*«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»*
*1999, ТОМ 30, ВЫП. 6*

УДК 539.17

# НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ЯДЕРНЫХ ЧАСТИЦ

*В.В.Пупышев*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1999, ТОМ 30, ВЫП. 6

УДК 539.17

# НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ЯДЕРНЫХ ЧАСТИЦ

*В.В.Пупышев*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В обзоре представлены как классические, так и новые методы и результаты аналитических исследований строений стационарных уравнений Шредингера и Фаддеева и их решений, описывающих состояния трехчастичных систем с центральными и $S$-волновыми взаимодействиями. Особое внимание уделено угловому анализу этих уравнений и точным законам преобразования трехчастичных координат, операторов, базисных и волновых функций при циклической перестановке частиц. Дан анализ проблемы ложных решений.

In the review we present classical and new methods and results of analytical studying of structure of stationary Shrödinger and Faddeev equations and their solutions describing the states of three particle systems with two-body center and $S$-wave potentials. A special attention is paid to the angular analysis of those equations and exact transformation laws of three-body coordinates, operators, basic and wave functions at cyclic permutation of the particles. Analysis of the spirious-solutions-problem is given.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

К сожалению, в физической литературе используются не только самые разнообразные обозначения одной и той же величины, оператора или функции, но и нередко вводятся неадекватные определения и концепции. Поэтому обсуждение той или иной проблемы приходится начинать с оговорок о том, какой смысл будет иметь тот или иной термин и символ.

В настоящем обзоре, как правило, используется терминология и обозначения, принятые в известных учебниках [1–5] и справочниках [6–9] по различным разделам математики, классическому курсу квантовой механики [10], книгах по теории потенциального рассеяния [11–21] и углового момента [22–24], а также в монографиях, посвященных методу гипергармоник [25–27]. Все термины и компактные авторские обозначения подробно поясняются до их первого использования. Абсолютное большинство таких обозначений совпадает с использованными в серии работ [28–74], выполненных автором либо при его посильном участии. Всюду ниже знак $\equiv$ связывает символ и его определение либо левую и правую части тождества; векторы, матрицы и множества обозначаются жирными и, соответственно, прописными буквами.

Как известно автору из его многолетнего опыта, у довольно широкого круга читателей-физиков словосочетание «аналитические результаты исследования математически корректно поставленной задачи» ассоциируется только с явными и замкнутыми выражениями для точных решений такой задачи, обладающих сугубо физическим смыслом. Такое восприятие термина «аналитические результаты...» является слишком узким. В математике к аналитическим результатам анализа поставленной задачи принято относить все утверждения и символьные выражения, доказанные без каких-либо вычислений и описывающие самые разнообразные свойства как самой задачи, так и всех ее решений, а также глобальные и локальные свойства вспомогательных операторов и функций.

В настоящем обзоре анализируются шредингеровская и фаддеевская формулировки задачи трех квантово-механических частиц с парными взаимодействиями в виде произвольных суперпозиций кулоновского и ядерного потенциалов. Предполагается, что каждое парное взаимодействие зависит только от относительных координат частиц в рассматриваемой паре. Для краткости такая задача названа «задачей трех ядерных частиц».

Перечислим объекты квантовой теории нескольких частиц, аналитическое исследование которых представляется фундаментальным для дальнейшего развития этой теории. Особое место занимают точные законы преобразования операторов, базисных, вспомогательных и волновых функций при геометрических преобразованиях разнообразных систем координат. Не менее важны аналитические методы проектирования многомерных динамических уравнений на различные полные базисы с целью уменьшения числа независимых переменных. При такой редукции неизбежно возникают матричные элементы от взаимодействий и различного рода интегралы перекрытия между базисными и искомыми функциями. Знание аналитических свойств этих объектов позволяет существенно упростить анализ редуцированных уравнений и их численное решение. С теоретической и практической точек зрения, несомненно, интересны исследования эквивалентности различных формулировок одной и той же многочастичной задачи. Одна из проблем такого рода — существование регулярных, но лишенных физического смысла решений переформулированной задачи. Доказательства критериев существования таких особых решений, их классификация и способы точного исключения, безусловно, важны для построения математически корректной теории. Очевидно, что такая теория окажется незавершенной без асимптотических методов, позволяющих построить в явном виде полные асимптотические разложения волновых функций в физически интересных пределах по аргументам и параметрам.

Основная цель настоящего обзора — подробное описание некоторых фундаментальных методов аналитического исследования упомянутых выше объектов задачи трех ядерных частиц и анализ на достоверность некоторых точных результатов, полученных в рамках теории фаддеевских уравнений и метода гипергармоник в координатном пространстве.

Такой выбор обусловлен тем, что автор выполнил серию исследований [57–72,74] задачи трех ядерных частиц именно этими методами. Обсуждение других подходов к точному решению такой задачи невозможно из-за жестких ограничений на допустимый объем обзора и представляется излишним из-за наличия фундаментальных статей обзорного характера и монографий. Упомянем наиболее важные из таких публикаций, чтобы напомнить основы наиболее часто используемых аналитических методов и попутно пояснить, какие именно аналитические результаты не суммировались и почему это необходимо сделать в настоящем обзоре.

Один из наиболее распространенных способов исследования многомерных динамических уравнений для нескольких частиц основан на представлении искомых функций и (или) операторов в виде рядов по подходящим базисам и последующем проектировании уравнений на такие базисы. Угловыми базисами называются полные наборы из собственных функций квадратов операторов угловых моментов, содержащихся в свободном гамильтониане. Задача проектирования уравнений на угловые базисы часто именуется угловым анализом этих уравнений. Угловые базисные функции известны в явном виде, хорошо изучены и по определению не зависят от взаимодействий. По этим причинам угловые базисы используются наиболее часто. Проектированием на подходящий угловой базис исходные уравнения точно сводятся к уравнениям с меньшим числом независимых переменных. Аналитический и численный анализ уравнений в пространстве небольшой размерности — задача менее сложная и во многих случаях достаточно полно решенная. Пример такой задачи — двухчастичное уравнение Шредингера с центральным (сферически-симметричным) взаимодействием [14]. Изначально это уравнение формулируется в трехмерном пространстве $\mathcal{R}^3_x$ векторов $\mathbf{x}$, характеризующих относительное расположение двух частиц в некоторой фиксированной системе координат $S_3$. В качестве углового базиса часто используются сферические функции [23] или их линейные комбинации. Сферические функции $Y_{b\beta}(\hat{x})$ зависят от двух сферических углов $\hat{x} = (\theta_x, \varphi_x)$ вектора $\mathbf{x}$, являются собственными для квадрата оператора углового момента $\mathbf{l}_x$ и образуют полный ортонормированный базис на единичной сфере $\mathcal{S}^2_x$ в $\mathcal{R}^3_x$. Поэтому такой базис нередко называют сферическим. Исходное трехмерное уравнение Шредингера с центральным взаимодействием проектированием на сферический базис сводится к системе незацепляющихся обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для неизвестных функций одной переменной $x$. Такие уравнения принято называть радиальными уравнениями Шредингера.

Общая теория обыкновенных дифференциальных уравнений [1,6,8] достаточно развита. Ее методами радиальное уравнение Шредингера точно решено для серии модельных потенциалов. К ним относятся кулоновский и осцилляторный потенциалы, потенциалы Морса и прямоугольной ямы [10], а также семейство баргмановских потенциалов [18].

Для большинства **реалистических** потенциалов, воспроизводящих экспериментальные данные по двухчастичным спектрам и фазам рассеяния, радиальные уравнения Шредингера точно не разрешены. С целью их аналитического исследования и приближенного решения были разработаны различные подходы: метод аппроксимации локальных взаимодействий сепарабельными потенциалами конечного ранга [17], вариационный метод [20], метод потенциала нулевого радиуса [16], теория возмущений [14,19], квазиклассическое приближение [4,11] и различные версии [73,74] метода фазовых функций [12,13].

Обобщение всех вышеперечисленных методов для аналитического исследования задачи трех частиц и развитие любых других подходов к такому исследованию затрудняются всего двумя обстоятельствами: сравнительно большой размерностью трехчастичного пространства и общепринятым способом описания взаимодействий. Обсудим оба обстоятельства для ясного понимания того, какие трудности можно преодолеть, а какие — в принципе, нельзя.

В системе координат $S_3$, связанной в $\mathcal{R}^3$ с центром масс трехчастичной системы, относительное положение трех частиц характеризуется уже не тремя, как в случае двух частиц, а шестью координатами. В качестве таковых часто используются трехмерные векторы Якоби [17] $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ или сопоставленные им гиперсферические координаты [1] $(r, \Omega)$: гиперрадиус $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$ и набор из пяти гиперуглов $\Omega \equiv (\hat{x}, \hat{y}, \varphi)$, где $\varphi \equiv \operatorname{arctg}(y/x)$. Длины $x$ и $y$ ассоциируются с расстояниями между частицами в выбранной паре частиц и расстоянием от третьей частицы до центра масс этой пары. Ясно, что для координатного описания трехчастичной конфигурации необходимо ввести шестимерное координатное пространство $\mathcal{R}^6 \equiv \mathcal{R}^3_x \oplus \mathcal{R}^3_y$. Угловой базис на четырехмерном торе $\mathcal{T}^4_{xy} \equiv \mathcal{S}^2_x \oplus \mathcal{S}^2_y$ (единичной пятимерной сфере $\mathcal{S}^5$) в $\mathcal{R}^6$ образует бисферические (гиперсферические) гармоники [1,23]. Бисферические гармоники $\mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x}, \hat{y})$ зависят от четырех переменных и являются собственными функциями квадратов операторов угловых моментов $\mathbf{l}_x$ и $\mathbf{l}_y$, сопряженных векторам $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, и квадрата оператора полного углового момента $\mathbf{l} \equiv \mathbf{l}_x + \mathbf{l}_y$. Гиперсферические гармоники (гипергармоники) $Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega)$ зависят от пяти углов и являются собственными функциями как всех квадратов вышеперечисленных операторов, так и квадрата шестимерного углового момента (гипермомента) $\mathbf{L}$. Разложение исследуемой функции в ряд по бисферическим гармоникам (гипергармоникам) будем называть ее бисферическим (гиперсферическим) рядом. Коэффициенты таких рядов назовем бисферическими или гиперсферическими компонентами разложенной функции. По определению бисферические компоненты — функции двух аргументов $x, y$ или $r$ и $\varphi$, а гиперсферические компоненты зависят только от одной координаты $r$. Область допустимых значений переменных $x, y$ или $r, \varphi$ — первый квадрант $\mathcal{R}_2^+$ двумерной плоскости $\mathcal{R}_2$, а гиперрадиус $r$ всегда принадлежит неотрицательной полуоси $\mathcal{R}_1^+$.

Если функции, подчиненные в $\mathcal{R}^6$ исследуемым трехчастичным уравнениям, заменить их бисферическими (гиперсферическими) рядами и затем спроектировать уравнения на бисферический (гиперсферический) базис, то получатся точные двумерные (одномерные) уравнения в $\mathcal{R}_+^2$ $(\mathcal{R}_+^1)$ для неизвестных бисферических (гиперсферических) компонент. В абсолютном большинстве случаев совокупности уравнений для компонент — бесконечные системы зацепляющихся уравнений. Зацепление обуславливается интегральными операторами, функциями и числовыми коэффициентами.

Например, трехчастичные уравнения Шредингера в $\mathcal{R}_+^1$ зацепляются элементами матрицы полного взаимодействия в базисе гипергармоник [25], уравнения Фаддеева в $\mathcal{R}_+^2$ зацепляются и матрицами парных взаимодействий в бисферическом базисе, и интегральными операторами.

Напомним основные причины, порождающие зацепление. Пусть $(i, j, k)$ — триада различных индексов, нумерующих три частицы и принимающих разные значения $1, 2$ или $3$. Имеется ровно три разбиения $i(j, k)$ на пару частиц с номерами $j$ и $k$ и частицу, имеющую номер $i$. Каждому $(i = 1, 2, 3)$ разбиению $i(j, k)$ отвечает своя пара якобиевских векторов $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i$ или сопоставленных им гиперсферических координат $(r, \Omega_i)$. При циклической перестановке индексов $i(j, k) \to k(i, j)$ пара $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i$ переходит в пару $\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k$. Координаты, помеченные индексом $i$, принято называть собственными для разбиения $i(j, k)$ и несобственными для двух других разбиений. Взаимодействия в системе трех частиц априорно считаются парными. Более того, постулируется, что полное взаимодействие $V$ равно сумме всех трех парных взаимодействий $V_i$, а взаимодействия $V_i$ в каждой паре $(j, k)$ описываются функцией $V_i(\mathbf{x}_i)$, заданной по определению в собственных для этой пары координатах $\mathbf{x}_i$. Постулат о таком аддитивном представлении полного взаимодействия подтвержден разнообразными экспериментальными данными. Определение функциональной зависимости парных взаимодействий в несобственных координатах, в принципе, возможно путем экспериментального анализа трехчастичных процессов. Такие эксперименты достаточно сложны, а их последующая обработка вносит многочисленные теоретические неопределенности. Поэтому парные взаимодействия экспериментально восстанавливаются в их собственных координатах и в таком виде входят в теорию. Очевидно, что если записать полное взаимодействие в одной системе координат Якоби, то она окажется собственной для одного парного взаимодействия и несобственной для двух других. При переходе от собственных координат к несобственным взаимодействия и функции обычно теряют многие свои свойства, а их функциональная зависимость, как правило, усложняется. Например, центральное взаимодействие $V_k(x_k)$ в несобственных координатах описывается функцией сложного аргумента $V_k(x_k(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i))$, не обладающей сферической симметрией ни по одному из новых аргументов $\mathbf{x}_i$ или $\mathbf{y}_i$.

Итак, взаимодействия приходится считать парными и заданными в их собственных координатах. Поэтому развитие точных методов решения редуцированных трехчастичных уравнений невозможно без знания всех свойств объектов, обуславливающих зацепление таких уравнений, и способов минимизации зацеплений. Мощный прием, минимизирующий зацепление, — одновременное использование различных систем координат и разбиение искомой функции на вспомогательные компоненты. Этот прием часто используется в молекулярной, атомной и ядерной физике и позволяет существенно упростить как математическую постановку задачи нескольких частиц, так и последующие аналитическое и численное исследования уже поставленной задачи.

Яркий пример вышесказанного — фаддеевское разбиение [21] трехчастичной $T$-матрицы на три уравнения для ее компонент $T_i(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i)$, записанных в их собственных координатах — импульсах Якоби $\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i$, сопряженных координатам Якоби $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i$. Именно такое разбиение и способ записи позволили Фаддееву впервые математически корректно сформулировать в его работе [75] задачу трех частиц с парными короткодействующими потенциалами.

В методе гипергармоник [25–27] одновременное использование трех ($i = 1, 2, 3$) систем гиперсферических координат $(r, \Omega_i)$ позволяет значительно упростить и унифицировать вычисление матричных элементов парных взаимодействий в гиперсферическом базисе [76].

Одновременное использование нескольких систем координат невозможно без знания законов преобразования операторов, базисных, вспомогательных и волновых функций при переходе от одной системы координат к другой. Преобразования операторов парных взаимодействий, угловых моментов и сферических функций при отражении, сдвиге и вращении систем координат в $\mathcal{R}_x^3$ тщательно исследованы [22,23]. Для матричных элементов многих двухчастичных операторов, действующих в $\mathcal{R}_x^3$, известны явные выражения и развиты эффективные алгебраические методы вычисления [22–24]. Преобразования трехчастичных операторов, угловых базисов и различных вспомогательных функций при циклической перестановке частиц в $\mathcal{R}^6$ (или переходе от одного набора координат Якоби к другому) изучены не столь подробно. Поэтому в разд. 2 дан оригинальный анализ более общего, чем циклическая перестановка частиц, кинематического преобразования координат, операторов и угловых базисов. Особое внимание уделено исследованию общих и локальных свойств ядер интегральных операторов фаддеевских уравнений в $\mathcal{R}_+^2$ и коэффициентов унитарного преобразования гипергармоник при переходе $(r, \Omega_i) \to (r, \Omega_k)$. Стоит отметить, что при $\ell = L = 0, 1, 2, 3$ явные выражения для таких коэффициентов выведены Богословским и Клепиковым [77], а в общем случае — получены позже Рейналом и Реваи [78]. Коэффициенты Рейнала—Реваи — шестикратные суммы, содержащие $3j$- и $9j$-символы и тригонометрические функции так называемого кинематического угла $\gamma$. Столь сложное представление оказалось крайне неудобным с вычислительной точки зрения. Поэтому впоследствии для коэффициентов Рейнала—Реваи были выведены разнообразные рекуррентные соотношения [25,79–81], системы линейных уравнений [72,79,82], интегральное и дифференциальное представления [65,72].

Однако рекуррентные соотношения слишком сложны для исследования аналитических свойств коэффициентов Рейнала—Реваи как функций кинематического угла $\gamma$. Знание таких свойств необходимо не только для ускорения вычислений различных матричных элементов в базисе гипергармоник [25] и построения функций с наперед заданной симметрией [81,83–86], но и для суммирования в явном виде различных рядов, содержащих коэффициенты Рейнала—Реваи. Задачи о существовании некоторых точных [66] и ложных [67–71] решений уравнений Фаддеева сводятся к определению значений параметра $\gamma$, при которых разрешимы алгебраические системы уравнений, содержащие коэффициенты Рейнала—Реваи. Задача суммирования рядов, содержащих эти коэффициенты, возникает при исследовании асимптотик трехчастичных волновых функций и их фаддеевских компонент в окрестности точки тройного столкновения [64,68].

Таким образом, имеется широкий круг проблем, решение которых невозможно без предварительного исследования общих и локальных свойств коэффициентов Рейнала—Реваи как функций кинематического угла. Исследованию таких свойств посвящены работы [58,65,72]. Изложением их основных результатов и некоторых оригинальных численных алгоритмов завершается разд. 2.

Следующий раздел начинается с отсутствующего в литературе подробного и единообразного описания строений трехчастичных уравнений Шредингера и Фаддеева в бисферическом и гиперсферическом базисах и общих аналитических свойств решений таких уравнений.

Математически корректная формулировка квантовой задачи трех частиц с парными короткодействующими потенциалами впервые была дана Фаддеевым в импульсном пространстве [75]. Позднее наряду с интегральными уравнениями Фаддеева для компонент $T$-матрицы стали интенсивно применяться дифференциальные уравнения Фаддеева для трех компонент $\Psi_i$ волновой функции $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3$ в шестимерном координатном пространстве $\mathcal{R}^6$. Главная проблема квантовой теории трех частиц в координатном пространстве заключалась в выводе физических граничных условий в пределе больших относительных расстояний между частицами, гарантирующих существование и единственность решений уравнений Фаддеева. Основной вклад в решение этой сложной задачи был сделан Меркурьевым в его собственных работах и работах, выполненных в соавторстве. Многочисленные ссылки на эти работы и альтернативные исследования даны в книге [21] и подробных обзорах [87–91].

Уравнения Фаддеева в $\mathcal{R}^2_+$ являются интегродифференциальными уравнениями для неизвестных бисферических компонент, зависящих от двух аргументов $x$ и $y$ или $r$ и $\varphi$. Интенсивное исследование и практическое применение интегродифференциальных уравнений было обусловлено двумя обстоятельствами. Во-первых, тем, что существование и единственность решений таких уравнений установлены для широкого класса локальных парных взаимодействий [21] в случае как нейтральных, так и заряженных частиц. Во-вторых, тем, что интегральные операторы действуют лишь на одну переменную $\varphi$. Поэтому дискретизацией интегродифференциальные уравнения сводятся к системе линейных уравнений с ленточной матрицей [59,88,92]. Именно разряженность матрицы линейной задачи в сочетании с простыми граничными условиями и обуславливает широкое практическое применение интегродифференциальных уравнений для исследования различных свойств трехчастичных систем. С этой целью были развиты разнообразные численные алгоритмы, основанные на конечно-разностной аппроксимации [88], аппроксимации кубическими эрмитовыми сплайнами [92–94] и кубическими сплайнами, обладающими вторыми непрерывными производными [59]. Недавно был предложен метод сильной связи каналов для уравнений Фаддеева [95]. Преимущества этого подхода по сравнению с методом конечномерных аппроксимаций гамильтонианов подсистем, развитым в работах [29–38] в рамках многочастичного уравнения Липпмана—Швингера, стоит пояснить более подробно. Метод конечномерных аппроксимаций для такого уравнения имеет слишком узкую область применения [35], ограниченную отрицательными значениями полной энергии системы. Этот метод, в принципе, не позволяет учесть непрерывные спектры всех подсистем, а при практическом применении требует аппроксимации парных взаимодействий сепарабельными потенциалами конечного ранга. Три упомянутых ограничения оказываются несущественными в методе сильной связи каналов для уравнений Фаддеева [95], основанном на разложении компонент волновой функции по базисам из собственных функций гамильтонианов двухчастичных подсистем [96]. Этот метод базируется на уравнениях Фаддеева и поэтому обладает рядом преимуществ по сравнению с методом сильной связи каналов для уравнения Шредингера [14]. Как отмечалось в работе [95], главное из них — отсутствие в окончательных уравнениях членов, связанных с неортогональностью каналов рассеяния [97,98], и возможность строгого учета вкладов непрерывного спектра взаимодействующих кластеров.

Эффективность всех способов дискретизации интегродифференциальных уравнений Фаддеева в $\mathcal{R}^2_+$ существенно зависит от выбора двумерной сетки узлов. Оптимальный выбор определяется качественной зависимостью искомых решений (бисферических фаддеевских компонент) от их аргументов. Поэтому знание аналитических свойств таких компонент, в первую очередь, их полных асимптотических разложений вблизи всех границ области $\mathcal{R}^2_+$ представляется особо важным и для экономизации вычислительных алгоритмов. Исследование аналитических свойств бисферических фаддеевских компонент затруднено тем, что они зависят от двух переменных и подчинены уравнениям, содержащим нелокальные операторы. Поэтому важным и вполне естественным представлялся следующий шаг редукции, намеченный Мандельцвейгом [99]. Этот шаг заключается в разделении переменных $r$ и $\varphi$ разложением фаддеевских бисферических компонент по наиболее удобным базисным функциям угловой переменной $\varphi$. Основная проблема такого разделения заключалась в выборе наиболее удобного углового базиса и исследовании аналитических свойств ядер интегральных операторов. Достаточно полному решению этих задач были посвящены работы [58,67,72]. В них исследовался переход от уравнений Фаддеева в бисферическом базисе к уравнениям Фаддеева в гиперсферическом базисе. Анализом этого перехода как исходного этапа объединения теории Фаддеева и метода гипергармоник завершается разд. 3.

Упомянутое объединение открывает немало возможностей для точного решения уравнений Фаддеева с произвольными парными взаимодействиями. Особое место среди множества точных решений трехчастичных уравнений Фаддеева с заданными парными взаимодействиями занимают решения, не несущие никакой информации о взаимодействиях. Такие нетривиальные $(\Psi_i \neq 0)$ решения уравнений Фаддеева отвечают тривиальной волновой функции $(\Psi \equiv 0)$ и называются ложными решениями или решениями-призраками. Факт существования ложных решений отмечался многими авторами обзорных [100,101] и оригинальных работ [57,66–68,102–107]. Общие свойства трехчастичного гамильтониана, порождающие ложные решения и такие общие вопросы, как полнота пространства ложных и физических решений, исследовались в работах [102–105]. Наиболее значимое для спектральной теории фаддеевских трехчастичных уравнений утверждение доказано Яковлевым [105] в случае полного трехчастичного гамильтониана с чисто дискретным спектром. В этом случае матричные операторы, соответствующие трехчастичным уравнениям Фаддеева и сопряженным уравнениям, имеют два типа инвариантных пространств. На пространствах первого типа спектр операторов совпадает со спектром полного гамильтониана, на пространствах второго типа эти же операторы эквивалентны свободному трехчастичному гамильтониану.

В явном виде ложные решения для системы трех тождественных частиц, взаимодействующих посредством $S$-волновых парных потенциалов и находящихся в состоянии с полным угловым моментом $\ell = 0$, были найдены в работах [57,67,106,107]. Ложные решения для такой же системы, но в состоянии с $\ell = 1$, упоминались в работах [66,68]. Для произвольной трехчастичной системы с парными центральными потенциалами критерий существования ложных решений, обладающих наперед заданным $\ell$, был впервые доказан в работе [71]. Ложные решения для систем из трех тождественных бозонов или фермионов в состояниях с $\ell = 0$ получены в явном виде в работе [108].

Уравнения, определяющие ложные решения, не содержат потенциалы. Поэтому ложные решения, найденные аналитически, можно использовать как универсальные эталонные функции для тестирования алгоритмов численного решения фаддеевских уравнений с произвольными взаимодействиями. Существование ложных решений иногда ошибочно трактуется как неэквивалентность трехчастичного уравнения Шредингера и отвечающих ему уравнений Фаддеева. Такое понимание порождается главным образом неоднозначной разрешимостью уравнений Фаддеева, не дополненных физическими граничными условиями или же содержащих потенциалы, для которых факт существования и единственности фаддеевской краевой задачи не установлен. Из последних замечаний ясно, что обсуждение известных свойств ложных решений и проблем, порождаемых этими свойствами, представляется особо важным и интересным. Анализом общих свойств ложных решений начинается разд. 4, посвященный точным решениям уравнений Фаддеева. Точные решения известны лишь для некоторых потенциалов. К ним относятся потенциал гармонического осциллятора [57,106] и потенциал, убывающий обратно пропорционально квадрату расстояния [66,109]. Теорема существования и единственности решений фаддеевской задачи с парными потенциалами, растущими на бесконечности или же имеющими сингулярности центробежного типа при малых расстояниях, не доказана. Более того, в этих случаях асимптотики фаддеевских компонент при больших расстояниях неизвестны. Поэтому анализ точных решений задачи трех тождественных бозонов с потенциалами осцилляторного и центробежного типов интересен для обобщения теории Фаддеева. Еще одна причина продолжить разд. 4 таким анализом вызвана другими немаловажными для ядерной физики фактами. Перечислим их.

Исследование задачи $N$ квантовых частиц с парными взаимодействиями, имеющими при $x \to 0$ сингулярности типа $\alpha\, x^{-2}$, где $\alpha$ — некоторый коэффициент, а $x$ — относительное расстояние между частицами, представляется достаточно интересным как для обобщения теории рассеяния, так и для математически корректного решения такой задачи. Дело в том, что многие нуклон-нуклонные $(NN)$ потенциалы, полученные из современных теоретико-полевых моделей $NN$-взаимодействия [74], например боннский потенциал [110], содержат короткодействующие слагаемые с асимптотикой $O(x^{-2})$ при $x \to 0$. Однако критерий существования регулярных решений $N$-частичного уравнения Шредингера с такими сингулярными потенциалами известен лишь в частных случаях. При $N = 2$ такие решения существуют [10], если $\alpha > -1/4$. В работе [109] Авишаи численно исследовал задачу трех тождественных бозонов с полным моментом $\ell = 0$ и $S$-волновыми парными потенциалами $\alpha x_i^{-2}$. Итогом исследования было первое численное доказательство того факта, что при некоторых значениях параметра $\alpha$ уравнения Фаддеева имеют регулярные решения в виде произведения функции Бесселя $J_\nu(r)$ на функцию гиперугла $\varphi$. В работе [66] исследовалась такая же трехчастичная задача, но в случае произвольного $\ell$. В этом общем случае был доказан критерий существования точных решений, представимых в виде произведения функции Бесселя $J_\nu(r)$ на конечную линейную комбинацию гипергармоник. Раздел 4 завершается доказательством этого критерия и сопоставлением результатов работ [66] и [109].

Не менее важным для теории является знание асимптотик волновых функций в физически интересных пределах их параметров. Один из них — полная энергия. Некоторые аналитические методы построения низкоэнергетических разложений в задачах двух и трех ядерных частиц описаны в работах [39–56]. Анализ современного состояния теории низкоэнергетических разложений для таких задач дан в предыдущих обзорах [73] и [74].

Настоящий обзор написан в том же методическом духе, что и эти публикации: особое внимание уделяется выводу наиболее значимых соотношений, сопоставлению известных результатов, обсуждению их физического и математического смысла. Чтобы сделать такое описание доступным и не столь утомительным для максимально широкого круга читателей, в обзоре специально приводятся простые поясняющие примеры, материал излагается по принципу перехода от простого к сложному, а сам переход описывается достаточно подробно. Особо важные утверждения сначала формулируются, затем доказываются и обсуждаются. Такая последовательность изложения материала представляется автору оптимальной, потому что предоставляет читателю полное право на выбор: ограничиться прояснением сути рассматриваемого вопроса в целом или же познакомиться со всеми «подводными камнями», прочитав полное доказательство и обсуждение особых случаев. Выбрать в разделе нужный параграф позволит краткий план изложения, которым начинается каждый раздел, за исключением разд. 5, составленного из выводов и заключительных замечаний.

## 2. КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

Этот раздел посвящен более общему, чем известная циклическая перестановка частиц, кинематическому преобразованию в задаче трех тел. В п. 2.1 вводятся декартовы и гиперсферические координаты Якоби, а затем поясняется геометрический смысл их кинематического преобразования в общем и двух особых случаях: когда все частицы расположены в координатной плоскости и на одной прямой. В п. 2.2 операторными методами теории углового момента последовательно анализируется кинематическое преобразование функций произвольной формы, угловых базисов и разложений по таким базисам. Анализ начинается в пп. 2.2.1 с определения операторов перестановки, отражения и поворотов и построения операторов кинематического преобразования. Затем в пп. 2.2.2 перечисляются основные свойства угловых базисов, а в пп. 2.2.3 поясняется связь между теоремами сложения и кинематическим преобразованием. Далее в пп. 2.2.4 и 2.2.5 описывается кинематическое преобразование бисферических и гиперсферических рядов.

**2.1. Кинематическое преобразование координат.** Рассмотрим систему трех частиц с массами $m_i$, $i = 1, 2, 3$. В трехмерном координатном пространстве $\mathcal{R}^3$ введем декартову систему координат $S_3$ с направляющими ортами $\hat{\mathbf{e}}_i$. Пусть $\mathbf{a}_i$ — радиус-вектор частицы с номером $i$ в системе $S_3$. Введем три системы относительных координат Якоби:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &\equiv \hbar^{-1}\left(\frac{2m_i m_j}{m_i+m_j}\right)^{1/2}(\mathbf{a}_j-\mathbf{a}_i)\,, \\ \mathbf{y}_k &\equiv \hbar^{-1}\left(\frac{2m_k\,(m_i+m_j)}{m_1+m_2+m_3}\right)^{1/2}\left(\frac{m_i\mathbf{a}_i+m_j\mathbf{a}_j}{m_i+m_j}-\mathbf{a}_k\right), \end{aligned} \qquad (1)$$

где индексы $i, j, k$ образуют циклическую перестановку триады индексов $(1, 2, 3)$: индекс $i$ переходит в $k$, $j$ — в $i$, а $k$ — в $j$. Приведенные векторы Якоби $\mathbf{x}_i$ и $\mathbf{y}_i$ объединим в двухкомпонентные столбцы $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)^T$ и шестимерные векторы $\mathbf{r}_i \equiv (\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$. Произвольным образом выберем два из трех таких векторов и введем сокращенные обозначения:

$$\mathbf{r} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \mathbf{r}_i = (\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)\,, \quad \mathbf{r}' = (\mathbf{x}', \mathbf{y}') \equiv \mathbf{r}_k = (\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)\,. \qquad (2)$$

По определению вектор $\mathbf{r}$ с трехмерными компонентами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ принадлежит шестимерному координатному пространству $\mathcal{R}^6 \equiv \mathcal{R}^3_x \oplus \mathcal{R}^3_y$, которое является прямой суммой трехмерных пространств $\mathcal{R}^3_x$ и $\mathcal{R}^3_y$ векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Декартову систему координат $S_6$ в $\mathcal{R}^6$ выберем так, чтобы проекции $r_\nu$ вектора $\mathbf{r}$ на направляющие орты $\hat{\mathbf{n}}_\nu$ этой системы были бы связаны с координатами $x_\mu \equiv \mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\mu$ и $y_\mu \equiv \mathbf{y} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\mu$, $\mu = 1, 2, 3$, векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в системе $S_3$ следующим образом: $r_\nu \equiv x_\nu$, если $\nu = 1, 2, 3$, и $r_\nu \equiv y_{\nu-3}$ при $\nu = 4, 5, 6$. При таком определении системы $S_6$ гиперсферические углы $\Omega = (\hat{x}, \hat{y}, \varphi)$ вектора $\mathbf{r}$ в $\mathcal{R}^6$ допускают наглядную геометрическую интерпретацию в трехмерных терминах: пара $\hat{q} \equiv (\theta_q, \varphi_q)$ сферических углов вектора $\mathbf{q}$ определяет направление вектора $\mathbf{q} = \mathbf{x}, \mathbf{y}$ в $S_3$, а величина гиперугла $\varphi \equiv \operatorname{arctg}(y/x) \in [0, \pi/2]$ фиксирует отношение трехмерных длин $x$ и $y$ векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Поэтому в отличие от углов $\hat{x}$ и $\hat{y}$ угол $\varphi$ не изменяется при произвольном трехмерном повороте векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ или координатной системы $S_3$. Взаимное расположение трех частиц в системе их центра масс характеризуется шестью числами. В качестве совокупности таких чисел, обозначаемой далее дираковским кет-символом $|\mathbf{r}\rangle$, будем одновременно использовать декартовы координаты $x_\mu$,

$y_\mu$ трехмерных компонент $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ вектора $\mathbf{r}$ в системе $S_3$, его декартовы координаты $r_\nu$ в системе $S_6$ и отвечающие им гиперсферические координаты $(r, \Omega)$: гиперрадиус $r \equiv (x^2 + y^2)^{1/2}$ и набор углов $\Omega$. Ту же самую трехчастичную конфигурацию $|\mathbf{r}\rangle$ можно описать в координатах $x'_\mu$, $y'_\mu$; $r'_\nu$ или $(r', \Omega')$, $\Omega' \equiv (\hat{x}', \hat{y}', \varphi')$ вектора $\mathbf{r}'$, потому что между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ имеется взаимно однозначное соответствие. Действительно, из определения (1) следует, что столбцы $(\mathbf{x}, \mathbf{y})^T$ и $(\mathbf{x}', \mathbf{y}')^T$ выбранных векторов Якоби, отвечающие векторам $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, связаны линейным ортогональным и однопараметрическим преобразованием:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{y}' \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} +\cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} . \tag{3}$$

Абсолютное значение его параметра $\gamma$ для исследуемой трехчастичной системы фиксируется только отношениями масс частиц, а знак определяется четностью перестановки триады $(k, i, j)$ индексов, нумерующих частицы, к триаде $(1, 2, 3)$. В нашем случае $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i, \mathbf{y} = \mathbf{y}_i$, а $\mathbf{x}' = \mathbf{x}_k, \mathbf{y}' = \mathbf{y}_k$ и

$$\gamma \equiv \gamma_{ki} \equiv \varepsilon_{ki} \operatorname{arctg} \left(m_j (m_1 + m_2 + m_3)/m_i m_k\right)^{1/2} , \tag{4}$$

причем $\varepsilon_{ki} = -\varepsilon_{ik} = 1$ для $(k, i) = (3, 1), (1, 2), (2, 3)$. Так как параметр $\gamma$ имеет смысл угла, определяемого только кинематическими характеристиками трехчастичной системы, то его принято называть кинематическим углом, а соотношение (3) — кинематическим преобразованием пар векторов Якоби и сопоставленных им шестимерных векторов.

Опишем область допустимых и множество особых значений кинематических углов. Согласно определению (4) три кинематических угла с индексами из разных триад линейно зависимы:

$$\gamma_{31} + \gamma_{12} + \gamma_{23} = \pi , \quad \gamma_{13} + \gamma_{21} + \gamma_{32} = -\pi , \tag{5}$$

а при любых ненулевых и конечных значениях масс частиц значение любого из всех шести кинематических углов принадлежит интервалу $(-\pi/2, \pi/2)$. Точки $0$, $\pm\pi/4$ и $\pm\pi/2$ являются предельными в следующем смысле. Для трехчастичных систем из одной легкой и двух тяжелых частиц, сравнимых по массам, значения кинематических углов близки к $0$ и $\pm\pi/2$. Если же система состоит из одной тяжелой частицы и двух легких частиц с равными массами, то значения кинематических углов близки к $\pm\pi/4$ и $\pm\pi/2$.

Например, согласно равенствам (4) и (5),

$$\gamma_{12} \to 0;\ \gamma_{31}, \gamma_{23} \to \pi/2, \quad \text{если} \quad m_3/m_1 \to 0\, ,\ m_1 = O(m_2)\, ,$$

$$\gamma_{12} \to \pi/2;\ \gamma_{31}, \gamma_{23} \to \pi/4, \quad \text{если} \quad m_3/m_1 \to \infty\, ,\ m_1 = m_2\, .$$

В вышеуказанных пределах $(\gamma = \gamma_{12} \to 0, \pi/2)$ соотношение (3) принимает соответствующий асимптотический вид:

$$\mathbf{x}' = -\mathbf{x} + \mathbf{y}\, O(\gamma)\,,\; \mathbf{y}' = -\mathbf{y} + \mathbf{x}\, O(\gamma)\;, \quad \gamma \to 0\,; \tag{6}$$

$$\mathbf{x}' = -\mathbf{y} + \mathbf{x}\, O(\gamma')\,,\; \mathbf{y}' = \mathbf{x} + \mathbf{y}\, O(\gamma')\,, \quad \gamma' \equiv (\pi/2 - \gamma) \to 0\,. \tag{7}$$

При всех $\gamma$ линейные комбинации (3) $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{y}'$ неколлинеарных векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ принадлежат одной и той же плоскости $\mathcal{P}$, проходящей через три частицы. При любом $\gamma$ кинематическое преобразование (3) сохраняет и нормаль $\mathbf{N}$,

$$\mathbf{N} \equiv \mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{x}' \times \mathbf{y}', \tag{8}$$

к этой плоскости, и длину $(r = r')$ шестимерного вектора $\mathbf{r}$. По этой и многим другим причинам удобно использовать гиперсферические координаты $(r, \Omega)$ и $(r, \Omega')$ векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$.

