«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
2001, ТОМ 32, ВЫП. 7

УДК 539.12.01

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ ЧЕРНЫХ ДЫР И ИХ ОБОБЩЕНИЙ В ТЕОРИИ СУПЕРГРАВИТАЦИИ И СУПЕРСТРУН

А. Т. Филиппов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна
Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова

Дан краткий обзор двумерных и одномерных теорий дилатонной гравитации, взаимодействующей с полями материи. Обсуждаются основные классы интегрируемых моделей, найденных и изученных за последние пять лет. Очень кратко рассмотрены новые интегрируемые модели, сводящиеся к уравнениям Лиувилля и описывающие разнообразные объекты в теориях супергравитации и суперструн.

The $1+1$ and $0+1$ dimensional dilation gravity interacting with matter fields is briefly reviewed and main classes of intergrable models, found and investigated in the last five years, are discussed. The new integrable models related to the Liouville equations and describing different objects in supergravity and superstring theory are breifly considered.

Проблема квантования гравитации, несмотря на героические усилия нескольких поколений теоретиков, не была решена в XX веке и перешла в XXI век. В теории возмущений квантованию гравитации препятствует неперенормируемость. Однако существуют веские основания думать, что на малых расстояниях порядка планковской длины l_p трудности имеют еще более фундаментальный характер и вряд ли можно надеяться на их преодоление с помощью какого-либо улучшения теории возмущений или не слишком экстравагантной модификации теории Эйнштейна.

Тем не менее XX век оставил в наследство XXI веку не только проблемы, но и некоторые идеи для их решения. За последние 15 лет наиболее серьезные надежды на решение проблемы квантования гравитации связаны с теорией суперструн, которая естественно объединяет калибровочные теории и гравитацию. В рамках суперструнной теории возмущений возникли новые возможности вычисления квантовых однопетлевых гравитационных поправок, причем модификация теории Эйнштейна и теории возмущений с точки зрения стандартных представлений теории поля весьма экстравагантна.

Такой подход не решает, однако, фундаментальную проблему несовместимости стандартной квантовой механики с гравитацией на малых расстояниях. На достаточно наглядном уровне эта несовместимость связана с тем, что любая попытка измерения расстояний порядка l_p требует (по соотношению неопределенностей) локализации в этой области планковской энергии $\sim 1/l_p$, что неизбежно порождает горизонт (черную дыру) с радиусом $\sim l_p$. Эти микроскопические черные дыры должны быть квантовыми объектами весьма странной, не очень понятной пока природы (М. А. Марков).

Макроскопические черные дыры, возникающие при коллапсе больших масс вещества во Вселенной, привлекали внимание с первых дней существования релятивистской теории гравитации. Соответствующие точные решения уравнений Эйнштейна (решение Шварцшильда, Райснера–Нордстрема, Керра) известны давно, но их парадоксальные квантовые и термодинамические свойства были обнаружены сравнительно недавно. Один из парадоксов состоит в том, что статическая черная дыра определяется лишь массой M, зарядом Q и спином J, и в то же время изменения ее состояния описываются термодинамическими соотношениями, в частности, энтропия $S_{BH} = A/4G_N$ (где G_N — гравитационная постоянная; A — площадь горизонта) может только возрастать (Бекенштейн). Мы знаем, что энтропия должна быть пропорциональна $\log N(M, Q, J)$, где N — число микроскопических состояний. Вопрос, чтó это за состояния, не имеет простого и однозначного ответа. Другие проблемы связаны с эволюцией черных дыр и их квантовым излучением (Хокинг).

Наиболее последовательные попытки решения всех этих проблем связаны с новыми идеями в теории струн, возникшими в последнее десятилетие. Это p-браны в теориях супергравитации, их интерпретация в теории струн и связь с D-бранами, различные виды размерной редукции супергравитации (компактификация, редукция по симметрии, дуальность, AdS/CFT-соответствие). Это позволило дать интерпретацию экстремальных черных дыр (которые являются суперсимметричными солитонами) на языке размерной редукции некоторых конфигураций p-бран. Связь таких черных дыр с D-бранами позволила найти статистическое истолкование энтропии некоторых экстремальных черных дыр*.

