabla_{e_\beta} e_\alpha = Q_{\alpha\beta}{}^{\gamma}.e_\gamma = \left(\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} - \frac{1}{n}.g^{\gamma}_{\alpha}.Q_\beta\right).e_\gamma \ , \tag{227}
$$

то получится

$$
\nabla_{e_\beta} e_\alpha = {}^{s}\nabla_{e_\beta} e_\alpha + \frac{1}{n}.Q_\beta.e_\alpha \ , \tag{228}
$$

$$
\nabla_{e_\beta} e_\alpha = {}^{g}\nabla_{e_\beta} e_\alpha + \frac{1}{2}.T(e_\beta, e_\alpha) \ . \tag{229}
$$

Из (224), (226) и (228) следует, что

$$
\nabla_{e_\beta} e_\alpha = \frac{1}{2}\left[{}^{g}\nabla_{e_\beta} e_\alpha + \frac{1}{2}.T(e_\beta, e_\alpha) + \frac{1}{n}.Q_\beta.e_\alpha + {}^{s}\nabla_{e_\beta} e_\alpha\right] \ . \tag{230}
$$

Последнее равенство соответствует представлению компонент $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ в виде

$$
\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}\left(\overline{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}.T_{\alpha\beta}{}^{\gamma} + \frac{1}{n}.g^{\gamma}_{\alpha}.Q_\beta + Q_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\right) \ . \tag{231}
$$

Аналогичным образом, пользуясь соотношениями

$$
{}^{\omega}\nabla_{e_\beta} e_\alpha = {}^{\omega}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}.e_\gamma = \left(\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}.g^{\gamma}_{\alpha}.Q_\beta\right).e_\gamma = \nabla_{e_\beta} e_\alpha - \frac{1}{2}.Q_\beta.e_\alpha \ , \tag{232}
$$

$$
\nabla_{e_\beta} e_\alpha = {}^{\omega}\nabla_{e_\beta} e_\alpha + \frac{1}{2}.Q_\beta.e_\alpha \ ,
$$

$$
\nabla_{e_\beta} e_\alpha = {}^{g}\nabla_{e_\beta} e_\alpha + \frac{1}{2}.T(e_\beta, e_\alpha) \ ,
$$

можно получить для $\nabla_{e_\beta} e_\alpha$ следующее выражение:

$$
\nabla_{e_\beta} e_\alpha = \frac{1}{2}\left[{}^{g}\nabla_{e_\beta} e_\alpha + \frac{1}{2}.T(e_\beta, e_\alpha) + {}^{\omega}\nabla_{e_\beta} e_\alpha + \frac{1}{2}.Q_\beta.e_\alpha\right] \ . \tag{233}
$$

Последнее равенство эквивалентно представлению компонент $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ в виде

$$
\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\overline{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}.T_{\alpha\beta}{}^{\gamma} + \frac{1}{2}.g^{\gamma}_{\alpha}.Q_\beta + {}^{\omega}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\right) \ . \tag{234}
$$

Из (228) и (229) следует связь между ${}^{g}\nabla_{e_\beta} e_\alpha$ и ${}^{s}\nabla_{e_\beta} e_\alpha$:

$$
{}^{g}\nabla_{e_\beta} e_\alpha = {}^{s}\nabla_{e_\beta} e_\alpha - \frac{1}{2}.T(e_\beta, e_\alpha) + \frac{1}{n}.Q_\beta.e_\alpha \ , \tag{235}
$$

эквивалентная связи между $\overline{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta}$ и $Q_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$:

$$\overline{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta} = Q_{\alpha\beta}{}^{\gamma} + \frac{1}{2}.T_{\alpha\beta}{}^{\gamma} + \frac{1}{n}.g^{\gamma}_{\alpha}.Q_{\beta} \ . \tag{236}$$

С другой стороны, существует связь между ${}^{g}\nabla_{e_\beta}e_\alpha$ и ${}^{\omega}\nabla_{e_\beta}e_\alpha$:

$${}^{g}\nabla_{e_\beta}e_\alpha = {}^{\omega}\nabla_{e_\beta}e_\alpha - \frac{1}{2}.T(e_\beta, e_\alpha) + \frac{1}{2}.Q_\beta.e_\alpha \ , \tag{237}$$

