«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
2001, ТОМ 32, ВЫП. 7

УДК 539.12.01; 539.17

СТРОЕНИЕ T-МАТРИЦЫ И МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ НА НЕФИЗИЧЕСКИХ ЛИСТАХ ЭНЕРГИИ В ЗАДАЧЕ ТРЕХ КВАНТОВЫХ ЧАСТИЦ

А. К. Мотовилов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна
Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова

Построены явные представления для аналитического продолжения компонент Фаддеева трехчастичной T-матрицы на нефизические листы римановой поверхности энергии. Согласно этим представлениям T-матрица на нефизических листах выражается в терминах ее компонент, относящихся лишь к физическому листу. На основе представлений для T-матрицы сформулированы аналогичные представления для аналитического продолжения на нефизические листы также и для матриц рассеяния. Сформулирован и апробирован алгоритм нахождения резонансов в системе трех квантовых частиц на основе дифференциальных уравнений Фаддеева.

Explicit representations for the Faddeev components of the three-body T-matrix continued analytically into unphysical sheets of the energy Riemann surface are found. According to the representations, the T-matrix on unphysical sheets is explicitly expressed in terms of its components only taken in the physical energy sheet. The representations for the T-matrix are then used to construct similar representations for the analytic continuation of the three-body scattering matrices. An algorithm for calculating three-body resonances based on the Faddeev differential equations is suggested and tested.

1. Резонансы представляют собой одно из самых интересных явлений, наблюдаемых в рассеянии квантовых частиц. Основные проблемы, связанные со строгим определением понятия резонанса, наиболее отчетливо описаны в обзоре Б. Саймона [1]. В отличие от обычного (вещественного) спектра, резонансы не являются унитарным инвариантом самосопряженного оператора. Поэтому рассмотрение резонансов всегда явно или неявно связано с той или иной моделью, более или менее конкретной физической системой и т. п., предполагающими присутствие некоторых внешних структур типа «свободного» или «невозмущенного» гамильтониана, по отношению к которым и проявляются резонансы (см. [1]).

Общепринятая интерпретация резонансов в квантовой механике как комплексных полюсов матрицы рассеяния, аналитически продолженной по энергии на нефизические листы ее римановой поверхности, восходит к известной работе Г. Гамова [2], посвященной описанию α-распада. В различных вариантах теории рассеяния всегда происходит сравнение наблюдаемой динамики квантовой системы с некоторой ее «свободной» динамикой. Спектр резонансов проявляется на фоне этой динамики и, вообще говоря, зависит от ее выбора. Обзор различных физических подходов к исследованию трехчастичных резонансов можно найти, например, в [3] и [4].

При проведении конкретных расчетов резонансов часто используется метод комплексного скейлинга [5] (см. также [1, 6]). Этот метод применим к задаче нескольких частиц в тех случаях, когда потенциалы взаимодействия между частицами являются аналитическими функциями координат. При комплексном скейлинге гамильтониана системы его дискретный спектр остается неподвижным, в то время как непрерывный спектр поворачивается и приоткрываются определенные секторы на нефизических листах, соседних по отношению к физическому листу. Резонансы, находящиеся в этих секторах, оказываются частью дискретного спектра преобразованного гамильтониана [6], и тем самым при определении их положения оказывается возможным применять стандартные методы поиска дискретного спектра. Практические приложения метода комплексного скейлинга к конкретным задачам можно найти, в частности, в [7–9].

В [10, 11] нами был разработан иной подход к исследованию трехчастичных резонансов. Основой этого подхода являются представления для аналитического продолжения трехчастичной T-матрицы и матриц рассеяния на нефизические листы в терминах, относящихся лишь к физическому листу. С одной стороны, эти представления раскрывают строение продолженных T- и S-матриц. С другой стороны, они позволяют указать эффективный практический алгоритм вычисления резонансов в системах трех частиц, по крайней мере, для случая, когда взаимодействия между частицами являются короткодействующими.

Согласно представлениям [10, 11] (см. формулу (1)), матрица $\mathbf{M}(z) = \{M_{\alpha\beta}(z)\}$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, компонент Фаддеева [12] оператора $T(z)$, будучи продолжена на тот или иной нефизический лист Π_l энергии z, явно выражается через саму эту матрицу, взятую на физическом листе, а также через некоторое усечение $S_l(z)$ полной трехчастичной матрицы рассеяния $S(z)$. Характер усечения определяется индексом (номером) l конкретного нефизического листа.

