

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ПАРНЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ В КОНЕЧНЫХ ФЕРМИ-СИСТЕМАХ

В.И.Навроцка

Институт теоретической физики,* Университет, Вроцлав, Польша

Р.Г.Назмитдинов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

1. ВВЕДЕНИЕ	940
2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ПРОЯВЛЕНИЯ ПАРНЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ ЯДРАХ	943
3. МЕТОД СРЕДНЕГО ПОЛЯ ДЛЯ ВРАЩАЮЩИХСЯ ЯДЕР	946
4. ПЕРЕДАЧА ДВУХ НУКЛОНОВ, КОЛЛЕКТИВНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ И ВРАЩЕНИЕ	953
5. РОЛЬ КВАНТОВЫХ ФЛУКТУАЦИЙ ПРИ АНАЛИЗЕ ПАРНЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ ЯДРАХ	956
6. ТОЧНО РЕШАЕМАЯ МОДЕЛЬ ПАРНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ДЛЯ КОНЕЧНЫХ ФЕРМИ-СИСТЕМ	963
7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ	968
8. ПРИЛОЖЕНИЕ	970
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	973

*Institute of Theoretical Physics, University of Wrocław, pl.Maksa Borna 9, 50-205 Wrocław, Poland

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ПАРНЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ В КОНЕЧНЫХ ФЕРМИ-СИСТЕМАХ

В.И.Навроцка

Институт теоретической физики,* Университет, Вроцлав, Польша

Р.Г.Назмитдинов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В обзоре рассмотрены эффекты парных корреляций сверхпроводящего типа во вращающихся ядрах и металлических зернах. Обсуждаются основные теоретические подходы, используемые для описания этих эффектов во вращающихся ядрах. Продемонстрирована важная роль квантовых флуктуаций при анализе явления сверхтекучести в данных системах. Рассмотрена точно решаемая модель парных корреляций сверхпроводящего типа, успешно применяемая как для атомных ядер, так и для металлических зерен.

Effects of pairing correlations in rotating nuclei and metallic grains are considered. Main theoretical approaches describing these effects in rotating nuclei are reviewed. The important role of quantal fluctuations for the description of the superfluidity is demonstrated. The exact model of pairing correlations, which has been successfully employed for the description of the superfluidity in atomic nuclei and metallic grains, is discussed.

1. ВВЕДЕНИЕ

Микроскопическая теория сверхпроводимости, сформулированная в конце пятидесятих годов [1, 2], блестящим образом продемонстрировала, насколько фундаментальную роль играют квантовые эффекты при объяснении явлений, происходящих в макроскопических системах, металлических сверхпроводниках. Важную роль при этом сыграли работы Фрелиха [3], который предположил, что сверхпроводимость определяется взаимодействием электронов с фононами решетки. Однако принципиальным моментом в развитии теории сверхпроводимости стала идея о существовании парного притягивающего взаимодействия между электронами, находящимися вблизи поверхности Ферми [1]. При этом слабое притяжение между электронами возникает

*Institute of Theoretical Physics, University of Wroclaw, pl.Maksa Borna 9, 50-205 Wroclaw, Poland

как результат интерференции электрон-фононного и кулоновского взаимодействий [2]. Исходя из представления о том, что электроны с противоположными импульсами и спинами образуют связанные пары, математическая проблема теории сверхпроводимости сводится к отысканию парных функций, содержащих параметры, которые можно определить из вариационного принципа. Изложение последовательной микроскопической теории сверхпроводимости можно найти в монографии [4].

Вопрос о возможности парных корреляций сверхпроводящего типа в атомных ядрах впервые одновременно обсуждался в работах [5, 6]. Боголюбов, основываясь на своем подходе к проблеме сверхпроводимости [2], сформулировал в работе [5] вариационный метод для изучения сверхтекучести ядерной материи, обобщив метод Фока [7]. В настоящее время этот подход является одним из наиболее эффективных микроскопических методов исследования структуры ядра. Авторы работы [6], исходя из существования энергетической щели между основным состоянием и первым возбужденным состоянием неколлективной природы в спектрах атомных ядер, провели аналогию с электронным спектром сверхпроводящих металлов. В соответствии с теорией сверхпроводимости [1, 2] они высказали предположение о возможности существования парного притягивающего взаимодействия и между нуклонами в атомных ядрах. Среди возможных проявлений этого взаимодействия были указаны: значительное отклонение моментов инерции от твердотельного значения и различие масс четно-четных и нечетных ядер. Отмечалось также, что подобные корреляции не важны для свойств бесконечной ядерной материи, однако они будут играть заметную роль в спектре низколежащих возбуждений атомных ядер. Применяя вариационный метод Боголюбова, Соловьев в работе [8] впервые продемонстрировал существование энергетической щели при наличии парного взаимодействия сверхпроводящего типа в спектре системы протонов (или нейтронов), находящихся на одной и той же оболочке с равными и противоположными значениями магнитного квантового числа m , доказав выгодность сверхтекучего состояния ядра по сравнению с состоянием полностью вырожденного ферми-газа (нормальное состояние). Беляев, используя каноническое преобразование Боголюбова, в работе [9] развил теорию парных корреляций сверхпроводящего типа в ядре, продемонстрировав их влияние на равновесные параметры деформации, инерционные параметры и моменты инерции четно-четных ядер, а также на низколежащие вибрационные состояния в сферических ядрах.

Несмотря на естественность гипотезы о существовании парных корреляций сверхпроводящего типа в ядре, их микроскопическая природа пока не получила удовлетворительного объяснения. В атомном ядре отсутствует своя «ионная» подсистема, колеблющаяся вокруг положения равновесия, как в случае металлического сверхпроводника. Кроме того, периодические крайние условия, используемые при формулировке теории сверхпроводимости в

металлах, необходимо заменить краевыми условиями на поверхности ядра, которая сама является динамическим объектом. Поэтому для атомного ядра, где теория ядерных сил еще не построена, предполагается, что ядерные силы формируют эффективное среднее поле, где парные корреляции сверхпроводящего типа, как правило, включены явным образом. Такой подход основан на решении уравнений Хартри—Фока—Боголюбова (ХФБ) [5] для некоторого эффективного взаимодействия или решении уравнений Бардина—Купера—Шриффера (БКШ) [1] для феноменологического одночастичного потенциала и остаточного притягивающего парного взаимодействия между нуклонами, находящимися в состояниях, сопряженных относительно операции обращения времени.

Использование феноменологических потенциалов типа Нильссона и Вудса—Саксона в сочетании с постоянным притягивающим парным взаимодействием позволило успешно интерпретировать разнообразные экспериментальные данные (см. [10–13]). Кажется удивительным, например, что, используя только одночастичный спектр любого из вышеназванных феноменологических потенциалов для расчета флуктуирующей части полной энергии ядра по методу Струтинского (метод оболочечной поправки) [14] и модель жидкой капли для описания гладкой части полной энергии ядра, удается понять сложные закономерности физики деления. Более того, задолго до их экспериментального открытия в рамках этого подхода были предсказаны такие замечательные явления, как образование сильнодеформированных атомных ядер при быстром вращении в области угловых моментов, где их формирование казалось невозможным с точки зрения модели жидкой капли, а также существование «острова стабильности» для новых, созданных в лабораторных условиях сверхтяжелых элементов периодической системы Менделеева. Более последовательный подход, который использует реалистическое двухчастичное взаимодействие типа сил Скимма или Гони [13], ввиду трудоемких вычислений и ряда открытых вопросов пока уступает эффективности упомянутого выше подхода.

Исследование сверхпроводимости в магнитных полях помогло понять многие закономерности этого явления в металлических сверхпроводниках (см., например, [15]). Вращение атомных ядер можно рассматривать как аналог поведения сверхпроводника в магнитном поле. В этой статье будут рассмотрены некоторые аспекты теории парных корреляций во вращающихся ядрах, которые получили свое развитие в основном в последнее время. Кроме того, мы хотим продемонстрировать эффективность идей, предложенных и развитых в теории структуры ядра, которые могут быть использованы при описании свойств других многочастичных конечных квантовых систем. В этой связи уместно напомнить, что последние десятилетия характеризуются бурным развитием физики мезоскопических систем, таких, как металлические кластеры, квантовые точки и металлические зерна. Несмотря

на то, что размеры этих систем достаточно велики по сравнению с атомными ядрами, квантовые эффекты, хорошо известные в ядре, могут играть заметную роль также и в этих системах. Например, учет оболочечной структуры является важным элементом при описании одночастичных и коллективных свойств металлических кластеров [16–18] и квантовых точек (см. [19] и ссылки в них). Вопрос о возможности парных корреляций в металлических кластерах пока остается открытым. Недавние эксперименты [20] с металлическими зернами Al продемонстрировали наличие в них спектроскопической щели. В этих экспериментах с беспрецедентной точностью удастся исследовать свойства парных корреляций в миниатюрных сверхпроводниках.

В соответствии со сказанным выше структура статьи следующая. В разд. 2 обсуждается экспериментальное проявление эволюции парных корреляций сверхпроводящего типа в атомных ядрах с вращением. В разд. 3 представлены основные элементы теории ХФБ, используемые для описания вращательных состояний атомных ядер, и обсуждается современное состояние данной проблемы. Раздел 4 посвящен проблеме передачи двух нуклонов и эволюции коллективных низколежащих возбуждений как средству изучения парных корреляций при ненулевых угловых моментах. В разд. 5 обсуждается роль квантовых флуктуаций в конечных квантовых системах на примере вращающихся атомных ядер. В разд. 6 кратко рассмотрены результаты, полученные в различных подходах при описании эффектов парных корреляций в металлических зернах. В этом же разделе представлена точно решаемая модель [21, 22], которая впервые была предложена для описания парных корреляций сверхпроводящего типа в атомных ядрах. В заключении кратко обсуждаются перспективы исследований парных корреляций в атомных ядрах и других системах.

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ПРОЯВЛЕНИЯ ПАРНЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ ЯДРАХ

Примером влияния парных корреляций на ротационные свойства атомных ядер является тот факт, что действие сил Кориолиса на спаренные нуклоны значительно меньше, чем на нуклоны при отсутствии спаривания. Известно, что экспериментальные значения моментов инерции в четно-четных ядрах при низких спинах в 2–3 раза меньше твердотельных значений, ожидаемых в отсутствие спаривания. Это приводит к увеличению вклада ротационной энергии $E_I \sim \frac{I(I+1)}{2\mathfrak{I}}$ (\mathfrak{I} — момент инерции) в полную энергию ядра при данном угловом моменте по сравнению с твердотельным вращением. При увеличении углового момента ротационная энергия будет уменьшать вклад энергии парного притягивающего взаимодействия. В работе [23] впервые было высказано предположение о разрушении парного поля во вращающихся

ядрах. Проводя аналогию между уравнениями движения для сверхпроводника в магнитном поле и уравнениями движения для гамильтониана ядра во внутренней вращающейся системе координат, авторы пришли к выводу о том, что парные силы, связывающие частицы на орбитах с противоположными магнитными квантовыми числами, должны уменьшаться с вращением. Силы Кориолиса снимают вырождение по магнитному квантовому числу и выстраивают одночастичные угловые моменты вдоль оси коллективного вращения, тем самым ослабляя спаривание. При некотором критическом угловом моменте $I_{кр}$ вращение должно полностью разрушить спаривание и привести атомное ядро в менее коррелированное состояние, в котором энергетическая щель отсутствует. Ядро при этом должно вести себя подобно сверхпроводнику первого рода, когда при некотором критическом значении магнитного поля сверхпроводимость исчезает. Нетрудно провести грубую оценку $I_{кр}$, исходя из предположения, что величина энергии вращения должна быть сравнима с энергией спаривания Δ в отсутствие вращения, чтобы ликвидировать энергетическую щель:

$$I_{кр} \sim \sqrt{2\Delta\mathfrak{I}}. \quad (1)$$

Используя параметр щели $\Delta \approx 1$ МэВ и твердотельное значение момента инерции $\mathfrak{I} \approx 70$ МэВ $^{-1}\hbar^2$ для $A \sim 160$, мы получаем $I_{кр} \sim 12\hbar$.