соответствующая связи между $\overline{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta}$ и ${}^{\omega}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$:

$$\overline{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta} = {}^{\omega}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}.T_{\alpha\beta}{}^{\gamma} + \frac{1}{2}.g^{\gamma}_{\alpha}.Q_{\beta} \ . \tag{238}$$

10.6. Дифференциальный оператор Ли, сохраняющий инвариантный элемент объема. Действие дифференциального оператора Ли $\pounds_\xi$ на инвариантный элемент объема $d\omega$, а именно

$$\pounds_\xi(d\omega) = \frac{1}{2}.\overline{g}[\pounds_\xi g].d\omega \ ,$$

позволяет построить новый оператор, дифференциальный оператор Ли, сохраняющий элемент объема $d\omega$.

Дефиниция. ${}^{\omega}\pounds_\xi$:= *дифференциальный оператор Ли, сохраняющий инвариантный элемент объема $d\omega$ вдоль векторного поля ξ*, равен

$${}^{\omega}\pounds_\xi = \pounds_\xi - \frac{1}{2}.\overline{g}[\pounds_\xi g] \ .$$

Свойства оператора ${}^{\omega}\pounds_\xi$ определяются свойствами дифференциального оператора Ли и существованием ковариантного метрического тензорного поля g, связанного с контравариантным метрическим тензорным полем $\overline{g}$.

a) Действие на инвариантный элемент объема $d\omega$:

$${}^{\omega}\pounds_\xi(d\omega) = 0 \ . \tag{239}$$

Это следует из определения оператора ${}^{\omega}\pounds_\xi$ и из (190).

b) Действие на базисное векторное поле:

$${}^{\omega}\pounds_{e_\alpha}e_\beta = \pounds_{e_\alpha}e_\beta - \frac{1}{2}.\overline{g}[\pounds_{e_\alpha}g].e_\beta = \left(C_{\alpha\beta}{}^{\gamma} - \frac{1}{2}.g^{\overline{\rho\sigma}}.\pounds_{e_\alpha}g_{\rho\sigma}.g^{\gamma}_{\beta}\right).e_\gamma \ , \tag{240}$$

$${}^{\omega}\pounds_{\partial_i}\partial_j = -\frac{1}{2}.g^{\overline{kl}}.\pounds_{\partial_i}g_{kl}.\partial_j \ . \tag{241}$$

c) Действие на ковекторное базисное поле:

$$^{\omega}\pounds_{e_\alpha} e^\beta = \pounds_{e_\alpha} e^\beta - \frac{1}{2}.\overline{g}[\pounds_{e_\alpha} g].e^\beta = k_{\gamma\alpha}{}^{\beta}.e^\gamma - \frac{1}{2}.\overline{g}[\pounds_{e_\alpha} g].e^\beta \ , \tag{242}$$

$$^{\omega}\pounds_{\partial_i} dx^j = k_{mi}{}^{j}.dx^m - \frac{1}{2}.\overline{g}[\pounds_{\partial_i} g].dx^j \ . \tag{243}$$

d) Действие на функцию f:

$$^{\omega}\pounds_{\xi} f = \xi f - \frac{1}{2}.\overline{g}[\pounds_{\xi} g].f, \quad f \in C^r(M), \quad r \geq 1 \ . \tag{244}$$

Если обозначить

$$P_\beta = \overline{g}[\pounds_{e_\beta} g] = g^{\overline{\gamma\delta}}.\pounds_{e_\beta} g_{\gamma\delta} \ , \tag{245}$$

$$P_j = \overline{g}[\pounds_{\partial_j} g] = g^{\overline{kl}}.\pounds_{\partial_j} g_{kl} \ , \tag{246}$$

$$P = P_\beta.e^\beta = P_j.dx^j \ , \tag{247}$$

$$P_\xi = \overline{g}[\pounds_\xi g] = 2._l\theta_\xi \ , \tag{248}$$

$$\widehat{C}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = C_{\alpha\beta}{}^{\gamma} - \frac{1}{2}.P_\alpha.g^\gamma_\beta \ , \ \widehat{C}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} \neq -\widehat{C}_{\beta\alpha}{}^{\gamma} \ , \tag{249}$$