Опишем кинематическое преобразование гиперсферических углов в общем и двух частных случаях. Использовав формулы (3) и определение этих углов, можно выразить трехмерные проекции $x'_\mu$ и $y'_\mu$ векторов $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{y}'$ на орты $\hat{\mathbf{e}}_\mu$ системы $S_3$ и векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ через длину $r$ вектора $\mathbf{r}$ и его гиперсферические углы $\Omega$, а затем найти в явном виде зависимость $\Omega' = \Omega'(\Omega; \gamma)$ углов $\Omega'$ от углов $\Omega$ и параметра $\gamma$. Формулы, описывающие такую зависимость, будут иметь компактный вид, если использовать комбинацию $u$ тригонометрических функций углов $\hat{x}$ и $\hat{y}$, равную косинусу угла $\theta$ между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$:

$$u \equiv \cos\theta \equiv u_{xy} = \cos\theta_x \cos\theta_y + \sin\theta_x \sin\theta_y\, \cos(\varphi_x - \varphi_y)\,. \tag{9}$$

Например, угол $\varphi'$ и инвариантные по отношению к трехмерным поворотам системы координат $S_3$ косинусы $u_{ab}$ углов $\theta_{ab}$ между различными векторами $\mathbf{a}, \mathbf{b} = \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}', \mathbf{y}'$ и угол $\varphi'$ представятся как функции $\varphi' = \varphi'(\varphi, u; \gamma)$ и $u_{ab} = u_{ab}(\varphi, u; \gamma)$ двух аргументов $\varphi$ и $u$ и параметра $\gamma$:

$$\cos 2\varphi' = \cos 2(\gamma - \varphi) + (u - 1)\, \sin 2\gamma\, \sin 2\varphi\,, \tag{10}$$

$$\begin{array}{rcl}
u_{xx'} & \equiv & \cos\theta_{xx'} = -\sec\varphi'\,(\cos\gamma\, \cos\varphi + u\, \sin\gamma\, \sin\varphi)\,, \\
u_{xy'} & \equiv & \cos\theta_{xy'} = \mathrm{cosec}\varphi'\,(\sin\gamma\, \cos\varphi - u\, \cos\gamma\, \sin\varphi)\,, \\
u_{yx'} & \equiv & \cos\theta_{yx'} = -\sec\varphi'(\sin\gamma\, \sin\varphi + u\, \cos\gamma\, \cos\varphi)\,, \\
u_{yy'} & \equiv & \cos\theta_{yy'} = -\mathrm{cosec}\varphi'(\cos\gamma\, \sin\varphi - u\, \sin\gamma\, \cos\varphi)\,, \\
u_{x'y'} & \equiv & \cos\theta_{x'y'} = -\mathrm{cosec}2\varphi'(\sin 2\gamma \cos 2\varphi - u\, \cos 2\gamma \sin 2\varphi)\,.
\end{array} \tag{11}$$

Функциональная зависимость $\Omega' = \Omega'(\Omega; \gamma)$ существенно упрощается при некоторых частных значениях гиперуглов $\Omega$, отвечающих особым конфигурациям трехчастичной системы. Опишем две такие конфигурации.

Пусть плоскость $\mathcal{P}$ векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ совпадает с плоскостью $\mathcal{P}_{13}$ ортов $\hat{\mathbf{e}}_1$ и $\hat{\mathbf{e}}_3$, а вектор $\mathbf{x}$ коллинеарен орту $\hat{\mathbf{e}}_3$. Другими словами, пусть нормаль (8) и вектор $\mathbf{x}$ ориентированы так, что $\mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 = N$ и $\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 = x$. Тогда в силу равенств (3), (9) и (11)

$$\begin{aligned} &\theta_x\,, \varphi_x = 0\,; \quad \theta_y = \theta\,, \varphi_y = 0\,; && (12)\\ &\theta_{x'} = \arccos u_{xx'}\,,\ \varphi_{x'} = \pi(\mathrm{sign}\gamma + 1)/2\,;\ \theta_{y'} = \arccos u_{xy'}\,,\ \varphi_{y'} = \pi\,. \end{aligned}$$

Наборы $\Omega$ и $\Omega'$ таких гиперсферических углов, описывающие кинематическое преобразование в плоскости $\mathcal{P}_{13}$, пометим индексом $p$, т.е. введем обозначения $\Omega_p \equiv (0,0,\theta,0,\varphi)$ и $\Omega'_p(\theta_{xx'},\varphi_{x'},\theta_{xy'},0,\varphi')$.

Пусть теперь все три частицы лежат на одной и той же прямой $\mathcal{L}_3$, что и орт $\hat{\mathbf{e}}_3$, причем вектор $\mathbf{y}$ коллинеарен этому орту, т.е. $\mathbf{y} \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 = y$. Тогда по определению (9) имеем $u = 1$. При $u = 1$ и любых $\varphi$ и $\gamma$ функции (11) достигают своих экстремальных значений, причем

$$u_{xx'} = -\mathrm{sign}(\pi/2 + \gamma - \varphi)\,, \quad u_{xy'} = \mathrm{sign}(\gamma - \varphi)\,, \tag{13}$$

а из равенства (10) следуют алгебраические соотношения:

$$\begin{aligned} \varphi' &= |\varphi - \gamma|\,, \quad \gamma \geq 0; && (14)\\ \varphi' &= \pi/2 + (\varphi - \gamma - \pi/2)\,\mathrm{sign}(\pi/2 - \varphi + \gamma)\,, \quad \gamma < 0\,. \end{aligned}$$

Используя равенства (12) и (13), находим, что рассматриваемой конфигурации отвечают экстремальные значения сферических углов:

$$\begin{aligned} &\theta_x, \varphi_x, \quad \theta_y, \varphi_y = 0; && (15)\\ &\theta_{x'} = \pi(1 + \mathrm{sign}(\pi/2 + \gamma - \varphi))/2\,,\ \varphi_{x'} = \pi(\mathrm{sign}\gamma + 1)/2\,;\\ &\theta_{y'} = \pi(1 - \mathrm{sign}(\gamma - \varphi))/2\,,\ \varphi_{y'} = 0\,. \end{aligned}$$

Наборы $\Omega$ и $\Omega'$ углов (14) и (15), описывающие кинематическое преобразование на прямой $\mathcal{L}_3$, совпадающей с ортом $\hat{\mathbf{e}}_3$, пометим индексом $l$, т.е. положим по определению $\Omega_l \equiv (0,0,0,0,\varphi)$ и $\Omega'_l(0,\theta_{xy'},\theta_{xx'},\varphi')$, где согласно равенствам (13) и (15) углы $\theta_{xy'}$ и $\theta_{xx'}$ совпадают с углами $\theta_{y'}$ и $\theta_{x'}$ и равны 0 или $\pi$.

Дадим геометрическую интерпретацию кинематического преобразования на прямой $\mathcal{L}_3$. Для этого введем вспомогательное двумерное пространство $\mathcal{R}^2_q$ векторов $\mathbf{q}$ с координатами $q_1 \equiv r\cos\varphi$ и $q_2 \equiv r\sin\varphi$ в некоторой фиксированной декартовой системе координат $S_2$. Как следует из формул (3) и (14), кинематическое преобразование (3) на прямой $\mathcal{L}_3$ состоит из отражения вектора $\mathbf{q}$ и поворота получившегося вектора $-\mathbf{q}$ на угол $u\,\gamma$ в $\mathcal{R}^2_q$.

Покажем, что для произвольного кинематического преобразования, за исключением вышеупомянутого частного случая, в $\mathcal{R}^3$ всегда существует система координат $S_{p3}$, в которой это преобразование происходит в координатной плоскости $\mathcal{P}_{p13}$ ее ортов $\hat{\mathbf{e}}_{p1}$ и $\hat{\mathbf{e}}_{p3}$.

Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ произвольные, но неколлинеарные векторы. В $\mathcal{R}^3$ введем систему координат $S_{p3}$ с ортами $\hat{\mathbf{e}}_{p2}$ и $\hat{\mathbf{e}}_{p3}$, коллинеарными нормали (8) и вектору $\mathbf{x}$. Система $S_{p3}$ получается поворотом системы $S_3$. В $S_3$ этот поворот определяется совокупностью $\omega$ трех углов Эйлера [24]:

$$\omega \equiv (\varphi_x, \theta_x, \tilde{\varphi}_y)\,, \quad \tilde{\varphi}_y \equiv \varphi_y - \varphi_x\,, \tag{16}$$

и описывается трехмерной матрицей $\mathbf{R}(\omega)$: компоненты любого вектора $\mathbf{q}$ в $S_{3p}$ и $S_3$ связаны матричными равенствами [24]:

$$\begin{aligned} (q_{1p}, q_{2p}, q_{3p})^T &= \mathbf{R}^{-1}(\omega)\,(q_1, q_2, q_3)^T\,, \\ \mathbf{R}(\omega) &= \mathbf{R}(\varphi_x, \hat{\mathbf{e}}_3)\,\mathbf{R}(\theta_x, \hat{\mathbf{e}}_2)\,\mathbf{R}(\tilde{\varphi}_y, \hat{\mathbf{e}}_3)\,, \end{aligned} \tag{17}$$

в которых $\mathbf{R}(\alpha, \hat{\mathbf{e}}_i)$ — матрица поворота на угол $\alpha$ вокруг оси $\hat{\mathbf{e}}_i$:

$$\mathbf{R}(\alpha, \hat{\mathbf{e}}_2) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}, \ \mathbf{R}(\alpha, \hat{\mathbf{e}}_3) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

В системе $S_{p3}$ пары $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$ векторов Якоби связаны кинематическим преобразованием в плоскости $\mathcal{P}_{p13}$ векторов $\hat{\mathbf{e}}_{p1}$ и $\hat{\mathbf{e}}_{p3}$, а гиперуглы векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, отвечающие этим парам, равны $\Omega_p$ и $\Omega'_p$.

Теперь опишем кинематическое преобразование (3) на операторном языке. Введем операторы $P_x, P_y$ и $T_{xy}$ перестановки и отражения компонент $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ вектора $\mathbf{r}$ и операторы $P_r$ и $\mathbf{R}_{r\nu}(\gamma)$ отражения и поворота этого вектора в гиперплоскостях ортов $\hat{\mathbf{n}}_\nu$ и $\hat{\mathbf{n}}_{\nu+3}$ на угол $\gamma$ вокруг нормалей $\mathbf{N}_\nu \equiv \hat{\mathbf{n}}_\nu \times \hat{\mathbf{n}}_{\nu+3}$:

$$\begin{gathered} P_x|\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \equiv |-\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle,\ P_y|\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \equiv |\mathbf{x}, -\mathbf{y}\rangle,\ P_r \equiv P_x\, P_y\,; \\ T_{xy}|\mathbf{r}\rangle = T_{xy}|\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \equiv |\mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle\,; \\ \mathbf{R}_{r\nu}(\gamma) \begin{pmatrix} r_\mu \\ r_{3+\mu} \end{pmatrix} \equiv \left( (1 - \delta_{\mu\nu}) + \delta_{\mu\nu} \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & +\cos\gamma \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} r_\mu \\ r_{3+\mu} \end{pmatrix}, \\ \mu, \nu = 1, 2, 3. \end{gathered} \tag{19}$$

Преобразование (3) вектора $\mathbf{r}$ в вектор $\mathbf{r}'$ опишем оператором

$$K_r(\gamma) : |\mathbf{r}\rangle \to |\mathbf{r}'\rangle \equiv K_r(\gamma)|\mathbf{r}\rangle\,. \tag{20}$$

Выразим его через операторы (19) в пределах (6) и (7) и в общем случае:

$$K_r(0) = P_r\,, \quad K_r(\pi/2) = P_x T_{xy} = T_{xy} P_y\,, \tag{21}$$

$$K_r(\gamma) = P_r\, R_r(-\gamma) = R_r(-\gamma)\, P_r\,, \quad R_r(\gamma) \equiv \mathbf{R}_{r1}(\gamma)\,\mathbf{R}_{r2}(\gamma)\,\mathbf{R}_{r3}(\gamma)\,. \tag{22}$$

Используя равенства (3), (19), (20) и (22), выводим формулу сложения:

$$K_r(\gamma_1+\gamma_2) = P_r\, K_r(\gamma_1)\, K_r(\gamma_2)\,, \quad \forall \gamma_1, \gamma_2, \tag{23}$$

и серию тождеств по углу $\gamma$:

$$\begin{aligned} K_r(-\gamma) &= P_x K_r(\gamma) P_x = P_y K_r(\gamma) P_y = T_{xy} K_r(\gamma) T_{xy}\,, \\ K_r(\pi/2-\gamma) &= T_{xy} K_r(\gamma) P_x = P_y K_r(\gamma) T_{xy}\,. \end{aligned} \tag{24}$$

Поясним геометрический смысл кинематического преобразования в доступных для наглядного представления трехмерных терминах. Как видно из формул (21), при частных значениях 0 и $\pi/2$ угла $\gamma$ кинематическое преобразование (3) сводится к отражению и перестановке трехмерных компонент вектора $\mathbf{r}$. Равенства (22) означают, что в общем случае кинематическое преобразование в $\mathcal{R}^6$ состоит из отражения вектора $\mathbf{r}$ и последующего поворота получившегося вектора в гиперплоскости $\mathcal{P}$. Отражение и поворот — коммутативные операции. Поворот описывается оператором $R_r(-\gamma)$ и представляется произвольной последовательностью трех коммутирующих поворотов вокруг нормалей $\mathbf{N}_\nu$, $\nu = 1, 2, 3$, на одинаковые углы, равные $-\gamma$.

Следует отметить, что определение векторов Якоби (1) не совсем удобно. Однако именно такое определение используется в литературе наиболее часто и принято в книгах [21,25]. Это единственная причина — не использовать альтернативное определение векторов Якоби [26], при котором кинематическое преобразование — поворот в гиперплоскости $\mathcal{P}$ на угол $\gamma$.

**2.2. Кинематическое преобразование функций.** Преобразование функций, зависящих от нескольких или всех шестимерных компонент вектора $\mathbf{r}$, при кинематическом преобразовании их аргументов назовем кинематическим. Далее рассматривается только кинематическое преобразование **скалярных** функций, заданных, вообще говоря, в $\mathcal{R}^6$. Множество всех таких функций обозначим символом $\mathcal{A}$. При необходимости дополнительными ограничениями на гладкость функций будем выделять из этого множества подмножества и указывать, на каком подмножестве справедливо обсуждаемое соотношение.

*2.2.1. Операторы перестановок, отражения, поворотов и кинематического преобразования.* Пусть $I$ — оператор тождественного преобразования: $I\Psi \equiv \Psi$. Введем операторы $P_1, P_2, P$, $T$ и $K(\gamma)$, описывающие преобразование произвольной функции $\Psi \in \mathcal{A}$ при соответствующей операции (19) и (20) над ее аргументами:

$$\begin{aligned} P_1\,\Psi(\mathbf{r}) &\equiv \Psi(P_x\mathbf{r}) = \Psi(-\mathbf{x},\mathbf{y})\,,\ P_2\,\Psi(\mathbf{r}) \equiv \Psi(P_y\mathbf{r}) = \Psi(\mathbf{x},-\mathbf{y})\,, \\ P\,\Psi(\mathbf{r}) &\equiv P_1P_2\Psi(\mathbf{r}) \equiv \Psi(P_r\mathbf{r}) = \Psi(-\mathbf{r})\,, \\ T\,\Psi(\mathbf{r}) &\equiv \Psi(T_{xy}\mathbf{r}) = \Psi(\mathbf{y},\mathbf{x})\,, \end{aligned} \tag{25}$$

$$\Psi(\mathbf{r}') \equiv K(\gamma)\Psi(\mathbf{r}) \equiv \Psi(K_r(\gamma)\mathbf{r})\,. \tag{26}$$

Известным в теории углового момента [24] способом построим оператор кинематического преобразования функций $K(\gamma)$ в дифференциальной форме. Сначала, используя равенства (21) и (26), выражаем этот оператор при частных значениях $\gamma = 0, \pi/2$ через операторы отражения и перестановки (25):

$$K(0) = P\,, \quad K(\pi/2) = P_1\,T = T\,P_2\,. \tag{27}$$

Далее заметим, что из равенств (23) и (26) следует операторное тождество

$$K(\gamma_1 + \gamma_2) \equiv P\,K(\gamma_1)\,K(\gamma_2)\,, \quad \forall \gamma_1, \gamma_2\,. \tag{28}$$

Теперь рассмотрим случай $\gamma \to 0$. Использовав представление $\mathbf{r} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, разложим функцию $\Psi(\mathbf{r}')$ в ряд Тейлора в точке $-\mathbf{r}$. Учтя соотношения (6), получим формулу преобразования функции $\Psi(\mathbf{r})$ при инфинитезимальном (бесконечно малом) кинематическом изменении ее аргументов:

$$K(\gamma)\Psi(\mathbf{r}) = P\,(\,I - i\gamma\,J\,)\Psi(\mathbf{r}) + O(\gamma^2)\,, \quad \gamma \to 0\,. \tag{29}$$

Здесь символом $J$ обозначен не зависящий от вида функции оператор инфинитезимального поворота в гиперплоскости $\mathcal{P}$ пространства $\mathcal{R}^6$:

$$J \equiv -i\,(\,\mathbf{x}\cdot\nabla_y - \mathbf{y}\cdot\nabla_x\,) = -i\sum_{\mu=1}^{3}(x_\mu\partial_{y_\mu} - y_\mu\partial_{x_\mu})\,. \tag{30}$$

Выразим оператор $K(\gamma)$ через операторы $P$ и $J$. Для этого положим в тождестве (28) $\gamma = \gamma_1$ и $\delta\gamma = \gamma_2 \to 0$. Учтя равенство (29), получим асимптотическое соотношение:

$$K(\gamma + \delta\gamma) = P\,K(\gamma)\,K(\delta\gamma) = K(\gamma)\,(I - i\gamma J) + O(\delta\gamma^2)\,,\ \delta\gamma \to 0\,. \tag{31}$$

Оно порождает операторное дифференциальное уравнение:

$$dK(\gamma)/d\gamma = -iJ\,K(\gamma)\,. \tag{32}$$

Дополним его граничным условием (27) в точке $\gamma = 0$. Единственное решение получившейся краевой задачи представим рядом

$$K(\gamma) = P\,\exp(-i\gamma J) \equiv P\sum_{n=0}^{\infty}(-i\gamma)^n\,J^n/\Gamma(n+1)\,. \tag{33}$$

Исследование этого ряда начнем с анализа свойств оператора $J$, не зависящих от вида функции $\Psi \in \mathcal{A}$. К таким свойствам относятся прежде всего коммутационные соотношения. Использовав определения (25) и (30), убедимся в том, что оператор $J$ антикоммутирует с оператором $T$ и коммутирует с оператором $P$. Теперь перепишем выражение (30) в координатах $(r_1, ..., r_6)$ в виде суммы

$$J = \sum_{\mu=1}^{3} L_{\mu,\mu+3}\,, \quad L_{\mu\nu} \equiv -i\,\left(r_\mu \partial_{r_\nu} - r_\nu \partial_{r_\mu}\right), \tag{34}$$

трех из пятнадцати $(\mu > \nu; \mu, \nu = 1, 2, ..., 6)$ компонент $L_{\mu\nu}$ оператора гипермомента $L$, подчиненных известным коммутационным условиям [26]:

$$[L_{k\ell},\, L_{mn}]_- = i\,(\,\delta_{nk} L_{m\ell} + \delta_{m\ell} L_{nk} - \delta_{mk} L_{n\ell} - \delta_{n\ell} L_{mk}\,)\,. \tag{35}$$

Выразим через операторы $L_{\mu\nu}$ операторы угловых моментов $\mathbf{l}_x$, $\mathbf{l}_y$, сопряженные векторам $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, и оператор полного углового момента $\mathbf{l}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{l}_x &\equiv -i\,\mathbf{x} \times \nabla_x = \sum_{i=1}^{3} l_{xi} \hat{\mathbf{e}}_i = L_{23}\hat{\mathbf{e}}_1 + L_{31}\hat{\mathbf{e}}_2 + L_{12}\hat{\mathbf{e}}_3\,, \\
\mathbf{l}_y &\equiv -i\,\mathbf{y} \times \nabla_y = \sum_{i=1}^{3} l_{yi} \hat{\mathbf{e}}_i = L_{56}\hat{\mathbf{e}}_1 + L_{64}\hat{\mathbf{e}}_2 + L_{45}\hat{\mathbf{e}}_3\,, \\
\mathbf{l} &\equiv \mathbf{l}_x + \mathbf{l}_y = \sum_{i=1}^{3} l_i \hat{\mathbf{e}}_i\,, \quad l_i = l_{xi} + l_{yi}\,.
\end{aligned} \tag{36}$$

Напомним, что

$$\mathbf{L}^2 = -\sum_{\mu>\nu} L_{\mu\nu}^2\,, \tag{37}$$

а в гиперсферических координатах

$$\mathbf{l}_q^2 = -\mathrm{cosec}^2\,\theta_q\,\left(\sin\theta_q \partial_{\theta_q}(\sin\theta_q \partial_{\theta_q}) + \partial^2_{\varphi_q}\right), \quad l_{q3} = i\,\partial_{\varphi_q}\,,\ q = x, y; \tag{38}$$

$$\mathbf{L}^2 = -\partial_\varphi^2 - 4\,\mathrm{ctg}2\varphi\,\partial_\varphi + \mathbf{l}_x^2/\cos^2\varphi + \mathbf{l}_y^2/\sin^2\varphi\,. \tag{39}$$

Использовав равенства (34)–(39), можно показать, что оператор $J$ не коммутирует с операторами $\mathbf{l}_q^2, l_{q3}$, $q = x, y$, но коммутирует с операторами $\mathbf{l}^2$, $l_3$ и $\mathbf{L}^2$. Просуммируем все вышеупомянутые коммутационные соотношения:

$$[J, T]_+ = [J, Q]_- = 0\,,\ Q = P, \mathbf{L}^2, \mathbf{l}^2, l_3\,;\ [J, q]_- \neq 0,\ q = \mathbf{l}_x^2, \mathbf{l}_y^2, l_{x3}, l_{y3}. \tag{40}$$

Построим оператор, унитарноподобный оператору $J$ по отношению к трехмерному повороту (16), (17) системы координат $S_3$ к системе $S_{p3}$. В определении (30) оператора $J$ перейдем к гиперсферическим координатам $(r, \Omega)$. Возникшие комбинации тригонометрических функций выразим через производные от функции $u = u(\hat{x}, \hat{y})$, заданной формулой (9). Тогда получим равенство

$$\begin{aligned} J = \; & - \; i\left(\mathrm{ctg}\varphi \left( \frac{\partial u}{\partial \theta_y}\, \partial_{\theta_y} + \mathrm{cosec}^2\theta_y\, \frac{\partial u}{\partial \varphi_y}\, \partial_{\varphi_y} \right)\right) + \\ & + \; i\left(\mathrm{tg}\varphi \left( \frac{\partial u}{\partial \theta_x}\, \partial_{\theta_x} + \mathrm{cosec}^2\theta_x\, \frac{\partial u}{\partial \varphi_x}\, \partial_{\varphi_x} \right)\right) - iu\, \partial_\varphi \,. \end{aligned} \qquad (41)$$

Используя его и определение (9) функции $u$, доказываем эквивалентность,

$$J\, F(r, u, \varphi) = J_p\, F(r, u, \varphi)\,, \quad J_p \equiv i(2\,\mathrm{ctg}\,2\varphi\,(1 - u^2)\partial_u + u\partial_\varphi)\,, \qquad (42)$$

операторов $J$ и $J_p$ на множестве функций $\Psi(r, \Omega) = F(r, u, \varphi)$, зависящих от сферических углов векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ лишь посредством их комбинации $u$.

Заметим, что любая функция $\Psi(r, \Omega)$, заданная в системе координат $S_3$, в частном случае $\Omega = \Omega_p$ становится функцией $\Psi(r, \Omega_p)$ типа $F(r, u, \varphi)$.

Как известно [23], при переходе (16)–(18) от системы координат $S_3$ к системе $S_{p3}$ функции класса $\mathcal{A}$ преобразуются по закону

$$\Psi(r, \Omega) = D^{-1}(\omega)\Psi(r, \Omega_p) = D^{-1}(\omega)F(r, u, \varphi)\,, \qquad (43)$$

где оператор Вигнера выражается через проекции $l_2 = L_{13} + L_{46}$ и $l_3 = L_{12} + L_{45}$ оператора полного углового момента (36) на орты $\hat{\mathbf{e}}_2$ и $\hat{\mathbf{e}}_3$ формулой

$$D(\omega) \equiv \exp(-i\varphi_x l_3)\, \exp(-i\theta_x l_2)\, \exp(-i\tilde{\varphi}_y l_3)\,. \qquad (44)$$

Использовав формулы (42) и (43), запишем цепочку равенств

$$J\, \Psi(r, \Omega_p) = J\,(D(\omega)\, \Psi(r, \Omega)) = J_p\, \Psi(r, \Omega_p) = J_p\, D(\omega)\, \Psi(r, \Omega) \qquad (45)$$

и тем самым докажем унитарное подобие операторов $J$ и $J_p$:

$$J = D^{-1}(\omega)\, J_p\, D(\omega)\,. \qquad (46)$$

Перечислим свойства оператора $K(\gamma)$, не зависящие от вида функции $\Psi$. Из представлений (30) и (33) следуют соотношения унитарности

$$K(\gamma)\, K(-\gamma) = I\,, \qquad K^{+}(\gamma) = K^{-1}(\gamma) = K(-\gamma) \qquad (47)$$

и дифференциальные тождества

$$\partial_\gamma^n K(\gamma) = (-i\, J)^n\, K(\gamma)\,,\; n = 0, 1, ... \qquad (48)$$

В силу равенств (33) и (40) верны коммутационные соотношения:

$$[K(\gamma), Q]_- = 0\,,\; Q = P, \mathbf{L}^2, \mathbf{l}^2, l_3\,; \quad [K(\gamma), q]_- \neq 0\,,\; q = \mathbf{l}_x^2, \mathbf{l}_y^2, l_{x3}, l_{y3} \qquad (49)$$

и унитарное подобие операторов $K$ и $K_p$ относительно трехмерного поворота (43), (44):

$$K(\gamma) = D(\omega)\, K_p(\gamma)\, D^{-1}(\omega)\,,\ K_p(\gamma) \equiv P \exp\left( -i\gamma\, J_p \right)\,. \tag{50}$$

Равенства (24)–(26) порождают следующие тождества по углу $\gamma$:

$$\begin{aligned} K(-\gamma) &= P_1 K(\gamma) P_1 = P_2 K(\gamma) P_2 = T K(\gamma) T\,, \\ K(\pi/2-\gamma) &= T K(\gamma) P_1 = P_2 K(\gamma) T\,. \end{aligned} \tag{51}$$

Поясним, как для данной трехчастичной системы операторы любых перестановок частиц можно выразить через операторы $P_1$ и $K(\gamma)$. В принятых обозначениях (2) оператор отражения $P_1$ эквивалентен оператору $P_{jk}$ перестановки частиц с номерами $j$ и $k$. Согласно определению (1) при циклической перестановке частиц с номерами $i, j, k$ векторы $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i$ переходят в векторы $\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k$. Поэтому из равенств (3) и (26) следует, что оператор $K(\gamma)$ эквивалентен оператору циклической перестановки частиц $P_{ijk}$ только при определенном значении параметра $\gamma$, а именно при $\gamma = \gamma_{ki}$:

$$K(\gamma_{ki}) = P_{ijk} \equiv P_{ki} P_{jk}\,. \tag{52}$$

Поэтому оператор $K(\gamma)$ описывает более общее преобразование, чем циклическая перестановка частиц. Учтя связи (52), представим операторы $S^-$ и $S^+$ антисимметризации и симметризации по отношению к любым перестановкам частиц в инвариантном по отношению к выбору индекса $i$ виде:

$$\begin{aligned} S^{\pm} &= \left( I \pm (P_{ij} + P_{ik} + P_{jk}) + P_{ik} P_{jk} + P_{ik} P_{ij} \right)/6\,, \\ S^{\pm} &= S_i\, S^{\pm}_{jk}\,, \quad S_i \equiv (I + \sum_{k \neq i} K(\gamma_{ki}))/3\,, \quad S^{\pm}_{jk} \equiv (1 \pm P_{jk})/2\,. \end{aligned} \tag{53}$$

Отметим, что образ $S^{\pm}_{jk}\Psi(\mathbf{r}_i)$ любой функции $\Psi(\mathbf{r}_i)$ — (анти)симметричная функция относительно перестановки частиц с номерами $j$ и $k$, а оператор $S_i$ отображает функцию, уже обладающую такой симметрией, в функцию (анти)симметричную относительно любых перестановок.

*2.2.2. Основные свойства угловых базисов.* Напомним некоторые известные свойства сферических функций, бисферических гармоник [23,24] и трехчастичных гипергармоник [1,25,26].

Трехчастичные гипергармоники запишем в виде произведений

$$\begin{aligned} |L\ell mab\rangle &\equiv |\ell mab\rangle\, |Lab\rangle\,, \\ \langle \Omega | L\ell mab\rangle &\equiv Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega) \equiv W_{Lab}(\varphi)\, \mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x}, \hat{y}) \end{aligned} \tag{54}$$

функций $|Lab\rangle$

$$\langle \varphi | Lab\rangle \equiv W_{Lab}(\varphi) \equiv N_{Lab}\,(\sin\varphi)^a\,(\cos\varphi)^b\, P_n^{(a+1/2\,,b+1/2)}(\cos 2\varphi) \tag{55}$$

с нормировочными множителями

$$N_{Lab} \equiv \left( \frac{(2L+4)\Gamma(n+1)\,\Gamma(L-n+2)}{\Gamma(n+a+3/2)\,\Gamma(n+b+3/2)} \right)^{1/2} \tag{56}$$

и бисферических гармоник

$$\langle \hat{x}, \hat{y} | \ell m a b \rangle \equiv \mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x}, \hat{y}) \equiv \sum_{\alpha} C^{\ell m}_{a\alpha b\beta}\, Y_{a\alpha}(\hat{y})\, Y_{b\beta}(\hat{x})\,, \tag{57}$$

содержащих коэффициенты Клебша — Гордона $C^{\ell m}_{a\alpha b\beta}$ и сферические функции

$$\langle \hat{q} | c\delta \rangle \equiv Y_{c\delta}(\hat{q}) = (2\pi)^{-1/2}\, \exp(i\delta\varphi_q)\, \Theta_{c\delta}(\cos\theta_q)\,,\ \hat{q} = \hat{x}, \hat{y}\,. \tag{58}$$

Счетные множества функций

$$\begin{aligned}
&Y_{b\beta}(\hat{x})\,,\ b = 0, 1, ...;\ \beta = -b, -b+1, ..., b; \\
&\mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x}, \hat{y}), \quad Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega), \\
&\ell = 0, 1...; -\ell \le m \le \ell; |a-b| \le \ell \le a+b; L = a+b, a+b+2n, n = 0, 1, ...
\end{aligned} \tag{59}$$

образуют полные и ортонормированные базисы, соответственно, на единичной двумерной сфере $\mathcal{S}^2_x$ в $\mathcal{R}^3_x$, четырехмерном торе $\mathcal{T}^4_{xy} \equiv \mathcal{S}^2_x \otimes \mathcal{S}^2_y$ и пятимерной единичной сфере $\mathcal{S}^5_{xy}$ в $\mathcal{R}^6$. Ортонормированность угловых базисов (59) означает, что при любых допустимых значениях индексов выполняются соответствующие интегральные соотношения:

$$\begin{aligned}
\langle b\beta | b'\beta' \rangle &\equiv \int_{\mathcal{S}^2_x} d\hat{x} (Y_{b\beta}(\hat{x}))^* Y_{b'\beta'}(\hat{x}) = \delta_{bb'}\, \delta_{\beta\beta'}\,, \\
\int_{\mathcal{S}^2_x} d\hat{x} &\equiv \int_0^{\pi} d\theta_x \sin\theta_x \int_0^{2\pi} d\varphi_x;
\end{aligned} \tag{60}$$

$$\begin{aligned}
\langle \ell m a b | \ell' m' a' b' \rangle &\equiv \int_{\mathcal{T}^4_{xy}} d\hat{x} d\hat{y} (\mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x}, \hat{y}))^* \mathcal{Y}^{\ell' m'}_{a'b'}(\hat{x}, \hat{y}) = \\
&= \delta_{\ell\ell'}\, \delta_{m,m'}\, \delta_{aa'}\, \delta_{bb'}\,, \\
\int_{\mathcal{T}^4_{xy}} d\hat{x} d\hat{y} &\equiv \int_{\mathcal{S}^2_x} d\hat{x} \int_{\mathcal{S}^2_y} d\hat{y};
\end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned}
\langle L\ell m a b | L'\ell' m' a' b' \rangle &\equiv \int_{\mathcal{S}^5} d\Omega (Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega))^* Y^{\ell' m'}_{L'a'b'}(\Omega) = \\
&= \delta_{L'L}\, \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}\, \delta_{aa'}\, \delta_{bb'}, \\
\int_{\mathcal{S}^5_{xy}} d\Omega &\equiv \int_0^{\pi/2} d\varphi\, \rho^2(\varphi) \int_{\mathcal{T}^4_{xy}} d\hat{x}\, d\hat{y}\,,\ \rho(\varphi) \equiv \sin\varphi \cos\varphi.
\end{aligned} \tag{62}$$

Полнота базисов (59) означает, что произвольная функция $\Psi(\mathbf{r})$, квадратично-интегрируемая ($\Psi \in \mathcal{L}^2(g)$) на множестве $g = \mathcal{S}^2_x,\ \mathcal{T}^4_{xy},\ \mathcal{S}^5_{xy}$, представима соответствующим рядом:

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}) &= \sum_{b\beta} \Psi_{b\beta}(r,\hat{y},\varphi)\, Y_{b\beta}(\hat{x})\,, \\ \Psi_{b\beta}(r,\hat{y},\varphi) &\equiv \langle b\beta|\Psi\rangle \equiv \int_{\mathcal{S}^2_x} d\hat{x}(Y_{b\beta}(\hat{x}))^* \Psi(\mathbf{r})\,; \end{aligned} \tag{63}$$

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}) &= \sum_{\ell m}\sum_{ab} \Psi^{\ell m}_{ab}(r,\varphi)\, \mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x},\hat{y})\,, \\ \Psi^{\ell m}_{ab}(r,\varphi) &\equiv \langle \ell mab|\Psi\rangle \equiv \int_{\mathcal{T}^4_{xy}} d\hat{x}d\hat{y}\,(\mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x},\hat{y}))^*\, \Psi(\mathbf{r})\,; \end{aligned} \tag{64}$$

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}) &= \sum_{L}\sum_{\ell m}\sum_{ab} \Psi^{\ell m}_{Lab}(r)\, Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega)\,, \\ \Psi^{\ell m}_{Lab}(r) &\equiv \langle L\ell mab|\Psi\rangle \equiv \int_{\mathcal{S}^5_{xy}} d\Omega \left( Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega) \right)^* \Psi(\mathbf{r})\,. \end{aligned} \tag{65}$$

В рядах (63)–(65) индексы пробегают только указанные в равенствах (59) значения. Проекции $\Psi^{\ell m}_{ab}$ и $\Psi^{\ell m}_{Lab}$ функции $\Psi$ на бисферическую гармонику $|\ell mab\rangle$ и гипергармонику $|L\ell mab\rangle$ часто называют, соответственно, парциальной компонентой [17] этой функции и гиперрадиальной функцией [25] либо коэффициентами разложений функции $\Psi$ по бисферическому или гиперсферическому базисам. Более адекватными и менее громоздкими представляются используемые далее термины бисферическая и гиперсферическая компоненты. Бисферические компоненты $\Psi^{\ell m}_{ab}$ — функции двух переменных $x, y$ или же $r, \varphi$, принадлежащих области

$$\mathcal{R}^2_+ \equiv \{x, y:\ 0 \le x, y \le \infty\} = \{r, \varphi:\ 0 \le r \le \infty,\ 0 \le \varphi \le \pi/2\}\,.$$

В силу соотношений $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ и $\mathrm{tg}\ \varphi = y/x$ в такой области $r$ и $\varphi$ являются полярными координатами. Единственный аргумент $r$ гиперсферических компонент $\Psi^{\ell m}_{Lab}(r)$ всегда принадлежит неотрицательной числовой полуоси:

$$\mathcal{R}^+_1 \equiv \{r:\ 0 \le r \le \infty\}\,.$$

Следующие замечания особо важны для понимания, в каком смысле функции (55) являются базисными. Функции $|Lab\rangle$ и $|L'ab\rangle$ с одинаковыми индексами $a$ и $b$ ортонормированы по аргументу $\varphi$ на отрезке $[0, \pi/2]$:

$$\langle Lab|L'ab\rangle \equiv \int_0^{\pi/2} d\varphi\, \rho^2(\varphi) W_{Lab}(\varphi) W_{L'ab}(\varphi) = \delta_{LL'}\,, \tag{66}$$

где вес $\rho^2$ задан формулой (62). Так как каждая гипергармоника $|L\ell mab\rangle$ — произведение (54) функций $|Lab\rangle$ и $|\ell mab\rangle$, а базисы гипергармоник и бисферических гармоник полны и ортонормированы, то на отрезке $0 \le \varphi \le \pi/2$ счетное ($L = a+b, a+b+2, \ldots$) множество функций $|Lab\rangle$ является полным и ортонормированным с весом $\rho^2(\varphi)$ базисом для бисферической компоненты $\Psi^{\ell m}_{ab}(r,\varphi)$ рассматриваемой функции $\Psi(\mathbf{r})$. Другими словами, для каждой бисферической компоненты имеет место точное разложение:

$$\Psi^{\ell m}_{ab}(r,\varphi) \quad = \quad \sum_L \Psi^{\ell m}_{Lab}(r)\, W_{Lab}(\varphi)\,, \quad \forall (r,\varphi) \in \mathcal{R}^2_+, \tag{67}$$

$$\Psi^{\ell m}_{Lab}(r,\varphi) \quad \equiv \quad \langle Lab|\Psi^{\ell m}_{ab}\rangle \equiv \int_0^{\pi/2} d\varphi \rho^2(\varphi)\, W_{Lab}(\varphi)\, \Psi^{\ell m}_{ab}(r,\varphi),$$

где индекс $L$ — целое число ($L = 2n + a + b, n = 0, 1, \ldots$) той же четности $\sigma = (-1)^{a+b} = (-1)^L$, что и сумма $a + b$.

Операторы отражений и перестановки (25), как и операторы угловых моментов (36)–(39) и трехмерного поворота (44), преобразуют базисы (55) и (59) по очень простым формулам. Прокомментируем некоторые из них.