Многочисленные экспериментальные попытки найти аномалии в ротационных спектрах, полученных в реакциях с тяжелыми ионами, и, в частности, признаки фазового перехода из сверхтекучего состояния в нормальное, не

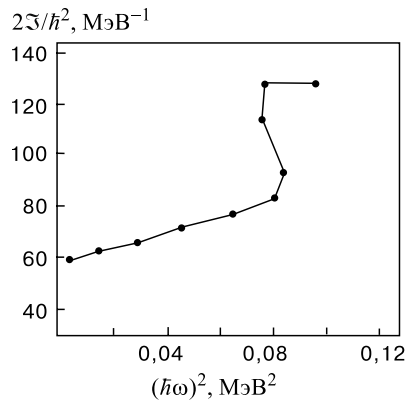


Рис. 1. [24]. Экспериментальный момент инерции $\mathfrak{I} = I/\Omega$ как функция квадрата угловой частоты вращения $\hbar\Omega \equiv \hbar\omega$ для основной ротационной полосы в ядре ^{162}Er

дали однозначного ответа. Хотя в атомном ядре и достаточное число частиц для наблюдения фазового перехода, тем не менее парные корреляции особенно сильны только для нуклонов, находящихся вблизи поверхности Ферми. При условии, что среднее энергетическое расстояние между одночастичными уровнями порядка $\sim 200 - 300$ кэВ, на характерном энергетическом интервале в 1 МэВ (величина энергетической щели) можно найти не более 3–5 пар частиц. В частности, об этом свидетельствует явление «backbending» [24]. На рис. 1, который иллюстрирует экспериментальное проявление «backbending», показана зависимость момента инерции от квадрата угловой частоты вращения $\hbar\Omega = dE_I/dI$. Частота вращения начи-

нает уменьшаться при возрастании углового момента, производя обратный загиб момента инерции. В результате наблюдается явление бистабильности, когда одному значению частоты вращения отвечают два различных значения момента инерции.

Надо заметить, что вначале «backbending» интерпретировался как проявление фазового перехода из сверхтекучего состояния в нормальное. Однако, в соответствии с современными представлениями, причина этого явления состоит в следующем. Силы Кориолиса и центробежные силы уменьшают относительно основной ротационной полосы энергию квазичастичных конфигураций, в которых одночастичные угловые моменты отдельных нуклонов имеют максимальную проекцию на ось вращения ядра. Как правило, в отсутствие вращения такие выстроенные квазичастичные конфигурации имеют высокую энергию возбуждения и отделены от основного коррелированного состояния четно-четного ядра на удвоенную энергию энергетической щели, обусловленной парными силами. С ростом углового момента (см. рис. 2) энергия этих конфигураций быстро уменьшается и при некоторой частоте вращения они «сливаются» с квазичастичным вакуумом. То есть энергия основной ротационной полосы (вакуум) совпадает с энергией выстроенной квазичастичной конфигурации, вследствие чего щель в энергетическом спектре исчезает, несмотря на то, что статическое спаривание Δ имеет ненулевое значение. Это рассматривается как проявление в атомных ядрах «бесщелевой сверхпроводимости» [27], которая наблюдается в металлических сверхпроводниках (см., например, [15]). При более высоких частотах вращения выстроенная двухквazi-

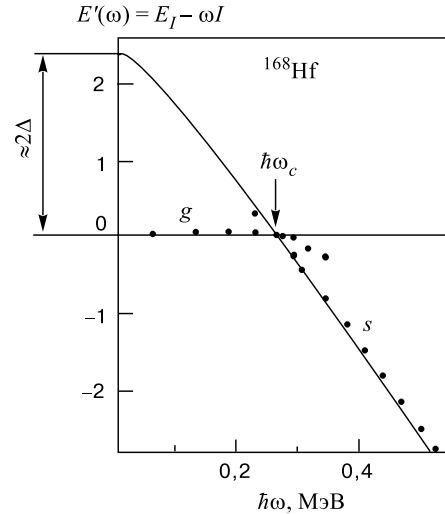


Рис. 2. [26]. Действие сил Кориолиса и центробежных сил на нижайшую, наиболее выстроенную двухквaziчастичную конфигурацию. Экспериментальные энергии (точки) определены во внутренней вращающейся системе координат (см. детали в работе [25]). Результаты расчета (сплошные линии), полученные в рамках модели принудительного вращения, сравниваются с экспериментальными энергиями основной (g) и выстроенной двухквaziчастичной (s) ротационных полос для ядра ^{168}Hf . В точке пересечения полос $\hbar\Omega_c = \hbar\omega_c$ силы Кориолиса и центробежные силы полностью компенсируют эффекты парных корреляций на пару выстроенных нейтронов, заселяющих орбиту $i_{13/2}$

стичная конфигурация становится основным состоянием для вращающегося четно-четного ядра.

Суммируя, отметим, что ротационное выстраивание, разрушая парное взаимодействие между двумя нуклонами, имеющими большой одночастичный угловой момент, приводит к частичному ослаблению парного поля и уменьшению энергетической щели. В этом случае ядро подобно сверхпроводнику второго рода, у которого при увеличении магнитного поля происходит частичное разрушение куперовских пар. В обзоре [28] приведены различные экспериментальные данные, которые можно успешно интерпретировать в рамках модели независимых квазичастиц, движущихся в эффективном вращающемся среднем поле. В следующем разделе будут рассмотрены основные элементы данной модели.

3. МЕТОД СРЕДНЕГО ПОЛЯ ДЛЯ ВРАЩАЮЩИХСЯ ЯДЕР

Изменение парных корреляций сверхпроводящего типа в результате вращения удается проследить, решая нелинейные уравнения модели принудительного вращения (МПВ) на основе метода ХФБ. В настоящее время существует много обзоров, посвященных данному подходу, например [13, 29–31]. Основные идеи данного подхода состоят в следующем. Гамильтониан МПВ, определенный во вращающейся системе координат, имеет вид

$$H' = H - \sum_{\tau} \lambda_{\tau} \hat{N}_{\tau} - \Omega \hat{J}_x, \quad (2)$$

$$H = \sum_{kl} t_{kl} c_k^{\dagger} c_l + \frac{1}{4} \sum_{ijkl} V_{ijkl} c_k^{\dagger} c_j^{\dagger} c_l c_k. \quad (3)$$

Здесь H — многочастичный ядерный гамильтониан; \hat{N}_{τ} — оператор числа протонов ($\tau = Z$) или нейтронов ($\tau = N$); λ_{τ} — соответствующий химический потенциал; Ω — угловая частота вращения; \hat{J}_x — x -компонента полного углового момента и операторы c_k^{\dagger} (c_k) — операторы рождения (уничтожения) частиц. В МПВ предполагается, что ядро вращается вокруг выделенного направления; обычно это ось x внутренней и лабораторной систем координат. Отметим, что гамильтониан H' инвариантен относительно вращения на угол π вокруг оси x :

$$[H', S] = 0, \quad (4)$$

где $S = e^{i\pi \hat{J}_x}$. Это позволяет упростить решение уравнений МПВ (см. ниже), используя симметризованный базис:

$$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|k\rangle + P|\bar{k}\rangle),$$

$$|\bar{i}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}P(|k\rangle - P|\bar{k}\rangle). \quad (5)$$

Здесь $|k\rangle = |Nljm\rangle$ — одночастичное состояние сферического базиса [11], $|\bar{k}\rangle = T|k\rangle$ (T — оператор обращения времени), $P = (-1)^{m-1/2}$. Данная трансформация, впервые рассмотренная Гудманом [29], позволяет решить задачу в базисе состояний, которые являются собственными состояниями оператора S :

$$S \begin{pmatrix} c_i^+ \\ c_i^- \end{pmatrix} S^{-1} = \pm i \begin{pmatrix} c_i^+ \\ c_i^- \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где собственное значение $\pm i$ называется сигнатурой (см. также [12]). Введем боголюбовские квазичастицы, представляющие линейную суперпозицию частиц и дырок:

$$\alpha_k^+ = \sum_i (A_{ki}c_i^+ + B_{k\bar{i}}c_i^-), \quad (7)$$

и решим вариационную проблему

$$\delta \langle \Phi_0 | H | \Phi_0 \rangle = 0, \quad (8)$$

чтобы определить коэффициенты трансформации A_{ki} , $B_{k\bar{i}}$. Здесь $|\Phi_0\rangle$ — квазичастичный вакуум, $\alpha_i|\Phi_0\rangle = 0$. Отметим, что квазичастичные состояния также являются собственными состояниями оператора S :

$$S \begin{pmatrix} \alpha_k^+ \\ \alpha_k^- \end{pmatrix} S^{-1} = \pm i \begin{pmatrix} \alpha_k^+ \\ \alpha_k^- \end{pmatrix}. \quad (9)$$

В результате получаем уравнения МПВ в приближении ХФБ:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{H} - \lambda - \Omega j_x & \Delta \\ \Delta^\dagger & -(\mathcal{H} - \lambda + \Omega j_x)^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = E_k \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} (\mathcal{H} - \lambda + \Omega j_x)^\dagger & \Delta^\dagger \\ \Delta & -(\mathcal{H} - \lambda - \Omega j_x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k^\dagger \\ -B_k^\dagger \end{pmatrix} = E_k \begin{pmatrix} A_k^\dagger \\ -B_k^\dagger \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Матрица \mathcal{H} и парный потенциал Δ имеют следующий вид:

$$\mathcal{H} = \mathcal{T} + \mathcal{G}, \quad (12)$$

$$\mathcal{T}_{ij} \equiv t_{ij}, \quad (13)$$

$$\mathcal{G}_{ij} = \sum_{kl} \langle ik | V | jl \rangle \varrho_{lk}, \quad (14)$$

$$\Delta_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{kl} \langle ij | V | kl \rangle k_{ij}, \quad (15)$$

где матрица плотности ρ и парный тензор k определены следующим образом:

$$\rho_{ij} = \langle \Phi_0 | c_i^\dagger c_j | \Phi_0 \rangle, \quad (16)$$

$$k_{ij} = \langle \Phi_0 | c_j c_i | \Phi_0 \rangle \quad (17)$$

относительно квазичастичного вакуума $|\Phi_0\rangle$. Легко показать [29] выполнение следующих условий:

$$A_{ki} = B_{\bar{k}\bar{i}}^\dagger, \quad B_{k\bar{i}} = A_{k\bar{i}}^\dagger, \quad E_k = -E_{\bar{k}}, \quad (18)$$

что позволяет, решив уравнения (10) только для положительной сигнатуры, определить все решения уравнений МПВ.

Даже при использовании симметризованного базиса необходимо выполнить достаточно трудоемкие вычисления, чтобы получить итерационные решения уравнений МПВ. Различные аспекты этой проблемы обсуждаются в обзоре [29]. Одним из эффективных методов решения поставленной проблемы является использование феноменологических потенциалов среднего поля типа потенциала Нильссона или Вудса—Саксона, вместо решения уравнений ХФБ. При этом решаются самосогласованно уравнения МПВ с использованием приближения БКШ [1] для парного взаимодействия вида $H_{\text{спар}} = -G \sum_{kk' > 0} c_k^+ c_k^+ c_{\bar{k}'} c_{\bar{k}'}$, где G — константа парного взаимодействия [10, 13]. В этом случае уравнения (10) имеют вид

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{ij} - \lambda \delta_{ij} - \Omega j_{ij}^x & \Delta \delta_{i\bar{j}} \\ \Delta \delta_{i\bar{j}} & -\varepsilon_{i\bar{j}} - \lambda \delta_{i\bar{j}} + \Omega j_{i\bar{j}}^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ki} \\ B_{k\bar{i}} \end{pmatrix} = E_k \begin{pmatrix} A_{ki} \\ B_{k\bar{i}} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Здесь ε_{ij} представляют собой одночастичные матричные элементы выбранного феноменологического потенциала. Эти уравнения должны решаться совместно с условием сохранения числа частиц в среднем

$$N = \langle \Phi_0 | \hat{N} | \Phi_0 \rangle = \sum_{i, E_k < 0} (A_{ki})^2 + \sum_{i, E_k > 0} (B_{k\bar{i}})^2. \quad (20)$$

Так как величина $\Delta = G \langle \sum_k c_k^+ c_k^+ \rangle$ сама зависит от коэффициентов трансформации Боголюбова $A_{ki}, B_{k\bar{i}}$:

$$\Delta = G \sum_{i, E_k > 0} A_{ki} B_{k\bar{i}}, \quad (21)$$

очевидно, что решение уравнений (19) представляет собой нелинейную проблему. Один из возможных способов решения проблемы состоит в использовании процедуры, комбинирующей МПВ с методом оболочечной поправки Струтинского [14] (см., например, [32]). В данном подходе вариационная проблема ХФБ подменяется решением задачи о минимуме функционала

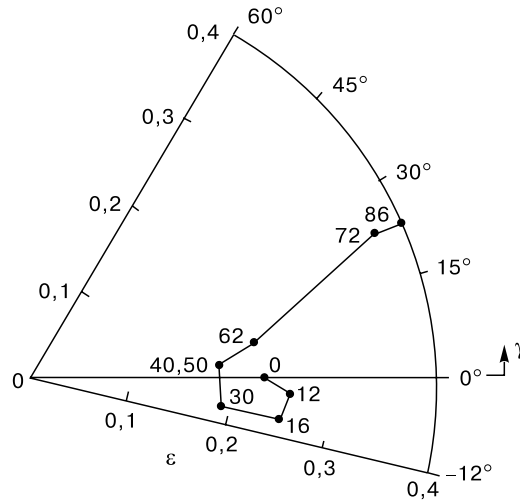


Рис. 3. [33]. Равновесные квадрупольные деформации ^{168}Yb для различных значений углового момента (цифры у точек). Расчеты выполнены для стандартных параметров одночастичного гамильтониана Нильссона (набор $A = 165$ [34]). Уравнения (19) решались отдельно для протонов и нейтронов. В расчет были включены протонные и нейтронные оболочки до $N = 7$ включительно

