«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
2000, ТОМ 31, ВЫП. 1

539.12.01

В.А.ФОК — СУДЬБА НЕКОТОРЫХ ОТКРЫТИЙ

Л.В. Прохоров

Научно-исследовательский институт физики
Санкт-Петербургского государственного университета, Санкт-Петербург

«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
2000, ТОМ 31, ВЫП. 1

УДК 539.12.01

В.А.ФОК — СУДЬБА НЕКОТОРЫХ ОТКРЫТИЙ

Л.В. Прохоров

Научно-исследовательский институт физики
Санкт-Петербургского государственного университета, Санкт-Петербург

Дан обзор некоторых открытий, сделанных В.А.Фоком в 1926—1937 гг. и играющих важную роль в современной физике. Обсуждаются как незаслуженно забытые работы (тождества Фока—Фирца, квантование магнитного потока, теория Калуцы—Клейна—Фока), так и не вполне корректно цитируемые (уравнение Клейна—Фока—Гордона, калибровка Фока). Показана связь метода пятого параметра Фока (метод собственного времени) с современной теорией струн и мембран.

A review of some papers by V.A.Fock published in 1926—1937 and playing an important role in modern physics is given. The papers both unjustly forgotten (the Fock—Fierz identities, quantization of magnetic flow, the Kaluza—Klein—Fock theory), and not quite correctly cited (Klein—Fock—Gordon equation, the Fock gauge) are discussed. Connection between the Fock 5th parameter method (the proper time method) and the modern theory of strings and membranes is elucidated.

Открытия, как и люди, имеют свои судьбы: счастливые, драматические, курьезные. И это не зависит от научного авторитета их авторов. Несколько важных фактов, обнаруженных Владимиром Александровичем Фоком в 1926—1937 годах, служат тому примером.

1. ТОЖДЕСТВА ФОКА—ФИРЦА

В работе [1] В.А.Фок ввел понятие параллельного переноса спинора в римановом пространстве и обобщил уравнение Дирака на случай общей теории относительности. Определив (в современных обозначениях) вектор, скаляр и псевдоскаляр:

$$\bar{V}_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \qquad \bar{S} = \bar{\psi}\psi, \qquad \bar{P} = \bar{\psi}\gamma_5\psi, \tag{1.1}$$

В.А.Фок отметил наличие тождества

$$\bar{V}_\mu^2 + \bar{P}^2 = \bar{S}^2. \tag{1.2}$$

В дальнейшем к этому тождеству не обращались, оно было забыто. Между тем, соотношение (1.2) есть частный случай тождеств Фирца, играющих важную роль в современной физике. В 1937 г. М.Фирц, будучи аспирантом

В.Паули, опубликовал работу [3], в которой установил существование носящих его имя тождеств:

$$(\bar{\psi}_a O_n \psi_b)(\bar{\psi}_c O_n \psi_d) = \frac{1}{4}\sum_k C_{nk}(\bar{\psi}_a O_k \psi_d)(\bar{\psi}_c O_k \psi_b), \tag{1.3}$$

где $\psi_a, ..., \psi_d$ — спиноры Дирака полей $a, ..., d$; O_k образуют полный набор матриц Дирака: $1,\ \gamma_\mu,\ \sigma_{\mu\nu}/\sqrt{2},\ \gamma_\mu\gamma_5,\ \gamma_5$, дающих в спинорных обкладках соответственно скаляр, вектор, антисимметричный тензор, псевдовектор и псевдоскаляр. Используется стандартное представление матриц Дирака:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_-, \tag{1.4}$$

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

где σ^i — три матрицы Паули. Численные коэффициенты C_{nk} приведены в таблице.

Таблица

	S^T	V^T	T^T	A^T	P^T
S	1	1	–1	–1	1
V	4	–2	0	–2	–4
T	–6	0	–2	0	–6
A	–4	–2	0	–2	4
P	1	–1	–1	1	1

Левые части (1.3) обозначены в таблице через S, V, T, A, P, а правые (с переставленными спинорами ψ_b и ψ_d) — через S^T, V^T и т.д. Приведенная таблица отличается от таковой работы [3] лишь знаками в некоторых клетках, что связано с выбором конкретного вида матриц Дирака. Тождества (1.3) достаточно часто используются в современной физике (в частности, в моделях «Великого объединения» с техницветом [4]). Из (1.3) и таблицы находим

$$V - A = 2(S^T - P^T), \quad V + A = -V^T - A^T \tag{1.5}$$

и, полагая $\psi_a = ... = \psi_d$ (теперь $V = \bar{V}_\mu^2 = V^T, \quad S = \bar{S}^2 = S^T$ и т.д.), получаем $\bar{V}_\mu^2 = -\bar{A}_\mu^2$ и $\bar{V}_\mu^2 + \bar{P}^2 = \bar{S}^2$. Последнее тождество идентично тождеству (1.2). Таким образом, В.А.Фок был первым, кто обнаружил наличие тождественных соотношений между произведениями четырех спиноров.

Следует отметить, что тождества (1.3) тривиально следуют из тождества Паули

$$\sum_{A=1}^{16} \gamma^A_{\alpha\beta}\gamma^A_{\rho\sigma} = 4\delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\rho}, \tag{1.6}$$

на которое Фирц опирался. В работе [3] нет ссылки на статью Фока [1].

2. КВАНТ МАГНИТНОГО ПОТОКА ЙОРДАНА—ФОКА

В небольшой, но содержательной работе [5] впервые был корректно определен квант магнитного потока Φ_0. Работа замечательна своей простотой и ясностью изложения.

Идея такова. Из уравнения движения частицы с зарядом e и массой m в магнитном поле $\mathbf{H}$ $(c = 1)$

$$m\ddot{\mathbf{x}} = e[\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{H}]$$

вытекает следующее равенство:

$$\frac{mv^2}{R} = evH_z. \tag{2.1}$$

Здесь R — радиус окружности, по которой движется частица, ее скорость $\mathbf{v}$ касательна к окружности; предполагается, что магнитное поле направлено по оси z. Из соотношения $eH_z = mv/R$ имеем для неопределенности магнитного поля $\Delta H_z = \Delta p_y/(eR)$. Полагая, что $R \sim \Delta x$ (неопределенность x-координаты), и учитывая соотношение неопределенностей $\Delta p_y \Delta y \geq \hbar$, приходим к неравенству

$$\Delta H_z \geq \frac{\hbar}{e\Delta x \Delta y}. \tag{2.2}$$

Этот случай именуется в [5] движением по окружности малого радиуса ($R \approx \approx \Delta x$). Там же разобран случай «большого» радиуса окружности, $R \gg \Delta x$ (разумеется, с тем же результатом). Авторы отмечают, что магнитный поток

$$\Phi = \int \mathbf{HdS} \tag{2.3}$$

не может быть определен с точностью, превосходящей $\hbar/e$:

$$\Delta\Phi \geq \frac{\hbar}{e} \tag{2.4}$$

(в гауссовских единицах). Как известно, квант магнитного потока в сверхпроводниках второго рода равен $\hbar/e^*$, где e^* — заряд носителей сверхпроводящего тока ($e^* = 2e$) [6]. В.А.Фок понимал важность этого результата и при случае о нем упоминал. Между тем, работа [5] была предана забвению и в связи с квантованием магнитного потока не упоминается.

Отметим, что в [5] было получено соответствующее неравенство и для напряженности электрического поля $\mathbf{E}$. Оба неравенства можно объединить в одной формуле:

$$\Delta F_{\mu\nu} \geq \frac{\hbar}{e\Delta x^\mu \Delta x^\nu}, \quad \mu \neq \nu, \tag{2.5}$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ — тензор электромагнитного поля.

Отметим также, что квант магнитного потока определяет заряд магнитного монополя g, т.е. из (2.4) следует $eg \geq \hbar$. Позднее П.А.М.Дирак [7,8] получил общее условие для электрических и магнитных зарядов ($eg = \hbar n/2$, $n = 1, 2, ...$), а Ю.Швингер (см. статью в сб. [8]) из требования релятивистской инвариантности пришел к условию $eg = \hbar n$.

3. УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА—КЛЕЙНА—ФОКА—ГОРДОНА—...

