«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
2001, ТОМ 32, ВЫП. 7

УДК 539.12.01

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД В КВАНТОВОЙ ХРОМОДИНАМИКЕ

Д. В. Ширков, И. Л. Соловцов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна
Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова

Предложен ренорминвариантный аналитический подход к выполнению вычислений в квантовой хромодинамике, в котором ренормгрупповое суммирование коррелируется с аналитичностью. Выражения для инвариантного заряда и матричных элементов модифицируются таким образом, что нефизические особенности типа призрачного полюса не появляются вообще. В рамках новой схемы демонстрируется устойчивость результатов расчетов для ряда физических процессов по отношению к высшим петлевым эффектам и выбору ренормализационного предписания. Показано, что аналитический подход позволяет самосогласованным образом определить инвариантный заряд во времениподобной области. Проанализирована роль так называемых π^2-членов. Для неупругого лептон-адронного рассеяния развит метод изучения эффектов, обусловленных массой мишени, основанный на интегральном представлении для структурных функций, которое аккумулирует общие свойства локальной квантовой теории поля. Показано, что полученные таким образом выражения для структурных функций находятся в согласии со спектральным свойством.

A renormalization invariant analytic approach of performing calculations in quantum chromodynamics, in which the renormalization group summation is correlated with the analyticity is suggested. The expressions for the invariant charge and matrix elements are modified such that the unphysical singularities of the ghost pole type do not appear at all. Using the new scheme, the results of calculations for a number of physical processes are shown to be stable with respect to higher-loop effects and the choice of the renormalization prescription. It is argued that the analytic approach allows us to give a self-consistent definition of the running coupling in the timelike region. A role of the so-called π^2-terms is analyzed. A method of studying target mass effects based on the integral representation for structure functions of the inelastic lepton-hadron scattering, which accumulates general properties of local quantum field theory, is developed. It is shown that expressions obtained for the structure functions have a correct spectral property.

Неотъемлемой частью современной квантовой теории поля (КТП) является сформулированный в середине 50-х гг. [1] метод ренормализационной группы (РГ). Сегодня рассмотрение практически всех адронных процессов на основе квантовой хромодинамики (КХД) немыслимо вне ренормгруппового анализа. Хорошо известно, что непосредственное решение РГ-уравнения для инвариантного заряда в теории возмущений (ТВ) приводит к нефизическим особенностям, например — в однопетлевом приближении — к призрачному полюсу. Учет следующих, многопетлевых, поправок не меняет сути дела, а лишь генерирует дополнительные разрезы. Существование такого рода особенностей противоречит общим принципам локальной КТП [2].

Еще в конце 50-х гг. Н. Н. Боголюбовым, А. А. Логуновым и Д. В. Ширковым [3] в контексте квантовой электродинамики был предложен способ разрешения этой проблемы, состоящий в объединении метода РГ с требованием аналитичности.

Развитие идеи объединения ренорминвариантности и аналитичности в случае КХД [4] обнаружило новые важные свойства аналитического подхода [5–8]. К их числу относится наличие у инвариантного аналитического заряда $\bar{\alpha}_{\rm an}(Q^2)$ инфракрасно-стабильной точки, которая оказывается универсальной в том смысле, что ее значение $\bar{\alpha}_{\rm an}(0) = 4\pi/\beta_0$ определяется уже однопетлевым вкладом, т. е. не изменяется при учете многопетлевых поправок и, следовательно, является инвариантным относительно выбора схемы перенормировки. Это значение не зависит от экспериментально определяемого масштабного параметра Λ, а набор кривых $\bar{\alpha}_{\rm an}(Q^2/\Lambda^2)$, отвечающих различным значениям Λ, представляет собой пучок с общей точкой $\bar{\alpha}_{\rm an}(0)$. Инвариантная аналитическая формулировка существенно модифицирует поведение $\bar{\alpha}_{\rm an}(x)$ в инфракрасной области, делая ее устойчивой к высшим петлевым поправкам. Двухпетлевое приближение отличается от однопетлевого не более чем на $\simeq 10\,\%$ в области малых Q^2, а трехпетлевое отличается от двухпетлевого лишь на $\simeq 1\,\%$. Такая ситуация кардинально отличается от ситуации в обычной РГ-теории возмущений, для которой характерна сильная неустойчивость по отношению к последующим петлевым поправкам в области малых $Q^2 \simeq \Lambda^2$. Отметим также, что поддержка корректных аналитических свойств по Q^2 оказывается существенной для самосогласованного определения эффективного заряда во времениподобной области [9]. Кроме того, при описании конкретных процессов, например инклюзивного распада τ-лептона, непротиворечивое рассмотрение возможно только лишь при наличии отмеченных выше аналитических свойств.