энергии, представляющем сумму энергии макроскопической жидкой капли и квантовой оболочечной поправки, которые зависят от параметров деформации ядра. Некоторые детали этой процедуры рассмотрены в приложении. На рис. 3 представлены результаты расчета равновесных параметров деформации для ядра ^{168}Yb [33], выполненные с помощью данной процедуры. Равновесные параметры деформации отвечают нижайшим энергетическим состояниям при данном угловом моменте, которые принято называть ирраст-состояниями. При $\hbar\Omega \leq 0,3$ МэВ данные результаты можно сравнить с самосогласованными расчетами в рамках метода ХФБ [35]. Все расчеты предсказывают сходные изменения с ростом углового момента: неаксиальная деформация γ развивается, как ожидается, в теле с моментом инерции, зависящим от неаксиальности согласно гидродинамической модели (сверхтекучий режим); имеет место некоторое растяжение при низких спинах, при более высоких спинах имеется обратная тенденция. Наконец, при высоких спинах, соответствующих $\hbar\Omega > 0,3$ МэВ, неаксиальность меняет знак; это показывает, что инерционные свойства ядра соответствуют твердому телу. Растяжение вновь появляется в этой области. Как видно из рис. 4, при $I \leq 12\hbar$ согласие результатов расчета с экспериментальными данными достаточно хорошее. При больших угловых моментах модель переоценивает неадиабатические

эффекты, так как рассчитанный момент инерции $\mathfrak{S} = \langle I_x \rangle / \Omega$ увеличивается значительно быстрее по сравнению с экспериментальным значением. Эта проблема обусловлена некоторыми недостатками потенциала Нильссона, который использовался в расчетах. В частности, наличие l^2 -члена в этом потенциале приводит к нефизическому росту вклада одночастичных состояний с большим орбитальным моментом (см., например, анализ потенциала Нильссона в [36]). На рис. 4 также показаны нижайшие двухквaziчастичные энергии для протонов и нейтронов. Так как нейтронная щель уменьшается значительно медленнее протонной, нейтронные двухквaziчастичные энергии остаются большими и при высоких спинах. В рассмотренном примере переход от сверхтекучего состояния к нормальному происходит при тех же значениях углового момента, что и изменение знака параметра неаксиальной деформации.

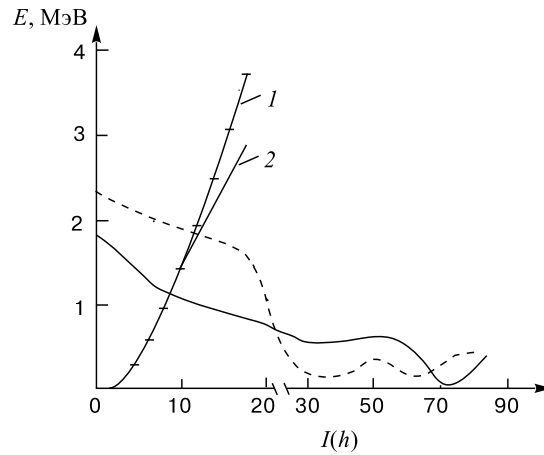


Рис. 4. [33]. Нижайшие двухквaziчастичные энергии $E_{ik} = E_i + E_k$ как функции углового момента и экспериментальные (1), а также рассчитанные (2) энергии иррастсостояний в ^{168}Yb . Сплошная кривая — энергия для нейтронов, штриховая — для протонов

Можно провести аналогию между эффектами квадрупольной деформации и «деформацией», обусловленной парным полем [12]. Член вращения $-\Omega \hat{J}_x$ в гамильтониане (2), генерирующий силы Кориолиса и центробежные силы, с лагранжевским множителем Ω гарантирует сохранение углового момента в среднем. При наличии сферической симметрии угловой момент является интегралом движения, тогда как при возникновении деформации среднего поля он перестает быть таковым. Вследствие этого волновая функция МПВ не является собственной функцией углового момента. Необходимо проводить проектирование на подпространство состояний с определенным значением

углового момента, чтобы рассчитать, например, вероятности переходов при данных значениях углового момента начального и конечного состояний [37]. Другой член, $-\lambda\hat{N}$, необходим для сохранения в среднем числа частиц, разрушаемых парным взаимодействием. Число частиц в приближении ХФБ (или БКШ) также не является интегралом движения. Более того, учет флуктуации числа частиц может существенно повлиять на качество описания экспериментальных данных в той или иной модели ядра (см. ниже). Проводя эту аналогию дальше, можно рассматривать член $-\lambda\hat{N}$ как взаимодействие, ассоциируемое с вращением в калибровочном пространстве, для которого λ и N являются соответствующими каноническими переменными. При этом частота вращения деформированного парного поля дается каноническим уравнением

$$\dot{\phi} = \frac{\partial E}{\partial N} = \lambda. \quad (22)$$

В качестве примера рассмотрим на рис. 5 выстраивание углового момента I_x в обычном конфигурационном пространстве и «выстраивание» числа частиц в калибровочном пространстве [38]. На рис. 5, *a* и *b* показано достаточно регулярное поведение числа частиц N и углового момента I_x как функций соответствующих канонических переменных λ и Ω . Плавное поведение этих величин можно связать с наличием соответствующих корреляций в потенциале среднего поля. Только при изменении параметров деформации среднего поля: деформации парного поля Δ и параметров квадрупольной деформации наблюдаются соответствующие изломы. Излом для изотопов Ду при $N = 89$ показывает, что при данном числе нейтронов в основном состоянии соседних четно-четных ядер происходит ослабление определенных корреляций, что приводит к переходу от сферической к деформированной форме [39]. Это поведение подобно явлению «backbending», которое обсуждалось ранее, и связано с изменением квазичастичной конфигурации (см. также рис. 5, *a*). Нерегулярное поведение числа частиц N и углового момента I_x на рис. 5, *в*, *г* указывает на некоррелированный (одночастичный) характер движения в потенциале среднего поля. При больших частотах вращения, когда статическое спаривание подавлено, корреляции между основными конфигурациями в четных изотопах Yb ослаблены. Аналогично в случае $^{150}_{84}\text{Du}$ двух валентных нейтронов недостаточно, чтобы вызвать спонтанное нарушение сферической симметрии и индуцировать заметную статическую квадрупольную деформацию среднего поля. При неколлективном вращении изменение выстроенного углового момента происходит скачкообразно, как только произошло очередное пересечение одночастичных уровней и изменение равновесной одночастичной конфигурации ядра.

В настоящее время становятся популярными расчеты уравнений ХФБ с реалистическими силами Скирма и Гони. Эти силы достаточно правдоподобно передают зависимость ядерных характеристик от числа нуклонов в

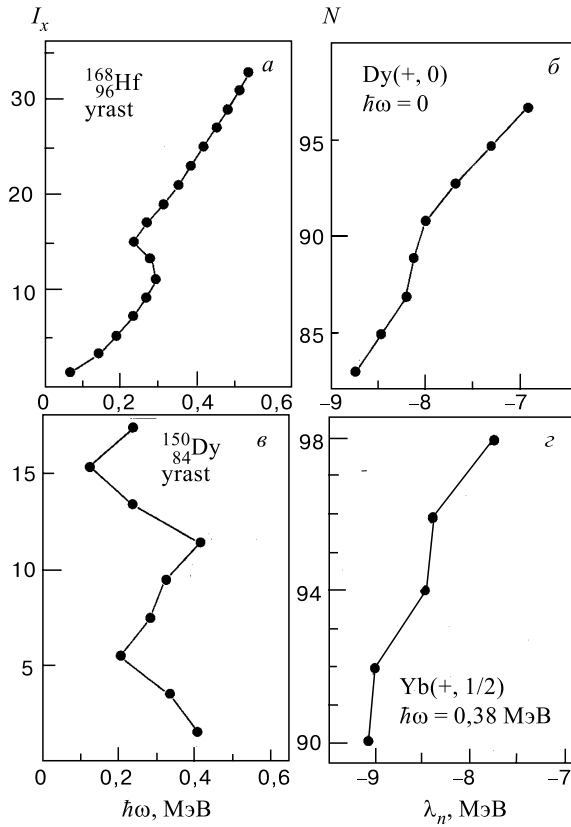


Рис. 5. [38]. Сравнение выстраивания углового момента I_x в конфигурационном пространстве и «выстраивания» числа частиц N в калибровочном пространстве. Частота вращения $\hbar\Omega \equiv \hbar\omega$

ядре. Однако необходимо отметить, что при использовании реалистических сил возникает вопрос о выборе парного взаимодействия. Например, в подходах с силами Скирма часто используют стандартное взаимодействие типа БКШ или, вводя феноменологическую параметризацию для парных сил, вынуждены варьировать параметры парного взаимодействия для того, чтобы воспроизвести экспериментальные данные в каждом конкретном случае [40]. Для сил Гони используют феноменологическую параметризацию парного взаимодействия в виде сил конечного радиуса действия:

$$V^{pp}(1, 2) = \sum_{i=1,2} e^{-[(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/\mu_i]^2} \times (W_i + B_i P^\sigma - H_i P^\tau - M_i P^\sigma P^\tau) \quad (23)$$

с набором параметров для величин μ_i , W_i , B_i , H_i и M_i ($i = 1, 2$) (см. детали в [41]). Кроме того, существуют попытки использования релятивистской теории среднего поля для описания свойств вращающихся ядер [42]. В этой теории ядро описывается согласно модели Валечки [43] как система дираковских нуклонов, которые взаимодействуют посредством обмена виртуальных σ -, ω - и ρ -мезонов. Решаются уравнения МПВ типа (19)

$$\begin{pmatrix} h - \Omega_x \hat{J}_x & \hat{\Delta} \\ -\hat{\Delta}^* & -h^* + \Omega_x \hat{J}_x^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_k \\ V_k \end{pmatrix} = E_k \begin{pmatrix} U_k \\ V_k \end{pmatrix}, \quad (24)$$

где $h = h_D - \lambda$ — одночастичный гамильтониан Дирака, U_k и V_k — квазичастичные спиноры Дирака. При этом для мезонных полей решаются уравнения Клейна—Гордона во вращающейся системе координат. Парные корреляции рассматриваются только между барионами и параметризуются, как и в расчетах с силами Гони, в виде сил конечного радиуса действия (23). Некоторые результаты, полученные в рамках этого подхода, представлены в разд. 5.

В заключение этого раздела необходимо отметить, что помимо анализа монополюсного спаривания, которое приводит к образованию куперовских пар в s -состояниях с полным моментом, равным нулю, существуют также теоретические исследования о роли квадрупольного спаривания (d -состояния) [44, 45]. Как было показано в работах [46–48], этот тип спаривания менее подвержен влиянию вращения, чем монополюсное спаривание, и может сохраняться при достаточно больших угловых моментах. Учет квадрупольного спаривания позволяет улучшить описание явления «backbending» [49] и, например, описание супердеформированных состояний в области $A \sim 190$ [50].

4. ПЕРЕДАЧА ДВУХ НУКЛОНОВ, КОЛЛЕКТИВНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ И ВРАЩЕНИЕ

Одним из возможных способов исследования парных корреляций во вращающихся ядрах является анализ матричных элементов, связанных с передачей двух нуклонов:

$$P = \langle A + 2 | S^+ | A \rangle, \quad (25)$$

где $S^+ = (c^+ c^+)_{I=0}$ — оператор пары частиц с суммарным нулевым угловым моментом. Очевидно, что этот матричный элемент связан с параметром щели (21). В основном состоянии матричные элементы (25) позволяют извлечь информацию о степени ядерной сверхтекучести. Интересно отметить, что при конечных значениях углового момента поведение матричного элемента (25) и параметра щели сильно различается. В расчетах с проектированием и без проектирования на точное число частиц парный матричный элемент

(25) уменьшается значительно быстрее, чем параметр щели (см. рис. 6). Более того, в области критического углового момента, когда исчезает статическое спаривание в расчетах без проектирования, парный матричный элемент

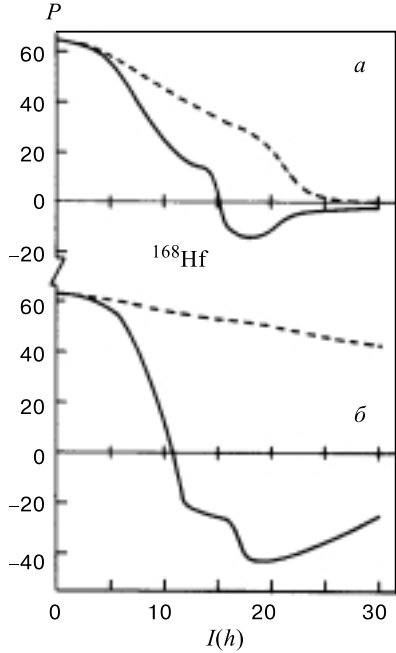


Рис. 6. [51]. Парный матричный элемент P , определенный согласно соотношению (25) (сплошная линия), и параметр щели Δ/G (пунктирная линия) для ядра ^{168}Hf как функция углового момента. Параметр щели определен без проектирования (а) и с помощью проектирования (б)

меняет свой знак и может осциллировать. Согласно [51], парный матричный элемент оказывается очень чувствительным к эффекту выстраивания двухквартичных состояний, которые ответственны за «backbending». В результате выстраивания ядро приобретает конфигурацию, где заблокировано спаривание для двух выстроенных частиц, что ведет к уменьшению парной щели. Однако, как это следует из рис. 6, малое изменение парной щели драматическим образом сказывается на величине парного матричного элемента. Заметим, что экспериментальные попытки в этом направлении пока не дали существенных результатов из-за сложности необходимых измерений.

