

УДК 530.145

МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ ДВУМЕРНОЙ ГРАВИТАЦИИ

*А. Д. Миронов**

Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИИ ДВУМЕРНОЙ ГРАВИТАЦИИ	1051
Общие замечания	1051
Физическая гравитация	1059
Содержание и мотивация работы	1070
ДИСКРЕТНЫЕ МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ	1077
Эрмитова одноматричная модель	1078
Эрмитовы многоматричные модели	1087
Конформные матричные модели	1097
Унитарная одноматричная модель	1105
Общие свойства дискретных матричных моделей	1116
ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ	1133
Приложение. ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫЕ ИЕРАРХИИ	1135
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1139

*E-mail: mironov@lpi.ac.ru, mironov@itep.ru

УДК 530.145

МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ ДВУМЕРНОЙ ГРАВИТАЦИИ

*А. Д. Миронов**

Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва

Обзор посвящен одному из наиболее ярких достижений фундаментальной физики предыдущего десятилетия — непертурбативному решению теории некритических струн — двумерной гравитации. Это решение удастся построить в терминах некоторых матричных моделей. Следует отметить, что матричные модели применяются для описания самых разных физических систем. Обычно эти системы принадлежат к классу универсальности определенных матричных моделей. Помимо того, что найденное решение двумерной гравитации оказалось едва ли не первым непертурбативным решением нетривиальной квантовой теории поля, имеющей важные применения, найденные общие свойства решения оказались едва ли не важнее самого решения и в настоящий момент находят применение в различных областях теоретической физики. Эти общие свойства — интегрируемость и наличие бесконечного количества тождеств Уорда, полностью определяющих теорию. В настоящем обзоре мы в основном концентрируемся именно на общих свойствах матричных моделей.

The review is devoted to one of the most brilliant achievements in fundamental physics of the previous decade, to nonperturbative solution of the theory of noncritical strings — two-dimensional gravity. This solution can be constructed in terms of some matrix models. In fact, matrix models are applied to describing different physical systems. These physical systems typically lie in universality classes of certain matrix models. Besides the solution to two-dimensional gravity constructed is likely the first nonperturbative solution to a nontrivial quantum field theory with important physical applications, the general properties of the solution are likely more important than the solution itself, and are applied at the moment in different fields of theoretical physics. These general properties are integrability and infinitely many Ward identities which define the theory completely. In the review we mainly concentrate on these general properties of matrix models.

1. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИИ ДВУМЕРНОЙ ГРАВИТАЦИИ

1.1. Общие замечания. Главным достижением современной теории струн явилось ее пертурбативное описание вблизи классических решений струнных уравнений движения — вакуумов квантовой теории. Такие вакуумы описываются двумерными конформными теориями, и первой основной задачей было описание квантовых поправок, связанных с флуктуациями струнных полей,

*E-mail: mironov@lpi.ac.ru, mironov@itep.ru

отвечающих указанным конформным теориям. Эта задача к настоящему моменту в основном решена (см., например, обзоры [1,2] и ссылки в них). Имеется, конечно, и другая задача — описание деформаций самих конформных моделей, т. е. сдвиг в конфигурационном пространстве. Это типичный непертурбативный эффект. К сожалению, существующая формулировка теории струн на языке первичного квантования не позволяет описывать непертурбативные эффекты, т. е. «связывать» вакуумы теории непрерывными траекториями. В то же время все попытки создать удовлетворительную полевую теорию струн, т. е. вторично проквантовать ее, оказались неудачными.

Первым шагом в нужном направлении явились попытки пертурбативных деформаций конформных теорий [3–5]. Конечно, это дало только описание окрестности критических точек, но не прояснило глобальной структуры конфигурационного пространства. В то же время уже в работах [3,4] (см. также [6,7]) отмечалась важность *интегрируемых* деформаций конформных теорий. Однако действительно серьезный прогресс в понимании был достигнут в процессе исследования теорий струн с малым числом степеней свободы — некритических струн в пространстве-времени размерностью не больше 2 (см. обзоры [8,10]).

Построение теории некритических струн началось с определяющей статьи А. Полякова [11,12] (см. также [13]), где автор предложил заменить функциональный интеграл с существенно нелинейным действием Намбу–Гото, применявшийся до того в теории струн, на интеграл с дополнительным усреднением по двумерным метрикам и с общекоординатно-инвариантным квадратичным действием, т. е. на функциональный интеграл двумерной гравитации. Интегралы Намбу–Гото и Полякова совпадают на классических уравнениях движения (при этом последовательное квантование действия Намбу–Гото затруднено из-за сильной нелинейности действия). Однако принципиальным отличием поляковского подхода является то, что он интерпретирует струнные переменные как поля на двумерной поверхности. Этот язык позволяет рассматривать координаты пространства-времени как полевые переменные и должен, в принципе, позволить описать динамический механизм возникновения нашего пространственно-временного многообразия.

Благодаря большой калибровочной инвариантности и специфике двух измерений действие Полякова может быть сделано не зависящим от метрики. Это явление, однако, разрушается на квантовом уровне конформной аномалией, в результате чего гравитационные моды некритической струны описываются (двумерным) действием Лиувилля. Конечно, в критических размерностях (26 для бозонной струны и 10 для фермионной) конформная аномалия исчезает и действие струны становится свободным. Следует отметить, что теория струн обычно предполагается заданной в евклидовом пространстве-времени. Теория некритических струн одновременно подразумевает механизм возникновения пространства Минковского и интерпретирует лиувиллевское

поле как временную переменную в нашем пространстве-времени [14]. Действительно, если рассматривать струну в размерности 25 — на единицу меньшей критической, гравитационное лиувиллевское действие становится свободным, но с *противоположным* знаком перед кинетическим членом. Таким образом, с точки зрения двумерной поверхности имеется 25 свободных (скалярных) полей и одно свободное поле Лиувилля с неправильным знаком перед действием. Эта теория может интерпретироваться как теория 26 свободных полей с сигнатурой $(-, + \dots +)$.

Несмотря на всю свою привлекательность (здесь отметим, что теория некритических струн полезна также и для описания (и решения) трехмерной модели Изинга [15] (см. также обзор [16]), теории сильных взаимодействий, теории полимеров, задач о случайном блуждании и т. д.), теория некритических струн является сложной нелинейной квантовой задачей, трудной для решения. Поэтому она начала активно развиваться только после 1987 г., когда в [17, 18] были найдены ее критические показатели. В этих работах рассматривалась двумерная конформная теория поля (описывающая некоторый вакуум теории струн), взаимодействующая с гравитацией. При этом существенной характеристикой конформной теории является ее центральный заряд — число струнных полей в поляковском интеграле. Если размерность пространства-времени выбрана меньше 26, но больше 2 (т. е. струна рассматривается в размерности больше 1, но меньше 25), действие соответствующей двумерной гравитации становится комплексным, а сама теория содержит комплексные аномальные размерности [17, 18]. Таким образом, теория с центральным зарядом $1 < c < 25$ отвечает струне с нестабильным вакуумом, а стабильная конфигурация теории описывается сильно изломанной двумерной поверхностью — это так называемая полимерная фаза [19], в которой струна сильно «мнется» [20].

Следовательно, желая рассмотреть некритическую струну несколько более простую, чем в размерности 25, приходится выбирать струну в размерности не больше 1. Некритическая струна в такой размерности имеет малое (а в размерности строго меньше 1 — конечное) число степеней свободы. Это проще всего понять из следующего рассуждения. Как известно, струна может быть сформулирована (по крайней мере, на древесном уровне, что уже достаточно для счета степеней свободы) в переменных светового конуса [21, 22], т. е. две координаты могут быть убраны калибровочным (общее координатным) преобразованием. Таким образом, как в любой калибровочной теории, число физических переменных в струне на две меньше. Поэтому в некритической струне с центральным зарядом $c \leq 1$ (т. е. в размерности пространства-времени $d \leq 2$), полевых степеней свободы не остается — в теории имеется вакуумное состояние (тахсион) и, возможно, некоторое количество «дискретных» состояний (т. е. отдельных мод). Число этих дискретных состояний конечно при $c < 1$, а при $c = 1$ становится бесконечным. Теория,

описывающая эти дискретные состояния, оказывается доступной для исследования, и именно с развитием этой теории связан основной прогресс в теории некритических струн в последние годы.

Существует несколько различных формулировок теории некритических струн с $c \leq 1$. Поскольку струна в столь низкой размерности является упрощенной моделью, задачей каждого из подходов является выявление некоторых типичных свойств теории, которые могут ожидать в старших размерностях. Прежде чем переходить к обсуждению одного из наиболее перспективных с этой точки зрения подходов — матричным моделям, кратко опишем другие возможности.

Наиболее прямым является изучение некритических струн в рамках «физической» гравитации, т. е. в терминах непосредственно двумерной материи, взаимодействующей с гравитацией. Некоторый прогресс здесь был достигнут при описании критических точек, где материя описывается двумерной конформной теорией [17, 18]: были вычислены критические показатели теории. Однако уже получение корреляторов сталкивается с рядом серьезных проблем и, фактически, ограничено вычислениями трехточечных корреляторов [23], а также некоторых корреляторов специального вида [24, 25] на сфере и статистической суммы на торе [26].

Кроме описания теории вблизи критических точек, отвечающих основным состояниям теории струн, необходимо изучать и траектории, связывающие *различные* струнные вакуумы. Конечно, эта задача является еще более сложной (см. [27]). Фактически, кроме технической проблемы вычисления, в двумерной гравитации имеется проблема правильного определения теории и, в частности, квантовой меры в функциональном интеграле. Так, существуют две естественные меры — поляковская [11] и свободная мера для поля Лиувилля [17, 18, 22].

Конечно, важным достоинством теории двумерной гравитации является то, что она сформулирована в терминах, непосредственно продолжаемых на старшие размерности. С другой стороны, именно это обуславливает ее сложность, побуждая искать другие формулировки. Речь идет просто о поиске других теорий в том же самом классе универсальности. Эти теории, однако, должны иметь существенные черты, типичные и для двумерной гравитации. Одной из них является топологический характер теории струн [28]. Действительно, если теория находится в ненарушенной фазе (т. е. не имеется выделенной внешней метрики), то после интегрирования по двумерным метрикам корреляционные функции могут быть только числами, зависящими, быть может, от топологии поверхности, зависимость от координат при этом является тривиальной вследствие общекоординатной инвариантности.

Таким образом, разумно искать подходящее описание некритических струн в классе двумерных топологических теорий. Были предложены два различных описания такого типа.

Первая попытка была сделана Виттеном [28, 29], предложившим топологическую теорию, сохраняющую память о пространстве модулей римановых поверхностей; корреляторы в этой теории являются некоторыми интегралами по пространству модулей. К сожалению, эта конструкция, отвечающая двойному скейлинговому пределу одноматричной модели, не имеет непосредственного обобщения на другие теории (скажем, многоматричные модели) (см., однако, [30]).

Другая успешная конструкция подходящей топологической теории основана на следующей идее. Рассмотрим теорию, где тензор энергии-импульса (или действие) является антикоммутирующим с BRST-оператором Q : $T = \{*, Q\}$, $Q^2 = 0$. Тогда этот тензор энергии-импульса описывает некоторую топологическую теорию на подпространстве физических состояний (состояний, определенных условием $Q|\text{phys}\rangle = 0$):

$$T|\text{phys}\rangle = 0. \quad (1)$$

Действительно, поскольку вариации координат генерируются тензором энергии-импульса, соответствующие вариации корреляторов отвечают просто его вставке в корреляторы. Тогда, из-за условия (1), корреляторы физических полей не зависят от координат, т. е. являются числом.

В [31] (см. также [32]) была предложена конкретная реализация этой идеи, использующая $N = 2$ твистованные суперконформные теории. Однако эта формулировка использовала только абстрактные термины операторного разложения. Лагранжева же формулировка, а именно $N = 2$ суперсимметричная теория Гинзбурга–Ландау (точнее, ее некоторый подсектор), была предложена в [33, 34]. В рамках этой теории были вычислены трехточечные корреляционные функции на сфере [34] (см. также [35] и ссылки там). К сожалению, для описания некритических струн на старших родах или для вычисления многоточечных корреляционных функций необходимо рассмотреть модель Гинзбурга–Ландау, взаимодействующую с гравитацией (см. [35, 36]). Это значительно усложняет теорию. Тем не менее и в этом случае были получены некоторые результаты [37], которые замечательно согласуются с матричными моделями [38]. Достоинством топологических теорий типа Гинзбурга–Ландау является их обобщаемость на множество теорий двумерной физической гравитации [35, 37, 39].

Следует отметить, что все результаты, полученные в топологических теориях или непосредственно в физической гравитации полностью согласуются с результатами, полученными в матричных моделях. Эти последние, однако, позволяют решить теорию точно, т. е. строить любые корреляционные функции на поверхностях произвольного рода.

Матричные модели, т. е. модели, статистическая сумма которых является интегралом по матрицам, возникают как эффективные теории, описывающие

дискретные моды двумерной гравитации с центральным зарядом $c \leq 1$. При этом теория может описываться как конечным числом матриц ($c < 1$), так и бесконечным ($c = 1$) — матричная квантовая механика. Первоначальной мотивацией для введения матричных моделей была замена интегрирования по метрикам суммированием по равносторонним триангуляциям [40] — идея, восходящая к Редже [41]*. Строгий статус этой замены совершенно неясен, однако следует заметить, что равносторонние триангуляции отвечают арифметическим римановым поверхностям и образуют всюду плотное множество в пространстве модулей [42, 43]. Конечно, поскольку большинство триангулируемых поверхностей достаточно гладкие, триангуляция должна быть «мелкой», в пределе — бесконечно мелкой. Этот «непрерывный» предел отвечает критической точке матричной модели, причем размер матрицы должен стремиться к бесконечности — в противном случае матричный интеграл конечен и, следовательно, не содержит сингулярностей. На самом деле, наивный непрерывный предел отвечает только вкладам поверхностей рода 0 (сфера), в то время как вклады поверхностей старшего рода подавлены (степенями размера матрицы). Поэтому для получения полного ответа, учитывающего вклады поверхностей всех родов, необходимо брать более сложный *двойной скейлинговый* предел [44], означающий подстройку размера матрицы и констант связи.

Таким образом, описание двумерной гравитации при помощи матричных моделей подразумевает, во-первых, заданную «дискретную» матричную модель, во-вторых, взятие двойного скейлингового предела и, в-третьих, получение в результате «непрерывной» матричной модели, также обычно представляемой в виде матричного интеграла (уже другого типа). На деле, кажется, нет серьезных оснований надеяться, что полученная после такой процедуры теория имеет какое-либо отношение к суммам по триангуляциям. Более того, в рамках такого рода физической аргументации невозможно интерпретировать возникновение мультикритических точек. Что касается сравнения результатов с ответами, полученными в рамках двумерной гравитации (см. выше), то они исчерпываются (успешным) сравнением на уровне спектра теорий. Это неудивительно, ввиду уже упоминавшейся проблемы неизвестной квантовой меры двумерной гравитации.

В этот момент, однако, мы можем обратить аргументацию и рассматривать матричные модели как *определение* правильной квантовой меры в теории двумерной физической гравитации. Это определение хорошее, если теория обладает «правильными» свойствами. Действительно, одна из задач настоящего обзора — показать, какие это свойства, и продемонстрировать, что

*В отличие от матричных моделей, в реджевском исчислении длины сторон являются динамическими степенями свободы.

они выполняются в матричных моделях. Только заметим, что «правильная» теория должна быть естественно определена над поверхностями всех родов *одновременно* [45–50]. Как будет показано в последующем, матричные модели, действительно, имеют глубокую связь с универсальным пространством модулей (пространством модулей римановых поверхностей всех родов).

Перед тем как переходить к описанию специфических свойств матричных моделей, заметим, что подход с использованием триангуляций полностью игнорирует комплексную структуру римановых поверхностей и потому не может быть специфичен только для теории струн. Действительно, матричные модели оказываются пригодными для описания калибровочных теорий Янга–Миллса в произвольном числе измерений, причем суммирование по триангуляциям заменяется суммированием фейнмановских диаграмм. Более того, существуют аргументы в пользу того, что и гипотетическая 11-мерная M -теория, призванная объединить в себе все известные теории струн [51], также может быть описана в терминах матричной модели [52].

Таким образом, характерные черты матричных моделей оказываются общими для теории некритических струн, калибровочных теорий и т. д. Здесь, возможно, следует сразу отметить, что хотя задача вычисления амплитуд (в том числе непертурбативных) в различных физических теориях, безусловно, является очень важным применением матричных моделей, на наш взгляд, даже более важными (и более сложными) являются задачи выяснения общей структуры теорий, описываемых матричными моделями, а также использования матричных моделей для объединения в одно конфигурационное пространство совершенно *различных* физических теорий. Именно на две последние задачи сделан основной акцент в настоящем обзоре (и в обзоре [53]), тем более что задача вычисления амплитуд исследована другими авторами достаточно полно (см. [54] и ссылки в них).

Если говорить об общей структуре матричных моделей, то она может быть описана двумя свойствами — это интегрируемость и алгебра связей. Эти свойства оказываются определяющими характеристиками теорий, описываемых матричными моделями (более того, их, по-видимому, следует выбирать как *определение* матричных моделей, в то время как матричный интеграл — просто некоторое, часто неоднозначное, их представление). Причем если тот факт, что статистическая сумма теории удовлетворяет бесконечной алгебре связей, очевидно, связан с топологичностью теории, то интегрируемость представляется гораздо более тонким и важным свойством.

Именно в настоящем обзоре будет продемонстрировано, что статистическая сумма матричной модели является τ -функцией некоторой интегрируемой иерархии, т. е. удовлетворяет бесконечной системе дифференциальных уравнений. Эти уравнения могут быть записаны в эволюционной форме, с коммутирующими гамильтонианами. При этом роль времен играют константы связи в матричной модели. Наиболее полно структура теории видна, если

учитывать весь бесконечный набор констант связи, т. е. полное эффективное действие.

Выше уже упоминалось, что важная роль интегрируемых деформаций конформных теорий была осознана довольно давно [3]. Более того, также и в непосредственном контексте теории струн ожидалось, что сумма всего пертурбативного ряда для амплитуд (или статистической суммы) описывается некоторой квантовой интегрируемой системой [2, 50]. Здесь важно, что эффективное действие для *квантовой* интегрируемой системы является τ -функцией *классической* интегрируемой системы*. Это удивительное явление уже встречалось в ряде простых примеров [56–60], хотя никогда не было объяснено. Интересно, что имеющиеся примеры могут быть разделены на два класса — когда классическая интегрируемая система естественно зависит от времен (констант связи) и от так называемых переменных Мивы — собственных значений некоторой бесконечной внешней матрицы. Примером первого типа является некоторый функционал корреляторов квантового уравнения Шредингера, который оказывается τ -функцией классического интегрируемого нелинейного уравнения того же типа [57]. Типичный пример второго типа — статистическая сумма шестивершинной модели с нетривиальными граничными условиями, которая оказывается τ -функцией двумеризованной цепочки Тоды в переменных Мивы (которые суть граничные условия) [60].

В матричных моделях реализуются оба эти случая — именно статистическая сумма дискретных матричных моделей является τ -функцией с временами, являющимися константами связи, а непрерывных — τ -функцией, зависящей от внешней матрицы, задающей переменные Мивы.

Действительно, явление классической интегрируемости эффективной теории оказывается весьма общим и не специфичным, скажем, для двух измерений. Так, ярким примером является решение четырехмерной $N = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса, найденное недавно Виттенем и Зайбергом [61], классические интегрируемые структуры которого были выявлены в работе [62] (см. также [63] и ссылки там). Вследствие такой общности этого явления можно было бы ожидать, что эффективное действие в типичных теориях поля бывает интегрируемым при правильном выборе переменных и, конечно, учете всех возможных взаимодействий. К сожалению, набор этих последних обычно ограничен некоторыми дополнительными соображениями (перенормируемость и т. д.).

Итак, статистическая сумма матричной модели является τ -функцией некоторой интегрируемой иерархии уравнений. Однако эта иерархия имеет

*Достаточно интересно, что интегрирование некоторых объектов типа τ -функции [55] по универсальному пространству модулей в теории струн [49] приводит опять к τ -функции, заданной на том же универсальном пространстве модулей.

множество решений. Инвариантное условие, выделяющее из всех решений то, которое отвечает матричным моделям, называется струнным уравнением. Оказывается, струнного уравнения и уравнений иерархии достаточно, чтобы показать, что статистическая сумма матричной модели удовлетворяет бесконечной алгебре связей типа Вирасоро или W -алгебры [64] (принято думать, что обратное также верно, т.е. алгебры связей достаточно для интегрируемости, однако доказательство этого утверждения до сих пор не найдено). На самом деле, эта алгебра связей является не чем иным, как тождествами Уорда (ТУ)* в матричных моделях. Поскольку их статистическая сумма понимается как функция (функционал) констант связи, ТУ превращаются в набор дифференциальных уравнений и отвечают просто замене переменных в матричном интеграле.

В стандартной теории поля мы привыкли, что набор ТУ конечен и не определяет полностью динамику системы. В матричных моделях ТУ эквивалентны уравнениям движения, что связано с топологичностью теории. С другой стороны, набор ТУ и в стандартной теории поля мог бы быть бесконечным и достаточным для определения динамики системы, если бы были включены все возможные константы связи (взаимодействия), т.е. восстановлена полная симметрия теории**. Это, как уже отмечалось, обычно не делается по посторонним (не симметричным) соображениям.

Приведенные выше соображения означают, что в большинстве теорий поля указанные свойства интегрируемости и топологичности (бесконечной алгебры связей) присутствуют одновременно. Хорошим примером может служить уже упоминавшееся решение Виттена–Зайберга, которое, кроме своих интегрируемых свойств, ассоциируется с явными топологическими структурами [65].

1.2. Физическая гравитация. Далее мы сделаем краткий обзор упомянутых выше результатов [10] (см. также [66]), полученных в теории двумерной физической гравитации, чтобы ее привязка к исследуемым далее матричным моделям была более явной.

1.2.1. Теория Лиувилля. *Классическая теория Лиувилля.* Мы начнем с обычной теории Лиувилля, описываемой действием

$$S_L = \frac{1}{4\pi} \int d^2z \left[\frac{1}{2} \partial\phi\bar{\partial}\phi - \frac{1}{\beta^2} e^{\sqrt{2}\beta\phi} \right], \quad (2)$$

*Список сокращений, принятых в тексте: подход к двумерной гравитации: КПЗ — Книжника–Полякова–Замолодчикова; ДДК — Давида–Дистлера–Каваи; ТУ — тождества Уорда; ФБА — функция Бейкера–Ахизера; БТ — билинейные тождества; СЗ — собственные значения. Интегрируемые иерархии: КП — Кадомцева–Петвиашвили; 2РТ — двумеризованной решетки Тоды; КдВ — Кортевега–де Вриза; мКдВ — модифицированная иерархия КдВ; АКНС — иерархия, предложенная Абловитцем, Каупом, Ньюэллом и Сегуром (AKNS).

**Следует говорить скорее не о симметрии, а о ковариантности.

где поля зависят от стандартных комплексных переменных в евклидовом пространстве-времени z, \bar{z} и $\partial \equiv \frac{\partial}{\partial z}$, $\bar{\partial} \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. Эта теория характеризуется двумя отличительными чертами — она обладает конформной инвариантностью на классическом уровне и не имеет постоянного вакуумного решения, что приводит к сильным инфракрасным расходимостям.

На первый взгляд, теория не является конформной, поскольку след тензора энергии-импульса равен $T_{z\bar{z}} = \frac{1}{\beta^2} e^{\sqrt{2}\beta\phi}$. Киральная компонента тензора энергии-импульса для действия (2) при этом равна

$$T_{zz} = -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2, \quad (3)$$

и аналогично для $T_{\bar{z}\bar{z}}$. Однако киральная компонента не является голоморфной даже на уравнениях движения, поскольку

$$\bar{\partial}T_{zz} = \frac{\sqrt{2}}{\beta} e^{\sqrt{2}\beta\phi} \partial\phi. \quad (4)$$

Этот стандартный тензор энергии-импульса, однако, может быть «улучшен» добавлением члена, не влияющего на закон сохранения:

$$T_{\mu\nu} \rightarrow T_{\mu\nu} - (\partial^2\delta_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu)\Sigma, \quad T = T_{zz} + \partial^2\Sigma. \quad (5)$$

Выбирая теперь $\Sigma = \frac{1}{\sqrt{2}\beta}\phi$, получаем

$$T = -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}\beta}\partial^2\phi \quad (6)$$

и

$$\bar{\partial}T = \frac{\sqrt{2}}{\beta} e^{\sqrt{2}\beta\phi} \partial\phi + \frac{1}{\sqrt{2}\beta}\partial^2\bar{\partial}\phi = 0 \quad (7)$$

при использовании уравнений движения.

На самом деле, Σ добавляет к действию просто полную производную, пропорциональную $\partial\bar{\partial}\phi$, которая может стать существенной только при нетривиальных граничных условиях, подобных присутствию в теории вакуумного заряда [67–69]. Такого рода член в действии может быть инвариантно записан как

$$\frac{\sqrt{2}}{\beta} R\phi, \quad (8)$$

где $R = \partial\bar{\partial}\log\rho$ и $\rho = g_{z\bar{z}}$ — двумерные кривизна и метрика соответственно. Скобки Пуассона тензора энергии-импульса (6) образуют алгебру Вирасоро*, причем конформная аномалия присутствует уже на классическом уровне:

$$c_{cl} = \frac{6}{\beta^2}. \quad (9)$$

Квантовая теория Лиувилля. Теперь перейдем к вычислению квантовых поправок. Хотя теория плохо определена из-за инфракрасных расходимостей, в ней можно вычислять различные величины, к ним нечувствительные — подобно тому, как это делается в КХД. Скажем, можно исследовать ультрафиолетовые перенормировки действия (2), содержащего член с кривизной (8).