Точная квантовая теория черных дыр не может быть построена без квантовой гравитации, которой на сегодня нет. Однако существуют упрощенные модели гравитации, которые можно точно решить в классическом пределе, а в некоторых случаях их удалось точно проквантовать. Это дилатонная гравитация в $1+1$-мерном пространстве. Достаточно общую теорию можно задать

*Простейший пример экстремальной черной дыры дает решение Райснера–Нордстрема (РН) при $M = Q$. К сожалению, черная дыра Шварцшильда, наиболее важная для астрофизики, подобному подходу пока не поддается.

следующим лагранжианом:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left[\phi R(g) + V(\phi,\psi) + \sum_{k=1}^{K} Z^{(k)}(\phi;\psi) g^{ij}\psi_i^{(k)}\psi_j^{(k)}\right], \tag{1}$$

где ϕ, $\psi^{(k)}$ — скалярные поля (ϕ — дилатон); g^{ij} — двумерная метрика; R — скалярная кривизна; $g = g_{00}g_{11} - g_{01}$; $\psi_i^{(k)} = \partial_i \psi^{(k)}$; V, $Z^{(k)}$ — некоторые функции (потенциалы), которые определяют физическое содержание теории. К такому лагранжиану, в частности, приводит сферическая редукция d-мерной теории Эйнштейна–Максвелла (ЭМ) (со скалярными полями):

$$V = 2[\alpha\phi^{-\nu} + \Lambda\phi^{\nu} - \beta Q^2\phi^{\nu-2}]; \quad Z^{(k)} = -\gamma_k\phi\,, \tag{2}$$

где $\nu = 1/n$; $n = d-2$; $\alpha = n(n-1)$; Q — электрический заряд*; Λ — космологическая постоянная; β, γ_k — некоторые числовые постоянные. Заметим, что после редукции использовалось преобразование Вейля $g_{ij} \to \Omega(\phi)g_{ij}$, позволяющее исключить из $\mathcal{L}$ кинетическую энергию дилатона. Она не имеет определенного знака, так как дилатон — часть d-мерной метрики

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j + \phi^{2\nu}d\Omega_n^2\,, \tag{3}$$

где $d\Omega_n^2$ — метрика на единичной n-мерной сфере. К двумерным теориям (1) сводится также теория Эйнштейна–Янга–Миллса (ЭЯМ).

В теории суперструн первоначально рассматривали самую простую модель $V = g$, $Z^{(k)} = -\gamma$, описывающую наиболее простые конфигурации основного состояния (Виттен, Каллан и др.). Хотя черные дыры в этой простейшей теории моделируют некоторые свойства многомерных черных дыр, ее геометрические свойства слишком просты ($R \equiv 0$). В последние пять лет были изучены более сложные объекты — многомерные обобщения черных дыр (см. [1–3]) в супергравитации, которая описывает возможные основные состояния суперструн. В результате компактификации исходной супергравитации получается теория (1), в которой V существенно зависит от ϕ и ψ, а число полей K и их взаимодействие определяются способом компактификации (для большинства изученных моделей $Z^{(k)} \sim \phi$, а V является суммой линейных экспонент по полям $\psi^{(k)}$).

Ценность двумерных моделей определяется возможностью их точного решения (интегрируемостью). Общие точные решения теории (1) с потенциалами (2) неизвестны, и они, по-видимому, неинтегрируемы. В начале 90-х годов были известны общие точные решения теорий с $V = g_0 + g_1\phi$ и

*В двумерном пространстве электромагнитное поле не распространяется и его можно исключить. Это дает Q^2-член в потенциале.