то $^{\omega}\pounds_\xi$ и (240) $\div$ (244) можно записать в виде

$$^{\omega}\pounds_\xi = \pounds_\xi - \frac{1}{2}.P_\xi \ , \tag{250}$$

$$^{\omega}\pounds_{e_\alpha} e_\beta = \pounds_{e_\alpha} e_\beta - \frac{1}{2}.P_\alpha.e_\beta = \left(C_{\alpha\beta}{}^{\gamma} - \frac{1}{2}.g^\gamma_\beta.P_\alpha \right).e_\gamma = \widehat{C}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}.e_\gamma \ , \tag{251}$$

$$^{\omega}\pounds_{\partial_i} \partial_j = -\frac{1}{2}.P_i.\partial_j \ , \tag{252}$$

$$^{\omega}\pounds_{e_\alpha} e^\beta = \pounds_{e_\alpha} e^\beta - \frac{1}{2}.P_\alpha.e^\beta = k_{\gamma\alpha}{}^{\beta}.e^\gamma - \frac{1}{2}.P_\alpha.e^\beta \ , \tag{253}$$

$$ {}^{\omega}\pounds_{\partial_i} dx^j = k_{mi}{}^{j}.dx^m - \frac{1}{2}.P_i.dx^j \ , \tag{254} $$

$$ {}^{\omega}\pounds_{\xi} f = \xi f - \frac{1}{2}.P_{\xi}.f \ , \quad f \in C^r(M) \ , \quad r \geq 1 \ . \tag{255} $$

Коммутатор двух дифференциальных операторов Ли, сохраняющих $d\omega$, обладает следующими свойствами.

a) Действие на функцию f:

$$ [{}^{\omega}\pounds_{\xi}, {}^{\omega}\pounds_{u}]f = (\pounds_{\xi} u)f + \frac{1}{2}(uP_{\xi} - \xi P_u)f = $$

$$ = \left[\pounds_{\xi} u + \frac{1}{2}(uP_{\xi} - \xi P_u)\right] f, \quad f \in C^r(M), \quad r \geq 2. \tag{256} $$

b) Действие на векторное поле:

$$ [{}^{\omega}\pounds_{\xi}, {}^{\omega}\pounds_{u}]v = [\pounds_{\xi}, \pounds_{u}]v + \frac{1}{2}(uP_{\xi} - \xi P_u)v = $$

$$ = \left\{[\pounds_{\xi}, \pounds_{u}] + \frac{1}{2}(uP_{\xi} - \xi P_u)\right\} v, \quad \xi, u, v \in T(M) \ . \tag{257} $$

c) Тождество Якоби:

$$ < [[{}^{\omega}\pounds_{\xi}, {}^{\omega}\pounds_{u}], {}^{\omega}\pounds_{v}] >= [[{}^{\omega}\pounds_{\xi}, {}^{\omega}\pounds_{u}], {}^{\omega}\pounds_{v}] + $$

$$ + [[{}^{\omega}\pounds_{v}, {}^{\omega}\pounds_{\xi}], {}^{\omega}\pounds_{u}] + [[{}^{\omega}\pounds_{u}, {}^{\omega}\pounds_{v}], {}^{\omega}\pounds_{\xi}] \equiv 0 \ . \tag{258} $$

Различные типы дифференциальных операторов, действующих на инвариантный элемент объема, можно использовать для описания различных физических систем и взаимодействий на дифференцируемом многообразии с аффинными связностями и метрикой, рассматривая такое многообразие в качестве модели пространства-времени.

11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение сформулируем главные выводы из полученных результатов.