На самом деле, не слишком трудно учесть *все* ультрафиолетово-расходящиеся диаграммы, поскольку в двумерии они исчерпываются головастиками. Результатом оказывается мультипликативная перенормировка константы связи $\frac{1}{\beta^2}$ лиувиллевской экспоненты в действии (2) фактором $\Lambda^{-2\beta^2}$. Тот же член можно воспроизвести сдвижкой вакуумного среднего поля ϕ на величину $\delta = -\sqrt{2}\beta\log\Lambda$. Заметим, что этот сдвиг зависит от ультрафиолетового параметра обрезания Λ , который должен обезразмериваться некоторым инфракрасным параметром обрезания. Естественно выбрать этот параметр на масштабе метрики ρ , поскольку именно метрика обрезает теорию на больших расстояниях**. Таким образом, нужно сдвинуть поле $\phi \rightarrow \phi - \sqrt{2}\beta\log\Lambda\rho$. Это приводит к перенормировке коэффициента перед членом с кривизной (8):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\partial\phi\bar{\partial}\phi &\rightarrow -\frac{1}{2}(\phi + \delta)\partial\bar{\partial}(\phi + \delta) = \\ &= \frac{1}{2}\partial\phi\bar{\partial}\phi - \phi\partial\bar{\partial}\delta = \frac{1}{2}\partial\phi\bar{\partial}\phi + \sqrt{2}\beta R\phi. \end{aligned} \quad (10)$$

Центральный заряд становится равным

$$c = 1 + 6\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)^2. \quad (11)$$

Теперь немного обсудим и обоснуем этот результат. Предположим, что конформная инвариантность сохраняется на квантовом уровне. Это означает, что экспоненциальный член в действии имеет каноническую размерность — (1,1). С другой стороны, конформная теория с действием (2) и добавочным

*Это с очевидностью следует из зануления следа «улучшенного» тензора энергии-импульса на уравнениях движения.

**Это условие может быть снова превращено в специальные граничные условия поля материи.

членом $\alpha R\phi$ имеет центральный заряд [68,69] $c = 1 + 3\alpha^2$, и «наивная» размерность $\Delta_\gamma = \frac{\gamma^2}{2}$ оператора $:\exp\{\gamma\phi\}:^*$, которую он имел бы в отсутствие члена с кривизной, меняется на $\Delta_\gamma = \frac{1}{2}\gamma(\alpha - \gamma)$. Так как эта размерность должна быть единичной, коэффициент

$$\alpha = \sqrt{2} \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right), \quad \beta = \frac{\alpha}{\sqrt{8}} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{8} - 1}, \quad (12)$$

что совпадает с формулой (10) и приводит к тому же значению центрального заряда (11).

Конечно, это рассмотрение является скорее мотивацией, чем строгим результатом. Скажем, последнее рассуждение имеет дело с киральными объектами. С другой стороны, поля распадаются в сумму киральной и антикиральной частей только на уравнениях движения, и, следовательно, киральность не должна использоваться при обсуждении лиувиллевской экспоненты в функциональном интеграле. Такой подход, однако, становится совершенно корректным в случае $N = 2$ суперсимметричной теории Лиувилля [66].

Взгляд с точки зрения теории синус-Гордона. Обсудим теперь, как нужно более корректно рассматривать теорию Лиувилля. Уже упоминалось, что ее плохое инфракрасное поведение обусловлено отсутствием конечного постоянного классического решения. В принципе, такое плохое поведение и должно ожидаться, поскольку теория является конформно-инвариантной и, следовательно, не имеет хорошо определенных частицеподобных возбуждений, S -матрицы и т. д. Разумный способ избежать всех этих проблем — рассматривать теорию Лиувилля как критическую точку некоторой большей теории. Естественный выбор такой теории — теории синус-Гордона или гиперболического синус-Гордона, в зависимости от того, является ли β вещественной или чисто мнимой, поскольку все вышеприведенное рассмотрение справедливо для любого β . Эта теория исследовалась в [70], где авторы работали с теорией синус-Гордона, т. е. с чисто мнимой $\beta \equiv i\tilde{\beta}$, так что действие имело вид**:

$$S_{SG} = \frac{1}{4\pi} \int d^2z \left[\partial\phi\bar{\partial}\phi + \gamma_+ e^{i\sqrt{2}\tilde{\beta}\phi} + \gamma_- e^{-i\sqrt{2}\tilde{\beta}\phi} + i\tilde{\alpha}R\phi \right]. \quad (13)$$

Для удобства мы также заменили в действии $\alpha \rightarrow \tilde{\alpha} \equiv -i\alpha$, т. е. $c = 1 - 3\tilde{\alpha}^2$. Авторы [70] обобщили вышеприведенное теоретико-полевое вычисление и

*Мы опускаем знак нормального упорядочивания там, где это не может привести к недоразумению.

**По причинам вычислительного характера удобно иметь в действии *две* различные константы связи γ_+ , γ_- , хотя одна из них может быть убрана сдвигом поля. Дело в том, что этот сдвиг часто бесконечен в рассматриваемых случаях.

получили β -функции пертурбативно по γ_{\pm} и $\tilde{\beta}^2 - 1$. Они также заметили, что $\tilde{\alpha}/\tilde{\beta}$ является ренорминвариантом. Результаты вычисления имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} &\equiv \beta_{\tilde{\beta}} = 2\tilde{\beta}^4\gamma_+\gamma_-, & \frac{dq^2}{dt} &\equiv \beta_{\tilde{\alpha}} = \frac{1}{16}\tilde{\alpha}^2\tilde{\beta}^2\gamma_+\gamma_-, \\ \frac{d\gamma_{\pm}}{dt} &\equiv \beta_{\pm} = \gamma_{\pm} \left(\tilde{\beta}^2 - 1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Оказывается, что теория имеет как инфракрасную, так и ультрафиолетовую фиксированные точки в области сделанного приближения. При этом существуют два различных режима. Один из них отвечает РГ-поток из точки, описываемой свободным полем с внешним зарядом $\tilde{\alpha}_+$, в точку, описываемую той же теорией, но с некоторым большим внешним зарядом $\tilde{\alpha}_-$ (в полном согласии с s -теоремой Замолодчикова [71]). В другом режиме РГ-поток течет из ультрафиолетово-стабильной точки, описываемой теорией с $\gamma_+ = \gamma_- = 0$, в инфракрасно-стабильную точку с $\gamma_- = 0$, но $\gamma_+ \neq 0$. Таким образом, одна из экспонент (маргинальный оператор) выживает в инфракрасном пределе, приводя к действию Лиувилля.

Из уравнения (14) можно определить значения параметров, отвечающих этой критической точке:

$$\tilde{\beta} = \frac{\tilde{\alpha}}{\sqrt{8}} \pm \sqrt{\frac{\tilde{\alpha}^2}{8} + 1}. \quad (15)$$

Это согласуется с соотношением (12), оправдывая наши вычисления.

Явное вычисление [70] также воспроизводит полученные выше значения размерностей, а «обобщенный» центральный заряд, который на РГ-траектории дается монотонно-убывающей функцией [71], в фиксированной точке, описывающей теорию Лиувилля, имеет значение (11).

1.2.2. Лиувиллевская гравитация. *Подход Полякова–КПЗ–ДДК.* После рассмотрения общей теории Лиувилля обсудим ее применение к теории двумерной физической гравитации. Мы начинаем с ковариантного поляковского действия для струны, распространяющейся в плоском D -мерном евклидовом пространстве:

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2\xi \sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_{\mu} X^i \partial_{\nu} X^i, \quad i = 1, \dots, D. \quad (16)$$

Основной задачей является вычисление корреляционных функций при помощи интеграла по траекториям:

$$\langle V_1 V_2 \dots V_n \rangle \equiv \int \mathcal{D}X \mathcal{D}g^{\mu\nu} e^{-S - \mu \int d^2\xi \sqrt{g}} \quad (17)$$

с действием (16), где μ — космологическая постоянная.

Мы будем использовать квантование этой системы в конформной калибровке, хотя существует и эквивалентный подход в калибровке светового конуса [17]. Ковариантный подход в конформной калибровке был предложен в первой работе Полякова [11] и развит в [18], где были вычислены центральный заряд и веса операторов. Конформная калибровка фиксируется условием $g_{\mu\nu} = e^\phi \hat{g}_{\mu\nu}$, где $\hat{g}_{\mu\nu}$ — некоторая внешняя метрика. Процедура фиксации калибровки также вводит репараметризационные духи Фаддеева–Попова b, c , которые почти не существенны в нашем рассмотрении. Кроме того, поскольку из-за конформной аномалии ни мера полей материи, ни полей духов не является конформно-инвариантной, конформный фактор получает кинетический член и описывается действием Лиувилля. Таким образом, полное действие состоит из трех частей: действие духов, лиувиллевское действие (2) с членом, содержащим кривизну, и действие полей материи. Так как полное действие должно быть конформно-инвариантным и не зависящим от внешней метрики $g_{\mu\nu}$, полный центральный заряд теории должен быть равен нулю. Это означает, что теория является топологической (как уже обсуждалось выше).

Тензор энергии-импульса духов дает вклад в центральный заряд — 26, а материи — D . Разумно обобщить (16) и рассматривать конформную теорию с произвольным (не обязательно целым) центральным зарядом c_m вместо D . Теперь, используя явное выражение для лиувиллевского центрального заряда (11), мы можем получить ограничение, вытекающее из условия нулевого полного центрального заряда:

$$c_m + c_{gh} + c_L = 0 \rightarrow c_m + (-26) + (1 + 3\alpha^2) = 0, \quad (18)$$

т. е.

$$\alpha = \sqrt{\frac{25 - c_m}{3}}. \quad (19)$$

Из выражения (12) ясно, что значения $\alpha^2 < 8$ ведут к комплексным значениям β и лиувиллевского центрального заряда c_L (11), т. е. к неунитарной теории. Это то самое ограничение на размерность некритической струны, которое мы упоминали в начале раздела:

$$c_m \leq 1. \quad (20)$$

Конечно, комплексные значения β просто означают, что выбранный вакуум струны нестабилен и должен распасться в другое, стабильное основное состояние. Отражением того же факта является наличие тахиона в теории с $c_m > 1$, т. к. масса основного состояния равна $\frac{1 - c_m}{12}$.

Существует, однако, и другая область, где c_L вещественна. Она определяется $\alpha^2 < 0$, т. е. $c \geq 25$ и означает чисто мнимые β или, что то же самое, если переопределить $\phi \rightarrow i\phi$, «неправильный» знак перед кинетическим

членом лиувилевского действия. Наивно это должно приводить к неунитарной теории. Выше, однако, уже обсуждалась возможность интерпретировать специальный случай лиувилевского действия с $c_m = 25$ как описывающий временную координату в метрике Минковского.

Одевание операторов. Заметим, что функциональный интеграл в теории двумерной гравитации не должен зависеть как от внешней метрики $\hat{g}_{\mu\nu}$, так и от физической $g_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\nu} e^{\sqrt{2}\beta\phi^*}$. Первое свойство означает нулевой полный центральный заряд теории, и оно было использовано, чтобы связать показатель лиувилевской экспоненты с центральным зарядом полей материи c_m , в то время как второе свойство позволило нам вычислить центральный заряд теории Лиувилля (11). В том же контексте можно рассмотреть и поля материи, которые должны также перенормировываться («одеваться») полем Лиувилля из-за гравитационного взаимодействия. Вместо того чтобы делать трудное пертурбативное вычисление, можно опять просто потребовать, чтобы корреляционные функции «одетых» операторов не зависели от метрики.

Рассмотрим некоторый вершинный оператор полей материи V , который имеет конформную размерность Δ . Принято думать, что в результате гравитационного взаимодействия это поле одевается некоторой экспонентой лиувилевского поля:

$$V_{dr} = e^{\gamma\phi} V. \quad (21)$$

В принципе, правильно было бы рассматривать более общие выражения с предэкспоненциальным множителем, содержащим производные лиувилевского поля (т.е. потомки в соответствующей конформной теории) и поля духов. К счастью, это не является необходимым в двумерной гравитации из-за огромной группы инвариантности.

Такое сильное сужение пространства вершинных операторов — общая черта струнных моделей, построенных из конформной материи. Например, в простейшем примере критической струны можно просто выкинуть гравитационные вклады из вершинных операторов. Это, однако, не единственное дополнительное ограничение на вершинные операторы критических струн, другие таковы:

- (а) Они также не должны содержать вкладов духов (в определенной и естественной градуировке)**.
- (б) Они должны быть первичными полями по отношению к полной алгебре Вирасоро.

*Такая мультипликативная перенормировка лиувилевской экспоненты, или аддитивная — лиувилевского поля, является прямым следствием нашего требования, чтобы она имела размерность (1,1). То же самое может быть перефразировано в утверждение, что скалярное лиувилевское поле меняет свой закон преобразования и перестает быть скалярным при учете конформной аномалии (см. более подробное обсуждение в [66]).

**Исключая один тонкий момент с дилатационным оператором.

Все вторичные поля выкидываются, поскольку связь с гравитацией означает калибрование алгебры Вирасоро, после чего потомки откалибровываются как калибровочно-неинвариантные операторы. В действительности они отщепляются на уровне корреляционных функций — это знаменитая теорема об отсутствии духов в струне.

(в) Они должны быть интегралами (в градуировке, согласованной с (а)) операторов конформной размерности 1.

Операторы в других — эквивалентных — градуировках могут быть получены умножением «подынтегральных» операторов размерности 1 (ограниченных условиями (а) и (б)) на поле духов вместо интегрирования.

Наивное обобщение этих трех принципов на случай некритических струн было предложено в [18], только с небольшим изменением в пункте (б), предполагавшим, что поля должны быть первичными по отношению к *полной* (гравитация + материя) алгебре Вирасоро и иметь вид (*первичное поле материи*) \times (*первичное гравитационное поле = чистая экспонента*). Такое простое обобщение, однако, оказывается не вполне правильным. Проблема возникает в самом начале — в пункте (а). Для того чтобы честно *вывести* это требование, нужно доказать, что в каждом классе БРСТ-когомологии (т. е. для каждого физического состояния) существует ровно один представитель, не содержащий духов. Это оказывается неправильным в случае некритической струны [72] — существуют два дополнительных представителя в классах когомологий, которые обязательно (и нетривиально) содержат вклады полей духов. В частном случае струн с $c = 1$ один из этих представителей интерпретируется как «основное» кольцо [73], в то время как для другого, имеющего духовое число ноль, хорошая интерпретация неизвестна. Однако, судя по всему, подсектор теории, описанный принципами (а), (б), (в), замкнут относительно операторного разложения по модулю потомков, т. е. полей, исчезающих на уровне корреляционных функций.

Другой деликатный момент связан с ограничением (в), поскольку требование единичной полной размерности допускает два различных первичных гравитационных поля для того же поля материи. В дальнейшем мы всегда будем рассматривать подсектор только с одним из этих двух возможных гравитационных одеваний. Этот подсектор должен быть замкнут относительно операторного разложения в том же смысле. Таким образом, мы рассматриваем только операторы, имеющие вид (21), в то время как более общее обсуждение может быть найдено в [74].

Итак, вычислим значение показателя γ в (21), потребовав, чтобы одетый оператор имел размерность $(1,1)^*$. Мы получим

*Как уже объяснялось в других терминах, это требование просто выражает возможность интегрировать по двумерной поверхности без нарушения конформной инвариантности.

$$\Delta + \frac{1}{2}\gamma[\alpha - \gamma] = 1, \quad (22)$$

т. е.

$$\gamma = \frac{1}{2}(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 8 + 8\Delta}). \quad (23)$$

Скажем несколько слов о выборе знака в этом выражении и в показателе лиувиллевской экспоненты (12). Здесь и далее мы всегда будем выбирать «минус» из-за аргументов, представленных в [75], где доказывалось, что этот выбор отвечает состояниям с произвольной энергией. Несколько позже мы вернемся к обсуждению этого момента.

Струнная восприимчивость. Выше уже обсуждалось, что так как корреляционные функции физических операторов в двумерной гравитации не зависят от метрики и от пространственных координат (поскольку каждый вершинный оператор является интегралом от оператора единичной размерности, т. е. в корреляторе имеется интеграл по положению всех точек), они являются просто числами. Тем не менее нужна какая-нибудь характеристика, которая различает разные операторы и корреляционные функции. Такой характеристикой, аналогичной конформной размерности, является скейлинговая размерность (или вес). Проще всего ее ввести, фиксируя площадь поверхности A и изучая зависимость от A корреляционных функций. Эта зависимость — очень важная характеристика, поскольку контролирует рост или уменьшение струнных поверхностей и их стабильность. В действительности общей чертой всех струнных моделей является экспоненциальное уменьшение их статистических сумм с ростом A . Индекс, который реально различает разные теории струн и связан со стабильностью их основных состояний, связан с предэкспоненциальным множителем.

Для его вычисления рассмотрим функциональный интеграл двумерной гравитации (некритической струны) с фиксированной площадью поверхности A :

$$Z(A) \equiv \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}(\text{matter}) \mathcal{D}(\text{ghosts}) e^{-S_L} \delta \left(\int d^2\xi \sqrt{\hat{g}} e^{\sqrt{2}\beta\phi} - A \right), \quad (24)$$

где мы включили действие духов и полей материи в меру и учли, что площадь поверхности — это просто интеграл от физической метрики $g_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\nu} e^{\sqrt{2}\beta\phi}$ по поверхности.

Хотя интеграл (24) очень сложный, его зависимость от A может быть легко определена. Действительно, сделаем замену $\phi \rightarrow \phi + \frac{1}{\sqrt{2}}\beta \log A$. Тогда экспонента в лиувиллевском действии превратится в экспоненту $e^{-\text{const} \times A}$ в

функциональном интеграле (из-за δ -функции в (24)). Таким образом, единственный вклад из действия в предэкспоненту приходит из члена с кривизной

$$\frac{1}{4\pi} \int d^2\xi \sqrt{\hat{g}} \alpha \hat{R} \phi \rightarrow \frac{1}{4\pi} \int d^2\xi \sqrt{\hat{g}} \alpha \hat{R} \phi + \frac{\alpha}{\sqrt{2}\beta} \log A \left(\frac{1}{4\pi} \int d^2\xi \sqrt{\hat{g}} \hat{R} \right). \quad (25)$$

Мера в функциональном интеграле (24), очевидно, инвариантна по отношению к сдвигам на константу, поэтому, используя тождество $\delta(Ax) = A^{-1}\delta(x)$ и теорему Гаусса–Бонне $\frac{1}{4\pi} \int d^2\xi \sqrt{\hat{g}} R = 1 - g$, где g — род поверхности, можно получить окончательно

$$Z(A) \sim A^{-\frac{\alpha}{\sqrt{2}\beta}(1-g)-1} e^{-\text{const} \times A} \equiv A^{(\gamma_{\text{str}}-2)(1-g)-1} e^{-\text{const} \times A}, \quad (26)$$

т. е.

$$\gamma_{\text{str}} = 2 - \frac{\alpha}{\sqrt{2}\beta} = \frac{1}{12} \left(c_m - 1 - \sqrt{(c_m - 25)(c_m - 1)} \right). \quad (27)$$

Индекс γ_{str} называется струнной восприимчивостью. Он имеет комплексные значения, когда вакуум теории нестабилен, т. е. в интервале $1 < c_m < 25$. Заметим, что, в отличие от индекса γ_{str} , константа в экспоненциальной части зависимости от A не является универсальной и представляет собой перенормированную космологическую постоянную.

Вес операторов. Подобно вычислению индекса, описывающего зависимость статистической суммы от площади A , можно вычислять индексы корреляционных функций. Рассмотрим индекс, который называется весом (или скейлинговой размерностью) оператора и определен как нормированная одноточечная корреляционная функция:

$$\langle V \rangle_A \equiv \frac{1}{Z(A)} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}(\text{matter}) \mathcal{D}(\text{ghosts}) e^{-S_L} \delta \times \left(\int d^2\xi \sqrt{\hat{g}} e^{\sqrt{2}\beta\phi} - A \right) \int d^2\xi \sqrt{\hat{g}} V_{\text{dr}} \sim A^{1-h}. \quad (28)$$

Физически этот индекс контролирует поведение (рост) струнных поверхностей при вставке соответствующего оператора. Поэтому стандартные понятия релевантных, маргинальных и иррелевантных операторов [76] имеют смысл. Например, оператор с индексом $h < 1$ релевантен и доминирует в инфракрасном пределе (т. е. при больших A).

Для вычисления h нужно использовать ту же процедуру, что и для вычисления струнной восприимчивости, и учесть явное выражение для показателя одевающей экспоненты (23):

$$\langle V \rangle_A \sim \frac{A^{-\frac{\alpha(1-g)}{\sqrt{2\beta}} - 1 + \frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}}}}{A^{-\frac{\alpha(1-g)}{\sqrt{2\beta}} - 1}} = A^{\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}}}, \quad (29)$$

т. е.

$$h = 1 - \frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}} = \frac{\sqrt{1 - c_m + 24\Delta_V} - \sqrt{1 - c_m}}{\sqrt{25 - c_m} - \sqrt{1 - c_m}}. \quad (30)$$

Легко заметить, что классификация на релевантные, маргинальные и иррелевантные операторы не меняется при одевании, поскольку условия $\Delta = 1$, $\Delta > 1$ и $\Delta < 1$ означают такие же условия на веса h одетых операторов в (30).

Заметим, что (30) — вещественно и положительно при $c_m \leq 1$ и выборе знака «минус» в выражениях (23) и (12). Это дает еще один аргумент в пользу такого выбора знака.

Рассмотрим теперь явный пример значений γ_{str} и h для операторов в минимальных моделях [68,69,77], который играет существенную роль в отождествлении двумерной гравитации и матричных моделей. Центральный заряд (p, q) -минимальной модели равен

$$c = 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq}, \quad (31)$$

т. е.

$$\gamma_{\text{str}} = -\frac{2|p-q|}{p+q-|p-q|}. \quad (32)$$

Спектр (Каца) размерностей операторов дается формулами

$$\Delta_{m,n} = \frac{(pm - qn)^2 - (p - q)^2}{4pq}, \quad 1 \leq m \leq q - 1, \quad 1 \leq n \leq p - 1, \quad (33)$$

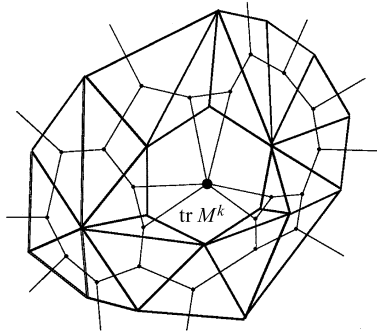
т. е.

$$h_{m,n} = \frac{|pm - qn| - |p - q|}{p + q - |p - q|}. \quad (34)$$

Эти индексы h и γ_{str} — как раз те числа, которые воспроизводятся в матричных моделях (с правильной зависимостью от рода поверхности).

1.3. Содержание и мотивация работы. Как уже говорилось выше, цель настоящего обзора — используя матричные модели различных физических теорий, в основном двумерной гравитации, показать, что их типичными чертами являются интегрируемость и большая скрытая симметрия — бесконечномерная алгебра связей, которым удовлетворяет статистическая сумма. Эти свойства могут быть продемонстрированы как в дискретных, так и в непрерывных матричных моделях, поскольку непрерывный предел не меняет специфических черт моделей. Настоящий обзор, однако, посвящен только дискретным моделям, в то время как непрерывные матричные модели обсуждаются в отдельной работе [53].

1.3.1. Дискретные матричные модели. В разд. 2 рассматриваются дискретные матричные модели. Они были впервые введены в рассмотрение в 1985 г. в работах [40] для описания триангулированных поверхностей. Рассмотрим случай чистой двумерной гравитации (без материи), т. е. функциональный интеграл (17) без полей материи. Сумма по метрикам в нем может быть заменена суммой по триангуляциям. Рассмотрим триангуляцию равносторонними треугольниками (см. рисунок).



Поверхность в данной точке имеет положительную, нулевую или отрицательную кривизну в зависимости от того, сколько треугольников в ней имеют вершину — меньше 6, 6 или больше 6 соответственно. Заметим, что, поскольку единственной переменной является кривизна, равносторонние триангуляции отвечают некоторой координатной калибровке. Род поверхности определяется по триангуляции при помощи теоремы Эйлера [78]: (число вершин) – (число ребер) + (число граней) = 2 (1 — род поверхности).

Поскольку с точки зрения суммы по триангуляциям такого типа ограничение на род поверхности выглядит крайне неестественным, удобно суммировать по поверхностям всех родов сразу:

$$\sum_{\text{род } g} \int \mathcal{D}g \longrightarrow \sum_{\text{триангуляции}}, \quad (35)$$

и вместо интеграла (17) нужно рассматривать полный функциональный интеграл, просуммированный по всем родам:

$$\sum_{\text{род } g} G_{\text{str}}^g \langle V_1 V_2 \dots V_n \rangle_g, \quad (36)$$

где G_{str} — струнная константа связи (поскольку род поверхности как раз отвечает порядку теории возмущений в струне).

Основная идея [40] — использовать матричный интеграл как производящий функционал всех триангуляций (см. также [79, 80]). Для получения статистической суммы чистой гравитации рассмотрим интеграл по эрмитовой матрице размером $N \times N$:

$$\mathcal{Z}_N = e^{Z(\xi, N)} = \int DM \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr} M^2 + \frac{\xi}{\sqrt{N}} \text{tr} M^3 \right\}. \quad (37)$$

Этот интеграл может вычисляться в виде ряда по константе связи ξ , и можно построить соответствующую диаграммную технику. При этом член порядка ξ^n считает число диаграмм, имеющих n трехточечных вершин, а сами диаграммы образуют дуальную решетку по отношению к триангуляциям с n треугольниками (тонкие линии на рисунке). Если выбрать площадь треугольников единичной, площадь поверхности будет просто n , и можно отождествить ξ с $e^{-\mu}$ в (17).

