

ВЛАДИМИР АЛЕКСАНДРОВИЧ ФОК

(К столетию со дня рождения)

Ю.В.Новожилов, В.Ю.Новожилов

Санкт-Петербургский государственный университет

ВВЕДЕНИЕ	5
КРАТКИЙ ОБЗОР НАУЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В.А.ФОКА	5
Роль математического аппарата в современной физике	5
В.А.Фок и современная физика	8
Уравнение Клейна—Фока и фазовое преобразование волновой функции [8,9]	10
Представление Фока	10
Уравнение Дирака в поле тяготения и параллельный перенос как способ задания калибровочного взаимодействия	10
Метод Хартри—Фока	11
Многовременной формализм Дирака—Фока—Подольского	11
Пространство Фока	12
Симметрия атома водорода и динамическая симметрия	12
Метод собственного времени Фока	12
Метод функционалов Фока [49,50]	13
Уравнения движения масс в общей теории относительности	13
Дифракция	13
Прикладные задачи	13
Книги «Теория пространства, времени и тяготения» [66, 67] и «Начала квантовой механики» [68, 69]	14
Защита науки	14
Даты жизни Владимира Александровича ФОКА	15
РАБОТЫ ПО КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ	20
Обобщение уравнения Шредингера и уравнение Клейна—Фока	20
Теория излучения Дирака и представление Фока	22
Квантовая электродинамика и многовременной формализм Дирака—Фока—Подольского	24

Метод функционалов Фока	26
Уравнение Дирака в гравитационном поле	27
Пространство Фока [37]	29
Собственное время в классической и квантовой механике [42]. Калибровка Фока	31
Симметрия атома водорода и динамические группы	33
Проблемы истолкования квантовой теории	35
РАБОТЫ В.А.ФОКА ПО ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ	37
Движение конечных масс в общей теории относительности	37
Книга «Теория пространства, времени и тяготения»	40
Принцип относительности Птолемея—Коперника и принцип относительности Галилея	42
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	43

ВЛАДИМИР АЛЕКСАНДРОВИЧ ФОК

(К столетию со дня рождения)

Ю.В.Новожилов, В.Ю.Новожилов

Санкт-Петербургский государственный университет

Дан краткий обзор научной деятельности Владимира Александровича Фока и ее значения для современной физики. Более подробно обсуждается вклад В.А.Фока в развитие квантовой теории поля и теории тяготения.

A short review is given on research activity of Vladimir A. Fock and its role in modern physics. V.Fock's contribution to the development of quantum field theory and theory of gravity is discussed in more detail.

ВВЕДЕНИЕ

Исполнилось 100 лет со дня рождения Владимира Александровича Фока.

Данная статья посвящена жизни и деятельности В.А.Фока и его вкладу в создание квантовой теории и, особенно, методов квантовой теории поля. Раздел 1 содержит краткий обзор научной деятельности В.А.Фока. Мы посылаем обсуждению работ В.А.Фока раздел о роли математического аппарата в современной физике, чтобы расширить круг читателей и сделать эту статью более понятной тем, кто работает в области квантовой физики и теории тяготения.

В разделах 2 и 3 рассказывается более подробно об основных работах В.А.Фока по квантовой теории и общей теории относительности, за исключением работ по созданию и применению метода самосогласованного поля Хартри—Фока.

1. КРАТКИЙ ОБЗОР НАУЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В.А.ФОКА

Роль математического аппарата в современной физике. До сих пор еще распространено неправильное представление о роли математического аппарата в современной физике и о том смысле, который при этом вкладывается в это понятие.

Обычно предполагается, что роль математического аппарата хотя и важна, но второстепенна и сводится к количественному описанию явлений; первое же место всегда отводится тем идеям, которые позволяют понять явление качественно. Идея или картина явления обычно формулируется при помощи

наглядных представлений, без применения математического аппарата. Так, например, когда говорят о полете спутника, то считается очевидным, что задача математического аппарата здесь заключается лишь в точном определении траектории спутника с учетом всех воздействий — и силы тяготения, и сопротивления воздуха, в то время как приблизительный вид траектории и характер влияния этих воздействий («качественное описание») могут быть поняты без обращения к математике. И действительно, качественная картина полета спутника нам понятна, она вполне наглядна, так как на основании опыта наблюдений и школьного курса физики мы хорошо знаем действие сил тяготения и сопротивления воздуха.

Но наглядные представления применимы далеко не всегда. Пожалуй, в новой физике даже трудно найти такую область, где общепринятые наглядные представления и «здоровый» смысл привели бы к «здоровым» результатам. Абстрактность представлений — характерная черта современных физических воззрений. В этом заключается одна из причин неудач многочисленных претендентов на объяснение явлений современной физики (главным образом, квантовой физики) с точки зрения наглядных представлений. И именно вследствие этого обстоятельства в новой физике математическому аппарату принадлежит решающее место. В отличие от ньютоновской, в современной физике фактически невозможно описать явление качественно, не пользуясь математическим аппаратом. Математические методы образуют основу современных физических теорий, и даже физическое толкование опирается на них. Роль математического аппарата в новой физике и, в частности, в физике элементарных частиц, таким образом, значительно шире той роли, которая ему обычно приписывается. Разумеется, обсуждая экспериментальные факты, ученые вполне в состоянии дать качественное объяснение «на пальцах», не обращаясь к уравнениям. Однако слова и фразы, описывающие картину явления, по существу, не что иное, как пересказ и толкование математической теории этого явления. (Известно, что математический язык — наиболее сжатый и точный язык.)

Важная роль математических методов в физике элементарных частиц видна также и в том, что сами основные понятия оказываются предметом математического исследования в теории элементарных частиц, в то время как основные понятия ньютоновской физики являются частью наших наглядных представлений. Так, понятие о координатах спутника по отношению к Земле включаются нами в схему наглядных представлений, а понятия о величинах, при помощи которых описывается движение квантовых полей (например, «столбец Фока»), составляют существенную часть математического аппарата квантовой теории поля.

Развитие физики идет по пути усложнения ее математического аппарата. Квантовая теория поля широко использует такие разделы математики, как теорию групп, теорию обобщенных функций и теорию операторов, и т.д.

Чем абстрактнее математический аппарат, тем необычнее и соответствующие физические теории. По абстрактности представлений квантовая теория поля занимает в современной физике, безусловно, первое место.

Следует помнить, что абстрактность и наглядность относительны. В самом деле, наглядное представление — это представление посредством привычных моделей и понятий. Когда какая-либо область науки хорошо изучена, вырабатывается система представлений, позволяющая объяснить «наглядно» все явления в этой области. Совершенно очевидно, что наглядным путем можно объяснить только явления, не выходящие за рамки привычных теорий. Если же новые факты выходят за рамки известных теорий, то бессмысленно объяснять их с точки зрения старых представлений наглядным образом. Тогда нужно создавать новую систему представлений.

Мнения разных людей о наглядности или абстрактности объяснений физического явления часто бывают различны, так как уровень «наглядности» определяется знаниями. Опираясь на школьный курс физики и повседневный опыт, большинство людей мыслит сейчас при помощи механических моделей. Значительно меньшее число людей может сказать, что они наглядно представляют себе электромагнитное поле, и уже совсем ничтожная доля может заявить, что для них наглядны квантовые понятия. Механические, квантовые представления и представления об электромагнитном поле образуют (каждое в отдельности) вполне стройную систему, способную объяснить явления в этой области. Понять же квантовые закономерности на основе механических представлений или представлений о поле невозможно так же, как нельзя понять электромагнитные явления при помощи механических моделей.

Весьма поучительна хорошо известная из истории физики попытка вывода свойств электромагнитного поля на основе механических воззрений. Во время развития электромагнитной теории механика достигла уже известной завершенности, хорошо объясняла многочисленные явления, представления ее были привычны, и многим казалось, что и все остальное должно укладываться в рамки механических воззрений. Для объяснения электромагнетизма было введено понятие об универсальной упругой среде, заполняющей все пустое пространство, — мировом эфире. Все тела считались погруженными в эфир и пронизанными эфиром. Электромагнитное поле по этой модели действовало в эфире; оно было, по тогдашним представлениям, не чем иным, как механическими напряжениями в эфире. Свет рассматривался как распространение упругих колебаний в эфире.

С развитием электромагнитной теории, с открытием новых опытных фактов при такой трактовке возникало все больше трудностей. Эфир приходилось наделять самыми противоречивыми свойствами: он должен был вести себя как твердое тело при быстрых колебаниях и не сопротивляться движению планет; эфир сравнивался с жидкостью, со смолой и т.д.

В дальнейшем, в связи с этими трудностями, стали рассматривать эфир

как особую материальную среду, наделенную свойствами, не имеющими ничего общего со свойствами обычных тел. Предполагалось только, что эфир может служить системой отсчета, т.е., что можно говорить о скорости Земли относительно эфира. Но и такие представления об эфире оказались неудовлетворительными. В опыте Майкельсона и в других опытах было установлено, что нельзя определить движение Земли относительно эфира. Понятие эфира как некоторой субстанции потеряло смысл. Нелепо было пытаться объяснить электромагнитные явления посредством упругих свойств среды (эфира), которая не могла быть обнаружена. Понятие об эфире было полностью устранено из электромагнетизма в теории относительности Эйнштейна, и теперь оно означает не более чем поэтический образ («радиоволны в эфире» и т.д.).

Но если при помощи механических моделей и нельзя сделать наглядным электромагнитное поле, то отсюда вовсе не следует, что электромагнитное поле недоступно для наглядного восприятия. Мы сможем представить себе наглядно электромагнитное поле, если изучим подробно его свойства и привыкнем к ним. Качественные соотношения, вытекающие из уравнений поля, и будут характеризовать поле «наглядным образом». Мы можем, например, представить электростатическое поле при помощи линий напряженности электрического поля и поверхностей равного потенциала; можем изобразить магнитное поле посредством магнитных силовых линий и т.д.

Мы видели, что чем необычнее закономерности природы, тем большую роль играет математический аппарат теории. В создании его главным стимулом служит стремление найти такое математическое оформление теории, которое наилучшим образом отражает положение вещей. Иной раз проходят годы и даже десятилетия, прежде чем физикам удастся создать окончательную математическую формулировку теории или, как говорят, придать теории простой и изящный вид.

Много первоначальных несовершенных построений при этом отпадает. Тем более удивительной кажется «живучесть» небольшого числа методов, разработанных еще в начале 30-х годов, — методов, в которых авторам удалось сразу же схватить «логику» природы и сформулировать ее новые необычные понятия.

В.А.Фок и современная физика. Научная деятельность В.А.Фока охватывала широкий круг проблем теоретической и математической физики, а также прикладной физики и математики. Приблизительно можно выделить следующие периоды научной деятельности В.А.Фока:

- Квантовая механика и квантовая теория поля — 1926–1937 и 1940–1941 гг.
- Общая теория относительности — 1938–1941 и 1949–1961 гг.
- Математика — 1942–1944 гг.
- Дифракция — 1944–1951 гг.

- Обсуждение принципиальных вопросов квантовой теории и теории относительности — вплоть до 1974 г., работа над книгой «Проблемы дифракции и распространения радиоволн» (1970) и над вторым изданием книги «Начала квантовой механики» (1973).

Из этой классификации выпали работы по математической физике и прикладной физике, выполненные в различные годы.

Наиболее значителен вклад В.А.Фока в квантовую физику. Он был одним из создателей квантовой механики и квантовой теории поля. Война задержала начало научной деятельности молодого Фока. Включившись в деятельность по построению квантовой физики несколькими годами позднее первопроходцев де Бройля, Гейзенберга, Шредингера и Дирака, В.А.Фок сумел сразу же выдвинуться в число ведущих теоретиков мира и открыть подходы к новым явлениям и методы расчета, которые сохраняют значение и сейчас. Его видение физических явлений и описывающего их математического аппарата с базисными понятиями было удивительным и опережало развитие физики на десятилетия. Подход В.А.Фока в ряде работ можно также описать словами самого В.А., сказанными по поводу Дирака: «Автор строит теорию по методу «математической гипотезы»: сперва вводится математический аппарат, а затем для него подыскивается физическое толкование». Иногда это даже мешало популярности его работ среди тех, кто привык работать по готовым рецептам и не мог воспринять новое, выходящее за рамки стандартных идей.

Место работ В.А.Фока в современной физике легче всего объяснить, если проследить историю ее развития.

Годы 1923–1927 в создании квантовой теории были критическими. К этому времени был накоплен достаточный экспериментальный материал, который не мог быть объяснен теорией Бора, его принципом соответствия и оболочечной моделью атома, представлениями о вероятностях переходов спонтанного и вынужденного излучения Эйнштейна. Аномальный эффект Зеемана, связанный с неизвестным еще тогда спином, вместе с явлениями, понятыми позже с помощью принципа запрета, и дуализмом частица—волна создавали физическую картину, трудную для объяснения в рамках одной теории. И действительно, квантовая теория была создана после того, как сперва были найдены три ключа к объяснению опытов — дуализм, принцип запрета, спин, а затем объединены в современную квантовую теорию. Де Бройль первым понял [1] в 1925 г., что в основе вещей находятся «волны материи». В том же году Паули [2] опубликовал принцип запрета, а Гейзенберг [3] сформулировал матричную механику, развитую в работах Борна и Йордана [4] и Борна, Йордана и Гейзенберга [5]. Идеи де Бройля были развиты и превращены в волновую механику Шредингером, четыре сообщения которого появились в 1926 г. в журнале «Annalen der Physik» [6] под общим заглавием «Квантование как проблема собственных значений» («Quantisierung als Eigenwertproblem»).

