«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
2001, ТОМ 32, ВЫП. 7

УДК 512.81

КОНТРАКЦИИ АЛГЕБР ЛИ И РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

П. Винтерниц

Монреальский университет, Канада

А. А. Изместьев, Г. С. Погосян, А. Н. Сисакян

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна
Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова

Нами введена концепция «аналитических контракций групп Ли» для связи между разделением переменных в пространствах постоянной кривизны и в евклидовом и псевдоевклидовом пространствах. Данный метод является специальной реализацией контракций типа Иноню–Вигнера, в которой радиус кривизны рассматриваемого пространства представляется в качестве параметра контракции. Для проведения контракций в явном виде параметр контракции встраивается в базис самой алгебры Ли, в оператор Лапласа–Бельтрами, в полную систему коммутирующих операторов, систему координат и решения. Это позволяет получить асимптотические соотношения между специальными функциями, связанными с группами $O(n)$ и $O(n,1)$, с одной стороны, и евклидовыми и псевдоевклидовыми группами — с другой. Построен также графический метод, иллюстрирующий аналитические контракции.

We introduce the concept of «analytic Lie group contractions» to relate the separation of variables in spaces of constant nonzero curvature to separation in Euclidean or pseudo-Euclidean spaces. These are specific realizations of Inönü–Wigner contractions in which the contraction parameter is the radius of curvature of the considered space. The parameter is introduced explicitly into the basis of the Lie algebra, the Laplace–Beltrami operator, the complete set of commuting operators, the coordinates themselves and the solutions. This enables us to obtain asymptotic formulas connecting special functions related to the groups $O(n)$ and $O(n,1)$ to those related to Euclidean and pseudo-Euclidean groups. A graphical method of interpreting analytical contractions is introduced.

Впервые контракции алгебр Ли были введены в физику Иноню и Вигнером в 1953 г. [1] как математическое выражение философской идеи, а именно *«принципа соответствия»*, согласно которому если новая теория обобщает старую, то должен существовать хорошо определенный предел, который восстанавливает результаты старой теории. Примерами таких предельных переходов или контракций может служить связь между релятивистскими и нерелятивистскими теориями: когда скорость света $c \to \infty$, группа Пуанкаре преобразуется в группу Галилея, а также соответствие между квантовой и классической механикой при $\hbar \to 0$.

На сегодняшний день в литературе известны два основных типа контракций алгебр Ли. Первый — это стандартные контракции Иноню–Вигнера, которые можно интерпретировать как сингулярные преобразования базиса алгебры Ли. Ко второму типу относятся введенные позднее так называемые градуированные контракции. Это более общий тип контракций (включающий в себя как дискретные, так и непрерывные контракции), суть которого состоит во введении неких параметров, модифицирующих структурные константы алгебры Ли относительно определенной градуировки, и затем устремлении этих параметров к нулю.

Хорошо известно, что существует тесная связь между теорией специальных функций и теорией групп Ли, прекрасно изложенная в монографиях Виленкина (1965) [2], Тальмана (1968) [3] и Миллера (1968) [4]. Фактически все свойства широкого класса специальных функций можно получить из теории представлений групп Ли, используя тот факт, что специальные функции появляются как базисные функции неприводимых представлений, или как матричные элементы для матрицы преобразований, или как коэффициенты Клебша–Гордана, или в каком-нибудь другом виде.

Одним из очень полезных применений теории групп Ли в этом контексте является алгебраический подход к разделению переменных для дифференциальных уравнений в частных производных. В этом подходе системы координат, которые допускают разделение переменных в уравнениях Лапласа, Гамильтона–Якоби, Шредингера и других инвариантных уравнениях, характеризуются полным набором коммутирующих операторов второго порядка. Они лежат в обертывающей алгебре алгебры Ли группы изометрии соответствующего однородного пространства.

Вопрос, который до сих пор не был отражен должным образом в современной литературе, это связь между разделением переменных в различных пространствах или в однородных пространствах различных групп Ли. В частности, представляет интерес исследование поведения разделяющих координат, полного набора коммутирующих операторов, соответствующих собственных функций, а также межбазисных разложений при контракциях алгебры Ли.

В работах [5–12] мы представили новый аспект теории контракций групп и алгебр Ли: а именно связь между ортогональными системами координат (допускающих полное разделение переменных в уравнении Гельмгольца), определенных на пространствах постоянной кривизны и в плоском пространстве и связанных при помощи контракций их групп изометрии.

В статьях [5–7] на примере двух однородных пространств: двумерной сферы $S_2 \sim O(3)/O(2)$ и двумерного гиперболоида $L_2 \sim O(2,1)/O(2)$ в рамках метода Иноню–Вигнера вводится концепция **аналитических контракций**, когда параметр контракции — радиус сферы R — встраивается в инфинитезимальные операторы и полный набор коммутирующих операторов, а не только в структурные константы. Используя данный метод, удается проследить контракции при $R \to \infty$ на всех уровнях: алгебры Ли, представленной векторными полями, оператора Лапласа–Бельтрами в трех однородных пространствах, операторов второго порядка в обертывающих алгебрах, характеризующих системы координат, в самих системах координат, допускающих разделение переменных, в обычных дифференциальных уравнениях, а также разделенных собственных значений инвариантных операторов. В статье [5], в частности, показано, что в пределе $R \to \infty$ сферическая система координат на сфере S_2 может перейти в полярную или декартову системы координат на двумерной евклидовой плоскости $E_2 \sim E(2)/O(2)$, а из эллиптической системы координат на сфере с помощью контракций могут быть получены все четыре системы координат на плоскости, а именно: полярная, декартова, параболическая и эллиптическая. Контракции систем координат для двухполостного гиперболоида L_2, представляющего более «богатый» случай, прослежен в работах [6] и [7]. На основе контракций от алгебры $o(2,1)$ к алгебрам $e(2)$ и $e(1,1)$ найдена связь между всеми девятью системами координат на L_2 и четырьмя системами координат на двумерной евклидовой плоскости E_2 и девятью системами координат на псевдоевклидовой плоскости (двумерное пространство Минковского) $E_{1,1} \sim E(1,1)/O(2)$. Как и в случае эллиптической системы координат на сфере, эллиптическая система координат на гиперболоиде переходит во все четыре системы координат на плоскости E_2.