Далее, мы можем отождествить размер матрицы N и струнную константу связи $\sqrt{G_{\text{str}}^{-1}}$. Действительно, после замены $M \rightarrow \sqrt{N}M$ в (37) каждая вершина дает фактор N , каждое ребро — N^{-1} и каждая грань — опять N . Таким образом, после применения теоремы Эйлера каждая диаграмма пропорциональна N^{2-2g} . Итак, статистическая сумма раскладывается в ряд

$$Z(\xi, N) = \sum_{g \geq 0} N^{2-2g} Z_g(\xi). \quad (38)$$

Устремим N к бесконечности, чтобы изучить непрерывный предел матричной модели. При этом остается только вклад сферы $Z_0(\xi)$, т.е. планарных поверхностей.

Чтобы изучать непрерывный предел триангуляций, т.е. триангуляцию гладких поверхностей, нужно брать статистическую сумму вблизи сингулярных точек. В самом деле, сингулярность отвечает тому, что основной вклад дают диаграммы с большим числом вершин (треугольников) n (в противном случае ряд по ξ^n сходится). Если фиксировать площадь поверхности, то размер каждого треугольника в такой триангуляции стремится к нулю, что интуитивно и отвечает непрерывному пределу. Более формально среднее число вершин равно

$$\langle n \rangle \sim \frac{\partial \log Z_0(\xi)}{\partial \xi} \sim \frac{1}{\xi - \xi_c}, \quad (39)$$

если предположить, что статистическая сумма имеет степенное поведение вблизи сингулярности:

$$Z_0(\xi) \sim (\xi - \xi_c)^{2-\gamma} \sim \sum_n n^{\gamma-3} \left(\frac{\xi}{\xi_c} \right)^n. \quad (40)$$

Таким образом, действительно, среднее число вершин стремится к бесконечности в сингулярной точке и отвечает непрерывному пределу. Более того, поскольку $n \sim A$, зависимость статистической суммы от A имеет вид

$$Z_0(\xi) \sim A^{\gamma-3}, \quad (41)$$

и из сравнения с (26) γ должно быть отождествлено с γ_{str} . Значение γ было вычислено (обзор всех подобных вычислений можно найти в [81]) и оказалось равным $-\frac{1}{2}$, что, действительно, отвечает случаю чистой гравитации (нулевой центральный заряд в (27)). Были также вычислены вклады поверхностей старшего рода в разложении (38). Результат имеет вид

$$Z_g(\xi) \sim (\xi - \xi_c)^{(2-\gamma)(1-g)}. \quad (42)$$

Эта формула согласуется с соответствующим результатом двумерной гравитации (26), причем положение критической точки ξ_c оказывается не зависящим от рода поверхности g .

Можно также изучить поведение $Z_0(\xi)$ (или $Z_g(\xi)$) при фиксированной площади. Для этого нужно сравнить формулу (40) с (26). Тогда становится ясно, что $\frac{\xi}{\xi_c}$ должно быть отождествлено с $e^{(\mu_c - \mu)/\varepsilon^2}$, где ε^2 — площадь треугольника в триангуляции, стремящаяся к нулю в непрерывном пределе. Таким образом, $(\mu - \mu_c)/\varepsilon^2 \equiv \mu_R$ может быть отождествлено с перенормированной струнной константой связи, остающейся конечной в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$.

Заметим, что все вышеприведенное рассмотрение может быть проведено для триангуляций любыми правильными многоугольниками или даже их комбинациями. Это означает, что к действию одноматричной модели (37) можно добавить все степени матрицы M — произвольный потенциал

$$Z(\{t_k\}) = \int DM \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr} M^2 + \sum_{k=3} t_k \text{tr} M^k \right\}. \quad (43)$$

При этом значение γ_{str} не меняется, а изменяется только положение сингулярности (и, следовательно, константа в экспоненте в формуле (26), ср. с (40)). Таким образом, все такие модели описывают один класс универсальности.

Тем не менее при рассмотрении действия со старшими членами возникает новый эффект — мультикритическое поведение. Действительно, специальным подбором значений t_k можно занулить коэффициент перед лидирующей сингулярностью. Тогда критическое поведение будет определяться

следующей сингулярностью и т. д. Это дает последовательность мультикритических точек, для которых были вычислены критические индексы [44, 82] (одной струнной восприимчивости оказалось недостаточно, чтобы идентифицировать эту серию моделей [83]). Оказалось [83], что k -мультикритическая точка описывается $(2, 2k - 1)$ -минимальной моделью ($k = 2, \dots$) и струнная восприимчивость для нее равна

$$\gamma = -\frac{1}{k}. \quad (44)$$

Может быть, даже более важная роль добавления в действие старших членов состоит в том, что при этом статистическая сумма становится производящей функцией корреляторов. По этой причине мы будем добавлять в действие *все* старшие члены со своими константами связи так, чтобы, дифференцируя по последним, можно было получать любые корреляционные функции. Действительно, типичным коррелятором в матричной модели является величина типа

$$\int DM \prod_i \text{tr} M^{k_i} \quad (45)$$

с некоторыми произвольными показателями k_i . Вставка каждого $\text{tr} M^{k_i}$, как легко понять из рисунка, отвечает на дуальной решетке (т. е. триангулированной поверхности) дырке длиной в k ребер (в данном случае $k = 6$). Поскольку в чистой гравитации, которая описывается одноматричной моделью, нет материи, на границу дырки добавить нечего, следовательно, только такие корреляторы и представлены в модели.

Таким образом, наибольший интерес представляют матричные модели, включающие все возможные члены с взаимодействием. В п. 2.1 дискретная матричная модель типа (43) исследована в деталях, а именно изучена структура теории при наличии всех констант связи t_k ; показано, что статистическая сумма этой модели является τ -функцией цепочки Тоды (или цепочки Вольтерра — если потенциал четный), причем роль времен играют константы связи t_k . Также показано, что статистическая сумма зануляется при действии на нее бесконечномерной алгебры — борелевской подалгебры алгебры Вирасоро. Это последнее свойство является простым следствием ковариантности действия относительно произвольных замен переменной M матричного интеграла, разлагающихся в нуле в ряд Тэйлора. Отмечая далее такого рода факт ковариантности матричных моделей, мы будем говорить, что она имеет соответствующую симметрию (не нетеровского типа!).

Далее естественно спросить, какие матричные модели отвечают добавлению материи. Оказывается, можно рассмотреть эрмитовы многоматричные

модели, заданные статистической суммой

$$Z_{p-1} = \int \prod_i DM_i \exp \left\{ c \sum_{i=1}^{p-2} \text{tr} M_i M_{i+1} + \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{k=2}^{\infty} t_k^{(i)} \text{tr} M_i^k \right\}, \quad (46)$$

и исследовать их аналогично случаю одноматричной модели. В частности, можно вычислить их критические индексы (в вообще говоря мультикритических точках) [84,85]. Результат позволяет отождествить q -мультикритическую точку ($q = p + 1, \dots, 2p - 1, 2p + 1, \dots$, т. е., исключая числа, равные нулю по модулю p) $p - 1$ -матричной модели и (p, q) -минимальную модель, взаимодействующую с двумерной гравитацией. Заметим, что унитарная серия минимальных моделей соответствует первым критическим точкам многоматричных моделей.

Простейший пример многоматричной модели — это двухматричная модель. Довольно просто понять, почему эта модель отвечает модели Изинга на случайной поверхности [86,87]. Достаточно опять построить теорию возмущений для матричного интеграла (46) относительно квадратичного члена. Положим для простоты $t_2^{(1)} = t_2^{(2)} = -1$, $t_4^{(1)} = -\frac{\xi}{N} e^H$, $t_4^{(2)} = -\frac{\xi}{N} e^{-H}$ и $t_k^{(1)} = t_k^{(2)} = 0$ при любых $k > 4$ и $k = 3$. Тогда пропагатор (матрица, обратная стоящей при квадратичном члене) имеет вид $\frac{1}{1-c^2} \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{pmatrix}$, а диаграммное разложение, с точностью до тривиальной постоянной, эквивалентно статистической сумме

$$Z = \sum_{\text{случайная решетка}} \sum_{\text{спины}} \exp \left\{ \beta \sum_{\text{пары ближайших } ij} \sigma_i \sigma_j + H \sum_i \sigma_i \right\}, \quad c = e^{-2\beta}, \quad (47)$$

модели Изинга во внешнем магнитном поле на случайных (флуктуирующих) решетках (триангуляциях). Следует отметить, что такая модель гораздо проще модели Изинга на регулярной решетке, так как гравитационное взаимодействие эффективно проинтегрирует много усложняющих деталей.

В п. 2.2 исследованы многоматричные модели общего вида (46). Показано, что их статистическая сумма является τ -функцией двумеризованной цепочки Тоды. Показано также, что статистическая сумма двухматричной модели с общим потенциалом по одной из матриц и полиномом некоторой фиксированной степени K по другой зануляется при действии на нее некоторой бесконечномерной алгебры, похожей на борелевскую подалгебру алгебры $W^{(K)}$. Тем не менее это оказывается новой алгеброй, после непрерывного предела переходящей в стандартную $W^{(K)}$ -алгебру.

Заметим, что возникновение алгебры Вирасоро в одноматричной модели должно подразумевать возможность переформулировки теории в терминах двумерной конформной теории поля. В п. 2.3 такая формулировка представлена и показано, как она может быть обобщена на многоматричные модели. Более того, предложенная техника позволяет строить матричные модели с любой бесконечномерной (супер)алгеброй. В частности, мы находим новый класс многоматричных моделей — конформные многоматричные модели, статистическая сумма которых оказывается τ -функцией $sl(p)$ иерархии АКНС. Эти многоматричные модели обладают настоящей W -симметрией еще до перехода к непрерывному пределу, что, как будет показано ниже, упрощает этот последний.

Еще один важный класс дискретных матричных моделей — одноматричная модель унитарных матриц, непрерывный предел которых имеет отношение к КХД [79, 88], изучена в п. 2.4. Показано, что ее статистическая сумма является τ -функцией иерархии релятивистской цепочки Тоды, причем, как и в случае эрмитовой модели, система обладает вирасоровской симметрией.

Таким образом, мы видим, что статистические суммы всех многообразных дискретных матричных моделей являются τ -функциями интегрируемых иерархий. В п. 2.5 обсуждается общая структура иерархий такого типа (полу-бесконечные иерархии) и показывается, как описанные матричные модели в нее погружаются.

1.3.2. Переход к непрерывному пределу в матричных моделях. Итак, мы видели, что в пределе больших N вблизи критических точек дискретные матричные модели воспроизводят двумерные конформные теории на сфере, взаимодействующие с гравитацией. Оказывается, однако, что существует более сложный двойной скейлинговый предел, когда оказывается возможным получить статистическую сумму теории сразу на всех родах. Тем самым именно этот предел позволяет изучать непертурбативные эффекты и именно в этом пределе ТУ становятся нетривиальными и ведут к содержательным уравнениям.

Мы уже обсуждали выше, что критическая точка матричной модели не зависит от рода поверхности (т. е. степени N). Это, в частности, означает, что вблизи критической точки разложение (38) может быть переписано с использованием (42) как разложение по параметру $\kappa \equiv N^{-2}(\xi - \xi_c)^{\gamma-2}$, который может быть отождествлен со струнной константой связи. Тогда, устремляя $N \rightarrow \infty$ и $\xi \rightarrow \xi_c$, так что κ остается конечным, можно получить статистическую сумму в непрерывном пределе, содержащую вклады всех родов [89–91]:

$$Z(G_{\text{str}}) = \sum_{\text{род } g} \kappa^{g-1} Z_g^{(\text{перенорм})} + \text{сингулярные члены}, \quad (48)$$

причем неуниверсальные сингулярные члены легко контролируются и должны отбрасываться при перенормировке. Можно заметить, что струнная константа

связи в результате размерной трансмутации становится размерной величиной, причем эта размерность зависит от критической точки. Используя связь ξ с космологической постоянной в режиме постоянной космологической постоянной, величину κ можно переписать в виде

$$\kappa = N^{-2}(\mu - \mu_c)^{\gamma-2} = \frac{\varepsilon^{2\gamma-4}N^{-2}}{\mu_R^{2-\gamma}} = \frac{G_{\text{str}}}{\mu_R^{2-\gamma}}, \quad (49)$$

где настоящая перенормированная константа связи

$$G_{\text{str}}^R \equiv \varepsilon^{2\gamma-4}N^{-2} \quad (50)$$

остается конечной, как и μ_R , при $N \rightarrow \infty$ и $\varepsilon \rightarrow 0$.

Описанная процедура двойного скейлингового предела легко может быть проведена вблизи каждой критической точки. В частности, уже при анализе вблизи конкретных критических точек было обнаружено, что теория обладает интегрируемыми свойствами: во-первых, было замечено [91], что уравнение, которому удовлетворяет статистическая сумма одноматричной модели в непрерывном пределе, связано с гамильтонианами КдВ (полиномами Гельфанда–Дикого). Более явно интегрируемость была представлена М. Дагласом [92], который предположил следующую явную форму записи струнного уравнения (т.е. уравнения, которому удовлетворяет статистическая сумма) вблизи любой критической точки (так называемое уравнение Дагласа):

$$[L, A] = 1, \quad (51)$$

где L — оператор Лакса; A — гамильтониан некоторой интегрируемой системы. На самом деле, q -й критической точке $(p-1)$ -матричной модели отвечает оператор Лакса, описывающий $(p-1)$ -редукцию иерархии Кадомцева–Петвиашвили, и оператор A , являющийся ее q -м гамильтонианом.

Уравнение Дагласа исследовалось в разных моделях (см., например, [93]), однако больший интерес представляют формулы, интерполирующие между разными критическими точками. На основе результатов Дагласа в [64, 94] такие формулы были предложены. Точнее, было сделано предположение, что интерполирующая между различными критическими точками статистическая сумма $(p-1)$ -матричной модели в непрерывном пределе является τ -функцией $(p-1)$ -редукции иерархии Кадомцева–Петвиашвили, причем временами являются перенормированные константы связи. Более того, в тех же работах предполагалось, что эта τ -функция удовлетворяет ряду условий, заданных $W^{(p)}$ -алгеброй.

Тем не менее полученные результаты обладали рядом недостатков. Во-первых, поскольку они были получены на основе анализа поведения матричных моделей вблизи первых критических точек, они являлись просто набором

некоторых гипотез. Тем более что речь не шла об их получении в результате ясной процедуры взятия непрерывного предела. При этом все вопросы перенормировки операторов и констант связи оставались вне рассмотрения*.

Во-вторых, все обсуждение строилось вокруг уравнений, которым удовлетворяет статистическая сумма матричной модели, поэтому и непрерывный предел был получен неявно — в форме ряда уравнений на эту статистическую сумму. Однако имеется еще проблема решения этих уравнений.

Как обе эти проблемы решаются, объяснено в настоящем обзоре и в обзоре [53], посвященном непрерывным матричным моделям. В данной работе условия интегрируемости и $W^{(p)}$ -условия получаются в результате взятия непрерывного предела в соответствующих дискретных условиях. Поэтому интегрируемость и $W^{(p)}$ -алгебры, обнаруженные в дискретных моделях, оказываются ключевыми в конструкции.

Для построения непрерывного предела можно исследовать подходящий предел интегрируемых иерархий, описывающих дискретные матричные модели. В [53] это сделано для случая одноматричной модели, причем отвечающая ей иерархия цепочки Тоды переходит в пределе в иерархию КдВ.

Правильного предела интегрируемой иерархии, однако, еще недостаточно — необходимо найти также предел струнного уравнения. Можно и сразу искать двойной скейлинговый предел алгебры Вирасоро, поскольку она содержит в себе и интегрируемую иерархию, и струнное уравнение (см. выше). Это сделано в [53], причем получающаяся в пределе алгебра также является алгеброй Вирасоро.

К сожалению, такая процедура не обобщается непосредственно на стандартные многоматричные модели (46) (см., однако, [95]). Оказывается, адекватный дискретный аналог, как показано в [53], дают конформные многоматричные модели, в которых двойной скейлинговый предел берется в точности как в одноматричной модели.

В заключении обзора содержится сжатое перечисление обсуждавшихся в нем результатов. Более развернутая версия обзора опубликована в [53]. Кроме того, часть материала, носящего более технический характер, дана в приложении к настоящей работе, а также в приложениях к [53].

2. ДИСКРЕТНЫЕ МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ

В этом разделе мы обсуждаем дискретные матричные модели и доказываем, что их статистические суммы являются τ -функциями соответствующих

*Более того, приведенные в [64,94] аргументы в пользу предложенных утверждений содержали две взаимно компенсирующиеся, но существенные ошибки.

интегрируемых иерархий и удовлетворяют условиям Вирасоро (одноматричные модели) или W -алгебр (многоматричные модели). Хотя эти свойства физически существенны только в непрерывном пределе, для их лучшего понимания важны теории, лежащие в нужном классе универсальности и обладающие этими свойствами также и вне критической точки. Основным результатом данной главы указывает, что такие теории — это дискретные матричные модели.

2.1. Эрмитова одноматричная модель. Здесь мы докажем, что статистическая сумма эрмитовой одноматричной модели является τ -функцией цепочки Тоды и удовлетворяет условиям Вирасоро. По определению она является интегралом по эрмитовой матрице $n \times n$ с произвольным потенциалом вида (43):

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_n(t_k) &\equiv \{\text{Vol}_{U(n)} n!\}^{-1} \int DH \exp \{\text{tr } V(H)\}, \\ V(H) &\equiv - \sum_{k=0} t_k H^k, \end{aligned} \quad (52)$$

где DH — соответствующая мера Хаара; $\text{Vol}_{U(n)}$ обозначает объем унитарной группы, а смысл нормировочного множителя станет ясен позднее. Мы рассматриваем статистическую сумму как функцию всех времен (констант связи).

Стандартный способ работы с интегралами (52) — проинтегрировать по угловым переменным матрицы H . Поскольку потенциал зависит только от собственных значений, это интегрирование тривиально и дает объем унитарной группы. После учета якобиана перехода к разбиению на угловые и радиальные переменные мы окончательно получаем [96]:

$$\mathcal{Z}_n(t_k) = (n!)^{-1} \int \prod_i dh_i \Delta^2(h) \exp \left\{ - \sum_{i,k} t_k h_i^k \right\}, \quad (53)$$

где $\Delta(h) \equiv \det h_i^{j-1} = \prod_{i>j} (h_i - h_j)$ — определитель Ван-дер-Монда. Именно его присутствие делает интеграл нетривиальным. Такая структура с определителем Ван-дер-Монда также подразумевает естественное представление подынтегрального выражения в виде некоторого фермионного коррелятора и отвечает за интегрируемые свойства системы.

Один из стандартных способов работы с интегралами вида (53) был предложен в [81], он состоит во введении системы ортогональных полиномов со следующим условием ортогональности:

$$\langle i|j \rangle \equiv \langle P_i, P_j \rangle = \int P_i(h) P_j(h) e^{-V(h)} dh = \delta_{ij} e^{\varphi_i(t)}, \quad (54)$$

где $e^{\varphi_i(t)}$ — некоторые нормы, которые должны определяться из интеграла (54) и условия нормировки полиномов:

$$P_i(h) = \sum_{j \leq i} \gamma_{ij} h^j, \quad \gamma_{ii} = 1, \quad (55)$$

т. е. коэффициент при лидирующей степени полагается равным 1. Иногда мы будем работать в ортонормированном базисе, который чаще встречается в литературе и отвечает перенормировке полиномов P_n фактором $e^{-1/2\varphi_n}$.

При помощи полиномов (54), (55) можно переписать (53) в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_n = (n!)^{-1} \int \prod_i dh_i \det P_{k-1}(h_j) \det P_{l-1}(h_m) \times \\ \times \exp \left\{ - \sum_{i,k} t_k h_i^k \right\} = \prod_{i=0}^{n-1} e^{\varphi_i(t)}, \quad (56) \end{aligned}$$

где мы использовали условие ортогональности.

2.1.1. Уравнение цепочки Тоды. Получим теперь уравнение цепочки Тоды на τ -функцию \mathcal{Z}_n [10, 97]. Для этого рассмотрим скалярное произведение $\langle n|h|m \rangle$ при разных значениях m . Оно, очевидно, равно нулю при $m - n \neq 0, \pm 1$ (например, $\langle n|h|n-2 \rangle = \langle n|n-1 \rangle + \sum_{k>1} c_k \langle n|n-k \rangle = 0$ благодаря условиям (54) и (55)). Поэтому

$$hP_n(h) = P_{n+1}(h) - p_n P_n(h) + R_n P_{n-1}(h), \quad (57)$$

где p_n и R_n — некоторые, пока не определенные коэффициенты. Второй из них может быть легко определен путем двукратного применения (57): $\langle n-1|h|n \rangle = \langle hP_{n-1}, P_n \rangle = \langle n|n \rangle + \sum_{k>0} \langle n|n-k \rangle = \langle n|n \rangle = \langle P_{n-1}, hP_n \rangle = R_n \langle n-1|n-1 \rangle$, т. е.

$$R_n(t) = e^{\varphi_n - \varphi_{n-1}}. \quad (58)$$

На самом деле, соотношение (57) уже некоторым образом указывает на цепочку Тоды. Действительно, введем разностный \mathbf{L} -оператор с матричными элементами

$$(\mathbf{L})_{mn} = \delta_{m,n-1} - p_n \delta_{m,n} + R_{n+1} \delta_{m,n+1}. \quad (59)$$

Тогда в соотношении (57) легко узнать действие оператора Лакса цепочки Тоды [97, 98] на функцию Бейкера–Ахиезера (ФБА, собственную функцию оператора Лакса) $\Psi_n(h) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} V(h) \right\} P_N(h)$:

$$\mathbf{L}\Psi_n(h) = h\Psi_n(h), \quad (60)$$

где h играет роль спектрального параметра. Теперь для того, чтобы получить уравнение цепочки Тоды, достаточно проверить, что производная по первому времени ФБА задается действием правильного \mathbf{M} -оператора (см. следующий пункт).

Однако мы выведем это уравнение другим путем [97]. Продифференцируем $\langle n|n \rangle$ по первому времени, используя (54), (55) и (57):

$$\dot{\varphi}_n e^{\varphi_n} = \frac{\partial}{\partial t_1} \langle n|n \rangle = 2 \left\langle \frac{\partial P_n}{\partial t_1}, P_n \right\rangle - \langle n|h|n \rangle = p_n e^{\varphi_n}, \quad \text{т. е. } p_n = \dot{\varphi}_n, \quad (61)$$

где точка означает производную по первому времени. Теперь продифференцируем (61) еще раз. Тогда, используя (54), (55), (57), (58) и (61) и интегрируя по частям, мы приходим окончательно к уравнению цепочки Тоды [99]:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_n e^{\varphi_n} + (\dot{\varphi}_n)^2 e^{\varphi_n} &= \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \langle n|n \rangle = \langle n|h^2|n \rangle - 2 \left\langle \frac{\partial P_n}{\partial t_1}, hP_n \right\rangle = \\ &= (p_n^2 + R_{n+1} + R_n) e^{\varphi_n} - 2R_n e^{\varphi_n}, \quad (62) \end{aligned}$$

т. е.

$$\ddot{\varphi}_n = R_{n+1} - R_n = e^{\varphi_{n+1} - \varphi_n} - e^{\varphi_n - \varphi_{n-1}}. \quad (63)$$

Теперь введем ключевой объект теории интегрируемых систем — τ -функцию:

$$e^{\varphi_n(t)} \equiv \frac{\tau_{n+1}(t)}{\tau_n(t)}. \quad (64)$$

Тогда можно переписать (63) в форме билинейного уравнения Хироты [100]:

$$\tau_n(t) \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \tau_n(t) - \left(\frac{\partial \tau_n(t)}{\partial t_1} \right)^2 = \tau_{n+1}(t) \tau_{n-1}(t). \quad (65)$$

Основной смысл понятия τ -функции — в существовании *единственной* функции, зависящей от бесконечного набора времен и удовлетворяющей *бесконечной* иерархии уравнений. Поэтому ниже мы выведем всю иерархию уравнений цепочки Тоды [101].

Заметим, что, используя (64), (56) и полагая

$$\tau_0 = 1, \quad (66)$$

мы получаем, что статистическая сумма одноматричной модели (52) действительно является τ -функцией цепочки Тоды

$$\mathcal{Z}_n = \frac{\tau_n}{\tau_0} = \tau_n. \quad (67)$$

Здесь видна важность правильно выбранной нормировки в (52). Действительно, τ -функция не может произвольно умножаться на факторы, зависящие от n , поскольку n — «нулевое» время — входит в уравнения иерархии (скажем, в (65)).

Аналогично уравнению (63) можно вывести и второй член иерархии уравнений цепочки Тоды:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_2} &= -(R_{n+1} + p_n^2 + R_n), \\ \frac{\partial p_n}{\partial t_2} &= -(p_{n+1} + p_n)R_{n+1} + (p_n + p_{n-1})R_n,\end{aligned}\quad (68)$$

причем первое из этих уравнений можно переписать в форме

$$\frac{\partial R_n}{\partial t_2} = R_n(R_{n-1} - R_{n+1}) - R_n(p_n^2 - p_{n-1}^2).\quad (69)$$

Теперь заметим, что если рассматривать только четный потенциал в (52), то возникнет меньшая иерархия уравнений, ограниченная условием $p_n = 0$ и с эволюцией только по четным потокам. Эта иерархия называется цепочкой Вольтерра [102]. Она вкладывается в иерархию цепочки Тоды, но не является ее редукцией, поскольку условие $p_n = 0$ разрушается потоками по нечетным временам. Первое уравнение иерархии Вольтерра легко считывается со второго уравнения иерархии Тоды (69) с наложенным условием $p_n = 0$ и имеет вид

$$\frac{\partial R_n}{\partial t_2} = R_n(R_{n-1} - R_{n+1}).\quad (70)$$

Заметим, что в физических приложениях одноматричной модели обычно используют как раз четный потенциал и цепочку Вольтерра [103]. Это, однако, как можно убедиться [53], ведет к неправильному непрерывному пределу. Тем не менее авторы указанных работ получали *правильный* непрерывный предел благодаря еще одной, компенсирующей ошибке (см. [53]).