Изменение парных корреляций сверхпроводящего типа во вращающихся ядрах можно проследить также при анализе коллективных низколежащих возбуждений. Такие состояния можно описывать в рамках МПВ, комбинируя с приближением случайных фаз (ПСФ), как состояния однофононной природы (см., например, [30]). В частности, расчеты в рамках ПСФ позволяют проследить влияние парных корреляций на коллективные γ - и β -колебания вращающегося ядра. С использованием метода силовой функции (см. [30]) для гамильтониана модели

$$H = \sum_{kk'} (e_{kk'} - \lambda \delta_{kk'}) c_k^\dagger c_{k'} - \Omega \hat{J}_x - GP^\dagger P - \frac{\kappa}{2} \sum_{\mu=-2}^2 Q_{2\mu}^\dagger Q_{2\mu}, \quad (26)$$

где Q_μ — квадрупольный оператор, в работе [52] было впервые показано, что ослабление парных корреляций с вращением приводит к ослаблению коллективных колебаний. На рис. 7, 8 показаны расчетные кривые силовой функции

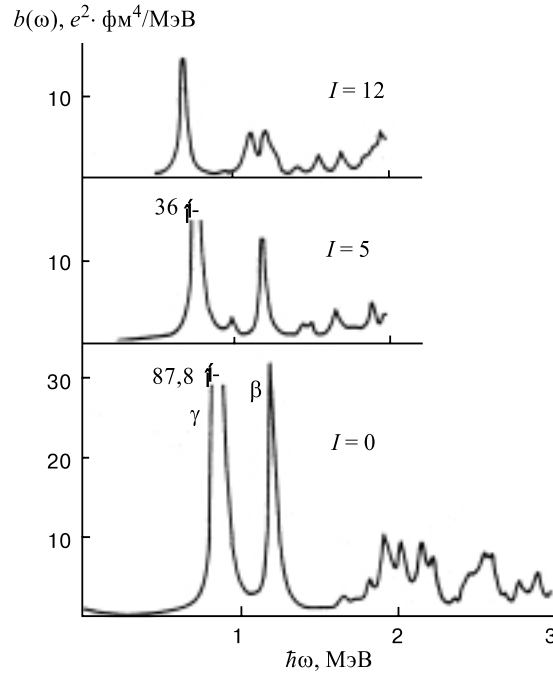


Рис. 7. [52]. Силовая функция электрических квадрупольных переходов на одно-фононные состояния положительной сигнатуры в зависимости от углового момента I . По оси ординат даны значения силовой функции, по оси абсцисс — значения энергии возбуждений. В качестве равновесных параметров деформации среднего поля использовались результаты [33] (см. рис. 3)

приведенной вероятности электрических квадрупольных переходов на состояния положительной сигнатуры в окрестности ираст-полосы. Положение β - и γ -вибрационных состояний при $I = 0$ находится в достаточно хорошем согласии с экспериментом. При этом константы остаточных взаимодействий определялись из условия устранения духовых состояний. При $I \leq 12\hbar$ можно четко проследить за эволюцией β - и γ -колебаний как наиболее коллективных состояний. При увеличении углового момента их идентификация уменьшается. Исчезновение статического спаривания приводит к потере их коллективности. Нейтронное спаривание исчезает при спинах $\sim 30\hbar$, протонное — при $I \approx 15\hbar$. Обращение в нуль спаривания приводит к уменьшению энергии двухквартичных состояний, что обуславливает рост плотности уровней в окрестности ираст-линии. В результате происходит сильное смешивание состояний с различными K и, как следствие, уменьшение вклада компонент волновой функции с определенным значением K в низколежащих вибрационных состояниях.

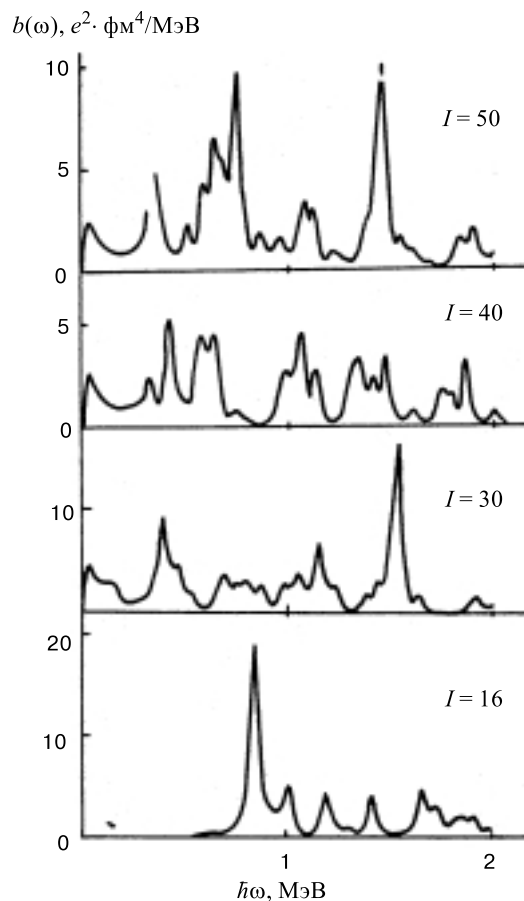


Рис. 8. [52]. То же, что и на рис. 7

5. РОЛЬ КВАНТОВЫХ ФЛУКТУАЦИЙ ПРИ АНАЛИЗЕ ПАРНЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ ЯДРАХ

Пожалуй, только открытие супердеформированных состояний атомных ядер можно, с некоторой долей уверенности, отнести к факту, подтверждающему гипотезу, высказанную в [23] (см. разд. 2). Эти состояния формируют регулярные ротационные полосы с достаточно большими угловыми моментами вплоть до $I \sim 60\hbar$. Кроме того, они характеризуются почти твердотельными моментами инерции с большой квадрупольной деформацией. Если предположить, что ядро представляет собой твердотельный эллипсоид вращения, то отношение полуосей такого эллипсоида во многих супердеформиро-

ванных ядрах близко к 2 : 1. В настоящее время известны экспериментальные данные о супердеформированных ротационных состояниях в массовой области $A \sim 60$ [53–56], 80, 130, 150 и 190 [31, 57–60]. Различные теоретические подходы, а именно: расчеты в рамках подхода, комбинирующего МПВ на базе потенциала Нильссона или потенциала Вудса—Саксона и метод оболочечной поправки Струтинского [31, 61–63]; самосогласованные расчеты в рамках теории ХФБ с реалистическими силами Скирма [40] или с силами Гони [61, 64, 65]; релятивистская теория среднего поля [66] — достаточно успешно описывают супердеформированные состояния.

Общепринято, что парные корреляции сильно подавлены при больших угловых моментах, и супердеформированные состояния описываются без учета парного поля для ядер из массовой области $A \sim 60$ и ~ 150 . В то же время учет парного взаимодействия сверхпроводящего типа необходим для описания супердеформированных состояний для массовой области $A \sim 190$, так как такие состояния наблюдаются при сравнительно малых частотах вращения. В различных теоретических моделях (см., например, [40, 63, 64]) было показано, что описание экспериментальных данных относительно поведения момента инерции в этих состояниях требует выхода за рамки приближения среднего поля. Так как атомное ядро является конечной квантовой системой, следует ожидать заметной роли квантовых флуктуаций при описании различных физических явлений. Как уже отмечалось выше, в приближении ХФБ число частиц сохраняется только в среднем. В работах [67, 68] впервые было показано, что проектирование на точное число частиц перед варьированием с помощью метода генераторной координаты [13], то есть выделение компонент с заданным числом частиц из полной волновой функции, может заметно сгладить точку фазового перехода, предсказываемую различными моделями среднего поля без учета проектирования. В качестве примера на рис. 9 показаны результаты расчета эффективного параметра щели $\tilde{\Delta} = G(\langle S^+ S^- \rangle)^{1/2}$ [69].

Расчеты проводились в рамках модели Баранджера—Кумара [70] для ядра ^{168}Hf . Результаты расчета в МПВ в приближении ХФБ (НФВ) предсказывают резкое подавление парных корреляций при спине $I = 22\hbar$. Однако учет проектирования на состояния с заданным числом частиц (NHFB) сглаживает точку фазового перехода. Расчеты с использованием параметра щели Δ в качестве генераторной координаты + проектирование (NGCM) практически совпадают

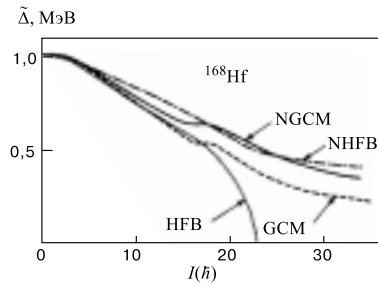


Рис. 9. [69]. Эффективный параметр щели $\tilde{\Delta}$ как функция углового момента I . При $I = 0$ все расчеты показывают экспериментальное значение Δ

с результатами, полученными с учетом проектирования (NHFB), тогда как расчеты в рамках метода генераторной координаты (GCM) без проектирования немного отличаются от них.

Во многих реалистических расчетах (см., например, [71–75]) используют более простой способ частичного проектирования, в основе которого лежит метод Липкина—Ногами [76, 77]. Основная идея метода состоит в том, что эффект флуктуаций числа частиц может быть подавлен при использовании гамильтониана $\hat{\mathcal{H}} = \hat{H} - \lambda_1 \hat{N} - \lambda_2 \hat{N}^2$ вместо стандартного гамильтониана $\hat{H} - \lambda \hat{N}$. Параметры λ_1 и λ_2 определяются при минимизации задачи:

$$\delta \langle \Phi | \hat{\mathcal{H}} | \Phi \rangle = 0. \quad (27)$$

Здесь $|\Phi\rangle$ — вакуум квазичастиц БКШ (далее $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по этому состоянию $\langle \Phi | \dots | \Phi \rangle$). Параметр λ_1 — обычный лагранжевский множитель, необходимый для выполнения условия сохранения числа частиц в среднем $N = \langle \hat{N} \rangle$. Величина λ_2 рассматривается как постоянная во время вариации и определяется из условия

$$\lambda_2 = \frac{\langle \hat{\mathcal{H}} \Delta \hat{N}_2^2 \rangle}{\langle \hat{N}^2 \Delta \hat{N}_2^2 \rangle}, \quad (28)$$

где $\hat{N}_2 \sim (\alpha^+ \alpha^+ + \text{э.с.})$ — двухквазичастичная часть оператора \hat{N} и $\Delta \hat{N}_2^2 = \hat{N}_2^2 - \langle \hat{N}_2^2 \rangle$. В работе [78] обсуждаются особенности применения метода Липкина—Ногами для зависящих от плотности сил Гони. В качестве примера на рис. 10 показаны результаты расчета в рамках релятивистской теории среднего поля с использованием метода Липкина—Ногами для ряда ядер из области $A \sim 190$. Расчеты проводились для кинематического момента инерции

$$\mathfrak{S}^{(1)} = \frac{I}{\Omega} \approx \frac{2I}{E_\gamma} \quad (29)$$

и динамического момента инерции

$$\mathfrak{S}^{(2)} = \frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{d^2 E}{dI^2} \right)^{-1} = \frac{dI}{d\Omega} \approx \frac{4}{\delta E_\gamma}. \quad (30)$$

Здесь $\hbar\Omega = dE_I/dI \approx [E(I+1) - E(I-1)]/2 = E_\gamma(I)/2$, E_γ — энергия перехода с излучением гамма-кванта, δE_γ — разница энергий между двумя последовательными гамма-переходами. Даже частичный учет флуктуаций числа частиц позволяет заметно улучшить описание экспериментальных данных.