Как известно [9], Э.Шредингер первоначально написал релятивистское волновое уравнение («уравнение Клейна—Гордона» с кулоновским потенциалом). Оно было им забраковано, так как не воспроизводило тонкую структуру спектра атома водорода. После публикации [10], в которой было дано стандартное (нерелятивистское) уравнение Шредингера, появились работы, посвященные его релятивистскому обобщению [11–14]. Уравнения (в современных обозначениях) фигурировали в разных формах:

$$(\Box - m^2)\psi = 0, \quad \Box = -\partial_t^2 + \Delta, \tag{3.1}$$

$$[-(\partial_t + ieA_0)^2 + \Delta - m^2]\psi = 0, \tag{3.2}$$

$$[-(\partial_\mu + ieA_\mu)^2 - m^2]\psi = 0 \tag{3.3}$$

или в виде вытекающих отсюда стационарных уравнений ($\partial_t \to -iE$; здесь $\hbar = c = 1$). В свое время уравнение (3.1) не получило признания, поскольку оно содержит вторую производную по времени, и приходится задавать начальное значение не только волновой функции, но и ее первой производной по времени $\dot\varphi$. От $\dot\varphi$ зависит и плотность вероятности ($w \sim i(\varphi^*\dot\varphi - \dot\varphi^*\varphi)$), вследствие чего последняя может оказаться отрицательной в некоторых областях пространства. Позднее уравнение (3.1) было интерпретировано как уравнение для свободного бозонного поля с массой m [15]. Отметим, что в современной физике при описании процессов рассеяния релятивистских частиц (3.1) используется и как уравнение для волновых функций массивных или безмассовых ($m = 0$) частиц с целыми спинами (например, пионов, фотонов и т.д.). Уравнение (3.1) имеет такой же фундаментальный характер, как и уравнение Дирака.

Хронология получения редакциями и выхода в свет статей [11–14] в 1926 г. такова (соответственно, первая и вторая даты — день, месяц)

О.Клейн [11]	28.04	10.07
В.Фок [12]	11.06	28.07
В.Фок [13]	30.07	02.10
В.Гордон [14]	29.09	29.11.

Нужно отметить, что в [12] не только выписано уравнение, но и найдены решения для движения частицы в кулоновском поле (установлено наличие тонкой структуры спектра), а также в постоянных магнитном и электрическом полях (эффекты Зеемана и Штарка).

История уравнений (3.1)–(3.3) изложена в [9]. Шредингер получил релятивистское уравнение в середине декабря 1925 г. «На рубеже 1925/26 г. он направил в редакцию «Annalen der Physik» рукопись, в которой ... приводилось релятивистское волновое уравнение. ... Однако всего через несколько дней Шредингер забрал рукопись из редакции» ([16], с.43). В основной работе [10] он лишь упомянул об этом уравнении. Только в работе [17], датированной 21 июня*, Шредингер опубликовал релятивистское волновое уравнение для массивной заряженной частицы в электромагнитном поле. Стационарное уравнение, отвечающее (3.1), писал Л. де Бройль [18] (февраль 1925 г.). Но там речь шла об электромагнитной волновой функции, ассоциированной с электроном (т.е. не имелась в виду волновая функция электрона). В июле 1926 г. [19] де Бройль опубликовал корректное релятивистское уравнение для частицы в электромагнитном поле. Тогда же П.А.М.Дирак [20] (29 апреля) написал оператор уравнения (3.3), а в [21] (26 августа) уравнение (3.1) было выписано в явном виде.

Таким образом, именно в работе Клейна [11] впервые было опубликовано релятивистское волновое уравнение для частиц с целым спином. Однако цель работы [11] была другая — построение 5-мерной теории гравитационного и электромагнитного полей (подробнее см. [9]).

В дальнейшем появился целый ряд работ, в которых фигурировало обсуждаемое уравнение [22–25]. Отметим, что в [23] (5 июня) уравнение не связывалось явным образом с квантовой теорией. Это было сделано только в [24] (октябрь). В последующем данное уравнение публиковалось даже в журналах за 1927 г. (см. [9]).

Из авторов неопубликованных работ упомянем В.Паули, который рассматривал релятивистское волновое уравнение весной 1926 г. (оно воспроизводится в письме В.Гейзенберга Дираку от 26 мая [26], цитируется по [9]). Однако Паули от него отказался. В письме к Г.Вентцелю ([27], с.333) он писал, что «... полностью потерял веру в дифференциальное уравнение» (3.2) (в стационарном варианте).

Заключаем: уравнение (3.1) и его обобщения были получены многими авторами. Но называть его уравнением Клейна—Гордона, опуская имя Фока, — нонсенс.

---

*Здесь и далее указаны даты поступления работ в редакции.

4. ТЕОРИЯ КАЛУЦЫ—КЛЕЙНА—ФОКА. КАЛИБРОВОЧНЫЙ ПРИНЦИП

Главным в работе [13], цитируемой обычно в связи с уравнением Клейна—Фока—Гордона, было не это уравнение (написанное, кстати, и в общековариантном виде). Главным было объединение гравитационного и электромагнитного полей в рамках 5-мерного пространства-времени. Аннотация работы [13] гласит: «Волновое уравнение Шредингера представлено как инвариантное уравнение Лапласа, а уравнения движения — как геодезические в пятимерном пространстве. Лишний пятый координатный параметр находится в тесной связи с линейной дифференциальной формой электромагнитного потенциала». В первой же строке В.А.Фок ссылается на еще не опубликованную работу петербургского физика Генриха Манделя* и благодарит последнего за предоставленную возможность ознакомиться с рукописью работы. В.А.Фок также отмечает в сноске, что идея работы возникла в разговоре с профессором В.Фридериксом. Наконец, в примечании при корректуре говорится следующее: «В то время, как эта заметка была в печати, в Ленинграде была получена прекрасная работа Оскара Клейна» [11], «в которой автор пришел к результатам, в главном совпадающим с таковыми данной заметки. Однако, ввиду важности результатов, их вывод другим путем (обобщение анзаца, использованного в моей более ранней работе) может представлять интерес». Важность этих идей стала ясной только в последние десятилетия, отчасти в связи с программой суперструн, базирующейся на идеях многомерия.

Имя В.А.Фока (равно как и Г.Манделя) в связи с объединением гравитации и электромагнетизма обычно не упоминается. Между тем, А.Эйнштейн в письме к Г.Лоренцу (от 16 февраля 1927 г.) писал ([29], с.318): «Кажется, что гравитацию и теорию Максвелла удалось объединить вполне удовлетворительным образом в рамках пятимерной теории (Калуцы—Клейна—Фока)». Такое крещение представляется достаточно убедительным: теория должна называться «теорией Калуцы—Клейна—Фока» (или «теорией Калуцы—Клейна—Манделя—Фока»). Столетие со дня рождения В.А.Фока — хороший повод для восстановления исторической справедливости.

Работа [13] содержала еще одну фундаментальную идею — принцип калибровочной инвариантности. Важность этого принципа выяснилась только в наши дни: все известные взаимодействия (гравитационное, электрослабое, сильное) обладают свойством калибровочной инвариантности. Этот принцип лежит и в основе теории суперструн. Сам термин «калибровочная инвариантность» восходит к работе [30], в которой была сделана попытка

*Она напечатана в том же томе [28].

геометризации электромагнитного поля. Г.Вейль предполагал, что при параллельном переносе вектора в искривленном пространстве может меняться не только его направление, но и длина. Предполагалось также, что изменение длины вектора определяется некоторым векторным полем $A_\mu(x)$. Пусть $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$ — квадрат интервала, $A = A_\mu(x)dx^\mu$ — 1-форма. Постулировалось, что при инфинитезимальном параллельном переносе

$$d(ds^2) = -A(ds^2). \tag{4.1}$$

Тогда при переносе на конечное расстояние из точки 1 в точку 2 вдоль пути $C(12)$ квадрат интервала меняется следующим образом:

$$(ds^2)_2 = \exp\left(-\int\limits_{C(12)} A_\mu dx^\mu\right)(ds^2)_1. \tag{4.2}$$

Поле A_μ отождествлялось с вектором-потенциалом электромагнитного поля. Если $dA = F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu \neq 0$, то изменение длины интервала зависит от пути и имеющегося электромагнитного поля. Преобразование

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu f(x), \tag{4.3}$$

где f — произвольная функция, исчезающая на бесконечности, влечет изменение интервала

$$ds^2 \to \mathrm{e}^{-f} ds^2, \tag{4.4}$$

в связи с чем оно и стало именоваться «калибровочным». Если $dA = 0$ (электромагнитное поле отсутствует, $A = df$), то

$$(ds^2)_2 = \exp\left[f(1) - f(2)\right](ds^2)_1. \tag{4.5}$$

Г.Вейль постулировал инвариантность физических процессов относительно общековариантных преобразований и преобразований (4.3). Формулы (4.4), (4.5) означают, что в теории, задаваемой условиями (4.1), (4.2), понятие интервала (длины) теряет смысл.

