ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2001. Т. 32. ВЫП. 7

УДК 539.12.01

АСИММЕТРИЧНЫЙ ЛАВИННЫЙ ПРОЦЕСС В ТЕОРИИ САМООРГАНИЗОВАННОЙ КРИТИЧНОСТИ

Е. В. Ивашкевич, А. М. Поволоцкий, В. Б. Приезжев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна
Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова

«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
2001, ТОМ 32, ВЫП. 7

УДК 539.12.01

АСИММЕТРИЧНЫЙ ЛАВИННЫЙ ПРОЦЕСС В ТЕОРИИ САМООРГАНИЗОВАННОЙ КРИТИЧНОСТИ

Е. В. Ивашкевич, А. М. Поволоцкий, В. Б. Приезжев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна
Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова

С помощью метода анзаца Бете получены точные результаты для асимметричного лавинного процесса на кольце. Средняя скорость потока частиц v получена как функция вероятностей осыпания и плотности частиц ρ. При увеличении ρ система обнаруживает переход от прерывистого потока к непрерывному, а v расходится в критической точке ρ_c с экспонентой $\alpha = 2$.

The Bethe ansatz method is used to obtain exact results for an asymmetric avalanche process on a ring. The average velocity of particle flow, v, is derived as a function of the toppling probabilities and the density of particles, ρ. As ρ increases, the system shows a transition from intermittent to continuous flow, and v diverges at the critical point ρ_c with exponent $\alpha = 2$.

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛИ

Лавинная динамика — это основной сценарий релаксации нестабильных состояний в экстремальных системах, где каждый подвижный элемент находится около порога стабильности. Типичное распределение лавин, имеющее характерное степенное убывание, ведет к возникновению дисперсного транспорта частиц, вовлеченных в лавину [1]. Многие физические явления, такие как распространение фронтов [2] или землетрясения [3], могут рассматриваться в терминах лавинной динамики [4]. Однако наиболее подходящий пример — гранулярные системы, которые непосредственно порождают прерывистые лавины и, таким образом, эволюционируют в критическое состояние [5]. В работе предложена модель асимметричного лавинного процесса, который является интегрируемым примером систем, где спонтанно начинающиеся лавины обеспечивают возникновение критического значения плотности частиц, при котором термопредельное значение средней скорости переноса оказывается бесконечным. В отличие от решений подобных моделей [6], рассматривавшихся в теории самоорганизованной критичности, предлагаемое точное решение свободно от предположений об отсутствии межузельных корреляций.

Рассмотрим решетку $\mathcal{L}$ из N узлов с циклическими граничными условиями $\mathcal{L} = \{i \mod N : i \in \mathbb{Z}\}$. В узлах решетки находятся $p < N$ частиц. Состояние C системы в любой момент времени задается номерами узлов, занятых частицами, которые мы всегда будем располагать в порядке возрастания $C = \{x_k : k = 1, \ldots, p\,;\, x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_p\}$. Эволюция системы во времени определяется следующими динамическими правилами. Если в момент времени t в любом узле находится не более одной частицы, то каждая частица независимо совершает направленное пуассоновское блуждание, т. е. за малый интервал времени dt частица в узле x_k с вероятностью dt переходит в узел $x_k + 1$. Такой медленный пуассоновский процесс продолжается до тех пор, пока две частицы не займут один узел. Если это произошло, узел становится нестабильным и начинают действовать правила быстрой лавинной динамики. Лавина развивается дискретными шагами и в масштабе пуассоновского времени происходит мгновенно. Если на некотором шаге релаксационного процесса в узле i оказалось $n > 1$ частиц, на следующем шаге релаксация может происходить двумя способами:

1) с вероятностью $\mu_n\,(0 \leqslant \mu_n < 1)$ n частиц переходят из узла i в узел $(i+1)$;

2) с вероятностью $1 - \mu_n$ $(n-1)$ частиц переходят из узла i в узел $(i+1)$.