Матрица квадрата гипермомента (37), (39) диагональна в бисферическом базисе. Каждый элемент ее диагонали — дифференциальный оператор

$$L^2_{ab}(\varphi) \equiv \langle \ell mab|L^2|\ell mab\rangle = -\partial^2_\varphi - 4\,\mathrm{ctg}\, 2\varphi\, \partial_\varphi + \frac{a(a+1)}{\sin^2\varphi} + \frac{b(b+1)}{\cos^2\varphi}\,, \tag{68}$$

для которого функция $|Lab\rangle$ является собственной:

$$\big(\, L^2_{ab} - L(L+4)\,\big)\, |Lab\rangle = 0\,. \tag{69}$$

Все функции $|Lab\rangle$ инвариантны относительно отражений (25) и поворота (43), (44). При перестановке $x \leftrightarrow y$ угол $\varphi$ переходит в угол $\varphi \to \pi/2 - \varphi$, а функция $\langle\varphi|Lab\rangle$ преобразуется по правилу

$$\langle\varphi|T|Lab\rangle = (-1)^{(L-a-b)/2}\langle\varphi|Lba\rangle\,. \tag{70}$$

Сферические функции (58) аргументов $\hat{x}$ — собственные функции операторов $\mathbf{l}^2_x$, $l_{x3}$ и $P_1$:

$$(\mathbf{l}^2_x - b(b+1))|b\beta\rangle\,,\ (l_{x_3} - \beta)|b\beta\rangle\,,\ (P_1 - (-1)^b)|b\beta\rangle = 0\,. \tag{71}$$

Аналогичными свойствами по отношению к операторам $\mathbf{l}^2_y$, $l_{y3}$ и $P_2$ обладают сферические функции аргументов $\hat{y}$:

$$(\mathbf{l}^2_y - a(a+1))|a\alpha\rangle\,,\ (l_{y3} - \alpha)|a\alpha\rangle\,,\ (P_2 - (-1)^a)|a\alpha\rangle = 0\,. \tag{72}$$

Использовав перечисленные свойства (70)–(72) сомножителей произведений (54) и (57) и известное равенство для коэффициентов Клебша—Гордона

$$C^{c\delta}_{a\alpha b\beta} = (-1)^{c-a-b} C^{c\delta}_{b\beta a\alpha}\,, \tag{73}$$

нетрудно показать, что любая бисферическая гармоника $|\ell mab\rangle$ и соответствующая ей гипергармоника $|L\ell mab\rangle$ являются одновременно собственными функциями операторов $P_1,\ P_2,\ P,\ \mathbf{l}_x^2, \mathbf{l}_y^2, \mathbf{l}^2, l_3$, а действие оператора $T$ на такие гармоники сводится к перестановке индексов $a$ и $b$ и умножению на определенный фазовый множитель. В силу равенств (68) и (69) гипергармоники являются собственными функциями оператора $\mathbf{L}^2$. Просуммируем все упомянутые свойства следующим компактным образом:

$$\begin{aligned}
&(P_1 - (-1)^b)|Q^{\ell m}_{ab}\rangle,\ (P_2 - (-1)^a)|Q^{\ell m}_{ab}\rangle\,, (P - (-1)^{a+b})|Q^{\ell m}_{ab}\rangle = 0\,, \qquad (74)\\
&(\mathbf{l}_x^2 - b(b+1))|Q^{\ell m}_{ab}\rangle\,, \quad (\mathbf{l}_y^2 - a(a+1))|Q^{\ell m}_{ab}\rangle = 0\,,\\
&(\mathbf{l}^2 - \ell(\ell+1))|Q^{\ell m}_{ab}\rangle\,,\ (l_3 - m)|Q^{\ell m}_{ab}\rangle\,,\ |Q^{\ell m}_{ab}\rangle = |\ell mab\rangle\ ,\ |L\ell mab\rangle;\\
&T|\ell mab\rangle = (-1)^{\ell-a-b}|\ell mba\rangle\,,\\
&T|L\ell mab\rangle = (-1)^{(L-2\ell+a+b)/2}|L\ell mba\rangle\,,\ \big(\mathbf{L}^2 - L(L+4)\big)\,|L\ell mab\rangle = 0\,.
\end{aligned}$$

Оператор $D(\omega)$ поворота (43) системы координат $S_3$ к системе $S_{3p}$ связывает функции (54), (57) и (58), записанные в системе $S_3$ в координатах $\Omega$ или $\Omega'$, с линейными комбинациями соответствующих функций, записанных в системе $S_{3p}$ в координатах $\Omega_p$ или $\Omega'_p$, и функций Вигнера $D^{\ell}_{mm_p}(\omega)$. Базисные функции гиперуглов $\Omega$ преобразуются по правилам

$$Y_\delta(\hat{q}) = D^{-1}(\omega)\,Y_{c\delta}(\hat{q}_p) = \sum_{\delta_p} D^{c*}_{\delta\delta_p}(\omega) Y_{c\delta_p}(\hat{q}_p)\,, \quad q = x, y\,, \tag{75}$$

$$\mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x},\hat{y}) = D^{-1}(\omega)\mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x}_p,\hat{y}_p) = \sum_{m_p} D^{\ell *}_{mm_p}(\omega)\mathcal{Y}^{\ell m_p}_{ab}(\hat{x}_p,\hat{y}_p)\,, \tag{76}$$

$$Y^{\ell m}_{ab}(\Omega) = D^{-1}(\omega) Y^{\ell m}_{ab}(\Omega_p) = \sum_{m_p} D^{\ell *}_{mm_p}(\omega) Y^{\ell m_p}_{Lab}(\Omega_p)\,, \tag{77}$$

а правила преобразования этих же базисных функций, но от аргументов $\Omega'$ получаются заменой $\Omega \to \Omega'$ и $\Omega_p \to \Omega'_p$.

Переопределим гипергармоники (54) следующим образом [67]:

$$Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega) = \rho^{-1}(\varphi)\,\mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x},\hat{y})\,\tilde{W}_{Lab}(\varphi)\,, \tag{78}$$

$$\langle\varphi|L\tilde{a}b\rangle = \tilde{W}_{Lab}(\varphi) \equiv \rho(\varphi)\,W_{Lab}(\varphi)\,. \tag{79}$$

Из этих определений и равенств (66)–(69) следуют два факта. Во-первых, счетное ($L = a+b, a+b+2, ...$) множество функций $|L\tilde{a}b\rangle$ является полным и ортонормированным с **единичным** весом базисом для разложения бисферической компоненты $\Psi^{\ell m}_{ab}$ произвольной функции $\Psi$ на отрезке $0 \le \varphi \le \pi/2$:

$$\langle L\tilde{a}b|L'\tilde{a}b\rangle = \int_0^{\pi/2} d\varphi\, \tilde{W}_{Lab}(\varphi)\, \tilde{W}_{L'ab} = \delta_{LL'}\,, \tag{80}$$

$$\begin{aligned} \Psi^{\ell m}_{ab}(r,\varphi) &= \sum_L \Psi^{\ell m}_{Lab}(r)\, \tilde{W}_{Lab}(\varphi)\,, \\ \Psi^{\ell m}_{Lab}(r,\varphi) &\equiv \langle L\tilde{a}b|\Psi^{\ell m}_{ab}\rangle \equiv \int_0^{\pi/2} d\varphi \tilde{W}_{Lab}(\varphi)\Psi^{\ell m}_{ab}(r,\varphi)\,. \end{aligned} \tag{81}$$

Во-вторых, функции $|L\tilde{a}b\rangle$ с разными $L = a+b, a+b+2, ...$, но фиксированными $a$ и $b$, являются собственными для оператора $\tilde{L}^2_{ab}$:

$$(\tilde{L}^2_{ab} - (L+2)^2)|L\tilde{a}b\rangle = 0, \tag{82}$$

$$\tilde{L}^2_{ab} \equiv\ -\partial^2_\varphi + a(a+1)/\sin^2\varphi + b(b+1)/\cos^2\varphi\,. \tag{83}$$

Опишем разложения функций класса $\mathcal{L}^2(\mathcal{S}^5_{xy})$, представленных в виде

$$\Psi^\varepsilon(\mathbf{r}) = (xy)^{-1}\, U^\varepsilon(\mathbf{r}) = 2r^{-2}\mathrm{cosec}\, 2\varphi\, U^\varepsilon(\mathbf{r}) \tag{84}$$

и являющихся собственными для трех операторов $\mathbf{l}^2$, $l_3$ и $P$:

$$(\mathbf{l}^2 - \ell(\ell+1))|\Psi^\varepsilon\rangle, \quad (l_3 - m)|\Psi^\varepsilon\rangle, \quad (P-\sigma)|\Psi^\varepsilon\rangle = 0\,, \quad \varepsilon \equiv (\ell, m, \sigma). \tag{85}$$

Здесь и далее собственные функции определенного набора операторов помечаем мультииндексом $\varepsilon$, компоненты которого — собственные числа этих операторов. Множество таких функций в классе $\mathcal{L}^2(\mathcal{S}^5_{xy})$ обозначаем символом $\mathcal{A}^\varepsilon$.

В силу равенств (74) для функций (84) разложения (64) и (65) по базисам бисферических гармоник (57) и гипергармоник (54) или (78) вырождаются в двух- и трехкратные суммы:

$$\Psi^\varepsilon(\mathbf{r}) = (xy)^{-1} \sum_{ab} U^\ell_{ab}(r,\varphi)\, \mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x},\hat{y})\,, \quad U^\ell_{ab}(r,\varphi) \equiv \langle \ell mab|U^\varepsilon\rangle\,; \tag{86}$$

$$\Psi^\varepsilon(\mathbf{r}) = r^{-2} \sum_{Lab} U^\ell_{Lab}(r,\varphi)\, Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega)\,, \quad U^\ell_{Lab}(r) \equiv \langle L\ell mab|U^\varepsilon\rangle, \tag{87}$$

в которых индексы $a$ и $b$ подчинены условию $(-1)^{a+b} = \sigma$. Для полноты опишем альтернативный вывод представления (87). Учтя равенство

$xy = r^2\rho(\varphi)$, разложим бисферические компоненты $\rho^{-1}U^{\ell}_{ab}$ функции $r^2\Psi^{\varepsilon}$ в ряды по базисам (55) или (79). Тогда получим ряды

$$\begin{aligned} U^{\ell}_{ab}(r,\varphi) &= \rho(\varphi)\sum_L U^{\ell}_{Lab}(r)\,W_{Lab}(\varphi) = \sum_L U^{\ell}_{Lab}(r)\,\tilde{W}_{Lab}(\varphi)\,, \qquad (88)\\ U^{\ell}_{Lab}(r) &\equiv \int_0^{\pi/2} d\varphi\rho(\varphi)\,W_{Lab}(\varphi)U^{\ell}_{ab}(r,\varphi) = \int_0^{\pi/2} d\varphi\,\tilde{W}_{Lab}(\varphi)U^{\ell}_{ab}(r,\varphi)\,. \end{aligned}$$

Используя их, преобразовываем ряд (86) в ряд (87). С помощью определений (39), (68) и (83) выводим тождества

$$\begin{aligned} (\mathbf{L}^2+4)\,(xy)^{-1}\mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x},\hat{y})\,Q(r,\varphi) &\equiv \mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x},\hat{y})\,(L^2_{ab}+4)(xy)^{-1}Q(r,\varphi) \equiv\\ &\equiv (xy)^{-1}\,Y^{\ell m}_{ab}(\Omega)\,\tilde{L}^2_{ab}\,Q(r,\varphi)\,,\ \forall Q(r,\varphi). \qquad (89) \end{aligned}$$

В заключение отметим, что экономные алгоритмы вычисления бисферических функций с $\ell \leq 3$ предложены в работе [111].

*2.2.3. Кинематическое преобразование и теоремы сложения.* Анализ кинематического преобразования угловых базисов начнем с самых простых примеров. В качестве таких рассмотрим известные теоремы сложения для полиномов Лежандра $P_n$ и шаровых сферических и бисферических функций, связанных с гипергармониками (54) формулами [24]:

$$\mathcal{Y}_{b\beta}(\mathbf{x}) \equiv x^b\,Y^{b\beta}_{b0b}(\Omega)\,, \quad \mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \equiv r^{\ell}\,Y^{\ell m}_{a+b,ab}(\Omega)\,. \qquad (90)$$

Словосочетанием теорема (формула) сложения часто называют разложение функции от суммы двух векторов в ряд по функциям, зависящим только от координат одного или другого вектора. Пример такой факторизации — теорема сложения [23] для сферических шаровых функций (90):

$$\mathcal{Y}_{b\beta}(\mathbf{z}+\mathbf{v}) = \sum_{c+d=b} A^b_{cd}\,\mathcal{Y}^{b\beta}_{cd}(\mathbf{z},\mathbf{v})\,, \quad A^b_{cd} \equiv \left(\frac{4\pi\Gamma(2b+2)}{\Gamma(2c+2)\Gamma(2d+2)}\right)^{1/2}\,. \qquad (91)$$

Этот же термин (теорема или формула сложения) часто используется и для обозначения разложения функции, аргумент которой сам является функцией двух векторов в упомянутую выше сумму с разделенными переменными. Хорошо известный пример [6] такого представления — теорема сложения для полиномов Лежандра $P_n(u)$, аргумент которых является функцией (9) сферических координат двух векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Перепишем эту теорему в виде теоремы сложения для функций $\Theta_{n0}(u)$, образующих полный и ортонормированный базис [23] на отрезке $-1 \leq u \leq 1$:

$$\Theta_{n0}(u) = \sqrt{n+1/2}\,P_n(u) = (-1)^n\,2\pi\,\mathcal{Y}^{00}_{nn}(\hat{x},\hat{y})\,,\ n = 0,1,... \qquad (92)$$

Кинематическое преобразование (3) якобиевских координат (1) одновременно переводит вектор $\mathbf{x}$ в сумму $\mathbf{x}'$ векторов $-\mathbf{x}\cos\gamma$ и $-\mathbf{y}\sin\gamma$, вектор $\mathbf{y}$ в сумму $\mathbf{y}'$ векторов $\mathbf{x}\sin\gamma$ и $-\mathbf{y}\cos\gamma$, а угол $\varphi$ в функцию (10) $\varphi'(\varphi,u;\gamma)$ переменных $u,\varphi$ и $\gamma$. Следовательно, построение разложений кинематического образа $\Psi(\Omega'(\Omega;\gamma)) = K(\gamma)\Psi(\Omega)$ по угловым базисам (59) аргументов $\Omega$ означает доказательство теорем сложения. Первый способ доказательства таких теорем — применить уже известные соотношения должным образом. Для примера разложим кинематический образ

$$\langle\Omega|K(\gamma)|Y_{b'\beta'}(\hat{x})\rangle = Y_{b'\beta'}(\hat{x}') \tag{93}$$

сферической функции $Y_{b'\beta'}(\hat{x})$ в ряд по функциям переменных $\Omega$. Применим формулу (91) к правой части равенства (93). Результат перепишем в координатах $\Omega$. Степени тригонометрических функций углов $\varphi$, $\varphi'$ и $\gamma$ выразим через функции (55). В итоге получим искомое разложение:

$$\begin{aligned}\langle\Omega|K(\gamma)|Y_{b'\beta'}(\hat{x})\rangle &= Y_{b'\beta'}(\hat{x}') = \frac{(-1)^{b'}N_{b'0b'}}{W_{b'0b'}(\varphi'(\varphi,u;\gamma))}\times \\ &\times \sum_{c+d=b'} A^{b'}_{cd}\,N^{-2}_{b'cd}\,W_{b'cd}(\varphi)\,W_{b'cd}(\gamma)\mathcal{Y}^{b'\beta'}_{cd}(\hat{x},\hat{y})\,.\end{aligned} \tag{94}$$

Аналогичным образом доказываем формулу

$$\begin{aligned}\langle\Omega|K(\gamma)|Y_{a'\alpha'}(\hat{y})\rangle &= Y_{a'\alpha'}(\hat{y}') = \frac{N_{a'a'0}}{W_{a'a'0}(\varphi'(\varphi,u;\gamma))}\times \\ &\times \sum_{c+d=a'}(-1)^c A^{a'}_{cd}N^{-2}_{a'cd}W_{a'cd}(\varphi)W_{a'dc}(\gamma)\mathcal{Y}^{a'\alpha'}_{cd}(\hat{x},\hat{y})\,.\end{aligned} \tag{95}$$

Применив правила (94) и (95) кинематического преобразования к каждой сферической функции, содержащейся в бисферической гармонике $\mathcal{Y}^{\ell m}_{a'b'}(\hat{x}',\hat{y}')$, получим ее разложение по функциям переменных $\Omega$:

$$\begin{aligned}&\langle\Omega|K(\gamma)|\mathcal{Y}^{\ell m}_{a'b'}(\hat{x},\hat{y})\rangle = \mathcal{Y}^{\ell m}_{a'b'}(\hat{x}',\hat{y}') = \\ &= (2a'+1)^{1/2}(2b'+1)^{1/2}\,\frac{(-1)^{b'}N_{a'+b',a'b'}}{4\pi W_{a'+b',a'b'}(\varphi'(\varphi,u;\gamma))}\times \\ &\times \sum_{c+d=a'}(-1)^c A^{a'}_{cd}\sum_{e+f=b'}A^{b'}_{ef}\,\frac{W_{a'+b',d+e,c+f}(\gamma)}{N_{a'+b',d+e,c+f}}\,\frac{W_{a'+b',c+e,d+f}(\varphi)}{N_{a'+b',c+e,d+f}}\times \\ &\times \sum_{gh}B^g_{ce}B^h_{df}\left\{\begin{matrix} c & e & g\\ d & f & h\\ a' & b' & \ell\end{matrix}\right\}\mathcal{Y}^{\ell m}_{gh}(\hat{x},\hat{y})\,,\end{aligned} \tag{96}$$

$$B_{ab} \equiv \big(\,(2a+1)(2b+1)\,\big)^{1/2}\,C^{c0}_{a0b0}\,. \tag{97}$$

Отметим, что в силу равенств (73) коэффициенты $B^c_{ab}$ равны нулю в случае $(-1)^{a+b+\ell}=1$, а доказанные соотношения (94)–(96) верны при всех значениях пяти углов $\Omega$ и параметра $\gamma$, т.е. являются пятимерными тождествами по этим шести углам.

Следующий способ доказательства теорем сложения для базисов (59) более изящен, чем описанная выше громоздкая цепочка построений, и состоит в редукции известных многомерных тождеств, связывающих угловые функции аргументов $\Omega$ и $\Omega'(\Omega;\gamma)$, к тождествам меньшей размерности. Такое построение можно реализовать выбором частных значений углов $\Omega$, при которых функции, содержащиеся в исходном тождестве, принимают более простой вид или же обращаются в нуль. Для примера исследуем тождества (94)–(96) при частных значениях их аргументов (12) и (13)–(15).

Сначала приведем вспомогательные формулы. При экстремальных значениях аргумента $\theta_q$ сферические функции $Y_{c\delta}(\hat{q})$ обращаются в нуль, если $\delta\neq 0$, либо зависят только от их второго аргумента $\varphi_q$, причем [23]

$$\begin{aligned} Y_{c\delta}(\hat{v}) &= \delta_{\delta 0}\sqrt{(2c+1)/4\pi}\,, \quad \hat{v}=(0,0), \\ Y_{c\delta}(\hat{q}) &= Y_{c\delta}(\hat{v})\,(-1)^{(c-\delta)\theta_q/\pi}\exp(i\delta\varphi_q). \end{aligned} \tag{98}$$

Поэтому в случае (12), когда $\varphi_x,\theta_y,\varphi_y=0$ и $\theta_y=\theta$, имеем

$$\begin{aligned} Y_{b\beta}(\hat{x}) &= Y_{b\beta}(\hat{v})\,, \quad Y_{a\alpha}(\hat{y})=(2\pi)^{-1/2}\,\Theta_{a\alpha}(u)\,, \\ Y_{b'\beta'}(\hat{x}') &= (-\mathrm{sign}\,\gamma)^{\beta'}(2\pi)^{1/2}\,\Theta_{b'\beta'}(u_{xx'})\,, \\ Y_{a'\alpha'}(\hat{y}') &= (-1)^{\alpha'}\,(2\pi)^{-1/2}\,\Theta_{a'\alpha'}(u_{xy'})\,, \end{aligned} \tag{99}$$

а в случае (13)–(15), когда $\varphi_x,\theta_x,\theta_y,\varphi_y=0$, получаем

$$\begin{aligned} Y_{c\delta}(\hat{q}) &= Y_{c\delta}(\hat{v})\,,\ \hat{q}=\hat{x},\hat{y}\,;\ W_{Lab}(\varphi')=W_{Lab}(\varphi-\gamma)\,; \\ Y_{b'\beta'}(\hat{x}') &= (-2\mathrm{sign}\gamma)^{\beta'}2^{-\beta'}(\mathrm{sign}(\pi/2-\gamma+\varphi)-1)^{\beta'-b'}Y_{b'\beta'}(\hat{v})\,, \\ Y_{a'\alpha'}(\hat{y}') &= (-2)^{\alpha'}2^{-a'}(\mathrm{sign}(\gamma-\varphi)-1)^{a'-\alpha'}Y_{a'\alpha'}(\hat{v})\,. \end{aligned} \tag{100}$$

Используя формулы (98), (99), доказываем, что в случае (12) соотношения (94)–(96) вырождаются в двумерные тождества по переменным $u$ и $\varphi$:

$$\begin{aligned} \Theta_{b'\beta'}(u_{xx'}) &= \frac{(-1)^{b'}N_{b'0b'}}{\sqrt{2\pi}\,W_{b'0b'}(\varphi'(\varphi,u;\gamma))}\,(-\mathrm{sign}\,\gamma)^{\beta'}\,\times \\ &\times \sum_{c+d=b'}\sqrt{d+1/2}\,\frac{A^{b'}_{cd}}{N^2_{b'cd}}\,C^{b'\beta'}_{c\beta'd0}\,W_{b'cd}(\varphi)\,W_{b'cd}(\gamma)\,\Theta_{c\beta'}(u), \end{aligned} \tag{101}$$

$$\Theta_{a'\alpha'}(u_{xy'}) = \frac{N_{a'a'0}}{\sqrt{2\pi}\,W_{a'a'0}(\varphi'(\varphi,u;\gamma))}\,(-1)^{\alpha'}\,\times \tag{102}$$

$$\times \sum_{c+d=a'} \sqrt{d+1/2}\,\frac{(-1)^c A^{a'}_{cd}}{N^2_{a'cd}}\, C^{a'\alpha'}_{c\alpha' d0}\, W_{a'cd}(\varphi)\, W_{a'dc}(\gamma)\, \Theta_{c\alpha'}(u)\,,$$

$$(-1)^m \sum_{\alpha'} (-\operatorname{sign}\gamma)^{\beta'} C^{\ell m}_{a\alpha' b\beta'}\, \Theta_{a\alpha'}(u_{xy'})\, \Theta_{b'\beta'}(u_{xx'}) = \tag{103}$$

$$= \left( (2a'+1)(2b'+1) \right)^{1/2} \frac{(-1)^{b'} N_{a'+b',a'b'}}{4\pi W_{a'+b',a'b'}(\varphi'(\varphi,u;\gamma))} \times$$

$$\times \sum_{c+d=a'} (-1)^c A^{a'}_{cd} \sum_{e+f=b'} A^{b'}_{ef}\, \frac{W_{a'+b',d+e,c+f}(\gamma)}{N_{a'+b',d+e,c+f}}\, \frac{W_{a'+b',c+e,d+f}(\varphi)}{N_{a'+b',c+e,d+f}} \times$$

$$\times \sum_{gh} B^g_{ce} B^h_{df} \left\{ \begin{array}{ccc} c & e & g \\ d & f & h \\ a' & b' & \ell \end{array} \right\} \sqrt{h+1/2}\, C^{\ell m}_{gmh0} \Theta_{gm}(u)\,.$$

С помощью равенств (73) и (100) показываем, что в случае (13)–(15) тождество (94) с $\beta' \neq 0$, тождество (95) с $\alpha' \neq 0$ и тождество (96) с $m \neq 0, (-1)^{a'+b'} \neq (-1)^{\ell}$ вырождаются в тривиальное равенство $0 \equiv 0$. Если же $\beta', \alpha', m, (-1)^{a'+b'-\ell} - 1 = 0$, то в рассматриваемом случае (13)–(15) тождества (94)–(96) порождают следующие теоремы сложения для функций $W_{La'b'}$ с индексом $L = a' + b'$:

$$W_{b'0b'}(\varphi-\gamma) = (2\sqrt{2\pi})^{-1} N_{b'0b'}\, (-1)^{b'} \sum_{c+d=b'} A^{b'}_{cd}\, B^{b'}_{cd}\, N^{-2}_{b'cd}\, W_{b'cd}(\varphi)\, W_{b'cd}(\gamma)\,,$$

$$W_{a'a0}(\varphi-\gamma) = (2\sqrt{2\pi})^{-1}\, N_{a'a'0} \sum_{c+d=a'} (-1)^c\, A^{a'}_{cd}\, B^{a'}_{cd}\, N^{-2}_{a'cd}\, W_{a'cd}(\varphi)\, W_{a'dc}(\gamma)\,,$$

$$W_{a'+b',a'b'}(\varphi-\gamma) = (-1)^{b'} N_{a'+b',a'b'} (4\pi C^{\ell 0}_{a'0b'0})^{-1} \times$$

$$\times \sum_{c+d=a'} (-1)^c A^{a'}_{cd} \sum_{e+f=b'} A^{b'}_{ef}\, \frac{W_{a'+b',d+e,c+f}(\gamma)}{N_{a'+b',d+e,c+f}}\, \frac{W_{a'+b',c+e,d+f}(\varphi)}{N_{a'+b',c+e,d+f}} \times$$

$$\times \sum_{gh} B^g_{ce} B^h_{df} \left\{ \begin{array}{ccc} c & e & g \\ d & f & h \\ a' & b' & \ell \end{array} \right\} B^{\ell}_{gh}\,. \tag{104}$$

Доказанные соотношения (104) можно трактовать и как правила преобразования функции $W_{a+b,ab}(\varphi)$ при сдвиге ее аргумента на угол $\gamma$. Полезно показать, что оператор $K(\gamma)$ в частном случае (13)–(15) совершает именно такое преобразование. С этой целью исследуем кинематическое преобразование (26) функции $\Psi = W_{Lab}(\varphi)$. В силу равенств (42), (46) и (50) имеем двумерные по аргументам $u$ и $\varphi$ тождества:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | J | W_{Lab}(\varphi) \rangle &= \langle \Omega | J_p | W_{Lab}(\varphi) \rangle = u\, \partial_\varphi\, W_{Lab}(\varphi)\,, \qquad (105)\\ \langle \Omega | K(\gamma) | W_{Lab}(\varphi) \rangle &= \langle \Omega | K_p(\gamma) | W_{Lab}(\varphi) \rangle = W_{Lab}(\varphi'(\varphi, u; \gamma))\,, \end{aligned}$$

которые описывают кинематическое преобразование функции $W_{Lab}(\varphi)$ в функцию переменных $u$ и $\varphi$. Полагая $u = 1$ в тождествах (105), переходим к случаю (13)–(15) и получаем операторные формулы дифференцирования и сдвига аргумента функции $W_{Lab}(\varphi)$ на угол $\gamma$:

$$J_p\, W_{Lab}(\varphi) = \partial_\varphi\, W_{Lab}(\varphi)\,,\ K_p(\gamma)\, W_{Lab}(\varphi) = W_{Lab}(\varphi - \gamma)\,. \tag{106}$$

Третий и наиболее общий подход к доказательству теорем сложения для угловых базисов (59) состоит в исследовании интегралов перекрытия между базисными функциями и их кинематическими образами. Этот метод демонстрируется в пп. 2.2.4 и 2.2.5 описанием известных и новых способов понижения размерности таких интегралов.

*2.2.4. Кинематическое преобразование бисферических рядов.* Чтобы существенно сократить выкладки, поступим следующим образом. Сначала исследуем не зависящие от вида множителя $Q(r, \varphi)$ свойства кинематического преобразования (26) произведений

$$|\Psi\rangle \equiv |Q\ell m a' b'\rangle\,, \quad \Psi(\mathbf{r}) = Q(r, \varphi)\, \mathcal{Y}^{\ell m}_{a'b'}(\hat{x}, \hat{y})\,. \tag{107}$$

Положив в выведенных формулах $Q \equiv 1, \Psi^{\ell m}_{a'b'}, U^{\ell}_{a'b'}, W_{La'b'}$, докажем правила кинематического преобразования бисферического базиса, рядов (64), (86) и представление матричных элементов оператора $K(\gamma)$ в гиперсферическом базисе в виде двойных интегралов.

Согласно равенствам (25), (38), (40) и (49) операторы $P, \mathbf{l}^2, l_3$ не действуют на переменную $\varphi$ и коммутируют с операторами $J$ и $K(\gamma)$. Значит, функции типа (107) и их кинематические образы $J\Psi$ и $K(\gamma)\Psi$ являются собственными функциями операторов $P, \mathbf{l}^2, l_3$ и отвечают собственным значениям $\ell(\ell+1)$, $m$ и $\sigma' = (-1)^{a'+b'}$. Однако операторы $J$ и $K(\gamma)$ не коммутируют с операторами $\mathbf{l}_x^2$ и $\mathbf{l}_y^2$. Следовательно, коэффициенты $\langle \ell m a b | K(\gamma) | \Psi\rangle$ разложения кинематического образа функции (107) по бисферическому базису, вычисляемые по правилам (64), диагональны только по квантовым числам $\ell, m, \sigma$:

$$\begin{aligned} \langle \ell' m' a b | K(\gamma) | Q \ell m a' b'\rangle &\equiv \delta_{\ell'\ell}\, \delta_{m'm} \delta_{\sigma'\sigma}\, \langle ab | K(\gamma) | Q a' b'\rangle_\ell(\varphi)\,, \qquad (108)\\ \langle ab | K(\gamma) | Q a' b'\rangle_\ell(\varphi) &\equiv \int_{\mathcal{T}^4_{xy}} d\hat{x}\, d\hat{y}\, \big(\mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x}, \hat{y})\big)^*\, Q(r, \varphi')\, \mathcal{Y}^{\ell m}_{a'b'}(\hat{x}', \hat{y}')\,. \end{aligned}$$

Здесь переменные $\hat{x}', \hat{y}'$ и $\varphi'$ — функции аргументов $\hat{x}, \hat{y}, \varphi$ и параметра $\gamma$. Поэтому функцию $Q(r, \varphi')$ нельзя вынести из-под знака интеграла, а сам интеграл зависит от индекса $\ell$ и является функцией аргумента $\varphi$ и параметра $\gamma$. Исследуем интегралы такого типа.

Записав тождества (47) и (51) в обкладках $\langle \ell m a b|$ и $|Q\ell m a' b'\rangle$ и использовав свойства (74) операторов (25), докажем соотношения симметрии:

$$\langle ab | K(\gamma) | Q a' b'\rangle_\ell(\varphi) \;=\; \langle Q a' b' | K(-\gamma) | ab\rangle_\ell(\varphi) = \tag{109}$$

$$\begin{aligned} &= \langle ba|K(\gamma)|Qb'a'\rangle_\ell(\pi/2-\varphi) = \\ &= (-1)^a\langle ab|K(-\gamma)|Qa'b'\rangle_\ell(\varphi) = \\ &= (-1)^{\ell+a'}\langle ba|K(\pi/2-\gamma)|Qa'b'\rangle_\ell(\pi/2-\varphi) = \\ &= (-1)^{\ell+a}\langle ab|K(\pi/2-\gamma)|Qb'a'\rangle_\ell(\pi/2-\varphi)\,. \end{aligned}$$

Они означают, что функции $\langle ab|K(\gamma)|Qa'b'\rangle_\ell(\varphi)$ с любыми индексами являются четными или нечетными относительно точки $\gamma=0$ на интервале $-\pi/2<\gamma<\pi/2$, а при $a=b$ и (или) $a'=b'$ такие функции обладают определенной четностью относительно точки $\gamma=\pi/4$ на интервале $0<\gamma<\pi/2$.

Применив равенства (27) и (74), получим

$$\begin{aligned} \langle ab|K(0)|Qa'b'\rangle_\ell(\varphi) &= (-1)^{a'+b'}\,\delta_{aa'}\,\delta_{bb'}\,Q(r,\varphi)\,, \\ \langle ab|K(\pi/2)|Qa'b'\rangle_\ell(\varphi) &= (-1)^{\ell-b'}\,\delta_{ab'}\,\delta_{a'b}\,Q(r,\pi/2-\varphi)\,. \end{aligned} \tag{110}$$

В силу равенств (108) бисферический ряд (64) функции $|\Psi\rangle = K(\gamma)|Q\ell m a'b'\rangle$ вырождается в двойную сумму:

$$\begin{aligned} K(\gamma)Q(r,\varphi)\,\mathcal{Y}^{\ell m}_{a'b'}(\hat{x},\hat{y}) &= Q(r,\varphi')\,\mathcal{Y}^{\ell m}_{a'b'}(\hat{x}',\hat{y}') = \\ &= \sum_{ab}\langle ab|K(\gamma)|Qa'b'\rangle_\ell(\varphi)\;\mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x},\hat{y})\,, \end{aligned} \tag{111}$$

где $a$ и $b$ пробегают все возможные при данных $\ell$ и $\sigma$ значения. При $\gamma=0$ и $\gamma=\pi/2$, благодаря равенствам (110), эта сумма содержит одно слагаемое.

Равенство (111) справедливо при всех значениях углов $\Omega$, т.е. является пятимерным тождеством по переменным $\hat{x},\hat{y}$ и $\varphi$, от которых зависят переменные $\hat{x}',\hat{y}'$ и $\varphi'$. В частном случае (12) выполняются равенства (99) и поэтому тождество (111) становится двумерным тождеством по переменным $\varphi$ и $u$:

$$\begin{aligned} Q(r,\varphi')\,\sum_{\alpha'}(\mathrm{sign}\gamma)^{\alpha'}\,C^{\ell m}_{a'\alpha'b'\beta'}\,\Theta_{a'\alpha'}(u_{xy'})\,\Theta_{b'\beta'}(u_{xx'}) = \\ = \sum_{ab}(-\mathrm{sign}\gamma)^m\sqrt{b+1/2}\,C^{\ell m}_{amb0}\Theta_{am}(u)\,\langle ab|K(\gamma)|Qa'b'\rangle_\ell(\varphi), \end{aligned} \tag{112}$$

где $u_{ab}$ и $\varphi'$ — функции (10) и (11) переменных $\varphi$, $u$ и параметра $\gamma$. В частном случае (13)–(15) тождество (111), благодаря равенствам (100) и определениям (97) коэффициентов $B^c_{ab}$, вырождается в тривиальное равенство $0=0$, если $m,(-1)^{a+b+\ell}-1\neq 0$. Если $m,(-1)^{a+b+\ell}-1=0$, то это тождество становится одномерным тождеством по переменной $\varphi$ и параметру $\gamma$:

$$B^\ell_{a'b'}\,Q(r,\varphi-\gamma) = \sum_{ab} B^\ell_{ab}\,\langle ab|K(\gamma)|Qa'b'\rangle_\ell(\varphi)\,. \tag{113}$$

Четырехкратный интеграл (108) можно свести к одномерному. Сначала опишем самый простой способ такой редукции. Умножим каждое $(m = -\ell, ..., \ell)$ тождество (112) на соответствующую функцию $C^{\ell m}_{amb0}\,\Theta_{am}(u)$, проинтегрируем получившиеся равенства по переменной $u$ на отрезке $[-1, 1]$ и, наконец, просуммируем получившиеся интегральные соотношения по индексу $m$. Итоговую сумму упростим, использовав условия ортогональности для функций $\Theta_{\ell m}$ и коэффициентов Клебша—Гордона [23]:

$$\int_{-1}^{1} du\,\Theta_{am}(u)\,\Theta_{bm}(u) = \delta_{ab}\,, \quad \sum_{m=-\ell}^{\ell} C^{\ell m}_{amb0}\,C^{\ell m}_{amc0} = \delta_{bc}\,\frac{2\ell+1}{2b+1}\,. \tag{114}$$

Таким способом для интеграла (108) выводим искомое представление:

$$\langle ab|K(\gamma)|Qa'b'\rangle_\ell(\varphi) = \int_{-1}^{1} du\,K^{\ell}_{aba'b'}(\varphi, u;\gamma)\,Q(r, \varphi'(\varphi, u;\gamma))\,, \tag{115}$$

$$\begin{aligned} K^{\ell}_{aba'b'}(\varphi, u;\gamma) \quad &= \quad \frac{\sqrt{4b+2}}{2\ell+1}\sum_m (-\mathrm{sign}\gamma)^m\,C^{\ell m}_{amb0}\Theta_{am}(u)\,\times \\ &\times \quad \sum_{\alpha'} (\mathrm{sign}\gamma)^{\alpha'}\,C^{\ell m}_{a'\alpha'b'\beta'}\,\Theta_{a'\alpha'}(u_{xy'})\,\Theta_{b'\beta'}(u_{xx'})\,. \end{aligned} \tag{116}$$

В пяти частных случаях, когда $\ell = 0$ либо $\ell \neq 0$, а два индекса из четверки индексов $(a, b, a', b')$ равны нулю, двойная сумма (116) заметно упрощается:

$$\begin{aligned} K^{0}_{aaa'a'}(\varphi, u;\gamma) &= (-1)^{a+a'}\left((2a+1)(2a'+1)\right)^{1/2} P_a(u)\,P_{a'}(u_{x'y'})\,, \\ K^{\ell}_{0\ell0\ell}(\varphi, u;\gamma) &= P_\ell(u_{xx'})\,, \quad K^{\ell}_{\ell0\ell0}(\varphi, u;\gamma) = P_\ell(u_{yy'})\,, \\ K^{\ell}_{0\ell\ell0}(\varphi, u;\gamma) &= P_\ell(u_{xy'})\,, \quad K^{\ell}_{\ell00\ell}(\varphi, u;\gamma) = P_\ell(u_{yx'})\,. \end{aligned} \tag{117}$$

Напомним, что в равенствах (116) и (117) аргументы функций $\Theta_{am}$ и $P_n$ являются функциями (11) независимых переменных $u$ и $\varphi$.

Приведем иной вывод [67] соотношений (115)–(117), основанный на правилах преобразования бисферических функций при трехмерных поворотах. В интеграле (108) заменим эти функции суммами (76) и перейдем от переменных $\hat{x}, \hat{y}$ к переменным $\omega$ и $u$. Тогда в подынтегральной функции от совокупности $\omega$ трех углов Эйлера (16) будут зависеть только произведения

$$(D^{\ell}_{mm_p}(\omega))^*\,D^{\ell}_{m'm_p}(\omega)\,.$$

Если применить соотношения ортогональности для $D$-функций [23] и вычислить интегралы по углам $\omega$ от такого произведения, то получится однократный интеграл (115) с ядром (116).