В.А.Фок включился в великое квантовое строительство в 1926 г. [7], сразу же после появления первой (из четырех) статьи Э.Шредингера. В статье [7] Фок обобщает уравнение Шредингера на случай сил, зависящих от скорости. Он опубликовал ее почти в то же время, когда вышел журнал со вторым сообщением Шредингера.

Уравнение Клейна—Фока и фазовое преобразование волновой функции [8,9]. В том же 1926 г. В.А.Фок и О.Клейн независимо дают физике релятивистское волновое уравнение — уравнение для частицы со спином 0. Как всегда у Фока, это сделано основательно — в присутствии внешних электромагнитного и гравитационного полей, путем изучения инвариантных свойств действия. Здесь рассматривается также градиентное (калибровочное) преобразование электромагнитных потенциалов и, впервые, соответствующее фазовое преобразование волновой функции заряженной частицы. В этой работе В.А.Фок использует переход к пространству пяти измерений с метрикой, зависящей от электромагнитного поля. Эта работа, безусловно, превосходит уровень теоретической физики того времени. Недаром многие физики предпочли сослаться на опубликованную позднее работу Гордона [10], где было предложено только аналогичное релятивистское уравнение для свободной частицы. Переход в пятимерное пространство, использованный как Фоком, так и Клейном, был впервые рассмотрен Калузой [11]. Через 40–50 лет переход к пространствам с дополнительными измерениями стал весьма популярен, и одно из направлений в таком духе получило название подхода Калузы—Клейна.

В это же время были сделаны другие большие открытия. Ферми предложил [12] статистику, совместную с принципом запрета Паули. Дирак сформулировал принцип запрета на языке антисимметричных волновых функций [13]. Борн [14] дал новой теории вероятностное истолкование. Гипотеза Уленбека и Гаудсмита о спине [15] была принята физиками. Этот первый этап построения квантовой механики завершился открытием Гейзенбергом [16] соотношений неопределенностей.

Представление Фока. В 1927 г. Дирак [17] создает квантовую теорию испускания и поглощения света, которая единым образом описывает как интерференционные явления, так и процессы испускания и рождения квантов света. В.А.Фок замечает, что математический аппарат этой замечательной теории не соответствует физике явления, и в 1928 г. предлагает другую математическую основу теории [18] — то, что Дирак называет [19] представлением Фока. Это представление операторов рождения и поглощения в гильбертовом пространстве теперь используется повсеместно; оно входит в любой учебный курс по квантовой механике. Однако редки те авторы, которые при этом упоминают имя В.А.Фока.

Уравнение Дирака в поле тяготения и параллельный перенос как способ задания калибровочного взаимодействия. В 1928 г. Дирак предложил

[20] уравнение для частицы со спином $1/2$. В 1929 г. в работе В.А. Фока и Д.Д. Иваненко [21] было высказано предположение, что матрицы Дирака имеют чисто геометрический смысл, а в следующей работе этих авторов [21a] было введено понятие параллельного переноса биспинора. Следующим шагом в геометризации теории Дирака было получение Фоком [22] уравнения для частицы со спином $1/2$ в гравитационном поле, переходящего в уравнение Дирака в пространстве Минковского. Об этом уравнении говорят как об уравнении Дирака в гравитационном поле; оно рассматривалось также Вейлем [23]. При параллельном переносе спинора в ковариантной производной появляется дополнительное слагаемое, имеющее смысл электромагнитного потенциала. Параллельный перенос выступает как способ задания взаимодействия и обеспечения калибровочной инвариантности взаимодействия между заряженными и тяготеющими телами. Такая геометрическая интерпретация взаимодействия имеет совершенно общий характер и приложима ко всем видам взаимодействия (с абелевой или неабелевой группой калибровочных преобразований). Эти работы показывают, как появляются калибровочные теории, представляющие собой основу современной квантовой теории поля. Значение этого результата было осознано примерно через 50 лет.

Метод Хартри—Фока. После построения квантовой механики одной частицы во внешнем поле и установления статистических свойств фундаментальной проблемой стала многоэлектронная задача квантовой механики и расчет строения атома. В 1928 г. Хартри [24] сделал первый шаг к решению, построив систему самосогласованных уравнений для одноэлектронных волновых функций. В.А.Фок поставил строго многоэлектронную задачу о волновой функции системы электронов, подчиняющейся уравнению Шредингера, принципу Паули и имеющей заданный момент количества движения. Приближенное решение [25] этой задачи в терминах одноэлектронных функций с помощью вариационного принципа дает самосогласованные уравнения Хартри—Фока, отличающиеся от системы Хартри наличием обменных членов. В.А.Фок в собственных расчетах [26] и в расчетах с М.И.Петрашень [27] показал эффективность такого подхода. Именно метод Хартри—Фока [25] служит основой вычислений в многочастичных задачах квантовой механики с момента создания по настоящее время. Метод учета парных корреляций был позднее разработан В.А.Фоком, М.Г.Веселовым и М.И.Петрашень [28].

Многовременной формализм Дирака—Фока—Подольского. Первая теория квантового поля принадлежит Гейзенбергу и Паули [30]. Эта теория встретила с рядом трудностей, которые, как выяснилось позднее, были типичны при применении канонического формализма в калибровочных теориях. Проблема введения релятивистски-инвариантного взаимодействия с заряженными частицами и происхождения кулоновских сил оставалась открытой. Дирак [31] выдвинул идею (и проиллюстрировал ее в одномерном случае), что кулоновские силы возникают в результате обмена скалярными

квантами. Релятивистскую инвариантность теории предлагалось обеспечить введением отдельного времени для каждой заряженной частицы. Фок и Подольский [32] рассмотрели случай трехмерного пространства и получили реальный кулоновский потенциал. Их совместная статья с Дираком [29] придала теории законченный вид. Многовременной формализм Дирака—Фока—Подольского — это элегантная релятивистски-инвариантная формулировка квантовой электродинамики с заданным числом заряженных спинорных частиц. Здесь впервые введено представление взаимодействия для поля. Поле и каждая частица описываются отдельными координатами и временами. Эта теория представляет собой важный этап в создании современной квантовой теории поля. Новейшее развитие многовременного формализма связано с именами К. Томонаги [33] и Ю. Швингера [34].

Пространство Фока. Метод вторичного квантования был развит Дираком [17], Йорданом и Паули [35], Йорданом и Вигнером [36]. В нем волновая функция частицы рассматривалась в качестве оператора. Возникал вопрос о том, в каком отношении полученная теория соотносится с квантовой механикой. Ответ на этот вопрос был дан в работе В.А.Фока «Вторичное квантование и конфигурационное пространство» [37]. Этот ответ включал и введение нового понятия, которое получило название пространства Фока. В этом пространстве живут квантовые системы с взаимодействием, изменяющим число частиц. Это пространство универсально, так как оно не зависит от конкретной динамики, определяемой гамильтонианом. Его областью применения является вся квантовая физика.

Симметрия атома водорода и динамическая симметрия. Характер вырождения уровней атома водорода свидетельствовал о существовании некоторой, еще неизвестной симметрии. Многочисленные попытки выявить эту симметрию были неудачны. В.А.Фок показал [38] с помощью изящного преобразования, что атом водорода обладает четырехмерной симметрией в импульсном пространстве. Эта симметрия необычна, так как она смешивает координаты и импульсы, т.е. представляет собой динамическую симметрию. Спустя 25 лет эта работа послужила начальным толчком к обширной деятельности и к появлению сотен работ, посвященных моделям динамической симметрии, в которых спектр системы генерируется группой симметрии [39–41].

Метод собственного времени Фока. В.А.Фок [42] сумел найти такое расширение уравнения Дирака с внешним полем в пятимерное пространство, когда пятой координате можно придать смысл собственного времени, тем самым обеспечив релятивистскую инвариантность вычислений на всех этапах и единственность решения задачи Коши, а также выделения появляющихся бесконечностей, т.е. решил одним махом три проблемы. Этот метод через 15 лет был развит Швингером [43] и позднее де Виттом [44]. Метод с успехом применялся Намбу [45], Боголюбовым и Ширковым [46]. Он стал основным

способом регуляризации континуальных интегралов (т.е. связанных с ними определителей). В этой же работе В.А.Фок предложил новое калибровочное условие для потенциалов, которое все чаще применяется в наши дни, особенно тогда, когда нужно использовать свойства самодуальности [47,48].

Метод функционалов Фока [49,50]. «Метод функционалов» — это название было дано самим В.А. в своей работе [50], объединяющей с единой точки зрения его трактовку квантовой электродинамики, начатую в 1928 г. статьей, где было дано «представление Фока». Разумеется, эта трактовка в упрощенном виде применима и к скалярным мезонным полям. В методе функционалов В.А. выдвигает на первый план идею о производящем функционале, зависящем от вспомогательных функций, разложение которого в ряд дает амплитуды вероятности. Идея о производящем функционале оказалась весьма плодотворной в новейшем развитии квантовой теории поля, где вспомогательными функциями служат источники (внешние токи), разложение по степеням которых дает функции Грина. Метод функционалов был включен в программу перенормировки [51]. Этот метод оказался исключительно эффективным в квантовой оптике [52] и при построении теории облаченных частиц [53].

Уравнения движения масс в общей теории относительности. Уравнения Эйнштейна включают как уравнения поля тяготения, так и уравнения движения масс. Этот принципиальный вывод был сделан Эйнштейном с сотрудниками [54] еще в 1927 г., но уравнения движения не были получены. Эйнштейн и Фок независимо вывели уравнения движения из уравнений Эйнштейна различными методами [55,56] в 1938 и 1939 гг. Это был крупнейший результат в развитии общей теории относительности после основополагающих работ Эйнштейна.

Дифракция. Результаты, полученные В.А. в этой области, изложены в его книгах [58–60]. Обзор вклада В.А. в проблему дифракции сделал В.И.Смирнов [61]. Л.Д.Фаддеев пишет [62]: «Здесь В.А.Фок создал мощнейшие асимптотические методы, равных которым в математической физике не было», и продолжает: «Работы по дифракции продолжаются. И почти каждая из них начинается словами о том, что автор использует идеи и методы, разработанные В.А.Фоком».

Прикладные задачи. Математическая мощь и физическая интуиция предопределили успех В.А.Фока при его обращении к задачам прикладного характера. Среди них имеют первостепенное значение следующие. Теория освещенности [63,64]: введены основные понятия и написаны уравнения теории векторного светового поля. Заложены основы современной светотехники. Теория каротажа [65]: дана математическая теория определения сопротивления горных пород по способу каротажа. Теория доведена до таблиц и графиков для пользователей.

Книги «Теория пространства, времени и тяготения» [66, 67] и «Начала квантовой механики» [68, 69]. Эти книги уникальны. По объему оригинального материала фундаментального характера, содержащегося в них, они следуют непосредственно за книгой А.Эйнштейна по общей теории относительности и книгой П.А.М.Дирака по квантовой механике. Эти книги отличаются также тщательностью анализа физического истолкования теории. В связи с особой ролью математического аппарата в современной физике физическое истолкование новых теорий вместе с введением основных понятий приобретало фундаментальное значение. В этой деятельности подход В.А.Фока, работавшего в значительной мере по методу математической гипотезы, существенно отличался от подхода физика, не верящего, что математика есть часть Природы. Математический аппарат новой теории рассматривается В.А.Фоком, как если бы это была воля Природы, подлежащая объяснению прежде всего в понятиях новой теории, а затем уже переводу на привычный до этого язык. Физики другого типа попытались бы прежде всего сформулировать смысл новой теории с помощью деформированных понятий старой теории, и лишь спустя длительное время, или даже в новом поколении, восприняли бы новую теорию и новые понятия как первичные и не сводимые к старым понятиям. Относительность к средствам наблюдения — это понятие было введено В.А.Фоком как универсальное и представляющее собой основу описания физических явлений как в квантовой физике, так и в теории относительности.

Защита науки. Деятельность В.А.Фока по истолкованию квантовой механики и общей теории относительности служила также щитом, защищавшим науку от нападок невежественных философов и примкнувших к ним физиков, чиновников и лихих журналистов. Ряд статей В.А. написал, имея в виду как раз таких читателей, а также вульгаризаторов науки такого же толка. Нападки на науку нельзя было обходить молчанием, так как при отсутствии отпора могли последовать политические выводы — увольнения, аресты.

Советская наука пережила трудные годы репрессий 30-х годов, а в конце 40-х — начале 50-х вступила в новую полосу испытаний — время разгрома биологии, борьбы с теорией относительности и квантовой механикой, с «космополитизмом». Лысенковщина стала типичным методом истребления лучшей части науки. Уничтожив современную биологию, лысенковщина стала расползаться по другим наукам. Репрессии и лысенковщина нанесли потери и физикам-теоретикам университета. Были арестованы и безвременно погибли М.П.Бронштейн, В.Р.Бурсиан, В.К.Фредерикс, Ю.А.Крутков. Л.Э.Гуревич был уволен из университета. Сам В.А.Фок в 1938 г. был арестован и отправлен в Москву, но освобожден благодаря вмешательству П.Л.Капицы.

В.А.Фок активно боролся с лысенковщиной. Философские семинары физического факультета в начале 50-х годов были одним из оплотов борьбы за общую теорию относительности и квантовую механику.