Впервые корректное калибровочное преобразование сформулировал В.А.Фок [13]:

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu f(x), \qquad \psi(x) \to \exp\left(\frac{ie}{\hbar} f(x)\right)\psi(x), \tag{4.6}$$

где ψ — волновая функция, f — произвольная функция, e — электрический заряд. Именно в такой форме эти преобразования вошли в физику (см., например, [31]), но без ссылок на Фока. После появления работы [13] их стали называть также *градиентными* (см. [32, с.91]; Фок говорил о добавлении к A_μ «градиентов»). Прилагательное «калибровочное», очевидно, оказалось лишенным смысла. Преобразования типа (4.4) (т.е. преобразования $g_{\mu\nu} \to e^{-f} g_{\mu\nu}$) именуются ныне *вейлевскими*.

5. МЕТОД ПЯТОГО ПАРАМЕТРА ФОКА (МЕТОД «СОБСТВЕННОГО ВРЕМЕНИ»)

Одиннадцатью годами позже В.А.Фок вернулся к идее пятого параметра ([33,34], с.141). Интерес к пятимерной теории уже значительно уменьшился, но Фок сумел взглянуть на проблему с новой точки зрения. Он применил трактовку, оказавшуюся, как теперь стало ясно, не менее плодотворной, чем идея 5-мерного псевдориманова пространства.

Изучая движение классической заряженной частицы со стандартным лагранжианом

$$L^0 = -m\sqrt{1-(d\mathbf{x}/dt)^2}dt + eA_\mu \frac{dx^\mu}{dt}, \quad \mu = 0,1,2,3, \quad x^0 = t, \tag{5.1}$$

В.А.Фок отмечает, что попытка перейти к явно релятивистски-инвариантному описанию с привлечением собственного времени:

$$\tau = \int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{1-(d\mathbf{x}/dt)^2}dt, \tag{5.2}$$

наталкивается на очевидное затруднение: задаваемый (5.2) параметр не есть независимая переменная (он зависит от пути частицы). Предлагается воспользоваться другим лагранжианом:

$$\tilde{L} = -\frac{m}{2}(\dot{x}^2+1) + eA_\mu \dot{x}^\mu, \quad \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}(+---), \tag{5.3}$$

где τ — независимый инвариантный параметр. Лагранжиан (5.3) допускает интеграл движения $\dot{x}^2 = \mathrm{const}$. Если положить $\dot{x}^2 = 1$, то параметр τ совпадает с собственным временем релятивистской частицы (5.2). При этом классические уравнения движения обоих лагранжианов также совпадают.

С современной точки зрения существо дела в следующем. Действие

$$S^0 = \int L^0 dt = \int L^0 \frac{dt}{d\tau} d\tau = -m \int (\sqrt{\dot{x}^2} - \frac{e}{m} A_\mu \dot{x}^\mu) d\tau \equiv \int L d\tau \tag{5.4}$$

инвариантно относительно репараметризации $\tau \to \tau' = \tau'(\tau)$. Это есть локальное калибровочное преобразование, поэтому решения уравнений движения содержат произвол. Лагранжиан (5.1) отвечает выбору калибровки $\tau = t$, что и ведет к потере явной релятивистской инвариантности.

Лагранжиан (5.3) уже не обладает калибровочной инвариантностью, т.е. переход к нему можно рассматривать как способ фиксации калибровки. Выбирается динамическая калибровка [35], поскольку нефизическая степень

свободы подчиняется теперь уравнению движения второго порядка по времени. Таким образом, совершаются следующие шаги:
1) фиксируется калибровка (переход $L \to \tilde{L}$);
2) требуется выполнение связей (условие $\dot{x}^2 = 1$).

Все это выглядит очень профессионально с современной точки зрения, начало формированию которой положили работы П.Г.Бергмана и П.А.М.Дирака [36,37], выполненные двумя десятилетиями позже (см. также [38]). В различных вариациях и в применении к различным задачам эта идея используется вплоть до настоящего времени.

5.1. Релятивистская частица. Действие, отвечающее лагранжиану (5.3) при $A_\mu = 0$, записывается в виде

$$S^* = -\frac{1}{2}\int d\tau e(\tau)[e^{-2}(\tau)\dot{x}^2 + m^2] \equiv \int d\tau \tilde{L}(\dot{x}, e), \qquad (5.5)$$

где $e(\tau)$ — «одномерная тетрада» (einbein). Варьирование S^* по e и x^μ дает уравнения движения свободной частицы (первое из них — лагранжевская связь):

$$\frac{\delta S^*}{\delta e} = \frac{1}{2}(e^{-2}\dot{x}^2 - m^2) = 0, \quad \frac{\delta S^*}{\delta x^\mu} = \frac{d}{d\tau}(e^{-1}\dot{x}_\mu) = 0. \qquad (5.6)$$

При $\tau = t$ они совпадают с таковыми, вытекающими из лагранжиана (5.1) (при $A_\mu = 0$).

5.2. Струна. Действие для струны Намбу—Гото получается из действия для релятивистской частицы «размазыванием» массы по некоторой линии [39]:

$$S_{NG} = -\gamma \int d\tau d\sigma \sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2}, \quad \dot{x} = \frac{dx}{d\tau}, \quad x' = \frac{dx}{d\sigma}, \qquad (5.7)$$

где σ параметризует точки струны, $\gamma = \mathrm{const}$ (размерность: $[\gamma] = M^2$). Действие (5.7) инвариантно относительно репараметризации $\tau \to \tau' = \tau'(\tau, \sigma)$, $\sigma \to \sigma' = \sigma'(\tau, \sigma)$, т.е. оно калибровочно-инвариантно. Действие

$$S_P = -\frac{c}{2}\int d^2u \sqrt{|g|} g^{ij} X^\mu_{,i} X^\mu_{,j} \quad (u_1 = \tau, u_2 = \sigma), \qquad (5.8)$$

предложенное А.Поляковым [40], аналогично действию (5.5). Варьирование производится по g^{ij} и X^μ:

$$\frac{\delta S_P}{\delta g^{ij}} = 0, \quad \frac{\delta S_P}{\delta X^\mu} = 0. \qquad (5.9)$$

Уравнения (5.9)* эквивалентны уравнениям, вытекающим из (5.7). Аналогия с переходом от (5.4) к (5.5) очевидна.

*Они не расшифровываются, так как ниже (п.5.4) приведены выкладки для общего случая.

5.3. p**-браны.** В физике предпланковских расстояний все более важную роль начинают играть *мембраны* (двумерные обобщения струны) и p*-браны* (ее p-мерные обобщения) [39,41]. Их действие задается интегралом*

$$S = -c\int d^m u\sqrt{-g}, \quad g_{ij} = \eta_{\mu\nu}X^\mu_{,i}X^\nu_{,j}, \quad g = \det g_{ij}, \tag{5.10}$$

где X^μ — координаты в n-мерном пространстве, $\mu,\nu = 1,...,n; i,j = 1,...,m$; $\eta_{\mu\nu}(+-...-), c = \text{const}, \ m = p+1$. Варьируя (5.10) по X^μ, несложно получить уравнения движения

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_i(\sqrt{-g}g^{ij}\partial_j X^\mu(u)) = 0. \tag{5.11}$$

И здесь поступают аналогичным образом: переходят от S к $\tilde{S}$:

$$\tilde{S} = -\frac{c}{2}\int d^m u\sqrt{-g}[g^{ij}X^\mu_{,i}X^\nu_{,j} + (2-m)], \quad g = \det g_{ij}. \tag{5.12}$$

Варьирование $\tilde{S}$ по g^{ij} и X^μ дает классические уравнения движения, эквивалентные (5.11):

$$\frac{\delta\tilde{S}}{\delta g^{ij}} = 0, \quad \frac{\delta\tilde{S}}{\delta X^\mu} = 0$$

(детали см. в п.5.4).