Еще один и самый громоздкий способ преобразования интеграла (108) к одномерному интегралу (115) и выводу для функции $K^{\ell}_{aba'b'}$ представления в виде семикратной суммы подробно описан в книге [21] в случае равных масс частиц. Опишем этот способ для произвольных масс. В интеграле (108) заменим функцию $\mathcal{Y}^{\ell m}_{a'b'}$ рядом (96), а функцию $W^{-1}_{a'+b',a'b'}Q$ разложим в ряд по базису (92):

$$W^{-1}_{a'+b',a'b'}(\varphi')Q(r,\varphi') = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \mathcal{Y}^{00}_{nn}(\hat{x},\hat{y}) \times$$

$$\times \int_{-1}^{1} du\, \Theta_{n0}(u) W^{-1}_{a'+b',a'b'}(\varphi'(u,\varphi;\gamma))\, Q(r,\varphi'(\varphi,u;\gamma))\,. \qquad (118)$$

Далее проинтегрируем произведения трех бисферических функций по тору $\mathcal{T}^4_{xy}$ с помощью известной формулы [23]:

$$\mathcal{Y}^{00}_{nn}(\hat{x},\hat{y})\, \mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x},\hat{y}) =$$

$$= \frac{(-1)^{a+b+\ell}}{4\pi(2n+1)^{1/2}} \sum_{cd} (-1)^c B^c_{an} B^d_{bn} \left\{ \begin{array}{ccc} d & c & \ell \\ a & b & n \end{array} \right\} \mathcal{Y}^{\ell m}_{cd}(\hat{x},\hat{y})\,, \qquad (119)$$

где коэффициенты $B^a_{cd}$ заданы формулами (97). Используя получившиеся равенства:

$$\begin{aligned} \Gamma^{\ell n}_{aba'b'} \quad &\equiv \quad \int_{\mathcal{T}^4_{xy}} d\hat{x}\, d\hat{y}\, (\mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x},\hat{y}))^* \, \mathcal{Y}^{00}_{nn}(\hat{x},\hat{y})\, \mathcal{Y}^{\ell m}_{a'b'}(\hat{x},\hat{y}) = \qquad (120) \\ &= \quad \frac{(-1)^{a'+b'+\ell}}{4\pi(2n+1)^{1/2}} B^a_{a'n} B^b_{b'n} \left\{ \begin{array}{ccc} b & a & \ell \\ a' & b' & n \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

сводим исследуемый интеграл (108) к однократному интегралу (115) с ядром:

$$\begin{aligned} &K^{\ell}_{aba'b'}(\varphi,u;\gamma) = (-1)^{a'+b'+b+\ell}\,(2a+1)(2b+1) \times \qquad (121) \\ &\times (\, 2\Gamma(2a+1)\Gamma(2b+1)\,)^{1/2} \; N_{a'+b',a'b'} W^{-1}_{a'+b',a'b'}(\varphi'(\varphi,u;\gamma)) \times \\ &\times \sum_{n=0}^{(a+b+a'+b')/2} (-1)^n \sqrt{4n+2}\, \Theta_{n0}(u) \times \\ &\times \sum_{d+e=a} \sum_{f+g=b} (-1)^d \; (\, \Gamma(2d+2)\Gamma(2e+2)\Gamma(2f+2)\Gamma(2g+2)\,)^{-1/2} \times \\ &\times N^{-1}_{a+b,e+f,d+g} N^{-1}_{a+b,d+f,e+g} W_{a+b,e+f,d+g}(\gamma) W_{a+b,d+f,e+g}(\varphi) \times \\ &\times \sum_{s,t} B^s_{df}\, B^t_{eg}\, B^{a'}_{ns}\, B^{b'}_{nt} \left\{ \begin{array}{ccc} b' & a' & \ell \\ s & t & n \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} d & e & a \\ f & g & b \\ s & t & \ell \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

До сих пор переменные $\varphi$ и $u$ были аргументами ядер $K^{\ell}_{aba'b'}$ интегралов (115) и произвольной функции $Q(r, \varphi'(\varphi, u; \gamma))$, а переменная $u$ — переменной интегрирования. Опишем более подробно, чем в книге [21], замену переменных $u \to \varphi'$. Из равенства (10) выразим переменную $u$ как функцию аргументов $\varphi$, $\varphi'$ и параметра $\gamma$:

$$u(\varphi, \varphi'; \gamma) = (\cos 2\varphi' - \cos 2\gamma \, \cos 2\varphi) \; \mathrm{cosec}\, 2\gamma \, \mathrm{cosec}\, 2\varphi \, . \tag{122}$$

Подставив $u$ в таком виде в равенства (11), получим функции $u_{ab} = u_{ab}(\varphi, \varphi'; \gamma)$ новых переменных $\varphi$ и $\varphi'$:

$$\begin{aligned} u_{xx'} &= -\sec\varphi' \Big( \cos 2\varphi + \cos 2\varphi' + \cos 2\gamma + 1 \Big)/4 \, , \\ u_{xy'} &= -\mathrm{cosec}\,\varphi' \Big( \cos 2\varphi - \cos 2\varphi' - \cos 2\gamma + 1 \Big)/4 \, , \\ u_{yx'} &= \sec\varphi' \Big( \cos 2\varphi - \cos 2\varphi' + \cos 2\gamma - 1 \Big)/4 \, , \\ u_{yy'} &= \mathrm{cosec}\,\varphi' \Big( \cos 2\varphi + \cos 2\varphi' - \cos 2\gamma - 1 \Big)/4 \, , \\ u_{x'y'} &= \mathrm{cosec}\, 2\varphi' \, \mathrm{cosec}\, 2\gamma \Big( \cos 2\varphi + \cos 2\varphi' \cos 2\gamma \Big)/4 \, . \end{aligned} \tag{123}$$

Вычислим якобиан исследуемого преобразования $u \to \varphi'$

$$\partial_{\varphi'} u(\varphi, \varphi'; \gamma) = -t(\varphi, \varphi'; \gamma) \, \mathrm{sign}\gamma \, , \quad t(\varphi, \varphi'; \gamma) \equiv \frac{2 \sin 2\varphi'}{\sin 2\varphi |\sin 2\gamma|} \tag{124}$$

и пределы интегрирования $C_-$ и $C_+$ по новой переменной $\varphi'$, отвечающие граничным значениям $u = -1$ и $u = 1$ переменной $u$. Если $\gamma > 0$, то всегда $\partial_{\varphi'} u \leq 0$, а верхний предел $C_+$ не меньше нижнего предела $C_-$. При $\gamma < 0$ $\partial_{\varphi'} u \geq 0$, а верхний предел $C_+$ не превышает нижний предел $C_-$. В случае $\gamma < 0$ можно поменять пределы интегрирования местами и изменить знак перед интегралом. Такое тождественное преобразование не потребуется, если производную (124) заменить ее модулем $t$, а нижний и верхний пределы $C_-$ и $C_+$ переопределить равенствами

$$C_-(\varphi; \gamma) \equiv |\varphi - |\gamma|| \, , \quad C_+(\varphi; \gamma) \equiv \min \{\varphi + \gamma, \pi - \varphi - |\gamma|\} \, . \tag{125}$$

Используя соотношения (123)–(125), записываем интеграл (115) в виде

$$\langle ab|K(\gamma)|Qa'b'\rangle_\ell(\varphi) = \int_{C_-(\varphi;\gamma)}^{C_+(\varphi;\gamma)} d\varphi' \, K^{\ell}_{aba'b'}(\varphi, \varphi'; \gamma) \, Q(r, \varphi') \, , \tag{126}$$

$$K^{\ell}_{aba'b'}(\varphi, \varphi'; \gamma) \equiv t(\varphi, \varphi'; \gamma) \, K^{\ell}_{aba'b'}(\varphi, u(\varphi, \varphi'; \gamma)) \, . \tag{127}$$

Пусть $Q \equiv 1$. Тогда функция (107) — бисферическая гармоника, а равенства (109) и (110) описывают симметрию и предельные значения матричных элементов (108) оператора $K(\gamma)$ в бисферическом базисе. Эти матричные элементы удовлетворяют правилам сумм (112) и (113) и представимы интегралами (115) от функций (116), (117) или (121).

При $Q \equiv \Psi^{\ell m}_{a'b'}$ формулы (115), (116) и (126), (127) становятся правилами кинематического преобразования слагаемого $\Psi^{\ell m}_{a'b'}\mathcal{Y}^{\ell m}_{a'b'}$ бисферического ряда (64) произвольной функции $\Psi$. Применив их к каждому слагаемому этого ряда, получим его разложение по бисферическим функциям $\mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x},\hat{y})$:

$$\begin{aligned} K(\gamma)\sum_{\ell m}\sum_{a'b'}\Psi^{\ell m}_{a'b'}(r,\varphi)\mathcal{Y}^{\ell m}_{a'b'}(\hat{x},\hat{y}) &= \sum_{\ell m}\sum_{a'b'}\Psi^{\ell m}_{a'b'}(r,\varphi')\mathcal{Y}^{\ell m}_{a'b'}(\hat{x}',\hat{y}') = \qquad (128)\\ &= \sum_{\ell m}\sum_{ab}\mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x},\hat{y})\int_{-1}^{1} du\, K^{\ell}_{aba'b'}(\varphi,u;\gamma)\Psi^{\ell m}_{a'b'}(r,\varphi'(\varphi,u;\gamma)) = \\ &= \sum_{\ell m}\sum_{ab}\mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x},\hat{y})\int_{C_-(\varphi;\gamma)}^{C_+(\varphi;\gamma)} d\varphi'\, K^{\ell}_{aba'b'}(\varphi,\varphi';\gamma)\Psi^{\ell m}_{a'b'}(r,\varphi')\,. \end{aligned}$$

Отметим, что согласно этим формулам кинематический образ функции $\Psi(x)$ модуля вектора $\mathbf{x}$, т.е. бисферический ряд из одного слагаемого

$$\Psi(x) = \mathcal{Y}^{00}_{00}(\hat{x},\hat{y})\,\Psi^{00}_{00}(x)\,,\ \Psi^{00}_{00}(x) = (4\pi)\,\Psi(x)\,,$$

— бесконечная сумма по всем бисферическим функциям с $\ell, m = 0$:

$$K(\gamma)\Psi(x) = \sum_{ab}\mathcal{Y}^{00}_{ab}(\hat{x},\hat{y})\int_{-1}^{1} du\, K^{0}_{ab00}(\varphi,u;\gamma)\Psi(r\cos\varphi'(\varphi,u;\gamma))\,. \qquad (129)$$

Если $Q \equiv U^{\ell}_{a'b'}$, то формулы (115), (116) и (126), (127) описывают кинематическое преобразование слагаемого $U^{\ell}_{a'b'}\mathcal{Y}^{\ell m}_{a'b'}$ ряда (86) функции (84), подчиненной условиям (85). Для такой функции

$$\begin{aligned} K(\gamma)\Psi^{\varepsilon}(\mathbf{r}) &= K(\gamma)(xy)^{-1}\sum_{a'b'}U^{\ell}_{a'b'}(r,\varphi)\mathcal{Y}^{\ell m}_{a'b'}(\hat{x},\hat{y}) = \qquad (130)\\ &= (x'y')^{-1}\sum_{a'b'}U^{\ell}_{a'b'}(r,\varphi')\mathcal{Y}^{\ell m}_{a'b'}(\hat{x}',\hat{y}') = \\ &= (xy)^{-1}\sum_{ab}\sum_{a'b'}\mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x},\hat{y})\,\langle r,\varphi|h^{\ell}_{aba'b'}(\gamma)|U^{\ell}_{a'b'}\rangle\,. \end{aligned}$$

Здесь введен интегральный оператор $h^{\ell}_{aba'b'}(\gamma)$. По определению он отображает произвольную функцию $Q(r,\varphi)$, заданную в $\mathcal{R}^2_+$, в однократные интегралы

$$\langle r,\varphi|h^{\ell}_{aba'b'}(\gamma)|Q\rangle \equiv \int_{-1}^{1} du\, h^{\ell}_{aba'b'}(\varphi,u;\gamma)\,Q(r,\varphi'(\varphi,u;\gamma)) = \qquad (131)$$

$$= \int_{C_-(\varphi;\gamma)}^{C_+(\varphi;\gamma)} d\varphi' \, h^{\ell}_{aba'b'}(\varphi,\varphi';\gamma) \, Q(r,\varphi') \,,$$

ядра которых связаны с функциями (116) и (127) равенствами

$$\begin{aligned} h^{\ell}_{aba'b'}(\varphi,u;\gamma) &\equiv (xy/x'y') \, K^{\ell}_{aba'b'}(\varphi,u;\gamma) \,, \\ h^{\ell}_{aba'b'}(\varphi,\varphi';\gamma) &\equiv (\sin 2\varphi/\sin 2\varphi') \, K^{\ell}_{aba'b'}(\varphi,\varphi';\gamma) \,. \end{aligned} \tag{132}$$

Теперь, использовав прием, описанный в работе [67], сведем матричные элементы оператора $K(\gamma)$ в базисе гипергармоник к двумерным интегралам с ядрами $K^{\ell}_{aba'b'}$. Для этого положим $Q = W_{La'b'}(\varphi)$. Интеграл (108) умножим на функцию $\rho^2(\varphi) W_{Lab}(\varphi)$. Получившееся выражение проинтегрируем по переменной $\varphi$ на отрезке $[0,\pi/2]$. Итоговый интеграл будет интегралом от произведения гипергармоник $\langle L\ell mab|\Omega\rangle$ и $\langle\Omega|K(\gamma)|L\ell ma'b'\rangle$ по гиперсфере $\mathcal{S}^5_{xy}$. Интегрируя по тору $\mathcal{T}^4_{xy}$ любым из вышеописанных способов, получаем для такого интеграла искомое представление:

$$\langle L\ell mab|K(\gamma)|L\ell ma'b'\rangle \equiv \int_{\mathcal{S}^5_{xy}} d\Omega \, (Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega))^* \, Y^{\ell m}_{La'b'}(\Omega'(\Omega;\gamma)) =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \rho^2(\varphi) W_{Lab}(\varphi) \int_{-1}^{1} du \, K^{\ell}_{aba'b'}(\varphi,u;\gamma) \, W_{La'b'}(\varphi') \,. \tag{133}$$

Использовав определения (79), (131) и (132), перепишем это представление в виде связи между матричными элементами операторов $K(\gamma)$ и $h^{\ell}_{aba'b'}$ в базисе гипергармоник и функций $\tilde{W}_{Lab}$:

$$\begin{aligned} &\langle L\ell mab|K(\gamma)|L\ell ma'b'\rangle = \langle L\tilde{a}b|h^{\ell}_{aba'b'}(\gamma)|L\tilde{a}'b'\rangle \equiv \\ &\equiv \int_0^{\pi/2} d\varphi \, \tilde{W}_{Lab}(\varphi) \int_{C_-(\varphi;\gamma)}^{C_+(\varphi;\gamma)} d\varphi' \, h^{\ell}_{aba'b'}(\varphi,\varphi';\gamma) \, \tilde{W}_{La'b'}(\varphi') \,. \end{aligned} \tag{134}$$

В принципе, представления (133) и (134) позволяют воспроизвести свойства всех матричных элементов оператора $K(\gamma)$ в гиперсферическом базисе по известным свойствам ядер $K^{\ell}_{aba'b'}$ или $h^{\ell}_{aba'b'}$. Такой способ исследования кинематического преобразования гипергармоник не только до сих пор не реализован из-за отсутствия полного анализа этих ядер как функций двух переменных $\varphi$ и $u$ или $\varphi$ и $\varphi'$, но и представляется слишком сложным. Более простой подход, основанный на применении операторных методов теории углового момента непосредственно к гипергармоникам, описывается ниже.

*2.2.5. Кинематическое преобразование гиперсферических рядов.* Сначала опишем кинематическое преобразование (26) гипергармоник (54) на операторном языке. В базисе гипергармоник единичный оператор имеет очень простое спектральное представление:

$$I = \sum_{L\ell mab} |L\ell mab\rangle \, \langle L\ell mab| \,, \tag{135}$$

а матрицы операторов $J$ и $K$ существенно разрежены, благодаря коммутационным соотношениям (40) и (49). В силу этих соотношений образы $J|L\ell mab\rangle$ и $K(\gamma)|L\ell mab\rangle$ любой гипергармоники $|L\ell mab\rangle$ являются собственными функциями операторов $P, \mathbf{l}^2, l_3$ и $\mathbf{L}^2$, но не являются таковыми для операторов $\mathbf{l}_x^2$ и $\mathbf{l}_y^2$. Иначе говоря, при кинематическом преобразовании гипергармоник $|L\ell mab\rangle$ как на бесконечно малый, так и на любой конечный угол $\gamma$ сохраняются квантовые числа $L, \ell, m$ и $\sigma = (-1)^L$, но не сохраняются числа $a$ и $b$. Значит верны представления

$$\langle L'\ell'm'a'b'|Q|L\ell mab\rangle = \delta_{L'L}\,\delta_{\ell'\ell}\,\delta_{m'm}\,\langle a'b'|Q|ab\rangle_{L\ell}\,, \quad Q = J, K(\gamma)\,. \tag{136}$$

По определению (30) оператор $J$ — антисимметризованное по перестановке $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y}$ скалярное произведение трехмерных векторов $\mathbf{x}$ и $\nabla_y$. Как известно [23], в общем случае операторы умножения на вектор $\mathbf{q}$ и оператор градиента $\nabla_q$ отображают сферическую функцию $Y_{\ell m}(\hat{q})$ в линейную комбинацию двух сферических функций $Y_{\ell\pm 1,m}(\hat{q})$. Следовательно, в общем случае функция $J|L\ell mab\rangle$ — линейная комбинация типа

$$J\,|L\ell mab\rangle = \sum_{\mu,\nu=\pm 1} \langle a+\mu, b+\nu|J|mab\,\rangle_{L\ell}\,|L\ell m, a+\mu, b+\nu\rangle\,. \tag{137}$$

Подействуем оператором $J$ на эту комбинацию. Образы $J|L\ell m, a+\mu, b+\nu\rangle$ выразим суммами того же типа (137). Повторим описанное построение $n-2$ раза. Тогда образ $J^n|L\ell mab\rangle$ представится линейной комбинацией гипергармоник $|L\ell m, a', b'\rangle$ с индексами $a'$ и $b'$, заданными формулами $a' = a - n + 2\mu$ и $b' = b - n + 2\nu$, где $\mu$ и $\nu$ принимают только те целые значения от 0 до $n$, при которых $|a' - b'| \leq \ell \leq a' + b'$. Значит, для оператора $J^n$ верны следующие правила отбора:

$$\langle a'b'|J^n|ab\rangle_{L\ell} = 0\,, \quad n < \max\{\,|a-a'|, |b-b'|\,\}\,, \tag{138}$$

а все остальные матричные элементы, вообще говоря, отличны от нуля. Используя эти правила отбора и тот факт, что при $|\gamma| \neq 0, \pi/2$ оператор $K(\gamma)$ — бесконечный ряд (33) по целым степеням оператора $J$, доказываем, что в общем случае

$$K(\gamma)|L\ell ma'b'\rangle = \sum_{ab} \langle ab|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell}\,|L\ell mab\rangle\,, \tag{139}$$

где индексы $a$ и $b$ принимают все возможные при данных $L$ и $\ell$ значения. Применяя формулы (27) и (74), показываем, что при $\gamma = 0, \pi/2$ каждая строка матрицы оператора $K(\gamma)$ имеет только один ненулевой элемент:

$$\langle ab|K(0)|a'b'\rangle_{L\ell} = (-1)^L\,\delta_{aa'}\,\delta_{bb'}\,, \tag{140}$$

$$\langle ab|K(\pi/2)|a'b'\rangle_{L\ell} = (-1)^{(L-2\ell+a'-b')/2}\,\delta_{ab'}\,\delta_{a'b}\,. \qquad (141)$$

Поэтому в случаях $\gamma = 0, \pi/2$ сумма (139) состоит из одного слагаемого.

Теперь опишем кинематическое преобразование гипергармоник в координатном представлении $\langle \mathbf{r}| = \langle r, \Omega|$. В общем случае связи (139) между гипергармониками до и после кинематического преобразования являются тождествами относительно пяти независимых переменных $\Omega = (\theta_x, \varphi_x, \theta_y, \varphi_y, \varphi)$ и индексов $a'$ и $b'$:

$$\langle \Omega|K(\gamma)|L\ell m a'b'\rangle = Y^{\ell m}_{La'b'}(\Omega'(\Omega;\gamma)) = \sum_{ab}\langle ab|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell}\,Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega)\,. \quad (142)$$

На плоскости $\mathcal{P}$ (случай (12)) выполняются равенства (99), в силу которых гипергармоники и их кинематические образы становятся функциями двух, а не пяти переменных. Поэтому на плоскости $\mathcal{P}$ связи (142) вырождаются в двумерные тождества относительно независимых переменных $u$ и $\varphi$, параметра $\gamma$ и индексов $a'$ и $b'$:

$$\sum_{ab}(-\mathrm{sign}\gamma)^m\,\sqrt{b+1/2}\,C^{\ell m}_{amb0}\,\Theta_{am}(u)\,W_{Lab}(\varphi)\,\langle ab|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell} =$$
$$= \sum_{\alpha'}(\mathrm{sign}\gamma)^{\alpha'}\,C^{\ell m}_{a'\alpha' b'\beta}\,\Theta_{a'\alpha}(u_{xy'})\,\Theta_{b'\beta}(u_{xx'})\,W_{La'b'}(\varphi'). \qquad (143)$$

На прямой $\mathcal{L}_3$ (случай (13)–(15)) верны равенства (100), согласно которым гипергармоники и их кинематические образы тождественно равны нулю, если $m \neq 0$ или $(-1)^{\ell+L} \neq 1$, а в противном случае вырождаются в функции одной переменной. Поэтому на прямой $\mathcal{L}_3$ тождества (142) и (143) вырождаются в тривиальные соотношения $0=0$, если $m \neq 0$ или $(-1)^{\ell+L} = -1$, а в случае $m = (-1)^{\ell+L} - 1 = 0$ — принимают вид одномерных тождеств по гиперуглу $\varphi$, параметру $\gamma$ и индексам $a'$ и $b'$:

$$\sum_{ab} B^{\ell}_{ab} W_{Lab}(\varphi)\,\langle ab|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell} = (-1)^L\,B^{\ell}_{a'b'}\,W_{La'b'}(\varphi-\gamma)\,, \qquad (144)$$

где коэффициенты $B^c_{ab}$ заданы равенствами (97).

Гиперрадиус не изменяется при кинематическом преобразовании координат. Поэтому формулы кинематического преобразования (26) гиперсферического ряда (65) произвольной функции $\Psi$ можно вывести, применив правило (142) к каждой гипергармонике такого ряда. Следовательно,

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{r}|K(\gamma)|\Psi(\mathbf{r})\rangle &= \sum_{\ell m}\sum_{La'b'}\Psi^{\ell m}_{La'b'}(r)Y^{\ell m}_{La'b'}(\Omega') = \qquad (145)\\ &= \sum_{\ell m}\sum_{Lab}Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega)\sum_{a'b'}\langle ab|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell}\,\Psi^{\ell m}_{La'b'}(r)\,.\end{aligned}$$

Так как эта цепочка равенств справедлива для любой функции класса $\mathcal{L}^2(\mathcal{S}^5_{xy})$, а гипергармоники образуют ортонормированный базис в этом классе, то справедливо спектральное представление

$$K(\gamma) = \sum_{\ell m} \sum_{aba'b'} \sum_{L} |L\ell mab\rangle\, \langle ab|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell}\, \langle L\ell ma'b'|\,, \tag{146}$$

в котором действие бра- и кет-операторов определено равенствами (62)–(65). Использовав определение (54) этих операторов как произведений операторов $|\ell mab\rangle$ и $|Lab\rangle$, выделим в сумме (146) подсумму $K^{\ell}_{aba'b'}(\gamma)$ по индексу $L$. Тогда получим

$$K(\gamma) = \sum_{\ell m} \sum_{ab} |\ell mab\rangle \sum_{a'b'} K^{\ell}_{aba'b'}(\gamma)\, \langle \ell ma'b'|\,, \tag{147}$$

$$K^{\ell}_{aba'b'}(\gamma) \equiv \sum_{L} |Lab\rangle\, \langle ab|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell}\, \langle La'b'|. \tag{148}$$

В силу равенств (128) и (145) любой из операторов $K^{\ell}_{aba'b'}(\gamma)$ действует на бисферическую компоненту $\Psi^{\ell m}_{a'b'}(r,\varphi)$ точно так же, как интегральный оператор (126) с ядром (121):

$$\langle \mathbf{r}|K^{\ell}_{aba'b'}|\Psi^{\ell m}_{a'b'}(r,\varphi)\rangle = \int_{C_-(\varphi;\gamma)}^{C_+(\varphi;\gamma)} d\varphi'\, K^{\ell}_{aba'b'}(\varphi,\varphi';\gamma)\, \Psi^{\ell m}_{a'b'}(r,\varphi')\,. \tag{149}$$

Для полноты описания кинематического преобразования гиперсферических рядов остается перечислить свойства матричных элементов операторов $J$ и $K$ и способы их вычисления.

*Матричные элементы оператора* $J$. Рассмотрим интеграл (136) в случае $Q = J$. Используя соотношение (46), заменим оператор $J$ произведением $D^{-1}J_pD$. Далее применим правило (77) и сделаем замену переменных $\hat{x},\hat{y} \to \omega, u$. В силу равенств (99) в получившемся подынтегральном выражении от набора углов $\omega$ зависят только $D$-функции. Проинтегрировав по этим углам, сведем исследуемый интеграл к двухкратному интегралу:

$$\begin{aligned} \langle ab|J|a'b'\rangle_{L\ell} &= (2\ell+1)^{-1}((2b+1)(2b'+1))^{1/2} N_{Lab} N_{La'b'} \times \\ &\times \sum_{m=-\ell}^{\ell} C^{\ell m}_{amb0}\, C^{\ell m}_{a'mb'0} \int_0^{\pi/2} d\varphi \rho^2(\varphi) W_{Lab}(\varphi) \times \\ &\times \int_{-1}^{1} du\, \Theta_{am}(u) J_p(\varphi,u)\, (\Theta_{a'm}(u)\, W_{La'b'}(\varphi)). \end{aligned} \tag{150}$$

Чтобы вычислить его, преобразуем подынтегральные функции

$$J_p \Theta_{c\delta}(u)\, W_{Lab}(\varphi) = i\,(1-u^2)\partial_u\, \Theta_{c\delta}(u)\, 2\mathrm{ctg}\, 2\varphi W_{Lab}(\varphi) + iu\Theta_{c\delta}(u)\, \partial_\varphi W_{Lab}\,. \tag{151}$$

Сначала перепишем известные соотношения [23] в компактном виде:

$$(1-u^2)\partial_u \Theta_{c\delta}(u) = \sum_{\tau=\pm 1} (c+1)(2)^\tau C_\tau^{c\delta}\, \Theta_{c+\tau,\delta}(u)\,, \tag{152}$$

$$u\Theta_{c\delta}(u) = \sum_{\tau=\pm 1} C_\tau^{c\delta}\, \Theta_{c+\tau,\delta}(u),\ C_\tau^{c\delta} \equiv \left( \frac{(c+1/2+\tau/2)^2-\delta^2}{4(c+1/2+\tau/2)^2-1} \right)^{1/2} .$$

Теперь докажем серию тождеств для функций $W_{Lab}$. Операторы $2\text{ctg}2\varphi$ и $\partial_\varphi$, содержащиеся в исследуемом соотношении (151), выразим через более удобные операторы. Использовав известные [6] формулу дифференцирования и соотношения для полиномов Якоби $P_n^{(a+1/2,b+1/2)}$ с верхними индексами, отличающимися на $\pm 1$, убедимся в том, что операторы

$$\begin{aligned} W_{++}^{ab} &\equiv \partial_\varphi - a\,\text{ctg}\varphi + b\,\text{tg}\varphi,\ W_{-+}^{ab} \equiv \partial_\varphi + (a+1)\,\text{ctg}\varphi + b\,\text{tg}\varphi\,, \\ W_{+-}^{ab} &\equiv \partial_\varphi - a\,\text{ctg}\varphi - (b+1)\text{tg}\varphi,\ W_{--}^{ab} \equiv \partial_\varphi + (a+1)\,\text{ctg}\varphi - (b+1)\,\text{tg}\varphi \end{aligned} \tag{153}$$

изменяют индексы $a$ и $b$ функции $W_{Lab}$ на единицу, но сохраняют индекс $L$:

$$\begin{aligned} &W_{\mu\nu}^{ab} W_{Lab}(\varphi) = \langle a+\mu, b+\nu | W_{\mu\nu}^{ab} | ab\rangle_L\, W_{L,a+\mu,b+\nu}(\varphi),\ \mu,\nu = \pm 1; \\ &\langle a+1, b+1 | W_{++}^{ab} | ab\rangle_L = -2\left(n(n+a+b+2)\right)^{1/2}\,, \\ &\langle a-1, b+1 | W_{-+}^{ab} | ab\rangle_L = \left((2n+2a+1)(2n+2b+3)\right)^{1/2}\,, \\ &\langle a+1, b-1 | W_{+-}^{ab} | ab\rangle_L = -\left((2n+2b+1)(2n+2a+3)\right)^{1/2}\,, \\ &\langle a-1, b-1 | W_{--}^{ab} | ab\rangle_L = 2\left((n+1)(n+a+b+1)\right)^{1/2}\,. \end{aligned} \tag{154}$$

Так как четыре оператора $W_{\pm 1,\pm 1}^{ab}$ линейно зависимы,

$$\sum_{\nu=\pm 1} \left( W_{\nu\nu}^{ab} - W_{\nu,-\nu}^{ab} \right) = 0\,, \tag{155}$$

то операторы $2\,\text{ctg}\,2\varphi$ и $\partial_\varphi$ можно представить в виде линейных комбинаций четырех или трех таких операторов. Например,

$$\begin{aligned} \partial_\varphi &= W_{++}^{ab} - b(2b+1)^{-1}\, W_{-+}^{ab} - a(2a+1)^{-1}\, W_{+-}^{ab} + \\ &+ \left( 1 - \frac{a+b+1}{(2a+1)(2b+1)} \right) W_{--}^{ab} = \\ &= \frac{a+b+1}{(2a+1)(2b+1)}\, W_{++}^{ab} + b(2b+1)^{-1} W_{-+}^{ab} + a(2a+1)^{-1}\, W_{+-}^{ab}\,, \end{aligned} \tag{156}$$

$$\begin{aligned} 2\,\text{ctg}2\varphi &= -(2a+1)^{-1} W_{++}^{ab} + (2b+1)^{-1} W_{--}^{ab} + \\ &+ \frac{2(b-a)}{(2a+1)(2b+1)} \left( W_{-+}^{ab} - W_{+-}^{ab} \right) = \\ &= (2a+1)^{-1} \left( W_{-+}^{ab} - W_{++}^{ab} \right) + (2b+1)^{-1} \left( W_{+-}^{ab} - W_{++}^{ab} \right). \end{aligned} \tag{157}$$

Используя равенства (153)–(155), выводим из соотношения (156) две эквивалентные формулы дифференцирования функций $W_{Lab}$:

$$\begin{aligned}\partial_\varphi W_{Lab}(\varphi) &= 2\Big[1-\frac{a+b+1}{(2a+1)(2b+1)}\Big]\times \\ &\times [(n+1)(n+a+b+1)]^{1/2}\,W_{L,a-1,b-1}(\varphi)- \\ &- \frac{b}{b+1}\Big[\,(2n+2a+1)(2n+2b+3)\,\Big]^{1/2} W_{L,a-1,b+1}(\varphi)+ \\ &+ \frac{a}{a+1}\Big[\,(2n+2b+1)(2n+2a+3)\,\Big]^{1/2} W_{L,a+1,b-1}(\varphi)- \\ &- 2[n(n+a+b+2)]^{1/2}\,W_{L,a+1,b+1}(\varphi)\,,\end{aligned} \tag{158}$$

$$\begin{aligned}\partial_\varphi W_{Lab}(\varphi) = \frac{a}{2a+1}&\Big[(2n+2a+1)(2n+2b+3)\Big]^{1/2} W_{L,a-1,b+1}(\varphi)- \\ -\ \frac{a}{2b+1}&\Big[(2n+2b+1)(2n+2a+3)\Big]^{1/2} W_{L,a+1,b-1}(\varphi)- \\ -\ 2\frac{a+b+1}{(2a+1)(2b+1)}&\Big[n(n+a+b+2)\Big]^{1/2} W_{L,a+1,b+1}(\varphi).\end{aligned} \tag{159}$$

Из-за указанной эквивалентности функции $W_{L,a\pm1,b\pm1}$ линейно зависимы.

Использовав разложения (152), (156) и (157), сведем равенство (151) к сумме

$$\begin{aligned}J_p(\varphi,u)\Theta_{c\delta}W_{Lab}(\varphi) = i\sum_{\tau,\mu,\nu=\pm1} C^{a\delta}_{\tau} D^{ab\delta}_{\tau\mu\nu}\times \\ \times\langle a+\mu,b+\nu|W^{ab}_{\mu\nu}|ab\rangle_L\,\Theta_{a+\tau,\delta}(u)W_{L,a+\mu,b+\nu}(\varphi),\end{aligned} \tag{160}$$

$$\begin{aligned}D^{ab\delta}_{\tau1,-1} &\equiv (2(2a)^\tau(a+1)(b-a)-b(2a+1))/(2a+1)(2b+1), \\ D^{ab\delta}_{\tau-1,1} &\equiv D^{ba\delta}_{\tau1,-1}\,,\ D^{ab\delta}_{\tau11}\equiv 1-(2a)^\tau(a+1)/(2a+1), \\ D^{ab\delta}_{\tau,-1,-1} &\equiv (1+3a+3b+8ab)/(2a+1)(2b+1)-D^{ab\delta}_{\tau11},\end{aligned} \tag{161}$$

означающей, что оператор $J$ отображает функции типа $\Theta_{c\delta}(u)W_{Lab}(\varphi)$ в конечные линейные комбинации четырех функций того же типа. Для вычисления интегралов (150) используем этот факт и известные связи [23] между коэффициентами Клебша—Гордона с индексами моментов, отличающимися на $\pm1$. В итоге доказываем правила отбора (138) для оператора $J$ и находим в явном виде все его ненулевые матричные элементы. Для их полного описания приведем формулы

$$\langle\, a+1,b+1|J|ab\,\rangle_{L\ell} = i\ (\,n(n+a+b+2)\,)^{1/2}\times \tag{162}$$

$$\times \quad \left\{ \frac{(\ell+a+b+2)(\ell+a+b+3)(\ell-a-b-1)(\ell-a-b-2)}{(2a+1)(2a+3)(2b+1)(2b+3)} \right\}^{1/2},$$

$$\langle a-1, b+1|J|ab\rangle_{L\ell} = (i/2)\,(\,(2n+2a+1)(2n+2b+1)\,)^{1/2} \times$$

$$\times \quad \left\{ \frac{(\ell+a-b+1)(\ell+b-a+2)(\ell+a-b-1)(\ell+a-b)}{(2a-1)(2a+1)(2b+1)(2b+3)} \right\}^{1/2},$$

в которых $n = (L-a-b)/2$, перечислим свойства симметрии:

$$\begin{aligned} \langle a'b'|J|ab\rangle_{L\ell} &= -\langle ab|J|a'b'\rangle_{L\ell}\,, \\ \langle a+1, b-1|J|ab\rangle_{L\ell} &= -\langle a-1, b+1|J|ab\rangle_{L\ell}\,, \\ \langle a+\mu, b+\nu|J|ab\rangle_{L\ell} &= (-1)^{\mu+\nu+1}\,\langle b+\nu, a+\mu|J|ba\rangle_{L\ell} \end{aligned} \tag{163}$$

и дополнительные правила отбора:

$$\langle a+\nu, a-\nu|J|aa\,\rangle_{L\ell} = 0\,,\ \nu = \pm 1\ \ \ell = 0, 1\,. \tag{164}$$

Коэффициенты $\langle ab|J^n|a'b'\rangle_{L\ell}$ с $n > 1$ можно выразить через суммы матричных элементов оператора $J$, использовав тождество $J^n \equiv JIJ...JIJ$ и равенства (135), (162) и (163). Например, при $n = 2$ имеем

$$\langle ab|J^2|a'b'\rangle_{L\ell} = \sum_{\mu,\nu=\pm 1} \langle ab|J|a'+\mu, b'+\nu\rangle_{L\ell}\,\langle a'+\mu, b'+\nu|J|a'b'\rangle_{L\ell}\,.$$

*Матричные элементы оператора $K$.* Начнем с анализа глобальных свойств матричных элементов оператора $(\gamma)$. Записывая тождества (47) и (51) в базисе гипергармоник и учитывая свойства (74) операторов (25), доказываем соотношения симметрии

$$\begin{aligned} & \langle ab|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell} = \langle a'b'|K(-\gamma)|ab\rangle_{L\ell} = \\ = \;& (-1)^{(a-b+a'-b')/2}\langle ba|K(\gamma)|b'a'\rangle_{L\ell} = \\ = \;& (-1)^{a+a'}\langle ab|K(-\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell} = (-1)^{b+b'}\langle ab|K(-\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell} = \\ = \;& (-1)^{\ell+b'+(L+a+b)/2}\langle ba|K(\pi/2-\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell} = \\ = \;& (-1)^{\ell+a+(L+a'+b')/2}\langle ab|K(\pi/2-\gamma)|b'a'\rangle_{L\ell}\,. \end{aligned} \tag{165}$$

Эти равенства означают, что все функции $\langle ab|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell}$ являются четными или нечетными относительно точки $\gamma = 0$ на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, а в частных случаях $a = b$ и (или) $a' = b'$ такие функции обладают определенной четностью относительно точки $\gamma = \pi/4$ на интервале $(0, \pi/2)$.