Быстрый релаксационный процесс продолжается до тех пор, пока все узлы не станут стабильными, т. е. в любом из них будет не более одной частицы. Такие динамические правила, несмотря на свою простоту, достаточны для получения нетривиальной лавинной динамики. Пуассоновский процесс играет роль теплового резервуара — поставщика микрофлуктуаций, возбуждающих макроскопические релаксационные процессы. Вероятности μ_n — это внешние параметры, характеризующие взаимодействие между частицами.

2. ОСНОВНОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ И АНЗАЦ БЕТЕ

Для вычисления средних характеристик системы требуется определить вероятностную меру на пространстве состояний системы. Обозначим $P(C,t) \equiv P(x_1, \ldots, x_p, t)$ вероятность конфигурации $C = \{x_1, \ldots, x_p\}$ в момент времени t (далее зависимость от t везде опущена). Описанный динамический процесс представляет собой марковский процесс в непрерывном времени. Поэтому, рассматривая лишь переходы между стабильными состояниями вида $C = \{x_k : k = 1, \ldots, p\,;\, x_1 < x_2 < \ldots < x_p\}$ и учитывая нестабильные конфигурации как промежуточные, можно записать для него основное кинетическое уравнение. При этом вероятность конфигурации, в которой нет ни одной пары частиц, занимающих соседние узлы, будет описываться обычным уравнением направленного дрейфа, т. е.

$$\partial_t P(x_1, \dots, x_p) = \mathrm{e}^{\gamma} \sum_{i=1}^{p} P(\dots, x_i - 1, \dots) - pP(x_1, \dots, x_p). \tag{1}$$

Рассмотрим теперь конфигурацию, содержащую одну пару частиц в соседних узлах. Переписав формально уравнение (1), мы получим член $P(\dots, x, x, \dots)$, лежащий за границей разрешенной области. Ему можно придать смысл, задав для него рекуррентное соотношение

$$P(\dots, x, x, \dots) = (1 - \mu_2)\mathrm{e}^{\gamma} P(\dots, x-1, x, \dots) + \\ + \mu_2 \mathrm{e}^{2\gamma} P(\dots, x-1, x-1, \dots). \tag{2}$$

Здесь нефизический член $P(\dots, x, x, \dots)$ выражен через физический член $P(\dots, x-1, x, \dots)$ и нефизический член $P(\dots, x-1, x-1, \dots)$, который, в свою очередь, выражается через эту же рекуррентную формулу. Применяя рекурсию до бесконечности, мы получим бесконечную сумму, состоящую только из вероятностей стабильных конфигураций. Если на решетке больше чем две частицы, требуется сформулировать подобные граничные условия для вероятности трех и более частиц, оказавшихся в одном узле. Однако условие двухчастичной приводимости, необходимое для интегрируемости кинетического уравнения, требует, чтобы все они сводились к двухчастичному (2). Нетрудно проверить, что это возможно только в случае, если вероятности μ_n определяются рекуррентным соотношением

$$\mu_2 \equiv \mu, \quad \mu_n = \mu(1 - \mu_{n-1}). \tag{3}$$

Введение в уравнение дополнительного члена e^{γ} позволяет рассматривать функцию $P(C)$ как производящую функцию суммарного пути $Y(t)$, пройденного частицами [7]. Тогда все семиинварианты пройденного пути, в частности средняя скорость частиц v, будут выражаться через производные по γ от максимального собственного значения $\Lambda(\gamma)$ в точке $\gamma = 0$:

$$v = \lim_{t \to \infty} \frac{\langle Y(t) \rangle}{t} = \frac{1}{p} \frac{d\Lambda}{d\gamma}\bigg|_{\gamma=0}. \tag{4}$$

Для решения полученных уравнений мы используем анзац Бете — обобщение метода Фурье на случай систем многих частиц со взаимодействием [8]. Будем искать решение в виде

$$P(x_1, \dots, x_p) = \mathrm{e}^{\Lambda t} \sum_{\sigma(1, \dots, p)} A(z_{\sigma_1}, \dots, z_{\sigma_p})\; z_{\sigma_1}^{-x_1} \dots z_{\sigma_p}^{-x_p}. \tag{5}$$