2.1.2. Иерархия цепочки Тоды. Для изучения всех уравнений иерархии цепочки Тоды введем обозначение $\gamma_{mn}^{(k)} \equiv \frac{\langle n|h^k|m\rangle}{\langle m|m\rangle}$ для матричного элемента k -й степени оператора Лакса (в частности, $\gamma_{mn}^{(0)} = \gamma_{mn}$ в соотношении (55)). Он обладает рядом очевидных свойств:

$$\begin{aligned}\gamma_{mn}^{(k)} &\neq \gamma_{nm}^{(k)}, \quad \gamma_{mn}^{(k)} = 0 \quad \text{при } m + p < n, \\ h^k P_n &= \sum_{m=0}^{n+k} \frac{\langle n|h^k|m\rangle}{\langle m|m\rangle} P_m = \sum_{m=0}^{n+k} \gamma_{nm}^{(k)} P_m.\end{aligned}\quad (71)$$

Последнее соотношение следует из ортогональности и полноты базиса полиномов P_n . Продифференцируем теперь соотношения ортогональности (54) по времени t_k :

$$e^{\varphi_n} \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_k} \right) \delta_{mn} = - \langle n | h^k | m \rangle + \left\langle \frac{\partial P_n}{\partial t_k}, P_m \right\rangle + \left\langle P_n, \frac{\partial P_m}{\partial t_k} \right\rangle. \quad (72)$$

Тогда при $m = n$

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_k} = -\gamma_{nn}^{(k)}, \quad (73)$$

а при $m < n$

$$\frac{\partial P_n}{\partial t_k} = \sum_{m=0}^{n-1} \gamma_{nm}^{(k)} P_m. \quad (74)$$

Дифференцируя (71) по t_q согласно (74), можно получить замкнутую систему уравнений на бесконечный набор матричных элементов $\gamma_{nm}^{(k)}$:

$$\frac{\partial \gamma_{nm}^{(k)}}{\partial t_q} = \sum_{l=m-k}^{n-1} \gamma_{nl}^{(q)} \gamma_{lm}^{(k)} - \sum_{l=m+1}^{n+k} \gamma_{nl}^{(k)} \gamma_{lm}^{(q)}. \quad (75)$$

Из соотношения (74) можно также считать \mathbf{M} -оператор для цепочки Тоды, который отвечает производной ФБА, и убедиться, что он имеет правильный вид* [97, 98, 102]:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\Psi_n(h) &\equiv \frac{\partial \Psi_n}{\partial t_k} = R_n \Psi_{n-1} - \frac{1}{2} h \Psi_n = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\Psi_{n+1} - \frac{1}{2} p_n \Psi_n - R_n \Psi_{n-1} \right). \end{aligned} \quad (77)$$

Полученная нами система уравнений (75) есть не что иное, как система уравнений Захарова–Шабата для иерархии цепочки Тоды. Чтобы увидеть

*Если вместо Ψ_n ввести ортонормированный базис $\psi_n \equiv e^{-1/2\varphi_n} \Psi_n$, то действие \mathbf{L} - и \mathbf{M} -операторов на него может быть переписано в более симметричном виде

$$\begin{aligned} h\psi_n &= \mathbf{L}\psi_n = c_{n+1}\psi_{n+1} - p_n\psi_n + c_n\psi_{n-1}, \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial t_1} &= \mathbf{M}\psi_n = -\frac{1}{2} (c_{n+1}\psi_{n+1} - c_n\psi_{n-1}), \end{aligned} \quad (76)$$

где $c_n \equiv \sqrt{R_n}$. Эта форма представления Лакса для цепочки Тоды более распространена в литературе (см. [98]).

это более явно, перепишем ее в \mathcal{R} -матричной форме. Вначале воспользуемся второй формулой из (71), чтобы переписать (75) в виде

$$\frac{\partial \gamma_{nm}^{(k)}}{\partial t_q} = \sum_{l=0}^{n-1} \gamma_{nl}^{(q)} \gamma_{lm}^{(k)} - \sum_{l=m+1}^{\infty} \gamma_{nl}^{(k)} \gamma_{lm}^{(q)}. \quad (78)$$

Для отождествления со стандартными формулами пересчитаем теперь $\gamma_{lm}^{(q)}$ на ортонормированный базис $\tilde{\gamma}_{lm}^{(q)} = e^{(\varphi_m - \varphi_n)/2} \gamma_{lm}^{(q)}$ (для этого надо воспользоваться условиями полноты $\sum_{l=0}^{\infty} \gamma_{ml}^{(p)} \gamma_{ln}^{(q)} = \gamma_{mn}^{(p+q)}$ и формулой (73)) и введем \mathcal{R} -матрицу, действующую на формальный ряд $f(\xi) = \sum_{-\infty}^{\infty} f_n \xi^n$ по стандартной формуле $\mathcal{R}^{(l)} f(\xi) = \sum_{n \geq l} f_n \xi^n - \sum_{n < l} f_n \xi^n$, где l отвечает некоторой градуировке. Тогда естественно для ряда $\tilde{\gamma}_n^{(k)}(\xi) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\gamma}_{mn}^{(k)} \xi^m$ считать, что градуировка задается значением n . Таким образом, действие \mathcal{R} -матрицы на $\tilde{\gamma}_{mn}^{(k)}$ задается формулой $\mathcal{R} \tilde{\gamma}_{mn}^{(k)} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\gamma}_{mn}^{(k)} \text{ при } m \geq n; \\ -\tilde{\gamma}_{mn}^{(k)} \text{ при } m < n \end{array} \right.$, т. е. $\mathcal{R} \gamma_{mn}^{(k)} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{mn}^{(k)} \text{ при } m > n; \\ -\gamma_{mn}^{(k)} \text{ при } m < n \end{array} \right.$. Тогда (75) может быть окончательно переписана в форме

$$\frac{\partial \mathbb{L}^k}{\partial t_q} = \frac{1}{2} \left[\mathcal{R} \mathbb{L}^q, \mathbb{L}^k \right], \quad (79)$$

которая является стандартной записью иерархии цепочки Тоды [101]*. На $\gamma_{nm}^{(k)}$ можно найти также и тождества другого сорта, которые возникают из изучения производных ортогональных полиномов по h . Мы к этому еще вернемся в пункте, посвященном алгебре Вирасоро.

2.1.3. Детерминантное представление. Конечно, существует более простой и непосредственный способ по виду τ -функции определять, какой иерархии она отвечает. Подробнее мы обсудим эти вопросы в п. 2.5. Более того, одной из главных задач обзора является нахождение различных удобных и эффективных представлений для τ -функции. В частности, здесь мы получим для τ -функции эрмитовой одноматричной модели детерминантное представление специальной формы, отвечающей именно τ -функции иерархии цепочки Тоды.

Для этого перепишем условие ортогональности (54) в «матричной» форме, а именно введем матрицу Γ с матричными элементами γ_{mn} , определенными

*В последней статье авторы для объекта $\mathcal{R}\mathbb{L}$ используют обозначение $(\mathbb{L})_+$, которое мы используем и проясним ниже.

в (55), так называемую матрицу моментов C , чьи матричные элементы определены формулой

$$C_{ij} = \int dh h^{i+j-2} e^{-V(h)}, \quad (80)$$

и диагональную матрицу J , на диагонали которой стоят экспоненты e^{φ_n} . Тогда (54) переписывается как матричное соотношение*

$$\Gamma C \Gamma^T = J, \quad (81)$$

где Γ^T обозначает транспонированную матрицу. Теперь, беря детерминант от обеих частей этого уравнения и используя (56), легко получить

$$\mathcal{Z}_n = \det_{n \times n} C_{ij}, \quad (82)$$

причем матрица моментов удовлетворяет ряду условий, которые с очевидностью следуют из ее явного вида (80):

$$\frac{\partial C_*(t)}{\partial t_k} \equiv \partial_k C_*(t) = (-)^{k+1} \frac{\partial^k C_*(t)}{\partial t_1^k} \equiv (-)^{k+1} \partial^k C_*(t), \quad (83)$$

$$C_{ij} = C_{i+j}, \quad (84)$$

$$C_n = (-)^n \partial^{n-2} C_{11} \equiv (-)^n \partial^{n-2} C. \quad (85)$$

Таким образом, окончательно статистическая сумма одноматричной модели равна

$$\mathcal{Z}_n = (-)^n \det \partial^{i+j-2} C, \quad (86)$$

что действительно задает цепочку Тоды [10, 97, 106, 107] (см. также п. 2.5). Заметим, что условия (83) и (85) выполняются для полной иерархии двумеризованной цепочки Тоды (и КП), в то время как (84) выделяет именно цепочку Тоды.

*Это уравнение — не что иное, как проблема Римана–Гильберта, известная также как задача факторизации (см. подробнее в [97, 101, 104, 105]).

2.1.4. Условия Вирасоро и тождества Уорда. Перейдем теперь ко второму ингредиенту матричных моделей — условиям Вирасоро. На самом деле, мы могли использовать произвольную (не обязательно плоскую) меру в (54) и все равно получили бы цепочку Тоды. Объясняется это тем фактом, что конкретная интегрируемая структура спрятана в общей форме интеграла (53). В то же время плоский выбор меры в (54) фиксирует некоторое конкретное решение цепочки Тоды, отвечающее одноматричной модели. Если говорить в инвариантных терминах, то конкретное решение однозначно фиксируется условиями Вирасоро [97,108], т. е. пары (интегрируемая система, алгебра ТУ) достаточно, чтобы однозначно фиксировать статистическую сумму.

Подобно тому как уравнения иерархии получались из анализа скалярных произведений со вставленными h^k , условия Вирасоро получаются из скалярных произведений с $h^k \frac{\partial}{\partial h}$, причем указанному оператору отвечает генератор L_{k-1} . Позже будет видно, что это совершенно общее явление — наличие условий типа Вирасоро связано с существованием пары операторов, коммутирующих на единицу, которые в подходящем пространстве сводятся к h и $\frac{\partial}{\partial h}$. Из таких операторов, конечно, нетрудно построить любую W -алгебру.

Итак, для вывода условий Вирасоро изучим матричный элемент

$$0 = \left\langle n \left| \frac{\partial}{\partial h} \right| n \right\rangle = \left\langle n \left| \frac{\partial}{\partial h} \right| n \right\rangle - \int dh P_n^2 \frac{\partial}{\partial h} e^{-V(h)}, \quad (87)$$

т. е.

$$\begin{aligned} 0 &= \int dh P_n^2 \frac{\partial}{\partial h} e^{-V(h)} = \\ &= \sum_k kt_k \langle n | h^{k-1} | n \rangle = \sum_k kt_k \frac{\partial}{\partial t_{k-1}} e^{\varphi_n}. \end{aligned} \quad (88)$$

Из этого уравнения легко получается, что

$$\begin{aligned} \sum_k kt_k \frac{\partial}{\partial t_{k-1}} \sum_i^{n-1} \varphi_i &= \\ &= \frac{1}{Z_n} \sum_k kt_k \frac{\partial}{\partial t_{k-1}} Z_n \equiv \frac{1}{Z_n} L_{-1} Z_n = 0. \end{aligned} \quad (89)$$

Отметим, что при выводе (87) мы интегрировали по частям и существенно пользовались тем, что мера плоская.

Более длинен и запутан вывод старших моментов оператора $\frac{\partial}{\partial h}$, однако и его можно сделать в общем виде и получить полный набор условий Вирасоро

(точнее, борелевской подалгебры алгебры Вирасоро) [97]*

$$L_q \mathcal{Z}_n = 0, \quad q \geq -1, \quad (90)$$

где операторы (мы также использовали соотношение $\frac{\partial}{\partial t_0} \mathcal{Z}_n = -n \mathcal{Z}_n$, которое следует из определения (52))

$$L_q = \sum_{k=0}^{\infty} k t_k \frac{\partial}{\partial t_{k+q}} + \sum_{k=0}^q \frac{\partial^2}{\partial t_k \partial t_{q-k}} \quad (91)$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Вирасоро

$$[L_n, L_m] = (n - m) L_{n+m}. \quad (92)$$

Поскольку здесь возникает только борелевская подалгебра алгебры Вирасоро, то не встает вопрос о центральном заряде последней.

Мы теперь, однако, продемонстрируем другой, гораздо более простой вывод условий Вирасоро [108], который объясняет настоящую причину их возникновения в матричных моделях. Покажем, что они — не что иное, как ТУ одноматричной модели (52) [108–110]. Чтобы это увидеть, сдвинем переменную H на малую величину ϵH^{q+1} в интеграле (52). Поскольку это просто замена переменных, интеграл от этого не должен измениться. С другой стороны, сдвиг приводит к изменению потенциала $\sum t_k H^k \rightarrow \sum t_k (H + \epsilon H^{q+1})^k = \sum_{k=1}^q t_k H^k + \sum_{k>q} (t_k + \epsilon(k-q)t_{k-q}) H^k$. Таким образом, такие

сдвиги даются действием операторов $L_q^{\text{cl}} \equiv \sum k t_k \frac{\partial}{\partial t_{k+q}}$, которые образуют алгебру Вирасоро (92).

Это, однако, еще не операторы (91), а только их «классическая» часть. Чтобы получить полные операторы Вирасоро, мы должны учесть изменение меры при обсуждавшихся преобразованиях. Якобиан преобразования

* Действительно, условия Вирасоро связаны с набором тождеств на $\gamma_{nm}^{(k)}$, получающихся из соотношения $\frac{\partial P_n}{\partial h} = \sum_{k=0} k t_k \sum_{m=0}^{n-1} \gamma_{nm}^{(k-1)} P_m$. Так, дифференцируя его по t_k и пользуясь

$$(74), \text{ можно получить } q \gamma_{nm}^{(q-1)} = \sum_{k=0} k t_k \left[\sum_{l=m+1}^{n-1} (\gamma_{nl}^{(q)} \gamma_{lm}^{(k-1)} - \gamma_{nl}^{(k-1)} \gamma_{lm}^{(q)}) - \frac{\partial \gamma_{nm}^{(k-1)}}{\partial t_q} \right]$$

для $m < n - 1$ и $\sum_{k=0} k t_k \frac{\partial \gamma_{n,n-1}^{(k-1)}}{\partial t_q} = -q \gamma_{n,n-1}^{(q-1)}$ для $m = n - 1$. Из этих выражений и (75)

$$\text{следует [97] } q \gamma_{nm}^{(q-1)} = \sum_{k=0} k t_k \left[\sum_{l=n}^{n+k-1} \gamma_{nl}^{(k-1)} \gamma_{lm}^{(q)} - \sum_{m-k+1}^m \gamma_{nl}^{(q)} \gamma_{lm}^{(k-1)} \right] \text{ и т. д.}$$

для меры Хаара на эрмитовых матрицах равен $\det \left\| \frac{\partial(H + \epsilon H^{q+1})_{ij}}{\partial H_{kl}} \right\| \sim 1 + \epsilon \operatorname{tr} \frac{\partial H^{q+1}}{\partial H} = 1 + \sum_{k=0}^q \operatorname{Tr} H^k \operatorname{tr} H^{q-k}$. Поскольку любая степень k матрицы H может быть получена дифференцированием экспоненты потенциала в (52) по времени t_k , якобиан может быть воспроизведен действием операторов $\sum_{k=0}^q \frac{\partial^2}{\partial t_k \partial t_{q-k}}$.

Таким образом, окончательный результат для интеграла со сдвинутой переменной имеет вид

$$\mathcal{Z}_n(t) = \mathcal{Z}_n(t) |_{\text{со сдвинутым } H} = (1 + L_q) \mathcal{Z}_n(t), \quad (93)$$

т. е.

$$L_q \mathcal{Z}_n = 0, \quad q \geq -1 \quad (94)$$

с операторами L_q , как в (91).

Описанный вывод условий Вирасоро как ТУ показывает, что ТУ должны быть типично определяющими систему (т. е. эквивалентными уравнениям движения) при наличии в действии взаимодействия достаточно общего вида, т. е. при достаточно большом (конфигурационном) пространстве связей.

2.2. Эрмитовы многоматричные модели. Рассмотрим теперь более сложный и содержательный пример матричных моделей — многоматричные модели [84, 85]. Эта модель задается матричным интегралом (46)* по $n \times n$ эрмитовым матрицам:

$$\mathcal{Z}_n^{\{p\}} \sim \int \prod_{i=1}^p [dH_i] \exp \left\{ -\operatorname{tr} \left[\sum_{i=1}^p V_i(H_i) + \sum_{i=1}^{p-1} H_i H_{i-1} \right] \right\}. \quad (95)$$

Этот интеграл опять можно свести к интегрированию по собственным значениям матриц H_i , проинтегрировав по угловым переменным. Однако интегрирование по угловым переменным в данном случае менее тривиально по сравнению со случаем одноматричной модели и не сводится к тривиальному интегралу и объему унитарных групп. Тем не менее возникающий интеграл вычисляется явно [85] и равен

$$\int [dU]_{n \times n} e^{\operatorname{tr} X U L U^\dagger} \sim \frac{\det_{ij} e^{l_i x_j}}{\Delta(L) \Delta(X)}, \quad (96)$$

*Для простоты в этом интеграле опущен постоянный множитель (см., например, [9]).

поэтому, учитывая также квадраты определителей Ван-дер-Монда, возникающие из якобиана перехода к угловым переменным (подобно тому, как это было в случае одноматричной модели (53)), получаем окончательно [96]:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_n^{\{p\}} &\sim \int \left[\prod_{i=1}^n dh_i^{\{1\}} dh_i^{\{p\}} \right] \Delta(h^{\{1\}}) \Delta(h^{\{p\}}) A(h_i^{\{1\}}, h_i^{\{p\}}) \equiv \\ &\equiv \int \left[\prod_{l=1}^p \prod_{i=1}^n dh_i^{\{l\}} \right] \Delta(h^{\{1\}}) \Delta(h^{\{p\}}) \times \\ &\times \exp \left\{ - \sum_{i,l} V_l(h_i^{\{l\}}) - \sum_{l=1}^{p-1} \sum_i h_i^{\{l\}} h_i^{\{l+1\}} \right\}. \end{aligned} \quad (97)$$

Этот интеграл, как и в одноматричном случае, может быть переписан через произведение норм системы ортогональных полиномов [80]. В самом деле, в данном случае нужно выбрать *биортогональную* систему, т.е. два набора полиномов $P_n(x)$ и $Q_m(y)$, удовлетворяющих следующему соотношению (би)ортогональности*:

$$\langle n | m \rangle \equiv \int dx dy P_n(x) Q_m(y) A(x, y) = \delta_{mn} h_m(t_k, \bar{t}_k | c_k) \equiv \delta_{mn} e^{\varphi_n}, \quad (98)$$

где времена t_k и \bar{t}_k параметризуют потенциалы V_1 и V_p соответственно, в то время как остальные потенциалы параметризуются коэффициентами c_k . Таким образом, разные наборы c_k описывают разные решения интегрируемой иерархии, а многоматричные модели, по сути, эквивалентны двухматричной, но с нетривиальной мерой.

При помощи введенных полиномов интеграл (97) переписывается в форме (56) с новыми φ_n , и можно вывести представление Лакса для соответствующей интегрируемой системы, подобно случаю одноматричной модели. На самом деле, теперь мы покажем, что все многоматричные модели отвечают двумеризованной цепочке Тоды [97, 106, 107], и обсудим алгебру ТУ системы.

2.2.1. Интегрируемые свойства многоматричных моделей. Начнем с вывода первого уравнения иерархии [97]. Как и в одноматричном случае, нормируем полиномы на единичный коэффициент при лидирующем члене:

$$P_n(x) = x^n + O(x^{n-1}), \quad Q_m(y) = y^m + O(y^{m-1}). \quad (99)$$

*Заметим, что так определенное скалярное произведение не является симметричным: $\langle n | m \rangle \neq \langle m | n \rangle$.

Определим разложение

$$xP_n \equiv P_{n+1} + \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} P_k, \quad yQ_n \equiv Q_{n+1} + \sum_{k=0}^n \beta_{nk} Q_k. \quad (100)$$

Теперь, дифференцируя соотношение ортогональности (98) по временам t_1 и \bar{t}_1 и используя (99), (100), получаем при $n = m$

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} = -\alpha_{nn}, \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial \bar{t}_1} = -\beta_{nn}, \quad (101)$$

а при $n \neq m$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_n}{\partial t_1} &= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{nk} P_k, & \frac{\partial Q_n}{\partial t_1} &= \frac{\langle n|n \rangle}{\langle n-1|n-1 \rangle} Q_{n-1}, \\ \frac{\partial P_n}{\partial \bar{t}_1} &= \frac{\langle n|n \rangle}{\langle n-1|n-1 \rangle} P_{n-1}, & \frac{\partial Q_n}{\partial \bar{t}_1} &= \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{nk} Q_k. \end{aligned} \quad (102)$$

Теперь продифференцируем по первым временам сами соотношения (99), (100) с использованием полученных тождеств. Это даст набор соотношений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{nn}}{\partial t_1} &= -\alpha_{n+1,n} + \alpha_{n,n-1}, & \frac{\partial \alpha_{nn}}{\partial \bar{t}_1} &= -\frac{\langle n+1|n+1 \rangle}{\langle n|n \rangle} + \frac{\langle n|n \rangle}{\langle n-1|n-1 \rangle}, \\ \frac{\partial \beta_{nn}}{\partial t_1} &= -\frac{\langle n+1|n+1 \rangle}{\langle n|n \rangle} + \frac{\langle n|n \rangle}{\langle n-1|n-1 \rangle}, & & \\ \frac{\partial \beta_{nn}}{\partial \bar{t}_1} &= -\beta_{n+1,n} + \beta_{n,n-1}. & & \end{aligned} \quad (103)$$

Наконец, используя (101) и (103), окончательно получаем первое уравнение иерархии

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t_1 \partial \bar{t}_1} &= \frac{\langle n+1|n+1 \rangle}{\langle n|n \rangle} - \frac{\langle n|n \rangle}{\langle n-1|n-1 \rangle} = \\ &= \exp \{ \varphi_{n+1} - \varphi_n \} - \exp \{ \varphi_n - \varphi_{n-1} \}. \end{aligned} \quad (104)$$

Это уравнение, действительно, отвечает двумеризованной цепочке Тоды [111]. Важным отличием цепочки Тоды от ее двумеризованной версии является то, что в этой последней уравнения (101) и (103) не образуют замкнутую систему, поскольку они содержат также $\alpha_{n,n+1}$ и т. д., которые не выражаются через $\langle n|n \rangle$, α_{nn} и β_{nn} . Таким образом, требуются уравнения по старшим (на самом деле, по *всем* старшим) временам [101]. Причина же простоты

цепочки Тоды — в трехдиагональности ее представления Лакса, которое дает соотношение $\alpha_{n,n-1} = R_n = \frac{\langle n+1|n+1 \rangle}{\langle n|n \rangle}$.

Конечно, действуя аналогично случаю одноматричной модели, можно получить и всю иерархию двумеризованной цепочки Тоды, однако, как уже видно из приведенного вывода первого уравнения, вычисления становятся весьма громоздкими. Поэтому мы здесь используем другой метод, применявшийся также в одноматричной модели, — получим детерминантное представление для статистической суммы теории [106, 107]. Вычисление подобно выводу формулы (82) и результат имеет тот же вид:

$$\mathcal{Z}_n = \det_{n \times n} C_{ij}^{\{p\}}, \quad (105)$$

отличаясь лишь явным выражением для матрицы моментов

$$C_{ij}^{\{p\}} \equiv \int dx dy x^{i-1} y^{j-1} A(x, y), \quad C_{11}^{\{p\}} \equiv C^{\{p\}}. \quad (106)$$

Последняя матрица моментов по-прежнему удовлетворяет условиям (83) и (84), а выражение (86) теперь принимает вид

$$\mathcal{Z}_n = (-)^n \det_{ij} \partial^{i-1} \bar{\partial}^{j-1} C^{\{p\}}. \quad (107)$$

Эта формула, действительно, описывает τ -функцию двумеризованной цепочки Тоды [106, 107, 112], которую также иногда называют [101] двумерной решеткой Тоды (2РТ).

В самом деле, возникновение двумерной структуры довольно естественно, если вспомнить, что статистическая сумма (107) многоматричной модели существенно зависит от *двух различных* наборов времен (в то время как остальные времена параметризуют решение). Конечно, более естественной кажется картина, в которой число независимых наборов времен совпадает с числом матриц. Мы опишем такие модели в п. 2.3, причем оказывается, что одновременно эти модели будут обладать более естественной алгеброй ТУ.

2.2.2. Тождества Уорда в многоматричных моделях. Теперь перейдем к обсуждению ТУ в многоматричных моделях. Хорошо известным фактом является утверждение, что непрерывная n -матричная модель описывается $W^{(n+1)}$ -алгеброй ТУ [64, 94]. Как показано в одноматричной модели, можно было бы ожидать аналогичную алгебру и в дискретном случае. Оказывается, однако, что дискретные многоматричные модели (95) имеют гораздо более запутанные ТУ [95, 108].

Конечно, если отнести член с взаимодействием разных матриц в (95) в меру [108], можно повторить рассуждение, проведенное в одноматричном

случае, и получить n независимых (борелевских подалгебр) алгебр Вирасоро*

$$L_q^{(cl)} = \sum_k kt_k \frac{\partial}{\partial t_{k+q}} \quad \text{с } n \geq -1. \quad (108)$$

Более того, из каждой такой алгебры несложно сконструировать W -алгебру произвольного спина:

$$\begin{aligned} w_q^{(r+1)} &= \sum k_1 \dots k_{r-1} L_{q+k_1+\dots+k_{r-1}}^{(cl)} = \\ &= \sum k_1 \dots k_{r-1} \frac{\partial}{\partial t_{q+k_1+\dots+k_{r-1}}}. \end{aligned} \quad (109)$$

Однако учет «квантовых» поправок, т. е. меры, полностью разрушает эти ТУ, так что, на первый взгляд, система не содержит достаточно много взаимодействий для описания богатого набора ТУ. Тем не менее это не так, и, чтобы увидеть большую алгебру ТУ, нужно вспомнить, что интегрируемая структура многоматричных моделей структурно сводилась к двухматричной модели (с более сложной мерой). Поэтому будем изучать двухматричную модель, причем в качестве одного из потенциалов выберем полином конечного порядка. Построим ТУ в этой модели, заданные как дифференциальные операторы на *одном* наборе времен t_k . Заметим, что это решает проблему со многими копиями алгебр ТУ, полученными в классическом случае.