Запишем операторные равенства (28), (47) и (48) в базисе гипергармоник. Подставляя между всеми операторными сомножителями единичный оператор (135) и учитывая правило (137), выводим для функций $\langle ab|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell}$

соотношение унитарности и формулы сложения и дифференцирования:

$$\sum_{ab} \langle a'b'|K(\gamma)|ab\rangle_{L\ell}\,\langle ab|K(-\gamma)|a''b''\rangle_{L\ell} = \delta_{a'a''}\,\delta_{b'b''}, \tag{166}$$

$$\langle a'b'|K(\gamma_1+\gamma_2)|a''b''\rangle_{L\ell} = (-1)^L \sum_{ab} \langle a'b'|K(\gamma_1)|ab\rangle_{L\ell}\,\langle ab|K(\gamma_2)|a''b''\rangle_{L\ell}\,, \tag{167}$$

$$i\,\partial_\gamma \langle ab|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell} = \\ = \sum_{\mu,\nu=\pm1} \langle ab|J|a+\mu,b+\nu\rangle_{L\ell}\,\langle a+\mu,b+\nu|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell}\,. \tag{168}$$

Используя формулу дифференцирования (168) и граничные значения (140) и (141), доказываем полезное интегральное соотношение:

$$i \sum_{\mu,\nu=\pm1} \langle ab|J|a+\mu,b+\nu\rangle_{L\ell} \int_0^{\pi/2} d\gamma\, \langle a+\mu,b+\nu|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell} = \\ = (-1)^L\,\delta_{aa'}\delta_{bb'} - (-1)^{(L-2\ell+a'-b')/2}\,\delta_{ab'}\delta_{a'b}\,. \tag{169}$$

Отметим, что формулы (165)–(169) верны в обоих случаях $(-1)^{\ell+L} = \pm1$.

В случае $(-1)^{\ell+L} = 1$ коэффициенты (97) не обращаются в нуль и тождества (144) являются нетривиальными. Выведем из этих тождеств серию дополнительных соотношений для матричных элементов оператора $K(\gamma)$. По определению (55) в точках $\varphi = 0, \pi/2$ все функции $W_{Lab}(\varphi)$ с отличным от нуля индексом $a$ или, соответственно, $b$ обращаются в нуль. Поэтому в пределах $\varphi \to 0, \pi/2$ тождества (144) превращаются в соответствующие и справедливые при любых $a'$ и $b'$ равенства:

$$\langle 0\ell|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell} = (-1)^L B^\ell_{a'b'} W_{La'b'}(\gamma)/\Big((2\ell+1)^{1/2} W_{L0\ell}(0)\Big)\,, \tag{170}$$

$$\langle \ell 0|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell} = (-1)^L B^\ell_{a'b'} W_{La'b'}(\gamma)/\Big((2\ell+1)^{1/2} W_{L\ell 0}(\pi/2)\Big)\,. \tag{171}$$

В силу равенств (156) производная $\partial_\varphi W_{Lab}(\varphi)$ отлична от нуля при $\varphi = 0$ только в случае $a = 1$. Поэтому, продифференцировав тождество (144) по переменной $\varphi$ и положив затем $\varphi = 0$, получим равенство

$$\sum_b B^\ell_{1b} \partial\varphi\, W_{L1b}(0)\,\langle\, 1b|K(\gamma)|a'b'\,\rangle_{L\ell} = (-1)^{L+1}\, B^\ell_{a'b'}\,\partial_\gamma W_{La'b'}(\gamma)\,, \tag{172}$$

в котором сумма вычисляется по всем значениям индекса $b$, допустимым при $a = 1$. Аналогичным способом выводим тождество

$$\sum_{a=0,2} \sum_b B^\ell_{ab}\, \partial^2_\varphi W_{Lab}(0)\,\langle ab|K(\gamma)|a'b'\,\rangle_{L\ell}(\gamma) = (-1)^L\, B^\ell_{a'b'}\,\partial^2_\gamma W_{La'b'}(\gamma)\,, \tag{173}$$

в котором индекс $b$ пробегает все допустимые при $a = 0$ и $a = 2$ значения. Далее по индукции доказываем, что в рассмотренном случае $(-1)^{L+\ell} = 1$ верна серия тождеств

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} \sum_b B^\ell_{n-2k,b}\, \partial^n_\varphi W_{L,n-2k,b}(0)\, \langle n-2k, b|K(\gamma)|a'b'\,\rangle_{L\ell} = \tag{174}$$
$$= (-1)^{L+n}\, B^\ell_{a'b'}\, \partial^n_\gamma W_{La'b'}(\gamma)\,,\ n = 0, 1, ...,$$

где индекс $b$ пробегает все значения, допустимые при данном индексе $a = = n - 2k$, а символом $[n]$ обозначена целая часть числа $n$.

Продолжим описание глобальных свойств матричных элементов оператора $K(\gamma)$ анализом их известных представлений, справедливых в обоих случаях $(-1)^{L+\ell} = \pm 1$. Согласно формулам (139) и (142) такие матричные элементы описывают связь между гипергармониками, аргументы которых связаны кинематическим преобразованием. Коэффициенты такого вида принято называть коэффициентами Рейнала—Реваи. Между нашими обозначениями для таких коэффициентов и обозначениями, использованными в книге [25] и работе [78], имеется простое соответствие:

$$\langle ab|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell} = {}^i\langle ba|b'a'\rangle^k_{L\ell} = (-1)^{a+a'}\langle ba|b'a'\rangle^\gamma_{L\ell}\,, \quad \gamma = \gamma_{ki}\,. \tag{175}$$

Использовав эти связи, перепишем явные выражения коэффициентов Рейнала—Реваи, полученные в работе [78], в виде громоздких сумм:

$$\langle ab|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell}(\gamma) = \frac{\pi}{4}\,(C^n_{ab}\, C^{n'}_{a'b'})^{-1/2}\times$$
$$\times \sum_{cdef} (-1)^{c+d} i^{e+f+b-b'} B^{a'}_{ce}\, B^{b'}_{df}\, B^a_{cf}\, B^b_{ed} \left\{ \begin{array}{ccc} c & e & a \\ f & d & b \\ a' & b' & \ell \end{array} \right\} \times$$
$$\times \sum_{gh} (-1)^g\, C^g_{df}\, C^h_{cd}\, (\cos\gamma)^{2h+c+d}\, (\sin\gamma)^{2g+e+f}\,, \tag{176}$$

где коэффициенты $B^c_{ab}$ и $C^c_{ab}$ заданы формулами (97) и равенствами

$$C^c_{ab} \equiv \frac{\Gamma(2c+a+b+2)}{\Gamma(c+1)\Gamma(a+b+c+2)\Gamma(c+a+3/2)\Gamma(c+b+3/2)}\,.$$

Теперь, развивая идею работы [72], рассмотрим соотношения (168) как систему уравнений для неизвестных функций $\langle ab|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell}$ с фиксированными индексами $L$, $\ell$, $a'$ и $b'$ и всеми возможными значениями $a$ и $b$. Символом $N$ обозначим число таких пар индексов $a$ и $b$. Рассматриваемую систему дополним граничными условиями (140). Исследуем получившуюся краевую задачу известным в теории дифференциальных уравнений [8] способом решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Индексом $i = 1, ..., N$ пронумеруем все возможные пары индексов $a$ и $b$. Предположим, что спектральная задача

$$\sum_{\mu,\nu=\pm 1} \langle ab|J|a+\mu, b+\nu\rangle_{L\ell}\, X_{a+\mu,b+\nu} = -\lambda X_{ab},\ \forall a, b, \tag{177}$$

имеет $N$ различных собственных значений $\lambda = \lambda_j$ и отвечающих им собственных решений $X_{ab} = X^j_{ab}$, $j = 1, ..., N$. Тогда исходной задаче (140), (168) удовлетворяют суммы

$$\langle ab|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell} = \sum_{j=1}^{N} C_j\, X^j_{ab}\, \exp(i\lambda_j\gamma) \tag{178}$$

с коэффициентами $C_j$, подчиненными системе линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^{N} C_j\, X^j_{ab} = (-1)^L\, \delta_{aa'}\, \delta_{bb'}\,, \tag{179}$$

обеспечивающей выполнение граничных условий (140).

Докажем, что все собственные значения задачи (177) не вырождены. Предположим противное: пусть хотя бы одно из них, а именно $\lambda_1$, имеет кратность $s + 1 > 1$. Как известно [8], такому значению отвечает фундаментальное решение системы уравнений (168):

$$Z_{ab}(\gamma) = X^1_{ab}\, P_s(\gamma) \exp(i\lambda_1\gamma),$$

где $P_s$ — полином степени $s$ переменной $\gamma$. Следовательно, общее решение этой системы запишется в виде суммы, содержащей этот же полином:

$$\langle ab|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell} = C_1\, Z_{ab}(\gamma) + \sum_{j=2}^{N} C_j\, X^j_{ab}\, \exp(i\lambda_j\gamma)\,. \tag{180}$$

Однако в общем случае коэффициент Рейнала—Реваи (175), (176) — ряд по целым степеням функций $\cos\gamma$ и $\sin\gamma$. Такой ряд сводится к конечной линейной комбинации функций $\exp(\pm in\gamma)$ с целыми индексами $n = 0, 1, ...$ Такая комбинация не имеет слагаемых с полиномиальной зависимостью от $\gamma$ и поэтому не может быть представлена в виде (180). Полученное противоречие означает, что все собственные числа $\lambda_j$ задачи (177) являются невырожденными и целыми числами.

Решения исследуемой задачи (168), (140) можно представить и в виде однократных либо двухкратных интегралов. Чтобы вывести первое интегральное представление, умножим каждое $(m = -\ell, ..., \ell)$ тождество (143) на соответствующую функцию $C^{\ell m}_{amb0}\,\Theta_{am}(u)$. Получившиеся $(2\ell+1)$ равенства проинтегрируем по переменной $u$ на отрезке $-1 \le u \le 1$ и просуммируем по индексу $m$. Итоговое равенство сведем, использовав соотношения (114) и (116), к одномерному интегральному тождеству по переменной $\varphi$:

$$\langle\, ab|K(\gamma)|a'b'\,\rangle_{L\ell}(\gamma) = W^{-1}_{Lab}(\varphi)\,\int_{-1}^{1} du\, K^{\ell}_{aba'b'}(\varphi, u; \gamma)\, W_{La'b'}(\varphi'(\varphi, u; \gamma))\,. \tag{181}$$

Заменив переменную интегрирования $u$ на $\varphi'$ по правилам (122)–(127), перепишем это тождество в виде

$$\langle\, ab|K(\gamma)|a'b'\,\rangle_{L\ell}(\gamma) = W^{-1}_{Lab}(\varphi)\,\int_{C_+(\varphi;\gamma)}^{C_-(\varphi;\gamma)} d\varphi'\, K^{\ell}_{aba'b'}(\varphi, \varphi'; \gamma)\, W_{La'b'}(\varphi')\,. \tag{182}$$

Использовав определения (79) и (131), представим полученное соотношение в виде равенства

$$\langle\varphi|h^{\ell}_{aba'b'}(\gamma)|\tilde{W}_{La'b'}(\varphi)\rangle = \langle ab|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell}\,\tilde{W}_{Lab}(\varphi). \tag{183}$$

Теперь умножим тождество (181) на функцию $\rho^2(\varphi)W_{Lab}(\varphi)$. Применив условия ортонормированности (66) для таких функций, проинтегрируем обе части получившегося соотношения по переменной $\varphi$ на отрезке $[0, \pi/2]$. В результате матричный элемент $\langle\, ab|K(\gamma)|a'b'\,\rangle_{L\ell}$ представится в виде двойного интеграла (133), равного интегралу (134).

Приступим к выводу дискретных представлений функций $\langle\, ab|K(\gamma)|a'b'\,\rangle_{L\ell}$ в виде однократных или двухкратных сумм по произвольным узловым значениям совокупностей аргументов $\Omega$ или, соответственно, $u$ и $\varphi$.

Пусть $N$ — число гипергармоник (54) с данными индексами $L, \ell$ и $m$. Запишем пятимерное тождество (142) в $N$ произвольных, но различных точках $\Omega = \Omega_i$, $i = 1, ..., N$, единичной гиперсферы $\mathcal{S}^5_{xy}$, отличных от точек с координатами $\Omega_p$ (случай (12)) или $\Omega_l$ (случай (13)–(15)). Тогда получим систему из $N$ линейных уравнений для неизвестных функций $\langle ab|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell}$ с фиксированными индексами $L, \ell$, $a'$ и $b'$ и всеми возможными при таком условии индексами $a$ и $b$:

$$Y^{\ell m}_{La'b'}(\Omega'(\Omega_i;\gamma)) = \sum_{ab}\langle ab|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell}\, Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega_i)\,, \quad i = 1, ..., N. \tag{184}$$

Индексы $a$ и $b$ пронумеруем индексом $j = 1, ..., N$, чтобы переписать уравнения (184) в виде, удобном для численного решения:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N} Y_{ij}\, X_j \quad &= \quad Y^{\ell m}_{La'b'}(\Omega'(\Omega_i;\gamma))\,, \qquad (185) \\ X_j \quad &\equiv \quad \langle a_j b_j | K(\gamma) | a' b' \rangle_{L\ell}\,, \quad Y_{ij} \equiv Y^{\ell m}_{La_j b_j}(\Omega_i)\,,\ i,j = 1,...,N. \end{aligned}$$

Так как гипергармоники $Y^{\ell m}_{a_j b_j}(\Omega)$ с $j = 1,...,N$ линейно независимы на $\mathcal{S}^5_{xy}$, то матрица $\mathbf{Y}$ системы (185) не вырождена при любом выборе точек $\Omega_i$. Следовательно, эта система всегда имеет единственное решение. Оно инвариантно относительно выбора узлов $\Omega_i$ и представимо в виде

$$\langle a_j b_j | K(\gamma) | a' b' \rangle_{L\ell} = \sum_{i=1}^{N} Y^{-1}_{ji}\, Y^{\ell m}_{La'b'}(\Omega'(\Omega_i;\gamma))\,, \quad j = 1,...,N. \qquad (186)$$

Идея описанной дискретизации тождества (142) и использования представления (186) для вычисления коэффициентов Рейнала—Реваи принадлежит Эфросу [82]. Развивая эту идею, выведем для таких коэффициентов более удобное с вычислительной точки зрения дискретное представление.

Пусть теперь $N$ — число возможных значений индекса $a$ гипергармоник с данными $L$,$\ell$ и $m$, а $M$ — число возможных значений индекса $b$ таких гипергармоник при фиксированном индексе $a$. Все возможные значения индекса $a$ расположим в порядке возрастания и пронумеруем целым индексом: $a = a_i, i = 1,...,N, a_1 < a_2 < ... < a_N$. Аналогичное соответствие введем для всех возможных при данном $a$ значений индекса $b$: $b = b_j, j = 1,...,M, b_1 < b_2 < ... < b_M$. Зафиксируем значения индексов $a'$ и $b'$. Для упрощения вычислений положим $m = (1 - (-1)^{\ell+L})/2$. Тождество (143) с выбранными $a'$, $b'$ и $m$ запишем в виде

$$\sum_{j=1}^{N} \Theta_{a_j m}(u)\, X_j(\varphi;\gamma) = Q_{a'b'}(u,\varphi;\gamma)\,, \qquad (187)$$

$$X_j(\varphi;\gamma) \equiv \sum_{t=1}^{M} (b_t + 1/2)^{1/2}\, C^{\ell m}_{a_j m b_t 0}\, W_{La_j b_t}(\varphi) \langle a_j b_t | K(\gamma) | a' b' \rangle_{L\ell}\,. \qquad (188)$$

На интервале $(-1,1)$ зададим некоторую сетку узлов $u_i$, $i = 1,...,N$. Запишем тождество (187) на этой сетке. В результате такой дискретизации получим систему линейных уравнений для неизвестных функций (188):

$$\sum_{j=1}^{N} \Theta_{ij}\, X_j(\varphi;\gamma) = Q_{a'b'}(u_i,\varphi;\gamma)\,,\ \Theta_{ij} \equiv \Theta_{a_j m}(u_i)\,, \quad i,j = 1,...,N\,. \qquad (189)$$

На интервале $(-1,1)$ функции $\Theta_{am}(u)$ с фиксированным индексом $m$ и различными индексами $a$ линейно независимы [6]. Поэтому при любом выборе сетки матрица $\boldsymbol{\Theta}$ системы (189) не вырождена. Обратив эту матрицу, для каждого $j$ получим соответствующее тождество по переменной $\varphi$:

$$\sum_{t=1}^{M}(b_t+1/2)^{1/2}\,C^{\ell m}_{a_j m b_t 0}\,W_{La_j b_t}(\varphi)\,\langle a_j b_t|K(\gamma)|a'b'\rangle = \qquad (190)$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\Theta^{-1}_{ji}\,Q_{a'b'}(u_i,\varphi;\gamma)\,.$$

Записав каждое такое тождество в узлах $\varphi_s$, $s=1,...,M$, произвольной сетки, заданной на интервале $(0,\pi/2)$, получим соответствующую систему линейных уравнений для искомых функций $\langle ab_t|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell}$ с одинаковыми индексами $a=a_j$ и $a'$, $b'$, но разными индексами $b_t$:

$$\sum_{t=1}^{M}W_{st}\,\langle a_j b_t|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell} = \sum_{i=1}^{N}\Theta^{-1}_{ji}\,Q_{a'b'}(u_i,\varphi_s;\gamma)\,,\quad s=1,...,M. \qquad (191)$$

Докажем, что матрица $\mathbf{W}$,

$$W_{st}\equiv(b_t+1/2)^{1/2}\,C^{\ell m}_{a_j m\, b_t 0}\,W_{La_j b_t}(\varphi_s)\,,\quad s,t=1,...,M, \qquad (192)$$

системы уравнений (191) не вырождена. Введя обозначения $\alpha\equiv a_j$, $\beta\equiv\equiv b_1$, $z\equiv\cos 2\varphi$ и используя определение (55) функций $W_{Lab}$, запишем все матричные элементы (192) в виде

$$W_{st}=2^{t-1}\,(b_t+1/2)^{1/2}\,C^{\ell m}_{a_j m\, b_t 0}\,N_{La_j b_t}\,(\sin\varphi_s)^{a_j}\,(\cos\varphi_s)^{b_1}\,F_{st}\,, \qquad (193)$$

где матрица $\mathbf{F}$ составлена из узловых значений функций

$$f_t(z)\equiv(1+z)^{t-1}\,P^{(\alpha,\beta+2(t-1))}_{M-t}(z)\,,\quad t=1,...,M, \qquad (194)$$

по правилам

$$F_{st}\equiv f_t(z_s)\,,\quad z_s\equiv\cos 2\varphi_s\,,\quad s,t=1,...,M\,. \qquad (195)$$

Применив известные рекуррентные соотношения для полиномов Якоби [6], представим все функции (194) в виде разложений

$$f_t(z)=\sum_{k=0}^{M-1}C_{tk}\,P^{(\alpha,\beta+M-1)}_{k}(z)\,,\quad t=1,...,M, \qquad (196)$$

по системе из $M$ функций $P^{(\alpha,\beta+M-1)}_{k}(z)$, $k=1,...,M$. Известно [6], что такие полиномы линейно независимы на интервале $z\in(-1,1)$. В силу представления (196) этим же свойством обладает и система из $M$ функций (194).

Поэтому при любом выборе узлов $\varphi_s$ матрица (195), а значит, и матрица (193), имеют обратные матрицы $\mathbf{F}^{-1}$ и $\mathbf{W}^{-1}$. Следовательно, система (191) всегда имеет единственное решение. Оно не зависит от выбора узлов $u_i$ и $\varphi_s$ и представимо в виде

$$\langle a_j b_t|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell} = \sum_{s=1}^{M} W_{ts}^{-1} \sum_{i=1}^{N} \Theta_{ji}^{-1} Q_{a'b'}(u_i, \varphi_s; \gamma)\,,\ t = 1, ..., M. \quad (197)$$

Выведем соотношения, позволяющие исследовать такие локальные свойства функций $\langle ab|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell}$, как асимптотики в выбранной точке $\gamma_0$ и положения экстремумов.

Применив формулы (48) и (138), разложим функцию $\langle ab|K(\gamma_0+\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell}$ в ряд Тейлора с центром в точке $\gamma_0$:

$$\langle ab|K(\gamma_0 + \gamma)|a'b'\rangle_{L\ell} = \sum_{n=0}^{\infty}(-i\gamma)^n \sum_{\mu,\nu=0}^{n} \langle ab|J^n|a - n + 2\mu, b - n + 2\nu\rangle_{L\ell}\times$$

$$\times\langle a - n + 2\mu, b - n + 2\nu|K(\gamma_0)|a'b'\rangle_{L\ell}\,. \quad (198)$$

При $\gamma \to 0$ такой ряд можно аппроксимировать его конечной подсуммой и использовать ее для качественного описания поведения функции $\langle ab|K(\gamma_0+$ $+\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell}$ в малой окрестности точки $\gamma_0$. В качестве простых примеров рассмотрим случаи $\gamma_0 = 0, \pi/2$. Положим в ряде (198) сначала $\gamma_0 = 0$, а затем $\gamma_0 = \pi/2$. Далее, учитывая равенства (138), (140) и (141), получаем разложения

$$\langle ab|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell} = (-1)^L \sum_{n=0}^{\infty}(-i\gamma)^{N+n}\langle ab|J^{N+n}|a'b'\rangle_{L\ell}\,, \quad (199)$$

$$\langle ab|K(\pi/2 + \gamma)|a'b'\rangle_{L\ell} = (-1)^{(L+2\ell+a'-b')/2}\sum_{n=0}^{\infty}(-i\gamma)^{N'+n}\langle ab|J^{N'+n}|b'a'\rangle_{L\ell}\,,$$

$$N \equiv \max\{|a' - a|, |b' - b|\}\,, \quad N' \equiv \max\{|a' - b|, |b' - a|\}\,,$$

согласно которым при $\gamma \to 0, \pi/2$ функции $\langle ab|K(\gamma)|ab\rangle_{L\ell}$ стремятся к $\pm 1$, если $a' = a, b' = b$ или $a' = b, b' = a$, а в других случаях сходятся к нулю не медленнее, чем соответствующие степенные функции $\gamma^N$ и $(\pi/2 - \gamma)^{N'}$.

Производная функции $\langle ab|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell}$ обращается в нуль тогда и только тогда, если равна нулю правая часть уравнения (168). Поэтому положение локальных экстремумов этой функции определяется уравнением

$$\sum_{\mu,\nu=\pm 1} \langle ab|J|a + \mu, b + \nu\rangle_{L\ell}\, \langle a + \mu, b + \nu|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell} = 0\,. \quad (200)$$

Теперь докажем теорему сложения для полиномов Якоби с полуцелыми верхними индексами. Теорема сложения для полиномов Якоби с целыми верхними индексами приведена в книге [23] в виде теоремы сложения для $D$-функций Вигнера. Теорема сложения для полиномов Якоби в случае полуцелых верхних индексов не упоминается ни в этой книге, ни в специальных математических справочниках [6] и [7]. Поэтому представляется важным рассмотреть этот случай. Использовав определения (55) функций $W_{Lab}$, перепишем тождество (144) в терминах полиномов Якоби. Таким образом, доказываем следующую теорему.

**Теорема 1.** *При любых целых индексах*

$$\ell, a, b, a', b'; L = 2n + a + b = 2n' + a' + b';\ (-1)^{a+b+\ell} = 1$$

*и условиях* $\varphi' = \varphi - \gamma \neq 0,\ \pm\pi/2,\ \pm\pi$ *верна формула сложения*

$$\begin{aligned} P_{n'}^{(a'+1/2,\, b'+1/2)}(\cos 2\varphi') &= (-1)^{a'+b'} \sum_{ab} \frac{B^{\ell}_{ab} N_{Lab}}{B^{\ell}_{a'b'} N_{La'b'}} \langle ab|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell} \times \\ &\times \frac{(\sin\varphi)^a\,(\cos\varphi)^b}{(\sin\varphi')^{a'}(\cos\varphi')^{b'}} P_n^{(a+1/2,\, b+1/2)}(\cos 2\varphi)\,, \end{aligned}$$

*где коэффициенты* $N_{Lab}$ *и* $B^{\ell}_{ab}$ *заданы формулами* (56) и (97).

Обсудим новые способы вычисления коэффициентов Рейнала—Реваи. Коэффициенты Рейнала—Реваи (175) можно найти интегрированием системы дифференциальных уравнений (168) с граничным условием (140) или решением эквивалентной матричной задачи (177)–(179), а также вычислением одномерных интегралов (181), (182) или же решением совокупности конечных систем линейных уравнений (187)–(192). Размерность матрицы $\mathbf{Y}$ системы (185) возрастает при $L \to \infty$, как $O(L^4)$. Поэтому при больших $L$ вместо представления (186) разумнее использовать представление (197), размерности матриц $\mathbf{\Theta}$ и $\mathbf{W}$ которого растут гораздо медленнее. Действительно, для вычисления по формулам (187)–(192), (197) всех коэффициентов Рейнала—Реваи $\langle a_j b_t|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell}$ с данными индексами $L, \ell$ и $a', b'$ необходимо один раз обратить матрицу $\mathbf{\Theta}$ размерности $N \sim L$, построить $N$ обратных матриц $\mathbf{W}^{-1}$ размерности $M \sim L$ и, наконец, вычислить суммы (197) для всех $j = 1, ..., N$ и $t = 1, ..., M$.

Существенно сократить объем математических операций, необходимых для вычисления коэффициентов Рейнала—Реваи любым из перечисленных выше способов, позволяют соотношения симметрии (165) и формула сложения (167). Применив эту формулу, можно вычислить коэффициенты Рейнала—Реваи при кинематическом угле $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ по известным значениям этих коэффициентов для $\gamma = \gamma_1$ и $\gamma = \gamma_2$. В предельных случаях (6) и (7) коэффициенты Рейнала—Реваи можно аппроксимировать конечными суммами соответствующих рядов (199). Тщательный контроль точности вычисления коэффициентов Рейнала—Реваи любым из вышеупомянутых способов можно осуществить, подставив результаты вычислений в левые части соотношений (143), (144), (166), (169), (172)–(174) и (200) и сравнив затем полученные значения со значениями соответствующих правых частей этих же соотношений.

В заключение перечислим формулы, доказанные ранее в других работах, но более сложными способами, чем упомянутые выше. Формулы (162)–(164) доказаны в работе [79] предельным переходом $\gamma \to 0$ в явных выражениях для коэффициентов Рейнала—Реваи (176). В этой же работе для таких коэффициентов были выведены системы линейных уравнений типа (168) и доказано, что собственные числа задачи (177) являются целыми. Формулы (170) и (171) получены в работе [80] как частный случай сложных рекуррентных соотношений. Интегральное представление (181)–(183) впервые доказано в работе [65].

## 3. УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА И ФАДДЕЕВА

Основная цель этого раздела — описать, использовав понятие и свойства кинематического преобразования, редукцию уравнений Шредингера и Фаддеева, изначально записанных в $\mathcal{R}^6$, к системам уравнений в $\mathcal{R}^2_+$ или $\mathcal{R}^1_+$. В п. 3.1 перечислены некоторые известные операторные и спектральные свойства свободного трехчастичного гамильтониана. В п. 3.2 поясняются матричные представления центрального и $S$-волнового взаимодействий в угловых базисах. Строению и угловому анализу уравнений Шредингера и Фаддеева посвящены п. 3.3 и 3.4.

**3.1. Основные свойства свободного гамильтониана.** В квантовой механике [10] состояния $|\varepsilon\rangle$ системы частиц классифицируются наборами $\varepsilon$ сохраняющихся квантовых чисел. Состоянию $|\varepsilon\rangle$ ставится в соответствие регулярная волновая функция $\Psi^\varepsilon(\mathbf{r}) \equiv \langle \mathbf{r}|\varepsilon\rangle$. Волновая функция $\Psi^\varepsilon$ трех свободных частиц подчинена уравнению Шредингера

$$(H_0(\mathbf{r}) - E)\Psi^\varepsilon(\mathbf{r}) = 0\,, \tag{201}$$

где числовой параметр $E$ имеет смысл полной энергии, а свободный трехчастичный гамильтониан $H_0$ в представлении $|\mathbf{r}\rangle = |\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$ эквивалентен сумме двух операторов Лапласа:

$$H_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv -\triangle_x - \triangle_y\,,\ \triangle_q \equiv \sum_{\mu=1}^{3} \partial^2_{q_\mu},\ \mathbf{q} = \mathbf{x}, \mathbf{y}\,. \tag{202}$$

Здесь и далее для ясности в скобках за символом рассматриваемого оператора указываем при необходимости переменные, на которые он действует.

Перечислим другие часто используемые представления гамильтониана $H_0$. Использовав определения операторов угловых моментов (36) и (37), можно переписать гамильтониан (202) в виде суммы операторов, действующих на модули векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и их сферические углы, либо на гиперрадиус $r$ и гиперсферические углы $\Omega$:

$$H_0(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -x^{-2}\partial_x(x^2\partial_x) - y^{-2}\partial_y(y^2\partial_y) + x^{-2}\mathbf{l}_x^2(\hat{x}) + y^{-2}\mathbf{l}_y^2(\hat{y})\,, \tag{203}$$

$$H_0(r,\Omega) = -r^{-5}\partial_r(r^5\partial_r) + r^{-2}\mathbf{L}^2(\Omega)\,. \tag{204}$$

Использовав эти представления и свойства (89) оператора $\mathbf{L}^2$, несложно показать, что для любой функции $Q$ переменных $x, y$; $r, \varphi$ или $r$ верны следующие равенства:

$$\begin{aligned} H_0(\mathbf{x},\mathbf{y})\,(xy)^{-1}\mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x},\hat{y})Q(x,y) &= -(xy)^{-1}\mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x},\hat{y})\tilde{H}_{0ab}(x,y)Q(x,y), \\ \tilde{H}_{0ab}(x,y) &\equiv \partial_x^2 + \partial_y^2 - a(a+1)y^{-2} - b(b+1)x^{-2}\,; \end{aligned} \tag{205}$$

$$\begin{aligned} H_0(r,\Omega)(xy)^{-1}\mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x},\hat{y})Q(r,\varphi) &= (xy)^{-1}\mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x},\hat{y})\tilde{H}_{0ab}(r,\varphi)Q(r,\varphi), \\ \tilde{H}_{0ab}(r,\varphi) &\equiv \partial_r^2 + r^{-1}\partial_r - r^{-2}\tilde{L}_{ab}^2(\varphi)\,; \end{aligned} \tag{206}$$

$$\begin{aligned} H_0(r,\Omega)(xy)^{-1}Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega)\,Q(r) &= -r^{-2}\,Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega)\tilde{H}_{0L}(r)\,Q(r)\,, \\ \tilde{H}_{0L}(r) &\equiv \partial_r^2 + r^{-1}\partial_r - r^{-2}(L+2)^2\,. \end{aligned} \tag{207}$$

Опишем два способа разделения переменных в уравнении (201) и его частные и общие решения. В силу равенств (25), (36), (37), (202) и (204)

$$[H_0, Q]_- = 0\,, \qquad Q = \mathbf{l}^2, l_3, \mathbf{l}_x^2, \mathbf{l}_y^2, \mathbf{L}^2, P_1, P_2, P, T\,. \tag{208}$$

Благодаря этим коммутационным соотношениям, собственные функции операторов $\mathbf{l}^2, l_3$ и $P$ являются собственными и для оператора $H_0$. Поэтому решение $\Psi^\varepsilon$ уравнения (201) с набором квантовых чисел $\varepsilon = (\ell, m, \sigma)$ ищем в виде функции (84), подчиненной условиям (85) и представленной бисферическим рядом (86). Заменим им функцию $\Psi^\varepsilon$ в уравнении (201). Использовав равенства (206), спроектируем полученное уравнение на бисферический базис. Тогда для искомых бисферических компонент $U_{ab}^\ell$ получим бесконечную систему незацепляющихся по индексам $a$ и $b$ уравнений:

$$\left(\tilde{H}_{0ab}(r,\varphi) + E\right)U_{ab}^\ell(r,\varphi) = 0\,. \tag{209}$$

Искомое решение $U^\ell_{ab}$, $(-1)^{a+b}=\sigma$, каждого такого уравнения заменим его рядом (88) по базисным функциям $\tilde W_{Lab}$. Получившееся уравнение спроектируем, использовав свойство (82) оператора $\tilde L^2_{ab}$, на такой базис. Тогда для каждой неизвестной функции $U^\ell_{Lab}$, $L=a+b, a+b+2, ...$, получим уравнение

$$(\tilde H_{0L}(r)+E)\,U^\ell_{Lab}(r)=0\,. \tag{210}$$

Сведем его подстановкой

$$z=\sqrt{E}r, \quad \nu=L+2\,, \quad U^\ell_{Lab}(r)=Z_\nu(z)$$

к каноническому уравнению для цилиндрических функций Бесселя [6]:

$$\left(z^2\partial_z^2+z\partial_z+z^2-\nu^2\right)Z_\nu(z)=0\,. \tag{211}$$

Это уравнение, а значит и исходное уравнение (210), имеет нетривиальное регулярное решение $J_{L+2}$ только при $E>0$. Следовательно, при любых допустимых индексах $a,b$ и $L$

$$U^\ell_{Lab}(r)=J_{L+2}(\sqrt{E}r)\,, \quad E>0\,, \tag{212}$$

а общее регулярное решение $U^\ell_{ab}$ уравнения (210) описывается равенствами

$$U^\ell_{ab}(r,\varphi)=\left\{\begin{array}{cc} 0, & E<0 \\ \sum\limits_L C^L J_{L+2}(\sqrt{E}r)\,\tilde W_{Lab}(\varphi), & E>0 \end{array}\right., \tag{213}$$

где $C^L$ — произвольные числа. По построению решению (212) уравнения (210) отвечает собственная функция оператора $H_0$ и всех коммутирующих с ним операторов (208):

$$\Psi^\varepsilon_0(\mathbf{r})=r^{-2}\,J_{L+2}(\sqrt{E}r)\,Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega)\,, \quad \varepsilon=(L,a,b,\ell,m,\sigma)\,. \tag{214}$$

Линейная комбинация таких функций со всеми возможными индексами $L,a$ и $b$ — искомое решение $\Psi^\varepsilon$, $\varepsilon=(\ell,m,\sigma)$, уравнения (201).

Итак, в свободном уравнении Шредингера (201) можно последовательно отделить переменные $\hat x,\hat y$ от переменных $r,\varphi$, а затем и переменные $r$ и $\varphi$ друг от друга. Разделение переменных достигается проектированием исходного уравнения на бисферический базис и последующим за ним проектированием каждого получившегося уравнения (209) на соответствующий базис из функций $\tilde W_{Lab}$.

Альтернативный, но эквивалентный способ основан на использовании для искомой функции $\Psi^\varepsilon$, $\varepsilon=(\ell,m,\sigma)$, гиперсферического анзаца (84), (87) и состоит в одноэтапном разделении переменных $\Omega$ от $r$ путем проектирования уравнения (201) сразу на гиперсферический базис. С помощью формул (207) нетрудно проверить, что в результате такого проектирования для искомых гиперсферических компонент $U^{\ell}_{Lab}$ получаются те же самые уравнения (210), что и в ранее описанном способе.

Известно [14,19], что множество функций (214) со всеми возможными компонентами мультииндекса $\varepsilon$ является фундаментальной системой регулярных решений (ФСР) свободного уравнения Шредингера: любое другое регулярное решение представимо в виде конечной или бесконечной линейной комбинации функций (214) и произвольных числовых коэффициентов. Например, решение, описывающее плоскую волну и отвечающее набору сохраняющихся квантовых чисел $\varepsilon = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$ из шести координат двух трехмерных импульсов рассеяния $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, представимо в виде [25]

$$\begin{aligned}\Psi_0^{\mathbf{p},\mathbf{q}}(\mathbf{r}) &= \exp(i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})\,(\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})) = \frac{8\pi^3}{E}\sum_{\ell m}\sum_{ab}\sum_{L} i^L\,\left(Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega_s)\right)^* \times \\ &\times\; r^{-2}\,J_{L+2}(\sqrt{E}r)\,Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega)\,, \quad \mathbf{s}\equiv(\mathbf{p},\mathbf{q})\,,\; E = p^2+q^2\,. \qquad (215)\end{aligned}$$

**3.2. Матричное представление операторов взаимодействия.** Известный способ изящного решения задачи проектирований операторных соотношений на угловые базисы основан на использовании матричных представлений операторов. Приведем и прокомментируем такие представления для двух типов парных операторов взаимодействия $V_i(\mathbf{r}_i)$, $i = 1,2,3$, действующих в пространстве $\mathcal{R}^6$ только на относительные координаты $\mathbf{x}_i$ соответствующей пары частиц с номерами $j$ и $k$.

Напомним относительные понятия собственного (несобственного) координатного представления и углового базиса. Координатное представление $\langle\mathbf{r}_i|$ или система координат $\mathbf{r}_i$ называется собственным для некоторого оператора $V_i$ или функции $\Psi_i$, помеченных одинаковым индексом $i$. Два других представления $\langle\mathbf{r}_k|$, $k\neq i$, будут несобственными для такого оператора или такой функции. Аналогично определяются собственные и несобственные угловые базисы: угловой базис, составленный из функций аргументов $\mathbf{r}_i$ ($\mathbf{r}_k$), называется собственным (несобственным) для $V_i$ или $\Psi_i$.

Ниже для краткости опустим индексы $i$ и $k$, представление $\langle\mathbf{r}|\equiv\langle\mathbf{r}_i|$ или $\langle\mathbf{r}'|\equiv\langle\mathbf{r}_k|$ считаем собственным или несобственным.