Другой важный аспект исследования эффекта парных корреляций связан с учетом нулевых колебаний квантовой системы, ассоциированных с различным типом корреляций в ядре. С этой точки зрения парные вибрации играют

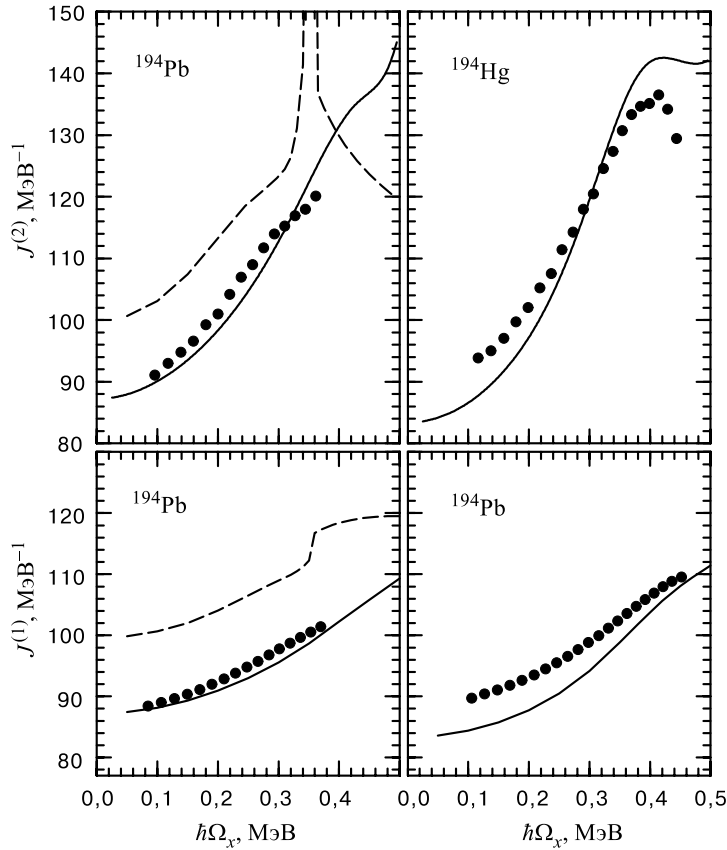


Рис. 10. [42]. Динамический ($\mathfrak{I}^{(2)}$) (верхняя часть) и кинематический ($\mathfrak{I}^{(1)}$) (нижняя часть) моменты инерции. Экспериментальные значения (точки) сравниваются с результатами расчета (линии). Сплошные и штриховые линии показывают результаты расчета с проектированием на число частиц в рамках подхода Липкина—Ногами и без него

важную роль в области, где пропадает статическое спаривание [79, 80]. В области угловых частот вращения, меньших критической частоты вращения, вклад парного поля в энергию основного состояния пропорционален квадрату числа частиц $E_{\text{спар}} \sim GN^2$ [12, 13]. В то же время вклад нулевых колебаний, обусловленных парными вибрациями, есть $E_{\text{виб}} \sim GN$. Очевидно, что их вклад невелик: $r = E_{\text{виб}}/E_{\text{спар}} \sim N^{-1}$ в области угловых моментов (угловых частот вращения), где статическое спаривание ненулевое. Однако при частотах вращения выше критической вклад поля спаривания в энергию основного состояния такого же порядка $E_{\text{спар}} \sim GN$, что и вклад нулевых мод, то есть

$r \sim 1$. Соответственно учет нулевых колебаний из-за парных вибраций может объяснить, например, низколежащие возбужденные конфигурации в некоторых атомных ядрах при высоких спинах, которые имеют меньший момент инерции, чем основная конфигурация при данном угловом моменте [26].

В качестве иллюстрации рассмотрим модель парных вибраций во вращающихся ядрах. В этом случае гамильтониан модели ядра имеет вид

$$H = \sum_{kk'} (e_{kk'} - \lambda \delta_{kk'}) c_k^\dagger c_{k'} - \Omega \hat{J}_x - GP^\dagger P = H_0 - \Omega \hat{J}_x. \quad (31)$$

Здесь $e_{kk'}$ — одночастичные энергии, c_k — оператор уничтожения частицы, определенный относительно частичного вакуума $c_k|0\rangle = 0$. Парный оператор P определен стандартным образом:

$$P^\dagger = \sum_{k>0} c_k^\dagger c_k^\dagger. \quad (32)$$

Используя трансформацию Боголюбова (7), перейдем к квазичастичному представлению, где новый вакуум определен как $\alpha_i|0\rangle = 0$. Соответственно гамильтониан среднего поля (31)

$$h(\Delta, \omega \dots) = \sum_{kk'} (e_{kk'} - \lambda \delta_{kk'}) c_k^\dagger c_{k'} - \Omega J_x - \Delta(P^\dagger + P) \quad (33)$$

в квазичастичном представлении имеет вид

$$h = \sum_k E_i \alpha_i^\dagger \alpha_i + U_0, \quad (34)$$

где энергия основного состояния есть

$$U_0 = \sum_{i,k} (e_{kk} - \lambda) B_{ik}^2 - G \langle P \rangle_{\text{ХФБ}}^2. \quad (35)$$

Используя условие самосогласования $\Delta = G \langle P \rangle$ и сохраняя только члены, билинейные по $\alpha^\dagger \alpha^\dagger$, получаем для гамильтониана (31)

$$H = U_0 + \sum_i E_i \alpha_i^\dagger \alpha_i - G(P^\dagger - \langle P \rangle_{\text{ХФБ}})(P - \langle P \rangle_{\text{ХФБ}}). \quad (36)$$

Для изучения парных вибраций в рамках ПСФ введем операторы

$$S^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(P^\dagger + P), \quad S^- \equiv \frac{i}{\sqrt{2}}(P^\dagger - P), \quad (37)$$

которые позволяют представить остаточное парное взаимодействие следующим образом:

$$P^\dagger P = \frac{1}{2}(S^{+2} + S^{-2}). \quad (38)$$

При этом операторы S^\pm имеют вид

$$\begin{aligned} S^+ &= \sum_{\mu} S_{\mu}^+ (b_{\mu}^{\dagger} + b_{\mu}) + \langle S^+ \rangle, \\ S^- &= i \sum_{\mu} S_{\mu}^- (b_{\mu}^{\dagger} - b_{\mu}), \\ S'^+ &= S^+ - \langle S^+ \rangle, \end{aligned} \quad (39)$$

где квазибозоны b_{μ}^{\dagger} , b_{μ} определены следующим образом:

$$\begin{aligned} b_{\mu}^{\dagger} &\equiv \alpha_i^{\dagger} \alpha_j^{\dagger}, \\ b_{\mu} &\equiv \alpha_j \alpha_i, \\ [b_{\mu}, b_{\nu}^{\dagger}] &= \delta_{\mu\nu}, \\ \mu &\equiv i > j. \end{aligned} \quad (40)$$

Матричные элементы S_{ij}^{\pm} имеют вид

$$S_{ij}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k \left\{ (A_{ik} A_{j\hat{k}} \pm B_{jk} B_{i\hat{k}}) - (A_{jk} A_{i\hat{k}} \pm B_{ik} B_{j\hat{k}}) \right\}. \quad (41)$$

В квазибозонном представлении гамильтониан (31) может быть записан в форме

$$H = U_0 + \sum_{\mu} E_{\mu} b_{\mu}^{\dagger} b_{\mu} - \frac{G}{2} (S^{+2} + S^{-2}), \quad (42)$$

где $E_{\mu} = E_i + E_j$ — двухквaziчастичные энергии. Для отыскания вибрационных решений, обусловленных остаточным парным взаимодействием, используем формализм обобщенных координат и моментов (см. [30]).

Введем обобщенные координаты и моменты

$$P = \sum_{\mu} P_{\mu} (b_{\mu}^{\dagger} + b_{\mu}), \quad (43)$$

$$X = -i \sum_{\mu} X_{\mu} (b_{\mu}^{\dagger} - b_{\mu}) \quad (44)$$

и решим уравнения движения в ПСФ

$$[H, X_{\lambda}] = -i P_{\lambda}, \quad (45)$$

$$[H, P_{\lambda}] = i \omega_{\lambda}^2 X_{\lambda}. \quad (46)$$

В результате получаем следующий гамильтониан:

$$H = U_0 + \sum_{\lambda > 0} \left(\frac{P_{\lambda}^2}{2} + \frac{1}{2} \omega_{\lambda}^2 X_{\lambda}^2 \right) + \Delta E_{\text{ПСФ}}. \quad (47)$$

При этом собственные частоты ω_λ определяются из решения секулярного уравнения

$$\mathcal{F}(\omega) = \begin{vmatrix} 2GS_{--} - 1 & 2G\omega^2 S_{+-} \\ 2G\omega^2 S_{+-} & 2GS_{++} - 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (48)$$

где матричные элементы имеют следующий вид:

$$S_{++}(\omega) \equiv \sum_{\mu} \frac{S_{\mu}^{+2} E_{\mu}}{E_{\mu}^2 - \omega^2}, \quad (49)$$

$$S_{--}(\omega) \equiv \sum_{\mu} \frac{S_{\mu}^{-2} E_{\mu}}{E_{\mu}^2 - \omega^2}, \quad (50)$$

$$S_{+-}(\omega) \equiv \sum_{\mu} \frac{S_{\mu}^{+} S_{\mu}^{-}}{E_{\mu}^2 - \omega^2}. \quad (51)$$

Использование ПСФ приводит к выигрышу в полной энергии системы, который называется корреляционной энергией $\Delta E_{\text{ПСФ}}$ и определяется выражением [13]

$$\Delta E_{\text{ПСФ}} = \frac{1}{2} \left[\sum_{\nu} \omega_{\nu} - \sum_{\mu} E_{\mu} \right]. \quad (52)$$

Расчет этой величины представляет достаточно сложную и трудоемкую задачу, так как даже в среднем ядре $A \sim 160$ число решений ПСФ составляет порядок $\sim 10^4$. Кроме того, каждое решение должно быть определено с достаточно хорошей степенью точности. Однако, используя теорему Коши, можно показать [81], что вклад корреляционной энергии определяется следующим выражением:

$$\frac{1}{2} \left(\sum_{\nu} \omega_{\nu} - \sum_{\mu} E_{\mu} \right) = \frac{1}{4\pi i} \oint dz z \frac{\mathcal{F}'(z)}{\mathcal{F}(z)}. \quad (53)$$

Замечательной особенностью данного результата является тот факт, что контур интегрирования может быть выбран достаточно далеко от полюсов подынтегральной функции $\frac{\mathcal{F}'(z)}{\mathcal{F}(z)}$. При этом подынтегральная функция будет плавной функцией комплексной переменной z , что существенно облегчает проблему интегрирования. На рис. 11 представлены результаты расчета функции Раусса $R(\Omega) = \langle H_0 \rangle - \Omega \langle \hat{J}_x \rangle$ основной ротационной полосы для ядра ^{178}W в рамках стандартной теории среднего поля (HFБ), с учетом проектирования на точное число частиц (PNP) и с учетом корреляционной энергии (RPA). На всей области изменения частоты вращения $\hbar\Omega \equiv \hbar\omega$ корреляционная энергия существенно улучшает описание основной полосы по

сравнению с результатами в рамках стандартной теории среднего поля без и даже с учетом проектирования. Хотя волновая функция, полученная в результате проектирования, и содержит эффекты, обусловленные квантовыми флуктуациями числа частиц, волновая функция ПСФ помимо этих корреляций может включать и корреляции другой природы, например, обусловленные флуктуациями формы. Очевидно, что предлагаемый метод является весьма эффективным, особенно для случая сепарабельных взаимодействий.

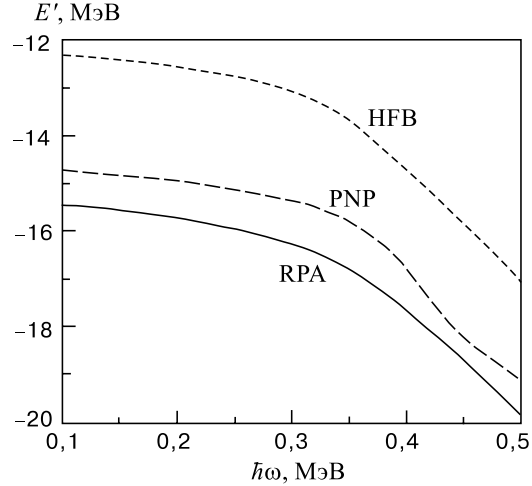


Рис. 11. [81]. Сравнение гауссианов для ядра ^{178}W как функций угловой частоты вращения $\hbar\Omega = \hbar\omega$. Расчеты в рамках теории ХФБ представлены в виде пунктирной линии, штриховая линия соответствует расчетам с учетом проектирования, расчеты с учетом выигрыша в энергии в рамках ПСФ представлены в виде сплошной линии

6. ТОЧНО РЕШАЕМАЯ МОДЕЛЬ ПАРНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ДЛЯ КОНЕЧНЫХ ФЕРМИ-СИСТЕМ

Как следует из результатов предыдущего раздела, квантовые флуктуации числа частиц в атомных ядрах играют важную роль при описании различных эффектов, обусловленных парными корреляциями. В частности, использование волновой функции с точным числом частиц (проектированной волновой функции) или учет квантовых флуктуаций в ПСФ приводят к более плавному переходу из сверхтекучего состояния в нормальное, и, как следствие, существенно улучшают описание экспериментальных данных. Очевидно, что подобные проблемы должны иметь место и при изучении роли парных корреляций в других, *конечных* многочастичных системах. С этой точки зрения

экспериментальные исследования спектров почти изолированных, сверхпроводящих металлических зерен Al [20] с размерами порядка $r \approx 5 \cdot 10^{-9}$ м при температурах ~ 50 мК представляют несомненный интерес. Изменяя размеры зерен и число частиц в них, можно регулировать среднее расстояние между одночастичными уровнями, энергетический интервал d . Эта величина становится не только сравнимой с величиной энергетической щели $\tilde{\Delta}$, которая известна для соответствующего макроскопического сверхпроводника, но и может заметно превышать ее. Согласно предсказанию Андерсона [82], сверхпроводимость должна пропадать, как только среднее расстояние d становится больше, чем величина энергетической щели $\tilde{\Delta}$. Остается ли при этом металлическое зерно сверхпроводящим или превращается в нормальный проводник? Каковы минимальные условия для проявления сверхпроводимости в данном технологическом материале? Эти вопросы представляют одно из важных направлений исследований свойств металлических зерен.