1. Оператор свертки S, коммутирующий с оператором ковариантного дифференцирования и дифференциальным оператором Ли, можно ввести на каждом дифференцируемом многообразии таким образом, что аффинная связность P для ковариантных тензорных полей будет отличаться от аффинной

связности Γ для контравариантных тензорных полей не только знаком. Компоненты (в координатном и некоординатном (неголономном) базисах) пары аффинных связностей P^i_{jk} и Γ^i_{jk} отличаются друг от друга компонентами $g^i_{j;k}$ ковариантных производных тензора Кронекера. При этом можно различить по меньшей мере три случая:

a) $g^i_{j;k} := 0 : P^i_{jk} + \Gamma^i_{jk} = 0$ (P^i_{jk} отличаются от Γ^i_{jk} только знаком (канонический случай: $S := C$));

b) $g^i_{j;k} := \varphi_{,k}.g^i_j : P^i_{jk} + \Gamma^i_{jk} = \varphi_{,k}.g^i_j$, $\varphi \in C^r(M)$ (P^i_{jk} отличается от Γ^i_{jk} на производную от заданной инвариантной функции $\varphi \in C^r(M)$, $r \geq 2$, по направлению базисного векторного поля (∂_k или e_k) и на компоненты тензора Кронекера в заданном базисе);

c) $g^i_{j;k} = q^i_{jk} : P^i_{jk} + \Gamma^i_{jk} = q^i_{jk}$, $q \in \otimes^1{}_2(M)$ (P^i_{jk} отличается от Γ^i_{jk} на ковариантную производную $g^i_{j;k}$ от компонент тензора Кронекера по направлению базисного векторного поля ∂_k (или e_k)).

В случае (a) ковариантные производные и производные Ли от ковариантных векторных полей представляют собой независимые друг от друга структуры (независимо от того факта, что производные Ли можно выразить с помощью ковариантных производных).

В случаях (b) и (c) (в отличие от случая (a)) производные Ли от ковариантных векторных полей зависят от структур, определенных существующими аффинными связностями.

На основе полученных результатов разработана кинематика векторных полей [28, 49–52]. Лагранжевская теория тензорных полей развивалась в [53] и была применена в [54], где ЭТГ рассматривалась как частный случай лагранжевской теории тензорных полей в V_n-пространствах ($n = 4$).

Теория пространств с контравариантной и ковариантной аффинными связностями и метриками и ее приложения к кинематике векторных полей и к лагранжевской теории тензорных полей открывает новые возможности для приложений дифференциально-геометрических методов в физике.

Автор выражает глубокую благодарность:

— проф. д-ру Н.А.Черникову за полезные дискуссии и перевод и редакцию русского текста настоящей статьи;

— д-ру Н.С.Шавохиной и д-ру А.Б.Пестову (ОИЯИ, Дубна, Россия) за полезные дискуссии;

— проф. д-ру Ст.Димиеву (Институт математики и информатики БАН, София, Болгария) и проф. д-ру К.Секигава (кафедра математики, Университет Ниигата, Япония) за поддержку рассматриваемой тематики;

— проф. д-ру Д.И.Казакову за его гостеприимство в ЛТФ ОИЯИ;

— Б.Димитрову и Д.Младенову за помощь в подготовке рукописи на русском языке.