Непрерывный предел такой асимметричной двухматричной модели изучался в [113], где было показано, что ее набор ТУ — $W^{(n)}$ -алгебра, где n — степень потенциала. Здесь мы докажем [95], что на дискретном уровне алгебра ТУ — некоторая «деформированная» $W^{(n)}$ -алгебра. Различие между этими алгебрами исчезает в непрерывном пределе. Таким образом, двухматричная модель описывает ТУ многоматричных моделей — факт достаточно красивый и неожиданный. Конечно, еще большее многообразие ТУ дадут многоматричные асимметричные модели с фиксированными потенциалами многих матриц.

Итак, мы изучаем двухматричную модель, заданную двойным интегралом по $n \times n$ эрмитовым матрицам, входящим в интеграл асимметричным образом (что отражено в их обозначениях):

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{V,U} &= \int DX D\Lambda \exp(-\text{tr} \{V[\Lambda] + U[X] - \Lambda X\}) \equiv \\ &\equiv \int D\Lambda e^{-\text{tr} V[\Lambda]} \mathcal{F}_U\{\Lambda\}, \end{aligned} \quad (110)$$

*Для краткости мы иногда будем опускать замечание про борелевскую часть алгебры, вследствие того факта, что непротиворечиво наложенные связи могут образовывать *только* борелевскую подалгебру, поскольку она не имеет центрального заряда.

причем потенциалы V и U имеют вид

$$V[\Lambda] = \sum_{k \geq 0}^{\infty} t_k \Lambda^k, \quad U[X] = \sum_{k \geq 0}^K s_k X^k. \quad (111)$$

Ниже мы используем очевидное обозначение $\mathcal{Z}_{V,U} \equiv \mathcal{Z}_U\{t_k\}$.

Теперь мы продемонстрируем новую технику вывода ТУ, которую мы будем активно использовать в непрерывных матричных моделях. Для этого изучим вначале одноматричный подынтеграл в (110):

$$\mathcal{F}_U\{\Lambda\} = \int DX \exp(-\text{tr } U[X] + \text{tr } \Lambda X), \quad (112)$$

рассматриваемый как функционал внешнего поля Λ . ТУ для этого интеграла были получены в [95, 114, 115, 130] и имеют очень простой вид:

$$(\text{tr } \Lambda^p U' [\partial/\partial \Lambda_{\text{tr}}] - \text{tr } \Lambda^{p+1}) \mathcal{F}_U\{\Lambda\} = 0. \quad (113)$$

Проще всего их вывести, сдвигая переменную

$$X \rightarrow X + \Lambda^p, \quad (114)$$

подобно тому, как это делалось при выводе условий Вирасоро в одноматричной модели. Это то же самое, что проинтегрировать полную производную $\frac{\partial}{\partial X_{\text{tr}}}$ от подынтегрального выражения в (112), которая автоматически зануляется.

Теперь из (110) и (113) легко получить

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{Z}_U}{\partial t_{p+1}} &= - \int D\Lambda e^{-\text{tr } V[\Lambda]} \text{tr } \Lambda^{p+1} \mathcal{F}_U\{\Lambda\} = \\ &= - \int D\Lambda e^{-\text{tr } V[\Lambda]} \text{tr} \left(\Lambda^p U' \left[\frac{\partial}{\partial \Lambda_{\text{tr}}} \right] \right) \mathcal{F}_U\{\Lambda\}. \end{aligned} \quad (115)$$

После интегрирования по частям это выражение переходит в

$$\begin{aligned} \int D\Lambda \mathcal{F}_U\{\Lambda\} \text{tr} \left(U' \left[-\frac{\partial}{\partial \Lambda_{\text{tr}}} \right] \Lambda^p \right) e^{-\text{tr } V[\Lambda]} &= \\ = \sum_{k > 0}^K k s_k \int D\Lambda \mathcal{F}_U\{\Lambda\} \text{tr} \left(\left(-\frac{\partial}{\partial \Lambda_{\text{tr}}} \right)^{k-1} \Lambda^p \right) e^{-\text{tr } V[\Lambda]}. \end{aligned} \quad (116)$$

Лидирующий член выражения в правой части, т. е.

$$Ks_K \int D\Lambda \mathcal{F}_U\{\Lambda\} \left\{ \text{tr } \Lambda^p (V'[\Lambda])^{K-1} + O(V^{K-2}) \right\} = \\ = Ks_K \sum_{a_1, \dots, a_{K-1}} a_1 t_{a_1} \dots a_{K-1} t_{a_{K-1}} \frac{\partial}{\partial t_{a_1 + \dots + a_{K-1} + p + 1 - K}} Z_U\{t\}, \quad (117)$$

это «классическая» часть оператора $W_{p+1-K}^{(K)}$ — $(p+1-K)$ -я гармоника генератора со спином K W_K -алгебры, действующая на $Z_U\{t\}$. (Заметим также, что, согласно (116), $p \geq 0$.) Совпадение классической части ТУ с W -алгеброй, по сути, и есть реальная причина для возникновения этой последней в непрерывном пределе [113]. Однако на уровне дискретной матричной модели мы получили *новую* \widetilde{W} -алгебру.

В общем виде ТУ (115) могут быть переписаны как следующий набор связей:

$$\left(-\frac{\partial}{\partial t_{p+1}} + \sum_{k>0}^K k s_k \widetilde{W}_{p+1-k}^{(k)}\{t\} \right) Z_U\{t\} = 0, \quad (118)$$

где операторы $\widetilde{W}^{(k)}$ определены формулой

$$\widetilde{W}_{p+1-k}^{(k)} e^{-\text{tr } V[\Lambda]} = -\text{tr} \left(\left(-\frac{\partial}{\partial \Lambda_{\text{tr}}} \right)^{k-1} \Lambda^p \right) e^{-\text{tr } V[\Lambda]}. \quad (119)$$

Эти операторы удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\widetilde{W}_p^{(k+1)} = \sum_n n t_n \widetilde{W}_{n+p}^{(k)} + \sum_{a+b=p+k-1} \frac{\partial}{\partial t_a} \widetilde{W}_{b+1-k}^{(k)}, \quad p \geq -k, \quad (120)$$

с «начальными»

$$\widetilde{W}_p^{(2)} = L_p = \sum_n n t_n \frac{\partial}{\partial t_{n+p}} + \sum_{a+b=p} \frac{\partial^2}{\partial t_a \partial t_b}, \quad p \geq -1, \\ \widetilde{W}_p^{(1)} = J_p = \frac{\partial}{\partial t_p}, \quad p \geq 0. \quad (121)$$

Для вывода (120) нужно просто явно вычислить производную $\partial/\partial \Lambda_{\text{tr}}$ в (119). Уравнения (121) выводятся совсем тривиально. Заметим, что генераторы $L = \widetilde{W}^{(2)}$ образуют «настоящую» алгебру Вирасоро.

Важным отличием ТУ (115) от «настоящей» W -алгебры ТУ является то, что в (115) входит сразу комбинация спинов, зависящая от потенциала, в то

время как W -алгебра ТУ включает в себя генераторы всех младших спинов как *отдельные* связи. Однако, поскольку (120) и (121) подразумевают, что все $\widetilde{W}^{(k)}$ -операторы в действительности пропорциональны линейным комбинациям генераторов алгебры Вирасоро $L = \widetilde{W}^{(2)}$, в непрерывном пределе восстанавливается правильная структура W -алгебры.

Прокомментируем теперь вкратце, как техника вывода ТУ, предложенная в одноматричном случае, может быть применена и к модели (110). Для этого нужно рассмотреть следующий одновременный сдвиг переменных в интеграле (110):

$$\delta X = \Lambda^p, \quad p \geq 0, \quad \delta \Lambda = \left(\sum_{m=0}^K m s_m \sum_{k=0}^{m-2} (-)^{k+1} (V')^k X^{m-2-k} \right) \Lambda^p. \quad (122)$$

Этот сдвиг переменных индуцирует следующую вариацию потенциала:

$$\delta S = \left(\sum_{m=0}^K m s_m (-)^m (V')^{m-1} \right) \Lambda^p + \Lambda^{p+1}. \quad (123)$$

Первый член в этом выражении дает «классическую» часть \widetilde{W} -алгебры, а второй отвечает производной $\partial/\partial t_{p+1}$ в (115).

Для вычисления квантовых поправок необходимо учесть якобиан преобразования (122). Вариация переменной X (122) (совпадающая, естественно, с (114)) не меняет меры интегрирования $DXD\Lambda$, однако вариация Λ — меняет, и соответствующий якобиан дает «квантовые» поправки в (115).

2.2.3. Структура и свойства \widetilde{W} -алгебры. Рассмотрим свойства новой алгебры \widetilde{W} [95]. Прежде чем переходить к конкретным формулам, сделаем несколько общих замечаний.

Во-первых, как обычно, мы будем обсуждать только «половину» алгебры, что в данном случае означает только гармоники $\widetilde{W}_p^{(K)}$ с $p \geq 1 - K$ алгебры $\widetilde{W}^{(K)}$ (см. (119)).

Во-вторых, отметим важность вопроса о том, является ли набор \widetilde{W} -ТУ (115) замкнутым. В [53, прилож. 1] показано, что он замкнут, а именно

$$[\widetilde{W}_p^{(K)}, \widetilde{W}_q^{(K)}] \in \text{Span } \widetilde{W}_r^{(K)}, \quad (124)$$

где Span означает все возможные линейные комбинации с коэффициентами, линейно зависящими от времен и производных по ним, причем $r \geq 1 - K$ подобно тому, как $p, q \geq 1 - K$. (Строго говоря, замкнутость ТУ (115) подразумевает также аналогичную формулу для коммутаторов сумм $\widetilde{W}_p^{(K)}$ с операторами более низкого спина $\widetilde{W}^{(n)}$, $n < K$, в том числе с первой производной, как в (115) (см. [53, прилож. 1]).)

Заметим, что (124) является совершенно нетривиальным свойством \widetilde{W} -алгебры — оно никак не следует из того факта, что $\widetilde{W}_p^{(K)}$ может быть выражено через L_q или J_q . Более того, $\widetilde{W}^{(K)}\mathcal{Z} = 0$ не означает, что операторы низшего спина $\widetilde{W}^{(n)}$, $n < K$, зануляют \mathcal{Z} . Поэтому (124) является совершенно необходимым для замкнутости ТУ (115).

В-третьих, построенная здесь \widetilde{W} -алгебра удивительным образом возникает в совершенно отличном контексте непрерывных матричных моделей [53,95,116], что демонстрирует ее универсальный характер, по крайней мере, в матричных моделях.

Наконец, в-четвертых, тот факт, что коммутатор операторов $\widetilde{W}^{(K)}$ в (124) не пропорционален просто $\widetilde{W}_{p+q}^{(2K-2)}$, демонстрирует, что $\oplus_K \widetilde{W}^{(K)}$ — не алгебра Ли (чтобы сделать ее похожей на W_∞ , необходимо, по крайней мере, изменить базис). Это делает \widetilde{W} еще более похожей на обычные W -алгебры, которые также нелинейны и замкнуты, когда рассматриваются только операторы $\widetilde{W}^{(n)}$ со спином $n \leq K$.

Явные выражения для первых членов \widetilde{W} -семейства и их коммутационные соотношения могут быть найдены в [53, прилож. 1].

Введем токи (положительные моды которых уже появлялись в (121))*

$$J(z) = \sqrt{2}\partial\phi(z) = \sum_{k>0} kt_k z^{k-1} + \sum_{k\geq 0} \frac{1}{z^{k+1}} \frac{\partial}{\partial t_k} = \sum_{k>0} J_{-k} z^{k-1} + \sum_{k\geq 0} J_k z^{-k-1}. \quad (125)$$

Тогда обычные W -операторы могут быть записаны как

$$W_p^{(K)} =: J^K :_{-K-p}, \quad (126)$$

где стандартное нормальное упорядочивание $:\dots:$ означает, что все положительные моды токов должны быть проташены направо, а соответствующие коммутаторы — выброшены.

Аналогичным образом можно ввести другое нормальное упорядочивание, которое будем обозначать $\ddagger \dots \ddagger$. Оно позволяет записать \widetilde{W} -операторы при помощи тех же формул (126). Это нормальное упорядочивание определено так, что члены с «неправильным» порядком мод токов должны быть просто отброшены. Чтобы увидеть, как это работает, рассмотрим два простейших примера.

*Заметим, что положительные моды стоят при отрицательных степенях z и наоборот. Такая терминология позволяет избавиться от большого количества знаков «минус».

Первый из них — это алгебра Вирасоро, положительные генераторы которой могут быть записаны как сумма трех членов:

$$J_- J_+ + J_+ J_- + J_+ J_+. \quad (127)$$

Стандартное нормальное упорядочивание этого выражения приводит к

$$L = 2J_- J_+ + J_+ J_+, \quad (128)$$

а новое — к

$$\tilde{L} = J_- J_+ + J_+ J_+. \quad (129)$$

Конечно, эти два выражения сводятся одно к другому простым перемасштабированием времен. Это, однако, уже не так в случае $\widetilde{W}^{(3)}$ -алгебры.

Действительно, соответствующая сумма токов в этом случае имеет вид

$$(J_- J_+ J_+ + J_+ J_- J_+ + J_+ J_+ J_-) + (J_+ J_- J_- + J_- J_+ J_- + J_- J_- J_+) + J_+ J_+ J_+. \quad (130)$$

При стандартном нормальном упорядочивании все члены в скобках равны друг другу, и мы приходим к формуле для обычного $W^{(3)}$ -генератора.

В случае же $\widetilde{W}^{(3)}$ -генераторов третий член в первой скобке и первые два во второй равны нулю, а $J_+ J_- J_+$ дает ненулевой вклад только при условии $(J_- J_+)_p$ с $p \geq -1$. Тогда этот член отвечает правильному порядку и приводит к соответствующему члену в $\widetilde{W}^{(3)}$ -генераторе. Таким образом, мы получаем $\widetilde{W}^{(3)}$ -генератор, причем все члены, как и должно быть [53], входят с единичными коэффициентами.

Итак, новое нормальное упорядочивание может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_p^{(K)} &= \dagger(\partial\phi)^K \dagger_p = \dagger J^K \dagger_p = \\ &= \sum_{\substack{p_1 + \dots + p_K = p \\ p_K \geq 0 \\ p_{K-1} + p_K \geq -1 \\ p_{K-2} + p_{K-1} + p_K \geq -2 \\ \dots}} J_{p_1} \dots J_{p_K} \quad \text{с } p \geq 1 - K. \end{aligned} \quad (131)$$

Его определяющим свойством является $\dagger AB \dagger = \dagger A(\dagger B \dagger) \dagger$, но $\dagger AB \dagger \neq \dagger(\dagger A \dagger) B \dagger$.

Мы не будем здесь более подробно описывать свойства \widetilde{W} -алгебр, сошлемся на [53, прилож. 1] и [95]. Заметим только, что общая двухматричная модель (с произвольным потенциалом) отвечает пределу бесконечного спина

\widetilde{W} -алгебры. Таким образом, известное утверждение, что для описания всех критических точек многоматричных моделей (т.е. W -алгебр с любыми спинами) достаточно модели общего вида, но с малым числом матриц (на самом деле, достаточно даже одноматричной модели, но тогда требуется сложный непрерывный предел [117]), получает свою интерпретацию на дискретном уровне.

2.3. Конформные матричные модели. Теперь, следуя работам [118–120], продемонстрируем представление матричных интегралов в виде, с самого начала подразумевающим их конформную инвариантность [69] (что, конечно, объясняет, почему ТУ в одноматричной модели образуют именно алгебру Вирасоро). Это представление позволит нам определить новый класс матричных моделей, которые мы называем «конформными» (модели такого типа рассматривались также в другом контексте в [121]). Замечательным свойством этих моделей является то, что они уже на дискретном уровне обладают «правильными» ТУ, образующими W -алгебру, и потому допускают совершенно непосредственную процедуру взятия непрерывного предела (см. [53]).

2.3.1. Конформное представление одноматричной модели. Начнем с того, что продемонстрируем, как статистическая сумма одноматричной модели (52) может быть переведена на язык корреляторов в гауссовой конформной теории поля с центральным зарядом $c = 1$, причем вирасоровские ТУ (91) принимают при этом стандартную форму генераторов алгебры Вирасоро [69] в теории одного свободного скалярного поля [118].

Для этого рассмотрим *голоморфные* компоненты скалярного поля

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \hat{Q} + \hat{P} \log z + \sum_{k \neq 0} \frac{J_{-k}}{k} z^{-k}, \\ [J_n, J_m] &= n\delta_{n+m,0}, \quad [\hat{Q}, \hat{P}] = 1 \end{aligned} \quad (132)$$

и определим вакуумные состояния формулами

$$J_k|0\rangle = 0, \quad \langle n|J_{-k} = 0, \quad k > 0, \quad \hat{P}|0\rangle = 0, \quad \langle N|\hat{P} = n\langle n|. \quad (133)$$

«Половина» компонент тензора энергии-импульса*

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{1}{2}[\partial\phi(z)]^2 = \sum T_q z^{-q-2}, \\ T_q &= \frac{1}{2} \sum_{k>0} J_{-k} J_{k+q} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{a+b=q \\ a,b \geq 0}} J_a J_b \end{aligned} \quad (134)$$

*Для простоты мы опускаем знак нормального упорядочивания в очевидных местах, например, в выражениях для T и W через свободные поля.

зануляется на $SL(2)$ -инвариантном вакууме:

$$T_q|0\rangle = 0, \quad q \geq -1. \quad (135)$$

Определим гамильтониан формулой

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k>0} t_k J_k = \oint_{C_0} V(z) j(z), \\ V(z) &= \sum_{k>0} t_k z^k, \quad j(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \partial\phi(z). \end{aligned} \quad (136)$$

Теперь решим условия Вирасоро (90) в общем виде. Иными словами, выведем общий вид статистической суммы, обладающей вирасоровской симметрией (90) (и переписывающейся в терминах свободных полей). Можно легко сконструировать «конформное» решение (90) в два этапа. На первом шаге легко проверить явным вычислением правильность «базисного преобразования»

$$L_q \langle n | e^{H(t)} \dots = \langle n | e^{H(t)} T_q \dots, \quad (137)$$

которое показывает, как вирасоровские генераторы (91) преобразуются к генераторам алгебры Вирасоро в гауссовской модели. На втором шаге следует заметить, что, в качестве прямого следствия (137), любой коррелятор вида

$$\langle n | e^{H(t)} G | 0 \rangle \quad (138)$$

дает решение (90), если

$$[T_q, G] = 0, \quad q \geq -1. \quad (139)$$

Заметим, что в корреляторе (138) параметр n считает число нулевых мод, «включенных» в G , т. е. *размер* матрицы в (52).

Конформное решение (139) (и, следовательно, (93)) непосредственно следует из основных свойств двумерной конформной алгебры [69]. Действительно, любое решение уравнения

$$[T(z), G] = 0 \quad (140)$$

является одновременно и решением (139), а, как хорошо известно [69], решение (140) — произвольная функция *экранирующих зарядов*, в теории свободного скалярного поля даваемых формулой

$$Q_{\pm} = \oint J_{\pm} = \oint e^{\pm\sqrt{2}\phi}. \quad (141)$$

Выберем в качестве G экспоненту от Q_+ . С учетом правила отбора по нулевой моде это дает

$$G = \exp Q_+ \rightarrow \frac{1}{n!} Q_+^n. \quad (142)$$

Конечно, общий случай отвечает $G \sim Q_+^{n+m} Q_-^m$, но в статье [118] была представлена общая прескрипция для контуров интегрирования, при которой зависимость от m несущественна и можно просто положить $m = 0$. На самом деле, проблема правильного выбора контуров — весьма не простая и важная проблема (см. подробнее в [118]).

Выбор G как в (142) приводит к (правильно нормированной) статистической сумме одноматричной модели. Действительно,

$$\mathcal{Z}_n(t) = \langle n | e^{H(t)} \exp Q_+ | 0 \rangle \quad (143)$$

после вычисления коррелятора в свободной теории и аналитического продолжения контура интегрирования приводится к выражению

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_n &= (n!)^{-1} \int \prod_{i=1}^n dz_i \exp \left(- \sum t_k z_i^k \right) \Delta_n^2(z) = \\ &= (n! \text{Vol } U(n))^{-1} \int DH \exp \left(- \sum \text{tr } t_k H^k \right), \quad (144) \end{aligned}$$

т. е. матричному интегралу (52). Это дает простейший пример конформной матричной модели, решающей условия Вирасоро, но развитый метод позволяет строить модели с ТУ, отвечающим другим симметриям.

2.3.2. ТУ в многоматричных моделях. Теперь мы попробуем применить развитый метод к построению многоматричных моделей, чьими ТУ является W -алгебра (95). Заметим, что в инструментарии двумерных конформных теорий поля уже имеются все необходимые нам ингредиенты [69]: во-первых, мы теперь должны вместо условий Вирасоро искать решения *расширенных условий Вирасоро*, т. е. условий, образующих W -алгебру. В этом случае мы получим гамильтонианы, выраженные через *несколько* свободных скалярных полей. Во-вторых, для явной конструкции решения мы должны использовать *экранирующие заряды* для W -алгебры. Общая схема решения выглядит следующим образом.

(i) Введем гамильтониан как линейную комбинацию картановских токов алгебры Каца–Мууди \mathcal{G} уровня 1:

$$H(t^{(1)}, \dots, t^{(\text{rank } \mathcal{G})}) = \sum_{\lambda, k > 0} t_k^{(\lambda)} \mu_\lambda \mathbf{J}_k, \quad (145)$$

где $\{\mu_i\}$ — векторы базиса в картановской гиперплоскости, которые в случае $SL(p+1)$ выбираются так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\mu_i \mu_j = \delta_{ij} - \frac{1}{p+1}, \quad \sum_{j=1}^{p+1} \mu_j = 0. \quad (146)$$

(ii) Действие дифференциальных операторов $\mathcal{W}_i^{(a)}$ по временам $\{t_k^{(\lambda)}\}$ можно теперь пересчитать из соотношения

$$\begin{aligned} W_i^{(a)} \langle \mathbf{n} | e^{H(\{t\})} \dots = \langle \mathbf{n} | e^{H(\{t\})} \mathbf{W}_i^{(a)} \dots, \\ a = 2, \dots, p+1, \quad i \geq 1-a, \end{aligned} \quad (147)$$

где

$$\mathbf{W}_i^{(a)} = \oint z^{a+i-1} \mathbf{W}^{(a)}(z), \quad \mathbf{W}^{(a)}(z) = \sum_{\lambda} [\mu_{\lambda} \partial \phi(z)]^a + \dots \quad (148)$$

это W -генераторы спина a , принадлежащие \mathbf{W}_{p+1} -алгебре и переписанные в терминах (rank \mathcal{G})-компонентного скалярного поля [122].

(iii) Конформные решения W -условий возникают в виде

$$\mathcal{Z}_{\mathbf{n}}^{\{CMMM, p+1\}}(t) = \langle \mathbf{n} | e^{H(t)} G \{Q^{(\alpha)}\} | 0 \rangle, \quad (149)$$

где G — снова экспонента от экранирующих зарядов алгебры Каца–Мууди уровня 1 [69]:

$$Q^{(\alpha)} = \oint J^{(\alpha)} = \oint e^{\alpha \phi}, \quad (150)$$

а $\{\alpha\}$ — корни конечномерной алгебры \mathcal{G} с корнями равной длины. Коррелятор (149) есть, по-прежнему, коррелятор в теории свободного поля, и вычисление дает его опять в форме многократного интеграла

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{\mathbf{n}}^{\{CMMM, p+1\}}(t) \sim \int \prod_{\alpha} \left[\prod_{i=1}^{n_{\alpha}} dz_i^{(\alpha)} \exp \left(- \sum_{\lambda, k > 0} t_k^{(\lambda)} (\mu_{\lambda} \alpha) (z_i^{(\alpha)})^k \right) \right] \times \\ \times \prod_{(\alpha, \beta)} \prod_{i=1}^{n_{\alpha}} \prod_{j=1}^{n_{\beta}} (z_i^{(\alpha)} - z_j^{(\beta)})^{\alpha \beta}. \end{aligned} \quad (151)$$

Единственное отличие от одноматричного случая (144) — это то, что выражение (151) при перезаписи в форме интегралов по матрицам имеет весьма сложный вид, включающий следующие объекты:

$$\prod_{i=1}^{n_{\alpha}} \prod_{j=1}^{n_{\beta}} (z_i^{(\alpha)} - z_j^{(\beta)})^{\alpha \beta} \longrightarrow \left[\det \{H^{(\alpha)} \otimes I - I \otimes H^{(\beta)}\} \right]^{\alpha \beta}. \quad (152)$$

Конформные матричные модели, определенные формулой (149) как решения W -связей, имеют богатую интегрируемую структуру и обладают естественным непрерывным пределом [119, 120]. Платой за это является их менее элегантная матричная запись. Однако это все еще модель цепочки матриц с взаимодействием ближайших соседей — в случае $SL(p+1)$. В общем случае нужно рассмотреть соответствующую диаграмму Дынкина и с каждой ее вершиной отождествить матрицу, а с ребром — взаимодействие. В дальнейшем, однако, мы будем пользоваться только представлением (151) в виде интегралов по собственным значениям (так называемая модель собственных значений).

2.3.3. Некоторые примеры. Теперь перейдем к более явным формулам и рассмотрим случай $p=3$, ассоциированный с W_3 -алгеброй Замолодчикова [69], который дает нам пример конформной двухматричной модели. В этом частном случае явные формулы для генераторов алгебры могут быть найдены в [119].

В этом случае имеется шесть экранирующих зарядов $Q^{(\pm\alpha_i)}$ ($i=1, 2, 3$), которые коммутируют с

$$\mathbf{W}^{(2)}(z) = T(z) = \frac{1}{2}[\partial\phi(z)]^2 \quad (153)$$

и

$$\mathbf{W}^{(3)}(z) = \sum_{\lambda=1}^3 (\mu_\lambda \partial\phi(z))^3, \quad (154)$$

где μ_λ — векторы одного из фундаментальных представлений ($\mathbf{3}$ или $\bar{\mathbf{3}}$) группы $SL(3)$.