Оператор $V(\mathbf{r})$, действующий в собственном координатном представлении $\langle\mathbf{r}|$ на произвольную функцию $\Psi(\mathbf{r})$ как оператор обычного умножения на функцию-потенциал $V(x)$, называют центральным или сферически-симметричным парным взаимодействием [10]. В $\mathcal{R}^6$ оператор $V(\mathbf{r})$ не действует на переменные $\mathbf{y}$, а функция $V(x)$ не зависит от углов $\hat{x}$. Поэтому ненулевые элементы матриц оператора $V(\mathbf{r})$ в его собственных угловых базисах задаются формулами

$$\langle b\beta|V(\mathbf{r})|b\beta\rangle \;=\; \langle\ell mab|V(\mathbf{r})|\ell mab\rangle = V(x)\,, \qquad (216)$$

$$\begin{aligned}\langle L\ell mab|V(\mathbf{r})|L'\ell mab\rangle &= \langle L\tilde{a}b|V(r\cos\varphi)|L'\tilde{a}b\rangle = \\ &= \int_0^{\pi/2} d\varphi\,\tilde{W}_{Lab}(\varphi)V(r\cos\varphi)\tilde{W}_{L'ab}(\varphi) \equiv V_{ab}^{LL'}(r)\,.\end{aligned}$$

Использовав эти правила отбора и угловые бра- и кет-операторы, определенные равенствами (63)–(65), запишем центральное взаимодействие в виде бесконечной суммы $b$-волновых операторов $V^b$:

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{b=0}^{\infty} V^b(\mathbf{r})\,, \tag{217}$$

$$V^b(\mathbf{r}) = \sum_{\beta=-b}^{b} |Y_{b\beta}(\hat{x})\rangle\, V(x)\, \langle Y_{b\beta}(\hat{x})|\,, \tag{218}$$

$$V^b(\mathbf{r}) = \sum_{\ell m}\sum_{a} |\mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x},\hat{y})\rangle\, V(x)\, \langle \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x},\hat{y})|\,, \tag{219}$$

$$V^b(\mathbf{r}) = \sum_{\ell m}\sum_{a}\sum_{LL'} |Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega)\rangle\, V_{ab}^{LL'}(r)\, \langle Y_{L'ab}^{\ell m}(\Omega)|\,. \tag{220}$$

Как следует из матричных представлений (218)–(220), каждый оператор $V^b$ не является проектором ($V^bV^b \neq I$), но обладает проекционными свойствами:

$$\big(V^b(\mathbf{r}) - \delta_{bb'}V(x)\big)\,|Q_{b'\beta}\rangle = 0, \quad \forall |Q_{b'\beta}\rangle = |b'\beta\rangle,\ |\ell m a' b'\rangle,\ |L\ell mab'\rangle, \tag{221}$$

и поэтому отображает произвольную функцию $\Psi(\mathbf{r})$ в собственную функцию оператора $\mathbf{l}_x^2$, отвечающую его собственному значению $b(b+1)$.

В ядерной физике операторы $V^b$ с индексом $b = 0, 1$ называются $S$- и $P$-волновыми взаимодействиями. В рядах (218)–(220) для $S$- и $P$-волновых взаимодействий $a = \ell, b = 0$ и, соответственно, $a = \ell, \ell \pm 1$, $b = 1$.

**3.3. Строение и угловой анализ уравнения Шредингера.** Уравнение Шредингера для волновой функции $\Psi^\varepsilon$ состояния $|\varepsilon\rangle$ трех частиц с парными взаимодействиями $V_i$ обычно приводится в компактной (операторной) форме [10]:

$$(H - E)\Psi^\varepsilon = 0\,, \quad H \equiv H_0 + V\,,\ V \equiv \sum_{k=1}^{3} V_k, \tag{222}$$

и подразумевается, что все парные взаимодействия заданы в своих собственных координатах, а все операторы и искомое решение $\Psi^\varepsilon$ — в каком-то одном координатном представлении $\langle \mathbf{r}_i|$. Ясно, что при любом выборе одного из трех таких представлений оно оказывается несобственным для двух взаимодействий, а именно для $V_j$ и $V_k$. Поясним, почему это непреодолимое в рамках шредингеровской постановки задачи трех частиц обстоятельство существенно затрудняет аналитическое исследование данной задачи. С этой целью рассмотрим случай центральных взаимодействий.

Запишем уравнение (222), учитывая общепринятые и перечисленные выше правила и определение (26) оператора $K(\gamma)$. Тогда в пространстве $\mathcal{R}^6$ получим дифференциальное уравнение Шредингера в его канонической форме:

$$\left( H_0(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) + V_i(x_i) - E + \sum_{k \neq i} K(\gamma_{ki}) V_k(x_i) \right) \Psi^{\varepsilon}(\mathbf{r}_i) = 0\,. \tag{223}$$

Здесь $V_i(x_i)$ — функция трех аргументов $\mathbf{x}_i$, а два кинематических образа — функции шести переменных $\mathbf{r}_i$:

$$K(\gamma_{ki}) V_k(x_i) = V_k(x_k(\mathbf{r}_i))\,, \quad k \neq i\,. \tag{224}$$

Именно из-за такой функциональной зависимости построить точное решение исходного уравнения Шредингера (223) не так просто даже в случае парных взаимодействий, описываемых в собственных координатах элементарными функциями.

Напомним, что мешает построению точного решения методом разделения переменных. В случае центральных взаимодействий полный гамильтониан $H$ удовлетворяет соотношениям

$$[H, Q]_- = 0, \quad Q = \mathbf{l}^2, l_3, P; \quad [H, q]_- \neq 0, \quad q = \mathbf{L}^2, \mathbf{l}_x^2, \mathbf{l}_y^2\,, \tag{225}$$

поэтому сохраняется набор квантовых чисел $\varepsilon = (\ell, m, \sigma)$ и для искомой функции $\Psi^{\varepsilon}$ верны представления (84)–(86). В уравнении (223) заменим функцию $\Psi^{\varepsilon}$, кинематические образы (224) и взаимодействие $V_i(x_i)$ их бисферическими рядами, записанными в представлении $\langle \mathbf{r}_i |$ по соответствующим правилам (86), (129) и (219). Использовав равенства (119), (120) и (206), спроектируем получившееся уравнение на его собственный бисферический базис из функций $\mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$. Тогда для неизвестных бисферических компонент $U_{ab}^{\ell}$ получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}(\tilde{H}_{0ab}(r, \varphi_i) - V_i(r \cos\varphi_i) + E)\, U_{ab}^{\ell}(r, \varphi_i) = \\ = \sum_{k \neq i} \sum_{a'b'} \Gamma_{aba'b'}^{\ell m} \left( \int_{C_-(\varphi_i, \gamma_{ik})}^{C_+(\varphi_i, \gamma_{ik})} d\varphi_k K_{aba'b'}^{\ell}(\varphi_i, \varphi_k; \gamma_{ki}) V_k(r \cos\varphi_k) \right) U_{ab}^{\ell}(r, \varphi_i).\end{gathered} \tag{226}$$

Кинематические образы (224) в их несобственном бисферическом базисе имеют недиагональные матрицы. Поэтому число уравнений системы (226) бесконечно по индексам $a$ и $b$, а сами уравнения зацепляются по индексам $a'$ и $b'$, содержат коэффициенты $\Gamma^{\ell m}_{aba'b'}$ (интегралы (120) от трех бисферических функций) и достаточно сложные интегралы от двух потенциалов.

Опишем нетрадиционный способ редукции уравнения (223). Оператор $H_0$, функцию $\Psi^\varepsilon$ в выражении $H_0\Psi^\varepsilon$ и оба сомножителя произведения $V_i\Psi^\varepsilon$ запишем в представлении $\langle \mathbf{r}_i|$, а сомножители обоих $(k \neq i)$ произведений $V_k\Psi^\varepsilon$ — в соответствующих собственных представлениях $\langle \mathbf{r}_k|$. Тогда получим уравнение

$$( H_0(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) + V_i(x_i) - E )\ \Psi^\varepsilon(\mathbf{r}_i) + \sum_{k\neq i} K(\gamma_{ki})\, ( V_k(x_k)\, \Psi^\varepsilon(\mathbf{r}_k) ) = 0\,. \quad (227)$$

Используя анзац (84), (86) и формулы (130), (217)–(219), сводим нестандартное уравнение Шредингера (227) к системе уравнений

$$\begin{aligned} &(\tilde{H}_{0ab}(r, \varphi_i) - V_i(r\cos\varphi_i) + E)\, U^\ell_{ab}(r, \varphi_i) = \qquad (228)\\ = &\sum_{k\neq i}\sum_{a'b'} \int_{C_-(\varphi_i,\gamma_{ki})}^{C_+(\varphi_i,\gamma_{ki})} d\varphi_k\ \left( h^\ell_{aba'b'}(\varphi_i, \varphi_k; \gamma_{ki})\, V_k(r\cos\varphi_k)\, U^\ell_{a'b'}(r, \varphi_k) \right). \end{aligned}$$

Эти уравнения содержат под знаками интегралов и потенциалы, и искомые функции $U^\ell_{ab}$ и поэтому являются еще более неудобными для точного решения, чем рассмотренные ранее уравнения (226).

Испытав все отличные от описанных выше способы представления слагаемых операторного уравнения Шредингера (222), можно убедиться в том, что проектирование получающихся дифференциальных уравнений Шредингера на бисферический базис приводит к системам интегродифференциальных уравнений.

Рассмотрим важный для ядерной физики случай трех тождественных частиц. В этом случае все частицы имеют одинаковые массы, по определению (4) модули всех кинематических углов равны $\pi/3$, а все парные взаимодействия в их собственных системах координат описываются одним и тем же оператором $V$:

$$m_i = m, \quad |\gamma_{ki}| = \pi/3, \quad V_i(\mathbf{r}_i) = V(\mathbf{r}_i), \quad \forall k \neq i = 1, 2, 3. \quad (229)$$

По принципу Паули волновая функция $\Psi^\varepsilon$ должна быть (анти)симметричной относительно любых перестановок тождественных (фермионов) бозонов:

$$S^\pm\, \Psi^\varepsilon(\mathbf{r}_i) = \Psi^\varepsilon(\mathbf{r}_i)\,, \quad i = 1, 2, 3. \quad (230)$$

Здесь знак минус или плюс берется в случае фермионов или, соответственно, бозонов, а операторы $S^\pm$ определены равенствами (52) и (53).

При дополнительном условии (230) тождественности системы уравнений Шредингера (226) или (227) упрощаются несущественно: в силу равенств (229) вместо разных матриц взаимодействия эти системы содержат лишь одну матрицу $\mathbf{V}$, однако остаются системами бесконечного ранга.

Итак, уравнение Шредингера содержит сумму всех парных взаимодействий, каждое из которых задано по определению в своем собственном координатном представлении. Проектирование уравнения с такой структурой на бисферический базис приводит к бесконечным системам дифференциальных уравнений (226) с громоздкими коэффициентами (120) и интегралами от потенциалов либо к бесконечным системам интегродифференциальных уравнений типа (228). Этот вывод остается справедливым и в случае тождественных частиц, и, как несложно убедиться, в случае $S$-волновых взаимодействий. Во всех этих случаях и по той же причине не менее громоздко выглядят системы дифференциальных уравнений, полученные проектированием уравнения Шредингера (223) или (227) на гиперсферический базис.

Перечисленные выше факты подсказывают, как следует переформулировать уравнение Шредингера, чтобы получить дифференциальную задачу с более простой структурой. Это уравнение необходимо свести к системе трех уравнений. Каждое уравнение должно содержать только одно взаимодействие $V_i$ и записываться в собственном для этого взаимодействия представлении $\langle \mathbf{r}_i|$. По такому пути была построена теория Фаддеева [21].

**3.4. Строение и угловой анализ уравнений Фаддеева.** Проанализируем строение дифференциальных уравнений Фаддеева в пространстве $\mathcal{R}^6$, пока не накладывая каких-либо ограничений на массы частиц и вид парных взаимодействий. Ключевыми, но до сих пор не имеющими прозрачной физической интерпретации, математическими объектами теории Фаддеева являются три фаддеевские компоненты:

$$\Psi_i^\varepsilon \equiv G_0(Z)\, V_i\, \Psi^\varepsilon + \Psi_{i0}^\varepsilon,\ G_0(Z) \equiv (H_0 - Z)^{-1},\ Z \equiv E + i0,\ i = 1, 2, 3, \quad (231)$$

волновой функции $\Psi^\varepsilon$ рассматриваемого трехчастичного состояния $|\varepsilon\rangle$:

$$\Psi^\varepsilon = \sum_{k=1}^{3} \Psi_k^\varepsilon. \quad (232)$$

Эти компоненты подчинены системе трех ($i = 1, 2, 3$) операторных уравнений:

$$(H_0 - E)\, \Psi_i^\varepsilon = -V_i\, \Psi^\varepsilon = -V_i \sum_{k=1}^{3} \Psi_k^\varepsilon \quad (233)$$

и обладают важным свойством. Как следует из равенств (231), если $\Psi^\varepsilon$ — собственная функция некоторого оператора, коммутирующего с $H_0$ и $V_i$, то $\Psi_i^\varepsilon$ будет собственной функцией этого же оператора. Обратное утверждение не всегда верно: если $\Psi_i^\varepsilon$ — собственная функция некоторого оператора, коммутирующего с $H_0$ и $V_i$, то функция $\Psi^\varepsilon$ может оказаться несобственной для этого же оператора.

Соотношения (231)–(233) представляются в $\mathcal{R}^6$ по следующему правилу: каждая фаддеевская компонента $\Psi_i^\varepsilon$ и само уравнение, в левой части которого она содержится, записываются в их собственном представлении $\langle \mathbf{r}_i|$. Итак, в $\mathcal{R}^6$ компоненты $\Psi_i^\varepsilon$ определяются формулами

$$\Psi_i^\varepsilon(\mathbf{r}_i) \equiv G_0(\mathbf{r}_i; Z)\, V_i(\mathbf{r}_i)\, \Psi^\varepsilon(\mathbf{r}_i)\,, \; i = 1, 2, 3, \tag{234}$$

складываются в сумму (232) по правилу

$$\Psi^\varepsilon(\mathbf{r}_i) = \Psi_i^\varepsilon(\mathbf{r}_i) + \sum_{k \neq i} K(\gamma_{ki}) \Psi_k^\varepsilon(\mathbf{r}_i) \tag{235}$$

и подчинены трем $(i = 1, 2, 3)$ дифференциальным уравнениям:

$$(\, H_0(\mathbf{r}_i) - E\,)\; \Psi_i^\varepsilon(\mathbf{r}_i) = -V_i(\mathbf{r}_i) \left( \Psi_i^\varepsilon(\mathbf{r}_i) + \sum_{k \neq i} K(\gamma_{ik}) \Psi_k^\varepsilon(\mathbf{r}_i) \right). \tag{236}$$

Физические решения этой системы ищутся в классе функций $\mathcal{C}^2(\mathcal{R}^6)$, удовлетворяющих определенным граничным условиям:

$$\Psi_i^\varepsilon(\mathbf{r}_i) \to (x_i y_i)^{-1} U_i^{as}(\mathbf{r}_i)\,, \quad r \to \infty, \tag{237}$$

где $U_i^{as}$ — известная функция, отвечающая исследуемой трехчастичной конфигурации: связанному состоянию или состояниям рассеяния.

Следуя книге [21], но используя операторы $K(\gamma_{ki})$, напомним, как и почему в случае тождественных частиц система трех уравнений (236) сводится к одному уравнению.

Пусть кроме необходимых условий тождественности частиц (229) и постулата Паули (230) выполняются равенства

$$\Psi_i^\varepsilon(\mathbf{r}_i) = S_{jk}^{\pm} \Psi_i^\varepsilon(\mathbf{r}_i)\,, \quad i = 1, 2, 3. \tag{238}$$

Они означают, что по построению для трех (фермионов) бозонов каждая фаддеевская компонента — (анти)симметричная относительно отражения $\mathbf{x}_i \to -\mathbf{x}_i$ (перестановки частиц с номерами $j$ и $k$) функция. Подействуем оператором $K(\gamma_{ki})$ на равенство (234), определяющее компоненту $\Psi_i^\varepsilon$. Тогда из-за условий симметрии (230) волновой функции и тождественности взаимодействий (229) это равенство перейдет в равенство (234), определяющее компоненту $\Psi_k^\varepsilon$. Значит, тождественность частиц порождает простые связи между фаддеевскими компонентами:

$$\Psi_i(\mathbf{r}_k) = K(\gamma_{ki}) \Psi_k(\mathbf{r}_i). \tag{239}$$

Благодаря им (анти)симметричная волновая функция (235) выражается через свою компоненту и кинематические образы этой же компоненты:

$$\Psi^{\varepsilon}(\mathbf{r}_i) = S_i \Psi^{\varepsilon}_i(\mathbf{r}_i) = (I + \sum_{k \neq i} K(\gamma_{ki}))\, \Psi^{\varepsilon}_i(\mathbf{r}_i)\,. \tag{240}$$

В силу соотношений (229) и (240) для тождественных фермионов или бозонов все три уравнения системы (236) принимают функционально одинаковый вид:

$$(\, H_0(\mathbf{r}) - E\,)\; \Psi^{\varepsilon}_i(\mathbf{r}) = -V(\mathbf{r})\, S_i \Psi^{\varepsilon}_i(\mathbf{r})\,, \tag{241}$$

где $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_i$, а опущенный индекс $i$ может принимать любое из трех значений.

Обсудим существенное различие в строении уравнений Шредингера и Фаддеева. В уравнении Шредингера (223) кинематическому преобразованию подвергаются две компоненты полного взаимодействия, в то время как в каждом уравнении Фаддеева (236) такому преобразованию подвергаются лишь две компоненты искомой волновой функции. Такое строение уравнений Фаддеева в $\mathcal{R}^6$ существенно упрощает их редукцию к системам интегродифференциальных (дифференциальных) уравнений в $\mathcal{R}^2_+$ $(\mathcal{R}^1_+)$.

Перейдем к анализу такой редукции в случаях центральных, а затем и $S$-волновых взаимодействий. В обоих случаях отдельно рассмотрим примеры нетождественных и тождественных частиц. Особое внимание обратим на эквивалентность двух способов редукции исходных уравнений Фаддеева к уравнениям в $\mathcal{R}^1_+$. Парные взаимодействия обоих рассматриваемых типов (217)–(220) коммутируют с операторами $\mathbf{l}^2, l_3$ и $P$. Поэтому выполняются соотношения (225), а фаддеевские компоненты (231) и волновая функция (232) являются собственными функциями этих же операторов. Следовательно, для этих компонент верны точные представления в виде рядов типа (84)–(87) с мультииндексом $\varepsilon = (\ell, m, \sigma)$. Всюду далее используем такие анзацы в качестве исходных, а где это будет возможным дополним набор $\varepsilon$ другими сохраняющимися квантовыми числами.

*3.4.1. Угловой анализ в случае центральных взаимодействий.* Пусть частицы не тождественны. Компоненты $\Psi^{\varepsilon}_i$ представим рядами

$$\Psi^{\varepsilon}_i(\mathbf{r}_i) = 2r^{-2} \mathrm{cosec}\, 2\varphi_i\, U^{\ell}_i(\mathbf{r}_i),\; U^{\ell}_i(\mathbf{r}_i) = \sum_{ab} U^{\ell}_{iab}(r, \varphi_i)\, \mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x}_i, \hat{y}_i), \tag{242}$$

$$U^{\ell}_{iab}(r, \varphi_i) = \sum_{L} \tilde{W}_{Lab}(\varphi_i)\, U^{\ell}_{iLab}(r), \tag{243}$$

$$\Psi^{\varepsilon}_i(\mathbf{r}_i) = r^{-2} \sum_{L} \sum_{ab} Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega_i)\, U^{\ell}_{iLab}(r). \tag{244}$$

Кинематические образы этих рядов выразим по правилам (130)–(132) и (145). Тогда для волновой функции (235) получим разложения

$$\Psi^{\varepsilon}(\mathbf{r}_i) = 2r^{-2}\mathrm{cosec}\,2\varphi_i \sum_{ab} \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}_i, \hat{y}_i)\times \tag{245}$$

$$\times\left( U_{iab}^{\ell}(r,\varphi_i) + \sum_{k\neq i}\sum_{a'b'} \langle r,\varphi_i | h_{aba'b'}^{\ell}(\gamma_{ki}) | U_{ka'b'}^{\ell}\rangle \right),$$

$$\langle r,\varphi_i | h_{aba'b'}^{\ell}(\gamma_{ki}) | U_{ka'b'}^{\ell}\rangle \equiv \int_{C_-(\varphi_i;\gamma_{ki})}^{C_+(\varphi_i;\gamma_{ki})} d\varphi_k h_{aba'b'}^{\ell}(\varphi_i,\varphi_k;\gamma_{ki})\, U_{ka'b'}^{\ell}(r,\varphi_k),$$

$$\begin{aligned}\Psi^{\varepsilon}(\mathbf{r}_i) &= r^{-2}\sum_{Lab} Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i)\Big( U_{iLab}^{\ell}(r,\varphi_i) + \\ &+ \sum_{k\neq i}\sum_{a'b'} \langle ab | K(\gamma_{ki}) | a'b'\rangle_{L\ell}\, U_{kLa'b'}^{\ell}(r)\Big).\end{aligned} \tag{246}$$

Заменим в уравнениях (236) взаимодействия и фаддеевские компоненты их бисферическими рядами (219) и (242). Использовав равенства (206), спроектируем каждое из трех получившихся уравнений на его собственный бисферический базис. Тогда получим бесконечную по индексам $a$ и $b$ систему интегродифференциальных уравнений в $\mathcal{R}_+^2$:

$$\begin{aligned}&\Big(\partial_r^2 + r^{-1}\partial_r - r^{-2}\tilde{L}_{ab}^2(\varphi_i) + E - V_i(r\cos\varphi_i)\Big)\, U_{iab}^{\ell}(r,\varphi_i) = \\ &= V_i(r\cos\varphi_i)\sum_{k\neq i}\sum_{a'b'}\langle r,\varphi_i | h_{aba'b'}^{\ell}(\gamma_{ki}) | U_{ka'b'}^{\ell}\rangle\,.\end{aligned} \tag{247}$$

Дополним эту систему до краевой задачи граничными условиями

$$U_{iab}^{\ell}(r,\varphi_i) = 0,\ \varphi_i = 0,\pi/2,\ r\in\mathcal{R}_+^1;\ r = 0, \forall\varphi_i, \tag{248}$$

$$U_{iab}^{\ell}(r,\varphi_i) \to U_{iab}^{as}(r,\varphi_i) \equiv \langle \ell mab | U_i^{as}\rangle\,, \quad r\to\infty. \tag{249}$$

Тогда фаддеевские компоненты (242) будут регулярными функциями с нужными асимптотиками (237).

Способом, предложенным в работе [67], сведем получившуюся краевую задачу (247)–(249) к одномерной. Сначала пронумеруем мультииндексом $\tau \equiv (i,a,b)$ уравнения системы (247). Уравнение, содержащее в левой части искомую функцию $U_{iab}^{\ell}$, назовем $\tau$-уравнением. В этом уравнении заменим все без исключения бисферические компоненты $U_{ia'b'}^{\ell}(r,\varphi_i)$ рядами (243) по собственным базисным функциям $\tilde{W}_{La'b'}(\varphi_i)$. Рассмотрим, как эти функции отображаются операторами $\tilde{L}^2_{ab}$, $h^{\ell}_{aba'b'}$ и $V_i$. Согласно равенствам (82) функция $\tilde{W}_{Lab}(\varphi_i)$ является собственной для оператора $\tilde{L}^2_{ab}(r,\varphi_i)$. В силу свойства (183) функция $\tilde{W}_{La'b'}(\varphi_k)$ отображается оператором $h^{\ell}_{aba'b'}(\gamma_{ki})$ в функцию $\tilde{W}_{Lab}(\varphi_i)$. Наконец, из равенств (217)–(220) следует, что образ $V_i\tilde{W}_{Lab}$ — линейная комбинация функций $\tilde{W}_{Lab}(\varphi_i)$ по индексу $L$. Следовательно, рассматриваемое $\tau$-уравнение сводится к равной нулю сумме по индексу $L$. Каждое ее слагаемое — произведение функции $\tilde{W}_{Lab}(\varphi_i)$ на дифференциальное соотношение по переменной $r$ для функций $U^{\ell}_{kLa'b'}(r)$. Функции $\tilde{W}_{Lab}$ с разными $L$, но одинаковыми $a$ и $b$, линейно независимы. Поэтому рассматриваемая сумма равна нулю в $\mathcal{R}^+_2$ тогда и только тогда, если каждое такое дифференциальное соотношение равно нулю. Значит, $\tau$-уравнение сводится к системе дифференциальных уравнений для функций $U^{\ell}_{kLa'b'}(r), k=1,2,3$.

Сформулируем доказанные утверждения. Во-первых, счетное $(L=a+$ $+b, a+b+2, ...)$ множество функций $\tilde{W}_{Lab}(\varphi_i)$ является полным базисом для $\tau$-уравнения системы (247), содержащего в своей левой части функцию $U^{\ell}_{iab}$ с выбранными индексами $i,a,b$. Во-вторых, в этом и только в этом уравнении для операторов $\tilde{L}^2_{ab}$, $h^{\ell}_{aba'b'}(\gamma_{ki})$ и $V_i$ верны спектральные представления:

$$\tilde{L}^2_{ab}(\varphi_i) = \sum_L |\tilde{W}_{Lab}(\varphi_i)\rangle\, (L+2)^2\, \langle \tilde{W}_{Lab}(\varphi_i)|, \tag{250}$$

$$h^{\ell}_{aba'b'}(\gamma_{ki}) = \sum_L |\tilde{W}_{Lab}(\varphi_i\rangle\, \langle ab|K(\gamma_{ki})|a'b'\rangle_{L\ell}\, \langle \tilde{W}_{Lab}(\varphi_k)|\,,\; k\neq i, \tag{251}$$

$$V_i(r\cos\varphi_i) = \sum_{L',L=a+b} |\tilde{W}_{L'ab}(\varphi_i\rangle\, V^{LL'}_{iab}\, \langle \tilde{W}_{Lab}(\varphi_i)|. \tag{252}$$

Использовав представления (243) и (250)–(252), спроектируем каждое $\tau$-уравнение системы (247) и ее граничные условия (248) и (249) на соответствующий собственный базис из функций $\tilde{W}_{Lab}(\varphi_i)$. Таким образом, в $\mathcal{R}^1_+$ поставим краевую задачу для неизвестных функций $U^{\ell}_{iLab}(r)$:

$$\begin{aligned}&\left(\partial^2_r + r^{-1}\partial_r - r^{-2}(L+2)^2 + E\right)\, U^{\ell}_{iLab}(r) = &(253)\\ &= \sum_{L'} V^{LL'}_{iab}(r)\left( U^{\ell}_{iL'ab}(r) + \sum_{k\neq i}\sum_{a'b'} \langle a'b'|K(\gamma_{ki})|ab\rangle_{L'\ell}\, U^{\ell}_{kL'a'b'}(r)\right),\end{aligned}$$

$$U^{\ell}_{iLab}(0) = 0\,;\quad U^{\ell}_{iLab}(r) \to \langle \tilde{W}_{Lab}(\varphi_i)|U^{as}_{iab}(r,\varphi_i)\rangle\,,\quad r\to\infty. \tag{254}$$

Гипергармоники (78) — произведения бисферических гармоник на функции (79). Следовательно, разложение фаддеевских компонент сначала в бисферические ряды (242), а затем в ряды (243) по функциям $|L\tilde{a}b\rangle$ эквивалентно результирующему разложению этих компонент в гиперсферические ряды (244). Поэтому ту же самую краевую задачу (253), (254) можно вывести альтернативным способом: подстановкой анзацев (244) в уравнения (236) и граничные условия (237) и последующим проектированием полученных соотношений на их собственные гиперсферические базисы.

Итак, переход от фаддеевских уравнений в бисферическом базисе (247) к фаддеевским уравнениям в гиперсферическом базисе (253) осуществляется проектированием первых уравнений на соответствующие собственные базисные функции $\tilde{W}_{Lab}(\varphi_i)$. Это утверждение в самом общем случае было доказано в препринте [61] и упоминалось в его существенно сокращенном журнальном варианте [67]. Обратный переход, то есть вывод фаддеевских уравнений в бисферическом базисе из фаддеевских уравнений в гиперсферическом базисе, был реализован в работе [112] только в частном случае, а именно для системы трех тождественных бозонов с $S$-волновыми взаимодействиями и нулевым полным моментом.

Рассмотрим случай тождественных частиц. Перестановка частиц с номерами $j$ и $k$ эквивалентна отражению вектора $\mathbf{x}_i$. При такой операции бисферические гармоники $\mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$ приобретают фазовый множитель $(-1)^b$. Поэтому дополнительное условие симметрии (238) будет автоматически выполняться, если в анзацах (242) и (244) для искомой фаддеевской компоненты трех(фермионной)бозонной волновой функции положить по определению все бисферические и гиперсферические компоненты с (четными) нечетными индексами $b$ равными нулю:

$$U^{\ell}_{iab}(r,\varphi_i), \quad U^{\ell}_{iLab}(r) \equiv 0 \quad \begin{cases} \text{фермионы} & b = 1, 3, \ldots \\ \text{бозоны} & b = 0, 2, \ldots \end{cases}$$

Подставив таким образом модифицированные разложения фаддеевских компонент в равенство (240), получим разложения волновой функции в случае тождественных частиц в представлении $\langle \mathbf{r}_i|$:

$$\begin{aligned} \Psi^{\varepsilon}(\mathbf{r}_i) &= 2r^{-2}\operatorname{cosec} 2\varphi_i \sum_{ab} \mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x}_i, \hat{y}_i) \sum_{a'b'} \langle r, \varphi_i | S^{\ell}_{aba'b'} | U^{\ell}_{ia'b'} \rangle\,, \\ &\langle r, \varphi_i | S^{\ell}_{iaba'b'} | U^{\ell}_{ia'b'} \rangle \equiv \langle \ell mab | S_i | \ell mab U^{\ell}_{ia'b'} \rangle \equiv \\ \equiv\ & \delta_{aa'}\delta_{bb'} U^{\ell}_{iab}(r,\varphi_i) + \sum_{k\neq i} \langle r, \varphi_i | h^{\ell}_{aba'b'}(\gamma_{ki}) | U^{\ell}_{ia'b'} \rangle\,, \end{aligned} \tag{255}$$

$$\begin{aligned} \Psi^{\varepsilon}(\mathbf{r}_i) \quad &= \quad r^{-2} \sum_{Lab} Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega_i) \sum_{a'b'} \langle ab | S_i | a'b' \rangle_{L\ell}\, U^{\ell}_{Lab}(r), \qquad (256) \\ \langle ab | S_i | a'b' \rangle_{L\ell} \quad &\equiv \quad \langle L\ell mab | S_i | L\ell ma'b' \rangle \equiv \delta_{aa'}\delta_{bb'} + \sum_{k\neq i} \langle ab | K(\gamma_{ki}) | a'b' \rangle_{L\ell}. \end{aligned}$$

*3.4.2. Угловой анализ в случае $S$-волновых взаимодействий.* Перейдем к угловому анализу уравнения (241) для трех бозонов с $S$-волновыми взаимодействиями, заданными равенствами (218) с $b = 0$. В этом уравнении положим $V_i = V_i^0$, а функции $\Psi_i^\varepsilon$ и $\Psi^\varepsilon$ представим бисферическими рядами (242) и (255) с четным индексом $b$. Спроектируем получившееся уравнение на его собственный бисферический базис. Благодаря проекционному свойству (221) взаимодействия $V_i^0$, для каждой бисферической компоненты $U^\ell_{iab}$ с индексом $b \neq 0$ получится однородное уравнение типа (209) с известным решением (213), а уравнение для компоненты $U^\ell_{i\ell 0}$ с $b = 0$ будет неоднородным. Запишем это уравнение в виде

$$\Big(\partial_r^2 + r^{-1}\,\partial_r - r^{-2}\tilde{L}^2_{\ell 0} + E\Big)\, U^\ell(r,\varphi) = V(r\cos\varphi)\langle r,\varphi|S^\ell|U^\ell\rangle\,, \qquad (257)$$

где опущены индексы $i$, $a = \ell$ и $b = 0$,

$$U^\ell \equiv U^\ell_{i\ell 0}\,, \quad \langle r,\varphi|S^\ell|U^\ell\rangle \equiv \langle r,\varphi|S^\ell_{i\ell 0\ell 0}|U^\ell_{i\ell 0}\rangle\,, \qquad (258)$$

и согласно формулам (115), (117), (123), (127), (132) и (255)

$$\begin{aligned} \langle r,\varphi|S^\ell|U^\ell\rangle &= U^\ell(r,\varphi) + \qquad (259)\\ &+ (4/\sqrt{3})\int_{C_-(\varphi,\pi/3)}^{C_+(\varphi,\pi/3)} d\varphi'\, P_\ell(u_{yy'}(\varphi,\varphi';\pi/3))\,U^\ell(r,\varphi')\,,\\ u_{yy'}(\varphi,\varphi';\pi/3) &= (\,2(\cos 2\varphi + \cos 2\varphi') - 1\,)\,/(4\,\sin\varphi\,\sin\varphi')\,. \end{aligned}$$

Опишем строение волновой функции $\Psi^\varepsilon$. Если $E < 0$, то $\forall U^\ell_{iab} \equiv 0$ при $b \neq 0$ и бисферический ряд (255) этой функции вырождается в равенство

$$\Psi^\varepsilon(\mathbf{r}) = 2r^{-2}\mathrm{cosec}\,2\varphi\,\langle r,\varphi|S^\ell|U^\ell\rangle\,\mathcal{Y}^{\ell m}_{\ell 0}(\hat{x},\hat{y})\,. \qquad (260)$$

Такая функция является собственной для операторов $\mathbf{l}_x^2$ и $\mathbf{l}_y^2$:

$$\mathbf{l}_x^2\Psi^\varepsilon = 0\,, \quad (\mathbf{l}_y^2 - \ell(\ell+1))\,\Psi^\varepsilon = 0\,.$$

Значит, при $E < 0$ сохраняются пять квантовых чисел: $\varepsilon = (\ell, m, \sigma, a, b)$, где $\sigma = (-1)^\ell$, $a = \ell$ и $b = 0$. В случае $E \geq 0$ бисферический ряд (255) волновой функции $\Psi^\varepsilon$ содержит только одно зависящее от взаимодействия слагаемое, а остальные слагаемые априори известны в явном виде. Поэтому всюду далее при любом знаке энергии $E$ исследуем только части фаддеевских компонент

$$\Psi_i^\varepsilon(\mathbf{r}) = 2r^{-2}\,\mathrm{cosec}\,2\varphi\,U^\ell_{\ell 0}(r,\varphi)\mathcal{Y}^{\ell m}_{\ell 0}(\hat{x},\hat{y}),\ \mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_i, \qquad (261)$$

зависящие от потенциала, и отвечающую им функцию (260).

Разделим переменные $r$ и $\varphi$ в уравнении (257). Для этого запишем искомую функцию $U^\ell$ и матричные представления всех операторов (250)–(252), содержащихся в этом уравнении, в сокращенных обозначениях (258) и (259):

$$U^\ell(r,\varphi) = \sum_L U_L^\ell(r)\, \tilde{W}_{L\ell 0}(\varphi)\,, \tag{262}$$

$$\tilde{L}^2_{\ell 0}(r,\varphi) = \sum_L |\tilde{W}_{L\ell 0}(\varphi)\rangle\, (L+2)^2\, \langle \tilde{W}_{L\ell 0}(\varphi)|\,, \tag{263}$$

$$S^\ell = \sum_{L=\ell}^{\infty} |\tilde{W}_{L\ell 0}(\varphi)\rangle\, S_L^\ell\, \langle \tilde{W}_{L\ell 0}(\varphi)|\,, \tag{264}$$

$$S_L^\ell \equiv S^\ell_{\ell 0 \ell 0} = 1 + 2\langle \ell 0|K(\pi/3)|\ell 0\rangle_{L\ell}\,, \tag{265}$$

$$V(r\cos\varphi) = \sum_{LL'} |\tilde{W}_{L\ell 0}(\varphi)\rangle\, V_{\ell 0}^{LL'}(r)\, \langle \tilde{W}_{L\ell 0}(\varphi)|\,. \tag{266}$$

Теперь, использовав представления (262)–(266), спроектируем уравнение (257) на его собственный базис из функций $\tilde{W}_{L\ell 0}$, $L = \ell, \ell+2, \ldots$ В итоге получим искомую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \left(\partial_r^2 + r^{-1}\partial_r - r^{-2}(L+2)^2 + E\right) U_L^\ell(r) \quad &= \quad R_L^\ell(r) \equiv \\ &\equiv \quad \sum_{L'} V_{\ell 0}^{LL'}(r) S_{L'}^\ell\, U_{L'}^\ell(r)\,. \end{aligned} \tag{267}$$

В заключение с помощью формул (262) и (264) выразим волновую функцию (260) через гиперсферические компоненты, подчиненные системе уравнений (267):

$$\Psi^\varepsilon(\mathbf{r}) = r^{-2} \sum_L Y_{\ell 0}^{\ell m}(\Omega) S_L^\ell\, U_L^\ell(r),\ \varepsilon = (\ell, m, \sigma, a, b),\ \sigma = (-1)^\ell, a = \ell, b = 0. \tag{268}$$

## 4. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ФАДДЕЕВА

В п. 4.1 обсуждаются условия существования и способы построения ложных решений фаддеевских уравнений (236), приводятся примеры ложных решений в случае центральных, $S$- и $P$-волновых взаимодействий. В п. 4.2 рассмотрены три частных случая, когда решения, обладающие физическим смыслом, и специальные (ложные) слагаемые таких решений можно найти точно.

**4.1. Ложные решения.** Для начала поясним, почему ложные решения могут существовать и почему их исследование представляется интересным. В уравнении Шредингера (223) неизвестной функцией $\Psi^{\varepsilon}$ является вся фаддеевская сумма (232). В системе уравнений Фаддеева (233) неизвестными функциями являются слагаемые этой суммы. Вообще говоря, сумма трех некоторых функций, отличных от нуля, может быть тождественно равной нулю. Следовательно, система (233), без каких-либо дополнительных условий, может иметь нетривиальное и регулярное решение $(\Psi_1^{\varepsilon}, \Psi_2^{\varepsilon}, \Psi_3^{\varepsilon})$, сумма (232) компонент которого тождественно равна нулю, $\Psi^{\varepsilon} \equiv 0$. Такое решение (обозначим его совокупностью $(S_1, S_2, S_3)$) обращает в нуль одновременно как правую, так и левую части системы (236):

$$S_i(\mathbf{r}_i) + \sum_{k \neq i} K(\gamma_{ki}) S_i(\mathbf{r}_i) \quad = \quad 0, \; i = 1, 2, 3\,, \tag{269}$$

$$(H_0(\mathbf{r}_i) - E)\, S_i(\mathbf{r}_i) \quad = \quad 0, \; i = 1, 2, 3. \tag{270}$$

Совокупность $(S_1, S_2, S_3)$ дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих только системе уравнений (269), (270), принято [100] называть ложным решением фаддеевских уравнений (236). Так как ложное решение удовлетворяет свободному уравнению Шредингера (270), то оно не содержит никакой информации о парных потенциалах. Согласно равенствам (269) ложное решение отвечает тривиальному решению ($\Psi^{\varepsilon} \equiv 0$) уравнения Шредингера (222). Следовательно, ложное решение не соответствует никакому физическому состоянию системы трех частиц. Как отмечалось в работе [108], система уравнений (269), (270) всегда имеет нетривиальное двухпараметрическое решение. Построим его.