Здесь суммирование подразумевается по всем перестановкам $\sigma_{(1,\dots,p)}$ индексов $1, 2, \dots, p$. Подстановка решения в уравнение (1) дает выражение для собственного значения

$$\Lambda(\gamma) = \mathrm{e}^{\gamma} \sum_{i=1}^{P} z_i - p\,. \tag{6}$$

Соотношение (2) совместно с циклическими граничными условиями приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений Бете

$$z_k^N = (-1)^{p-1} \prod_{j=1}^{p} \frac{1-(1-\mu)\mathrm{e}^{\gamma} z_k - \mu \mathrm{e}^{2\gamma} z_j z_k}{1-(1-\mu)\mathrm{e}^{\gamma} z_j - \mu \mathrm{e}^{2\gamma} z_j z_k}. \tag{7}$$

Интересующее нас основное состояние, соответствующее максимальному собственному значению $\Lambda(0) = 0$, отвечает решению этой системы, для которого при $\gamma \to 0$ все корни стремятся к единице: $z_j \to 1$.

3. УРАВНЕНИЯ БЕТЕ В ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОМ ПРЕДЕЛЕ

После замены $z_k = (1-x_k)/(1+\mu x_k)\mathrm{e}^{-\gamma}$ и логарифмирования уравнения (7) приводятся к виду

$$p_0(x_k) = -\frac{\pi i}{N}(p-1) + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{p} \Theta(x_k/x_j) + \gamma, \tag{8}$$

где

$$p_0(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+\mu x}\right), \quad \Theta(y/x) = \ln\left(\frac{x+\mu y}{y+\mu x}\right). \tag{9}$$

Каждое решение уравнений Бете соответствует определенному выбору ветвей логарифма в функциях $p_0(x)$ и $\Theta(x)$. В частности, основному состоянию соответствует определение этих функций на комплексной плоскости с разрезами, уходящими на бесконечность вдоль вещественной оси, на краях которых мнимая часть функций принимает значения 0 и 2π. Легко убедиться, что корни x_j, соответствующие основному состоянию, при $\gamma = 0$ равномерно распределены на окружности, расположенной в малой окрестности точки $x = 0$. Рассмотрение частного случая $\mu = 0, N = 2p$, когда уравнения Бете сводятся к квадратному уравнению, показывает, что при отклонении γ от нуля окружность деформируется в асимметричный контур. При этом характерный радиус контура неаналитично зависит от γ таким образом, что в пределе

$N \to \infty$, $p \to \infty$, $p/N = \rho$ значению $\gamma = +0$ соответствует контур конечного размера.

Обобщая эти свойства на случай произвольных μ и ρ, предположим, что решения уравнений Бете, соответствующие основному состоянию, расположены на гладком контуре Γ, симметричном относительно реальной оси, с плотностью $R(x) = \lim_{N\to\infty} 1/(N(x_{k+1} - x_k))$ [9]. Тогда, после перехода от суммы к интегралу в уравнении (8), мы получим интегральное уравнение для плотности корней:

$$p_0(x) = -i\pi\rho + \gamma + \int_\Gamma \Theta(y/x)R(y)dy. \tag{10}$$

Единственный случай уравнения (10), поддающийся аналитическому решению, соответствует замкнутому контуру Γ, концы которого $x_0 = \bar{x}_0$ лежат на отрицательной части действительной оси. Тогда уравнение (10) имеет единственное решение, аналитическое в окрестности $x = 0$, удовлетворяющее условию нормировки $\int_\Gamma R(x) = \rho$ и соответствующее $\gamma = 0$:

$$R_0(x) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\rho}{x} + \frac{1}{1-x}\right). \tag{11}$$