Теперь выпишем явно решение тождеств Уорда. Конкретная форма интегрального представления (151) зависит от частного выбора вставок экранирующих операторов в коррелятор (149). Следуя [118], мы будем обсуждать решения, которые не содержат знаменателя. Одна из причин такого выбора — наиболее простая интегрируемая структура в этом случае (см. ниже, а также [106, 107]). Остальные случаи могут быть исследованы точно так же. Заметим, что общее решение (151) может быть проанализировано в рамках формализма теории свободных фермионов (см. п. 2.5).

Одним из способов избежать проблемы с наличием дополнительных решений является специальная прескрипция для контуров интегрирования. Прежде всего заметим, что, как в любой конформной теории, необходимо рассматривать замкнутые контуры в определении экранирующих операторов (141), (150). Тогда знаменатель может быть легко проинтегрирован с использованием стандартной техники вычетов. Однако в окончательном ответе необходимо деформировать контур до положения, определенного конкретной

моделью. Скажем, в простейшем случае эрмитовой одноматричной модели интегрирование идет вдоль вещественной оси. Процедура деформации контура не слишком простая, поскольку только после того, как она проделана, решение становится нетривиальным. (В определенном смысле при правильно определенном контуре $Q^{(i)}|0\rangle = \int_{\mathbf{R}} J^{(i)}|0\rangle \neq |0\rangle$, как должно было бы быть для замкнутого контура.) Таким образом, наша прескрипция подразумевает, что вначале надо проинтегрировать по некоторой части собственных значений, а затем использовать аналитическое продолжение. Подробно эта процедура объяснена в [118].

Простейшее решение, которое не содержит знаменателей, соответствует специальному коррелятору

$$\mathcal{Z}_{\mathbf{N}}^{\{CMMM,p\}}[\{t\}] = \langle \mathbf{N} | e^{H(\{t\})} \prod_i \exp Q_{\alpha_i} | 0 \rangle, \quad (155)$$

когда мы выбираем в качестве α_i соседние (не простые!) корни: $(\alpha_i, \alpha_j) = 1$. В случае $SL(3)$ это отвечает вставкам, скажем, только Q_{α_1} и Q_{α_2} :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{n_1, n_2}^{\{CMMM,2\}}[t, \bar{t}] &= \frac{1}{n_1! n_2!} \langle n_1, n_2 | e^{H(t, \bar{t})} (Q^{\alpha_1})^{n_1} (Q^{\alpha_2})^{n_2} | 0 \rangle = \\ &= \frac{1}{n_1! n_2!} \int \left[\prod_{l=1}^2 \prod_{i=1}^{n_l} dh_{i_l}^{\{l\}} \right] \prod_{l=1}^2 \Delta^2(h^{\{l\}}) \times \\ &\quad \times \prod_{i,j} (h_i^{\{1\}} - h_j^{\{2\}}) \exp \left\{ - \sum_{i,l} V_l(h_i^{\{l\}}) \right\}. \end{aligned} \quad (156)$$

Формализм, развитый в настоящем разделе, может применяться и к построению матричных моделей с другими симметриями, скажем, с аффинной. Рассмотрим вкратце еще два важных примера. Первый из них — это суперсимметричная матричная модель. Она была впервые построена в [123] путем длинных и сложных вычислений — авторы строили решение системы уравнений $L_n Z = 0$ и $G_m Z = 0$ с генераторами $\{L_n, G_m\}$, образующими $N = 1$ суперконформную алгебру, не используя конформного представления. Было найдено решение в виде многократного интеграла по четным и нечетным (грассмановым) параметрам. На нашем же языке этот пример — простое и непосредственное обобщение случая одного скалярного поля на случай одного скалярного суперполя. При этом вставка экранирующих операторов $N = 1$ суперконформной алгебры непосредственно ведет к результату [123]. Действительная проблема возникает только со случаем $N = 2$ из-за отсутствия нужного числа подходящих экранирующих операторов.

Второй интересный пример — это деформация вирасоровских или W -условий при помощи процедуры Фейгина–Фукса–Доценко–Фатеева [69]. В этом случае формулы (143) и (149) все еще верны, так что необходимо только изменить определения (134), (148) на

$$T = \frac{1}{2}[\partial\phi(z)]^2 + \alpha_0\partial^2\phi \quad (157)$$

и соответствующие формулы для W -алгебр со старшим спином с центральным зарядом $c < \text{rank } \mathcal{G}$, а также подходящим образом деформировать генераторы (67), записанные в терминах дифференциальных операторов. Деформированные генераторы коммутируют с новыми экранирующими операторами. В случае деформации $p = 2$ теории (минимальные модели) эти операторы имеют вид

$$Q_{\pm} = \oint e^{\alpha_{\pm}\phi}, \quad \alpha_{\pm} = \alpha_0 \pm (\alpha_0 + 2)^{1/2}. \quad (158)$$

Заметим, однако, что выражение (158) не имеет естественного представления в терминах свободных фермионов при произвольных значениях экранирующего заряда α_0 . Это может означать проблему с интегрируемостью теории. Чтобы избежать этой проблемы, нужно рассмотреть систему j -дифференциалов [124].

Сделаем преобразование Мивы временных переменных [125]:

$$t_k = \frac{1}{k} \sum_j a_j \xi_j^{-k}. \quad (159)$$

Тогда интересующие нас корреляторы приобретают вид

$$\langle e^{H(\{t\})} Q_+^N Q_-^M \rangle = \frac{\langle \prod_i \Phi_i(\xi_i) Q_+^N Q_-^M \rangle}{\prod_{i < j} (\xi_i - \xi_j)^{a_i a_j}} \quad (160)$$

с

$$\Phi_i(z) = \exp[a_i\phi(z)], \quad \Delta_i = a_i^2/2 - a_i\alpha_0. \quad (161)$$

Можно выбрать $\{a_j\}$ таким образом, что $\{\Phi_j(z)\}$ будут первичными полями в минимальной модели, т. е. корреляторы (160) будут удовлетворять некоторым дифференциальным уравнениям, следующим из условий на нуль-вектора (в частном случае вырождения на уровне 2 эти уравнения совпадают с условиями Вирасоро, записанными в переменных Мивы). Все это легко обобщить на случай W -алгебры с несколькими скалярными полями и несколькими наборами времен. В этом случае надо рассмотреть в (159) *векторы* t_k и α_j . Это приводит к независимым дифференциальным уравнениям, которые снова отвечают независимым условиям на нуль-вектора. Такая конструкция объясняет соответствие между τ -функцией, удовлетворяющей условиям Вирасоро, и корреляторами в минимальных моделях [126].

2.3.4. Детерминантное представление. Теперь перейдем к обсуждению интегрируемых свойств конформных матричных моделей [119] и покажем, что статистическая сумма $(p-1)$ -матричной модели описывается обобщенной $SL(p)$ -иерархией АКНС [101, 127]. В частности, одноматричная модель описывается $SL(2)$ -иерархией, которая действительно, как хорошо известно [128], отвечает цепочке Тоды. В этом пункте выведем детерминантное представление для статистической суммы, доказывающее, что она является τ -функцией иерархии АКНС, и, как его непосредственное следствие, получим билинейное уравнение Хироты на эту τ -функцию.

Рассмотрим для простоты случай $p = 3$. Вычисления в общем случае делаются совершенно аналогично. В отличие от рассматривавшихся ранее случаев мы должны ввести $(p-1)$ -матрицу моментов, поскольку $SL(p)$ -иерархия АКНС описывает p -компонентную систему (редукцию из p -компонентной иерархии КП). Поэтому для $p = 3$ вводим

$$C(t) = \int dz \exp[-V(z)], \quad \bar{C}(\bar{t}) = \int dz \exp[-\bar{V}(z)], \quad (162)$$

где

$$V(z) = \sum_{k>0} t_k z^k, \quad \bar{V}(z) = \sum_{k>0} \bar{t}_k z^k,$$

и

$$\partial_{t_n} C(t) = (-)^{n+1} \partial_{\bar{t}_1}^n C(t), \quad \partial_{\bar{t}_n} \bar{C}(\bar{t}) = (-)^{n+1} \partial_{\bar{t}_1}^n \bar{C}(\bar{t}). \quad (163)$$

Детерминантное представление статистической суммы (156) тогда имеет вид [119] ($\partial \equiv \partial/\partial t_1$, $\bar{\partial} \equiv \partial/\partial \bar{t}_1$):

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{n_1, n_2}^{\{CMMM, 2\}} &= (-)^{n_1+n_2} \times \\ &\times \det \begin{bmatrix} C & \dots & \partial^{n_1-1} C & \bar{C} & \dots & \bar{\partial}^{n_2-1} \bar{C} \\ \partial C & \dots & \partial^{n_1} C & \bar{\partial} \bar{C} & \dots & \bar{\partial}^{n_2} \bar{C} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^{n_1+n_2-1} C & \dots & \partial^{2n_1+n_2-2} C & \bar{\partial}^{n_1+n_2-1} \bar{C} & \dots & \bar{\partial}^{n_1+2n_2-2} \bar{C} \end{bmatrix} \equiv \\ &\equiv \tau_{n_1, n_2}(t, \bar{t}), \quad (164) \end{aligned}$$

что является двойным вронскианным представлением τ -функции [129] иерархии АКНС.

К сожалению, обобщение (164) на случай $p \geq 3$ не имеет простой детерминантной формы.

Из представления (164) легко вывести билинейное уравнение (Хироты), которое еще раз доказывает, что статистическая сумма (156) является τ -функцией иерархии АКНС:

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial \bar{t}_1} \log \tau_{n_1, n_2}(t, \bar{t}) = \frac{\tau_{n_1+1, n_2-1}(t, \bar{t}) \tau_{n_1-1, n_2+1}(t, \bar{t})}{\tau_{n_1, n_2}^2(t, \bar{t})}. \quad (165)$$

В отличие от детерминантного представления (164) это выражение легко обобщается на случай $(p - 1)$ -матрицы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t_1^{(i)} \partial \bar{t}_1^{(j)}} \log \tau_{\{n_k\}}(t, \bar{t}) &= \\ &= \frac{\tau_{\{.., n_i+1, .., n_j-1, ..\}}(t, \bar{t}) \tau_{\{.., n_i-1, .., n_j+1, ..\}}(t, \bar{t})}{\tau_{\{n_k\}}^2(t, \bar{t})}. \end{aligned} \quad (166)$$

Эти уравнения движения могут быть непосредственно получены также из фермионного представления п. 2.5 и являются первым уравнением иерархии билинейных тождеств Хироты, обобщающем (65).

В заключение скажем несколько слов об общей структуре конформных моделей. Подчеркнем еще раз, что их статистическая сумма является коррелятором объектов, имеющих чисто алгебраический смысл. Действительно, экспонента, содержащая временные зависимости, генерируется картановскими токами $SL(p)$, а экспоненты от экранирующих зарядов отвечают другим (некартановским) генераторам $SL(p)$. Конечно, это не произвольные генераторы, а только любые $p - 1$ из них. В действительности различный выбор этих $p - 1$ генераторов отвечает *разным* моделям с той же алгеброй ТУ и теми же интегрируемыми свойствами. Хотя при построении детерминантного представления мы пользовались специальным выбором генераторов, в п. 2.5 в терминах фермионных представлений будет показано, что интегрируемые свойства теории *не зависят* от выбора генераторов и всегда описываются АКНС-иерархией [119], которая возникает при редукции общей $GL(p)$ -алгебры на ее простую $SL(p)$ -подалгебру при рассмотрении $W^{(p)}$ -алгебр. Это может быть переписано непосредственно в терминах гамильтоновой редукции (см. [118, 131]). При этом разный выбор $p - 1$ генераторов отвечает разным редукциям.

2.4. Унитарная одноматричная модель. Рассмотрим дискретную унитарную модель, заданную любым из следующих интегралов по унитарной

$(n \times n)$ -матрице:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}_n\{t\} &\sim \int DU \exp \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k \operatorname{Tr} U^k \right\} = \\
 &= \int DU \exp \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} t_k^+ \operatorname{Tr} (U^k + U^{-k}) + \sum_{k=0}^{\infty} t_k^- \operatorname{Tr} (U^k - U^{-k}) + t_0 \operatorname{Tr} 1 \right\} = \\
 &= \int DU \exp \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \hat{t}_k^+ \operatorname{Tr} (U + U^{-1})^k + \sum_{k=0}^{\infty} \hat{t}_k^- \operatorname{Tr} (U - U^{-1})^k + t_0 \operatorname{Tr} 1 \right\},
 \end{aligned} \tag{167}$$

где DU — соответствующая мера Хаара. Как обычно, нужно провести интегрирование по угловым переменным. В данном случае единственное отличие от одноматричного интеграла (52) заключается в другом якобиане перехода к угловым переменным, так что вместо квадрата определителя Ван-дер-Монда $\Delta^2(h)$ возникает $\Delta(z)\Delta(1/z)$ [96].

Таким образом, в данном случае нужно ввести биортогональную систему полиномов со скалярным произведением, определенным следующей формулой [97, 132, 133]*:

$$\langle n|m \rangle \equiv \oint \frac{dz}{2\pi iz} e^{V(z)} p_n(z) \bar{p}_m(1/z) = h_n \delta_{mn}, \tag{168}$$

где $V(z)$ обозначает, как обычно, потенциал модели

$$V(z) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k z^k, \tag{169}$$

а ортогональные полиномы нормированы обычным образом:

$$p_n(z) = z^n + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{nk} z^k, \quad \bar{p}_n(z) = z^n + \sum_{k=1}^{n-1} \bar{\alpha}_{nk} z^k. \tag{170}$$

Мы будем использовать обозначения

$$\alpha_{n,0} = S_{n-1}, \quad \alpha_{n,0} = \bar{S}_{n-1} \quad (S_{-1} = \bar{S}_{-1} \equiv 1). \tag{171}$$

*Заметим, что в цитированных работах изучался случай $t_k = t_{-k}$. Это отвечает симметричной унитарной модели (см. ниже).

Многие свойства модели (например, интегрируемость) не зависят от выбора контура, однако мы выберем единичную окружность, чтобы обеспечить вещественное скалярное произведение для вещественных потенциалов. В этом случае полином \bar{p}_n зависит от $z^* = 1/z$.

Теперь нетрудно стандартным путем получить выражение для статистической суммы (167) через произведение норм h_k :

$$\mathcal{Z}_n = \prod_{k=0}^{n-1} h_k. \quad (172)$$

2.4.1. Интегрируемые свойства модели. Выведем теперь эволюционные уравнения и обсудим, какой интегрируемой иерархии они отвечают.

Из условия ортогональности (168) легко получить рекуррентное соотношение на полиномы p_n, \bar{p}_n [97, 132]:

$$\begin{aligned} p_{n+1}(z) &= zp_n(z) + S_n z^n \bar{p}_n(z), \\ \bar{p}_{n+1}(z^{-1}) &= z^{-1} \bar{p}_n(z^{-1}) + \bar{S}_n z^{-n} p_n(z), \quad (p_0 = \bar{p}_0 = 1) \end{aligned} \quad (173)$$

и

$$h_{n+1}/h_n = 1 - S_n \bar{S}_n. \quad (174)$$

Определим ортонормированные полиномы:

$$P_n \equiv p_n, \quad \bar{P}_n \equiv \frac{1}{h_n} p_n, \quad \langle P_n, \bar{P}_k \rangle = \delta_{nk}. \quad (175)$$

Путем несложных вычислений можно получить из (173) операторы Лакса, которых теперь два по числу систем полиномов [107] (ср. с (100)):

$$zP_n(z) = P_{n+1}(z) - S_n h_n \sum_{k=0}^n \frac{\bar{S}_{k-1}}{h_k} P_k(z) \equiv \mathbf{L}_{nk} P_k, \quad (176)$$

$$z^{-1} \bar{P}_n(z^{-1}) = \frac{h_{n+1}}{h_n} \bar{P}_{n+1}(z^{-1}) - \bar{S}_n \sum_{k=0}^n S_{k-1} \bar{P}_k(z^{-1}) \equiv \bar{\mathbf{L}}_{kn} \bar{P}_k. \quad (177)$$

Дифференцируя условия ортогональности по временам t_k и используя соотношения (176), (177), можно получить эволюцию полиномов P_n и \bar{P}_n [107]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_n}{\partial t_k} &= -[(\mathbf{L}^k)_-]_{nm} P_m, & \frac{\partial P_n}{\partial t_{-k}} &= -[(\bar{\mathbf{L}}^k)_-]_{nm} P_m, \\ \frac{\partial \bar{P}_n}{\partial t_k} &= -(\mathbf{L}^k)_{nn} \bar{P}_n - [(\mathbf{L}^k)_+]_{mn} \bar{P}_m, \\ \frac{\partial \bar{P}_n}{\partial t_{-k}} &= -(\bar{\mathbf{L}}^k)_{nn} \bar{P}_n - [(\bar{\mathbf{L}}^k)_+]_{mn} \bar{P}_m, \end{aligned} \quad (178)$$

$$\frac{\partial h_n}{\partial t_k} = (\mathbb{L}^k)_{nn} h_n, \quad \frac{\partial h_n}{\partial t_{-k}} = (\bar{\mathbb{L}}^k)_{nn} h_n, \quad (179)$$

где индексы «плюс» и «минус» определены для любой матрицы C_{mn} следующим образом:

$$(C_+)_{mn} \equiv C_{mn} \theta(n - m - 1), \quad (C_-)_{mn} \equiv C_{mn} \theta(m - n - 1), \quad (180)$$

т. е. $(C_+)_{mn}$ ($(C_-)_{mn}$) — строго верхне(нижне)треугольная часть C_{mn} .

Заметим, что уравнения (176)–(178) непосредственно связаны со схемой, введенной Уено и Такасаки [101] для описания 2РТ. Это подразумевает, что унитарная модель может быть погружена в 2РТ [107]. Действительно, используя (178), (179), нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \partial S_n / \partial t_1 &= -S_{n+1} \frac{h_{n+1}}{h_n}, & \partial S_n / \partial t_{-1} &= S_{n-1} \frac{h_{n+1}}{h_n}, \\ \partial \bar{S}_n / \partial t_1 &= \bar{S}_{n-1} \frac{h_{n+1}}{h_n}, & \partial \bar{S}_n / \partial t_{-1} &= -\bar{S}_{n+1} \frac{h_{n+1}}{h_n}, \\ \partial h_n / \partial t_1 &= S_n \bar{S}_{n-1} h_n, & \partial h_n / \partial t_{-1} &= \bar{S}_n S_{n-1} h_n. \end{aligned} \quad (181)$$

Простые вычисления с использованием (181) приводят к следующему уравнению на статистическую сумму (172):

$$\partial_{t_1} \partial_{t_{-1}} \log \mathcal{Z}_n = \frac{\mathcal{Z}_{n+1} \mathcal{Z}_{n-1}}{\mathcal{Z}_n^2}, \quad \mathcal{Z}_0 = 1, \quad n \geq 0, \quad (182)$$

в котором легко узнать первое уравнение иерархии 2РТ, причем статистическая сумма должна быть отождествлена с τ -функцией, а отрицательные времена t_{-k} — с \bar{t}_k . Подробному описанию вложения в 2РТ посвящен следующий пункт.

Следует подчеркнуть, что уравнения (178) должны рассматриваться как некоторая редукция 2РТ к полубесконечной иерархии. Опишем это соответствие несколько подробнее. ФБА в иерархии 2РТ реализуются на бесконечных матрицах и даются формулами [101] ($(\Lambda)_{mn} \equiv \delta_{m,n+1}$):

$$\begin{aligned} \mathbb{L} \Psi_\infty &= \Psi_\infty \Lambda, & \bar{\mathbb{L}} \Psi_0 &= \Psi_0 \Lambda^{-1}, \\ \partial \Psi_{\infty(0)} / \partial t_k &= B_n \Psi_{\infty(0)}, & \partial \Psi_{\infty(0)} / \partial t_{-k} &= C_n \Psi_{\infty(0)}, \end{aligned} \quad (183)$$

где индексы отвечают отмеченным точкам на римановой поверхности, отвечающей решению 2РТ (т. е. точке бесконечномерного грассманиана или УПМ [134, 135]).

Эта линейная система решается следующими ФБА:

$$\begin{aligned}\Psi_\infty &= \hat{\Psi}_\infty \exp \left\{ \sum_{k=0} t_k \Lambda^k \right\}, \quad \Psi_0 = \hat{\Psi}_0 \exp \left\{ \sum_{k=0} t_{-k} \Lambda^{-k} \right\}, \\ \hat{\Psi}_{\infty(0)} &\equiv \sum_{j=0} \text{diag} \{ \psi_{\infty(0)k}(s) \} \Lambda^{k(-k)}, \\ \hat{\Psi}_{\infty(0)}^{-1} &\equiv \sum_{j=0} \Lambda^{k(-k)} \text{diag} \{ \psi_{\infty(0)k}^*(s+1) \},\end{aligned}\tag{184}$$

и в общем случае эти $\hat{\Psi}$ -функции обратимы. С другой стороны, в унитарной матричной модели ненулевые элементы $\hat{\Psi}_\infty$ и $\hat{\Psi}_0$ лежат в нижних правых углах. Отсутствие обратной матрицы для ФБА непосредственно связано с сильной вырожденностью матричных моделей — как мы увидим в п. 2.5, любые матричные модели отвечают полубесконечным иерархиям, являющимся редукциями бесконечных. Это выражается также в том, что ФБА, построенная из ортогональных полиномов, отвечает очень специальной точке грасманниана [134].

2.4.2. Редукция из 2РТ и детерминантное представление. Теперь сформулируем в инвариантных терминах, какой редукции 2РТ отвечает унитарная матричная модель [107, 136]. Для этого вернемся к представлению Лакса (176), (177), описывающему вложение унитарной модели в 2РТ. Используя (174), можно легко доказать следующие тождества:

$$\sum_{k=n}^N \frac{S_{k-1} S_{k-1}^*}{h_k} = \frac{1}{h_N} - \frac{1}{h_{N-1}}, \quad \sum_{k=n}^N S_k S_k^* h_k = h_n - h_{N+1}.\tag{185}$$

Из-за этих тождеств матрицы \mathbb{L} и $\bar{\mathbb{L}}^T$ имеют нулевые моды $\sim S_{k-1}$ и S_{k-1}^*/h_k соответственно. Следовательно, наивно было бы ожидать, что они необратимы, и получить (используя (185))

$$(\mathbb{L}\bar{\mathbb{L}})_{nk} = \delta_{nk} - \frac{S_n S_k^* h_n}{h_{-\infty}}, \quad (\bar{\mathbb{L}}\mathbb{L})_{nk} = \delta_{nk} - \frac{S_{n-1} S_{k-1}^* h_\infty}{h_k}.\tag{186}$$

Поскольку редукция должна быть описана как инвариантное условие, наложенное на \mathbb{L} и $\bar{\mathbb{L}}$, эти формулы не могут служить отправной точкой для описания редукции, поскольку их правая часть зависит от динамических переменных.

Однако такого рода формулы требуют аккуратного обращения. Действительно, формулировка 2РТ в терминах бесконечных матриц [101], хотя и является корректной как формальная конструкция, требует специального обсуждения, если иметь в виду конкретные матрицы. Причиной являются бесконечные суммы, возникающие в произведениях таких матриц, которые могут

расходиться. Такие произведения, например, всегда существуют для ленточных матриц, т. е. для матриц с конечным числом ненулевых диагоналей. Из (176), (177) можно легко увидеть, что операторы Лакса унитарной модели не принадлежат к такому классу матриц. Поэтому уравнения (186) просто не имеют смысла*.

Более того, наличие нулевой моды у бесконечной матрицы также не означает автоматически, что матрица необратима, поскольку следует позаботиться о нормируемости этой нулевой моды. Для этого число ненулевых элементов столбца, описывающего нулевую моду, должно быть конечным (это аналог ленточной матрицы), либо удовлетворять некоторым условиям сходимости**.

В случае же полубесконечных иерархий некоторые из указанных проблем исчезают, поскольку тогда требуется умножать только «четвертьбесконечные» матрицы и, например, произведение $\bar{L}L$ всегда существует. Конечно, произведение тех же матриц в обратном порядке все еще не определено. Таким образом, только первая формула в (186) хорошо определена и имеет вид

$$(\bar{L}L)_{nk} = \delta_{nk}. \quad (187)$$

Это соотношение и может быть взято за определение искомой редукции 2РТ к иерархии, описывающей унитарную матричную модель.

Заметим, что, зная формулу (187), легко указать, какой специальный вид должна иметь матрица моментов, чтобы описывать унитарную модель [107, 136], а именно она должна быть теплицевой. Мы, однако, можем вычислить ее, как обычно, из ортогональных полиномов:

$$C_{ij}^{(U)} = \int dz z^{i-j} e^{-V(z)}, \quad C_{11}^{(U)} \equiv C^{(U)}. \quad (188)$$

Таким образом, эту матрицу моментов можно переписать в виде

$$C_{ij}^{(U)} = C_{i-j}, \quad C_{ij} = \begin{cases} (-)^{i+j} \partial^{j-i} C & \text{при } j \geq i, \\ (-)^{i+j} \bar{\partial}^{i-j} C & \text{при } i \geq j, \end{cases} \quad (189)$$

и детерминантное представление для статистической суммы (τ -функции) унитарной матричной модели имеет вид

$$\mathcal{Z}_n = (-)^n \det_{ij} C_{ij}^{(U)}. \quad (190)$$

*Это также объясняет невозможность хорошей редукции 2РТ к полной иерархии релятивистской цепочки Тоды [136].

**Это легко понять из следующего простого примера. Рассмотрим ленточную матрицу $B \equiv I - \Lambda$. Эта матрица обратима, но ее обратная $-I + \Lambda + \Lambda^2 + \dots$ — не имеет ленточной структуры. В то же время у матрицы B_{ij} имеется нулевая мода $f_j = \text{const}$, которая ненормируема, поскольку произведение $f^T f = \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \text{const} \right)$ расходится.