В аналитической теории возмущений (АТВ) рассматриваемая величина аппроксимируется нестепенным рядом. Вместо степеней параметра разложения в ТВ — пертурбативного инвариантного заряда $\bar{\alpha}_s$ — возникают новые несингулярные функции, различные для пространственно- и времениподобной областей. Анализ таких процессов, как e^+e^--аннигиляция в адроны и инклюзивный τ-распад, а также правил сумм неупругого лептон-адронного рассеяния, проведенный по АТВ-алгоритму, показал, что, помимо петлевой стабильности, получаемые результаты обладают, по сравнению с обычным подходом, весьма слабой чувствительностью к выбору схемы перенормировок.

Аналитический инвариантный заряд $a(Q^2) = \alpha_s(Q^2)/(4\pi)$ определяется спектральной функцией $\rho(\sigma, a)$ через представление Челлена–Лемана:

$$\bar{a}_{\rm an}(Q^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\sigma \frac{\rho(\sigma, a)}{\sigma + Q^2 - i\epsilon}. \quad (1)$$

Вычисляя эту функцию в приближении главных логарифмов, находим [4]:

$$\bar{a}^{(1)}_{\rm an}(Q^2/\Lambda^2) \,=\, \frac{1}{\beta_0}\left[\frac{1}{\ln Q^2/\Lambda^2} \,+\, \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - Q^2}\right]. \tag{2}$$

Первое слагаемое в правой части сохраняет обычное ультрафиолетовое поведение бегущего заряда и обеспечивает свойство асимптотической свободы теории. Второе слагаемое, которое появляется из спектрального представления, гарантирует правильные аналитические свойства заряда, компенсируя призрачный полюс при $Q^2 = \Lambda^2$. Зависимость этого слагаемого от исходной константы связи такова, что при разложении в ряд ТВ след от него теряется. Таким образом, требование выполнения правильных аналитических свойств приводит к появлению степенных по Q^2 вкладов, невидимых в исходном пертурбативном разложении. Отметим также, что, в отличие от электродинамики, в КХД, благодаря свойству асимптотической свободы, проявление таких непертурбативных вкладов в эффективном заряде становится ощутимым не при фантастически высоких энергиях (недоступных экспериментально), а в области энергий и передач импульса, вполне реальных в современных опытах.

Таким образом, синтез ренормгрупповой инвариантности и аналитичности приводит к аналитическому инвариантному заряду без логарифмического полюса и с конечным ИК-значением* $\bar{\alpha}_{\rm an}(0) = 4\pi/\beta_0 \simeq 1{,}396$. Это предельное значение не зависит от экспериментальной информации, связанной с точкой нормировки $a = a(\mu^2)$ или параметром Λ, а определяется лишь коэффициентом β-функции, связанным с общей групповой структурой лагранжиана. На рис. 1 изображен пучок кривых $\bar{\alpha}_{\rm an}(Q^2)$, отвечающих различным значениям Λ, а также соответствующие тем же Λ обычные ТВ-решения. Изучение высших поправок к аналитическому заряду** показало удивительную стабильность результатов. Этот факт*** демонстрируется на рис. 2.

Свойства аналитичности важны для корректного определения эффективного заряда во времениподобной области. Его выражение через спектральную функцию имеет следующий вид [9]:

$$\bar{a}_s(s) \,=\, \frac{1}{\pi}\int_s^\infty \frac{d\sigma}{\sigma}\,\rho(\sigma)\,. \tag{3}$$

*Для численных оценок при малых Q^2 мы используем число активных кварков $f = 3$.