Представления для аналитического продолжения матрицы рассеяния $S(z)$ следуют непосредственно из представлений для аналитически продолженной матрицы $\mathbf{M}(z)$.

Одним из следствий полученных представлений, допускающим непосредственные практические приложения, является тот факт, что как T-матрица, так и матрица рассеяния имеют нетривиальные сингулярности на нефизическом листе Π_l ровно при тех значениях энергии z, для которых соответствующая усеченная матрица рассеяния $S_l(z)$ имеет собственное число нуль. Важно, что последняя рассматривается при этом лишь на физическом листе. Таким образом, поиск резонансов (полюсов $\mathbf{M}(z)$ и $S(z)$) на том или ином нефизическом листе Π_l можно вести, все время оставаясь на физическом листе и вычисляя положение нулей оператора $S_l(z)$. Достаточно лишь иметь программу, позволяющую вычислять на физическом листе амплитуды процессов, требующиеся для построения усеченной матрицы рассеяния $S_l(z)$.

Условимся о некоторых обозначениях. Всюду далее под $\sqrt{z-\lambda}$, $z \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, подразумеваем главную ветвь функции $(z-\lambda)^{1/2}$. Через $\hat{p}$ обозначим единичный вектор в направлении $p \in \mathbb{R}^n$, $\hat{p} = p/|p|$, и через S^{n-1} — единичную сферу в $\mathbb{R}^n$, $\hat{p} \in S^{n-1}$.

Потенциалы взаимодействия между частицами считаются убывающими в координатном пространстве не медленнее, чем экспоненциально.

2. Матрица рассеяния, T-матрица и резольвента гамильтониана (функция Грина) квантово-механической системы жестко связаны между собой. Поэтому все эти три объекта, рассматриваемые как функции энергии, обычно обладают одной и той же римановой поверхностью. Во всяком случае, в матричной многоканальной задаче с бинарными каналами и в задаче трех частиц с быстроубывающими взаимодействиями дело обстоит именно так. Наличие у этих поверхностей точек ветвления (на вещественной оси) на формальном уровне обусловлено одной и той же причиной, а именно присутствием интегралов типа Коши в уравнении Липпмана–Швингера или уравнениях Фаддеева [12]. В этих уравнениях, рассматриваемых в импульсном представлении, интегралы типа Коши порождаются сингулярными ядрами $\delta(p-p')(\lambda+p^2-z)^{-1}$, где λ — пороги каналов, а p, $p \in \mathbb{R}^n$ — соответствующие канальные импульсные переменные. В случае каналов $(2 \longrightarrow 2,3)$ в задаче трех частиц и каналов с нечетной размерностью n в матричной многоканальной задаче пороги λ оказываются точками ветвления второго порядка. Четномерные каналы в многоканальной задаче, так же, как и канал $(3 \rightarrow 2,3)$ в задаче трех частиц, порождают логарифмические точки ветвления.

Для того чтобы описать рассматриваемую нами часть трехчастичной римановой поверхности, введем вспомогательную вектор-функцию

$$f(z) = \big(f_0(z), f_{1,1}(z), \ldots, f_{1,n_1}(z), f_{2,1}(z), \ldots, f_{2,n_2}(z), f_{3,1}(z), \ldots, f_{3,n_3}(z)\big)$$

с компонентами $f_0(z) = \ln z$ и $f_{\alpha,j}(z) = (z-\lambda_{\alpha,j})^{1/2}$, где через $\lambda_{\alpha,j}$ обозначаются энергии связанных состояний в парных подсистемах α, $\alpha = 1,2,3$, $j = 1,2,\ldots,n_\alpha$, нумеруемые с учетом их кратности. Предполагается, что $n_\alpha < \infty$. Листы Π_l римановой поверхности $\mathfrak{R}$ вектор-функции $f(z)$ нумеруются посредством мультииндекса

$$l = (l_0, l_{1,1}, \ldots, l_{1,n_1}, l_{2,1}, \ldots, l_{2,n_2}, l_{3,1}, \ldots, l_{3,n_3}),$$

где $l_{\alpha,j} = 0$, если лист Π_l отвечает главной (арифметической) ветви корня $(z-\lambda_\alpha)^{1/2}$. В противном случае принимается $l_{\alpha,j} = 1$. Значение индекса

l_0 совпадает с номером ветви функции $\ln z = \ln|z| + i\,2\pi l_0 + i\phi$, где $\phi = \arg z$. Для физического листа, который отвечает индексам $l_0 = l_{\alpha,j} = 0$, $\alpha = 1,2,3$, $j = 1,2,\ldots,n_\alpha$, используется обозначение Π_0. «Склейка» листов Π_l поверхности $\mathfrak{R}$ осуществляется на интервалах между соседними порогами по берегам разреза, сделанного по непрерывному спектру. Подробное описание поверхности $\mathfrak{R}$ см. в [11].