5.4. Обобщение. Неизвестно, какие соображения привели В.А.Фока к выбору лагранжиана (5.3). Представляется правдоподобным, что здесь сыграла роль идея пятимерия, когда (5.3) рассматривается как «нерелятивистский предел» 5-мерного лагранжиана (τ — пятый параметр). Замечательно, что эта идея оказывается плодотворной и во всех вышеприведенных случаях, если в дополнение к n-измерениям добавить не один («пятый») параметр, а несколько, т.е. перейти к пространству $n+l$-измерений, в котором движется p-брана.

В самом деле, в дополнение к $X^\mu(u), \mu = 1,...,n$ введем $\xi^a(u)$, $a = n+1,...,n+l$, т.е. p-мерная мембрана движется в $(n+l)$-мерном пространстве. Индуцированная метрика и действие таковы:

$$g^*_{ij} = \xi^a_{,i}\xi^a_{,j} + \eta_{\mu\nu}X^\mu_{,i}X^\nu_{,j} \equiv \tilde{g}_{ij} + g_{ij} \quad i,j = 1,...,m, \tag{5.13}$$

$$S^* = -c\int d^m u\sqrt{-g^*}, \quad g^* = \det g^*_{ij}. \tag{5.14}$$

---

*Первым мембраны с действием (5.10) ($m = 3$, пространство Минковского) рассматривал П.А.М.Дирак в своей теории протяженного электрона [42,43].

Разложим g^* по степеням g_{ij}:

$$g^* = \tilde{g} + \frac{\partial g^*}{\partial \tilde{g}_{ij}} g_{ij} + ... = \tilde{g}(1 + \tilde{g}^{ij} g_{ij} + ...) \quad (dg = g g^{ij} dg_{ij}). \tag{5.15}$$

Тогда имеем приближенное выражение для S^*:

$$S^* \approx -c \int d^m u \sqrt{-\tilde{g}} (1 + \frac{1}{2} \tilde{g}^{ij}(u) \eta_{\mu\nu} X^\mu_{,i} X^\nu_{,j}) \equiv \tilde{S}. \tag{5.16}$$

Варьируя (5.16) по $\tilde{g}^{ij}$ и X^μ, находим

$$\frac{\delta \tilde{S}}{\delta \tilde{g}^{ij}} = \frac{c\sqrt{-\tilde{g}}}{2} [\tilde{g}^{ij}(1 + \frac{1}{2} \tilde{g}_{kl} \eta_{\mu\nu} X^\mu_{,k} X^\nu_{,l}) - \eta_{\mu\nu} X^\mu_{,i} X^\nu_{,j}] = 0, \tag{5.17}$$

$$\frac{\delta \tilde{S}}{\delta X^\mu} = \frac{c}{2} \frac{\partial}{\partial u^i} (\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{ij} \frac{\partial}{\partial u^j} X_\mu) = 0. \tag{5.18}$$

Ищем решения уравнений (5.17) в виде

$$\tilde{g}_{ij} = f(u) \eta_{\mu\nu} X^\mu_{,i} X^\nu_{,j},$$

где $f(u)$ — неизвестная функция. Подставляя это выражение в (5.17), находим

$$\tilde{g}_{ij}(1 + \frac{1}{2} \tilde{g}^{kl} f^{-1} \tilde{g}_{kl}) - f^{-1} \tilde{g}_{ij} = 0,$$

т.е. $f^{-1} = 1 + m/(2f)$ и $f = (2-m)/2$. Таким образом,

$$\tilde{g}_{ij} = \frac{2-m}{2} g_{ij} \tag{5.19}$$

и уравнения (5.18) превращаются в уравнения движения p-браны (5.11), вытекающие из действия (5.10). Подстановка (5.19) в (5.16) дает

$$\tilde{S}|_{\tilde{g}_{ij} = f g_{ij}} = -\frac{c}{2} \left(\frac{2}{2-m} \right)^{\frac{2-m}{2}} \int d^m u \sqrt{-g} [g^{ij} \eta_{\mu\nu} X^\mu_{,i} X^\nu_{,j} + (2-m)], \tag{5.20}$$

что, за исключением не влияющего на уравнения движения множителя перед интегралом, совпадает с действием (5.12) (включая слагаемое $(2-m)$; мы не обсуждаем здесь смысл множителя перед интегралом и другие тонкости). Разумеется, при желании переход к $(n+l)$-мерному пространству может рассматриваться как эвристический прием, хотя за ним, конечно, стоит нечто большее. Итак, идея многомерия, выдвинутая в работах Калуцы, Клейна, Манделя, Фока, оказалась не только живучей, но и плодотворной.

В заключение отметим, что идея инвариантного параметра полезна и в стандартной квантовой теории поля. Так, Швингер [44] воспользовался ею при вычислении эффективного действия в квантовой электродинамике, а в монографии [46] она применялась при изучении модели Блоха—Нордсика.

6. КАЛИБРОВКА ФОКА

В той же работе [33] содержалась еще одна великолепная идея, важность которой становится понятной лишь в настоящее время. Решая уравнение Дирака для электрона во внешнем поле, В.А.Фок использовал калибровку

$$(x^\mu - x_0^\mu)A_\mu(x) = 0, \tag{6.1}$$

где x_0 — фиксированная точка. Более того, в [33] выписано и решение этого уравнения:

$$A_\mu(x) = \int\limits_0^1 s(x^\nu - x_0^\nu)F_{\mu\nu}(x_0 + s(x - x_0))ds. \tag{6.2}$$

Здесь заслуживают внимания два обстоятельства.

6.1. Лемма Пуанкаре. Формула (6.2) являет собой частный случай интегрирования в теории внешних дифференциальных форм [47]. Для m-формы ω имеет место тождество

$$\omega = d(I\omega) + I(d\omega), \tag{6.3}$$

в котором оператор интегрирования I задан равенством

$$I\omega = \sum_{\{i\}}\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\int\limits_0^1 dtt^{m-1}\omega_{i_1\ldots i_m}(tx)x^{i_r}[dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_m}]_r. \tag{6.4}$$

Здесь $\{i\}$ символизирует суммирование по всем $i_k,\ k = 1,...,m$ в пределах $1 \leq i_1 < ... < i_m \leq n$; индекс r у квадратной скобки означает отсутствие дифференциала dx^{i_r}. В случае звездной области замкнутая форма ($d\omega = 0$) является точной ($\omega = d\Omega$); область $S \in R^n$ называется звездной, если из $x \in S$ следует $tx \in S, 0 \leq t \leq 1$. В электродинамике тензор напряженностей $F_{\mu\nu}$ есть 2-форма $F = F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$. Определяя 1-форму $A = A_\mu dx^\mu$, имеем $F = dA$, т.е. F — точная 2-форма. Следовательно, формула В.А.Фока (6.2) есть частный случай формул Пуанкаре (6.3), (6.4) со сдвинутым началом координат [35,48]: $A = IF,\ \ d(IA) = 0$ (последнее равенство фиксирует калибровку). Связь калибровки Фока с теорией внешних дифференциальных форм свидетельствует о ее фундаментальном характере. Об этом же свидетельствует и тот факт, что она применима и в теориях с неабелевой калибровочной группой.

6.2. Связь с другими калибровками. На первый взгляд калибровка (6.1) не кажется естественной: наличие выделенной точки x_0 в пространстве нарушает трансляционную инвариантность теории. В действительности это —

ключ к ее пониманию. Подобно выбору координат, выбор калибровки связан с физикой задачи.

При калибровочном (градиентном) преобразовании $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f$ выбор f в виде [33]

$$f = \int\limits_x^{x_0} A_\mu dx^\mu = \int\limits_0^1 A_\mu(x + s(x_0 - x))(x_0^\mu - x^\mu)ds, \tag{6.5}$$

где интегрирование ведется по прямой, соединяющей точки x_0, x, определяет вектор-потенциал A'_μ, удовлетворяющий условию (6.1). Поле ψ с зарядом e приобретает фактор

$$\psi' = e^{ief}\psi, \tag{6.6}$$

т.е. степень свободы электромагнитного поля f оказалась ассоциированной с полем ψ. Тем самым оно исключается из динамики поля A'_μ. Отсюда следует, что калибровка Фока является естественной в задачах с заряженными частицами: нарушающий трансляционную инвариантность параметр x_0 фиксирует координаты массивного точечного заряда. Калибровка Фока лежит в основе физически важных калибровок.