В первых расчетах, использующих большой канонический ансамбль и приближение среднего поля в рамках подхода БКШ [83, 84], было показано, что сверхпроводящая щель должна обратиться в нуль при достижении критического межуровневого расстояния $d_{кр}$. Причем величина $d_{кр}$ зависит от числа электронов в зерне: для зерен с нечетным числом электронов она была меньше ($d_{кр} \approx 0,89\tilde{\Delta}$), чем для зерен с четным числом электронов ($d_{кр} \approx 3,6\tilde{\Delta}$). Более поздние расчеты с использованием метода интеграла по путям для гамильтониана БКШ [85], расчеты в рамках канонического ансамбля с использованием точной диагонализации [86, 87] и расчеты в рамках метода ренормгруппы для матрицы плотности [88] величины четно-нечетной разности масс

$$\Delta_P = E_0(2N + 1) - \frac{1}{2}[E_0(2N) + E_0(2N + 2)], \quad (54)$$

где $E_0(M)$ есть энергия основного состояния зерна с M электронами, показали, что фазовый переход, обусловленный размерами системы, должен быть более плавным. Основной вывод из этих расчетов состоит в том, что учет квантовых флуктуаций является необходимым элементом теории при $d \gg \tilde{\Delta}$. Как было сказано выше, подобная ситуация хорошо исследована в теории ядра. Более того, точность расчетов, выполненных в рамках различных моделей, используемых в теории конденсированного состояния вещества, в данном случае может быть проверена с помощью точно решаемой модели, впервые предложенной для расчета спектра и волновых функций атомных ядер с небольшим числом разорванных пар [21, 22].

Рассмотрим взаимодействие n частиц, описываемых гамильтонианом

$$H = \sum_{j,\sigma=\pm} \varepsilon_{j\sigma} c_{j\sigma}^\dagger c_{j\sigma} - G \sum_{jj'} c_{j+}^\dagger c_{j-}^\dagger c_{j'-} c_{j'+}, \quad (55)$$

где $c_{j\sigma}^\dagger$, $c_{j\sigma}$ — операторы рождения и поглощения фермионов (электронов или нуклонов) в состояниях с квантовыми числами j , σ ($j = 1, \dots, \Omega$, $\sigma = \pm 1$); $\varepsilon_{j\sigma}$ — энергия дважды вырожденного уровня среднего поля и G — константа парного взаимодействия. Этот гамильтониан представляет стандартную модель парных взаимодействий, детально изученную в теории ядра [10, 13]. Полагая $G \equiv \lambda d$, где d — средний энергетический интервал и λ — безразмерная константа, мы приходим к гамильтониану, используемому при изучении малых металлических зерен (см., например, [83–88]). Без ограничения общности предположим, что число частиц n в нашей системе четное. Будем решать задачу в представлении волновых функций, которые соответствуют состояниям n невзаимодействующих частиц:

$$|j_1\sigma_1\dots j_n\sigma_n\rangle = c_{j_1\sigma_1}^\dagger\dots c_{j_n\sigma_n}^\dagger|0\rangle, \quad (56)$$

где $|0\rangle$ — состояние вакуума. В этом представлении, если неспаренная частица занимает уровень с квантовым числом $k \equiv j, +$, то уровень $\bar{k} \equiv j, -$, сопряженный этому уровню по отношению операции обращения времени, свободен, или наоборот. Для числа несвязанных частиц можно определить квантовое число ν_k , характеризующее выбранную конфигурацию, которое является собственным значением оператора

$$\hat{\nu}_k = c_k^\dagger c_k - c_{\bar{k}}^\dagger c_{\bar{k}}. \quad (57)$$

Нетрудно проверить, что этот оператор коммутирует с гамильтонианом H :

$$[H, \hat{\nu}_k] = 0. \quad (58)$$

Так как собственные значения оператора числа частиц $c_k^\dagger c_k$ ($c_{\bar{k}}^\dagger c_{\bar{k}}$) принимают значения 1 и 0, то собственные значения $\nu_k = +1(-1)$ характеризуют квантовые числа занятого состояния $j, +(j, -)$, то есть парное взаимодействие не только не меняет числа частиц, но и сохраняет их квантовые числа.

Введем оператор «сеньорити»

$$\hat{\nu} = \sum_k \nu_k^2. \quad (59)$$

Легко убедиться, что собственные значения оператора $\hat{\nu}$ равны числу уровней, на которых находится только одна частица. Используя найденные интегралы движения, можно существенно упростить решение уравнения Шредингера

$$H|\mathcal{E}\rangle = \mathcal{E}|\mathcal{E}\rangle. \quad (60)$$

Решение задачи на собственные значения для гамильтониана (55) в конфигурационном пространстве состояний (56) разбивается на задачу решения отдельных независимых систем уравнений в подпространствах с заданным числом сеньорити ν . Для n частиц, находящихся на Ω дважды вырожденных уровнях, квантовое число сеньорити может принимать значения

$0, 2, 4, \dots, \min(2\Omega - n, n)$, которые соответствуют числу неспаренных частиц. При этом число независимых систем уравнений будет равно $\min(\Omega - \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 1)$. В свою очередь, каждая независимая система уравнений с определенным числом сеньорити распадается на независимые подсистемы с заданным числом ν_k . Число этих подсистем для данного сеньорити ν

$$C_\nu^\Omega = \frac{\Omega!}{(\Omega - \nu)! \nu!} \quad (61)$$

определяется возможностью различного расположения неспаренных ν частиц на Ω уровнях (эффект блокировки). Каждая подсистема с заданным ν_k состоит из $C_{n/2-\nu/2}^{\Omega-\nu}$ уравнений.

Предположим, что у нас имеется 6 фермионов, которые надо разместить на 5 дважды вырожденных уровнях. Тогда, согласно вышесказанному, максимальное значение сеньорити $\nu = \min(10 - 6, 6) = 4$ и, соответственно, имеется 3 независимые системы уравнений с $\nu = 0, 2, 4$. Система с числом сеньорити $\nu = 0$ состоит из одной подсистемы ($C_0^5 = 1$), которая содержит $C_3^5 = 10$ линейных однородных уравнений. Для системы с $\nu = 2$ имеется 10 подсистем третьего порядка, и третья система с $\nu = 4$ распадается на 5 подсистем первого порядка. В общем случае задача на собственные значения сводится к блочной диагонализации матрицы гамильтониана (55) в базисе состояний (56). Каждый блок характеризуется своим квантовым числом сеньорити и, следовательно, диагонализуется отдельно.

Базисные состояния с квантовым числом сеньорити $\nu = 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} |k_1, \dots, k_{n/2} \rangle &\equiv |k_1, \bar{k}_1, \dots, k_{n/2}, \bar{k}_{n/2} \rangle, \\ k_1 &< k_2 < \dots < k_{n/2}. \end{aligned} \quad (62)$$

Матричные элементы гамильтониана в этом подпространстве определяются выражением

$$\begin{aligned} &\langle k_1, \dots, k_{n/2} | H | l_1, \dots, l_{n/2} \rangle = \\ &= 2 \sum_{i=1}^{n/2} \varepsilon_{k_i} \prod_{j=1}^{n/2} \delta_{k_j l_j} - G \sum_{i=1}^{n/2} \psi_i(k_1, \dots, k_{n/2}; l_1, \dots, l_{n/2}), \end{aligned} \quad (63)$$

$$\psi_i(k_1, \dots, k_{n/2}; l_1, \dots, l_{n/2}) = \sum_P P \left(\prod_{j \neq i}^{n/2} \delta_{k_j l_j} \right), \quad (64)$$

где P означает всевозможные перестановки индексов $l_1, \dots, l_{n/2}$. Для подпространства, характеризуемого квантовым числом сеньорити $\nu = 2$, базисные векторы имеют вид

$$\begin{aligned} |k_1, \dots, k_{n/2-1}; t_1 \sigma_1, t_2 \sigma_2 \rangle &\equiv |k_1, \bar{k}_1, \dots, k_{n/2-1}, \bar{k}_{n/2-1}; \nu_{t_1} \nu_{t_2} \rangle, \\ k_1 &< k_2 < \dots < k_{n/2-1}, \quad t_1 < t_2, \quad k_i \neq t_1, \quad k_i \neq t_2. \end{aligned} \quad (65)$$

Матричные элементы гамильтониана в подпространстве волновых функций (65) определяются следующим выражением с учетом квантовых чисел ν_i , характеризующих квантовые числа двух заблокированных состояний:

$$\begin{aligned} & \langle k_1, \dots, k_{n/2-1}; \nu_{t_1} \nu_{t_2} | H | l_1, \dots, l_{n/2-1}; \nu_{t_1} \nu_{t_2} \rangle = \\ & = (\varepsilon_{t_1} + \varepsilon_{t_2} + 2 \sum_{i=1}^{n/2-1} \varepsilon_{k_i}) \prod_{j=1}^{n/2-1} \delta_{k_j l_j} - \\ & - G \sum_{i=1}^{n/2-1} \psi_i(k_1, \dots, k_{n/2-1}; l_1, \dots, l_{n/2-1}), \end{aligned} \quad (66)$$

где величина $\psi_i(k_1, \dots, k_{n/2-1}; l_1, \dots, l_{n/2-1})$ определяется выражением (64). Аналогичные выражения можно получить и для других значений сеньорити. Представляет интерес также среднее значение оператора числа частиц $\hat{N}_j = c_{j\sigma}^\dagger c_{j\sigma}$ в основном состоянии:

$$\langle \Psi_0 | \hat{N}_j | \Psi_0 \rangle = \sum_{k_1, \dots, k_{n/2}} c_{k_1, \dots, k_{n/2}}^2 (\delta_{j, k_1} + \dots + \delta_{j, k_{n/2}}), \quad (67)$$

где коэффициенты $c_{k_1, \dots, k_{n/2}}$ определяются как

$$c_{k_1, \dots, k_{n/2}} = \langle k_1, \dots, k_{n/2} | \Psi_0 \rangle. \quad (68)$$

Здесь $|\Psi_0\rangle$ — основное состояние системы, характеризуемое квантовым числом сеньорити $\nu = 0$. При этом энергия основного состояния определяется как наименьшее собственное значение определителя матрицы (63). Таким образом, используя результаты (63), (64), (66), можно точно решить задачу о парном взаимодействии для n -фермионной системы, описываемой гамильтонианом (55).

Используя результаты работы [21], Ричардсон показал [22], что задачу диагонализации для основного состояния с квантовым числом сеньорити $\nu = 0$ можно свести к решению связанных алгебраических уравнений вида

$$\frac{1}{G} + \sum_{i=1, i \neq m}^n \frac{2}{E_i - E_m} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\varepsilon_k - E_m}, \quad m = 1, \dots, n, \quad (69)$$

которая позволяет определить энергию основного состояния как $\mathcal{E}_l = \sum_m E_m$. В работе [89] представлены основные элементы подхода Ричардсона и приведены результаты сравнения различных приближений при описании сверхпроводимости в металлических зернах с результатами точного решения.

В заключение этого раздела отметим, что использование точной модели позволило продемонстрировать отсутствие резкого подавления сверхпроводимости для ультрамалых металлических зерен. С увеличением величины d парные корреляции эволюционируют от строго локализованных в энергетическом интервале $\tilde{\Delta}$ вблизи энергии ϵ_F к режиму слабой локализации, для которого характерно наличие квантовых флуктуаций. Это приводит к размытию области фазового перехода от сверхтекучего состояния к нормальному.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Атомное ядро — это уникальная многочастичная система. Вследствие ее конечности, применение подходов и моделей, разработанных для бесконечных систем, при изучении свойств атомного ядра требует их переосмысления, и, как результат, это ведет к дальнейшему развитию основных концепций теории многих тел. Более того, новые концепции, как, например, теория случайных матриц, широко используемая в теории хаоса или при изучении свойств мезоскопических систем, возникли в результате попыток понять закономерности высоковозбужденных состояний атомных ядер (см. обзор [90]). С этой точки зрения анализ ядерных эффектов, обусловленных парными корреляциями сверхпроводящего типа, представляет также интересную область исследований, так как позволяет выяснить, например, роль квантовых флуктуаций при описании фазовых переходов.