Настоящая работа выполнена при частичной финансовой поддержке Национального фонда Болгарии для научных исследований (гранты F-103, F-498, F-642).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Hehl F.W., Kerlick G.D.** — Gen. Rel. and Grav., 1978, v.9,8, p.691.
2. **Hecht R.D., Hehl F.W.** — In: Proc. 9th Italian Conf. on Gen. Rel. and Grav. Physics. Capri, Italy, 1991. Eds. Cianci R. et al., World Sci. Pub. Co., Singapore, 1991, p.246.
3. **Hehl F.W., McCrea J.D., Mielke E.W., Ne'eman Y.** — Phys. Rep., 1995, v.258, 1-2, p.1.
4. **Eddington A.S.** — Relativitätstheorie in Mathematischer Behandlung, Berlin, Verlag von Julius Springer, 1925.
5. **Schrödinger E.** — Space-Time Structure. Cambridge, Cambridge at the University Press, 1950.
6. **Greub W.** — Multilinear Algebra, New York, Springer Verlag, 1978.
7. **Ефимов Н.В., Розендорн Е.Р.** — Линейная алгебра и многомерная геометрия, 2-е изд., М.: Наука, 1974.
8. **Greub W., Halperin St., Vanstone R.** — Connections, Curvature, and Cohomology. Vol.I., New York and London, Academic Press, 1972; *Connections, Curvature, and Cohomology*. Vol.II., New York and London, Academic Press, 1973.
9. **Bishop R.L., Goldberg S.I.** — Tensor Analysis on Manifolds. New York, The Macmillan Company, 1968.
10. **Choquet-Bruhat Y., DeWitt-Morette C., Dillard-Bleik M.** — Analysis, Manifolds and Physics. Amsterdam, North-Holland Pub. Co., 1977.
11. **Kobayashi S., Nomizu K.** — Foundations of Differential Geometry. Vol.I., New York, Interscience Publishers., 1963.
12. **Matsushima Y.** — Differentiable Manifolds. New York, Marcel Dekker, Inc., 1972.
13. **Boothby W.M.** — An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry. New York, Academic Press, 1975.
14. **Lovelock D., Rund H.** — Tensors, Differential Forms, and Variational Principles. New York, John Wiley & Sons, 1975.
15. **Норден А.П.** — Пространства аффинной связности. 2-е изд., М.: Наука, 1976.
16. **Черников Н.А.** — Краткие сообщения ОИЯИ №3[60], 1993, с.5.
17. **Черников Н.А.** — Препринт ОИЯИ Р2-96-065, Дубна, 1996.
18. **Von der Heyde P.** — Lett. Nuovo Cim., 1975, v.14, 7, p.250.
19. **Iliev B.J.** — J. Phys. A: Math. Gen., 1996, v.29, p.6895; 1997, v.30, p.4327; 1998, v.31, p.1287; Journal of Geometry and Physics, 1998, v.24, p.209.
20. **Hartley D.** — Class. and Quantum Grav., 1995, v.12, p.L103.
21. **Yano K.** — The Theory of Lie Derivatives and its Applications. Amsterdam, North-Holland Pub. Co., 1957.
22. **Егоров И.П.** — Геометрия. М.: Просвещение, 1979.
23. **Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.** — Современная геометрия. Методы и приложения. 2-е изд., М.: Наука, 1986.

24. **Трофимов В.В.** — Введение в геометрию многообразий с симметриями. М.: Изд. МГУ, 1989.

25. **Мищенко А.С.** — Векторные расслоения и их применение. М.: Наука, 1984.

26. **Мищенко А.С., Фоменко А.Т.** — Курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: Изд. МГУ, 1980.

27. **Широков П.А., Широков А.П.** — Аффинная дифференциальная геометрия. М.: Физматгиз, 1959, с.149.

28. **Manoff S.** — In: 14th Intern. Conf. on General Relativity and Gravitation. Florence, Italy, 6 — 12.08.1995. Contr. papers. Workshop A1; Workshop A4, Florence, Univ. of Florence, 1995; In: Complex Structures and Vector Fields. Eds. Dimiev St., Sekigawa K., Singapore, World Sci. Publ., 1995, p.61.

29. **Schouten J.A.** — Tensor Analysis for Physicists. Oxford, Clarendon Press, 1951; Ricci-Calculus: An Introduction to Tensor Analysis and its Geometrical Applications. Berlin, Springer Verlag, 1954.

30. **Slebodzinski W.** — Bull. Acad. Roy. Belgique, 1931, v.17, p.864.

31. **Lightman A.P., Press W.H., Price R.H., Teukolsky S.A.** — Problem Book in Relativity and Gravitation. Princeton, New Jersey, Princeton Univ. Press, 1975.

32. **Schmutzer E.** — Relativistische Physik (Klassische Theorie). Leipzig, B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, 1968.