(i) *Калибровка Максвелла* [35] $\partial\mathbf{A} = 0$ (радиационная или кулоновская калибровка). При переходе к этой калибровке поле ψ преобразуется согласно (6.6), где $f = -\Delta^{-1}\partial\mathbf{A}$, т.е.

$$\psi' = \exp(-ie\Delta^{-1}\partial\mathbf{A})\psi. \tag{6.7}$$

Хорошо известно [49, §80], что экспонента в (6.7) описывает кулоновское поле заряда. Вспоминая выражение для ядра оператора $\Delta^{-1}(x,y) = -(4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)^{-1}$ и интегрируя в показателе экспоненты (6.7) по частям, находим

$$\psi'(x) = \exp\left[ie\int \frac{d^3y}{4\pi}\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{A}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3}\right]\psi(x). \tag{6.8}$$

Видно, что показатель экспоненты отвечает калибровке Фока (6.1) в случае, когда контур интегрирования в (6.5) берется при $t = t_0$. Это становится еще более очевидным, если принять во внимание, что описывающий кулоновское поле фактор в (6.7) может быть представлен в виде бесконечного произведения линейных экспонент с показателями типа (6.5), в которых интегрирование ведется по прямым из точки, где расположен заряд, до бесконечности [38, 50, 51]:

$$\prod_{i,j}^N \exp\left[-ie\int\limits_{-\infty}^x A_\mu(y_{ij})dy_{ij}^\mu\right] \to \exp(-ie\Delta^{-1}\partial\mathbf{A}), \quad N\to\infty. \tag{6.9}$$

Индексы i, j нумеруют площадки, покрывающие единичную сферу, через которые проходят прямые (заряд расположен в центре сферы, при $N \to \infty$ площадки стягиваются в точки).

(ii) *Другие калибровки.* При изучении проблемы инфракрасных расходимостей переходят к полям ψ', в которых экспоненциальный фактор имеет вид [52]

$$\exp\left(ie\int_0^\infty dt\int d^3x A_\mu^Q J_\mu\right) \equiv \exp(ie\chi), \tag{6.10}$$

где $J_\mu = (ep_\mu/E_p)\delta(\mathbf{x} - t\mathbf{p}/E_p)$ есть классический ток ($E_p^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$) и A_μ^Q — оператор:

$$A_\mu^Q(x) = \int\limits_{|\mathbf{q}|<Q} \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2|\mathbf{q}|}[c_\mu(q)e^{-iqx} + c_\mu^+(q)e^{iqx}]. \tag{6.11}$$

Итак, здесь с полем ψ ассоциированы мягкие фотоны с энергией $\omega < Q$. Тем самым они изымаются из динамики электромагнитного поля. S-матрица, описывающая рассеяние квантов поля $\psi' = \exp(ie\chi)\psi$, свободна от инфракрасных расходимостей [52,53]. Показатель экспоненты в (6.10) можно переписать в виде

$$\chi = \int_0^\infty A_\mu^Q(n_p t)n_p^\mu dt = \int\limits_{n_p} A_\mu^Q dx^\mu, \tag{6.12}$$

где $n_p = p/E_p = dx/dt,\ p^2 = m^2$, а в последнем выражении интегрируется по прямой, задаваемой вектором n_p. По существу, используется калибровка Фока для поля A_μ^Q или, если угодно, модифицированная калибровка Фока.

Но техника мягких фотонов применима и в случае излучения жестких фотонов ($\omega > m$), если энергия частицы $E_p \to \infty$. В этом случае $n_p^2 = m^2/E_p^2 \to 0,\ |\mathbf{p}| \to \infty$, и мы приходим к калибровке светового конуса $A_\mu^Q n^\mu = 0,\ n^2 = 0$ ($E_p \gg Q \gg m$).

Таким образом, калибровка Фока (6.1) удобна в задачах с массивными точечными частицами или с частицами высоких энергий ($E_p \gg m$), т.е. тогда, когда можно пренебречь реакцией излучения на частицу.

Все эти особенности калибровки Фока, важные сами по себе, становятся важными вдвойне, если учесть, что равенства (6.1), (6.2) сохраняются и в неабелевых теориях. Ее применение (возможно, в модифицированном виде) позволяет описывать рассеяние адронов высоких энергий.

7. ОДНА ИЗ ПОСЛЕДНИХ ПУБЛИКАЦИЙ В.А.ФОКА

В 1971 г. В.А.Фок опубликовал краткую заметку «Возможное обобщение понятия физического пространства» [54]. Суть ее сводилась к следующему. Понятие физического пространства тесно связано со свойствами движения физических тел, поскольку только по движению тел мы судим о свойствах пространства. Например, размерность пространства отождествляется с числом степеней свободы материальной точки. В квантовой физике можно предположить, что простейший физический объект (материальная точка) обладает свойствами электрона. Но у электрона помимо трех степеней свободы материальной точки имеется еще одна — спин. Соответствующая независимая переменная способна принимать лишь два значения. То, что нерелятивистский электрон характеризуется лишь координатой $\mathbf{x}$ и спиновой переменной $\sigma = \pm 1$ (в единицах $\hbar/2$), подчеркивает и тот факт, что волновая функция антиперестановочна по отношению ко всем четырем переменным:

$$\psi(...\mathbf{x}_j, \sigma_j; ...\mathbf{x}_k, \sigma_k; ...) = -\psi(...\mathbf{x}_k \sigma_k; ...\mathbf{x}_j \sigma_j; ...). \tag{7.1}$$

После этого В.А.Фок замечает: «Применяя к данному случаю (молчаливо допускаемое) классическое предположение, что физическое пространство определяется совокупностью переменных, описывающих степени свободы простейшего физического тела (именуемого обычно материальной точкой), мы приходим к заключению, что, если мы примем электрон за простейшее физическое тело, мы должны допустить, что точка в физическом пространстве определяется совокупностью четырех переменных (x, y, z, σ). Это ведет к обобщению физического пространства. Определенное выше обобщенное физическое пространство может быть названо спинорным пространством». И далее: «Таким образом, введение спиновой переменной, допускающей конструирование спиноров (allowing the costruction of spinors), составляет важный шаг в изучении свойств пространства и может рассматриваться как обобщение понятия физического пространства».

К сказанному можно сделать два замечания.

1. Осталось сделать лишь шаг, чтобы прийти к понятию суперпространства — наиболее необычному и важному понятию современной физики, появившемуся, кстати, тогда же [55,56]. Именно, осталось допустить, что новая спиновая переменная (обозначим ее θ) принимает значения из грассмановской алгебры и преобразуется как спинор. Тогда поля должны зависеть от двух переменных (x, θ), т.е. мы приходим к понятию суперполя $\Phi(x, \theta)$ [57].

2. Работа [54] предвосхитила идеи так называемой *некоммутативной геометрии* [58]. Это интенсивно развивающееся обобщение классической геометрии рассматривает, в частности, пространства, состоящие из нескольких экземпляров евклидовых, или римановых, или расслоенных пространств. Последние оказались полезными при формулировании, например, модели

Вайнберга—Салама [59], модели «Великого объединения» [60]. При этом достигается геометризация поля Хиггса. Общая схема такова.

Рассмотрим пространство, состоящее из двух листов — пространств Минковского. Допустим, что имеется локальная калибровочная симметрия. Тогда для нетривиального геометрического объекта $\psi(x,i)$, определенного на каждом из листов ($i=1,2$; поля $\psi(x,1)$ и $\psi(x,2)$ могут иметь разную геометрическую природу, скажем, изоскаляр и изоспинор), можно задать операции параллельного переноса.