Поверхности типа $\mathfrak{R}$ без добавочных точек ветвления возникают только в многоканальных задачах с бинарными каналами. Строение полной римановой поверхности энергии в задаче трех частиц является существенно более сложным. Так, например, на листах Π_l с $l_0 = \pm 1$ имеются дополнительные точки ветвления, отвечающие резонансам в двухчастичных подсистемах. На листах Π_l с $l_0 = 0$ присутствуют дополнительные логарифмические точки ветвления кинематического происхождения.

Часть $\mathfrak{R}^{(3)}$ полной трехчастичной римановой поверхности, для которой в [10, 11] получены явные представления, состоит из листов Π_l поверхности $\mathfrak{R}$, имеющих индекс $l_0 = 0$ (такие нефизические листы называются *двухчастичными*), и *трехчастичных* листов, отвечающих $l_0 = \pm 1$ и $l_{\alpha,j} = 1$, $\alpha = 1,2,3$, $j = 1,2,\ldots,n_\alpha$. Отметим, что $\mathfrak{R}^{(3)}$ включает все нефизические листы, являющиеся соседними по отношению к физическому листу Π_0.

Процедура построения явных представлений для T-матрицы состоит из следующих этапов. На первом этапе проводится (понимаемое в смысле обобщенных функций) аналитическое продолжение на нефизические листы свободных членов и ядер интегральных уравнений Фаддеева для ее компонент $M_{\alpha\beta}(z)$. Как свободные члены, так и эти ядра после их продолжения выражаются в терминах парных T-матриц и матриц рассеяния, относящихся к физическому листу. В результате преобразования уравнений Фаддеева обнаруживается, что продолженные ядра $M_{\alpha\beta}(P,P',z)\big|_{z\in\Pi_l}$ явно выражаются в терминах самих этих ядер, взятых на физическом листе Π_0 в их внеэнергетическом и/или полуэнергетическом вариантах. В последнем случае подразумевается, что первый аргумент P ядер $M_{\alpha\beta}(P,P',z)\big|_{z\in\Pi_l}$ находится на энергетических поверхностях $|P|^2 = z$ или $|p_\alpha|^2 = z - \lambda_{\alpha,j}$, $j = 1,2,\ldots,n_\alpha$. Мы воспользовались здесь обозначениями $P = \{k_\alpha, p_\alpha\}$, где k_α, p_α $(\alpha = 1,2,3)$ — стандартные приведенные относительные импульсы Якоби [12].

На втором этапе производится перенос всех внеэнергетических членов в левую часть полученных выражений и обращается возникающий там оператор. В результате возникает система уравнений для полуэнергетических компонент $M_{\alpha\beta}(P,P',z)\big|_{z\in\Pi_l}$. Эта система допускает явное решение, причем в терминах только физического листа. Результатом решения являются представления для матрицы компонент Фаддеева $\mathbf{M}(z) = \{M_{\alpha\beta}(z)\}\,, \alpha,\beta = 1,2,3$, продолженной на лист Π_l.

Для случая бесспиновых частиц эти представления имеют следующий вид:

$$\mathbf{M}(z)|_{\Pi_l} = \mathbf{M}(z) - \mathbf{B}^\dagger(z)A(z)LS_l^{-1}(z)\tilde{L}\mathbf{B}(z). \qquad (1)$$

Множитель $A(z)$ представляет собой диагональную матрицу:

$$A(z) = \operatorname{diag}\{A_0(z), A_{1,1}(z), \ldots, A_{1,n_3}(z)\},$$

образованную из функций $A_0(z) = -\pi i z^2$ и $A_{\alpha,j} = -\pi i\sqrt{z-\lambda_{\alpha,j}}$. Обозначения L и $\tilde{L}$ используются для диагональных числовых матриц, нетривиальные элементы которых являются индексами листа Π_l:

$$L = \operatorname{diag}\{l_0, l_{1,1}, \ldots, l_{3,n_3}\}, \quad \tilde{L} = \operatorname{diag}\{|l_0|, l_{1,1}, \ldots, l_{3,n_3}\}.$$