**В этом случае восстановление правильных аналитических свойств происходит не только путем устранения призрачного полюса, но и за счет вычитания нефизических разрезов, обусловленных двойной логарифмической зависимостью в пертурбативном заряде. Для получения количественных результатов в высших порядках можно использовать как непосредственный численный расчет, так и выражение решений РГ-уравнений в терминах функции Ламберта [10]. Имеющиеся приближенные формулы (см. [6]) удобны для численных оценок.

***Трехпетлевая $\overline{\rm MS}$-функция практически совпадает с двухпетлевой с точностью порядка 1 % и на рисунке не приводится.

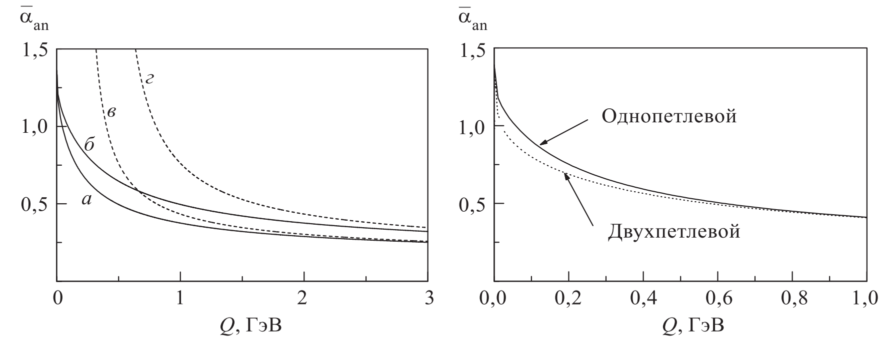


Рис. 1. Поведение аналитического инвариантного заряда $\bar{\alpha}_{\rm an}(Q^2)$ для $\Lambda = 200$ (*а*) и 400 МэВ (*б*). Кривые (*в*) и (*г*) соответствуют теории возмущений для тех же значений параметра Λ

Рис. 2. Стабильность аналитического инвариантного заряда по отношению к высшим петлевым поправкам. Использована нормировка $\bar{\alpha}_{\rm an}(M_\tau^2) = 0,34$ для $f = 3$

В работах Ю. Швингера для случая квантовой электродинамики была выдвинута гипотеза о возможной пропорциональности ренормгрупповой функции Гелл-Манна–Лоу и спектральной плотности. В последующем это предположение подтвердилось на двухпетлевом уровне. Однако трехпетлевые вклады привели к нарушению такой взаимосвязи. Закон эволюции заряда (3), определенного во времениподобной области, будет отличаться от закона эволюции бегущего заряда в евклидовой области, что ведет к иной β-функции. Именно эта β-функция, отвечающая эффективному заряду во времениподобной области, и оказывается пропорциональной спектральной плотности. Таким образом, гипотеза Ю. Швингера оказалась справедливой для β-функции, соответствующей эффективному заряду, определенному во времениподобной области.

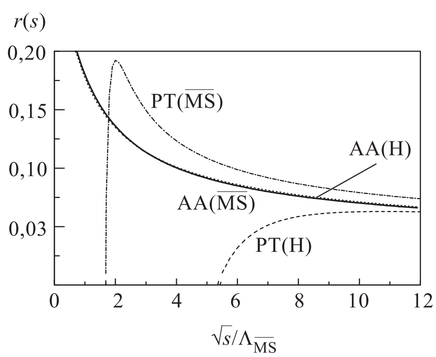
Ряды АТВ выгодно отличаются от пертурбативных разложений в смысле свойств сходимости. Этот факт демонстрируется в таблице, где в качестве примера взяты правила сумм Гросса–Льювеллина Смита для неупругого лептон-нуклонного рассеяния при $Q^2 = 3,1$ ГэВ^2 (пространственноподобная область) и процесс инклюзивного распада τ-лептона ($M_\tau = 1,777$ ГэВ, времениподобная область).