Рамки данного обзора не позволяют рассмотреть многочисленные вопросы, связанные с влиянием различного типа спаривания на сверхтекучие свойства ядра. Так, например, в последнее время достаточно оживленно обсуждается конкуренция $T = 0$ и $T = 1$ спаривания для ядер с избытком протонов, особенно для ядер с равным числом протонов и нейтронов $N = Z$. Роль нейтрон-протонных парных корреляций должна возрастать в легких ядрах [29]. При этом с ростом углового момента парные корреляции в $T = 1$ фазе, в которой угловые моменты пар частиц антипараллельны, будут ослабевать, так как будет возрастать число частиц с угловым моментом, ориентированным вдоль оси коллективного вращения. Поэтому будет усиливаться фаза $T = 0$, в которой угловые моменты пар частиц ориентированы параллельно [91].

В связи с использованием вторичных радиоактивных пучков становится возможным исследование парных корреляций в ядрах, далеких от линии бета-стабильности. В этих ядрах могут проявиться новые аспекты парных корреляций в слабосвязанных системах. С другой стороны, современные поколения детекторов позволяют изучать свойства парных корреляций при высоких энергиях возбуждения в широкой области изменения углового момента ядра. При этом изменение параметров деформации формы ядра с ростом энер-

гии возбуждения, обусловленные оболочечными эффектами, может влиять на характер парных корреляций в ядре. Как следствие, при высоких энергиях возбуждения могут возникнуть экзотические состояния, изомеры формы, в которых сверхтекучая фаза все еще может существовать за счет различных типов спаривания. Очевидно также, что описание энергетических характеристик конечных квантовых систем в рамках приближения среднего поля необходимо дополнить учетом квантовых флуктуаций в приближении случайных фаз. Последние позволяют последовательно учесть вклад как парного взаимодействия, так и других возможных корреляций. В то же время стремительное развитие вычислительной техники позволит исследовать в ближайшем будущем парные корреляции при различных энергиях возбуждения и угловых моментах в рамках микроскопической оболочечной модели ядра (см., например, [92]).

Проводя аналогию между атомным ядром и металлическими зернами, можно ожидать в последних при низких температурах для величины магнитной восприимчивости

$$\chi \sim \frac{\partial^2 F}{\partial B^2} \quad (70)$$

явление, подобное ядерному «backbending». Здесь F — свободная энергия и B — напряженность магнитного поля. Это становится очевидным, если вспомнить, что величина магнитной напряженности B связана с частотой Лармора $\omega_L = \mu_B B$ (μ_B — магнетон Бора), которая является аналогом угловой частоты вращения Ω для гамильтониана вращающегося ядра. Соответственно магнитная восприимчивость зерна формально выражает такую же функциональную зависимость, как и момент инерции ядра $\mathfrak{I} \sim \frac{\partial^2 E}{\partial \Omega^2}$. Согласно оценкам работы [93], магнитная восприимчивость конечных систем с незаполненной оболочкой, при наличии парных корреляций, является полностью диамагнитной. В отсутствие парных корреляций магнитная восприимчивость таких систем характеризуется большими парамагнитными значениями [94]. Изменение магнитного поля для металлического зерна должно приводить к разрушению парных корреляций для отдельных пар электронов вблизи поверхности Ферми и появлению бистабильности в магнитной восприимчивости как функции квадрата частоты Лармора ω_L . Новые эксперименты с металлическими зернами помогут прояснить вопрос о том, насколько это ожидание является реалистичным.

В заключение один из авторов (Р.Г.Н.) выражает признательность К. Поморскому, Л. Молина, Я. Квасилу, И.Н. Михайлову, Ф. Дэнау и Д. Альмехеду, в совместной работе с которыми были получены результаты, представленные в обзоре. Он также благодарен за теплое гостеприимство, оказанное ему в Институте теоретической физики Вроцлавского университета во время его пребывания во Вроцлаве. Данная работа была выполнена при частичной

финансовой поддержке фонда Боголюбов—Инфельд Лаборатории теоретической физики ОИЯИ и при поддержке РФФИ, грант 00-02-17194.

8. ПРИЛОЖЕНИЕ

Для данной частоты вращения $\hbar\Omega$ число частиц N и константу парного взаимодействия G можно формально рассматривать как функции химического потенциала λ и энергетической щели Δ . Тогда имеем

$$\begin{aligned} dN &= \frac{\partial N}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial N}{\partial \Delta} d\Delta, \\ dG &= \frac{\partial G}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial G}{\partial \Delta} d\Delta. \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

Кроме того, число частиц N и силу спаривания G можно также определить следующим образом:

$$N = N_{\text{эфф}} + dN, \quad (\text{П.2})$$

$$G = G_{\text{эфф}} + dG. \quad (\text{П.3})$$

Вводя функцию

$$F = \Delta/G = \sum_{E_k > 0} \sum_i A_{ki} B_{k\bar{i}}, \quad (\text{П.4})$$

можно определить частные производные:

$$\frac{\partial G}{\partial \Delta} = \frac{1}{F_{\text{эфф}}^2} \left(F_{\text{эфф}} - \Delta_{\text{эфф}} \frac{\partial F}{\partial \Delta} \right), \quad (\text{П.5})$$

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda} = \frac{\Delta_{\text{эфф}}}{F_{\text{эфф}}^2} \frac{\partial F}{\partial \lambda}. \quad (\text{П.6})$$

Используя данный результат, получим для определителя системы уравнений (П.1)

$$W = \frac{1}{F_{\text{эфф}}^2} \left[\frac{\partial N}{\partial \lambda} \left(F_{\text{эфф}} - \Delta_{\text{эфф}} \frac{\partial F}{\partial \Delta} \right) + \frac{\partial N}{\partial \Delta} \Delta_{\text{эфф}} \frac{\partial F}{\partial \lambda} \right] = \frac{\bar{\omega}}{F_{\text{эфф}}^2}. \quad (\text{П.7})$$

Тогда, учитывая соотношения (П.2), изменение химического потенциала $d\lambda$ и изменение параметра щели $d\Delta$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} d\lambda &= \frac{1}{\bar{\omega}} \left[\left(F_{\text{эфф}} - \Delta_{\text{эфф}} \frac{\partial F}{\partial \Delta} \right) (N - N_{\text{эфф}}) - \frac{\partial N}{\partial \Delta} (GF_{\text{эфф}} - \Delta_{\text{эфф}}) F_{\text{эфф}} \right], \\ d\Delta &= \frac{1}{\bar{\omega}} \left[\frac{\partial N}{\partial \lambda} (GF_{\text{эфф}} - \Delta_{\text{эфф}}) F_{\text{эфф}} + \Delta_{\text{эфф}} (N - N_{\text{эфф}}) \frac{\partial F}{\partial \lambda} \right]. \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

Пользуясь определением числа частиц (20), найдем частные производные:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial \lambda} &= 2 \sum_{E_k < 0} \sum_i A_{ki} \frac{\partial A_{ki}}{d\lambda} + \sum_{E_k > 0} \sum_i B_{k\bar{i}} \frac{\partial B_{k\bar{i}}}{d\lambda}, \\ \frac{\partial N}{\partial \Delta} &= 2 \sum_{E_k < 0} \sum_i A_{ki} \frac{\partial A_{ki}}{d\Delta} + \sum_{E_k > 0} \sum_i B_{k\bar{i}} \frac{\partial B_{k\bar{i}}}{d\Delta}.\end{aligned}\quad (\text{П.9})$$

Чтобы определить неизвестные производные $\frac{\partial A_{ki}}{d\lambda}$, $\frac{\partial B_{k\bar{i}}}{d\lambda}$, $\frac{\partial A_{ki}}{d\Delta}$ и $\frac{\partial B_{k\bar{i}}}{d\Delta}$, используем теорию возмущений. Добавим к исходному гамильтониану малое возмущение $V_\lambda = -(\lambda' - \lambda) \delta_{ii} \text{sign}(i)$, которое приводит к незначительному изменению химического потенциала. В результате получаем возмущенную волновую функцию

$$|\nu_k' \rangle = |\nu_k \rangle - (\lambda' - \lambda) \sum_{m \neq k} \frac{\langle \nu_m | (\delta_{ii} \text{sign}(i)) | \nu_k \rangle}{E_k - E_m} |\nu_m \rangle, \quad (\text{П.10})$$

где невозмущенная волновая функция $|\nu_k \rangle = |A_{ki=1} \dots A_{ki=n}, B_{k\bar{i}=1} \dots B_{k\bar{i}=n} \rangle$ имеет размерность $2n$. Тогда

$$\begin{aligned}\frac{\partial |\nu_k \rangle}{\partial \lambda} &= - \sum_{m \neq k} \frac{\langle \nu_m | \delta_{ii} \text{sign}(i) | \nu_k \rangle}{E_k - E_m} |\nu_m \rangle = \\ &= \sum_{m \neq k} \frac{\sum_i (A_{ki} A_{mi} - B_{k\bar{i}} B_{m\bar{i}})}{E_m - E_k} |\nu_m \rangle.\end{aligned}\quad (\text{П.11})$$

В случае возмущения, вносимого изменением энергетической щели $V = (\Delta' - \Delta) \delta_{\bar{i}\bar{i}}$, действуя аналогично, получаем

$$\frac{\partial |\nu_k \rangle}{\partial \Delta} = \sum_{m \neq k} \frac{\langle \nu_m | \delta_{\bar{i}\bar{i}} | \nu_k \rangle}{E_k - E_m} |\nu_m \rangle = \sum_{m \neq k} \frac{\sum_i (A_{mi} B_{k\bar{i}} + A_{ki} B_{m\bar{i}})}{E_k - E_m} |\nu_m \rangle. \quad (\text{П.12})$$

Пользуясь выражениями (П.11), (П.12), не составляет труда определить производные (П.9):

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial \lambda} &= 2 \left\{ \sum_{i, E_k < 0} \sum_{m \neq k} \frac{\sum_j (A_{kj} A_{mj} - B_{k\bar{j}} B_{m\bar{j}})}{E_m - E_k} A_{ki} A_{mi} + \right. \\ &\left. + \sum_{i, E_k > 0} \sum_{m \neq k} \frac{\sum_j (A_{kj} A_{mj} - B_{k\bar{j}} B_{m\bar{j}})}{E_m - E_k} B_{k\bar{i}} B_{m\bar{i}} \right\},\end{aligned}\quad (\text{П.13})$$

$$\frac{\partial N}{\partial \Delta} = 2 \left\{ \sum_{i, E_k < 0} \sum_{m \neq k} \frac{\sum_j (A_{mj} B_{k\bar{j}} + B_{m\bar{j}} A_{kj})}{E_k - E_m} A_{ki} A_{mi} + \right. \\ \left. + \sum_{i, E_k > 0} \sum_{m \neq k} \frac{\sum_j (A_{mj} B_{k\bar{j}} + B_{m\bar{j}} A_{kj})}{E_k - E_m} B_{k\bar{i}} B_{m\bar{i}} \right\}. \quad (\text{П.14})$$

Используя выражения (П.11), (П.12) и явный вид функции F (П.4), мы также получаем

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \sum_{i, E_k > 0} \sum_{m \neq k} \frac{\sum_j (A_{kj} A_{mj} - B_{k\bar{j}} B_{m\bar{j}})}{E_m - E_k} (B_{k\bar{i}} A_{m\bar{i}} + B_{m\bar{i}} A_{ki}), \quad (\text{П.15})$$

$$\frac{\partial F}{\partial \Delta} = \sum_{i, E_k > 0} \sum_{m \neq k} \frac{\sum_j (B_{k\bar{j}} A_{mj} + B_{k\bar{j}} B_{m\bar{j}})}{E_m - E_k} (B_{k\bar{i}} A_{m\bar{i}} + B_{m\bar{i}} A_{ki}). \quad (\text{П.16})$$

Полученные выражения позволили существенно упростить задачу о нахождении самосогласованных значений параметра щели Δ и химического потенциала λ для данного набора параметров деформации среднего поля. На первом этапе решались уравнения МПВ (19) с начальными значениями Δ_0 и λ_0 , определенными из расчетов в рамках модели независимых квазичастиц. Найденные векторы $(A_{ki}, B_{k\bar{i}})$ использовались для вычисления числа частиц N (см. (20)) и Δ (см. (21)). Затем из системы уравнений (П.8) определялись приращения $d\Delta$ и $d\lambda$, которые прибавлялись к начальным значениям Δ_0 и λ_0 . Снова решалась система уравнений МПВ (19). Данная схема повторялась несколько раз, пока величины $d\Delta$ и $d\lambda$ не достигали необходимой степени малости ($\sim 0,001$). Обычно достаточно было 2–3 итераций для того, чтобы решение сошлось. В области, где спаривание резко уменьшалось, мы полагали величину щели равной нулю. Для того чтобы определить более точно область фазового перехода, когда флуктуации числа частиц становятся сильными, необходимо использовать метод проектирования на точное число частиц. Как только достигалось самосогласование по энергетической щели и числу частиц, определялась оболочечная поправка $\delta E_{\text{стр}}$ согласно методу Струтинского [14] для данных значений параметров деформации (ϵ, γ) . Окончательно равновесные параметры деформации определялись на сетке значений параметров деформации из условия минимума функционала

$$E(\epsilon, \gamma, \Omega) = E_{\text{жк}}(\epsilon, \gamma, \Omega) + \delta E_{\text{стр}}, \quad (\text{П.17})$$