$Z^{(k)} = -\gamma_k$ (так называемое «минимальное» взаимодействие скалярных полей с гравитацией). Однако если $Z^{(k)} = 0$ и $V = V(\phi)$, то теория интегрируема при любом $V(\phi)$ (см. [4, 5]). Более того, она сводится к $0{+}1$-мерной калибровочной теории, и при любом потенциале $V(\phi)$ ее решение имеет один или более горизонтов. В двумерном случае горизонтом называется нуль метрики, $f(u,v) = 0$, в конформных координатах $ds^2 = -4f(u,v)du dv$, а редукция к размерности $0+1$ означает, что $\phi(u,v) = \phi(\tau)$, $f(u,v) = h(\tau)a'(u)b'(v)$, где $\tau = a(u) + b(v)$. Это, в частности, дает точные решения для сферических черных дыр в теории ЭМ (потенциал (2) при $\Lambda = 0$). Другая область применения этих и обсуждаемых ниже точных решений — космологические модели (см., например, [6]; здесь мы эти возможности не обсуждаем).

Точные решения теории (1) с $Z^{(k)} = 0$ возможны потому, что она на самом деле есть топологическая калибровочная теория. Взаимодействие со скалярными полями превращает ее в нелинейную калибровочную теорию поля, которая в общем случае неинтегрируема. В общем случае неинтегрируемы и динамические системы, описывающие статические состояния (или космологические модели). Используя конформные координаты в теории поля (1), можно записать лагранжиан такой динамической системы в виде

$$\mathcal{L}_{\rm st} = -\frac{1}{l(\tau)}\left[\dot{\phi}\dot{F} + \sum_{k=1}^{K} Z^{(k)}\dot{\psi}_{(k)}^2\right] + l(\tau)\exp(F)V(\phi,\psi)\,, \tag{4}$$

где точка обозначает дифференцирование по τ, а $l(\tau)$ — лагранжевский множитель.

Класс интегрируемых скалярных теорий (4) с одним скалярным полем был найден в [5] (он включает потенциал (2) при $\Lambda = 0$). Недавно автор получил обобщение этого результата на случай любого числа скалярных полей [8]. Имеются два интегрируемых класса:

$$V = \sum_{m=1}^{M} g_m \phi^{l_m} \exp L_m(\psi), \quad Z^{(k)} = -\gamma_k \phi\,, \tag{5}$$

$$V = \sum_{m=1}^{M} g_m \exp L_m(\psi,\phi), \quad Z^{(k)} = -\gamma_k\,, \tag{6}$$

где g_m — числа; L_m — линейные функции; число членов в V не должно превышать порядок системы (4) (т. е. $K+2$, где K — число скалярных функций). При определенных ограничениях на Z, l_m и коэффициенты линейных функций, уравнения движения сводятся к $K+2$ независимым одномерным уравнениям Лиувилля: $\ddot{\Psi} + 2g\exp(\Psi) = 0$. Выполнение этих условий легко проверяется. Например, для потенциалов (2) эти условия всегда выполнены. С другой стороны, можно найти все потенциалы, допускающие такую редукцию. Упоминавшиеся выше компактификации и размерные редукции супергравитации также приводят к интегрируемым потенциалам типа (5).

Интегрируемые и неинтегрируемые теории, в которых $V = V(\phi)$ и $Z = Z(\phi)$, не имеют горизонтов, если хотя бы одно скалярное поле не постоянно. Это локальное обобщение теоремы об «отсутствии волос» у черных дыр было доказано в работе [5]. Недавно удалось показать, что при условии $\partial_\psi V \neq 0$ хотя бы один горизонт (при непостоянных полях ψ) обязательно существует [7]. В этой же работе построено решение вблизи горизонта в виде рядов по степеням h. В интегрируемых моделях (5) и (6) всегда существует решение с двумя горизонтами, которые могут слиться в один (экстремальная черная дыра). Общее решение определено глобально и его можно максимально расширить (до сингулярностей). Оно определено $2K+2$ существенными интегралами движения. Решение с горизонтом зависит от $K+2$ существенных интегралов. Все решения весьма просто выражаются через известные элементарные функции, и их свойства легко исследуются при любом K.