Пусть $\Psi_0$ и $E$ — некоторые собственные функции и значение свободного гамильтониана $H_0$. При любых числах $c_i$ функции

$$S_i(\mathbf{r}_i) \equiv c_i\, \Psi_0(\mathbf{r}_i)\,,\; i = 1, 2, 3, \tag{271}$$

удовлетворяют уравнению (270). Положим $c_1 = -c_2 - c_3$. Тогда коэффициенты $c_2$ и $c_3$ останутся независимыми, а функции (271) удовлетворят уравнению (269). Следовательно, любому решению $\Psi_0$ свободного уравнения Шредингера отвечает двухпараметрическое ложное решение (271) уравнений Фаддеева (236). Компоненты $S_i$ такого решения не всегда будут собственными функциями для заданного набора операторов, коммутирующих с полным гамильтонианом $H$. Приведем поясняющий пример. С этой целью заменим функцию $\Psi_0$ в соотношениях (271) собственной функцией (215) шести операторов импульсов. Наложим условие $c_1 = -c_2 - c_3$. Компоненты полученного ложного решения будут собственными функциями тех же операторов импульсов, но в силу разложения (215) не будут собственными функциями операторов $\mathbf{l}^2, l_3, P$. Всегда ли существуют ложные решения, отвечающие наперед заданному набору $\varepsilon = (\ell, m, \sigma)$ собственных чисел таких операторов? Если такие решения существуют, то как их можно построить в явном виде и учесть при решении уравнений Фаддеева для системы из трех частиц с произвольными массами и центральными либо $b$-волновыми взаимодействиями? Ответам на эти вопросы посвящена работа [71]. Изложим ее основные результаты: доказательство критерия существования ложных решений в классе функций $\mathcal{A}^\varepsilon$ и способ исключения таких решений.

Сначала исследуем условие (269), а затем — условие (270). Согласно условию (269) сумма всех компонент ложного решения должна быть нулевой в **каждом** из трех $(i = 1, 2, 3)$ наборов координат Якоби. Рассмотрим эти условия как три уравнения для неизвестных компонент. Компоненты будем искать в классе $\mathcal{A}^\varepsilon$ в виде гиперсферических рядов по их собственным базисам:

$$S_i(\mathbf{r}_i) \equiv S_i^\varepsilon(\mathbf{r}_i) = r^{-2} \sum_L \sum_{ab} S_{iLab}(r)\, Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i)\,. \tag{272}$$

Подставим эти ряды в уравнения (269). Учтем равенства (142). Тогда для каждого значения $L$ получим линейную и однородную систему уравнений:

$$S_{iLa'b'}(r) + \sum_{k\neq i} \sum_{a'b'} \langle ab|K(\gamma_{ki})|a'b'\rangle_{L\ell}\, S_{kLa'b'}(r) = 0\,, \tag{273}$$

в которой $i = 1, 2, 3$, а индексы $a, b, a', b'$ принимают все значения, допустимые при заданных $L$ и $\ell$. Число таких значений ограничено. Поэтому матрица $\mathbf{M}^L$ рассматриваемой системы (273) имеет конечную размерность, равную утроенному числу гипергармоник (54) с данными квантовыми числами $L$, $\ell$ и $m$. Из теории матриц [2] известно, что система (273) имеет

$$N^L = \dim \mathbf{M}^L - \operatorname{rank} \mathbf{M}^L$$

нетривиальных и линейно независимых решений тогда и только тогда, если детерминант этой матрицы равен нулю,

$$\det \mathbf{M}^L = 0\,. \tag{274}$$

Пусть $\mathcal{D}$ — множество значений $L$, при которых выполняются условия (274). Если это множество пустое ($\mathcal{D} = \emptyset$), то есть $\det \mathbf{M}^L \neq 0$ при любом $L$, то не существует отличных от нуля функций (272), удовлетворяющих уравнениям (269). В этом тривиальном случае уравнения Фаддеева (233) не имеют ложных решений в классе $\mathcal{A}^\varepsilon$. Так как уравнения (269) сводятся к незацепляющимся системам уравнений (273), то их общее решение (272) является линейной комбинацией

$$S_i^\varepsilon(\mathbf{r}_i) = \sum_{L\in\mathcal{D}} C^L\, S_i^L(\mathbf{r}_i) \tag{275}$$

некоторых числовых коэффициентов $C^L$ и частных решений:

$$S_i^L(\mathbf{r}_i) = \sum_{ab} S_{iLab}(r)\, Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i)\,, \tag{276}$$

обладающих дополнительным к набору $\varepsilon = (\ell, m, \sigma)$ квантовым числом $L$. Сформулируем доказанные выше утверждения в виде леммы.

**Лемма.** *В классе* $\mathcal{A}^\varepsilon$ *система уравнений* (269) *имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, если* $\mathcal{D} \neq \emptyset$. *Все такие решения — линейные комбинации* (275) *функций* (276) *с гиперсферическими компонентами, подчиненными условиям* (273).

Теперь из всех решений (275) уравнений (269) выберем решения, удовлетворяющие условию (270). Такие решения и будут ложными. В уравнения (270) подставим искомые функции $S_i^\varepsilon$ в их общем виде (275), (276). Использовав равенства (69), спроектируем получившиеся уравнения на их собственные гиперсферические базисы. Далее подстановкой $z = \sqrt{E}r$, $Z_\nu(z) = S_{iLab}(r)$ сведем уравнение для каждой искомой компоненты $S_{iLab}(z)$ с $L \in \mathcal{D}$ к уравнению Бесселя (211) с индексом $\nu = L + 2$. Оно имеет нетривиальные регулярные решения лишь при действительном $z > 0$, то есть при $E > 0$. Все такие решения пропорциональны регулярным функциям Бесселя:

$$S_{iLab}(r) = D_{iab}^L\, J_{L+2}(\sqrt{E}r),\ E > 0. \tag{277}$$

При каждом заданном $L \in \mathcal{D}$ функции (277) зависят от $r$ одинаковым образом, поэтому они удовлетворяют системе (273) тогда и только тогда, если коэффициенты $D_{iab}^L$ подчиняются системе уравнений

$$D_{iab}^L + \sum_{k \neq i} \sum_{a'b'} \langle ab|K(\gamma_{ki})|a'b'\rangle_{L\ell}\, D_{ka'b'}^L = 0\,, \tag{278}$$

которая имеет ту же самую матрицу $\mathbf{M}^L$, что и система (273).

Подставив анзац (277) в условие (276), получим частное ложное решение с квантовыми числами $\ell, m, \sigma$ и $L \in \mathcal{D}$:

$$S_i^L(\mathbf{r}_i) = r^{-2}\, J_{L+2}(\sqrt{E}r)\, \sum_{ab} D_{iab}^L\, Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i)\,. \tag{279}$$

Если все такие решения подставить в сумму (275), то получится общее ложное решение с квантовыми числами $\varepsilon = (\ell, m, \sigma)$:

$$S_i^\varepsilon = r^{-2} \sum_{L \in \mathcal{D}} C^L\, J_{L+2}(\sqrt{E}r)\, \sum_{ab} D_{iab}^L\, Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i)\,. \tag{280}$$

В силу леммы и соотношений (277)–(280) справедлив следующий критерий.

**Теорема 2.** *В классе $\mathcal{A}^\varepsilon$ уравнения Фаддеева* (236) *имеют ложные решения* $(S_1^\varepsilon, S_2^\varepsilon, S_3^\varepsilon)$ *тогда и только тогда, если* $E > 0$ и $\mathcal{D} \neq \emptyset$. *Все такие ложные решения — суммы* (280), *в которых коэффициенты* $C^L$ *— произвольные числа, а коэффициенты* $D_{iab}^L$ *подчинены условиям* (278).

Теперь докажем, что все ложные решения обладают одним и тем же дополнительным к набору $\varepsilon = (\ell, m, \sigma)$ квантовым числом. Пусть $\mathcal{S}^\varepsilon$ и $\mathcal{U}^\varepsilon$ — линейные подпространства пространства $\mathcal{A}^\varepsilon$, базисы которых на $\mathcal{S}^5$ в $\mathcal{R}^6$ образуют гипергармоники (54) с соответствующими индексами $L \in \mathcal{D}$ и $L \notin \mathcal{D}$. Тогда операторы

$$P_s \equiv \sum_{L \in \mathcal{D}} \sum_{ab} |Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i)\,\rangle\,\langle\, Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i)|\,, P_u \equiv \sum_{L \not\subset \mathcal{D}} \sum_{ab} |Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i)\rangle\langle\, Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i)| \tag{281}$$

являются проекторами на соответствующие подпространства $\mathcal{S}^\varepsilon$ и $\mathcal{U}^\varepsilon$, ортогональные друг другу относительно интегрирования на гиперсфере $\mathcal{S}^5$ по совокупности гиперуглов $\Omega_i$. Так как кинематическое преобразование гипергармоник (142) является унитарным, то представления (281) проекторов $P_s$ и $P_u$ инвариантны относительно выбора индекса $i$. Учитывая это свойство, подействуем проекторами на ложные решения (280). Тогда получим равенства

$$P_s S_i^\varepsilon = p_s\, S_i^\varepsilon\ , \quad p_s = 1\,; \quad P_u\, S_i^\varepsilon = 0\,, \tag{282}$$

означающие, что компоненты $S_i^\varepsilon$ всех ложных решений $(S_1^\varepsilon, S_2^\varepsilon, S_3^\varepsilon)$ являются собственными функциями оператора $P_s$, отвечающими одному и тому же собственному числу $p_s = 1$ и принадлежащими множеству $\mathcal{S}^\varepsilon$. Следовательно, в подпространстве $\mathcal{U}^\varepsilon$ уравнения Фаддеева (233) или (236) не могут иметь ложных решений.

Используя этот факт, выводим из уравнений Фаддеева модифицированные уравнения, не имеющие ложных решений. Так как $\mathcal{U}^\varepsilon$ является ортогональным дополнением $\mathcal{S}^\varepsilon$ до $\mathcal{A}^\varepsilon$, то компоненты любого нетривиального решения уравнений (233) представимы в виде сумм их проекций на эти подпространства:

$$\Psi_i^\varepsilon = P_u\, \Psi_i^\varepsilon + P_s\, \Psi_i^\varepsilon\,,\ i = 1, 2, 3. \tag{283}$$

Использовав это представление, докажем от противного, что

$$\sum_{k=1}^{3} P_u\, \Psi_k^\varepsilon \neq 0\,, \quad \sum_{k=1}^{3} P_s\, \Psi_k^\varepsilon = 0\,. \tag{284}$$

Пусть при любом $i = 1, 2, 3$ и некоторых ненулевых функциях $R_i \in \mathcal{S}^\varepsilon$

$$\sum_{k=1}^{3} \langle \mathbf{r}_i | P_u\, \Psi_k^\varepsilon(\mathbf{r}_k)\rangle = 0\,,\ \sum_{k=1}^{3} \langle \mathbf{r}_i | P_s\, \Psi_k^\varepsilon(\mathbf{r}_k)\rangle = R_i\,.$$

Заменим в этих предполагаемых равенствах функции $\Psi_i^\varepsilon$ и $R_i$ их гиперсферическими рядами типа (65):

$$\Psi_i^\varepsilon(\mathbf{r}_i) = \sum_L \sum_{ab} \Psi_{iLab}^\ell(r)\, Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i), \qquad R_i(\mathbf{r}_i) = \sum_L \sum_{ab} R_{iLab}^\ell(r)\, Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i)\,,$$

а операторы $P_s$ и $P_u$ представим в виде (281). Полученные соотношения спроектируем на гиперсферический базис с помощью формул (145). Таким образом, для каждого фиксированного $L$ имеем систему уравнений

$$\Psi_{iLab}^\ell + \sum_{k\neq i} \sum_{a'b'} \langle ab|K(\gamma_{ki})|a'b'\rangle_{L\ell} \Psi_{kLa'b'}^\ell = \begin{cases} 0, & L \notin \mathcal{D} \\ R_{iLab}^\ell, & L \in \mathcal{D}, \end{cases} \tag{285}$$

где $a$ и $b$ принимают все значения, возможные при данных $L$ и $\ell$. Если $L \notin \mathcal{D}$, то однородная система (285) имеет лишь тривиальное решение, так как ее матрица $\mathbf{M}^L$ не выраждена. В случае $L \in \mathcal{D}$ неоднородная система (285) имеет вырожденную матрицу $\mathbf{M}^L$ и несовместна по альтернативе Фредгольма [2]. Полученные противоречия доказывают справедливость соотношений (284).

Обозначим $U_i^\varepsilon \equiv P_u\, \Psi_i^\varepsilon$. С помощью равенств (281)–(284) спроектируем уравнения (233) на подпространство $\mathcal{U}^\varepsilon$. Любое нетривиальное решение полученных модифицированных уравнений Фаддеева

$$(H_0 - E)\, U_i^\varepsilon = -P_u\, V_i\, \Psi^\varepsilon = -P_u\, V_i \sum_{k=1}^{3} U_k^\varepsilon \tag{286}$$

принадлежит пространству $\mathcal{U}^\varepsilon$, а отвечающая ему волновая функция $\Psi^\varepsilon = U_1^\varepsilon + U_2^\varepsilon + U_3^\varepsilon$ не равна тождественно нулю.

Исследование общих свойств ложных решений завершим формулировкой теоремы, суммирующей доказанные утверждения (283), (284) и (286), и поясняющими замечаниями.

**Теорема 3.** *В классе $\mathcal{A}^\varepsilon$ фаддеевские компоненты $\Psi_i^\varepsilon$ представимы в виде сумм* (283) *ортогональных слагаемых $P_u\, \Psi_i^\varepsilon$ и $P_s\, \Psi_i^\varepsilon$, которые удовлетворяют соотношениям* (284). *Слагаемые $U_i^\varepsilon \equiv P_u\, \Psi_i^\varepsilon$ подчинены системе уравнений* (286), *не имеющей ложных решений.*

Отметим, что необходимое условие $(E > 0)$ существования ложных решений указывалось в давней работе [100], а представление (283) было доказано в работе [103] другим, менее наглядным способом. Согласно терминологии этой работы пространства $\mathcal{U}^\varepsilon$ и $\mathcal{S}^\varepsilon$ называются пространствами физических и ложных решений уравнений Фаддеева. Поэтому основное утверждение теоремы 3 можно сформулировать следующим образом: уравнения Фаддеева в физическом пространстве (286) не имеют ложных решений.

Приведем примеры ложных решений из работы [71]. Начнем с более общего случая центральных взаимодействий. Затем перейдем к частным случаям $S$- и $P$-волновых взаимодействий. В силу формул (217)–(221) для перехода от центральных взаимодействий к $\tilde{b}$-волновым нужно запретить индексам $b$ и $b'$ принимать в соотношениях (276)–(280) значения, отличные от $\tilde{b}$. Для $S$-волновых взаимодействий этот факт был доказан в пп.3.4.2, в случае $P$-волновых взаимодействий имеется аналогичное доказательство.

*Ложные решения в случае центральных взаимодействий.* Заметим, что только при $L, \ell = 0$ или $L = 2, \ell = 1$ индексы $a$ и $b$ гипергармоник (54) могут принимать значения $a, b = 0$ и, соответственно, $a, b = 1$. В этих случаях имеется только один коэффициент Рейнала—Реваи, отличный от нуля и равный единице: $\langle aa|K(\gamma_{ki})|aa\rangle_{L\ell} = 1$. Поэтому связи (142) вырождаются в равенства

$$Y^{\ell m}_{Laa}(\Omega_i) = Y^{\ell m}_{Laa}(\Omega_k)\,, \quad \ell, L = 0\,; \quad \ell = 1,\, L = 2\,, \tag{287}$$

а все элементы матриц $\mathbf{M}^0$ и $\mathbf{M}^2$ систем (278) равны единице. Итак,

$$\dim \mathbf{M}^L = 3, \quad \operatorname{rank} \mathbf{M}^L = 1, \quad L, \ell = 0;\ L = 2, \ell = 1.$$

В обоих случаях общее решение систем (278) таково: $D^L_{2ab}$ и $D^L_{3ab}$ — произвольные числа, не равные нулю одновременно, а

$$D^L_{1ab} = -D^L_{2ab} - D^L_{3ab}\,.$$

По формуле (279) находим фаддеевские компоненты

$$S^L_i(\mathbf{r}_i) = r^{-2}\, J_{L+2}(\sqrt{E}r)\ \left(D^L_{2ab}(\delta_{i2} - \delta_{i1}) + D^L_{3ab}(\delta_{i3} - \delta_{i1})\right) Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega_i) \tag{288}$$

частных ложных решений, обладающих сохраняющимися квантовыми числами $L, \ell, m, a, b = 0$, $\sigma = 1$ или $L = 2$; $\ell, a, b = 1$; $m = 0, \pm 1$, $\sigma = 1$. Найденные решения (288) не зависят от масс частиц и вырождаются в тривиальные, если все три частицы тождественные.

Докажем это утверждение. Напомним, что для любого состояния $|\varepsilon\rangle$ системы трех тождественных частиц компоненты физического решения уравнений Фаддеева (233) подчинены дополнительным условиям (238) и (239). Наложим аналогичные условия и на компоненты ложного решения: пусть

$$S^\varepsilon_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) = \pm S^\varepsilon_i(-\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)\,; \quad S^\varepsilon_i(\mathbf{r}_i) = S^\varepsilon_k(\mathbf{r}_k(\mathbf{r}_i))\,, \quad \forall k \neq i = 1, 2, 3. \tag{289}$$

Используя равенства (287), показываем, что условиям симметрии (289) удовлетворяют только тривиальные ложные решения (288) с коэффициентами $D^L_{iab} = 0, i = 1, 2, 3$, что и требовалось доказать.

*Ложные решения в случае $S$-волновых взаимодействий.* В случае $S$-волновых взаимодействий сохраняется набор квантовых чисел $\varepsilon = (\ell, m, a, b, \sigma)$, $a = \ell, b = 0$. При любых $L$ и $\ell$ индексы $a, b$ и $a', b'$ в формулах (276)–(280)

могут принимать лишь следующие значения: $a, a' = \ell$ и $b, b' = 0$. Поэтому матрица $\mathbf{M}^L$ системы (278) всегда имеет размерность, равную трем. Все недиагональные элементы этой матрицы находим по формуле (170), согласно которой

$$\begin{aligned} M^L_{ki} &\equiv \langle \ell 0 | K(\gamma_{ki}) | \ell 0 \rangle_{L\ell} = \\ &= (-1)^L (\cos\gamma_{ki})^\ell \, \frac{P_n^{(\ell+1/2\,,1/2)}(-\cos 2\gamma_{ki})}{P_n^{(\ell+1/2\,,1/2)}(-1)}\,,\ n = (L-\ell)/2. \end{aligned} \tag{290}$$

Условие (274) сводим к равенствам

$$\det \mathbf{M}^L = 1 - (M^L_{12})^2 - (M^L_{31})^2 - (M^L_{23})^2 + 2\, M^L_{12}\, M^L_{31}\, M^L_{23} = 0\,. \tag{291}$$

Пусть $\ell = 0$, $L = 2$. Тогда $a, b, a', b' = 0$. С помощью формул (290) и (291) находим, что при любых массах частиц

$$\operatorname{rank} \mathbf{M}^2 = 2;\ \det \mathbf{M}^2 = 0; \quad M^2_{ii} = 1,\ M^2_{ki} = \cos 2\gamma_{ki}\,,\ i, k = 1, 2, 3; k \neq i.$$

Далее, используя два свойства кинематических углов (4),

$$\gamma_{12}, \gamma_{31}, \gamma_{23} > 0; \quad \gamma_{23} = \pi - \gamma_{12} - \gamma_{31},$$

показываем, что все решения системы (278) пропорциональны решению

$$D^L_{iab} = \sin\left(L(\gamma_{23}\delta_{i1} + \gamma_{31}\delta_{i2} + \gamma_{12}\delta_{i3})\right),\ i = 1, 2, 3. \tag{292}$$

Подставляя его в равенства (279), находим три $(i = 1, 2, 3)$ компоненты ложного решения, обладающего квантовыми числами $\ell, a, b = 0$, $\sigma = 1$ и $L = 2$ и зависящего от масс частиц посредством кинематических углов:

$$\begin{aligned} S^L_i(\mathbf{r}_i) &= r^{-2}\, J_{L+2}(\sqrt{E} r)\, Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega_i) \times \\ &\times\ \sin\left( L(\gamma_{23}\delta_{i1} + \gamma_{31}\delta_{i2} + \gamma_{12}\delta_{i3}) \right)\,. \end{aligned} \tag{293}$$

Пусть $L, \ell = 1$. Тогда всюду $a, a' = 1$ и $b, b' = 0$. В силу равенств (290) и (291) имеем

$$\operatorname{rank} \mathbf{M}^1 = 2;\ \det \mathbf{M}^1 = 0; \quad M^1_{ii} = 1,\ M^1_{ki} = -\cos\gamma_{ki},\ k, i = 1, 2, 3; k \neq i.$$

Решение системы (278) и отвечающее ему ложное решение (279) представляем формулами (292) и (293) с индексами $L, \ell, a = 1$, $\sigma = -1$ и $b = 0$.

Пусть $L$ и $\ell$ любые, но частицы имеют одинаковые массы. Тогда $a, a' = \ell$ и $b, b' = 0$ и $\forall |\gamma_{ki}| = \pi/3$. Поэтому все недиагональные элементы (290) матрицы $\mathbf{M}^L$ равны друг другу и условие (291) упрощается: при каждом фиксированном $\ell$ оно сводится к диофантову уравнению

$$(-2)^{\ell-1} P^{(\ell+1/2,\,1/2)}_{(L-\ell)/2}(-1) = P^{(\ell+1/2,\,1/2)}_{(L-\ell)/2}(1/2) \tag{294}$$

относительно $L$. При $\ell = 0$ или $\ell = 1$ имеется по одному решению: $L = 2$ или $L = 1$, а соответствующие компоненты (293) ложного решения удовлетворяют условиям симметрии (289) и имеют вид

$$S_i^L(\mathbf{r}_i) = (-1)^{L+1}(\sqrt{3}/2)\, r^{-2}\, J_{L+2}(\sqrt{E}r)\; Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i). \tag{295}$$

Отметим, что в случае $S$-волновых взаимодействий пространственная часть волновой функции квартетного по спину $(s = 3/2)$ рассеяния нейтрона на дейтроне в состоянии с $\ell = 0$ полностью симметрична [21]. Фаддеевские компоненты этой части волновой функции подчинены системе (233), которая имеет ложное решение (295) с $L = 2$.

*Ложные решения в случае $P$-волновых взаимодействий.* Пусть взаимодействия $P$ — волновые, а массы частиц — произвольны. Теперь, кроме чисел $\ell, m$ и $\sigma$, сохраняется число $b = 1$, а индекс $a$ может принимать не более трех значений $a = \ell, \ell \pm 1$ и, вообще говоря, не сохраняется. Следовательно, индексы $a, b$ и $a', b'$ в формулах (276)–(280) этих решений могут принимать только такие значения: $b, b' = 1$; $a, a' = \ell, \ell \pm 1$. Поэтому размерность матрицы $\mathbf{M}^L$ системы (278) не может быть больше девяти. Исключение составляют исследованный выше случай $L = 2, \ell = 1$ и случаи $L = 2, \ell = 0$ и $L, \ell = 1$. Рассмотрим их.

Пусть $\ell = 0$ и $L = 2$. Тогда $a, b, a', b' = 1$. По формулам, приведенным в книге [25], находим все недиагональные элементы матрицы $\mathbf{M}^2$ системы (278). Получаем $M_{ii}^2 = 1$ и $M_{ki}^2 = \cos 2\gamma_{ki}$. Эта матрица совпадает с матрицей $\mathbf{M}^2$, исследованной ранее в случае $S$-волновых потенциалов. Поэтому формулы (292) и (293) верны и в рассматриваемом случае, когда $\ell = 0$; $a, b = 1$ и $L = 2$.

Пусть $\ell, L = 1$. Тогда $a, a' = 1$ и $b, b' = 0$. Теперь матрица $\mathbf{M}^1$ совпадает с матрицей $\mathbf{M}^1$, рассмотренной выше в случае $S$-волновых потенциалов. Значит формулы (292) и (293) справедливы и в рассматриваемом случае, то есть при $a, b, \ell, L = 1$ и $a = 0$.

В обоих рассмотренных случаях $(\ell = 0, L = 2$ и $\ell, L = 1)$ частные ложные решения (293) при равных массах частиц сводятся к соответствующим ложным решениям (295), которые удовлетворяют условиям (289), обеспечивающим полную антисимметрию волновой функции $\Psi^\varepsilon$. В связи с этим замечанием рассмотрим систему из трех нейтронов в состоянии с $\ell = 1$, $s = 3/2$ и полным моментом $(\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s})$, равным $5/2$. В таком состоянии нейтроны взаимодействуют только посредством $P$-волновых потенциалов, а пространственная часть их волновой функции полностью антисимметрична. Ее фаддеевские компоненты подчинены системе (233), которая имеет ложное решение (295) с $L = 1$.

**4.2. Примеры точных физических решений и их ложных слагаемых.** В п. 4.2 рассматривается система трех тождественных бозонов с $S$-волновыми взаимодействиями осцилляторного, запирающего и центробежного типов. Такие взаимодействия описываются формулами (217)–(219), в которых $b = 0$ и, соответственно,

$$V(x) = (\omega x)^2/6 = (\omega\, r\cos\varphi)^2/6, \qquad \omega, x \in \mathcal{R}^1_+, \tag{296}$$

$$V(x) \to \infty, \quad x \to \infty, \tag{297}$$

$$V(x) = \alpha\, x^{-2} = \alpha(r\cos\varphi)^{-2}, \qquad |\alpha|, x \in \mathcal{R}^1_+. \tag{298}$$

*Случай осцилляторных взаимодействий.* В работе [106] Фраер, Гибсон и Пейн исследовали строение фаддеевской компоненты $\Psi^\varepsilon_1$ волновой функции

$$\Psi^\varepsilon(\mathbf{r}) = (1 + P^+ + P^-)\Psi^\varepsilon_1(\mathbf{r}),\ \mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_1,\ P^\pm = K(\pm\pi/3) \tag{299}$$

основного состояния $\varepsilon = (\ell, m, \sigma, a, b)$; $\ell, m, a, b = 0$, $\sigma = 1$, трех тождественных бозонов с $S$-волновыми потенциалами (296). В этом случае уравнение Шредингера (223) для волновой функции (299) сводится к уравнению с разделяющимися переменными $x$ и $y$:

$$\big(\, x^{-2}\partial_x(x^2\partial_x) + y^{-2}\partial_y(y^2\partial_y) - \omega^2(x^2 + y^2)/4 + E\,\big)\, \Psi^\varepsilon(r) = 0\,, \tag{300}$$

а уравнение Фаддеева (236) для компоненты $\Psi^\varepsilon_1$ имеет вид

$$6(\triangle_x + \triangle_y + E)\Psi^\varepsilon_1(x, y) = (\omega x)^2\Psi^\varepsilon(r). \tag{301}$$

Подставив известное точное решение [113] уравнения Шредингера (300)

$$\Psi^\varepsilon(r) = 3\exp(-\omega r^2/2)\,, \quad E = 3\omega, \tag{302}$$

в уравнение Фаддеева (301), авторы вывели уравнение

$$2(\triangle_x + \triangle_y + 3\omega)\Psi^\varepsilon_1(x, y) = (\omega x)^2 \exp(-\omega r^2/4)\,. \tag{303}$$

По определению образ (299) решения этого уравнения должен совпадать с точной волновой функцией (302). Поэтому в использованном далее анзаце

$$\Psi^\varepsilon_1(x^2, y^2) = \exp(-\omega r^2/4) + S(x^2, y^2) \tag{304}$$

на искомую функцию $S$ было наложено дополнительное условие:

$$(1 + P^+ + P^-)\, S(x^2, y^2) \equiv 0, \quad \forall x, y \in \mathcal{R}^1_+. \tag{305}$$

Далее Фраер, Гибсон и Пейн заметили, что в силу тождеств

$$P^\pm(x^2 + y^2) \equiv x^2 + y^2,\ (1 + P^+ + P^-)\,(x^2 - y^2) \equiv 0, \quad \forall x, y \in \mathcal{R}^1_+,$$

этому условию удовлетворяют все функции типа

$$S(x^2, y^2) = (\omega/4)\,(x^2 - y^2)\,Z(s)\,, \quad s \equiv \sqrt{\omega/2}\,r\,. \tag{306}$$

Подстановкой (304), (306) авторы свели уравнение (303) к неоднородному уравнению Бесселя для функции $Z(s)$.

Как известно [8], общее регулярное решение такого неоднородного уравнения представимо в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и любого частного решения исходного уравнения. Общее регулярное решение однородного уравнения Бесселя равно произведению функции Бесселя $J_\nu$ определенного порядка на произвольную постоянную $\lambda$, а частное решение неоднородного уравнения Бесселя дается сверткой функции Грина с его правой частью.

Использовав описанное выше представление функции $Z$ и анзац (306), Фраер, Гибсон и Пейн впервые нашли явное выражение:

$$\begin{aligned} S(x^2, y^2) \quad &= \quad \Big((x^2 - y^2)/\omega r^4\Big)\Big(\lambda\,J_4(t) + \\ &+ \quad \pi\int_0^t ds\,s^3\exp(-s^2)(Y_4(t)J_4(s) - J_4(t)Y_4(s))\Big)\,,\ t \equiv \sqrt{3\omega}\,r, \end{aligned} \tag{307}$$

для необычного слагаемого $S$ фаддеевской компоненты (304) и назвали это слагаемое ложным. Хотя ложное слагаемое (307) определено неоднозначно, при любом значении параметра $\lambda$ оно не дает, в силу равенства (305), никакого вклада в волновую функцию (299). Кроме того, ложное слагаемое имеет медленно убывающую и осциллирующую при $r \to \infty$ асимптотику. Другими словами, фаддеевскому уравнению (301) или (303) удовлетворяет однопараметрическое $(\Psi_1^\varepsilon = \Psi_1^\varepsilon(x, y; \lambda))$ множество решений (304), (307) с осциллирующими асимптотиками. Однако любому элементу этого множества отвечает только одно решение (302) уравнения Шредингера (300) с экспоненциально убывающей асимптотикой. Как отметили Фраер, Гибсон и Пейн, такая ситуация имеет место лишь в рассмотренном ими конкретном случае, а вопрос о существовании ложных слагаемых фаддеевских компонент в общем случае требует специальных исследований.

*Случай произвольных запирающих взаимодействий.* Выводы Фраера, Гибсона и Пейна были обобщены автором в работе [57], в которой удалось доказать, что ложные слагаемые фаддеевских компонент существуют для связанных состояний с $\ell = 0$ трех тождественных бозонов с произвольными $S$-волновыми запирающими потенциалами (297). Такое обобщение необходимо по следующим причинам.

Как известно [19], трехчастичное уравнение Шредингера с конфайнмент-потенциалами (297) имеет только положительные собственные значения $(E > 0)$, а отвечающие этим значениям собственные функции принадлежат классу $\mathcal{L}^2(\mathcal{R}^6)$. Однако теорема о существовании и единственности решений уравнений Фаддеева в случае парных потенциалов, растущих на больших расстояниях, не доказана [21] ни в каком классе функций. Более того, асимптотики возможных решений этих уравнений неизвестны.

В силу перечисленных фактов для конфайнмент-потенциалов стоит исследовать строение фаддеевских компонент в более широком классе функций $\mathcal{A}^\varepsilon$, чем класс квадратично-интегрируемых функций $\mathcal{L}^2(\mathcal{R}^6)$. При таком исследовании достаточно ограничиться поиском всех фаддеевских компонент, которым отвечает квадратично-интегрируемая волновая функция с положительной полной энергией. Примером того, как это можно сделать, является работа [57]. Изложим ее основные результаты.

Напомним, что в случае $S$-волновых взаимодействий бисферическая компонента $U^\ell$ и гиперсферические компоненты $U^\ell_L$ волновой функции (260), (268) трех тождественных бозонов подчинены уравнениям (257) и (267). Исследуем строение общих регулярных решений этих уравнений в случае $E > \ell = 0$, пока не конкретизируя форму запирающего потенциала. Прежде всего заметим, что при $\ell = 0$, согласно определению (79),

$$\tilde{W}_{L00}(\varphi) = (2/\sqrt{\pi})\, \sin(L+2)\varphi\,, \quad L = 0, 2, ..., \tag{308}$$

а разложение (262) становится дискретным преобразованием Фурье [3]:

$$U^0(r,\varphi) = (2\sqrt{\pi}) \sum_{L=0}^{\infty} U^0_L(r)\, \sin(L+2)\varphi\,. \tag{309}$$

По формулам (264) и (265) находим

$$\begin{aligned} S^0_L &= 1 + 4\,\frac{\sin(L+2)\pi/3}{(L+2)\sin 2\pi/3}, \quad L = 0, 2, \dots, \\ S^0_0 &= 1, \quad S^0_2 = 0, \quad S^0_L \neq 0,\ \forall L > 2. \end{aligned} \tag{310}$$

Так как $S^0_2 = 0$, то при любом потенциале $V$ система уравнений (267) распадается на систему $(L = 0, 4, 6, ...)$ уравнений

$$(\partial^2_r + r^{-1}\partial_r - (L+2)^2 r^{-2} + E)\, U^0_L(r) = R^0_L(r) \equiv \sum_{L'\neq 2} V^{LL'}_{00}(r)\, S^0_{L'}\, U^0_{L'}(r), \tag{311}$$

не содержащую функцию $U^0_2$, и дифференциальное соотношение

$$(\partial^2_r + r^{-1}\partial_r - 16 r^{-2} + E)\, U^0_2(r) = R^0_2(r) \equiv \sum_{L'\neq 2} V^{2L'}_{00}(r)\, S^0_{L'}\, U^0_{L'}(r), \tag{312}$$

определяющее функцию $U^0_2$ через все остальные функции $U^0_L$ с индексами $L \neq 2$. Заменой аргумента $t \equiv r\sqrt{E}$ сведем это соотношение к неоднородному уравнению Бесселя. Общее регулярное в нуле решение $U_2^0(t)$ полученного уравнения содержит общее регулярное решение $\lambda J_4(t)$ соответствующего однородного уравнения и частное решение исходного уравнения. Поэтому при $E > 0$ уравнение (312) имеет однопараметрическое множество решений с параметром $\lambda$ и осциллирующей при $r \to \infty$ асимптотикой:

$$\begin{aligned} U_2^0(r;\lambda) &= \lambda\, J_4(t) + \\ &+ (\pi/2)\int_0^r ds\, s\,\left(Y_4(t)J_4(s) - J_4(t)Y_4(s)\right)\, R_2^0(s/\sqrt{E})\,,\ t = r\sqrt{E}\,. \end{aligned} \tag{313}$$

Следовательно, общее решение (309) уравнения (257) также зависит от параметра $\lambda$ и представимо в виде суммы физического (заключенного в скобки) и ложного слагаемых:

$$U^0(r,\varphi) = (2/\sqrt{\pi})\left(\sum_{L\neq 2} U_L^0(r)\sin(L+2)\varphi\right) + (2/\sqrt{\pi})U_2^0(r;\lambda)\,\sin 4\varphi. \tag{314}$$

Такое представление порождает следующее разбиение каждой ($i = 1,2,3$) фаддеевской компоненты (261):

$$\Psi_i^\varepsilon(\mathbf{r}_i;\lambda) = \left(\frac{4}{\sqrt{\pi}r^2}\sum_{L\neq 2}^{\infty} U_L^0(r)\frac{\sin(L+2)\varphi_i}{\sin 2\varphi_i}\right) + \frac{8}{\sqrt{\pi}r^2}U_2^0(r;\,\lambda)\,\cos 2\varphi_i. \tag{315}$$

Здесь слагаемые, заключенные в скобки, — физические, а вторые слагаемые — ложные. Действительно, в силу равенства $S_2^0 = 0$ они не дают никакого вклада в гиперсферическое разложение (268) волновой функции:

$$\Psi^\varepsilon(\mathbf{r}_i) = \frac{4}{\sqrt{\pi}r^2}\left(3U_0^0(r) + \sum_{L=4}^{\infty} S_L^0 U_L^0(r)\,\frac{\sin(L+2)\varphi_i}{\sin 2\varphi_i}\right). \tag{316}$$

Рассмотрим в качестве иллюстрирующего примера частный случай осцилляторных конфайнмент-потенциалов (296). Применив формулы (216), (266), (308) и тождество

$$2\cos^2\varphi\,\sin(L+2)\varphi \equiv \sin(L+4)\varphi - \sin L\varphi\,,$$

вычислим матричные элементы таких потенциалов:

$$V_{00}^{LL'}(r) = \pm(\omega r^2)\,\delta_{L',L\pm 2}/12\,.$$

Так как $V_{00}^{LL'} = 0$ при $L' \neq L \pm 2$ и $S_2^0 = 0$, то система уравнений (311) расщепляется на однородное уравнение для функции $U_0^0$:

$$\left(\partial_r^2 + r^{-1}\partial_r - 4r^{-2} + E - (\omega r)^2/4\right)U_0^0(r) = 0, \tag{317}$$

и систему $(L = 4, 6, ...)$ зацепляющихся уравнений, не содержащих функций $U_0^0$ и $U_2^0$:

$$24\left(\partial_r^2 + r^{-1}\partial_r - (L+2)^2 r^{-2} + E\right) U_L^0(r) = (\omega r)^2 \sum_{L'=L\pm 2} S_{L'}^0\, U_{L'}^0(r). \tag{318}$$

По той же причине соотношение (312) принимает вид

$$24\left(\partial_r^2 + r^{-1}\partial_r - 16r^{-2} + E\right)\, U_2^0(r) = (\omega r)^2\, \left(3\, U_0^0(r) + U_6^0(r)\right)\,. \tag{319}$$

Построим решения системы уравнений (317)–(319). Как известно [8], уравнение (317) в классе функций $\mathcal{L}^2(\mathcal{R}_+^1)$ имеет счетное $(p = 0, 1, ...)$ множество решений, причем каждому собственному значению $E = E_p$ отвечает одна собственная функция, содержащая полином Ляггера $L_p^2$:

$$\begin{aligned} E &= E_p = (3 + 2p)\,\omega\,, \\ U_0^0(r; E_p) &= r^2\, L_p^2(s)\, \exp(-s/2),\ s \equiv \omega r^2/2\,,\ p = 0, 1, ... \end{aligned} \tag{320}$$

Для каждого $p$ в качестве регулярного решения системы уравнений (318) выберем тривиальное:

$$U_L^0(r; E_p) \equiv 0\,, \quad \forall r \in \mathcal{R}_+^1, \quad L = 4, 6, ... \tag{321}$$

Тогда каждому $(p = 0, 1, ...)$ решению (320) уравнения (317) будет отвечать свое однопараметрическое множество (313) решений уравнения (319):

$$\begin{aligned} &U_2^0(r; E_p, \lambda) = \lambda\, J_4(t_p) + \\ &+ \quad (\pi\omega^2/16) \int_0^r ds\, s^3 \Big( Y_4(t_p) J_4(s) - J_4(t_p) Y_4(s) \Big) U_0^0(s; E_p) \end{aligned} \tag{322}$$

с аргументом $t_p \equiv r\sqrt{E_p}$ и параметром $\lambda$. При выборе (321) формулы (314)–(316) заметно упрощаются: ряд (314) вырождается в сумму двух функций:

$$U^0(r, \varphi; E_p, \lambda) = (2/\sqrt{\pi})\, \left( U_0^0(r; E_p)\, \sin 2\varphi + U_2^0(r; E_p, \lambda)\, \sin 4\varphi \right),$$

вторая их них порождает ложное слагаемое фаддеевской компоненты (315):

$$\Psi_i^\varepsilon(\mathbf{r}_i, E_p; \lambda) = \frac{4}{\sqrt{\pi} r^2}\, \left( U_0^0(r; E_p)\, +\, 2U_2^0(r; E_p, \lambda)\, \cos 2\varphi_i \right).$$

Для основного состояния $(p = 0)$ это слагаемое пропорционально ложному слагаемому (307), найденному Фраером, Гибсоном и Пейном. Волновая функция (316) $p$-состояния,

$$\Psi^\varepsilon(\mathbf{r}_i; E_p) = (2/3\sqrt{\pi})\, U_0^0(r; E_p),$$

с точностью до нормировочного множителя совпадает с соответствующей волновой функцией, полученной решением уравнения Шредингера (223) методом гипергармоник [114].