ДАТЫ ЖИЗНИ ВЛАДИМИРА АЛЕКСАНДРОВИЧА ФОКА

- 1898, 22 декабря** родился в С.-Петербурге в семье инспектора лесов, ученого лесовода Александра Александровича Фока.
- 1916** Окончил реальное училище в Петрограде и поступил на физико-математический факультет Петроградского университета. Зачислен добровольцем в артиллерийское училище в Петрограде.
- 1917** Военная служба на фронте.
- 1918** Демобилизация и возвращение в университет.
- 1919** Лаборант Государственного оптического института (ГОИ). Академик Д.С.Рожественский набрал группу из числа наиболее успевающих студентов и зачислил их в штат ГОИ как лаборантов при мастерских, чтобы помочь им учиться. Стипендий в то время не существовало; лаборанты получали продовольственные карточки первой категории. Научным руководителем В.А.Фока был Юрий Александрович Крутков, ученик П.Эренфеста. Среди лекторов: А.Н.Крылов — приближенные вычисления, Я.Д.Тамаркин — теория операторов, интегральные уравнения. Среди профессоров — А.А.Фридман.
- 1922** Окончание университета, аспирант университета (оставленный при университете для подготовки к профессорскому званию), сотрудник ГОИ.
- 1923** Первая статья в «Zs. f. Phys.» [70] (совместно с Ю.А.Крутковым). Сокращение штатов теоретического отдела ГОИ, В.А.Фок покидает ГОИ.
- 1924** Переход из аспирантов в ассистенты университета. Выход в свет работы по теории освещенности, в которой В.А.Фок заложил основы теории векторного светового поля. Владимир Александрович активно изучает квантовую физику и работы Нильса Бора, о чем свидетельствует хвалебная ода Бору, сочиненная им в это время.
- 1924–1925** Консультант Главной геофизической обсерватории (ГГО). Из воспоминаний А.А.Стожарова [71]: «Владимир Александрович ожидал приема у директора А.А.Фридмана вместе с начальником вычислительного бюро ГГО, которое занималось вычислением медленно сходящегося ряда. Владимир Александрович за минуты ожидания доказал, что ряд сходится к нулю. А.А.Фридман пригласил В.А. стать консультантом».
- 1924–1936** Одновременно научный сотрудник Физико-технического института, возглавляемого А.Ф.Иоффе. Активно участвует в работе теоретического семинара.

- 1926** Публикует в «Zs. f. Phys.» статью [7] в развитие первой работы Шредингера по квантовой механике. Вторая статья В.А.Ф. в «Zs. f. Phys.» [9] содержит уравнение Клейна—Фока, известное также как уравнение Клейна—Гордона. Здесь также введено калибровочное (градиентное) преобразование электромагнитных потенциалов и волновой функции заряженной частицы.
- 1927** Получает стипендию Рокфеллеровского фонда и отправляется в Германию. Работает у Макса Борна. Совместная статья [72] с доказательством адиабатической гипотезы, предложенной Борном.
- 1928** Работа «Обобщение и решение статистического уравнения Дирака» [18], в которой дано «представление Фока» (терминология Дирака [19]) для операторов рождения и поглощения и введена производящая функция как волновая функция в гильбертовом пространстве. Возвращение в Петроград. Преподавание в университете в качестве доцента. Возобновление работы в ГОИ. Д.С. Рождественский восстанавливает теоретическую группу и приглашает В.А.Фока возглавить ее. Задача группы — расчет сил осцилляторов.
- 1929** Геометризация теории Дирака и вывод уравнения Дирака в гравитационном поле [21,22]. Фундаментальный результат: параллельный перенос есть способ задания взаимодействия между заряженными и тяготеющими телами; это понятие включает и калибровочную инвариантность. Начало исследований по задаче многих тел.
- 1930** Статьи «Приближенный способ решения квантово-механической задачи многих тел» и «Самосогласованное поле с обменом для натрия» [26], в которых дано обобщение метода Хартри с введением обменных членов — это рождение метода Хартри—Фока.
- 1932** Выход в свет книг «Механика сплошных сред» и «Начала квантовой механики». Лекции по квантовой механике были первым курсом, изданным в СССР. Научное признание: избрание членом-корреспондентом Академии наук и профессором Ленинградского университета. Статьи с Б.Подольским [32], развивающие для реального случая идею П.А.М.Дирака [31] о том, что кулоновское взаимодействие возникает в результате обмена скалярными квантами. Создание многовременного формализма Дирака—Фока—Подольского [29]. Статья «Вторичное квантование и конфигурационное пространство» [37], в которой было введено пространство Фока.
- 1933–1934** Продолжение работ по многочастичной задаче, создание группы атомных расчетов и публикация первых расчетов совместно с М.И.Петрашнев [26, 27]. Одновременно продолжают работы по прикладным

проблемам и математической физике. Выходит книга «Теория определения сопротивления горных пород по способу каротажа» [65] и публикуются статьи об асимптотике бесселевых функций [73].

- 1935** Расчеты самосогласованного поля и волновых функций для атома лития и атомов типа бериллия совместно с М.И.Петрашень [74]. Открытие динамической симметрии на примере атома водорода в статье «Атом водорода и неевклидова геометрия» [38].
- 1936** Признание работ по методу Хартри—Фока: присуждение премии имени Д.И.Менделеева. В.А.Фок информирует физиков СССР о дискуссии Эйнштейна и Бора по принципиальным вопросам квантовой механики [75, 76]. Статья «Принципиальное значение приближенных методов в теоретической физике» [77].
- 1937** Статья «Собственное время в классической и квантовой механике» [42], послужившая началом метода Фока—Швингера—де Витта в квантовой теории поля. Статья «Метод функционалов в квантовой электродинамике» [50], завершающая создание метода функционалов Фока.
- 1938** Арест в Ленинграде. Доставлен в Москву к наркому внутренних дел А.Ежову, но освобожден после вмешательства П.Л. Капицы и А.Н.Крылова. Начало работ по общей теории относительности.
- 1939** Статья «О движении конечных масс в общей теории относительности» [58], в которой В.А.Фок, независимо от Эйнштейна с сотрудниками, решил проблему вывода уравнений движения масс из уравнений Эйнштейна. Избран действительным членом Академии наук СССР.
- 1940** Статьи по многоэлектронным системам:
- метод неполного разделения переменных В.А.Фока, М.Г.Веселова и М.И.Петрашень [28], в котором впервые учитывались парные динамические корреляции электронов;
 - свойства симметрии координатной волновой функции электронов при заданном суммарном спине системы [78].
- 1941** Статья по общей теории относительности об интегралах движения центра двух конечных масс [79,80]. Эвакуация вместе с университетом в Елабугу в связи с началом войны.
- 1942–1943** Жизнь в эвакуации. Работа в области математической физики: исследование интегральных уравнений [81] и свойств функций Лежандра с комплексным значком [82].

- 1943–1946** Переезд из Елабуги в Москву. Работа в Физическом институте им. П. Лебедева Академии наук. В.А.Фок занимается проблемой распространения радиоволн вокруг земного шара. Фундаментальный вклад в теорию дифракции и выход монографии «Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности». Присуждение Государственной премии 1 степени за научные работы по распространению радиоволн. Развитие метода параболического уравнения в совместной работе с М.А.Леонтовичем «Решение задачи о распространении электромагнитных волн над поверхностью Земли по методу параболического уравнения» [83].
- 1946** Возвращение в Ленинград и продолжение работы в университете в качестве заведующего кафедрой теоретической физики. Продолжение исследований по теории дифракции [84].
- 1947** Совместная работа со своим учеником Н.С.Крыловым [85] о соотношении неопределенностей для энергии и времени и о законе распада.
- 1949** Философская дискуссия по вопросам квантовой механики и теории относительности. С.Э.Фриш вспоминает [86]: «Был момент, когда полемика приняла очень острый характер. Группа противников теории относительности и квантовой механики пыталась получить официальную поддержку своей точки зрения. Требовалось определенное гражданское мужество, чтобы выступить против них. И Владимир Александрович это мужество проявил». Безвременная кончина 26-летнего Н.С.Крылова, незадолго защитившего докторскую диссертацию по статистической физике. В.А.Фок издает и редактирует исследования Н.С.Крылова [87] и пишет статью вместе с А.Б.Мигдалом [88], сокурсником и другом Н.С.Крылова.
- 1950** Работа «О применении двухэлектронных функций в теории химической связи» [89], давшая начало методу геминалей в квантовой химии.
- 1951–1953** В.А.Фок уделяет много времени расширению влияния курсов по теоретической физике на физическом факультете ЛГУ. В это время деканом факультета был С.Э.Фриш, а на кафедре теоретической физики, кроме В.А.Фока, работали профессора М.Г.Веселов и П.П.Павинский, доценты Г.Ф.Друкарев и В.Г.Невзглядов, ассистенты Ю.Н.Демков и Ю.В.Новожилов. Дискуссия с философами по вопросам истолкования квантовой механики и теории относительности продолжается. В.А.Фок пишет статью «Против невежественной критики современных физических теорий» [90] в журнал «Вопросы философии».
- 1954** Работает над книгой по теории тяготения, в которую включались оригинальные исследования этих лет, и читает курс по теории относительности и теории тяготения на физическом факультете университета.

- 1954** Статья «Об уравнении Шредингера для атома гелия» [91], в которой дано точное решение для гелиоподобных атомов в виде бесконечного ряда, обладающего хорошей сходимостью.
- 1955** Выход в свет книги «Теория пространства, времени и тяготения», в которой обычная теория относительности, теория тяготения Эйнштейна и оригинальные исследования В.А.Фока излагаются с единой точки зрения автора, отраженной в заглавии книги.
- 1956** Присуждение первой премии Ленинградского университета за книгу «Теория пространства, времени и тяготения».
- 1957** Продолжение работ по интерпретации квантовой механики: статья в УФН [92]. Статья в «Rev. Mod. Phys.» «Три лекции по теории относительности» [93]. Выход в свет сборника работ по квантовой теории поля [94] в издательстве Ленинградского университета. Поездка в Копенгаген и дискуссии с Нильсом Бором.
- 1958** Опубликование в УФН статей Н.Бора по философским проблемам квантовой механики [95,96] и замечаний В.А.Фока [97]. Избрание иностранным членом Норвежского Королевского общества в Тронхейме.
- 1959** Выход английского издания книги по теории тяготения в переводе Н.Кеммера «Theory of Space, Time and Gravitation».
- 1960** Присуждение Ленинской премии за книгу «Работы по квантовой теории поля». При кафедре появляются научные сотрудники и создается отдел теоретической физики. В числе научных сотрудников В.А.Франке, В.И.Очкур, Л.В.Прохоров, а также В.И.Свидерский, изгнанный еще ранее «за ересь» с философского факультета ЛГУ. Статьи о различных координатных условиях в теории тяготения [98] Эйнштейна и эйнштейновской статике в конформном пространстве [99], написанные при подготовке второго издания книги по теории тяготения. Появление немецкого издания книги по теории тяготения.
- 1961** Второе издание книги «Теория пространства, времени и тяготения». В.А.Фок подразделяет кафедру теоретической физики ЛГУ на две — кафедру квантовой механики и кафедру квантовой теории поля — и передает их своим ученикам М.Г.Веселову и Ю.В.Новожилову. В Научно-исследовательском институте физики ЛГУ образуется отдел теоретической физики, объединяющий научную деятельность обеих кафедр. В.А.Фок становится руководителем отдела теоретической физики.

1962–1966 Публикация серии статей с изложением взглядов на истолкование квантовой механики и физические принципы теории тяготения Эйнштейна. В числе работ «Дискуссия с Нильсом Бором» [100] и брошюра «Квантовая физика и строение материи» [101]. Владимир Александрович подготавливает книгу по дифракции и распространению радиоволн и публикует ее в издательстве «Pergamon Press».

1965 Второе английское издание книги по теории тяготения.

1965 Избрание иностранным членом Датского Королевского общества.

1966 Избрание почетным доктором Делийского университета. Лекции в индийских университетах. Дискуссии в Париже.

1967–1968 Публикация обзоров своих работ по квантовой задаче многих тел и методу параболического уравнения в теории дифракции. Брошюра «Теория Эйнштейна и физическая относительность», предназначенная для широкого круга физиков. Присвоение звания Героя Социалистического Труда.

1967 Избрание почетным доктором Мичиганского университета.

1969 Подготовка русского издания книги «Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн» (1970 г.).

1972 Избрание почетным доктором Лейпцигского университета.

1973 Подготовка второго издания книги «Начала квантовой механики».

Владимир Александрович Фок скончался 27 декабря 1974 г.

Могила В.А.Фока находится на сельском кладбище около Щучьего озера вблизи поселка Комарово (50 км от С.-Петербурга).

2. РАБОТЫ ПО КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Обобщение уравнения Шредингера и уравнение Клейна—Фока.