2.4.3. Двухкомпонентные иерархии и симметричная унитарная модель. Еще один способ описать интегрируемые свойства унитарной матричной модели — это вложить ее в двухкомпонентную 2РТ [107,136,137]. Такое вложение может быть описано следующим образом. Введем двухкомпонентный вектор

$$v^{(1)} \equiv \lambda^{-n} p_n(\lambda), \quad v^{(2)} \equiv \lambda^{n-1} \bar{p}_n(\lambda), \quad \lambda \equiv \sqrt{z}. \quad (191)$$

Тогда уравнения (173) могут быть переписаны в форме

$$v_{n+1} = L_n v_n, \quad (192)$$

где оператор Лакса представлен матрицей 2×2

$$L_n \equiv \begin{bmatrix} \lambda & S_n \\ \bar{S}_n & \lambda^{-1} \end{bmatrix}. \quad (193)$$

Этот оператор Лакса является дискретным аналогом оператора Лакса иерархии АКНС, связанной с двухкомпонентной цепочкой Тоды. Нетрудно проверить, что эволюция в этих системах также совпадает [136].

Мы, однако, рассмотрим сейчас редуцированную систему, отвечающую симметричной унитарной модели, т. е. модели с наложенным условием $t_k = t_{-k}$, и изучим ее эволюцию. Сразу скажем, что эта система вкладывается в полную систему, но не является ее редукцией, подобно тому, как цепочка Вольтерра не является редукцией цепочки Тоды (см. п. 2.1).

Нетрудно понять, что симметричная модель отвечает условию $\bar{S}_n = S_n$ и, следовательно (см. (193)), является дискретным аналогом иерархии мКдВ. В частности, прямым вычислением через ортогональные полиномы легко получить уравнение нулевой кривизны. Действительно, несложное вычисление дает

$$\frac{\partial v_n}{t_1} = M_n v_{n-1}, \quad (194)$$

где

$$M_n \equiv (1 - S_{n-1}^2) \begin{bmatrix} \lambda^{-1} & -S_n \\ -S_n & \lambda \end{bmatrix}. \quad (195)$$

Тогда уравнение нулевой кривизны имеет вид

$$\dot{L}_n L_{n-1} = M_{n+1} L_{n-1} - L_n M_n. \quad (196)$$

Оно может быть преобразовано к более удобному виду [102, 138]:

$$\dot{L}_n = A_{n+1} L_n - L_n A_n, \quad (197)$$

где

$$A_n \equiv \mathbf{M}_n \mathbf{M}_{n-1} = \begin{bmatrix} \lambda^{-2} + S_n S_{n-1} & -S_{n-1}/\lambda - S_n \lambda \\ -S_{n-1} \lambda - S_n/\lambda & \lambda^2 + S_n S_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (198)$$

Первое уравнение иерархии для симметричной модели имеет вид

$$\frac{\partial S_n}{\partial t_1} = -(1 - S_n^2)(S_{n+1} - S_{n-1}). \quad (199)$$

Это уравнение описывает интегрируемую модель [102, 138], которая является частным случаем дискретной системы Захарова–Шабата [139]. Иногда ее называют модифицированным уравнением Вольтерра [97], поскольку в непрерывном пределе, в котором уравнение Вольтерра переходит в КдВ, данное уравнение переходит в мКдВ. Иногда уравнение (199) переписывают в переменных $S_n \equiv \cos \theta_n$:

$$\frac{\partial \theta_n}{\partial t_1} = \sin \theta (\cos \theta_{n+1} - \cos \theta_{n-1}). \quad (200)$$

Заметим, что непосредственно на дискретном уровне существует *точное* преобразование, которое мы называем *дискретным преобразованием Миуры* (см. также [140]) и которое переводит уравнение (199) в уравнение цепочки Вольтерра (70) [107, 137]. Оно имеет вид

$$R_n^{(\pm)} = (1 \mp S_n)(S_{n+1} \pm 1) \quad (201)$$

и переводит (199) в

$$\frac{\partial R_n^{(\pm)}}{\partial t_1} = -R_n^{(\pm)} (R_{n+1}^{(\pm)} - R_{n-1}^{(\pm)}). \quad (202)$$

Это преобразование также может быть сделано прямо в терминах ортогональных полиномов. Для этого введем новый базис ортогональных *функций*:

$$Q_n^{(\pm)} \equiv z^{-\frac{1}{2}n+1} p_{n-1} \pm z^{\frac{1}{2}n-1} \bar{p}_{n-1}. \quad (203)$$

Пользуясь (173), легко показать, что Q_n удовлетворяет рекуррентному соотношению цепочки Вольтерра

$$\left(z^{\frac{1}{2}} + z^{-\frac{1}{2}}\right) Q_n^{(\pm)} = Q_{n+1}^{(\pm)} + R_n^{(\pm)} Q_{n-1}^{(\pm)}. \quad (204)$$

Теперь из (178) легко получить, что Q_n эволюционируют, как в цепочке Вольтерра:

$$\frac{\partial Q_n^{(\pm)}}{\partial t_1} = R_n^{(\pm)} R_{n-1}^{(\pm)} Q_{n-2}^{(\pm)}. \quad (205)$$

Заметим, что функции $Q_n^{(\pm)}$ взаимно ортогональны:

$$\langle Q_n^{(\pm)}, Q_m^{(\pm)} \rangle = 2(1 \mp S_{n-1})h_{n-1}\delta_{nm}, \quad \langle Q_n^{(+)}, Q_n^{(-)} \rangle = 0, \quad (206)$$

где m и n — либо четные, либо нечетные одновременно.

Таким образом, мы воспроизвели уравнение Вольтерра из симметричной унитарной модели. Следует, однако, заметить, что получившееся решение цепочки Вольтерра *не отвечает* эрмитовой матричной модели с четным потенциалом (см. п. 2.1), поскольку соответствующая ФБА определяется системой ортогональных функций (203), а не полиномов. Можно также показать, что уравнения (206) описывают две иерархии цепочки Тоды, связанные преобразованием Бэклунда [101, 137].

Наконец, продемонстрируем на языке скалярных произведений, как можно описать симметричную унитарную матричную модель как обобщенную эрмитову одноматричную модель [107, 137]. Для этого рассмотрим соотношение ортогональности

$$\int_{C_+} \frac{d\lambda}{\lambda} \mathcal{P}_n(\lambda + \lambda^{-1}) \mathcal{P}_m(\lambda + \lambda^{-1}) \exp \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k \lambda^k \right], \quad (207)$$

где контур интегрирования C_+ идет вдоль вещественной оси, причем обходит 0 в верхней полуплоскости, а $\mathcal{P}_n(z) = z^n + \dots$. После наложения условия $t_k = t_{-k}$ (207) описывает соотношение ортогональности в цепочке Тоды, а условие $t_{2k+1} = 0$ ($k \in \mathbf{Z}$), $t_{2k} = t_{-2k}$ ($k \geq 0$) отвечает симметричной унитарной модели. Действительно, из-за изменения переменной $\lambda = \sqrt{z}$ контур интегрирования переходит в окружность единичного радиуса в z -плоскости, так что после отождествления $\mathcal{P}_n = Q_{2n}^{(+)}$, $\mathcal{P}_m = (z^{\frac{1}{2}} + z^{-\frac{1}{2}})Q_{2m+1}^{(+)}$ получаются рекуррентные соотношения (204) и соотношения ортогональности (206) для $Q^{(+)}$. Аналогичным образом рассматривается и случай $Q^{(-)}$.

Подведем некоторые итоги рассмотренных интегрируемых свойств унитарной модели. Мы доказали, что модель описывается некоторой редукцией двумеризованной цепочки Тоды и, одновременно, дискретной АКНС-системой. Эта последняя эквивалентна [136] релятивистской цепочке Тоды [141]*. Более того, оказывается, что дискретную и непрерывную АКНС можно рассматривать как две подиерархии *одной и той же* иерархии, но с различными (дискретными) эволюциями [136, 142]. Кроме того, унитарная

*Такое соответствие не очень удивительно в свете того, что нерелятивистская цепочка Тоды описывает модель эрмитовых матриц, которые образуют касательное пространство к унитарным, подобно тому, как нерелятивистская цепочка Тоды описывает алгебраическую версию релятивистской [136].

матричная модель может быть описана как двухкомпонентная иерархия Вольтерра [137]. В свете этого последнего соответствия ограничение до симметричной унитарной модели, отвечающее переходу от АКНС к мКдВ, выглядит как переход от двухкомпонентной к однокомпонентной модифицированной цепочке Вольтерра.

2.4.4. Алгебра Вирасоро в унитарной модели. Получим теперь алгебру ТУ в унитарной модели. Как следует ожидать вследствие близкой связи унитарной и эрмитовой моделей, это должна быть алгебра Вирасоро. В самом деле, поскольку унитарная модель содержит два набора времен (и описывает двухкомпонентную цепочку Вольтерра), неудивительным является наличие *двух* алгебр Вирасоро. Здесь мы их получим в терминах переменных $t_k^{(\pm)}$ [108, 133] (см. (167)).

Введем эрмитову матрицу M соотношением $U \equiv e^{iM}$. Тогда действие унитарной модели может быть записано в виде

$$S = \text{tr} \left[\sum_{k \geq 0} (2t_k^+ \cos kM + 2it_k^- \sin kM) \right]. \quad (208)$$

Естественно рассмотреть два базисных преобразования

$$\delta M = 2\epsilon_n^+ \sin nM, \quad n \geq 1, \quad \delta M = 2\epsilon_n^- \cos nM, \quad n \geq 0, \quad (209)$$

т. е.

$$\begin{aligned} \delta U &= \epsilon_n^+ (U^{n+1} - U^{1-n}), \quad n \geq 1, \\ \delta U &= i\epsilon_n^- (U^{n+1} + U^{1-n}), \quad n \geq 0. \end{aligned} \quad (210)$$

Заметим, что наивное преобразование $\delta U = \epsilon_n U^n$ не согласуется с унитарностью матрицы.

При преобразованиях (210) действие меняется следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta_n^+ S &= \epsilon_n^+ \text{tr} \sum_{k \geq 0} k [2t_k^+ (\cos(k+n)M - \cos(k-n)M) + \\ &\quad + 2it_k^- (\sin(k+n)M - \sin(k-n)M)], \\ \delta_n^- S &= i\epsilon_n^- \text{tr} \sum_{k \geq 0} k [2it_k^+ (\sin(k+n)M + \sin(k-n)M) + \\ &\quad + 2t_k^- (\cos(k+n)M + \cos(k-n)M)]. \end{aligned} \quad (211)$$

Эти преобразования воспроизводятся действием классических операторов Вирасоро $L_{n>0}^{\pm, \text{cl}}$:

$$\delta S = (\epsilon_n^+ L_n^{+, \text{cl}} + i\epsilon_n^- L_n^{-, \text{cl}}) S, \quad (212)$$

где

$$\begin{aligned}
 L_n^{+,cl} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(kt_k^+ \frac{\partial}{\partial t_{k+n}^+} + kt_k^- \frac{\partial}{\partial t_{k+n}^-} \right) = \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} kt_k \left(\frac{\partial}{\partial t_{k+n}} - \frac{\partial}{\partial t_{k-n}} \right), \quad n \geq 1, \\
 L_n^{-,cl} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(kt_k^+ \frac{\partial}{\partial t_{k+n}^-} + kt_k^- \frac{\partial}{\partial t_{k+n}^+} \right) = \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} kt_k \left(\frac{\partial}{\partial t_{k+n}} + \frac{\partial}{\partial t_{k-n}} \right), \quad n \geq 0.
 \end{aligned} \tag{213}$$

Перейдем теперь к вычислению квантовых поправок. Для их вычисления нам необходимо знать изменение меры Хаара на унитарных матрицах при преобразовании (210). Для того чтобы получить якобиан преобразования, нам нужно знать явное выражение для меры. С этой целью используем еще одну параметризацию унитарной матрицы U в терминах эрмитовой матрицы H :

$$U = \frac{\mathbf{1} + iH}{\mathbf{1} - iH}, \quad U^\dagger = \frac{\mathbf{1} - iH}{\mathbf{1} + iH}. \tag{214}$$

Унитарная мера Хаара DU на группе $U(n)$ связана с эрмитовой мерой Хаара $DH = \prod_{i,j=1}^n dH_{ij}$ формулой [143]:

$$DU = \left(\frac{1}{\det(\mathbf{1} + H^2)} \right)^n DH. \tag{215}$$

Преобразования (210) легко могут быть переписаны в терминах δH с использованием

$$\delta U = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - iH} 2i\delta H \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - iH}, \tag{216}$$

так что

$$\begin{aligned}
 \delta_n^+ H &= \epsilon_n^+ \frac{(\mathbf{1} + iH)^{2n} - (\mathbf{1} - iH)^{2n}}{2i(\mathbf{1} + H^2)^{n-1}}, \quad n \geq 1, \\
 \delta_n^- H &= \epsilon_n^- \frac{(\mathbf{1} + iH)^{2n} + (\mathbf{1} - iH)^{2n}}{2(\mathbf{1} + H^2)^{n-1}}, \quad n \geq 0.
 \end{aligned} \tag{217}$$

Изменение меры (215) содержит два члена: вариацию детерминанта в знаменателе

$$\left(\frac{1}{\det(\mathbf{1} + H^2)}\right)^n \rightarrow \left(\frac{1}{\det(\mathbf{1} + H^2)}\right)^n \times \left\{1 - 2 \operatorname{tr} \mathbf{1} \operatorname{tr} \frac{H\delta H}{\mathbf{1} + H^2} + O((\delta H)^2)\right\}, \quad (218)$$

где n переписано как $\operatorname{tr} \mathbf{1}$, и изменение эрмитовой меры

$$DH \rightarrow DH \left(1 + \operatorname{tr} \frac{\partial \delta H}{\partial H}\right). \quad (219)$$

Все поправки вместе являются квадратичными комбинациями следов, выражаемыми через вторые производные от статистической суммы. Как результат, получаются следующие условия Вирасоро, описывающие ТУ унитарной матричной модели:

$$L_n^\pm = \sum_{k=-\infty}^{\infty} kt_k \left(\frac{\partial}{\partial t_{k+n}} \mp \frac{\partial}{\partial t_{k-n}}\right) + \sum_{1 \leq k \leq n} \left(\frac{\partial^2}{\partial t_k \partial t_{n-k}} \pm \frac{\partial^2}{\partial t_{-k} \partial t_{k-n}}\right), \quad n \geq n^\pm, \quad n^+ = 1, \quad n^- = 0. \quad (220)$$

2.5. Общие свойства дискретных матричных моделей

2.5.1. Многообразие матричных моделей и их редукций. До настоящего момента мы обсуждали свойства различных конкретных матричных моделей. При этом можно было заметить разнообразие ТУ и их сильную модельную зависимость и совершенно универсальные интегрируемые свойства всех моделей. Обсудим общие свойства интегрируемых теорий, в которые все рассмотренные матричные модели естественно погружаются [106, 107].

Начнем, как обычно, с соотношения ортогональности. Как очевидно из предыдущего рассмотрения, именно в нем закодирована интегрируемая структура модели. В частности, оно подразумевает, что ФБА в матричных моделях задается ортогональными полиномами. В действительности такая ФБА отвечает так называемым полубесконечным иерархиям [144], в которые любая матричная модель может быть погружена и которые мы будем обсуждать. Соотношение ортогональности для полубесконечной иерархии, обобщающей эрмитову одноматричную модель, зададим в виде

$$\langle n|m \rangle \equiv \int dz \mu(z) P_n(z) P_m(z) e^{V(z)} = e^{\varphi_n} \delta_{mn}, \quad (221)$$

где потенциал*

$$V(z) \equiv \sum_{n \geq 0} t_n z^n \quad (222)$$

и $\mu(z)$ — произвольная мера. Контур интегрирования в (221) не фиксирован.

Заметим, что вывод уравнений цепочки Тоды, сделанный в п. 2.1, без изменения переносится на рассматриваемый случай, поскольку нигде не был использован явный вид меры. Таким образом, (221) описывает полубесконечную иерархию цепочки Тоды, а ее конкретные решения задаются конкретным выбором меры и контура интегрирования. Так, эрмитовой матричной модели отвечает плоская мера. Конечно, то же самое условие может быть инвариантно задано условиями Вирасоро (для их вывода из соотношения ортогональности в п. 2.1 использовалась процедура интегрирования по частям, подразумевавшая плоскую меру).

Конечно, (221) — далеко не самый общий вид соотношения ортогональности, однако для его обобщения нужно уже рассматривать биортогональные системы полиномов. Таким образом, рассмотрим соотношение (би)ортогональности следующего вида:

$$\langle n|m \rangle \equiv \int dx dy A(x, y) P_n(x) Q_m(y) e^{V(x) + \bar{V}(y)} = e^{\varphi_n} \delta_{mn}, \quad (223)$$

где $A(x, y)$ — произвольная мера. В это соотношение легко погружаются и многоматричные модели (с $A(x, y)$, определенным как в (97), но с выделенной явно зависимостью от времен), и одноматричная модель ($A(x, y) = \delta(x - y)$), и унитарная модель ($A(x, y) = \delta(x - y^{-1})$). Подобно тому, как формула (221) задавала общую полубесконечную цепочку Тоды, соотношение ортогональности (223) задает ее двумеризованную версию. В частности, из него легко получить все соотношения п. 2.2.1. Конечно, и явная формула для детерминантного представления (105) с матрицей моментов (106) также сохранится.

В заключение этого пункта обсудим, как устроены редукции и вложения различных систем в полубесконечную 2РТ [107]. В общей иерархии 2РТ необходимо ввести две ФБА $\{\Psi_{-}^{\infty}\}$ и $\{\Psi_{n}^0\}$, связанные с точками 0 и ∞ , (и, соответственно, две им сопряженные ФБА), которым отвечают два биортогональных набора полиномов. При редукции к цепочке Тоды эти две ФБА связаны условием

$$\Psi_n^0(z) = \Psi_n^{*,\infty} \left(\frac{1}{z} \right), \quad (224)$$

*Здесь по сравнению с предыдущим рассмотрением мы изменили знак потенциала, чтобы избавиться от большого количества минусов в детерминантных формулах.

которое превращает биортогональную систему в ортогональную. В то же время условие, отвечающее редукции к релятивистской цепочке Тоды, описывающей унитарную модель, на этом языке сформулировать сложнее (см. [136]). Конечно, задание определенного выражения для меры $A(z, y)$ достаточно для описания редукции — $A(x, y) = \mu(z)\delta(x - y)$ для нерелятивистской цепочки Тоды и $A(x, y) = \mu(z)\delta(x - y^{-1})$ для релятивистской цепочки Тоды (напомним, что в нее вкладывается унитарная модель).

Дальнейшее ограничение моделей приводит уже не к редукциям, а к вложениям. Так, переход к цепочке Вольтерра отвечает занулению нечетных времен в потенциале цепочки Тоды. При этом детерминантная формула (82) для цепочки Тоды принимает вид

$$\begin{aligned} \tau_{2n}^{(TC)} \Big|_{t_{2k+1}=0} &= \det_{n \times n} \{ \partial^{i+j-2} C \} \cdot \det_{n \times n} \{ \partial^{i+j-2} (\partial C) \}, \\ \tau_{2n+1}^{(TC)} \Big|_{t_{2k+1}=0} &= \det_{(n+1) \times (n+1)} \{ \partial^{i+j-2} C \} \cdot \det_{n \times n} \{ \partial^{i+j-2} (\partial C) \}, \end{aligned} \quad (225)$$

где производная ∂ означает дифференцирование по второму времени (первое — зануляется). Таким образом, τ -функция цепочки Вольтерра является произведением τ -функций двух разных цепочек Тоды. Если даже первый множитель в этом произведении выбран отвечающим матричной модели (т. е. мера выбрана плоской), второй описывает τ -функцию другого типа. Тот факт, что цепочка Вольтерра отвечает двум цепочкам Тоды, легко увидеть и на языке представления Лакса, и на языке уравнений [137].

Абсолютно аналогично можно рассмотреть переход от общей релятивистской цепочки Тоды к «симметричной», т. е. ограниченной условием $t_k = t_{-k}$ [107, 133] (терминология взята из соответствующей матричной модели). В этом случае (190) принимает вид

$$\tau_{2n}^{(U)} \Big|_{t_k=t_{-k}} = \tau_n^{(1)} \cdot \tau_n^{(2)}, \quad (226)$$

где $\tau_n^{(1,2)}$ — две разные τ -функции общей релятивистской цепочки Тоды [133] (в полном подобии со случаем нерелятивистской цепочки).

Эту систему можно ограничить и дальше, рассмотрев условие $t_k = 0$ при $k \neq 0$ по модулю N . Если это условие наложено на общую релятивистскую цепочку Тоды, детерминантное представление принимает вид

$$\tau_{Nn}^{(U,N)} \Big|_{t_{k \neq Np}=0} = \left(\tau_n^{(U)} \right)^N, \quad \tau_{Nn+k}^{(U,N)} \Big|_{t_{k \neq Np}=0} = \left(\tau_n^{(U)} \right)^{N-k} \left(\tau_{n+1}^{(U)} \right)^k, \quad (227)$$

т. е. τ -функция полученной системы равна степени τ -функции релятивистской цепочки Тоды или произведению степеней одной и той же τ -функции,

взятых при разных значениях индексов (ср. (225)). В то же время при наложении того же условия на цепочку, уже ограниченную до симметричной, получится

$$\tau_{Nn}^{(U,N)} \Big|_{t_k \neq Np=0; t_k=t_{-k}} = \left(\tau_n^{(1)}\right)^N \left(\tau_n^{(2)}\right)^N, \quad (228)$$

и т. д.

Далее опишем полубесконечные иерархии на более универсальном фермионном языке и покажем, как на этом языке воспроизводятся полученные здесь результаты.

2.5.2. Фермионное представление интегрируемых иерархий. Вначале изложим вкратце общее фермионное описание интегрируемых систем, следуя в основном работам киотской школы [145–150] (см. также [101, 106]), а затем опишем, как на этом языке выглядят в общем полубесконечные иерархии и, в частности, матричные модели. Заметим, что фермионный подход — самый универсальный язык для описания интегрируемых систем, поскольку он отвечает формальному грассманиану (грассманиан Сато [151]), сформулированному в терминах формальных рядов. Хотя имеющиеся альтернативные подходы (см., например, [134, 135]) лучше описывают, скажем, конечнозонные решения [105], именно грассманиан Сато необходим для работы с непрерывными матричными моделями.

Начнем с описания иерархии 2РТ, τ -функция которой задается корреляторами в теории свободных фермионов $\psi, \bar{\psi}$ (b, c -система со спином 1/2). Она определена как отношение корреляторов*

$$\tau_n(t, \bar{t} | G) \equiv \frac{\langle n | e^H G e^{\bar{H}} | n \rangle}{\langle n | G | n \rangle} \quad (229)$$

в теории двумерных свободных фермионных полей $\psi(z), \psi^*(z)$ с действием $\int \psi^* \bar{\partial} \psi$:

$$\psi(z) = \sum_{\mathbf{z}} \psi_n z^n dz^{1/2}, \quad \psi^*(z) = \sum_{\mathbf{z}} \psi_n^* z^{-n-1} dz^{1/2}, \quad (230)$$

$$\{\psi_k, \psi_m^*\} = \delta_{km}, \quad \{\psi_k, \psi_m\} = \{\psi_k^*, \psi_m^*\} = 0. \quad (231)$$

В определении (229) использованы следующие обозначения:

$$H = \sum_{k>0} t_k J_k, \quad \bar{H} = \sum_{k>0} \bar{t}_k J_{-k}, \quad (232)$$

*В дальнейшем тексте мы будем опускать из определения τ -функции коррелятор, служащий нормировочным множителем, всюду, где это не может привести к недоразумениям, т. е. он не сингулярен (см. [53, п. 4.1]).

где токи определены как

$$J(z) = \psi^*(z)\psi(z), \quad \text{т. е.} \quad J_k = \sum_{\mathbf{z}} \psi_i \psi_{i+k}^*. \quad (233)$$

Величина G задается формулой

$$G = : \exp \left\{ \sum_{m,n} \mathcal{G}_{mn} \psi_m^* \psi_n \right\} : \quad (234)$$

и является элементом группы $GL(\infty)$ (или группы Клиффорда), реализованным в бесконечномерном грассманиане (см. также [134, 135]). Нормальное упорядочивание должно пониматься здесь как упорядочивание по отношению к вакууму $|0\rangle$, который определен условиями

$$\psi_m |0\rangle = 0, \quad m < 0, \quad \psi_m^* |0\rangle = 0, \quad m \geq 0. \quad (235)$$

Можно рассмотреть и более общее нормальное упорядочивание, определенное* по отношению к вакууму $|k\rangle$, который задан условиями

$$\psi_m |k\rangle = 0, \quad m < k, \quad \psi_m^* |k\rangle = 0, \quad m \geq k. \quad (236)$$

Конкретное решение иерархии (τ -функция (229)) зависит только от выбора элемента G (или эквивалентно может быть определено единственным образом матрицей \mathcal{G}_{km}). Замечательным достижением киотской школы является утверждение о том, что любое решение иерархии 2РТ может быть задано некоторым элементом G вида (234), и наоборот, каждый такой элемент G отвечает некоторому решению иерархии 2РТ.

Заметим, что 2РТ является однокомпонентной иерархией наиболее общего вида. Скажем, иерархия КП получается из нее, если занулить все отрицательные времена и нулевое время, или просто как-либо их фиксировать и не рассматривать соответствующие эволюционные уравнения. В этом смысле иерархия КП — это подиерархия 2РТ, а не редукция, и описывается она тем же множеством элементов G , но меньшим числом эволюционных потоков.

Другим примером является цепочка Тоды — это уже редукция, которая получается из 2РТ при наложении специального условия на элемент грассманиана (см. ниже (266)). В результате τ -функция цепочки Тоды оказывается зависящей не от положительных и отрицательных времен по отдельности, а

*В [53, п.4.1] обсуждаются и используются также некоторые другие нормальные упорядочивания.