Неизбежный обрыв ряда теории возмущений, то есть аппроксимация физической величины некоторой его частичной суммой, приводит к известной проблеме зависимости результата от выбора ренормализационного предписания. Этот факт служит источником теоретической неопределенности в описании экспериментальных данных. Для решения вопроса об устойчивости получаемых результатов недостаточно исследовать лишь петлевую стабиль-

Вклады различных порядков при анализе экспериментальных данных по теории возмущений и в аналитическом подходе

Процесс	Метод	Первый порядок, %	Второй порядок, %	Третий порядок, %
Правила сумм Гросса–Льювеллина Смита	ТВ АТВ	65,1 75,7	24,4 20,7	10,5 3,6
Инклюзивный распад τ-лептона	ТВ АТВ	54,7 87,9	29,5 11,0	15,8 1,1

ность; находясь в рамках какой-либо одной из схем перенормировок, следует рассмотреть также их схемную устойчивость. В работе [5] исследован вопрос о схемной зависимости результатов аналитической аппроксимации. В качестве примера проанализируем схемную зависимость КХД-вклада $r(s)$ в R-отношение для процесса e^+e^--аннигиляции в адроны, возникающую при обрыве рядов ТВ и АТВ. Рассмотрим две схемы: традиционную $\overline{\text{MS}}$ и так называемую схему т'Хофта (Н). Обе эти схемы имеют примерно один и тот же индекс сокращений и в этом смысле близки друг к другу. Результаты расчета, выполненного в третьем порядке в рамках ТВ и АТВ, показаны на рис. 3. Как видно из этого рисунка, применение аналитического подхода позволяет



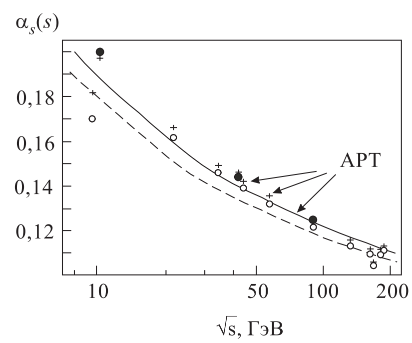


Рис. 3. График функции $r(s)$, вычисленной в теории возмущений (PT) и в аналитическом подходе (AA) для двух схем перенормировки: $\overline{\text{MS}}$ и H

Рис. 4. Новый анализ пятикварковой времениподобной области. Различие в положении точек, обозначенных (+) и ($\circ$, $\bullet$), обусловлено π^2-поправками. Сплошная АТВ-кривая соответствует $\Lambda^{(5)}_{\text{MS}} = 270$ МэВ и $\alpha_s(M_Z) = 0,124$. Для сравнения приведена стандартная кривая, обозначенная точками и соответствующая $\Lambda^{(5)}_{\text{MS}} = 213$ МэВ и $\alpha_s(M_Z) = 0,118$

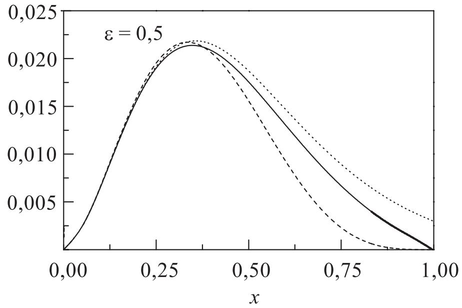


Рис. 5. Структурные функции для $\varepsilon = M^2/Q^2 = 0,5$. Штриховая кривая соответствует исходному партонному распределению $F(x)$. Функции $W(x, \varepsilon = M^2/Q^2)$ содержат зависимость от массы мишени и получены двумя способами: на основе метода ξ-скейлинга (соответствующая кривая обозначена точками) и на основе представления ЙЛД (сплошная линия)

кардинальным образом снизить теоретическую неопределенность, связанную со схемным произволом*.