Под $S_l(z)$ понимается усечение полной трехчастичной матрицы рассеяния $S(z)$, $S(z) : \hat{\mathcal{G}} \to \hat{\mathcal{G}}$, $\hat{\mathcal{G}} = L_2(S^5) \mathop{\oplus}\limits_{\alpha=1}^{3} \mathop{\oplus}\limits_{j=1}^{n_\alpha} L_2(S^2)$, определяемое равенством

$$S_l(z) = \hat{I} + \tilde{L}\big[S(z) - \hat{I}\big]L,$$

где $\hat{I}$ — тождественный оператор в $\hat{\mathcal{G}}$. Мы используем также обозначения

$$\mathbf{B}(z) = \begin{pmatrix} J_0\Omega\mathbf{M} \\ J_1\Psi^*[\Upsilon\mathbf{M} + \mathbf{v}] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^\dagger(z) = \Big(\mathbf{M}(z)\Omega^\dagger J_0^\dagger, [\mathbf{v} + \mathbf{M}\Upsilon]\Psi J_1^\dagger\Big),$$

где матрица $\mathbf{v} = \operatorname{diag}\{v_1, v_2, v_3\}$ составлена из парных потенциалов v_α, $\alpha = 1, 2, 3$. В то же время

$$\Omega = (1,\ 1,\ 1), \quad \Upsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi = \operatorname{diag}\{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\},$$

где Ψ_α $(\alpha = 1, 2, 3)$ — операторы, действующие на $f = (f_1, f_2, \ldots, f_{n_\alpha}) \in \mathop{\oplus}\limits_{j=1}^{n_\alpha} L_2(\mathbb{R}^3)$ по правилу

$$(\Psi_\alpha f)(P) = \sum_{j=1}^{n_\alpha} \psi_{\alpha,j}(k_\alpha) f_j(p_\alpha),$$

где, в свою очередь, $\psi_{\alpha,j}$ — волновая функция связанного состояния парной подсистемы α, отвечающая уровню $\lambda_{\alpha,j}$. Через Ψ^* обозначается оператор, сопряженный Ψ. Обозначение $J_0(z)$ используется для оператора, реализующего сужение на энергетическую поверхность $|P|^2 = z$. Диагональная операторнозначная функция

$$J_1(z) = \operatorname{diag}\{J_{1,1}(z), \ldots, J_{3,n_3}(z)\}$$

составлена из операторов $\mathrm{J}_{\alpha,j}(z)$, осуществляющих сужение на энергетические поверхности $|p_\alpha|^2 = z - \lambda_{\alpha,j}$. Операторы $\Omega^\dagger$, $J_0^\dagger(z)$ и $J_1^\dagger(z)$ представляют собой «транспонированные» матрицы Ω, $J_0(z)$ и $J_1(z)$ соответственно.

Представления для матрицы рассеяния и резольвенты на нефизических листах являются непосредственным следствием представлений (1) для матрицы $\mathbf{M}(z)|_{\Pi_l}$. С некоторыми оговорками (см. [11]) представления для матрицы рассеяния $S(z)$ имеют вид

$$S(z)|_{\Pi_l} = \mathcal{E}(l)\left\{\hat{I} + S_l^{-1}(z)[S(z) - \hat{I}]e(l)\right\}\mathcal{E}(l). \tag{2}$$

Здесь $\mathcal{E} = \operatorname{diag}\{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_{1,1}, \ldots, \mathcal{E}_{3,n_3}\}$, где $\mathcal{E}_0$ — тождественный оператор в $L_2(S^5)$, если $l_0 = 0$, и $\mathcal{E}_0$ — инверсия, $(\mathcal{E}_0 f)(\hat{P}) = f(-\hat{P})$, если $l_0 = \pm 1$. Аналогично $\mathcal{E}_{\alpha,j}$ является тождественным оператором в $L_2(S^2)$ при $l_{\alpha,j} = 0$ и инверсией при $l_{\alpha,j} = 1$. Обозначение $e(l)$ используется для диагональной числовой матрицы $e(l) = \operatorname{diag}\{e_0, e_{1,1}, \ldots, e_{3,n_3}\}$ с нетривиальными элементами $e_{\alpha,j} = 1$, если $l_{\alpha,j} = 0$, и $e_{\alpha,j} = -1$, если $l_{\alpha,j} = 1$; во всех случаях $e_0 = 1$.

В числе прочего в [11] найдены области голоморфности усеченных матриц рассеяния $S_l(z)$ на физическом листе. Представления (1) и (2) справедливы в тех же областях.