Для того чтобы отойти от значения $\gamma = 0$, необходимо рассмотреть разомкнутый контур Γ, концы которого имеют малую мнимую часть $x_0 = |x_0|\mathrm{e}^{i(\pi-\epsilon)}$ [10]. Предполагая разложимость $R(x)$ в ряд по ϵ, можно решать уравнение (10) по теории возмущений, используя функцию (11) как нулевое приближение. Тогда в первых трех порядках получим

$$\begin{aligned} R(x) = R_0(x) + \frac{1}{2\pi i}\Bigg(&\frac{\epsilon^2 x_0}{6x}\frac{(1+x_0)}{(1-x_0)^3} + \\ &+ \frac{\epsilon^3}{3\pi(1-x_0)^2}\sum_{s\neq 0, s=-\infty}^{\infty}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{s+1}\frac{s(-\mu)^{|s|}}{1-(-\mu)^{|s|}}\Bigg), \end{aligned} \tag{12}$$

что дает вклад третьего порядка в $\gamma = -\epsilon^3 x_0/(3\pi(1-x_0)^2) + O(\epsilon^5)$. При этом для существования решения необходимо выполнение условия $x_0 = \rho/(\rho-1)$, однозначно фиксирующего положение концов контура Γ. Пользуясь полученным выражением для $R(x)$, мы можем вычислить собственное значение $\Lambda(\gamma)$ также до третьего порядка по ϵ:

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda(\gamma)}{N} &= -(\mu+1)\int_\Gamma \frac{xR(x)}{1+\mu x}dx = \\ &= \epsilon^3\frac{(\mu+1)x_0}{3\pi(1-x_0)^2}\left(\frac{x_0}{(1+x_0\mu)^2} - \sum_{s=1}^{\infty}\frac{s(-\mu)^{2s-1}x_0^s}{1-(-\mu)^s}\right), \end{aligned} \tag{13}$$

после чего вычисление скорости сводится к взятию предела $v = \lim_{\epsilon \to 0} \Lambda(\gamma)/\gamma p$:

$$v = \frac{(1-\rho)(1+\mu)}{(1-\rho(1+\mu))^2} + \frac{1+\mu}{\mu\rho} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s\mu^{2s}}{1-(-\mu)^s} \left(\frac{\rho}{\rho-1}\right)^s. \tag{14}$$

Из полученного выражения для средней скорости видно, что скорость становится бесконечной при приближении к критической плотности

$$\rho_c = \frac{1}{1+\mu}. \tag{15}$$

С точки зрения физики неравновесных критических явлений основной интерес представляет значение критических экспонент, характеризующих расходимости средних в системе, при приближении параметра порядка к критическому значению. Из формулы (14) видно, что средняя скорость ниже критической точки ведет себя как

$$v \sim |\rho - \rho_c|^{-\nu}, \quad \nu = 2. \tag{16}$$

Кроме того, средняя скорость лавинного процесса может трактоваться как среднее число частиц, переносимых лавиной. Поэтому полученная критическая экспонента характеризует закон изменения среднего размера лавины вблизи критической точки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Scher H., Shlesinger M., Bendler J.* // Physics Today. 1991. V. 44. P. 1; 26.
2. *Krug J., Spohn H.* Solids Far From Equilibrium / Ed. C. Godreche. Cambridge University Press, 1991.
3. *Burridge R., Knopoff L.* // Bull. Siesmol. Soc. Am. 1967. V. 57. P. 341.
4. *Paczuski M., Boettcher S.* // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 77. P. 111.
5. *Bak P., Tang C., Wiesenfeld K.* // Phys. Rev. Lett. 1987. V. 59. P. 381.
6. *Maslov S., Zhang Y. C.* // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75. P. 1550.
7. *Derrida B., Lebowitz J. L.* // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. P. 209.
8. *Gwa L.-H., Spohn H.* // Phys. Rev. Lett. 1992. V. 68. P. 725.
9. *Nolden I. M.* // J. Stat. Phys. 1992. V. 67. P. 155.
10. *Bukman D. J., Shore J. D.* // J. Stat. Phys. 1995. V. 78. P. 1277.