Контракции на трехмерной сфере S_3 изучены в статье [8], а в работе [9] представлены всевозможные контракции для подгрупповых типов координат на S_n в подгрупповые типы координат в E_n при любом n. Развит графический формализм, иллюстрирующий эти переходы. Контракции для неподгрупповых систем координат исследованы в работе [10].

В работах [11, 12] рассмотрены контракции в межбазисных разложениях и коэффициентах перекрытия. Коэффициенты перекрытия для различных базисов, соответствующих изоморфной подгрупповой цепочке, включают в себя матрицу вращений, а в случае неизоморфной подгрупповой цепочки выражаются через коэффициенты Клебша–Гордана и Рака. Для всех них найдены асимптотические формулы. В недавней работе [13] метод аналитических контракций был проиллюстрирован также при доказательстве известной теоремы сложения для двух функций Бесселя.

Исследованию градуированных контракций алгебры $e(2,1)$ посвящена работа [14]. В ней показано, что соответствующая алгебра при контракциях деформируется в широкое семейство шестимерных алгебр, среди которых разрешимые, нильпотентные и неразрешимые алгебры.

Среди возможных приложений контракций алгебр Ли мы можем упомянуть следующие. В теории специальных функций контракции позволяют находить как новые асимптотические формулы, так и новые разложения. В теории конечномерных интегрируемых или суперинтегрируемых систем контракции обеспечивают связь между такими системами в кривом и плоском пространстве. Контракции играют также существенную роль в теории квантовых групп, и возможно, что методы, используемые при описании групп Ли, могут быть обобщены также на случай квантовых групп.

Отметим, наконец, что методы, приведенные в работах [5–12], могут быть также легко адаптированы к другим проблемам контракций. К примеру, можно рассмотреть контракции от подгрупповых и неподгрупповых систем координат для группы $O(n, q)$ к системам координат на евклидовом и псевдоевклидовом пространствах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Inönü E., Wigner E. P.* On the Contraction of Groups and Their Representations // Proc. Nat. Acad. Sci. (US). 1953. V. 39. P. 510–524,
2. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965.
3. *Talman J. D.* Special Functions: A Group Theoretic Approach. Benjamin; N.Y., 1968.
4. *Miller W., Jr.* Lie Theory and Special Functions. N.Y.: Academic Press, 1968.
5. *Izmest'ev A. A. et al.* Contraction of Lie Algebras and Separation of Variables // J. of Phys. A: Mathematical and General. 1996. V. 29. P. 5940–5962.
6. *Izmest'ev A. A. et al.* Contraction of Lie Algebras and Separation of Variables. Two-Dimensional Hyperboloid // Intern. J. of Modern Phys. A. 1997. V. 12(1). P. 53–61.
7. *Izmest'ev A. A., Pogosyan G. S., Sissakian A. N.* Contractions of Lie Algebras and Separation of Variables. From Two-Dimensional Hyperboloid to Two-Dimensional Minkowsky Space // Proc. of the Intern. Symposium on Quantum Theory and Symmetries, Goslar, Germany, July 18–22, 1999.
8. *Izmest'ev A. A., Pogosyan G. S.* Contraction of Lie Algebras and Separation of Variables on Three-Dimensional Sphere // Proc. of the «Physical Applications and Mathematical Aspects of Geometry, Groups, and Algebras», Singapore, 1997.
9. *Izmest'ev A. A. et al.* Contraction of Lie Algebras and Separation of Variables. N-Dimensional Sphere // J. Math. Phys. 1999. V. 40. P. 1549–1573.
10. *Kalnins E. G., Miller W., Jr., Pogosyan G. S.* Contractions of Lie Algebras: Applications to Special Functions and Separation of Variables // J. of Phys. A: Mathematical and General. 1999. V. 32. P. 4709–4732.
11. *Izmest'ev A. A. et al.* Inönü–Wigner Contractions for Interbases Expansions on 2- and 3-Dimensional Spheres // Proc. of the III Intern. Workshop on Classical and Quantum Integrable Systems / Ed. L. G. Mardoyan, G. S. Pogosyan, A. N. Sissakian. Dubna, 1998.
12. *Izmest'ev A. A. et al.* Contractions of Lie Algebras and the Separation of Variables. Interbases Expansions // J. of Phys. A: Mathematical and General. 2001. V. 34.
13. *Pogosyan G. S. et al.* Graf's Addition Theorem Obtained from $SO(3)$ Contraction // ТМФ (в печати).
14. *Patera J., Pogosyan G., Winternitz P.* Graded Contractions of the Lie Algebra $e(2, 1)$ // J. of Phys. A: Mathematical and General. 1999. V. 32. P. 805–826.