Теперь на примере уравнения (257) с некоторым запирающим потенциалом (297) и $E > \ell = 0$ поясним способы, позволяющие, в принципе, избавиться от ложных слагаемых, и проанализируем, каким образом при численном решении этого уравнения со стандартным граничным условием происходит выбор амплитуды $\lambda$ неоднозначной части ложного слагаемого.

Самый надежный способ избавиться от ложного слагаемого основан на теореме 3. Этот способ реализуется дополнением уравнения (257) условием ортогональности искомого решения $U^0$ функции $\tilde{W}_{200}$, описывающей гиперугловую зависимость ложного слагаемого:

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi\, \sin 4\varphi\, U^0(r,\varphi;\lambda) \equiv 0\,, \quad \forall r \in \mathcal{R}^1_+. \tag{323}$$

Такое условие несложно включить в известные алгоритмы [59,60,88,92,93] численного решения уравнения (257).

Ложное слагаемое — неинтегрируемая по переменной $r$ функция. Поэтому избавиться от его неоднозначной части позволяет замена условия (323) альтернативным условием:

$$\int_0^{\infty} dr\, \big(U^0(r,\varphi;\lambda)\big)^2 \equiv 0\,, \quad \forall \varphi \in [0,\pi/2], \tag{324}$$

порождающим равенство $\lambda = 0$. Однако это условие, сужающее класс искомых решений $U^0$ до класса $\mathcal{L}^2(\mathcal{R}^2_+)$ функций, не так просто включить в традиционные алгоритмы численного решения фаддеевских уравнений. Обычно такие уравнения для задачи на трехчастичное связанное состояние решаются при значениях переменной $r$, ограниченных $(r \le R)$ некоторым достаточно большим, но конечным параметром $R < \infty$, а условие (324) заменяется требованием

$$U^0(r,\varphi;\lambda) \equiv 0\,, \quad \forall r \ge R,\ \forall \varphi \in [0,\pi/2]. \tag{325}$$

Ясно, что при любом, но конечном $R$ решение $U^0$ уравнения (257) с граничным условием (325) квадратично-интегрируемо во всей области $\mathcal{R}^2_+$. Тем не менее вычисленная функция $U^0$, а значит и сопоставленная ей фаддеевская компонента (315), содержат ложные слагаемые. Докажем это утверждение, рассмотрев два возможных случая $(A)$ и $(B)$, когда число $q \equiv \sqrt{E}R$ совпадает или не совпадает с каким-либо корнем функции $J_4$:

$$J_4(q) \ne 0 \quad (A); \qquad J_4(q) = 0 \quad (B)\,. \tag{326}$$

В силу линейной независимости базисных функций (308) ряд (309) для функции $U^0$ обращается в нуль при $r = R$ тогда и только тогда, если все его компоненты $U^0_L$ равны нулю в этой точке. Следовательно, условие (325) порождает равенство $U^0_2(R;\lambda) = 0$.

В случае $(A)$ это равенство не противоречит представлению (313) только при одном, вообще говоря, отличном от нуля значении параметра $\lambda$:

$$\lambda = \lambda(R, E) = -\frac{\pi}{2J_4(q)} \int_0^R ds\, s\, (\, Y_4(q)J_4(s) - J_4(q)Y_4(s)\,)\; R^0_2(s/\sqrt{E}). \tag{327}$$

Следовательно, при всех $r < R$ вычисленная функция $U^0$ содержит однозначно определенное ложное слагаемое $\lambda(R,E)J_4(\sqrt{E}r)\sin 4\varphi$. Кроме того, если число $q$ стремится к какому-либо корню функции Бесселя $J_4$, то функция $\lambda(R,E)$ неограниченно возрастает, что порождает неустойчивость в вычисляемых значениях функции $U^0$.

В случае $(B)$ независимо от значения параметра $\lambda$ первое слагаемое $\lambda J_4$ суммы (313), пропорциональное знаменателю дроби (327), обращается в нуль при $r = R$. В силу условия $U^0_2(R;\lambda) = 0$ в этой же точке нулевым становится и второе (интегральное) слагаемое этой суммы, пропорциональное числителю дроби (327). Поэтому рассматриваемая дробь (327) теряет смысл, параметр $\lambda$ может принимать любые значения, а функция $U^0$ при всех $r \leq R$ содержит все однопараметрическое множество ложных слагаемых типа $\lambda J_4(\sqrt{E}r)\sin 4\varphi$. Рассмотренный случай $(B)$ не реализуется на практике из-за ошибок округления, возникающих, например, при вычислении нулей функции $J_4$.

В заключение сформулируем доказанную альтернативу.

**Теорема 4.** *Граничному условию* (325) *с выбранным* $R < \infty$ *отвечает либо единственное ложное слагаемое с определенным формулой* (327) *коэффициентом* $\lambda$, *либо все однопараметрическое множество ложных слагаемых. Первый случай реализуется и в теории, и на практике при условии* (326)(A), *второй — теоретически возможен при условии* (326)(B).

*Случай взаимодействий центробежного типа.* Рассмотрим систему трех тождественных бозонов с $S$-волновыми взаимодействиями (218), (298). Исследуем фаддеевское уравнение (257) с некоторым $\ell$-методом разделения переменных [8]. Предположим, что $p^2$ — постоянная разделения переменных $r$ и $\varphi$, а искомое решение имеет вид

$$U^\ell(r,\varphi) = Z_p(\sqrt{E}r)\, F^\ell_p(\varphi)\,. \tag{328}$$

Подставив такой анзац в уравнение (257), выведем два незацепляющихся уравнения: уравнение Бесселя (211) с индексом $\nu = p$ для функции $Z_p(\sqrt{E}r)$ и интегродифференциальное уравнение для функции $F^\ell_p(\varphi)$:

$$\cos^2\varphi \left( p^2 - \tilde{L}^2_{\ell 0} \right) F^\ell_p(\varphi) = \alpha\, \langle\varphi|S^\ell|F^\ell_p\rangle\,. \tag{329}$$

Выясним, при каких условиях этому уравнению удовлетворяет конечная линейная комбинация

$$F^{\ell}_{p}(\varphi) = F^{\ell}_{pt}(\varphi) \equiv \sum_{L=\ell}^{t} B^{\ell}_{L}\, \tilde{W}_{L\ell 0}(\varphi)\,, \quad t < \infty, \tag{330}$$

с пока еще неизвестными постоянными $p$ и $B^{\ell}_{L}$.

Используя рекуррентные соотношения для полиномов Якоби с нижними индексами $n$ и $n \pm 1$, доказываем ключевое разложение

$$\cos^2\varphi\, \tilde{W}_{L\ell 0}(\varphi) = \sum_{s=0,\pm 1} C^{\ell}_{Ls}\, \tilde{W}_{L+2s,\ell 0}(\varphi), \tag{331}$$

в котором $C^{\ell}_{Ls} = 0$ при $L + 2s < \ell$, а в противном случае

$$\begin{aligned} 2\, C^{\ell}_{L's} \;&\equiv\; \delta_{s0}\left(1 - \frac{\ell(\ell+1)}{(L+1)(L+3)}\right) + \\ &+\; \left(\frac{n(2n+1)(n+\ell+1)(L+\ell+1)}{L(L+2)(L+1)^2}\right)^{1/2}, \\ s \;&=\; 0, \pm 1; \quad L' \equiv L - 2\delta_{s1}; \quad L = 2n+1. \end{aligned} \tag{332}$$

Подставим искомую функцию (330) в уравнение (329). Используя равенства (263), (264) и (331), выводим соотношение $p^2 = (t+2)^2$, определяющее постоянную разделения $p^2$ переменных $r$ и $\varphi$, и систему линейных уравнений для искомых коэффициентов $B^{\ell}_{L}$. Для столбца $\mathbf{B}^{\ell} \equiv (B^{\ell}_{\ell}, B^{\ell}_{\ell+2}, ..., B^{\ell}_{t})^T$, составленного из таких коэффициентов, эту систему можно записать в виде однородного матричного уравнения:

$$\mathbf{A}^{\ell}(\alpha)\, \mathbf{B}^{\ell} = 0 \tag{333}$$

или в виде обобщенной спектральной матричной задачи:

$$\mathbf{A}^{\ell}(0)\, \mathbf{B}^{\ell} = \alpha\, \mathbf{S}^{\ell}\, \mathbf{B}^{\ell}\,. \tag{334}$$

Ненулевые элементы диагональной матрицы

$$\operatorname{diag} \mathbf{S}^{\ell} = \left( S^{\ell}_{\ell}, S^{\ell}_{\ell+2}, ..., S^{\ell}_{t} \right)$$

заданы формулами (265), а элементы главной ($s = 0$), верхней ($s = +1$) и нижней ($s = -1$) диагоналей трехдиагональной матрицы

$$\mathbf{A}^{\ell}(\alpha) = \mathbf{A}^{\ell}(0) - \alpha \mathbf{S}^{\ell}$$

выражаются через коэффициенты (265) и (332) равенствами

$$A^{\ell}_{Ls} \equiv \left(p^2 - (L+2s+2)^2\right) C^{\ell}_{L+2s,-s} - \alpha\, S^{\ell}_{L}\, \delta_{s0}\,, \; L = \ell, \ell+2, ..., t. \tag{335}$$

Благодаря им матричный элемент $A^{\ell}_{L'0}$ не зависит от $\alpha$ тогда и только тогда, если $S^{\ell}_{L'} = 0$. В этом особом случае функция $\tilde{W}_{L'\ell 0}$ согласно равенствам (264) и (265) отображается оператором $S^{\ell}$ в тождественный нуль, а уравнения (333) обращаются в тождества, если $t = L'$ и лишь один из элементов столбца $\mathbf{B}$, а именно $B^{\ell}_{L'}$, отличен от нуля. Согласно анзацу (328) такому столбцу отвечает нетривиальное решение уравнения (257), не зависящее от параметра $\alpha$:

$$U^{\ell}(r,\varphi) = B^{\ell}_{L'}\, J_{L'+2}(\sqrt{E}r)\, \tilde{W}_{L'\ell 0}(\varphi)\,.$$

Если это ложное решение подставить в формулу (260), то получится тривиальная волновая функция $\Psi^{\varepsilon} \equiv 0$. Как отмечалось в п. 4.1, для рассматриваемой трехчастичной системы такая ситуация реализуется только при $L,\ell = 1$ или $L = 2, \ell = 0$. Во всех остальных случаях, когда задача (333) имеет нетривиальное решение, бисферической компоненте $U^{\ell}$, определенной формулами (328) и (330), отвечает трехчастичная волновая функция (260):

$$\Psi^{\varepsilon}(\mathbf{r}) = r^{-2} Z_p(\sqrt{E}r) \sum_{L=\ell}^{t} S^{\ell}_L\, B^{\ell}_L\, Y^{\ell m}_{L\ell 0}(\Omega). \qquad (336)$$

По альтернативе Фредгольма [2] нетривиальное решение уравнения (333), имеющее вид столбца $\mathbf{B}^{\ell}$ с двумя и более ненулевыми элементами, существует тогда и только тогда, если параметр $\alpha$ является нулем детерминанта матрицы $\mathbf{A}^{\ell}(\alpha)$. Из равенств (335) следует, что при любых $\ell$ и $t$ последний элемент $A^{\ell}_{t0}$ главной диагонали матрицы $\mathbf{A}^{\ell}$ равен $-\alpha\, S^{\ell}_t$, а в особых случаях, $L,\ell = 1$ и $L = 2, \ell = 0$, верно равенство $\partial_{\alpha}\, A^{\ell}_{L0} = 0$. Поэтому $\alpha = 0$ является корнем полинома $\det \mathbf{A}^{\ell}(\alpha)$, а число его остальных вещественных нулей не превышает

$$N^{\ell}_t \equiv (t-\ell)/2 - \delta_{\ell 0} - \delta_{\ell 1}\,. \qquad (337)$$

Если матрица $\mathbf{A}^{\ell}$ имеет диагональное преобладание, то она невырожденная [2]. В противном случае нули ее детерминанта удовлетворяют хотя бы одному $(L = \ell, \ell+2, ..., t)$ из неравенств

$$|A^{\ell}_{L0}(0) - \alpha\, S^{\ell}_L| < \sum_{s=\pm 1} A^{\ell}_{Ls}(0)\,. \qquad (338)$$

Приведем некоторые точные решения задачи (333).

Пусть $\ell = 0$. Тогда при $t = 0$ существует лишь тривиальное решение $\mathbf{B}^0 = (0)^T$, а при $t = 2$ и любом $\alpha$ имеется особое решение $\mathbf{B}^0 = (0,1)^T$. Если $t = 4$, то единственное решение таково:

$$\alpha = 4\,, \quad \mathbf{B}^0 = (-5,4,5)^T.$$

В случае $t = 6$ существуют два решения:

$$\alpha_{\pm} = 9 \pm \sqrt{11}, \quad \mathbf{B}^0_{\pm} = \left(4, \alpha_{\pm} - 10, \frac{60}{21-\alpha_{\pm}}, \frac{280}{\alpha_{\pm}(21-\alpha_{\pm})}\right)^T\,.$$

Пусть $\ell = 1$. Тогда при $t = 1$ и любом $\alpha$ существует особое решение $\mathbf{B}^1 = (1)^T$, при $t = 3$ решения нет, а при $t = 5$ имеется одно решение:

$$\alpha = 79/6, \quad \mathbf{B}^1 = \left(79\sqrt{3}, -395, 120\sqrt{2}/S_5^1\right)^T .$$

Если $\ell > 1$ и $t = \ell$, то имеется только тривиальное решение, а в случае $t = \ell + 2$ существует одно нетривиальное решение:

$$\alpha = 6/(1 + 2(-2)^\ell), \quad \mathbf{B}^\ell = \left(\sqrt{3(\ell+4)}\, S_{\ell+2}^\ell, \sqrt{2\ell+3}\, S_\ell^\ell\right)^T .$$

В других случаях спектральную задачу (333) или (334) нетрудно решить известными численными методами [2]. Обсудим известные результаты [66,109] численного решения этой задачи в случае $\ell = 0$. Использовав равенства (332) и (335), убедимся в том, что соотношения (338) не выполняются ни при каком $\alpha \leq 0$. Значит, все собственные значения $\alpha$ задачи (334) с $\ell = 0$ — неотрицательные числа. Минимальное из них равно $9 - \sqrt{11}$, некоторые другие приведены в виде таблицы в работе [66]. Эти данные дополняют таблицу работы [109], в которой был выполнен численный анализ уравнения (329) в случае $\ell = 0$ и $-\alpha = 1, 2, ..., 6$. Докажем, что функции $F_p^0(\varphi)$, соответствующие таким отрицательным значениям параметра $\alpha$, не представимы в виде (330). Предположим противное: пусть при $\alpha < \ell = 0$ имеется хотя бы одно решение уравнения (333) типа (330). Тогда спектральная задача (333) имеет нетривиальное решение $\mathbf{B}^0$, отвечающее выбранному отрицательному собственному значению $\alpha < 0$. Как пояснялось ранее, таких собственных значений нет. Полученное противоречие доказывает тот факт, что все функции $F_p^0(\varphi)$, вычисленные в работе [109], являются **бесконечными** рядами по функциям $\tilde{W}_{L\ell 0}$.

В заключение сформулируем доказанный критерий.

**Теорема 5.** *Уравнение Шредингера для системы трех тождественных бозонов с $S$-волновыми потенциалами* (298) *имеет точные решения* (336) *тогда и только тогда, если параметр $\alpha$ и соответствующий ему столбец $\mathbf{B}^\ell(\alpha)$ удовлетворяют спектральной задаче* (334). *При любых фиксированных индексах $\ell$ и $t$ ее собственные значения подчиняются неравенству* (338), *а их число не превышает числа $N_t^\ell$, заданного равенством* (337).

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные итоги обзора были кратко сформулированы в виде теорем 1–5 либо приводились как выводы, завершающие изложение раздела или параграфа. Поэтому в заключении перечислим лишь некоторые интересные, но нерешенные проблемы. Обобщение теорем 1–5 на случай трех частиц с дискретными (спин-изоспиновыми) степенями свободы не вызывает принципиальных затруднений и может быть осуществлено после отделения спин-изоспиновых переменных описанными в обзоре способами. Для дальнейшего развития точных методов решения трехчастичной задачи с центральными взаимодействиями представляется важным анализ кинематического преобразования углового базиса из $D$-функций Вигнера и исследования строения ложных и физических решений уравнений Фаддеева, записанных в таком базисе. Не менее интересной и актуальной задачей является построение полных и явных асимптотических разложений волновых функций в окрестностях точек тройного и парных столкновений. Сравнительный анализ известных подходов к решению этой проблемы не вошел в обзор и будет дан в отдельной работе.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Vilenkin N.Ja.** — Special Functions and the Theory of Group Representations. Am. Math. Soc. Providence, 1968.
2. **Lankaster P.** — Theory of Matrixes. New York — London: Academic Press, 1969.
3. **Смирнов В.И.** — Курс высшей математики, М.: Наука, 1974, т.3, ч.1,2.
4. **Федорюк М.В.** — Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
5. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** — Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
6. **Erdelyi A.** (ed.) — Higher Transcendental Functions. New York: McGraw-Hill, 1953.
7. **Abramowitz M., Stegun I.A.** — Handbook of Mathematical Functions. Washington: D.C., 1972.
8. **Камке Э.** — Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Пер. с нем. М.: Наука, 1976.
9. **Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.** — Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.
10. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** — Квантовая механика. М: Наука, 1974.
11. **Фреман Н., Фреман П.У.**— ВКБ-приближение. Пер. с англ. М.: Мир, 1967.
12. **Calogero F.** — Variable Phase Approach to Potential Scattering. New York and London: Academic Press, 1967.
13. **Бабиков В.В.** — Метод фазовых функций в квантовой механике. М: Наука, 1976.
14. **Taylor J.R.** — Scattering Theory. New York: Wiley, 1972.
15. **Петеркоп П.К.** — Теория ионизации атомов электронным ударом. Рига: Зинатне, 1975.
16. **Демков Ю.Н., Островский В.Н.** — Метод потенциалов нулевого радиуса. Л.: ЛГУ, 1975.
17. **Schmid E.W., Ziegelmann H.** — The Quantum Mechanical Three-Body Problem. Pergamon Press, 1977.
18. **Chadan K., Sabatier P.C.** — Inverse Problem in Quantum Scattering Problem. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1977.
19. **Reed M., Simon B.** — Scattering Theory (Methods of Modern Mathematical Physics III). New York, San Francisco, London: Academic Press, 1979.

20. **Зубарев А.Л.** — Вариационный принцип Швингера в квантовой механике. М.: Энергоатомиздат, 1981.

21. **Faddeev L.D., Merkuriev S.P.** — Quantum Scattering Theory for Several Particle Systems. Kluwer: Academic Publishers, 1993.

22. **El Bas E., Castel B.** — Graphical Methods of Spin Algebras in Atomic, Nuclear and Particle Physics. New York: Markel Dekker. Inc, 1972.

23. **Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.** — Квантовая теория углового момента. М: Наука, 1975.

24. **Biedenharn L.C., Louck J.D.** — Angular Momemtum in Quantum Physics. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1981, v.1.

25. **Джибути Р.И., Крупенникова Н.Б.** — Метод гиперсферических функций в квантовой механике нескольких тел. Тбилиси: Мецниереба, 1984.

26. **Avery J.** — Hyperspherical Harmonics, Application in Quantum Theory. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1989.

27. **Джибути Р.И., Шитикова К.В.** — Метод гиперсферических функций в атомной и ядерной физике. М.: Энергоатомиздат, 1993.

28. **Belyaev V.B., Pupyshev V.V., Wrzecionko E.** — In: International Symposium on Few Particle Problems in Nuclear Physics, JINR, Dubna, 1979, p.39.

29. **Беляев В.Б., Пупышев В.В.** — ЯФ, 1980, т.31, с.1324.

30. **Беляев В.Б., Пупышев В.В.** — Сообщение ОИЯИ Р4-81-143, Дубна, 1981.

31. **Беляев В.Б., Пупышев В.В.** — ЯФ, 1982, т.35. с.905.

32. **Belyaev V.B., Pupyshev V.V.** — JINR Preprint E4-82-815, Dubna, 1982.

33. **Belyaev V.B., Pupyshev V.V., Solovtsova O.P.** — Czec. J. Phys., 1982, v.32, p.294.

34. **Беляев В.Б., Пупышев В.В.** — В сб.: Тезисы докладов Всесоюзной конференции по теории систем нескольких частиц с сильным взаимодействием, Л.: ЛГУ, 1983, с.121.

35. **Беляев В.Б., Пупышев В.В.** — ЯФ, 1984, т.39, с.594.

36. **Пупышев В.В., Ракитянский С.А.** — ЯФ, 1985, т.41, с.1159.

37. **Беляев В,Б., Пупышев В.В., Ракитянский С.А.** — ЯФ, 1985, т.42, с.1104.

38. **Пупышев В.В., Ракитянский С.А.** — ЯФ, 1986, т.43, с.867.

39. **Пупышев В.В., Соловцова О.П.** — Сообщение ОИЯИ Р4-86-346, Дубна, 1986.

40. **Пупышев В.В., Соловцова О.П.**— ЯФ, 1988, т.47, с.60.

41. **Pupyshev V.V., Solovtsova O.P.** — In: Cont. to the XII Int. Conf. on Few-Body Problems in Physics, ed. Jennings B.K., Vancouver, B.C.Canada, 1989, p.D8.

42. **Pupyshev V.V., Solovtsova O.P.** — JINR Preprint E4-89-432, Dubna, 1989.

43. **Pupyshev V.V., Solovtsova O.P.** — JINR Preprint E4-90-447, Dubna, 1990.

44. **Pupyshev V.V., Solovtsova O.P.** — In: Proc. of the 12th Europian Conf. on Few-Body Physics, Uzhgorod, eds. Lendyel V.I. and Haysak M.I., Uzhgorod, 1990, p.340.

45. **Pupyshev V.V.** — In: Proc. of the 12th Europ. Conf. on Few-Body Physics, eds. Lendyel V.I., Haysak M.I., Uzhgorod, 1990, p.346.

46. **Pupyshev V.V., Rakityansky S.A.** — In: Contr. to the 7th Int. Conf. on Polarization Phemomena in Nuclear Physics, eds. Lepage M. et al. Paris: Gif-sur Yvette Cedex, 1990, p.61B.

47. **Pupyshev V.V., Rakityansky S.A.** — In: Contr. to the 7th Int. Conf. on Polarization Phemomena in Nuclear Physics, eds. Lepage M. et al. Paris: Gif-sur Yvette Cedex, 1990, p.62B.

48. **Pupyshev V.V.** — JINR Preprint E4-92-213, Dubna, 1992.

49. **Pupyshev V.V., Rakityansky S.A.** — In: Proc. of National Con. on Physics of Few-Body and Quark-Hadronic Systems, eds. Boldyshev V., Kotlyar V., Shebeko A., Kharkov: KFTI, 1992, p.388.

50. **Pupyshev V.V., Solovtsova O.P.** — Int. J. Mod. Phys., 1992, v.A7, p.2713.

51. **Pupyshev V.V., Rakityansky S.A.** — ЯФ, 1993, т.56, p.46.

52. **Pupyshev V.V., Rakityansky S.A.** — Z. Phys., 1994, v.A348, p.227.

53. **Pupyshev V.V., Solovtsova O.P.** — In: Cont. to the Int. Conf. Mesons and Nuclei at Intermediate Energies, eds. Khankhasaev M.Kh., Kurmanov Zh.B., Dubna: JINR, 1994, p.84.

54. **Pupyshev V.V.** — J. Math. Phys., 1995, v.A28, p.3305.

55. **Pupyshev V.V., Solovtsova O.P.** — Phys. Lett., 1995, v.B354, p.1.

56. **Пупышев В.В., Соловцова О.П.** — ЯФ, 1996, т.59, с.1807.

57. **Pupyshev V.V.** — JINR Preprint E4-85-313, Dubna, 1985.

58. **Пупышев В.В.** — ЯФ, 1986, т.43, с.260.

59. **Пупышев В.В.** — ЯФ, 1986, т.43, с.1318.

60. **Пупышев В.В.** — Сообщение ОИЯИ Р4-86-386, Дубна, 1986.

61. **Pupyshev V.V.** — JINR Preprint P5-87-153, Dubna, 1987.

62. **Pupyshev V.V.** — In: JINR Rapid Comm. 2[22]-87, Dubna, 1987, p.45.

63. **Pupyshev V.V.** — In: JINR Rapid Comm. 4[24]-87, Dubna, 1987, p.31.

64. **Pupyshev V.V.** — JINR Preprint E5-87-902, Dubna, 1987.

65. **Pupyshev V.V.** — In: Contr. Papers to XII Int. Conf. on Few-Body Problems in Physics, ed. Jennings B.K., 1989, Vancouver, B.C. Canada, p.F11.

66. **Pupyshev V.V.** — Phys. Lett., 1989, v.A140, p.151.

67. **Пупышев В.В.** — ТМФ, 1989, т.81, с.86.

68. **Pupyshev V.V.** — Few-Body Systems, 1990, v.8, p.105.

69. **Pupyshev V.V.** — JINR Preprint E4-95-152, Dubna, 1995.

70. **Pupyshev V.V** — In: VII Int. Conf. on Symmetry Methods in Physics, Dubna, 1995, p.42.

71. **Пупышев В.В.** — ТМФ, 1996, т.107, с.501.

72. **Пупышев В.В.** — ЯФ, 1998, т.61, с.1960.

73. **Пупышев В.В., Соловцова О.П.** — ЭЧАЯ, 1996, т.4, с.859.

74. **Пупышев В.В.** — ЭЧАЯ, 1997, т.28, с.1457.

75. **Фаддеев Л.Д.** — ЖЭТФ, 1960, т.39, с.1459.

76. **Novoselsky A., Barnea N.** — Phys. Rev., 1995, v.A51, p.2777.

77. **Богословский Г.Ю., Клепиков Н.П.** — ЯФ, 1968, т.7, с.644.

78. **Raynal J., Revai J.** — Nuovo Cim., 1970, v.A68, p.612.

79. **Raynal J.** — Nucl. Phys., 73, v.A202, p.631.

80. **Эфрос В.Д.** — ЯФ, 1973, т.17, с.210.

81. **Смородинский Я.А., Эфрос В.Д.** — ЯФ, 1976, т.23. с.715.
82. **Efros V.D.** — Few-Body Systems, 1995, v.19, p.167.
83. **Эфрос В.Д.** — ЯФ, 1972, т.15, с.226.
84. **Эфрос В.Д.** — ЯФ, 1973, т.17, с.988.
85. **Barnea N., Novoselsky A.** — Ann. Phys. (NY), 1977, v.256, p.192.
86. **Novoselsky A., Katriel J.** — Phys. Rev., 1994. v.A49, p.833.
87. **Noyes H.P.** — Three-Body Problem in Nuclear and Particle Physics. North-Hollad, Amsterdam, 1970.
88. **Merkuriev S.P., Gignoux G., Laverne A.** — Ann. Phys. (NY) , 1976, v.99, p.30.
89. **Merkuriev S.P.** — Ann. Phys. (NY), 1980, v.130. p.395.
90. **Квицинский А.А. и др.** — ЭЧАЯ, 1986, т.17, с.267.
91. **Квицинский А.А., Кострыкин В.В., Меркурьев С.П.** — ЭЧАЯ, 1990, т.21, с.1301.
92. **Bosveld G.D., Schellingerhout N.W.** — Report 231, Groningen: University of Groningen, 1989.
93. **Friar J.L., Gibson B.F., Payne G.L.** — Phys. Rev., 1981, v.C24, p.2279.
94. **Friar J.L., Gibson B.F., Payne G.L.** — Phys. Rev., 1982, v.C26, p.1385.
95. **Яковлев С.Л., Филихин И.Н.** — ЯФ, 1993, т.56. с.98.
96. **Яковлев С.Л., Филихин И.Н.** — Вестн. ЛГУ. Физика. Химия., 1982, сер.4, вып.3, с.24.
97. **Benanyoun J.J., Gignoux C., Chauvin J.**— Phys. Rev., 1981, v.C23, p.1854.
98. **Adhikary S.K., Birse M.S. et al.** — Phys. Rev., 1984, v.30, p.780.
99. **Mandelzweig V.B.** — Ann. Phys. (NY), 1977, v.104, p.1.
100. **Adhikari S.K., Glöckle W.** — Phys. Rev., 1979. v.C19, p.616.
101. **Levin F.S.** — Ann. Phys. (NY), 1980, v.130, p.139.
102. **Evans J.W.** — J. Math. Phys., 1981, v.22, p.1672.
103. **Evans J.W., Hoffman D.K.** — J. Math. Phys., 1981, v.22, p.2858.
104. **Yakovlev S.L.** — LTPE Preprint, Orsay 91/14, 1991.
105. **Яковлев С.Л.** — ТМФ, 1995, т.102, с.323.
106. **Friar J.L., Gibson B.F., Payne G.L.** — Phys. Rev., 1980, v.C22, p.284.
107. **Fabre de la Ripelle M., Larsen S.Y.** — Few-Body System, 1992, v.13, p.199.
108. **Руднев В.А., Яковлев С.Л.** — ЯФ, 1995, т.58, с.1762.
109. **Avishai Y.** — J. Math. Phys., 1975, v.16, p.1491.
110. **Machleidt R., Holinde K., Elster Ch.** — Phys. Rep., 1987, v.149, p.1.
111. **Fiar J.L., Payne G.L.** — Phys. Rev., 1988, v.C38, p.1.
112. **Fabre de la Ripelle M.** — Few-Body Systems, 1986, v.1, p.181.
113. **Noyes H.P.** — Phys. Rev. Lett., 1969, v.23, p.1201.
114. **Смирнов Ю.Ф., Шитикова К.В.** — ЭЧАЯ, 1977, т.8, с.847.

## РЕФЕРАТЫ СТАТЕЙ, ПОМЕЩЕННЫХ В ВЫПУСКЕ

УДК 539.14

**Релятивистская теория эволюции структуры нуклона в ядре.** *Буров В.В., Молочков А.В., Смирнов Г.И.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1999, том 30, вып.6, с.1337.

Представлен обзор экспериментальных и теоретических исследований глубоконеупругого рассеяния (ГНР) лептонов на ядерных мишенях. Очерчены основные проблемы, которые необходимо решить при анализе *x*- и *A*-зависимостей сечений ГНР. Анализируется ряд моделей, предлагавшихся для изучения вклада ядерных эффектов в структурные функции $F_2(x)$. Разработан и реализован релятивистский теоретико-полевой подход для рассмотрения ГНР лептонов на легчайших ядрах. Впервые в рамках единого подхода выполнено исследование модификации структуры нуклона в D, $^3$H, $^3$He и $^4$He. Найдено, что эволюция модификаций полностью отличается от эволюции, наблюдавшейся ранее для тяжелых ядер. В частности, обнаружено, что картина модификаций $F_2(x)$, представленная в терминах отношений $F_2^{\mathrm{A}}/F_2^{\mathrm{N(D)}}$, определяется значениями $(1-x_3)=0{,}32\,(\mathrm{D/N})$, $0{,}16\,({}^3\mathrm{He/D})$ и $0{,}08\,({}^4\mathrm{He/D})$. Полученные результаты позволяют определить класс модификаций структуры связанного нуклона и ввести единицу модификации структуры нуклона. Получено также теоретическое обоснование концепции двухэтапной эволюции структуры нуклона как функции *A*, происходящей на первом этапе для $A \le 4$ и затем для $A > 4$. Давняя проблема природы EMC-эффекта понимается как модификация структуры нуклона в поле ядерных сил трехнуклонной связанной системы.

Ил.10. Библиогр.: 95.

УДК 539.172.3

**Фотообразование легких η-ядер.** *Трясучев В.А.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1999, том 30, вып.6, с.1391.

На основе анализа экспериментальных и теоретических данных о взаимодействии η-мезонов с нуклонами и ядрами в рамках модели с мезон-ядерным оптическим потенциалом прямоугольной формы доказывается возможность существования сверхлегких η-ядер с $A > 2$. Образование η-ядер впервые рассматривается во взаимодействии фотонов высоких энергий с атомными ядрами в реакциях вида $\gamma + A \to N +_\eta A'$, сопровождающихся вылетом «быстрого» нуклона $N$. Предложен и реализован простейший механизм такой реакции. Подчеркивается важная роль взаимодействия в конечном состоянии в околопороговой области энергий фотонов. Рассчитаны вероятности образования сверхлегких η-ядер $_\eta T$ и $^3_\eta\mathrm{He}$ фотонами и изучена возможность их наблюдения по пику в спектре выбиваемых нуклонов из ядра-мишени $^4$He. В области энергий налетающих γ-квантов от порога до 1 ГэВ исследована зависимость сечений реакций $^{12}\mathrm{C}(\gamma, N)_\eta A'$, $^{16}\mathrm{O}(\gamma, N)_\eta A'$ от квантовых чисел ядерных остовов η-ядер и квантовых чисел уровней образуемых η-ядер. Впервые рассчитаны вероятности образования η-ядер в 1*p*-состоянии.

Табл.2. Ил.19. Библиогр.: 58.

УДК 539.143; 539.172.17

**Сильнонейтроноизбыточные изотопы легких элементов. Структура ядер.** *Калпакчиева Р., Пенионжкевич Ю.Э., Болен Х.Г.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1999, том 30, вып.6, с.1429.

В работе исследуется структура сильнонейтроноизбыточных изотопов легких элементов ($2 \le Z \le 5$). Представлена последняя информация о схемах энергетических уровней этих ядер, их массах, энергиях связи. Благодаря развитию измерительной техники, а также получению интенсивных пучков тяжелых ионов с высоким энергетическим разрешением, были обнаружены новые связанные нейтроноизбыточные ядра, а также ядра, расположенные за границей нейтронной стабильности. Такие ядра, являясь нейтронно-нестабильными, живут достаточно долго и проявляются в виде резонансов. При этом в ядерных системах существуют основное и возбужденные состояния, а также определенная структура возбужденных уровней. Исследование этих ядер представляет значительный интерес в связи с их необычными свойствами — нейтронное гало, новые области деформаций, новые типы распадов, особенности заполнения оболочек. В обзоре дается достаточно полная информация о характеристиках нейтронно-нестабильных ядер. Подробно описываются свойства нейтронного гало, проявляющиеся в супернейтроноизбыточных ядрах легких элементов. Обсуждаются особенности структуры ядер с двухнейтронным гало ($^6$He, $^8$He, $^{11}$Li, $^{14}$Be). Экспериментальные результаты сравниваются с предсказаниями различных теоретических моделей, рассчитывающих положение границы нуклонной стабильности ядер. Новые возможности в подобных исследованиях открывают вторичные пучки радиоактивных ядер. В настоящее время в качестве ускоренных пучков экспериментаторы используют относительно интенсивные пучки ускоренных экзотических ядер $^6$He, $^8$He, $^{11}$Li, $^{14}$Be и проводят с ними исследования. Результаты, полученные на вторичных пучках радиоактивных ядер и перспективы исследований с ними, также обсуждаются в настоящем обзоре.

Табл.11. Ил.39. Библиогр.: 242.

УДК 539.173

**Запаздывающее деление атомных ядер.** *Кузнецов В.И., Скобелев Н.К.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1999, том 30, вып.6, с.1514.

Изложена история открытия, методы синтеза и регистрации запаздывающего деления как вида радиоактивного распада атомных ядер, лежащих в отдалении от полосы бета-стабильности. Рассмотрена качественная теория, описывающая этот вид радиоактивного распада. Отмечено существование областей атомных ядер, испытывающих запаздывающее деление левее ($N < 126, Z < 82$) нуклонных оболочек $N = 126$ и $Z = 82$. Приведены примеры вычисления на основе экспериментальных данных о запаздывающем делении высот барьеров деления ядер, удаленных от линии бета-стабильности. Показано, что в настоящее время только изучение этого процесса дает возможность получить достоверные данные о высотах барьеров деления ядер с большим избытком или недостатком нейтронов. Обсуждено влияние запаздывающего деления на процесс нуклеосинтеза в импульсных нейтронных потоках термоядерных взрывов, на синтез элементов Вселенной, в частности, на образование хронометрических пар и, как следствие, на оценку возраста Галактики.

Табл.5. Ил.18. Библиогр.:55.

УДК 539.17

**Некоторые методы и результаты аналитических исследований задачи трех ядерных частиц.** *Пупышев В.В.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1999, том 30, вып.6, с.1562.

В обзоре представлены как классические, так и новые методы и результаты аналитических исследований строения стационарных уравнений Шредингера и Фаддеева и их решений, описывающих состояния трехчастичных систем с центральными и $S$-волновыми взаимодействиями. Особое внимание уделено угловому анализу этих уравнений и точным законам преобразования трехчастичных координат, операторов, базисных и волновых функций при циклической перестановке частиц. Дан анализ проблемы ложных решений. Подробно изложены новые методы вычисления коэффициентов Рейнала—Реваи и способы исключения ложных решений при численном анализе уравнений Фаддеева.

Библиогр.:114.