В своей первой работе по квантовой механике [7], которую Владимир Александрович отправил в журнал через неделю после получения журнала со статьей Шредингера, он обобщает уравнение Шредингера на случай магнитного поля и в качестве приложения выводит формулу для нормального расщепления уровней в магнитном поле. Кроме того, в этой статье Владимир Александрович находит расщепление уровней водородного атома в электрическом поле. Во второй работе [9] В.А.Фок дает релятивистское обобщение

уравнения Шредингера для частицы в электромагнитном поле, а также записывает его в общей теории относительности. О.Клейн [8] публикует свое обобщение ранее В.А.Фока, но статья В.А.Фока была сдана в печать до появления статьи Клейна. Затем, уже после статьи В.А.Фока, появляется статья Гордона с релятивистским уравнением для свободной частицы. Тем не менее во многих учебниках уравнение для частицы со спином нуль именуется не уравнением Клейна—Фока, а уравнением Клейна—Гордона. Оглядываясь назад, можно думать, что, благодаря своей новизне и нестандартному подходу, эта статья В.А.Фока [9] была трудна для восприятия физикам, имевшим узкое образование. Дело в том, что в статье [9] предлагается не только новое квантовое релятивистское уравнение для частицы, но и ряд других новинок. Эта статья отражала также активный интерес Владимира Александровича к общей теории относительности, ее возможным расширениям на многомерные пространства и к единым теориям поля. Эта работа замечательна не только получением уравнения Клейна—Фока для заряженной частицы в электромагнитном поле и в поле тяготения, но и тем, что в ней используется выход в пространство большего числа измерений $D > 4$, единообразный для классической и квантовой теорий. В этой работе впервые устанавливается закон преобразования волновой функции заряженной частицы при градиентном преобразовании.

Рассмотрим основные этапы этой работы. В.А.Фок находит пятимерную формулировку закона движения частицы как в классической, так и в квантовой физике. Он вводит пятимерное пространство с метрикой

$$d\sigma^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu - \frac{e^2}{m^2 c^4} (A_\nu dx_\nu + du)^2,$$

где A_ν — векторный потенциал, u — дополнительная координата. Метрика зависит от отношения заряда к массе e/m . В классической физике траектория заряженной частицы есть нулевая геодезическая линия $d\sigma = 0$ в таком пространстве. Функция действия S , дающая такую траекторию, имеет квадрат градиента в пятимерном пространстве, равный нулю. При этом обычная функция действия W получается из S выделением дополнительной координаты:

$$S = \frac{e}{c} u + W.$$

Важный вывод состоит в том, что уравнения в пятимерной формулировке инвариантны по отношению к преобразованиям

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \text{grad } f, \quad \Phi = \Phi' - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad u = u' - f,$$

которые В.А.Фок называет градиентными [124].

Квантовые закономерности действуют в том же пространстве с метрикой, что и классические, и В.А.Фок получил квантовое волновое уравнение для частицы со спином нуль как уравнение Д'Аламбера для волновой функции ψ в пятимерном пространстве:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial \Psi}{\partial x_\nu}) - 2A^\nu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u \partial x_\nu} + (A_\nu A^\nu - \frac{m^2 c^4}{e^2}) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 u} = 0.$$

Переходя к четырехмерному пространству и выделяя зависимость от u в волновой функции Ψ :

$$\Psi = e^{i \frac{e}{\hbar c} u} \psi,$$

где четырехмерная волновая функция ψ от u не зависит, получаем уравнение Клейна—Фока для заряженной частицы со спином нуль в искривленном пространстве. Фок устанавливает закон преобразования волновой функции ψ при градиентном преобразовании:

$$\psi' = e^{-i \frac{e f}{\hbar c}} \psi.$$

В этой работе В.А.Фока проявились характерные для него математическая мощь и физическая интуиция, позволившие угадать пятимерную формулировку как соответствующую физической задаче.

Эти две статьи сделали имя Фока известным миру теоретической физики. Он получил стипендию Рокфеллеровского фонда для стажировки в Геттингене и Париже. В Геттингене Владимир Александрович работал с Максом Борном. Борн предложил «адиабатический принцип» в квантовой механике. В их совместной работе [72] адиабатическая теорема была доказана.

Теория излучения Дирака и представление Фока. В 1926 г. Дирак опубликовал замечательную работу [17] «Квантовая теория излучения и поглощения света». Для изучения переходов между энергетическими уровнями и изменения чисел заполнения Дирак предлагает рассматривать число систем n_s в состоянии s и фазу Θ_s как канонические переменные.

В пространстве этих переменных Дирак устанавливает уравнение для волновых функций как функций от числа n_s и времени. В.А.Фок в работе [18], 1928 г., «Обобщение и решение статистического уравнения Дирака» называет это пространство пространством Дирака и переформулирует теорию Дирака в комплексном гильбертовом пространстве, свойственном квантовой теории, и затем решает уравнение Дирака в общем виде. В.А.Фок показывает, что для формулировки теории в гильбертовом пространстве необходим иной выбор канонических координат Q и импульса P , а именно

$$Q_r = \bar{y}_r, P_r = \frac{\hbar}{i} y_r,$$

$$Q_r = y_r, \quad P_r = -\frac{\hbar}{i} \bar{y}_r,$$

где операторы рождения y и поглощения \bar{y} связаны с дираковскими переменными n_s и Θ_s каноническим преобразованием

$$\begin{aligned} \bar{y}_s &= \sqrt{n_s} e^{\frac{i}{\hbar} \Theta_s} = e^{\frac{i}{\hbar} \Theta_s} \sqrt{n_s + 1}, \\ y_s &= \sqrt{n_s + 1} e^{-\frac{i}{\hbar} \Theta_s} = e^{-\frac{i}{\hbar} \Theta_s} \sqrt{n_s}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \bar{y}_s &= \sqrt{n_s} e^{-\frac{\partial}{\partial n_s}} = e^{-\frac{\partial}{\partial n_s}} \sqrt{n_s + 1}, \\ y_s &= \sqrt{n_s + 1} e^{\frac{\partial}{\partial n_s}} = e^{\frac{\partial}{\partial n_s}} \sqrt{n_s}. \end{aligned}$$

Таким образом, В.А.Фок предлагает работать либо в представлении, где оператор рождения есть оператор умножения на вспомогательную функцию y_r , а оператор поглощения означает изменение знака и дифференцирование по y_r :

$$y_r \rightarrow y_r; \quad \bar{y}_r \rightarrow -\frac{\partial}{\partial y_r},$$

либо в представлении, где оператор поглощения есть оператор умножения на \bar{y}_r , а оператор рождения означает дифференцирование по \bar{y}_r :

$$\bar{y}_r \rightarrow \bar{y}_r; \quad y_r \rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{y}_r}.$$

При этом $y\bar{y} = n$ есть оператор числа частиц, собственная функция которого имеет вид

$$f(n, z) = \frac{z^n}{\sqrt{n!}},$$

а разложение волновой функции в пространстве Дирака имеет вид

$$\bar{\Omega}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots) = \sum_{n_1, n_2, \dots} \psi(n_1, n_2, \dots) \frac{\bar{y}_1^{n_1} \bar{y}_2^{n_2} \dots}{\sqrt{n_1!} \sqrt{n_2!} \dots}.$$

Коэффициенты разложения $\psi(n_1, n_2, \dots)$ есть волновые функции в пространстве Дирака. Формулы, выведенные В.А.Фоком в 1928 г., являются ныне стандартными и могут быть найдены в любом учебнике по квантовой теории. К сожалению, ссылка на Фока обычно отсутствует. В известной книге [19] Дирак называет даваемую ими картину представлением Фока.

Эта работа не была подхвачена теоретиками того времени, хотя по богатству идей она уникальна. Ее непосредственное развитие было осуществлено самим В.А.Фоком. Она оказалась предшественницей ряда известных методов. И пространство Фока, и метод функционалов Фока с родственным методом Тамма—Данкова [107, 108], и когерентные состояния [52, 53] выросли в конце концов из этой работы (см. обзор [109]).

Квантовая электродинамика и многовременной формализм Дирака—Фока—Подольского. Год 1932 был очень плодотворным в творчестве В.А. Фока. В этом году вышли в свет его книги «Механика сплошных сред» и курс лекций «Начала квантовой механики», две работы по математической физике, две работы о теореме вириала, три работы по квантовой электродинамике совместно с Б.Подольским, ставшая классической работа Дирака, Фока и Подольского о многовременном формализме в квантовой электродинамике и великолепная работа по вторичному квантованию и конфигурационному пространству — пространству Фока. В.А.Фок работает интенсивно, продолжая заниматься наиболее актуальными и трудными проблемами теоретической физики. Темп развития квантовой теории в те годы продолжает быть высоким.

Квантовая теория излучения Дирака [17] и квантовая электродинамика Гейзенберга и Паули [30] содержали взаимодействие электрона с электромагнитным полем. Вопрос о происхождении кулоновского взаимодействия зарядов оставался открытым. Не были также выяснены вопросы трактовки дополнительного условия и релятивистской инвариантности теории в присутствии заряженных частиц. В начале 1932 г. Дирак опубликовал статью [31], в которой выдвинул идею, что кулоновский потенциал между частицами возникает в результате обмена скалярными квантами. Дирак пояснил свою идею на примере движения в одном измерении, получив логарифмический потенциал. В краткой заметке В.А.Фок и Б.Подольский [32] немедленно сделали расчет для трехмерного случая, ограничившись скалярным потенциалом, и получили реальное кулоновское взаимодействие.

В подробной работе «О квантовании электромагнитных волн и взаимодействии зарядов по теории Дирака» [32], посвященной систематическому изложению проблемы, В.А.Фоку и Б.Подольскому пришлось преодолевать дополнительные трудности. Во-первых, при квантовании электромагнитного поля в вакууме с помощью канонического формализма импульс, сопряженный скалярному потенциалу, равен нулю, и, во-вторых, уже в задаче о взаимодействии двух электронов с полем, взятых при одинаковых временах, утрачивается релятивистская форма теории.

Первую трудность Фок и Подольский обошли, введя в функцию Лагранжа член, фиксирующий калибровку:

$$\frac{1}{2}(\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \dot{\Phi})^2.$$

При этом пространство состояний оказалось шире физического. Дополнительное условие $P_0 = 0$ на волновую функцию ψ выделяло физическое пространство состояний, в котором выполняются уравнения Максвелла. Такая трактовка условия Лоренца сохранилась и в современной теории. Цитируемая теперь работа Ферми [110] в «Rev.Mod.Phys.», 1932 г., в это время еще не была известна.

Вторая трудность была преодолена, так как они следовали замечанию Дирака о необходимости приписывать раздельное время каждому электрону и полю.

Этот цикл исследований был завершен совместной работой Дирака, Фока и Подольского. В ней новая форма релятивистской квантовой механики с фиксированным числом заряженных частиц была приведена в окончательный вид. В работе была доказана ее эквивалентность теории Гейзенберга и Паули. Главным шагом вперед было введение многовременного формализма и использование представления взаимодействия для электромагнитного поля. Волновые уравнения для общей волновой функции системы частиц и электромагнитного поля имеют вид

$$(R_s - ih \frac{\partial}{\partial t_s})\psi^* = 0,$$

где

$$R_s = c\bar{\alpha}_s \cdot \mathbf{p}_s + m_s c^2 \beta_s + \varepsilon_s [\Phi(\mathbf{r}_s, t_s) - \bar{\alpha}_s \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_s, t_s)].$$

Здесь каждая частица описывается собственным оператором Дирака R_s с электромагнитным полем, зависящим от координат и времени частицы. Уравнения электродинамики имеют вид уравнений свободного поля с собственной координатой:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}; \quad \mathbf{H} = \text{curl } \mathbf{A},$$

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \ddot{\Phi} = 0; \quad \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}} = 0.$$

Дополнительное условие теперь зависит как от координат частиц, так и от координат поля:

$$C(\mathbf{r}, t)\psi = 0,$$

где

$$C(\mathbf{r}, t) = \text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \sum_{s=1}^n \frac{\varepsilon_s}{4\pi} \Delta(X - X_s),$$

$\Delta(X)$ — функция Йордана—Паули:

$$\Delta(X) = \frac{1}{r} [\delta(r + ct) - \delta(r - ct)].$$

В общей волновой функции интервалы между частицами должны быть пространственноподобными в силу условия причинности.

Многовременной формализм Дирака—Фока—Подольского был обобщен в 1946–1948 гг. независимо К.Томонагой [33] и Ю.Швингером [34]. В новой

обобщенной теории и электромагнетизм, и электроны с позитронами описываются квантовыми полями. В формализме Томонаги и Швингера каждой точке пространства сопоставляется свое время, а состояние задается на пространственноподобной поверхности, представляющей собой релятивистски-инвариантное обобщение трехмерного пространства в данное время. Использование представления взаимодействия как обобщения многовременного формализма является ключевым пунктом при построении теории Томонаги и Швингера. Если же число заряженных частиц остается неизменным, то многовременной формализм Дирака—Фока—Подольского остается основным рабочим инструментом теоретика и в настоящее время. Его обобщение на неабелевы поля типа полей Янга—Миллса вполне тривиально.

Метод функционалов Фока. Этот метод берет начало в статье 1926 г. «Обобщение и решение дираковского статистического уравнения» [9], в которой было сформулировано представление Фока, где оператор рождения бозе-частиц есть оператор умножения на вспомогательную комплексную функцию, а оператор поглощения есть функциональная производная по этой функции. В работах В.А.Фока «О квантовой электродинамике» [49] и «Метод функционалов в квантовой электродинамике» [50] содержится систематическое изложение математического аппарата квантовой электродинамики в этом представлении, когда волновая функция представляет собой производящий функционал для амплитуд вероятностей при фиксированном числе частиц. Фактически первая из этих работ была завершена сразу же после статьи с Дираком и Подольским и доложена в ноябре того же 1932 г. на теоретическом семинаре в Ленинграде, но ее публикация задержалась. Вторая статья отличается от первой более подробным изложением идеи о производящем функционале.