3. Из представлений (1) и (2) следует, в частности, что резонансы (полюсы $\mathbf{M}(z)|_{\Pi_l}$ и $S(z)|_{\Pi_l}$), находящиеся на нефизическом листе Π_l, суть те точки $z = z_{\mathrm{res}}$ на физическом листе, для которых матрица $S_l(z)$ имеет собственное число нуль. Таким образом, *вычисление резонансов на нефизическом листе* Π_l *сводится к поиску нулей усечения* $S_l(z)$ *полной трехчастичной матрицы рассеяния* $S(z)$ *на физическом листе*. Для практического поиска этих резонансов можно использовать любой метод, позволяющий вычислить аналитическое продолжение на физический лист амплитуд упругого рассеяния, перестройки или развала, необходимых для построения матрицы $S_l(z)$.

В работах [13–16] для вычисления матриц $S_l(z)$ был использован алгоритм, основанный на дифференциальных уравнениях Фаддеева для компонент волновой функции в конфигурационном пространстве (см. [12]), в том числе и на версии этих уравнений для модели граничных условий [17, 18]. При вычислении амплитуд процессов на физическом листе приходится, однако, распространить дифференциальную формулировку задачи рассеяния также и на комплексные значения энергии z. В области голоморфности амплитуд эта формулировка остается по-прежнему корректной [16].

К настоящему времени алгоритм численного решения дифференциальных уравнений Фаддеева детально разработан только для расчетов процессов $(2 \longrightarrow 2, 3)$. Для практического вычисления оказываются доступными лишь амплитуды упругого рассеяния и перестройки в процессах $(2 \longrightarrow 2)$, а также амплитуда развала системы на три частицы. Знания этих амплитуд достаточно для вычисления тех усечений $S_l(z)$ трехчастичной матрицы рассеяния $S(z)$, нули которых «отвечают» за резонансы, находящиеся на двухчастичных нефизических листах, то есть тех листах римановой поверхности энергии, куда можно провести спектральный параметр z, совершая обходы лишь парных порогов.

В [13] предложенный метод был успешно протестирован на примере расчетов виртуального уровня тритона ^{3}H и траекторий резонансов в модельной системе трех бозонов с массами нуклона. В [9] проведено сравнение рассматриваемого метода с методом комплексного скейлинга. Продемонстрировано, в частности, что первый из этих методов в случае ядерных потенциалов является существенно более эффективным. В [14–16] с помощью нашего метода был детально исследован резонансный механизм возникновения ефимовских состояний в молекулярном тримере гелия ^{4}He$_3$.

Автор признателен Й.-К. Хо, Е. А. Колгановой и С. А. Софианосу за сотрудничество.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Simon B.* // Intern. J. Quant. Chem. 1978. V. 14. P. 529.
2. *Gamow G.* // Z. Phys. 1928. V. 51. P. 204.
3. *Kukulin V. I., Krasnopol'sky V. M., Horáček J.* Theory of Resonances: Principles and Applications. Praha: Academia, 1989.
4. *Меллер К., Орлов Ю. В.* // ЭЧАЯ. 1989. Т. 20. С. 1341.
5. *Balslev E., Combes J. M.* // Comm. Math. Phys. 1971. V. 22. P. 280.
6. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 4: Анализ операторов. М.: Мир, 1982.
7. *Hu C.-Y., Bhatia A. K.* // Muon Catalyzed Fusion. 1990/91. V. 5/6. P. 439.
8. *Csótó A., Oberhummer H., Pichler R.* // Phys. Rev. C. 1996. V. 53. P. 1589.
9. *Kolganova E. A., Motovilov A. K., Ho Y. K.* // Nucl. Phys. A. 2001. V. 684. P. 623.
10. *Мотовилов А. К.* // ТМФ. 1996. Т. 107. С. 450.
11. *Motovilov A. K.* // Math. Nachr. 1997. V. 187. P. 147.
12. *Меркурьев С. П., Фаддеев Л. Д.* Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. М.: Наука, 1985.
13. *Колганова Е. А., Мотовилов А. К.* // ЯФ. 1997. Т. 60. С. 235.
14. *Motovilov A. K., Kolganova E. A.* // Few-Body Systems Suppl. 1999. V. 10. P. 75.
15. *Kolganova E. A., Motovilov A. K.* // Comp. Phys. Comm. 2000. V. 126. P. 88.
16. *Колганова Е. А., Мотовилов А. К.* // ЯФ. 1999. V. 62. P. 1253.
17. *Kolganova E. A., Motovilov A. K., Sofianos S. A.* // Phys. Rev. A. 1997. V. 56. P. 1686.
18. *Kolganova E. A., Motovilov A. K., Sofianos S. A.* // J. Phys. B. 1998. V. 31. P. 1279.