1. Параллельный перенос в пределах одного листа вдоль пути $C(2,1) \equiv \equiv C(x_2,x_1)$:

$$\tilde{\psi}(x_2,i) = P(C(2,1);i)\psi(x_1,i). \tag{7.2}$$

2. Параллельный перенос с одного листа на другой в данной точке x:

$$\tilde{\psi}(x,i) = H(x,i,j)\psi(x,j), \quad i \neq j, \quad H(x,i,j) = H^{+}(x,j,i). \tag{7.3}$$

В первом случае можно рассмотреть перенос в бесконечно близкую точку:

$$P(x+dx,x;i) \approx 1 + iA_\mu(x,i)dx^\mu, \tag{7.4}$$

где A_μ — связность, элемент алгебры Ли калибровочной группы. При калибровочных преобразованиях поля меняются следующим образом:

$$\psi'(x,i) = U(x,i)\psi(x,i), \quad P'(C(2,1);i) = U(x_2,i)P(C(2,1);i)U^{-1}(x_1,i), \tag{7.5}$$

$$A'_\mu(x,i) = U(x,i)A_\mu(x,i)U^{-1}(x,i) + iU(x,i)\partial_\mu U^{-1}(x,i), \tag{7.6}$$

$$H'(x,i,j) = U(x,i)H(x,i,j)U^{-1}(x,j). \tag{7.7}$$

Полагая $H(x,i,j) = 1 + B(x,i,j)$, получаем

$$B'(x,i,j) = U(x,i)B(x,i,j)U^{-1}(x,j) + U(x,i)(U^{-1}(x,j) - U^{-1}(x,i)) \tag{7.8}$$

в полной аналогии с преобразованием (7.6). Следовательно, $B(x,i,j)$ играет роль связности, задающей параллельный перенос с одного листа на другой. Теперь можно вычислять «тензоры кривизн». Возможны контуры трех типов.

1. Инфинитезимальные замкнутые контуры на каждом из листов; тензор кривизны дается стандартным выражением $\hat{F}_{\mu\nu}(x) = -i[\hat{D}_\mu(x,i),\hat{D}_\nu(x,i)]$, где $\hat{D}_\mu(x,i) = \partial_\mu + i\hat{A}_\mu(x,i)$ — ковариантная производная.

2. Четырехугольные контуры с инфинитезимальными переносами на каждом из листов и двумя переносами с одного листа на другой в точках x и $x+dx$. Это дает в качестве тензора кривизны $F_{\mu H} = \hat{D}_\mu H(x,i,j)$.

3. Наконец, «двуугольный» контур в данной точке x: $1 \to 2 \to 1$ дает $F_{HH} = 1 - HH^{+}$ ($H(x,i,i) = 1$, подробнее см. [59,60]).

Полагая лагранжиан линейной комбинацией квадратов трех типов кривизн, получаем лагранжиан бозонной части модели Хиггса. Правильное выражение получается и для фермионной части [59,60]. Пространство Фока с двумя листами $(x,+),(x,-)$ оказывается полезным и при формулировании сверхпроводимости в рамках идей некоммутативной геометрии [61]. Таким образом, и здесь идеи В.А.Фока предвосхитили современное развитие и геометрии, и физики элементарных частиц.

8. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. В работе [1] содержалась еще одна в высшей степени важная идея: при параллельном переносе спинора в римановом пространстве автоматически появлялось векторное поле A_μ, которое отождествлялось с электромагнитным полем. Оно аддитивно входило в связность, определяющую правило параллельного переноса спинора, и полагалось пропорциональным единичной матрице Дирака. При этом оказывалось, что тензор напряженности электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ комбинируется с тензором кривизны Риччи $R_{\mu\nu}$, т.е. также может трактоваться как тензор кривизны. Тем самым достигалась геометризация электромагнитного поля. Это на много лет предвосхитило современную трактовку поля A_μ как связности в расслоенном (зарядовом) пространстве.

Более того, в [1] содержался намек на возможность введения полей Янга—Миллса. В.А.Фок писал ([2], с.419): «Если ограничиться четырехрядными матрицами [Дирака], то коммутативность [поля A_μ] со всеми α-матрицами означает пропорциональность [A_μ] единичной матрице. Если же рассматривать матрицы с бо́льшим числом строк и столбцов, то матрицы Φ_l' [т.е. A_μ] не будут обязательно пропорциональными единичной матрице». После слова «столбцов» — сноска: «Такие матрицы могли бы возникнуть при некоторых обобщениях уравнения Дирака (например, на случай задачи двух тел)».

В этой же работе было подчеркнуто, что «... в отличие от эйнштейновского подхода потенциалы φ_l [т.е. A_μ] играют самостоятельную роль в геометрической картине мира и не обязаны быть функциями коэффициентов γ_{ikl} [символов Риччи, т.е. связности]». Для того времени — весьма ответственное заявление.

2. Г.Вейль во втором издании своей книги «Теория групп и квантовая механика» [62] назвал уравнение (3.2) (в стационарном варианте) «уравнением де Бройля». Это вызвало неудовольствие Шредингера. В письме к Вейлю от 1 апреля 1931 г., обосновывая свой приоритет, он, в частности, писал: «Я никогда не возражал против того, что это уравнение сейчас обычно связывается с именем Гордона, потому что это очень удобно для его различения (as a distinction)» ([9], с.1025). Похоже, этот несколько курьезный аргумент отражает мнение физической общественности того времени.

3. Теория 5-мерия пережила взлеты и падения. В 1927 г. А.Эйнштейн счел ее успешной (см. разд.4). Более того, в том же году он опубликовал на эту тему две заметки [63]. Но здесь начинаются загадки. В замечании к обоим сообщениям при корректуре читаем ([64], с.197): «Г.Мандель сообщил мне, что изложенные здесь результаты не новы и содержатся в работах Клейна [Z. Phys., 1926, **37**, 12, 895]. Ср. также работу В.А.Фока [Z. Phys., 1926, **39**, 226]». Удивительно то, что в письме к П.Эренфесту от 3 сентября 1926 г. Эйнштейн писал ([29], с.318): «Статья Клейна очень изящна и убедительна...». После появления уравнения Дирака Клейн разочаровался в 5-мерной теории. Он вспоминал ([9], с.1029): «В то время я полагал, что не было причин для этой пятимерной теории, и я ее оставил. Я вспоминаю, что весной 28 года после моего возвращения из Кембриджа Паули был в Копенгагене и обедал с нами. У нас была бутылка вина, и мы выпили за кончину пятого измерения».

В настоящее время ситуация радикально изменилась. Б.Де Витт показал ([65], упр.77), что в рамках многомерной теории гравитацию можно объединить не только с электромагнитным полем, но и с полями Янга—Миллса (также впервые обсуждавшимися О.Клейном [66]). Последние лежат в основе современной физики фундаментальных полей. Идея многомерия лежит и в основе программы суперструн [41] — наиболее перспективной из имеющихся единых теорий.

Отметим, впрочем, что модель типа «Великого объединения» [67–69] и модель типа Калуцы—Клейна—Фока при ее прямолинейном обобщении не вполне согласуются друг с другом. Если в первой число калибровочных векторных полей равно размерности калибровочной группы, то во второй оно равно размерности дополнительного подпространства (т.е. $n-4$), группа симметрии которого имеет размерность $(n-4)(n-5)/2$. Приведенные числа совпадают лишь при $n=7$ (в абелевом случае теории согласуются при $n=5$).

4. Лагранжианы (5.3), (5.4) встречались и ранее [22]; более того, отмечалось, что соответствующий (5.4) гамильтониан равен нулю. Однако в дальнейшем эти идеи Кударом не развивались.

5. Во время научной командировки в Германию (1927—1928 гг.) на семинаре в Геттингене В.А.Фок доложил работу о рассеянии на кулоновском центре. Было найдено точное решение соответствующего уравнения Шредингера в параболических координатах. После семинара В.Гордон заявил, что им выполнена точно такая работа и статья уже отправлена в печать ([69], поступила 4 марта). Фок решил свою работу не публиковать. Позднее выяснилось, что упомянутая статья была послана в журнал после семинара, а задача решалась в сферических координатах. В том же году была опубликована работа [71] (поступила 22 сентября) с решением в параболических координатах.