В этом методе волновая функция поля представляет собой производящий функционал Ω для амплитуд вероятности состояний с определенным числом частиц:

$$\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n,$$

где

$$\Omega_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \int \dots \int \psi(x_1 \dots x_n) \bar{b}(x_1) \dots \bar{b}(x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

$\bar{b}(x)$ — вспомогательная функция. Операторы рождения и поглощения $b(k)$ и $b^+(k)$ имеют вид

$$b(k)\Omega = \frac{\delta\Omega}{\delta\bar{b}(k)}, \quad b^+(k)\Omega = \bar{b}(k)\Omega.$$

Скалярное произведение двух функционалов Ω и Ω' может быть определено при помощи волновых функций в подпространствах с определенным

числом частиц

$$(\Omega, \Omega') = \bar{\psi}_0 \psi'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int \bar{\psi}(x_1 \dots x_n) \psi'(x_1 \dots x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

условие ортогональности есть

$$(\Omega, \Omega') = 0.$$

Заряженные частицы трактуются в духе многовременного формализма с условием Лоренца, рассматриваемым в качестве дополнительного условия на функционал, которое имеет вид системы двух уравнений первого порядка в функциональных производных. В.А.Фок находит решение этой системы с помощью неунитарного преобразования функционала

$$\Psi = e^{\chi \Omega(\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{k}))}.$$

Неунитарное преобразование уравнений приводит к исключению продольной и скалярной компонент и появлению кулоновского взаимодействия.

Уравнение Дирака в гравитационном поле. П.А.М.Дирак предложил [20] в 1928 г. релятивистски-инвариантное уравнение для электрона в плоском пространстве, включив тем самым электроны в квантово-механическое описание. Однако успех не был бы настоящим, если бы уравнение Дирака нельзя было обобщить на случай внешнего гравитационного поля, т.е. записать в пространстве Римана. Такое обобщение было найдено в 1929 г. В.А.Фоком [22] в работе «Геометризация дираковской теории электрона».

Обобщение на геометрию Римана должно отвечать двум требованиям. Во-первых, как и любое уравнение в общей теории относительности, уравнение для электрона должно быть ковариантно относительно произвольных преобразований координат. Во-вторых, группа Лоренца, по спинорному представлению которой преобразуется волновая функция электрона, должна относиться только к локальной системе координат, заданной в каждой точке пространства-времени. Релятивистской инвариантности уравнения Дирака в плоском пространстве должна соответствовать инвариантность относительно локальных преобразований Лоренца в пространстве Римана.

Локальное преобразование Лоренца задается в локальной прямоугольной системе осей, описываемых тетрадой $h_{\mu}^a(x)$, причем направления осей совпадают с направлениями касательных к четырем ортогональным семействам кривых $a = 1, \dots, 4$, проходящих через точку x . Таким образом, компонента тетрады имеет два индекса, один из которых (греческий) относится к системе координат, а другой (латинский) — к локальной лоренцевской (тетрадной) системе. Метрика в тетрадной системе есть

$$g^{\mu\nu} h_{\mu}^a h_{\nu}^b = \eta^{ab}, \quad \eta^{ab} = (1, -1, -1, -1)$$

и связана с метрикой $g_{\mu\nu}$ пространства Римана соотношением

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h_\mu^a h_\nu^b.$$

При локальном лоренцевском преобразовании $\Lambda_a^b(x)$ каждая μ -компонента преобразуется независимо:

$$h_a^\mu(x) = \Lambda_a^b(x) h_b^\mu(x), \quad \Lambda_a^b \Lambda_{a'}^{b'} \eta_{bb'} = \eta_{aa'}.$$

Вектор может быть задан своими компонентами $A_\mu(x)$ как в системе координат x , так и в локальной системе A'_μ . Очевидно, что $A_\mu = h_\mu^a A'_a$. При параллельном переносе изменение координатных компонент вектора A_μ выражается через скобки Кристоффеля $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, которые зависят только от метрики в пространстве Римана $g_{\sigma\rho}$:

$$\delta A_\mu = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda dx^\nu, \quad \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \lambda \end{matrix} \right\}.$$

Соответствующее изменение тетрадных компонент есть

$$\delta A'_a = \gamma_{abc} A'^b ds^c, \quad ds^c = h_\mu^c dx^\mu,$$

где ds^c — тетрадные компоненты бесконечно малого сдвига dx^μ , а γ_{abc} — коэффициенты вращения Риччи. Спинор ψ характеризуется своими трансформационными свойствами при лоренцевских преобразованиях, и поэтому может быть определен только в локальной лоренцевской системе. Матрицы Дирака γ_a в локальной системе постоянны и имеют тот же вид, что и в плоском пространстве:

$$\{\gamma_a, \gamma_b\} = 2\eta_{ab}.$$

Зависящие от x матрицы γ_μ имеют вид $\gamma_\mu(x) = h_\mu^a \gamma_a$.

Приращение спинора ψ при параллельном переносе с тетрадными компонентами ds^a есть

$$\delta\psi = C_a ds^a \psi,$$

где 4×4 -матрицы C_a должны быть найдены из требования, чтобы билинейные комбинации $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$, $\bar{\psi}\psi$, $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ имели обычный смысл компонент вектора и инвариантов в координатной системе. Для комплексного спинора это требование выполняется, если матрицы C_a имеют вид

$$C_a = \frac{1}{4} \gamma^b \gamma^c \gamma_{bac} + i\Phi_a,$$

т.е., кроме спинорной части, содержат также электромагнитный потенциал Φ_a . Иначе говоря, ковариантная производная от спинора $D'_a \psi$ в направлении тетрадной оси a может быть записана в виде

$$D'_a \psi = \frac{\partial\psi}{\partial s^a} - C_a \psi, \quad \frac{\partial\psi}{\partial s^a} = h_\mu^a \frac{\partial\psi}{\partial x^\mu}.$$

Следовательно, ковариантная производная от спинора по координате $D_\mu\psi$ есть

$$D_\mu\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} - \Gamma_\mu\psi,$$

где введено обозначение $\Gamma_\mu = h_a^\mu C_a$.

Теперь можно написать уравнение Дирака в гравитационном поле, заменяя производные от спинора в плоском пространстве на ковариантные производные:

$$\left(\frac{1}{i}\gamma^\mu D_\mu + m\right)\psi = 0.$$

В.А. Фок находит также действие и тензор энергии-импульса для спинора в гравитационном поле, обладающие необходимыми свойствами эрмитовости и инвариантности.

В отсутствие гравитационного поля, когда коэффициенты Риччи равны нулю, $\gamma_{abc} = 0$, величины Γ_μ превращаются в компоненты электромагнитного потенциала. Тем самым придается геометрический смысл включению потенциала в уравнение Дирака. Значение этого результата стали понимать значительно позже. Если применить этот подход к случаю более сложных внутренних симметрий, открытых через несколько десятков лет, то мы получим взаимодействия спинора с калибровочными полями типа полей Янга—Миллса. Такое геометрическое истолкование взаимодействия может оказаться ключом к теориям будущего.

Как пишет В.А.Фок в 1929 г. [22]: «Включение в формулу для параллельного переноса 4-потенциала наряду с коэффициентами Риччи, с одной стороны, приводит к простому геометрическому обоснованию появления в волновом уравнении выражения $p_\mu - (\frac{e}{c})\Phi_\mu$, а с другой стороны, показывает, что здесь в отличие от эйнштейновского подхода потенциалы Φ_μ играют самостоятельную роль в геометрической картине мира и не обязаны быть функциями коэффициентов γ_{abc} ».

Пространство Фока [37]. Это одна из наиболее известных работ В.А.Фока. Ее известность сразу после опубликования была вызвана не только тем, что в ней было дано первое ясное и последовательное изложение метода вторичного квантования Дирака [17], Йордана, Клейна и Вигнера [35, 36] в связи с квантовой механикой системы частиц в конфигурационном пространстве, но и тем, что до появления этой работы предполагалось, что метод вторичного квантования выходит за рамки квантовой механики.

Эта классическая статья может служить и сейчас основным пособием для изучающих вторичное квантование. Пространство состояний с неопределенным числом частиц, введенное в статье, получило название пространства Фока. Задачи с переменным числом частиц встречаются во всех областях квантовой физики — как в нерелятивистской, так и в релятивистской теории, как в случае электромагнитного поля или гравитации, так и в случае

массивных частиц и псевдочастиц; столь же универсально понятие пространства Фока. Работа представляет собой прекрасный образец математического видения физической проблемы. Результат был подготовлен предыдущими работами В.А.Фока, а именно созданием представления Фока [9] и метода Хартри—Фока [25].

В.А.Фок предлагает представить волновую функцию системы с неопределенным числом частиц в виде столбца

$$\begin{pmatrix} \text{const} \\ \psi(x_1) \\ \psi(x_1, x_2) \\ \psi(x_1, x_2, x_3) \\ \dots \end{pmatrix},$$

где каждая строка относится к состоянию с определенным числом частиц: верхняя строка относится к вакууму, вторая строка — к состоянию с одной частицей и т.д. Все переменные частицы обозначены символически посредством x . Многочастичные функции симметричны в случае статистики Бозе и антисимметричны в случае статистики Ферми—Дирака. Операторы рождения и поглощения сдвигают столбец вниз и вверх на единицу; вакуум уничтожается оператором поглощения:

$$\Psi(x) \begin{pmatrix} \text{const} \\ \psi(x_1) \\ \psi(x_1, x_2) \\ \psi(x_1, x_2, x_3) \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \sqrt{2}\psi(x, x_1) \\ \sqrt{(3)}\psi(x, x_1, x_2) \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}.$$

Пространство состояний, построенное на столбцах Фока, называется пространством Фока. Именно в этом пространстве развивается динамика систем, в которых взаимодействие может изменять число частиц.

Из соотношений, которые используются ежедневно, но происхождение которых забыто, в этой работе изменение волновой функции во времени впервые представлено при помощи унитарного оператора:

$$\psi(\bullet, t) = S(t)\psi(\bullet, 0),$$

где точкой обозначены переменные системы, и, соответственно, дано выражение через $S(t)$ для оператора Гамильтона

$$i \dot{S}(t)S^+(t) = -iS(t) \dot{S}^+(t) = \frac{1}{h}H$$

и производной от шредингеровского оператора

$$\frac{dL}{dt}\psi(\bullet, t) = S(t) \dot{S}^+(t)L\psi(\bullet, t) + \frac{d}{dt}[L\psi(\bullet, t)].$$

Чтобы понять с современной точки зрения, насколько эта (ныне простая) вещь была новой, приведем пояснение В.А.Фока к этой формуле: «Результат применения оператора dL/dt к волновой функции $\psi(\bullet, t)$ в шредингеровском представлении получается путем выполнения следующих операций:

1. Применение оператора L .
2. Продолжение во времени на величину t в отрицательном направлении.
3. Дифференцирование по t .
4. Продолжение во времени на величину t в положительном направлении».

Собственное время в классической и квантовой механике [42]. Калибровка Фока. Цель работы состояла в развитии релятивистски- и калибровочно-инвариантного квазиклассического метода интегрирования уравнения Дирака с внешним полем. Во время написания работы эта проблема становилась актуальной для теории позитронов по Дираку. Внешнее электромагнитное поле искажает электронные волновые функции как для состояний с положительными энергиями, так и для дираковского «подвала». Поэтому даже в отсутствие частиц появляются индуцированные токи и заряды (виртуальные электрон-позитронные пары) в вакууме, происходит поляризация вакуума. После открытия позитрона в 1932 г. приходилось признавать и реальность вакуумной поляризации. Возникла проблема релятивистски- и калибровочно-инвариантной трактовки этого эффекта и однозначного выделения конечных выражений из результатов вычислений, содержащих бесконечности. Как показал Вайскопф [113], расходимости в проблеме вакуумной поляризации имеют логарифмический характер. Наиболее простой способ обеспечения инвариантности вычислений состоит в использовании только инвариантных величин. Для уравнения Дирака с внешним электромагнитным полем это означает четырехмерную формулировку уравнения движения без выделенной роли времени и использование потенциалов, которые определяются однозначно по калибровочно-инвариантным напряженностям поля. В своей работе [42] В.А.Фок предлагает такую формулировку. Он вводит в уравнение Дирака собственное время и находит удобное калибровочное условие для потенциала. В дальнейшем этот подход получил развитие в работах Швингера [43] и де Витта [44], и в настоящее время метод собственного времени Фока—Швингера—де Витта представляет собой основной подход к релятивистски-инвариантным вычислениям функций Грина и детерминантов в квантовой теории поля (см., например, [114]).