33. **Manoff S.** — In: Proc. 8th Intern. Conf. on Gen. Rel. and Grav., Univ. Waterloo, Ontario, 1977, p. 241; In: Gravitational Waves. JINR P2-85-667, Dubna, 1985, p.157.

34. **Manoff S.** — Gen. Rel. and Grav., 1979, v.11, p.189.

35. **Manoff S.** — In: 6th Sov. Grav. Conf. Contr. Papers., UDN, Moscow, 1984, p.229.

36. **Manoff S.** — In: 11th Intern. Conf. on Gen. Rel. and Grav. Contr. Papers. Stockholm, 6–12 July 1986, Univ. of Stockholm, Stockholm, 1986.

37. **Bażański S.L.** — Ann. Inst. Henri Poincare, 1977, Sec. A.27, v.2, p.115; 1977, v.A.27, 2, p.145; Scripta Fac. Sci. Nat. Ujep. Brunensie. Physica, 1975, v.5, 3–4, p.271; Acta Phys. Polonica, 1976, v.7B, 5, p.305.

38. **Manoff S.** — Exp. Technik der Physik, 1976, v.24, 5, p.425.

39. **Swaminarayan N.S., Safko J.L.** — J. Math. Phys., 1983, v.24, 4, p.883.

40. **Ciufolini I.** — Phys. Rev., 1986, v.D34, 4, p.1014.

41. **Ciufolini I., Demianski M.** — Phys. Rev., 1986, v.D34, 4, p.1018.

42. **Weber J.** — Phys. Rev., 1960, v.117, p.306; General Relativity and Gravitational Waves. New York, 1961. Russian Translation: M.: Иностранная литература, 1962; In: General Relativity and Gravitation. Ed. Held A. v. 2., New York, Plenum Press, 1980, p.435.

43. **Will C.M.** — In: General Relativity: An Einstein Centenary Survey. Eds. S.W.Hawking, W.Israel, Cambridge, Cambridge U.P., 1979, p.24; Theory and Experiment in Gravitational Physics. Cambridge, London, New York, Cambridge U.P., 1981, Ch.10. Russian Translation: M.: Энергоатомиздат, 1985.

44. **Dixon W.G.** — Nuovo Cim., 1964, v.34, 2, p.317; Phil. Trans. Royal Soc. London, 1974, v.277, No.1264, p.59.

45. **Fishbone L.C.** — Astrophys. J., 1972, v.175, part 2, p.L155; 1973, v.185, part 1, p.43; 1975, v.195, part 1, p.499.

46. **Fuchs H.** — Exp. Technik d. Physik, 1974, v.3, p.185; Ann. der Physik (DDR), 1977, v.34, 2, p.159.

47. **Maugin G.A.** — Gen. Rel. and Grav., 1973, v.4, 3, p.241; 1974, v.5, 1, p.13.

48. **Mashhoon B.J.** — Math. Phys., 1971, v.12, 7, p.1075; Ann. of Phys. (USA), 1975, v.89, 1, p.254; Astrophys. J., 1975, v.197, 3, Part 1, p.705; Preprint Univ. of Maryland, Maryland, 1976; *Tidal Radiation*. Preprint University of Utah, 1977; Astrophys. J., 1977, v.216, 2, Part 1, p.591.

49. **Manoff S.** — Intern. J. Mod. Phys., 1996, v.A11,21, p.3849.

50. **Manoff S.** — JINR Rapid Communications, №1[81], 1997, p.5.

51. **Manoff S.** — Class. Quantum Grav., 1998, v.15, 2, p.465.

52. **Manoff S.** — Intern. J. Mod. Phys. A, 1998, v.13, 25, p.4289.

53. **Manoff S.** — In: Topics in Complex Analysis, Differential Geometry and Mathematical Physics. Eds. Dimiev St., Sekigawa K., World Sci. Publ., Singapore, 1997, p.177; Acta Math. Appl., 1999 (in press).

54. **Manoff S.** — Intern. J. Mod. Phys. A, 1998, v.13, 12, p.1941.