Из писем Фока [72]: «8.02.1928 г. ... решил строго задачу, о которой Борн упоминал на лекции. Получилось другое, чем у него, и я с ним ожесточенно спорил. Задача такая: Резерфордовское рассеяние по новой квантовой механике». И далее: «26.02.1928 г. ... Долго возился с выводом формул для задачи о столкновении α-частиц с атомом, о которой я писал. Но физическая часть задачи, т.е. рецепт получения из шредингеровской волны числа частиц, рассеянных в данном направлении, мне до сих пор не ясна. Все говорят поразному, а Борн говорит то так, то этак». Трудность заключалась в том, что кулоновский потенциал убывает слишком медленно, поэтому падающую и рассеянную волны нельзя считать невозмущенными на сколь угодно больших расстояниях. Прошли десятилетия, прежде чем проблема построения оператора рассеяния для потенциала Кулона получила удовлетворительное решение [52,73]. Решение В.А.Фока приведено в его книге [74].

6. В работе Фока [75], выполненной в Геттингене (1928 г., поступила 12 января), рассмотрен осциллятор в магнитном поле. Выписано решение, найдены уровни энергии. Ландау два года спустя [76] рассматривал частный случай — движение свободной частицы в магнитном поле, причем был найден лишь спектр энергии. Ни в [76], ни в учебниках на работу [75] не ссылаются. На нее обратили внимание только в последнее время при изучении наноструктур в твердом теле (см., например, Труды 38-й Летней школы шотландских университетов ([77], с.31, 251, 287)). В результате текст иногда выглядит так. В лекции В.Хансена ([77], с.287) после формулы для энергии из работы Фока [75] $E_{n,l} = \hbar(2n+|l|+1)(\Omega^2+\frac{1}{4}\omega_c^2)^{1/2}+\frac{1}{2}\hbar l\omega_c$ (Ω и ω_c — осцилляторная и ларморовская частоты, l — орбитальный момент, $n=0,1,...$) читаем: «При конечных полях [т.е. при переходе от $\omega_c=0$ к конечным ω_c] уровни энергии меняются так, что образуют уровни, близкие к энергиям Ландау ... в пределе сильных полей [$\omega_c\to\infty$]». Комментарии здесь излишни. Конечно, Фок не мог предположить, что переход в формуле для $E_{n,l}$ к пределу $\Omega\to 0$ или к пределу сильных полей может вызвать затруднения.

7. В работе [78] помимо фундаментального результата — получения уравнений движения из уравнений Эйнштейна — был сделан вывод о выделенности гармонических координат (термин предложен Фоком). Здесь прежде всего обращает на себя внимание реалистичность постановки задачи. В отличие от работы [79], в которой изучалось движение точечных частиц (δ-образных особенностей), Фоком решалась задача движения протяженных тел. Материальная точка — объект, чуждый теории тяготения; именно это обстоятельство побудило Дирака заняться теорией протяженного электрона [42,43]. Он считал [43], что «с физической точки зрения поле Эйнштейна» не может иметь «...точечных сингулярностей. Каждая частица должна иметь конечный размер, не меньший радиуса Шварцшильда».

В современной монографической литературе выделенность гармонических координат, породившую столько споров, полагают чем-то само собой разумеющимся, иногда даже не ссылаясь на Фока (см., например, ([80], с.177), где просто констатируется: «Особенно удобны условия гармоничности координат»).

Другой важный вывод, сделанный В.А.Фоком [81], касается понятия «относительность» в общей теории относительности (ОТО) и специальной теории относительности (СТО). Фок обратил внимание на то, что слово «относительность» имеет совершенно разный смысл в этих теориях. На современном языке указанное различие формулируется просто: инвариантность теории относительно преобразований Лоренца ведет к существованию законов сохранения, инвариантность же относительно общековариантных преобразований — к связям. Подчеркивание В.А.Фоком этого очевидного факта вызывало отрицательную, иногда прямо-таки болезненную реакцию некоторых физиков (см. ([82], с.192, 194): «Все известные физики в Советском Союзе ... были против экспериментов(!) Фока. ... Все физики, чьи имена хоть что-то значат в мире, единодушно выступили в защиту(?) Эйнштейна»). Однако научные истины не устанавливают голосованием. Конец спорам положил Е.Вигнер. В Нобелевской лекции он подчеркнул ([83], с.52): «... я, разделяя взгляды Фока, не считаю преобразования криволинейных координат общей теории относительности преобразованиями симметрии...». Вигнер называл локальные калибровочные преобразования (как в ОТО) *динамическими*, а глобальные преобразования (как в СТО) — *геометрическими*.

8. Вывод соотношения (2.2) для магнитного поля и получение минимального значения (2.4) для магнитного потока («флаксон Йордана—Фока») примерно из тех же соображений продолжался спустя десятилетия (см., например, [84]).

9. Судьбы обсуждавшихся выше работ оказались большей частью не очень счастливыми. Разумеется, в течение разбираемого десятилетия В.А. Фок опубликовал и другие работы, которые получили всеобщее признание: метод Хартри—Фока, пространство Фока, метод функционалов Фока, представление Фока, симметрия атома водорода по Фоку, уравнение Дирака в пространстве Римана и др. Но именно поэтому имеет смысл вспомнить о работах, вошедших в обиход современной физики, но утративших, если можно так выразиться, «родовое имя».

10. Но даже с хорошо известными работами происходят удивительные вещи. Поистине анекдотическая история связана с калибровкой Фока. Она неоднократно переоткрывалась и каждый раз получала новое имя.

Швингер в своей книге ([85], с.342) дал ее подробное изложение, не сославшись на Фока. В предисловии он отметил: «При написании книги я не старался давать по ходу изложения ... исторические комментарии со ссылками на то, кто, что и когда сделал первым». Для этого помимо причины личного свойства «... имеется и более веская причина. ... если бы развитие нового подхода сопровождалось постоянными ссылками на аппарат, который предполагается устаревшим, это слишком рассеивало бы внимание».(!). После этого калибровка (6.1) стала именоваться калибровкой Фока—Швингера [86], Швингера—Фока и даже калибровкой Швингера ([87], с.115). Далее, в работе [88] она фигурирует под именем «калибровки фиксированной точки», а в статье [48] условие (6.1) при $x_0 = 0$ называлось «калибровкой Пуанкаре». Однако она была переоткрыта еще раньше в статьях [89,90], так что в обзоре [91] именуется «мультиполярной калибровкой», а работы [89,90] квалифицируются как пионерские.

Впрочем, ожидать справедливости в вопросах приоритетов и связанной с ними терминологии (т.е. с общепринятым признанием этих приоритетов) — дело, по-видимому, безнадежное. Надо полагать, эти проблемы существовали всегда. Рассказывают следующую историю. Как известно, И.Бернулли учил маркиза Г.Лопиталя исчислению бесконечно малых. В частности, он открыл ему правило разрешения неопределенностей. Лопиталь поделился своими знаниями с другими математиками, после чего это правило стали связывать с его именем («правило Лопиталя»). Бернулли был недоволен. Он разослал письма, в которых указывал на свой приоритет и отмечал, что это не единственный способ решения задачи, что ему известно еще и другое правило, каковое он и воспроизводил на страницах своих посланий. В результате это новое правило стали именовать «вторым правилом Лопиталя».

Автор глубоко благодарен В.В.Нестеренко и В.Ф.Осипову за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Fock V.** — Zs. f. Phys., 1929, v.57, p.261. Перевод: ([2], с.415).
2. **Фок В.А.** — В кн: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979.
3. **Fierz M.** — Zs. f. Phys., 1937, v.104, p.553.
4. **Dimopoulos S., Susskind L.** — Nucl. Phys., 1979, v.B155, p.237.
5. **Jordan P., Fock V.** — Zs. f. Phys., 1930, v.66, p.206.
6. **Шмидт В.В.** — Введение в физику сверхпроводников. М.: Наука, 1982.
7. **Dirac P.A.M.** — Proc. Roy. Soc., 1931, v.A133, p.60. Перевод: [8].
8. Монополь Дирака. — Сб.: Пер. с англ. под ред. Б.М.Болотовского и Ю.Д.Усачева. М.: Мир, 1970.
9. **Kragh H.** — Am. J. Phys., 1984, v.52, p.1024.
10. **Schroedinger E.** — Ann. d. Phys., 1926, v.79, p.361.
11. **Klein O.** — Zs. f. Phys., 1926, v.37, p.895.
12. **Fock V.** — Zs. f. Phys., 1926, v.38, p.242.
13. **Fock V.** — Zs. f. Phys., 1926, v.39, p.226.
14. **Gordon W.** — Zs. f. Phys., 1926, v.40, p.117.
15. **Pauli W., Weisskopf V.** — Helv. Phys. Acta, 1934, v.7, p.136.
16. **Хоффман Д.** — Эрвин Шредингер. М.: Мир, 1987.
17. **Schroedinger E.** — Ann. d. Phys., 1926, v.81, p.109.