где величина $E_{\text{жк}}$ — энергия вращающейся жидкой капли (см., например, [10]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bardeen J., Cooper L.N., Schrieffer J.R.** — Phys. Rev., 1957, v.108, p.1175.
2. **Боголюбов Н.Н.** — ЖЭТФ, 1958, т.34, с.58.
3. **Fröhlich H.** — Phys. Rev., 1950, v.79, p.845; Proc. Roy. Soc. A, 1952, v.215, p.291.
4. **Боголюбов Н.Н., Толмачев В.В., Ширков Д.В.** — Новый метод в теории сверхпроводимости. М.: АН СССР, 1958.
5. **Боголюбов Н.Н.** — ДАН СССР, 1958, т.119, с.52.
6. **Bohr A., Mottelson B.R., Pines D.** — Phys. Rev., 1958, v.110, p.936.
7. **Fock V.A.** — Zs. f. Phys., 1930, v.61, p.126.
8. **Соловьев В.Г.** — ЖЭТФ, 1958, т.35, с.823.
9. **Belyaev S.T.** — Mat. Fys.Medd. Dan, Vid. Selsk., 1959, v.31, № 11, p.1.
10. **Соловьев В.Г.** — Теория сложных ядер. М.: Наука, 1971.
11. **Бор О., Моттelson Б.** — Структура атомного ядра. М.: Мир, 1971, т.1.
12. **Бор О., Моттelson Б.** — Структура атомного ядра. М.: Мир, 1977, т.2.
13. **Ring R., Schuck P.** — The Nuclear Many-Body Problem. Berlin: Springer, 1980.
14. **Strutinsky V.M.** — Nucl. Phys. A, 1967, v.95, p.420; 1968, v.122, p.1.
15. **Де Жен П.** — Сверхпроводимость металлов и сплавов. М.: Мир, 1968.
16. **Heer W.A.** — Rev. Mod. Phys., 1993, v.65, p.611.
17. **Brack M.** — Rev. Mod. Phys., 1993, v.65, p.677.
18. **Нестеренко В.О.** — ЭЧАЯ, 1992, т.23(6), с.1665.
19. **Nazmitdinov R.G., Heiss W.D.** — Czech. J. Phys., 1998, v.48, p.853;
Heiss W.D., Nazmitdinov R.G. — Письма в ЖЭТФ, 1998, т.68, с.870;
Jacak L., Nawrylak P., Wojs A. — Quantum Dots. Berlin: Springer, 1998.
20. **Ralph D.C., Black C.T., Tinkham M.** — Phys. Rev. Lett., 1996, v.76, p.688; 1997, v.78, p.4087.
21. **Павликовски А., Рыбарска В.** — ЖЭТФ, 1962, т.43, вып.2(8), с.543.
22. **Richardson R.W., Sherman N.** — Nucl. Phys., 1964, v.52, p.221;
Richardson R.W. — J. Math. Phys., 1965, v.6, p.1034; Phys. Rev., 1966, v.141, p.949; J. Math. Phys., 1977, v.18, p.1802.
23. **Mottelson B.R., Valatin J.G.** — Phys. Rev. Lett., 1960, v.5, p.511.
24. **Johnson A., Ryde H., Sztarkier J.** — Phys. Lett. B, 1971, v.34, p.605;
Johnson A., Ryde H., Hjorth S.A. — Nucl. Phys. A, 1972, v.179, p.753.
25. **Bengtsson R., Frauendorf S.** — Nucl. Phys. A, 1979, v.327, p.139.
26. **Garret J.D., Hagemann G.B., Herskind B.** — Annu. Rev. Nucl. Part. Sci., 1986, v.36, p.419.
27. **Goswami A., Lin L., Struble G.** — Phys. Lett. B, 1967, v.25, p.451.
28. **Garret J.D.** — In: The Response of Nuclei under Extreme Conditions. Eds. Broglia R.A. and Bertsch G.F., New York: Plenum Publishing Corporation, 1988, p.1.
29. **Goodman A.L.** — Adv. in Nucl. Phys., 1979, v.11, p.263.
30. **Квасил Я., Назмитдинов Р.Г.** — ЭЧАЯ, 1986, т.17, вып.4, с.613.
31. **Nilsson S.G., Ragnarsson I.** — Shapes and Shells in Nuclear Structure. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

32. Nazmitdinov R.G., Kvasil J. — Acta Universitatis Carolinae—Mathematica et Physica, 1992, v.33(1), p.3.
33. Janssen D. et al. — Phys. Lett. B, 1978, v.79, p.347.
34. Nilsson S.G. et al. — Nucl. Phys. A, 1969, v.131, p.1.
35. Goodman A.L. — Nucl. Phys. A, 1976, v.265, p.113.
36. Heiss W.D., Nazmitdinov R.G. — Physica D, 1998, v.118, p.134.
37. Mang H.J. — Phys. Rep. C, 1975, v.18, p.327.
38. Zhang J.-Y. et al. — Nucl. Phys. A, 1986, v.453, p.104.
39. Bengtsson R., Zhang J.-Y., Åberg S. — Phys. Lett. B, 1981, v.105, p.5.
40. Terasaki J. et al. — Nucl. Phys. A, 1995, v.593, p.1;
Gall B. et al. — Z. Phys. A, 1995, v.348, p.183.
41. Berger J.F., Girod M., Gogny D. — Comp. Phys. Comm., 1991, v.63, p.365.
42. Afanasjev A.V., König J., Ring P. — Preprint nucl-th/9907105, 1999, p.6.
43. Serot B.D., Walecka J.D. — Adv. Nucl. Phys., 1986, v.16, p.1.
44. Broglia R.A., Bes D.R., Nilsson B. — Phys. Lett. B, 1974, v.50, p.213.
45. Ragnarsson I., Broglia R.A. — Nucl. Phys. A, 1976, v.263, p.315.
46. Wakai M., Faessler A. — Nucl. Phys. A, 1978, v.295, p.86.
47. Egido J.L., Ring P. — Nucl. Phys. A, 1984, v.423, p.93.
48. Diebel M. — Nucl. Phys. A, 1984, v.419, p.221.
49. Faessler A., Ploszajczak M., Schmid K.W. — In: Progress in Particle and Nuclear Physics. Ed. W.D. Wilkinson. N.Y.: Pergamon Press, 1981, v.5, p.79.
50. Wyss R., Satula W. — Phys. Lett. B, 1995, v.351, p.393.
51. Nikam R.S., Ring P., Canto L.F. — Phys. Lett. B, 1987, v.185, p.269.
52. Molina J.L., Nazmitdinov R.G. — In: Selected Topics in Nuclear Structure. Proc. XVIII Winter School, Bielsko-Biala, Poland, 11-21 Febr., 1980. Eds. A. Balanda and Z. Stachura, p.162–176.
53. Svensson C.E. et al. — Phys. Rev. Lett., 1997, v.79, p.1233; 1998, v.80, p.2558; 1999, v.82, p.3400.
54. Galindo-Uribarri A. et al. — Phys. Lett. B, 1998, v.422, p.45.
55. Rudolph D. et al. — Phys. Rev. Lett., 1998, v.80, p.3018;
1999, v.82, p.3763.
56. Devlin M. et al. — Phys. Rev. Lett., 1999, v.82, p.5217.
57. Nolan P.J., Twin P.J. — Annu. Rev. Nucl.Part.Sci., 1988, v.38, p.533.
58. Janssens R.V.F., Khoo T.L. — Annu. Rev. Nucl.Part.Sci., 1991, v.41, p.321.
59. Baktash C., Haas B., Nazarewicz W. — Annu. Rev. Nucl.Part.Sci., 1995, v.45, p.485.
60. Singh B., Firestone R.B., Chu S.Y.F. — Nuclear Data Sheets, 1996, v.78, p.1.
61. Åberg S., Flocard F., Nazarewicz W. — Annu. Rev. Nucl.Part.Sci., 1990, v. 40, p.439.
62. Satula W. et al. — Nucl. Phys. A, 1991, v.529, p.289.
63. Satula W., Wyss R. — Phys. Rev. C, 1994, v.50, p.2888.
64. Girod M. et al. — Phys. Lett. B, 1994, v.325, p.1;
65. Valor A., Egido J.L., Robledo L.M. — Phys. Lett. B., 1997, v.392, p.249.

66. **Koepf W., Ring P.** — Nucl. Phys. A, 1989, v.493, p.61; 1990, v.511, p.279;
König J., Ring P. — Phys. Rev. Lett., 1993, v.71, p.3079;
Afanasjev A.V., König J., Ring P. — Nucl. Phys. A, 1996, v.608, p.107;
Afanasjev A.V., Lalazisis G.A., Ring P. — Nucl. Phys. A, 1998, v.634, p.395;
Afanasjev A.V., Ragnarsson I., Ring P. — Phys. Rev. C, 1999, v.59, p.3166.
67. **Egido J.L., Ring P.** — Nucl. Phys. A, 1982, v.383, p.189; 1982, v.388, p.19.
68. **Egido J.L., Ring P., Iwasaki S., Mang H.J.** — Phys. Lett. B, 1985, v.154, p.1.
69. **Canto L.F., Ring P., Rasmussen J.O.** — Phys. Lett. B, 1985, v.161, p.21.
70. **Baranger B., Kumar K.** — Nucl. Phys. A, 1968, v.110, p.490.
71. **Bennour L. et al.** — Phys. Rev. C, 1989, v.40, p.2834.
72. **Zheng D.C., Sprung D.W.L., Flocard H.** — Phys. Rev. C, 1992, v.46, p.1355.
73. **Möller P., Nix J.R.** — Nucl. Phys. A, 1992, v.536, p.20.
74. **Dobaczewski J., Nazarewicz W.** — Phys. Rev. C, 1993, v.47, p.2418.
75. **Magierski P. et al.** — Phys. Rev. C, 1993, v.48, p.1686.
76. **Lipkin H.J.** — Ann. Phys., 1960, v.9, p.272.
77. **Nogami Y.** — Phys. Rev., 1964, v.134, p.313;
Nogami Y., Zucker L.J. — Nucl. Phys., 1964, v.60, p.203.
78. **Valor A., Egido J.L., Robledo L.M.** — Preprint nucl-th/9911027, 1999, p.31.
79. **Brogia R.A., Diebel M., Frauendorf S., Gallardo M.** — Phys. Lett. B, 1986, v.166, p.252.
80. **Shimizu Y.R. et al.** — Rev. Mod. Phys., 1989, v.61, p.131.
81. **Dönauf F., Almeded D., Nazmitdinov R.G.** — Phys. Rev. Lett., 1999, v.83, p.280.
82. **Anderson P.W.** — J. Phys. Chem. Solids, 1959, v.11, p.28.
83. **von Delf J., Zaikin A.D., Golubev D.S., Tichy W.** — Phys. Rev. Lett., 1996, v.77, p.3189.
84. **Smith R.A., Ambegaokar V.** — Phys. Rev. Lett., 1996, v.77, p.4962.
85. **Matveev K.A., Larkin A.I.** — Phys. Rev. Lett., 1997, v.78, p.3749.
86. **Mastellone A., Falci G., Fazio R.** — Phys. Rev. Lett., 1998, v.80, p.4542.
87. **Berger S.D., Halperin B.I.** — Phys. Rev. B, 1998, v.58, p.5213.
88. **Dukelsky J., Sierra G.** — Phys. Rev. Lett., 1999, v.83, p.172.
89. **von Delft J., Braun F.** — Preprint cond-mat/9911058, 1999, p.10.
90. **Guhr T., Mueller-Groeling A., Weidenmueller H.A.** — Phys. Rep., 1998, v.299, p.189.
91. **Satula W., Wyss R.** — Phys. Lett. B, 1997, v.393, p.1.
92. **Langanke K., Dean D.J., Koonin S.E., Radha P.B.** — Nucl. Phys. A, 1997, v.613, p.253.
93. **Kuzmenko N.K., Mikhajlov V.M., Frauendorf S.** — Jour. Cluster Science, 1999, v.10, p.195;
 Preprint cond-mat/9807011, 1998, p.13.
94. **van Ruitenbeek J.M., van Leeuwen D.A.** — Phys. Rev. Lett., 1991, v.67, p.640.