Изучение уравнения Дирака второго порядка с внешним электромагнитным полем В.А.Фок заменяет изучением уравнения Дирака с собственным временем. Владимир Александрович вводит собственное время в качестве дополнительной переменной наряду с четырьмя координатами, имея в виду, помимо релятивистской и калибровочной инвариантности, еще и то обстоятельство, что в пространстве нечетного числа измерений фундаментальное решение определяется единственным образом. В случае же четного числа

измерений существует бесчисленное множество фундаментальных решений; эти решения имеют логарифмическую особенность, причем коэффициент при логарифме определяется однозначно. Владимир Александрович вводит новое калибровочное условие для электромагнитных потенциалов \mathbf{A} и Φ :

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}^0) \cdot \mathbf{A}' - c(t - t^0)\Phi' = 0.$$

Эта калибровка предполагает отсутствие особенностей у потенциалов. В калибровке Фока потенциалы выражаются однозначно через поле. Если обозначить двумя чертами сверху усреднение между точками (\mathbf{r}^0, t^0) и (\mathbf{r}, t) , произведенное по формуле

$$\overline{\overline{f}} = 2 \int_0^1 f[\mathbf{r}^0 + (\mathbf{r} - \mathbf{r}^0)u, t^0 + (t - t^0)u] u du,$$

то потенциалы равны

$$\mathbf{A}' = -\frac{1}{2}[(\mathbf{r} - \mathbf{r}^0) \times \overline{\overline{\mathbf{H}}}] - \frac{1}{2}c(t - t^0)\overline{\overline{\mathbf{E}}},$$

$$\Phi' = -\frac{1}{2}(\mathbf{r} - \mathbf{r}^0) \cdot \overline{\overline{\mathbf{E}}}.$$

Калибровка Фока удобна при изучении самодуальных полей и при разложении по таким полям. В квантовой теории поля в этой калибровке духи Фаддеева—Попова отщепляются [47,48].

Развивая метод собственного времени, В.А.Фок вначале показывает, что в классической механике, теории относительности обычные уравнения Лагранжа можно получить также из видоизмененного действия в пятимерном пространстве так, чтобы дополнительная координата имела смысл собственного времени. Владимир Александрович вводит собственное время в уравнение Дирака второго порядка следующим образом. Если

$$\{\mathbf{P}^2 + m^2c^2 - \frac{T^2}{c^2} + \frac{eh}{c}(\overline{\sigma} \cdot \mathbf{H}) - \frac{ieh}{c}(\overline{\alpha} \cdot \mathbf{E})\}\Psi = 0,$$

где T — оператор для кинетической энергии

$$T = ih \frac{\partial}{\partial t} + e\Phi$$

есть уравнение Дирака второго порядка в четырехмерном пространстве, то это уравнение можно написать в виде

$$h^2 \Lambda \Psi = 0,$$

где Λ — оператор второго порядка.

Решение уравнения можно искать в виде определенного интеграла

$$\Psi = \int_C F d\tau,$$

взятого по вспомогательной переменной τ в некоторых постоянных пределах (или по некоторому контуру в комплексной плоскости) τ .

Функция F удовлетворяет уравнению Дирака с собственным временем τ

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta F = i\hbar \frac{\partial F}{\partial \tau},$$

а функции F и $\frac{\partial F}{\partial \tau}$ связаны соотношением

$$\int_C \frac{\partial F}{\partial \tau} d\tau = F|_C,$$

где интеграл берется по такому контуру C , на котором $F|_C = 0$. В.А.Фок показывает, что новая переменная имеет смысл собственного времени. Решение уравнения Дирака с собственным временем представляется в квазиклассическом виде, где классическое действие S удовлетворяет классическому уравнению с собственным временем. Интегрирование по собственному времени должно быть отложено на конец вычислений. Все расходимости сводятся тогда только к расходимостям в интегралах по собственному времени, которые не зависят от калибровки и релятивистски-инвариантны по своему определению.

Симметрия атома водорода и динамические группы. Элегантная работа В.А.Фока [40] «Атом водорода и неевклидова геометрия» о симметрии водородоподобных атомов не только объяснила случайное вырождение атомных уровней, но и послужила началом как нового метода расчета атомных свойств, так и поиска так называемых динамических групп или динамической симметрии. Известно, что в сферически-симметричном поле уровни энергии электрона определяются двумя квантовыми числами — главным квантовым числом и собственным значением момента количества движения. Однако уровни энергии атома водорода зависят только от главного квантового числа. Поскольку вырождение уровней связано с симметрией задачи, то возникает вопрос: какова та дополнительная симметрия кулоновского поля, которая выделяет это поле по сравнению с другими полями сферической симметрии? Эта проблема обсуждалась теоретиками до В.А.Фока и считалась сложной. В.А.Фок решил ее простым и изящным способом, где главную роль играли физическая интуиция и математическая изобретательность.

В.А.Фок записывает уравнение Шредингера с кулоновской потенциальной энергией в пространстве импульсов

$$\frac{1}{2m} p^2 \psi(\mathbf{p}) = -\frac{Ze^2}{2\pi^2 \hbar} \int \frac{\psi(\mathbf{p}')}{|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^2} (d\mathbf{p}'),$$

где оно имеет вид интегрального уравнения. Для точечного спектра средний квадратичный импульс есть

$$p_0 = \sqrt{-2mE}.$$

Далее В.А.Фок переходит в импульсном пространстве к новым прямоугольным координатам на гиперплоскости, которая представляет собой стереографическую проекцию шара в четырехмерном евклидовом пространстве

$$\xi = \frac{2p_0 p_x}{p_0^2 + \mathbf{p}^2} = \sin \alpha \sin \vartheta \cos \varphi,$$

$$\eta = \frac{2p_0 p_y}{p_0^2 + \mathbf{p}^2} = \sin \alpha \sin \vartheta \sin \varphi,$$

$$\zeta = \frac{2p_0 p_z}{p_0^2 + \mathbf{p}^2} = \sin \alpha \cos \theta,$$

$$\chi = \frac{p_0^2 - \mathbf{p}^2}{p_0^2 + \mathbf{p}^2} = \cos \alpha,$$

радиус которого равен единице:

$$\zeta^2 + \eta^2 + \xi^2 + \chi^2 = 1.$$

Углы α , θ и φ являются сферическими координатами на гиперсфере, причем углы являются одновременно обычными сферическими углами в трехмерном пространстве импульсов. В новых координатах уравнение Шредингера принимает вид

$$\Psi(\alpha, \theta, \varphi) = \frac{\lambda}{2\pi^2} \int \frac{\Psi(\alpha', \theta', \varphi')}{4 \sin^2 \frac{\omega}{2}} d\Omega', \quad (1)$$

где

$$\lambda = \frac{Zme^2}{\hbar p_0} = \frac{Zme^2}{\hbar \sqrt{-2mE}}.$$

Функция на гиперсфере связана с волновой функцией в импульсном пространстве соотношением

$$\Psi(\alpha, \theta, \varphi) = \frac{\pi}{\sqrt{8}} p_0^{-3/2} (p_0^2 + \mathbf{p}^2)^2 \psi(\mathbf{p}).$$

Величина $2 \sin \frac{\omega}{2}$ есть длина хорды, соединяющей точки α, θ, φ и $\alpha', \theta', \varphi'$ на четырехмерном шаре, так что

$$4 \sin^2 \frac{\omega}{2} = (\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2 + (\chi - \chi')^2.$$

Уравнение (1) есть интегральное уравнение для шаровых функций четырехмерного шара.

Представление уравнения Шредингера в виде (1) есть основной результат работы [40]. Оно несет много важной информации.

1. Группа инвариантности водородоподобного атома совпадает с группой четырехмерных вращений. Это объясняет независимость уровней энергии от азимутального квантового числа и вводит гиперсферические функции в расчеты таких систем. Фоковская группа особо полезна, когда необходимо усреднять или суммировать внутри одного слоя с заданным значением главного квантового числа.

2. В случае непрерывного спектра водородоподобного атома аналогичная трактовка приводит к симметрии группы Лоренца на поверхности четырехмерного гиперболоида.

3. Эта группа отличается от кинематической группы тем, что ее преобразования связывают функции с различной энергией E (вращения на угол α). Такие группы получили название динамических. Поиски динамических групп составляют одно из важных направлений современной физики.

4. В.А.Фок показал, что в пространстве импульсов водородоподобных атомов имеет место неевклидова геометрия, а именно геометрия Римана с постоянной положительной кривизной в случае точечного спектра и геометрия Лобачевского с постоянной отрицательной кривизной в случае сплошного спектра.

Проблемы истолкования квантовой теории. В.А.Фок всегда уделял значительное внимание вопросам истолкования квантовой механики. Он опубликовал около 30 работ, в которых развивал копенгагенскую интерпретацию квантовой механики и полемизировал со сторонниками другого истолкования. Дискуссии о смысле квантовой механики начались одновременно с ее созданием. Толкование Бора (копенгагенская интерпретация) постепенно приобретало ясность, но оставались трудные вопросы замкнутости и непротиворечивости теории. На Сольвеевском конгрессе в 1927 г. главными оппонентами Бора были Эйнштейн и Лоренц. В 1936 г. Эйнштейн, Подольский и Розен выступили со статьей «Можно ли считать, что квантово-механическое описание физической реальности является полным?» [75], продолжив тем самым дискуссию с Бором. Дискуссии Эйнштейна с Бором имели фундаментальное значение в понимании принципиальных вопросов квантовой теории. В.А.Фок в том же 1936 г. опубликовал перевод дискуссии Эйнштейна с Бором и написал вступительную статью [76]. Это было началом его деятельности по проблемам теории познания в физике микромира. Число физиков, внесших вклад в эти вопросы, невелико и исчисляется единицами. Для этого нужно было иметь физическую интуицию и математическую мощь Фока вместе с присущими ему внутренней потребностью к логической ясности теории и неприятием стиля рецептов и заклинаний. Эта деятельность В.А.Фока оказа-

лась весьма полезной также для того, чтобы оградить квантовую механику от наскоков части философов.

Выступление противников копенгагенской интерпретации квантовой механики показывало, что трудности восприятия ими квантовых закономерностей были во многом связаны с ее недостаточной логической детализацией.

Владимир Александрович Фок восполнил пробелы, оставленные общей концепцией дополнительности Нильса Бора. Логический анализ Фока опирается на три введенных им понятия:

- понятие относительности к средствам наблюдения;
- вероятность как фундаментальное понятие, относящееся к описанию в терминах;
- понятие о потенциальной возможности.

Первое из этих понятий обобщает понятие относительности к системе отсчета. Оно необходимо, так как в основе квантового описания находится акт взаимодействия объекта с прибором, и, следовательно, с точки зрения классической физики описание микрообъекта при помощи волновой функции является «неабсолютным». В классической физике относительность к средствам наблюдения совпадает с относительностью к системе отсчета. Понятия фундаментальной вероятности и потенциальной возможности возникают как замена лапласовского детерминизма и вероятности классической физики, отражавшей неполноту знаний о феномене. «Классическая» неполнота может быть исключена уточнением условий, «неполнота» квантовой теории с точки зрения классической теории не может быть устранена, так как она присуща квантовому описанию, опирающемуся на акт взаимодействия. Квантовая теория — это теория прогнозов, в которой понятие вероятности первично. Такое описание не противоречит принципу причинности. Действительно, принцип причинности как одно из начал научного объяснения не должен отождествляться с однозначной детерминированностью классической физики. В.А.Фок пишет: «Все явления происходят в пространстве и времени (ведь не в потустороннем же мире они происходят), а что касается причинности, то предметом теории, в частности квантовой механики, как раз и является отыскание причинной связи между явлениями; кроме того, нельзя смешивать причинность с однозначной детерминированностью, которая может и не иметь место» [113].

В.А.Фок анализирует эксперимент над атомной системой, подразделяя его на два опыта: начальный (приготовительный) и конечный (проверочный). Начальный опыт включает приготовление и создание внешних условий, которые описываются классически. Начальный опыт обращен к будущему, так как волновая функция, отправляясь от данных, полученных в начальном опыте, позволяет делать прогнозы, относящиеся к проверочному опыту. Волновая функция описывает потенциальные возможности для результатов измерения

над системой. Совокупность потенциальных возможностей для проверочного опыта, вытекающих из данного начального опыта, есть характеристика состояния системы. Максимально полная характеристика называется состоянием системы. Изменение волновой функции во времени по уравнению Шредингера отображает изменение этих прогнозов. Проверочный опыт обращен в прошлое. В нем потенциальные возможности различных измерений превращаются в действительность. Волновая функция имеет физический смысл только вплоть до момента проверочного опыта. Как в начальном, так и в конечном опыте устройство и действие прибора описываются классически. Совокупность начального и проверочного опытов, повторенных много раз, дает полный, или завершённый, опыт, позволяющий сравнение с теорией. Книга В.А.Фока «Начала квантовой механики» (2 издание) содержит ясное и систематическое изложение принципа относительности к средствам наблюдения применительно к квантовой механике, вероятностного истолкования и понятия потенциальных возможностей.

3. РАБОТЫ В.А.ФОКА ПО ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Движение конечных масс в общей теории относительности. Значительное место в своем научном творчестве В.А.Фок посвятил теории тяготения. В середине 30-х годов основной проблемой общей теории относительности была проблема вывода уравнений движения масс из уравнений Эйнштейна.

Уравнения тяготения Эйнштейна для метрики $g_{\mu\nu}$ в присутствии масс содержат тензор материи $T_{\mu\nu}$:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{g}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi\gamma}{c^2}T_{\mu\nu},$$

где R есть инвариант тензора кривизны второго ранга $R_{\mu\nu}$ пространства с метрикой $g_{\mu\nu}$ и γ — ньютоновская постоянная тяготения. Тензор $T_{\mu\nu}$ отличен от нуля в областях, занимаемых массами, и также зависит от метрики. Уравнения тяготения Эйнштейна ковариантны относительно произвольного преобразования координат:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu, \\ g'_{\mu\nu}dx'^\mu dx'^\nu = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu,$$

что отражает допустимость любых координатных систем для описания явлений.

Уравнения Эйнштейна представляют собой не только уравнения поля, но и уравнения движения масс. Движение масс нельзя задать произвольным образом независимо от уравнений поля. Действительно, тензор материи содержит, в качестве неизвестных функций, составляющие метрического тензора, от которых зависят характеристики состояния и движения материи.