18. **de Broglie L.** — Comt. Rend., 1925, v.180, p.498.

19. **de Broglie L.** — Comt. Rend., 1926, v.183, p.272.

20. **Dirac P.A.M.** — Proc. Roy. Soc., 1926, v.A112, p.661.

21. **Dirac P.A.M.** — Proc. Cambr. Phil. Soc., 1926, v.23, p.500.

22. **Kudar J.** — Ann. d. Phys., 1926, v.81, p.632.

23. **de Donder Th., Van den Dungen Fr.** — Comt. Rend., 1926, v.183, p.22.

24. **de Donder Th.** — Comt. Rend., 1926, v.183, p.594.

25. **Guth E.** — Zs. f. Phys., 1927, v.41, p.235.

26. Archive for the History of Quantum Physics.

27. **Pauli W.** — Wissenschaftlicher Briefwechsel. Eds. Hermann A., Meyenn K. and Weisskopf V.F., N.Y., Springer, 1979, v.I.

28. **Mandel H.** — Zs. f. Phys., 1927, v.39, p.136.

29. **Пайс А.** — Научная деятельность и жизнь Альберта Эйнштейна. Пер. с англ. под ред. А.А.Логунова. М.: Наука, 1989.

30. **Weyl H.** — Sitzungsber. d. Berl. Akad., 1918, p.465.

31. **Pauli W., Heisenberg W.** — Zs. f. Phys., 1930, v.59, p.168. Перевод: [32].

32. **Паули В.** — Труды по квантовой теории. Статьи 1928—1958. М.: Наука, 1977.

33. **Фок В.А.** — Изв. АН СССР, ОМЕН, 1937, с.551; Sow. Phys., 1937, v.12, p.404.

34. **Фок В.А.** — Работы по квантовой теории поля. Изд-во Ленингр. ун-та, 1957.

35. **Прохоров Л.В.** — ЭЧАЯ, 1996, т. 27, с.1399.

36. **Bergmann P.G.** — Phys. Rev., 1949, v.75, p.680.

37. **Dirac P.A.M.** — Can. Journ. Math., 1950, v.2, p.129.

38. **Прохоров Л.В., Шабанов С.В.** — Гамильтонова механика калибровочных систем. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997.

39. **Барбашов Б.М., Нестеренко В.В.** — Модель релятивистской струны в физике адронов. М.: Энергоатомиздат, 1987.

40. **Polyakov A.M.** – Phys. Lett., 1981, v.B103, p.207.

41. **Грин М., Шварц Дж., Виттен Э.** — Теория суперструн, т. 1,2. М.: Мир, 1990.

42. **Dirac P.A.M.** — Proc. Roy. Soc., 1962, v.A268, p.57.

43. **Dirac P.A.M.** — Proc. Roy. Soc., 1962, v.A270, p.354.

44. **Schwinger J.** — Phys. Rev., 1951, v.82, p.664. Перевод: ([45], с.254).

45. Новейшее развитие квантовой электродинамики. Сб. статей под ред. Д.Д.Иваненко, пер. с англ. А.М.Бродского. М.: ИЛ, 1954.

46. **Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.** — Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1985, 4-е издание.

47. **Картан А.** — Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. Пер. с фр. М.: Мир, 1971.

48. **Brittin W.E., Smythe W.R., Wyss W.** — Am. J. Phys., 1982, v.50, p.693.

49. **Дирак П.А.М.** — Принципы квантовой механики. М.: Физматгиз, 1960; Наука, 1974, 1979.

50. **Прохоров Л.В.** — Вестн. ЛГУ, 1990, No.18, с.3.

51. **Прохоров Л.В.** — ЭЧАЯ, 1994, т.25, с.559.
52. **Прохоров Л.В.** — УФН, 1999, т.169, с.1199.
53. **Murota T.** — Progr. Theor. Phys., 1960, v.24, p.1109.
54. **Fock V.** — Phys. Norveg., 1971, v.5, p.149.
55. **Гольфанд Ю.А., Лихтман Е.П.** — Письма в ЖЭТФ, 1971, т.13, с.452.
56. **Волков Д.В., Акулов В.П.** — Письма в ЖЭТФ, 1972, т.16, с.621.
57. **Весс Ю., Беггер Дж.** — Суперсимметрия и супергравитация. Пер. с англ. под ред. В.И. Огиевецкого. М.: Мир, 1986.
58. **Connes A.** — Noncommutative Geometry. Acad. Press, London, 1994.
59. **Konisi G., Saito T.** — Progr. Theor. Phys., 1996, v.95, p.657.
60. **Kubo M., Maki Z., Nakahara M., Saito T.** — Progr. Theor. Phys., 1998, v.100, p.165.
61. **Пронин Н.А., Прохоров Л.В.** — Теория сверхпроводимости и некоммутативная геометрия. Вестник СПбГУ (направлено в печать).
62. **Weyl H.** — Gruppentheorie und Quantenmechanik. 2 Auflage. Leipzig, 1931.
63. **Einstein A.** — Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 1927, v.60, p.23,26. Перевод: ([64], с.190,193).
64. **Эйнштейн А.** — Собрание научных трудов, т.2. М.: Наука, 1966.
65. **Девитт Б.С.** — Динамическая теория групп и полей. Пер. с англ. под ред. Г.А.Вилковыского. М.: Наука, 1987.
66. **Klein O.** — New Theories in Physics. Conference in Warsaw. 1938, p.66.
67. **Прохоров Л.В.** — Письма в ЖЭТФ, 1972, т.16, с.561.
68. **Georgi H., Glashow S.L.** — Phys. Rev. Lett., 1974, v.32, p.438.
69. **Прохоров Л.В.** — Письма в ЖЭТФ, 1997, т.66, с.293.
70. **Gordon W.** — Zs. f. Phys., 1928, v.48, p.180.
71. **Temple G.** — Proc. Roy. Soc., 1928, v.A121, p.673.
72. **Владимирова Л.Ф.** — В.А. Фок. Жизнь и творчество (готовится к печати).
73. **Dollard J.** — J. Math. Phys., 1964, v.5, p.729.
74. **Фок В.А.** — Начала квантовой механики. Л.: КУБУЧ, 1932, с.251; изд. 2-ое, доп. М.: Наука, 1976, с.229.
75. **Fock V.** — Zs. f. Phys., 1928, v.47, p.446.
76. **Landau L.** — Zs. f. Phys., 1930, v.64, p.629.
77. Physics of Nanostructures, ed. by J.H. Davies, A.R. Long., London, 1992.
78. **Фок В.А.** — ЖЭТФ, 1939, т.9, с.375.
79. **Einstein A., Infeld L., Hoffmann B.** — Ann. Math., 1938, v.39, p.65.
80. **Вейнберг С.** — Гравитация и космология. М.: Мир, 1975. Пер. с англ. под ред. Я.А. Смородинского. М.: Мир, 1975.
81. **Фок В.А.** — Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гостехиздат, 1955.
82. **Инфельд Л.** — Новый мир, 1965, No.9, с.169.
83. **Вигнер Е.** — Этюды о симметрии. Пер. с англ. под ред. Я.А. Смородинского. М.: Мир, 1971.
84. **Crawford M.** — Am. J. Phys., 1982, v.50, p.514.

85. **Швингер Ю.** — Частицы. Источники. Поля. Пер. с англ. под. ред. А.М. Бродского. М.: Мир, 1973.

86. **Leibbrandt G.** — Rev. Mod. Phys., 1987, v.59, p.1067.

87. **Радюшкин А.В.** — ЭЧАЯ, 1983, т.14, с.58.

88. **Dubovikov M.S., Smilga A.V.** — Nucl. Phys., 1981, v.B185, p.109.

89. **Power E.A., Zienau S.** — Nuovo Cim., 1957, v.6, p.7.

90. **Power E.A., Zienau S.** — Phil. Trans. Roy. Soc., London, 1959, v.A251, p.427.

91. **Yang K.-H.** — Ann. Phys., 1988, v.186, p.209.