Теории поля (1), в которых потенциалы принадлежат к интегрируемому классу (6), сводятся к независимым двумерным уравнениям Лиувилля $\Psi_{uv} + 2g \exp \Psi = 0$. Первый пример такой теории, сводящейся к двум уравнениям Лиувилля, был построен в работе [5]. Хотя уравнения Лиувилля формально независимы, их решения должны удовлетворять двум уравнениям связи

$$\phi_i i - \phi_i F_i = \sum_{k=1}^{K} Z^{(k)} \psi^2_{(k),i} \,. \tag{7}$$

Удивительным образом эти связи можно решить в явном аналитическом виде. Тем самым можно аналитически описать эволюцию сферически-симметричных распределений материи и, в частности, коллапс черных дыр и p-бран в достаточно общей геометрии.

Во всех упомянутых двумерных интегрируемых теориях поля взаимодействие скалярных полей с гравитацией минимально ($Z^{(k)} = \mathrm{const}$). Существует класс неминимальных интегрируемых теорий, в которых $V \equiv 0$, а функции $Z^{(n)}(\phi)$ подобраны таким образом, что уравнения для $\psi^{(k)}$ можно решить в явном аналитическом виде [12]. Хотя непосредственная связь этих теорий поля с гравитацией или суперструнами неизвестна и в них нет горизонтов, они могут быть полезными для аналитического описания достаточно реалистических космологических моделей.

В заключение кратко обрисуем состояние дел с проблемой квантования дилатонной гравитации. Еще пять лет назад оно представлялось весьма противоречивым. Наличие аномалий, казалось, приводило к тому, что даже простейшие квантовые теории резко отличались от классических [9]. Так, в чисто дилатонной гравитации (без скалярных полей) в классическом случае после фиксации калибровки остается лишь одна степень свободы. Это позволило последовательно проквантовать черные дыры [10]. В то же время квантование в духе «струнного квантования» приводит к бóльшему числу степеней свободы [9]. Этот парадокс был впервые разрешен в работе [11] и позднее подтвержден в других работах. Оказалось, что в чисто дилатонной теории поля существует квантование без аномалий, при котором число физических степеней свободы такое же, как и в классической теории. К сожалению, при наличии скалярных полей материи проблема аномалий пока не решена. Возможно, что ключ к последовательному квантованию интегрируемых моделей — квантовая теория уравнения Лиувилля. Она пока не завершена, но недавно в ней наметилось существенное продвижение. Работа в этом направлении очень важна, так как теперь есть основания думать, что теория Лиувилля в гравитации может сыграть такую же роль, как теория осциллятора в обычной теории поля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Maldacena J.* Black Holes in String Theory. hep-th/9607235.
2. *Stelle K.* BPS Branes in Supergravity. hep-th/9803116.
3. *Mohaupt T.* Black Holes in Supergravity and String Theory. hep-th/0004098.
4. *Banks T., O'Loughlin M.* // Nucl. Phys. B. 1991. V. 362. P. 649.
5. *Filippov A. T.* // Mod. Phys. Lett. A. 1996. V. 11. P. 1691–1704; Int. J. Mod. Phys. A. 1997. V. 12. P. 13–22.
6. *Cavagliá M., de Alfaro V., Filippov A. T.* // Int. J. Mod. Phys. A. 1995. V. 10. P. 611.
7. *Filippov A., Maison D.* To be published.
8. *Filippov A. T.* To be published.
9. *Cangemi D., Jackiw R., Zwiebach B.* // Ann. Phys. 1996. V. 245. P. 408–444.
10. *Cavagliá M., de Alfaro V., Filippov A. T.* // Int. J. Mod. Phys. D. 1995. V. 4. P. 661; Int. J. Mod. Phys. D. 1996. V. 5. P. 227–250.
11. *Cavagliá M., de Alfaro V., Filippov A. T.* // Phys. Lett. B. 1998. V. 424. P. 265–270.
12. *Filippov A. T., Ivanov V. G.* // Phys. Atom. Nucl. 1998. V. 61. P. 1639–1643; Yad. Fiz. 1998. V. 61. P. 1757–1761.