Этот вопрос принципиального характера был выяснен Эйнштейном и Громмером [55] и Эйнштейном [56] в 1927 г. Они рассматривали массы как особенные точки поля и показали, что движение этих точек должно вытекать из уравнений тяготения. В.А.Фок писал в 1939 г. [58]: «Несмотря на огромную важность этого результата, он является, по нашему мнению, одним из главных обоснований общей теории относительности — указанные две работы Эйнштейна прошли малозамеченными и не получили надлежащего развития». Проблема вывода закона движения масс из уравнений Эйнштейна оставалась открытой.

Эйнштейн возвратился к этой проблеме через 10 лет. Практически одновременно В.А.Фок заметил, что столь важная проблема еще не решена, и начал искать ее решение. Эйнштейн с сотрудниками (Эйнштейн, Инфельд и Гофман [57]) и В.А.Фок [58] независимо решили проблему различными методами. Эйнштейн опубликовал свою первую работу по уравнению движения масс раньше В.А.Фока — в 1938 г. В.А.Фок ознакомился с ней, ожидая опубликования своей статьи в ЖЭТФ, и написал добавление в корректуре [58].

В.А.Фок рассматривал систему масс островного типа как наиболее характерную для астрономических задач. Такая система может рассматриваться как изолированная. На больших удалениях от масс пространство-время становится евклидовым, в нем различные декартовы координаты связаны преобразованиями Лоренца. Распределение плотности в небесных телах предполагается сферически-симметричным. Предполагается также, что линейные размеры тел весьма велики по сравнению с их гравитационными радиусами, но в то же время достаточно малы по сравнению с их взаимными расстояниями. Скорости тел малы по сравнению со скоростью света. Расположение и движение планет, т.е. областей, где тензор материи отличен от нуля, определяется метрическим тензором, который, в свою очередь, определяется расположением и движением планетных масс. В.А.Фоком ставилась задача определить приближенно метрический тензор для случая, когда имеется одна или несколько масс конечной величины, и при решении этой задачи попутно получить и уравнения движения для масс как условия разрешимости уравнений Эйнштейна. Эта нелинейная задача облегчается тем, что в случае островных масс тензор материи «малочувствителен» к метрике, и можно развить метод приближений, когда в исходном приближении тензор материи таков, как если бы тяготение не воздействовало на него. При решении задачи В.А.Фок применял также «полуобратный» метод: искать для метрики $g_{\mu\nu}$ такие значения, которые, будучи подставлены в левую часть уравнений Эйнштейна, дадут для тензора материи в правой части выражения, могущие быть истолкованными физически.

В.А.Фок выбирает координатную систему так, чтобы уравнения по возможности упростились, а сама система координат на больших расстояниях

от масс переходила бы в декартову. Такому критерию удовлетворяет гармоническая система координат $g_{\mu\nu}$, подчиненная условию гармоничности

$$\partial_\mu g^{\mu\nu} = 0. \quad (2)$$

Таким образом, тензор материи определяется одновременно с метрикой из уравнений Эйнштейна и условия гармоничности. Решение представлялось в виде разложения по обратным степеням скорости света.

В статье [58], опубликованной в 1939 г., Владимир Александрович получил уравнения движения в первом, ньютоновском приближении как условие разрешимости уравнений Эйнштейна во втором приближении. Этот результат подтверждал утверждение Эйнштейна, согласно которому уравнения движения уже содержатся в его уравнениях тяготения. Фок устанавливает также связь между законом эквивалентности массы и энергии и уравнениями Эйнштейна. Владимир Александрович отмечает особое положение рассмотренного им второго приближения для метрического тензора как наивысшего приближения, в котором можно заменить обобщенный оператор Д'Аламбера евклидовым оператором Д'Аламбера. Такая замена может быть истолкована как замена реального риманова пространства на фиктивное евклидово пространство, в котором поле тяготения рассматривается в качестве внешнего. Но в высших приближениях подобная замена невозможна. Все свои вычисления В.А.Фок подробно излагает в статье [58].

В работе Эйнштейна, Инфельда и Гофмана [57] проблема вывода уравнений движения рассматривалась в иной постановке, вытекающей из точки зрения Эйнштейна, согласно которой элементарные частицы суть особенные точки поля. В ней получены уравнения движения во втором приближении, а проблемы тензора материи внутри масс не существует. Вычисления авторов работы [57] настолько сложны, что в журнальной статье для них не нашлось места, и читателю предлагалось обратиться к секретарю Института в Принстоне, где хранится полная рукопись.

Второе приближение к уравнениям движения по методу Фока было получено в 1940 г. в работе Н.М.Петровой [115], аспирантки Владимира Александровича. Война задержала публикацию статьи Петровой до 1949 г., но ее результаты были использованы и приведены Владимиром Александровичем в его работе [79], 1941 г. Развитие подхода Фока к уравнениям движения содержится в работах учеников Владимира Александровича [116,117], а также в [118,119].

Фундаментальная статья В.А. Фока об уравнениях движения масс существенно оживила мировую научную активность в области теории тяготения Эйнштейна и положила начало интенсивным гравитационным исследованиям в СССР.

В дальнейшем В.А. Фок обобщает уравнения движения на случай вращающихся тел, находит приближенное решение уравнений тяготения и ис-

следует асимптотический вид решений. Особое значение он придает вопросу о существовании системы координат, определяемой однозначно с точностью до преобразования Лоренца. В.А. Фок стремится сформулировать в теории тяготения правильную математическую постановку задачи, обеспечивающую единственность решения. Он показывает, что в случае островного расположения масс гармонические координаты представляют собой привилегированную систему координат, подобно тому, как инерциальная система координат оказывается преимущественной в отсутствие тяготения. Он доказывает единственность гармонической системы, характеризуемой дифференциальными уравнениями (1) и предельными условиями. Условие гармоничности (2) называют также условием де Дондера—Фока, поскольку впервые его можно найти у де Дондера [116], а Фок исчерпывающе изучил его и указал на важнейшие применения.

Книга «Теория пространства, времени и тяготения». В предисловии к книге В.А. Фок пишет: «Результаты этих исследований привели нас к убеждению о возможности, по крайней мере для наиболее важного класса физических задач, достигнуть однозначности решения уравнений тяготения путем наложения совместных с ними дополнительных условий. Это убеждение послужило основанием для новой точки зрения на всю теорию тяготения. Поэтому возникла потребность в изложении всей теории пространства, времени и тяготения с этой, вновь выработанной, точки зрения, что и сделано в этой книге».

В.А. Фок придает большое значение ясному педагогическому изложению материала, что тем более необходимо, так как в погоне за доступностью в понимании общей теории относительности некоторые вульгаризаторы науки жертвовали научной достоверностью. Во многих популярных изложениях общей теории относительности ковариантность смешивалась с инвариантностью, возможность произвольного выбора координатной системы отождествлялась с физическим содержанием общей теории относительности, основной критерий наличия тяготения — отличие от нуля тензора кривизны четвертого ранга — упоминался лишь мимоходом.

В.А. Фок включает в книгу изложение частной теории относительности в произвольных координатах, используемых в общей теории относительности, и подчеркивает, что ковариантность относительно самого общего преобразования координат («общековариантность») есть требование к любой теории, а не только к теории тяготения. Общековариантность вместе с локальностью лагранжиана представляют собой главные принципы современной теории. Основной материал книги В.А. Фок излагал многократно в своих лекциях на физическом факультете ЛГУ. В.А. Фок подчеркивает, что физической инвариантностью могут обладать только решения уравнений Эйнштейна, когда устранена неоднозначность в определении координат с помощью дополнительных, координатных условий, совместных с уравнениями Эйнштейна. Об-

щековариантность (или калибровочная инвариантность) есть всеобщее требование, физическая инвариантность в теории тяготения и калибровочных теориях относится к данному решению. Общековариантность есть математическое выражение принципа относительности к средствам наблюдения. Группа физической инвариантности значительно уже, чем группа общековариантности: дополнительные условия нарушают общековариантность. Общековариантность относится к разному описанию одного и того же явления, в случае физической инвариантности существуют различные базисы и «соответствующие явления». Именно симметрия решений, лежащая в основе физической инвариантности, характеризует основные черты явлений. Эти идеи В.А. Фока имеют весьма общий характер, и их применение не ограничивается только теорией тяготения и калибровочными теориями. Важность изучения симметрии решений и плодотворность ее применения в физике продемонстрирована А.М.Балдиным и А.А.Балдиным [120].

Книга «Теория пространства, времени и тяготения» основана на огромном оригинальном материале. В ней излагаются не только фундаментальные исследования В.А. Фока по общей теории относительности, но перерабатываются с единой и оригинальной точки зрения известные главы, в которых дается более совершенный вывод и новое освещение. В.А. Фок получает физическое толкование координат, рассматривая распространение фронта световой волны. Он тщательно следит за логической стройностью изложения и приводит в книге новые результаты, полученные им при собственном прорабатывании частной теории относительности. В частности, он дает новое доказательство линейности преобразования, связывающего две инерциальные системы, и исследует вопрос об астрономической аберрации на основе понятия о пространстве скоростей Лобачевского—Эйнштейна. В книге изложены исследование о функции Лагранжа для системы зарядов, описывающей релятивистское приближение, а также оригинальный вывод интегралов движения.

Книга посвящена в основном теории пространства, времени и тяготения для островного расположения масс, т.е. для изолированной системы масс типа Солнечной системы, погруженной асимптотически в плоское пространство-время. В.А. Фок полагал, что теория пространства, времени и тяготения в этом случае имеет заверченный вид, в то время как изучение космологии только начинается. Из 96 параграфов книги только в двух рассматривается иное пространство с иным распределением масс, а именно изотропное пространство, пространство Фридмана—Лобачевского, с равномерной плотностью масс.

В случае островного распределения масс и отсутствия воздействий, входящих извне, пространство, будучи неоднородным вблизи масс, становится евклидовым асимптотически. В этом случае существует привилегированная система координат — гармоническая, переходящая на бесконечности в галилеевскую и определенная однозначно с точностью до преобразования Ло-

ренца. Это означает, что в случае островного расположения масс возможна физическая относительность: если произвести преобразование Лоренца и сопроводить его соответствующим изменением в расположении и движении масс, то метрический тензор примет свой первоначальный вид. С этой точки зрения отыскание привилегированной системы координат, отвечающей природе явления, представляет собой первый шаг к пониманию физической инвариантности, присущей этому явлению. Математически такая система должна выделяться дополнительными условиями, устраняющими неоднозначность в определении координат и совместными с уравнениями Эйнштейна. В.А. Фок пишет в заключении к книге: «Значение привилегированной системы координат заключается не только в том, что она — стандартная и позволяет сравнивать решения, полученные разными способами. Существование привилегированной системы имеет и принципиальное значение, так как отражает объективные свойства пространства». В.А. Фок не был убежден, что теория тяготения Эйнштейна применима в масштабах Вселенной, ее экстраполяцию на такие масштабы он считал рискованной. Но он писал: «Заметим только, что теория тяготения Эйнштейна является примером такой физической теории, убедительность которой основана не только на ее согласии с опытом, но и на ее внутреннем совершенстве и изяществе. В этом отношении теория Эйнштейна является непревзойденной».

Принцип относительности Птолемея—Коперника и принцип относительности Галилея. В.А. Фок уделил сравнению этих принципов значительное место, включив эту тему в свои доклады на ряде конференций и опубликовав семь статей на различных языках [121–123]. На этом примере из истории науки Владимир Александрович обучал популяризаторов науки и философов, в чем состоит различие между понятиями ковариантности и физической инвариантности и как важно четко придавать смысл употребляемым понятиям.

Как известно, Птолемей считается автором такого описания Солнечной системы, в котором неподвижным центром системы является Земля. В системе Коперника в качестве неподвижного центра выбрано Солнце, вокруг которого вращаются Земля и другие планеты. Принцип относительности Птолемея—Коперника есть признание того, что обе эти системы, как геоцентрическая система Птолемея, так и гелиоцентрическая система Коперника, могут быть использованы для описания одного и того же явления, подчеркиваем — одного и того же явления, которое, в частности, может происходить на Земле. Этот принцип служит гарантией непротиворечивости описания явления в разных системах отсчета, и уравнения, написанные в разных системах, должны удовлетворять ему. Такое свойство уравнений называют ковариантностью. Принцип имеет не физический, а логический характер.