Во времениподобной области наблюдаемые представляются в виде нестепенных разложений по функциям, которые суммируют так называемые π^2-члены. Анализ s-канальных наблюдаемых, выполненный в [11], привел к следующим выводам. В области энергий $\geq$ 50 ГэВ и $f = 5$, по сравнению со стандартным NLO-анализом, у константы связи α_s возникает эффективный положительный сдвиг на величину $\Delta\bar{\alpha}_s \simeq +0,002$. При энергиях $10 \div 50$ ГэВ $(f = 5)$ величина этого сдвига возрастает: $\Delta\bar{\alpha}_s \simeq +0,003$. В результате возникает новое значение инвариантного заряда на масштабе массы Z-бозона: $\bar{\alpha}_s(M_Z^2) = 0,124$. Полученные результаты приведены на рис. 4.

В случае неупругого лептон-адронного рассеяния общие принципы КТП, такие как эрмитовость, ковариантность, спектральность и причинность [2], аккумулирует интегральное представление Йоста–Лемана–Дайсона (ЙЛД). Это представление было использовано в [12] для изучения эффектов, связанных с массой мишени. Обычно применяемый для этой цели метод ξ-скейлинга приводит к противоречию со спектральным условием** при $x = 1$. Использование представления ЙЛД позволяет получить корректное выражение. Соответствующий результат иллюстрируется на рис. 5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* // ДАН СССР. 1955. Т. 103. С. 203; ДАН СССР. 1955. Т. 103. С. 391; ЖЭТФ. 1956. Т. 30. С. 77; Nuovo Cim. 1956, V. 3. P. 845.
2. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1986.

---

*Значительное уменьшение схемной зависимости в АТВ имеет место и для других процессов, таких, как, например, инклюзивный распад τ-лептона и правила сумм Бьеркена и Гросса–Льювеллина Смита для неупругого лептон-адронного рассеяния.

**Структурная функция, зависимость от массы мишени которой получена на основе ξ-подхода с использованием вклада лидирующего твиста, не исчезает при $x = 1$.

3. *Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Ширков Д. В.* // ЖЭТФ. 1959. Т. 37. С. 805.
4. *Shirkov D. V., Solovtsov I. L.* // JINR Rapid Commun. 1996. No. 2[76]. P. 5; hep-ph/9604363; Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. P. 1209.
5. *Solovtsov I. L., Shirkov D. V.* // Phys. Lett. B. 1998. V. 442. P. 344.
6. *Соловцов И. Л., Ширков Д. В.* // ТМФ. 1999. Т. 120. С. 482.
7. *Shirkov D. V.* // Nucl. Phys. (Proc. Suppl.). 1998. V. 64. P. 106; Lett. Math. Phys. 1999. V. 48. P. 135; ЯФ. 1999. Т. 62. С. 2082; ТМФ. 1999. Т. 119. С. 55; JINR Preprint E2-2000-46. Dubna, 2000; hep-ph/0003242; JINR Preprint E2-2000-298. Dubna, 2000; hep-ph/0012283.
8. *Milton K. A., Solovtsov I. L., Solovtsova O. P.* // Phys. Lett. B. 1997. V. 415. P. 104; Phys. Lett. B. 1998. V. 439. P. 421; Proc. of the XXIX Intern. Conf. on High Energy Physics, Vancouver, B. C., Canada, July 23–29, 1998. V. II. P. 1608; Phys. Rev. D. 1999. V. 60. P. 016001;
Milton K. A. et al. // Eur. Phys. J. C. 2000. V. 14. P. 495;
Соловцова О. П. // Письма ЖЭТФ. 1996. Т. 64. С. 664;
Milton K. A., Solovtsova O. P. // Phys. Rev. D. 1998. V. 57. P. 5402.
9. *Milton K. A., Solovtsov I. L.* // Phys. Rev. D. 1997. V. 55. P. 5295.
10. *Magradze B. A.* // Int. J. Mod. Phys. A. 2000. V. 15. P. 2715; JINR Preprint E2-2000-222. Dubna, 2000; hep-ph/0010070; *Kourashev D. S.* hep-ph/0010072.
11. *Shirkov D. V.* JINR Preprint E2-2000-211. Dubna, 2000; hep-ph/0009106.
12. *Solovtsov I. L.* // Part. and Nucl., Letters. 2000. No. 4[101]. P. 10.