Принцип относительности Галилея проявляется в том, что в двух инерциальных системах отсчета (например, в двух кораблях), движущихся прямоли-

нейно и равномерно друг относительно друга, все физические процессы протекают одинаковым образом, т.е. этот принцип относится к разным явлениям. Принцип относительности Галилея допускает опытную проверку. Согласно этому принципу, любому явлению внутри одного корабля можно сопоставить такое же явление внутри другого корабля. Возможность сопоставления явлений есть возможность физической адаптации явления к новым координатам, что включает ковариантность уравнений и адаптацию начальных и предельных условий, т.е. изменение физических условий. При этом следует помнить, что эти дополнительные условия не являются ковариантными. Физическая инвариантность существует, если возможна адаптация.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **De Broglie L.** — Ann. d. Phys., 1925, v.3, p.22.
2. **Pauli W.** — Zs. f. Phys., 1925, v.31, p.765.
3. **Heisenberg W.** — Zs. f. Phys., 1925, v.33, p.879.
4. **Born M., Jordan P.** — Zs. f. Phys., 1925, v.34, p.858.
5. **Born M., Heisenberg W., Jordan P.** — Zs. f. Phys., 1925, v.35, p.557.
6. **Schroedinger E.** — Ann. d. Phys., 1926, v.79, p.361, 489, 734; v.80, p.437; v.81, p.109.
7. **Fock V.A.** — Zs. f. Phys., 1926, v.38, p.242.
8. **Klein O.** — Zs. f. Phys., v.37, p.895.
9. **Fock V.A.** — Zs. f. Phys., 1926, v.39, p.226.
10. **Gordon W.** — Zs. f. Phys., 1926, v.40, p.117.
11. **Kaluza Th.** — Sitzungsber. d. Preuss. Akad., 1921, p.966.
12. **Fermi E.** — Zs. f. Phys., 1926, v.36, p.902.
13. **Dirac P.A.M.** — Proc. Roy. Soc., 1926, v.A112, p.661.
14. **Born M.** — Zs. f. Phys., 1926, v.37, p.863; v.38, p.803.
15. **Uhlenbeck G.E., Goudsmit S.** — Naturwiss., 1925, v.13, p.953; Nature, 1926, v.117, p.264.
16. **Heisenberg W.** — Zs. f. Phys. 1927, v.43, p.172.
17. **Dirac P.A.M.** — Proc. Roy. Soc., 1926, v.114, p.243.
18. **Fock V.A.** — Zs. f. Phys., 1928, v.49, p.339 (пер. на русск. [94, с.9]).
19. **Dirac P.A.M.** — The Principles of Quantum Mechanics, 4 ed., Oxford, Clarendon Press, 1958.
20. **Dirac P.A.M.** — Proc. Roy. Soc., 1928, v.117, p.610.
21. **Fock V.A., Iwanenko D.D.** — Zs. f. Phys., 1929, v.54, p.798;
а) **Fock V.A., Iwanenko D.D.** — C. R. Acad. Sci. Paris, 1929, v.188, p.1470.
22. **Fock V.A.** — Zs. f. Phys., 1929, v.57, p.261; J. Phys. Radium, 1929, v.10, p.392.
23. **Weyl H.** — Zs. f. Phys., 1929, v.56, p.330.
24. **Hartree D.R.** — Proc. Camb. Phil. Soc., 1928, v.24, p.89.
25. **Fock V.A.** — Zs. f. Phys., 1930, v.61, p.126; v.62, p.795.

26. **Fock V.** — *Zs. f. Phys.*, 1933, v.81, p.195.
27. **Фок В.А., Петрашень М.И.** — *ЖЭТФ*, 1934, т. 4, с.295; *Sov.Phys.* 1934, v.6, p.368; 1935, v.8, p.359.
28. **Фок В.А., Веселов М.Г., Петрашень М.И.** — *ЖЭТФ*, 1940, т.10, с.383.
29. **Dirac P.A.M., Fock V.A., Podolsky V.** — *Sov. Phys.*, 1932, v.2, p.468 (пер. на русск. [94, с.70]).
30. **Heisenberg W., Pauli W.** — *Zs. f. Phys.*, 1929, v.56, p.1; 1930, v.59, p.168.
31. **Dirac P.A.M.** — *Proc. Roy. Soc.*, 1932, v.A136, p.453.
32. **Fock V., Podolsky V.** — *Sov. Phys.*, 1932, v.7, p.798; v.2, p.275 (пер. на русск. [94, с.52,55]).
33. **Tomonaga K.** — *Prog. Theor. Phys.*, 1946, v.1, p.147.
34. **Schwinger J.** — *Phys. Rev.*, 1948, v.74, p.1439; 1949, v.75, p.651; v.76, p.790.
35. **Jordan P., Klein O.** — *Zs. f. Phys.*, 1927, v.45, p.751.
36. **Jordan P., Wigner E.** — *Zs. f. Phys.*, 1928, v.47, p.631.
37. **Fock V.A.** — *Zs. f. Phys.*, 1932, v.75, p.622 (пер. на русск. в сб.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979, с.415).
38. **Фок В.А.** — *Изв. АН СССР, сер. мат. и естеств. наук*, 1935, с.169.
Fock V.A. — *Zs. f. Phys.*, 1935, v.98, p.145.
39. **Barut A.O., Bohm A.** — *Phys. Rev.* 1965, v.139B, p.1107.
40. **Dothan Y., Gell-Mann M., Ne'eman Y.** — *Phys. Lett.*, 1965, v.17, p.148.
41. **Mukunda N., O'Raifeartaigh L., Sudarshan E.** — *Phys. Rev. Lett.* 1965, v.15, p.1041.
42. **Фок В.А.** — *Изв. АН СССР, серия физ.*, 1937, с.551.
Fock V.A. — *Sov.Phys.*, 1937, v.12, p.404 (пер. на русск. [94, с.141]).
43. **Schwinger J.** — *Phys. Rev.*, 1951, v.82, p.664.
44. **De Witt B.S.** — In: *Relativity, Groups and Topology*, eds. De Witt B.S., New York, Gordon and Breach, 1965, p.19.
45. **Nambu Y.** — *Prog. Theor. Phys.* 1950, v.5, p.82.
46. **Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.** — *Введение в теорию квантованных полей*. М.: Наука, 1976.
47. **Itabashi K.** — *Prog. Theor. Phys.*, 1981, v.65, p.1423.
48. **Mecklenburg W., Mizrachi L.** — *Phys. Rev.*, 1983, v.D27, p.1922.
49. **Fock V.** — *Sov. Phys.*, 1934, v.6, p.425 (пер. на русск. [94, с.88]).
50. **Фок В.А.** — *Уч. зап. ЛГУ, серия физ.*, 1937, т.3, с.109.
51. **Новожилов Ю.В.** — *ЖЭТФ*, 1952, т.22, с. 431; *ДАН*, 1952, т. 83, с.114.
52. **Glauber R.** — *Phys. Rev.*, 1963, v.130, p.2529; v.131, p.2766.
53. **Klauder J.R., Sudarshan E.C.G.** — *Fundamentals of Quantum Optics*, W.A.Benjamin, New York, Amsterdam, 1966.
54. **Новожилов Ю.В.** — *ЖЭТФ*, 1958, т.35, с. 316; *Nucl. Phys.*, 1960, v.15, p.430.
55. **Einstein A., Grommer J.** — *Sitzungsber. Berlin. Akad.*, 1927, p.2.
56. **Einstein A.** — *Sitzungsber. Berlin. Akad.*, 1927, p.235.
57. **Einstein A., Infeld L., Hoffman B.** — *Ann. of Mathem.*, 1938, v.39, p.65.

58. **Фок В.А.** — ЖЭТФ, 1939, т.9, с. 375; **Fock V.** — J. Phys., 1939. v.1, p.81.
59. **Фок В.А.** — Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности. М.-Л.: Изд. АН СССР, 1946.
60. **Fock V.** — Electromagnetic diffraction and propagation problems. Internat. series of monographs on electromagn. waves. Pergamon Press. Frankfurt, 1965.
61. **Фок В.А.** — Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Сов. радио, 1970.
62. **Смирнов В.И.** — В кн.: Владимир Александрович Фок. Материалы к библиографии ученых СССР, Изд. АН СССР, 1956.
63. **Фаддеев Л.Д.** — Труды ГОИ, 1978, т.43, No.177, с.37.
64. **Fock V.** — Zs. f. Phys., 1924, v.28, p.102; Труды ГОИ, 1924, т.3, с.1.
65. **Фок В.А.** — Теория определения сопротивления горных пород по способу каротажа. ГТТИ, 1933.
66. **Фок В.А.** — Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гостехиздат, 1955. Theory of Space, Time and Gravitation, London, New York, Paris, Los Angeles, Pergamon Press, 1959.
67. **Фок В.А.** — Теория пространства, времени и тяготения. Изд. 2-е, дополненное, М.: Физматгиз, 1961. The Theory of Space, Time and Gravitation, 2nd revised edition, Oxford, London, Paris, 1964.
68. **Фок В.А.** — Начала квантовой механики. Л.: Кубуч, 1932.
69. **Фок В.А.** — То же, изд. 2-е, дополненное, М.: Наука, 1976.
70. **Fock V., Krutkov Ju.A.** — Zs. f. Phys., 1923, v.13, p.195.
71. **Стожаров А.А.** — Труды ГОИ, 1978, т.43, вып.177, с.57.
72. **Vorn M., Fock V.** — Zs. f. Phys., 1928, v.51, p.165.
73. **Фок В.А.** — ДАН СССР, 1934, т.1, с.199, с.443.
74. **Fock V., Petrashen M.I.** — Sow. Phys., 1935, v.8, p.359, 547.
75. **Эйнштейн А., Подольский Б., Розен Н.** — УФН, 1936, т.16, с.440.
76. **Фок В.А.** — УФН, 1936, т.16, с.436.
77. **Фок В.А.** — УФН, 1936, т.16, с.1076.
78. **Фок В.А.** — ЖЭТФ, 1940, т.10, с.961.
79. **Фок В.А.** — ДАН СССР, 1941, т.32, с.28.
80. **Фок В.А.** — ДАН СССР, 1941, т.31, с.875.
81. **Фок В.А.** — ДАН СССР, 1942, т.36, с.147.
82. **Фок В.А.** — ДАН СССР, 1943, т.39, с.279.
83. **Леонтович М.А., Фок В.А.** — ЖЭТФ, 1946, т.16, с.557.
84. **Фок В.А.** — Таблицы функций Эйри. М.: Инф. отдел. НИИ, 1946.
85. **Фок В.А., Крылов Н.С.** — ЖЭТФ, 1947, т.17, с.93.
86. **Фриш С.Э.** — Труды ГОИ, 1978, т.43, вып.117, с.763.
87. **Крылов Н.С.** — Работы по обоснованию статистической физики. Отв. ред. В.А.Фок. М.-Л.: Изд. АН СССР, 1950.
88. **Мигдал А.Б., Фок В.А.** — В кн.: Крылов Н.С. Работы по обоснованию статистической физики. М.-Л., Изд. АН СССР, 1950, с.5.

89. **Фок В.А.** — ДАН СССР, 1950, т.73, с. 735.
90. **Фок В.А.** — Вопросы философии, 1953, с.168.
91. **Фок В.А.** — Изв. АН СССР, серия физ., 1954, т.18, с.161.
92. **Фок В.А.** — УФН, 1957, т.62, с.461.
93. **Fock V.** — Rev. Mod. Phys., 1957, v.29, p.335
94. **Фок В.А.** — Работы по квантовой теории поля. Л.: Изд. ЛГУ, 1957.
95. **Бор Н.** — УФН, 1958, т.66, с.571.
96. **Бор Н.** — Квантовая физика и философия. Избранные труды, т.2., М.: Наука, 1971, с.526.
97. **Фок В.А.** — УФН, 1958, т.66, с.599.
98. **Фок В.А.** — ЖЭТФ, 1960, т.38, с.108.
99. **Фок В.А.** — ЖЭТФ, 1960, т.38, с.1476.
100. **Фок В.А.** — Вопросы философии, 1964, вып.8, с.49.
101. **Фок В.А.** — Квантовая физика и строение материи. Л.: Изд. ЛГУ, 1965.
102. **Веселов М.Г.** — Труды ГОИ, 1978, т.43, вып.177, с.29.
103. **Фок В.А.** — Труды ГОИ, 1926, 4, с.1.
104. **Fock V.** — Arch. f. Elektrotechn., 1926, v.16, p.331.
105. **Фок В.А.** — ЖРФХО, 1926, т.58, с.11.
106. **Фок В.А.** — ЖРФХО, 1926, т.58, с.355.
107. **Tamm I.E.** — J. Phys., 1945, v.9, p.449.
108. **Dancoff S.** — Phys. Rev., 1951, v.78, p.382.
109. **Novozhilov Yu.V., Tulub A.V.** — Method of Functionals. Gordon and Breach, New York, 1961.
110. **Fermi E.** — Rev. Mod. Phys., 1932, v.4, p.87.
111. **Franke V.A., Novozhilov Yu.V., Prokhvatilov E.V.** — Lett. Math. Phys., 1981, v.5, p.437.
112. **Novozhilov Yu.V.** — Lett. Math. Phys., 1984, v.8, p.247.
113. **Weisskopf V.** — Zs. f. Phys., 1934, v.89, p.27; v.90, p.817.
114. **Ball R.** — Phys. Rep., 1989, v.182, p.1.
115. **Петрова Н.М.** — ЖЭТФ, 1949, т.19, с.989.
116. **Фихтенгольц И.Г.** — ЖЭТФ, 1950, т.20, с.233.
117. **Кашкаров В.П.** — ЖЭТФ, 1954, т.27, с.563.
118. **Rapapetrou A.** — Proc. Phys. Soc. 1951, v.A64, p.57.
119. **Meister H.** — Ann. d. Phys., 1957, v.19, p.268.
120. **Балдин А.М., Балдин А.А.** — Краткие сообщения ОИЯИ, 17-86, Дубна, 1986, с.19; ЭЧАЯ, 1998, т.29, с.575.
121. **Фок В.А.** — Система Коперника и система Птолемея в свете общей теории относительности. Сборник «Николай Коперник», Изд. АН СССР, 1947.
122. **Фок В.А.** — Теория Эйнштейна и физическая относительность. М.: Знание, 1967.
123. **Fock V.** — Ann. Inst. Henri Poincare, 1966, v.5, p.205.
124. **Fock V.** — Zs. f. Phys., 1929, v.57, p.261-277.