только от их суммы [101]* (поэтому без потери общности можно использовать эволюцию только по одному набору времен). Такое свойство цепочки Тоды может быть взято за ее определение.

Теперь также можно заново интерпретировать смысл бесконечномерных алгебр ТУ в матричных моделях: это набор условий, фиксирующих элемент грассманиана, отвечающего конкретному «матричному» решению иерархии. Поэтому эти алгебры ТУ могут быть переформулированы как некоторые уравнения на элемент грассманиана. При этом для того, чтобы его фиксировать, не нужно использовать всю бесконечномерную алгебру, а достаточно только низшего уравнения (связанного со струнным уравнением). Этот подход развивался в [152].

Теперь мы получим несколько свойств описанной фермионной системы, полезных для дальнейшего. Из коммутационных соотношений (231) легко можно получить, как преобразуются фермионные моды при действии на них элемента грассманиана (234):

$$G\psi_k G^{-1} = \psi_j R_{jk}, \quad G\psi_k^* G^{-1} = \psi_j^* R_{kj}^{-1}, \quad (237)$$

где матрица R_{jk} может быть выражена через \mathcal{G}_{jk} (см. [58]). Ниже мы увидим, что R_{jk} является важным строительным блоком в детерминантных представлениях τ -функций.

Введем еще некоторые обозначения. Используя (231), можно определить эволюцию $\psi(z)$ и $\psi^*(z)$ по временам $\{t_k\}$, $\{\bar{t}_k\}$:

$$\begin{aligned} \psi(z, t) &\equiv e^{H(t)}\psi(z)e^{-H(t)} = e^{\xi(t,z)}\psi(z), \\ \psi^*(z, t) &\equiv e^{H(t)}\psi^*(z)e^{-H(t)} = e^{-\xi(t,z)}\psi^*(z), \\ \psi(z, \bar{t}) &\equiv e^{\bar{H}(\bar{t})}\psi(z)e^{-\bar{H}(\bar{t})} = e^{\xi(\bar{t},z^{-1})}\psi(z), \\ \psi^*(z, \bar{t}) &\equiv e^{\bar{H}(\bar{t})}\psi^*(z)e^{-\bar{H}(\bar{t})} = e^{-\xi(\bar{t},z^{-1})}\psi^*(z), \end{aligned} \quad (238)$$

где

$$\xi(t, z) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k z^k. \quad (239)$$

Определим также полиномы Шура формулой

$$\exp \left\{ \sum_{k>0} t_k x^k \right\} \equiv \sum_{k>0} P_k(t_k) x^k. \quad (240)$$

*В большинстве статей цепочка Тоды зависит только от *разности* времен. Это связано с противоположным знаком, использованным в (229) при \bar{H} . Наш выбор знака более естественен с точки зрения матричных моделей.

Используя это определение и (238), легко получить эволюцию фермионных мод:

$$\begin{aligned}
\psi_k(t) &\equiv e^{H(t)} \psi_k e^{-H(t)} = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{k-m} P_m(t), \\
\psi_k^*(t) &\equiv e^{H(t)} \psi_k^* e^{-H(t)} = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{k+m}^* P_m(-t), \\
\psi_k(\bar{t}) &\equiv e^{\bar{H}(\bar{t})} \psi_k e^{-\bar{H}(\bar{t})} = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{k+m} P_m(\bar{t}), \\
\psi_k^*(\bar{t}) &\equiv e^{\bar{H}(\bar{t})} \psi_k^* e^{-\bar{H}(\bar{t})} = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{k-m}^* P_m(-\bar{t}).
\end{aligned} \tag{241}$$

Теперь мы можем вывести детерминантное представление для τ -функции. Для этого определим совершенно заполненное вакуумное состояние $|\infty\rangle$, которое удовлетворяет требованию

$$\psi_i^* |\infty\rangle = 0, i \in \mathbf{Z}. \tag{242}$$

Тогда любой «сдвинутый» вакуум получается из него следующим образом:

$$|n\rangle = \psi_{n-1} \psi_{n-2} \dots |\infty\rangle. \tag{243}$$

Заметим, что действие любого элемента G группы Клиффорда (и, как следствие, действие $e^{\bar{H}(\bar{t})}$) на $|\infty\rangle$ тривиально: $G|\infty\rangle \sim |\infty\rangle$. Поэтому, используя (241), нетрудно получить из (229):

$$\begin{aligned}
\tau_n(t, \bar{t}) &= \langle -\infty | \dots \psi_{n-2}^*(-t) \psi_{n-1}^*(-t) G \psi_{n-1}(\bar{t}) \psi_{n-2}(\bar{t}) \dots | -\infty \rangle \sim \\
&\sim \det [\langle -\infty | \psi_i^*(-t) G \psi_j(\bar{t}) G^{-1} | -\infty \rangle]_{i,j \leq n-1}.
\end{aligned} \tag{244}$$

Используя (237), легко увидеть, что

$$G \psi_j(\bar{t}) G^{-1} = \sum_{m,k} P_m(\bar{t}) \psi_k R_{k,j+m}, \tag{245}$$

поэтому «явное» решение иерархии 2РТ может быть записано в детерминантной форме

$$\tau_n(t, \bar{t}) \sim \det_{i,j < 0} C_{i+n, j+n}(t, \bar{t}), \tag{246}$$

где*

$$C_{ij}(t, \bar{t}) = \sum_{k,m} R_{km} P_{k-i}(t) P_{m-j}(\bar{t}). \quad (247)$$

Заметим, что зависимость от времени матричных элементов (247) в детерминанте (246) не является произвольной, но задана уравнениями

$$\partial C_{ij} / \partial t_p = C_{i,j-p}, \quad j > p > 0, \quad (248)$$

$$\partial C_{ij} / \partial \bar{t}_p = C_{i-p,j}, \quad i > p > 0, \quad (249)$$

которые являются автоматическим следствием соответствующего свойства полиномов Шура

$$\partial P_k / \partial t_p = P_{k-p}, \quad (250)$$

происходящим непосредственно из их определения. Используя свойства (248) и (249), в частности, легко получить свойства (83) и (85) и их аналоги в многоматричном случае (105).

Как уже отмечалось, иерархия КП отвечает эволюции только по положительным временам $\{t_k\}$; отрицательные времена $\{\bar{t}_k\}$ играют роль параметров, задающих семейство точек в грассманиане, и могут быть поглощены переопределением матрицы R_{km} . Тогда τ -функция (модифицированной) иерархии КП имеет вид

$$\tau_n(t) = \langle n | e^{H(t)} G(\bar{t}) | n \rangle \sim \det_{i,j < 0} \left[\sum_k R_{k,j+n}(\bar{t}) P_{k-i-n}(t) \right], \quad (251)$$

где $G(\bar{t}) \equiv G e^{\bar{H}(\bar{t})}$ и

$$R_{kj}(\bar{t}) \equiv \sum_m R_{km} P_{m-j}(\bar{t}). \quad (252)$$

2.5.3. Фермионное представление полубесконечных иерархий. Теперь мы применим описанный формализм к случаю полубесконечных иерархий, в частности, получим детерминантные формулы [106, 107]. Ключевое отличие формул типа (246) от (105) и аналогичных ей состоит в том, что в полубесконечных иерархиях возникают *конечные* детерминанты. Это очень важное

*Отметим, что мы нигде не выписываем области суммирования, поскольку они автоматически выделяются свойством (определением) полиномов Шура $P_k = 0$ при $k < 0$.

отличие, возникающее благодаря специфическому граничному (с точки зрения цепочки частиц) условию (66). Это условие может служить определением полубесконечных иерархий [144], которые изучались в работах [106, 107]. Оказывается, полубесконечные иерархии описываются сингулярными элементами грассманиана, которые содержат только положительные (или только отрицательные) фермионные моды. Это, в свою очередь, подразумевает четвертьбесконечную матрицу \mathcal{G}_{mn} в (234) и, действительно, ведет к конечным детерминантам. Мы опишем полубесконечные иерархии в настоящем пункте весьма коротко, оставляя некоторые технические вычисления для приложения. Более подробное изложение можно найти в [106, 107].

Итак, мы будем искать точку грассманиана в виде

$$G = G_0 P_+, \quad (253)$$

где P_+ — проектор на положительные состояния:

$$P_+ |n\rangle = \theta(n) |n\rangle. \quad (254)$$

Этот проектор может быть естественно реализован в терминах фермионов

$$P_+ =: \exp \left[\sum_{i < 0} \psi_i \psi_i^* \right] : \quad (255)$$

и обладает рядом свойств

$$P_+ \psi_{-k}^* = \psi_{-k} P_+ = 0, \quad k > 0, \quad (256)$$

$$[P_+, \psi_k] = [P_+, \psi_k^*] = 0, \quad k \geq 0, \quad (257)$$

$$P_+^2 = P_+. \quad (258)$$

Если этот проектор вставлен в (229), естественно потребовать, чтобы g_0 зависел только от ψ_k и ψ_k^* с $k \geq 0$. Мы выберем его в виде

$$G_0 =: \exp \left\{ \left(\int_{\gamma} A(z, w) \psi_+(z) \psi_+^*(w^{-1}) dz dw \right) - \sum_{i \geq 0} \psi_i \psi_i^* \right\} :, \quad (259)$$

где γ — некоторый контур интегрирования. Ключевая формула, доказательство которой мы оставляем до приложения, дает τ -функцию с элементом грассманиана, выбранным в форме (253):

$$\begin{aligned} \tau_n(t, \bar{t}) &= \langle n | e^{H(t)} G_0 P_+ e^{\bar{H}(\bar{t})} | n \rangle = \\ &= \frac{1}{n!} \int_{\gamma} \Delta(w) \Delta(z) \prod_{i=1}^n A(z_i, w_i) e^{\xi(t, z_i) + \xi(\bar{t}, w_i)} dz_i dw_i. \end{aligned} \quad (260)$$

Эта формула буквально воспроизводит статистические суммы матричных моделей, описанных на протяжении данного раздела, причем функция A , задающая элемент грассманиана, совпадает с функцией, определенной в (223). Рассмотрим несколько примеров.

1) $\gamma = (-\infty, +\infty)$, $A(z, w) = \delta(z - w)$. Это приводит к эрмитовой одноматричной модели.

2) γ — окружность вокруг начала координат в плоскости z , а $A(z, w) = \frac{1}{2\pi iz} \delta(z - w^{-1})$. Тогда $G_0 = 1$ и мы получаем унитарную матричную модель.

3) $\gamma = (-\infty, +\infty)$, $A(z, w) = e^{zw}$. Это эрмитова двухматричная модель.

4) $\gamma = (-\infty, +\infty)$. Обозначим $z_i \equiv z_i^{(1)}$, $w_i \equiv z_i^{(p)}$, $t \equiv t^{(1)}$, $\bar{t} \equiv t^{(p)}$ и

$$A(z_i^{(1)}, z_i^{(p)}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^{p-1} dz_i^{(j)} \times \exp \left\{ \sum_{j=2}^{p-1} \xi(t^{(j)}, z_i^{(j)}) + \sum_{j=1}^{p-1} z_i^{(j)} z_i^{(j+1)} \right\}. \quad (261)$$

Тогда это A совпадает с A из (97) и мы получаем многоматричную модель.

Абсолютно аналогичными вычислениями (см. также приложение) можно получить детерминантное представление для полубесконечной иерархии:

$$\tau_n(t, \bar{t}) = \det \left[\partial_{t_1}^i \partial_{\bar{t}_1}^j \int_{\gamma} A(z, w) e^{\xi(t, z) + \xi(\bar{t}, w)} dz dw \right]_{i, j=0, \dots, n-1}. \quad (262)$$

Это действительно детерминант конечной матрицы, в вышеописанных частных случаях дающий детерминантные представления соответствующих матричных моделей.

Заметим, что матрица A_{ij} , определенная из разложения $A(z, w)$ по степеням z и w , совпадает с матрицей R_{ij} из (237) (см. приложение). Такая простая связь матрицы вращения фермионов с матрицей, задающей элемент грассманиана, является отличительной чертой полубесконечных иерархий.

Элемент грассманиана, определенный в (253), является далеко не единственным возможным. Связано это с различными возможными способами продолжить соотношение (66) на отрицательные значения n . Принятый здесь способ отвечал условию

$$\tau_n = 0 \quad \text{при} \quad n < 0. \quad (263)$$

Этот способ хорош тем, что при редукции к цепочке Тоды так определенная τ -функция зависит только от суммы времен $t_k + \bar{t}_k$ — определяющее свойство для соответствующей бесконечной иерархии. Другие интересные выборы

элемента G обсуждались в [107]. Если рассмотреть зависимость только от времен t_k , один из них отвечает, например, условию

$$\tau_n(t_k) = \tau_{-n}((-)^k t_k) \quad (264)$$

и описывает (модифицированную) иерархию СКП [147], т. е. соответствующий элемент грассманиана принадлежит $\text{Sp}(\infty)$. Другой выбор элемента грассманиана — просто $G = G_0$ — приводит к условию

$$\tau_n = 1 \quad \text{при} \quad n < 0, \quad (265)$$

и т. д.

Обсудим теперь подробнее редукцию 2РТ к цепочке Тоды. Конечно, нас интересует случай полубесконечной иерархии. Однако основные свойства полубесконечной системы не отличаются от свойств полной иерархии при условии, что наложено ограничение (66), т. е. половина фермионных мод выкинута и в элемент грассманиана вставлен соответствующий проектор. Поэтому мы опишем редукцию к цепочке Тоды, не ограничиваясь полубесконечным случаем* (специальное рассмотрение именно полубесконечного случая может быть найдено в [107]), и в самом конце только немного его прокомментируем.

Условие редукции общей 2РТ в цепочку Тоды на языке матрицы моментов может быть сформулировано в виде условия (84), которое может быть легко переформулировано как следующее ограничение на элемент грассманиана G

$$[J_k + \bar{J}_k, G] = 0, \quad (266)$$

эквивалентное условию

$$[\Lambda + \Lambda^{-1}, R] = 0, \quad (267)$$

где, как обычно, Λ — матрица сдвига $\Lambda_{ij} \equiv \delta_{i,j-1}$, а R — матрица вращения фермионов (237). Из (266) легко получаем

$$G e^{\bar{t}_k \bar{J}_k} = e^{\bar{t}_k \bar{J}_k} e^{\bar{t}_k J_k} G e^{-\bar{t}_k J_k}, \quad (268)$$

и τ -функция, как и должно быть, зависит (с точностью до тривиального множителя) только от суммы времен $\{t_k + \bar{t}_k\}$:

$$\tau_n(t, \bar{t}) = e^{\sum k t_k \bar{t}_k} \langle n | e^{H(t+\bar{t})} G | n \rangle. \quad (269)$$

*Строго говоря, свойства полубесконечной иерархии продолжаются на бесконечную, только если их операторы Лакса имеют ленточный вид (см. [136] и п. 2.4.2). В цепочке Тоды реализуется именно этот случай.

Редукция (267) имеет важное решение

$$R_{km} = R_{k+m}. \quad (270)$$

В этом случае матрица C_{ij} , определенная формулой (247), очевидно, удовлетворяет соотношению $C_{ij} = C_{i+j}$, и

$$(\partial_{t_k} - \partial_{\bar{t}_k})C_{i+j} = 0 \text{ для } k < n - i, k < n - j \quad (271)$$

благодаря свойствам (248) и (249). Конечно, эта формула еще не подразумевает, что τ -функция (детерминант C) зависит только от суммы времен, поскольку значения индекса k в (271) специфически ограничены. Правильная зависимость только от суммы времен восстанавливается только при учете экспоненциального множителя в (269).

Итак, доказано, что матрица C_{ij} , описывающая цепочку Тоды, удовлетворяет условию

$$[C, \Lambda + \Lambda^{-1}] = 0, \quad (272)$$

причем τ -функция получающейся иерархии (подправленная на соответствующую экспоненту, билинейную по временам) зависит только от суммы положительных и отрицательных времен $t_p - \bar{t}_p$, но не от их разности. Поэтому в иерархии цепочки Тоды достаточно рассматривать эволюцию только по положительным временам. Заметим, что $C_{i,j} = C_{i+j}$ — единственное решение условия (272), которое не зависит от разности времен уже на уровне матрицы C , а не τ -функции. Поскольку, однако, в окончательном ответе для τ -функции вся зависимость от разности времен так или иначе исчезнет, можно не рассматривать эволюцию по отрицательным временам и в объектах типа матрицы C .

В заключение скажем несколько слов об отличии редукции к цепочке Тоды в полубесконечном случае. Во всем проделанном рассуждении меняются два места. Во-первых, матрицы сдвига на одну диагональ вверх и вниз $\Lambda^{\pm 1}$ перестают быть обратными друг другу из-за вкладов «границы» матрицы («вершины» четвертьбесконечной матрицы). Второе изменение — наличие проектора в элементе грассманиана, который, в отличие от G_0 , не удовлетворяет условию (266). Эти два эффекта друг друга компенсируют в вычислении (266)–(269) (с чем, собственно, и было связано введение проектора и условия (66)), и τ -функция, по-прежнему, зависит только от суммы времен.

Таким образом, для τ -функции иерархии цепочки Тоды получено детерминантное представление с матрицей моментов, ограниченной условиями (83)–(85), которое воспроизводит результат (82).

2.5.4. Фермионное представление конформных матричных моделей.

Перейдем теперь к описанию конформных матричных моделей на фермионном языке [119]. Этот случай не отвечает схеме, рассмотренной в предыдущих пунктах, поскольку ему отвечает многокомпонентная иерархия [101, 146].

Более точно, статистическая сумма p -матричной конформной модели описывается τ -функцией p -компонентной иерархии КП (иерархии, зависящей от p наборов времен), ограниченной условием

$$\sum_{k=1}^p \partial / \partial t_n^{(k)} \tau^{(p)}(t) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (273)$$

Эта τ -функция удовлетворяет W -условиям (67) и является полным дискретным аналогом статистической суммы непрерывной матричной модели, неявно описанной в [64] (и явно — в отдельном обзоре [53], посвященном, в том числе, непрерывным матричным моделям).

Условие (273) определяет редукцию p -компонентного КП к обобщенной $SL(p)$ -иерархии АКНС и является аналогом условия независимости от разности времен, которое определяет редукцию 2РТ к цепочке Тоды. Более того, в случае $p = 2$ иерархия АКНС и иерархия цепочки Тоды эквивалентны. Это неудивительно, поскольку некоторое решение каждой из них описывает одну и ту же одноматричную эрмитову модель. Покажем, что эта матричная модель, действительно, описывается $SL(2)$ -иерархией АКНС [97, 107].

Мы начнем с определения двухкомпонентной иерархии КП [153]. Ее τ -функция — это коррелятор

$$\tau_{n_1, n_2}^{(2)}(t^{(1)}, t^{(2)}) = \langle n_1, n_2 | e^{H(t^{(1)}, t^{(2)})} G | n_1 + n_2, 0 \rangle, \quad (274)$$

где

$$\begin{aligned} H(t^{(1)}, t^{(2)}) &= \sum_{k>0} (t_k^{(1)} J_k^{(1)} + t_k^{(2)} J_k^{(2)}), \\ J^{(i)}(z) &= \sum J_k^{(i)} z^{-k-1} = : \psi^{(i)}(z) \psi^{(i)*}(z) :, \\ \psi^{(i)}(z) \psi^{(j)*}(z') &= \frac{\delta_{ij}}{z - z'} + \dots \end{aligned} \quad (275)$$

Покажем, что статистическая сумма одноматричной модели (143) может быть представлена в виде (274) с некоторым G , таким, что (274) зависит только от разности $t_k^{(1)} - t_k^{(2)}$ [119]. Для этого мы используем представление алгебры Каца–Мууди в терминах свободных фермионов:

$$\begin{aligned} J_0 &= \frac{1}{2}(\psi^{(1)}\psi^{(1)*} - \psi^{(2)}\psi^{(2)*}) = \frac{1}{2}(J^{(1)} - J^{(2)}), \\ J_+ &= \psi^{(2)}\psi^{(1)*}, \quad J_- = \psi^{(1)}\psi^{(2)*}. \end{aligned} \quad (276)$$

Как обычно, G должно быть выбрано в виде экспоненты от квадратичной формы по фермионам. Конкретный вид этой формы диктуется формулами

(143), (141) и (276):

$$G \equiv : \exp \left(\int \psi^{(2)} \psi^{(1)*} \right) :. \quad (277)$$

Тогда единственный член, не равный нулю из-за несохранения заряда и дающий вклад в коррелятор (274), имеет вид

$$G_{n_1, n_2} \equiv G_{n_1, -n_1} \delta_{n_1, -n_1} = \frac{1}{n_1!} : \left(\int \psi^{(2)} \psi^{(1)*} \right)_1^n : \delta_{n_1, -n_1}. \quad (278)$$

Теперь, изучая частное решение двухкомпонентной иерархии КП, мы докажем два утверждения [119]:

(i) выбирая элемент грассманиана в виде (277), мы получаем редукцию к однокомпонентной системе;

(ii) в (281) мы проверим, что редукция АКНС — редукция для τ -функции (274) [101, 127, 128].

Дальнейшие вычисления легче всего провести, используя бозонизованную форму фермионов:

$$\psi^{(i)*} = e^{\phi_i}, \quad \psi^{(i)} = e^{-\phi_i}, \quad J^{(1)} = \partial\phi_1, \quad J^{(2)} = \partial\phi_2. \quad (279)$$

Тогда τ -функция (274) равна

$$\begin{aligned} \tau_n^{(2)}(t^{(1)}, t^{(2)}) &\equiv \tau_{n, -n}^{(2)}(x, y) = \\ &= \frac{1}{n!} \langle n, -n | \exp \left(\sum_{k>0} (t_k^{(1)} J_k^{(1)} + t_k^{(2)} J_k^{(2)}) \right) \left(\int : \psi^{(2)} \psi^{(1)*} : \right)^n | 0 \rangle = \\ &= \frac{1}{n!} \langle n, -n | \exp \left(\oint [V^{(1)}(z) J^{(1)}(z) + V^{(2)}(z) J^{(2)}(z)] \right) \times \\ &\quad \times \left(\int : \exp(\phi_1 - \phi_2) : \right)^n | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (280)$$

Теперь, вводя линейные комбинации $\sqrt{2}\phi = \phi_1 - \phi_2$ и $\sqrt{2}\tilde{\phi} = \phi_1 + \phi_2$, мы окончательно получаем

$$\begin{aligned} \tau_n^{(2)}(t^{(1)}, t^{(2)}) &= \frac{1}{n!} \langle \exp \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \oint [V^{(1)}(z) + V^{(2)}(z)] \partial\tilde{\phi}(z) \right) \rangle \times \\ &\quad \times \langle n | \exp \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \oint [V^{(1)}(z) - V^{(2)}(z)] \partial\phi(z) \right) \rangle \times \\ &\quad \times \left(\int : \exp \sqrt{2}\phi : \right)^n | 0 \rangle \stackrel{(143)}{=} \mathcal{Z}_n(t^{(1)} - t^{(2)}), \end{aligned} \quad (281)$$

поскольку первый коррелятор на самом деле не зависит ни от $t^{(1)}$, ни от $t^{(2)}$. Таким образом, мы доказали, что τ -функция (274), действительно, зависит только от *разности* двух наборов времен $\{t_k^{(1)} - t_k^{(2)}\}$, задавая $SL(2)$ -иерархию АКНС, и равна статистической сумме эрмитовой одноматричной модели, если элемент грассманиана выбран в виде (277).

Рассмотренный простой пример содержит все существенные черты, по крайней мере, конформной матричной модели A_{p-1} -типа. Действительно, редукция (281) — не что иное, как $SL(2)$ -редукция из общей $GL(2)$ -структуры двухкомпонентной иерархии КП. Другими словами, диагональный $U(1)$ $GL(2)$ -ток $\tilde{J} = \frac{1}{2}(J^{(1)} + J^{(2)}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\partial\tilde{\phi}$ отщепляется. Это инвариантное утверждение, которое легко обобщается на случай старших p .

В случае $SL(p)$ мы имеем дело с p -компонентной иерархией, и вместо (274) следует рассмотреть τ -функцию, заданную коррелятором [146]

$$\tau_{\mathbf{n}}^{(p)}(\mathbf{t}) = \langle \mathbf{n} | e^{H(\mathbf{t})} G | 0 \rangle, \quad \mathbf{n} \equiv \{n_1, \dots, n_p\}, \quad \mathbf{t} = \{t^{(1)}, \dots, t^{(p)}\} \quad (282)$$

в системе, состоящей из p наборов фермионов $\{\psi^{(i)*}(z), \psi^{(i)}(z)\}$, $i = 1, \dots, p$. Гамильтониан дается картановскими $GL(p)$ -токами

$$H(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^p \sum_{k>0} t_k^{(i)} J_k^{(i)}, \quad J^{(i)}(z) = \psi^{(i)}(z)\psi^{(i)*}(z), \quad (283)$$

а элемент грассманиана, отвечающий конформной модели, нужно выбрать в виде экспоненты от некартановских $GL(2)$ -токов:

$$J^{(ij)} = \psi^{(i)}\psi^{(j)}, \quad \tilde{J}^{(ij)} = \psi^{(i)}\psi^{(j)*}, \quad J^{(ij)*} = \psi^{(i)*}\psi^{(j)*}, \quad i \neq j, \quad (284)$$

т. е.

$$G \equiv \prod \exp(Q^{(ij)}) \exp(\tilde{Q}^{(ij)}) \exp(Q^{(ij)*}), \quad (285)$$

$$Q^{(ij)} = \oint J^{(ij)}, \quad \tilde{Q}^{(ij)} = \oint \tilde{J}^{(ij)}, \quad Q^{(ij)*} = \oint J^{(ij)*}, \quad i \neq j.$$

Поскольку (284) — токи в $SL(p)_{k=1}$ -алгебре Каца–Мури, (285) играют роль экранирующих операторов в рассматриваемой теории. Следует упомянуть, что они являются экранирующими $SL(p)$ (а не $GL(p)$)-операторами, и, таким образом, τ -функция (282) не зависит от суммы всех времен $\left\{ \sum_{i=1}^p x_k^{(i)} \right\}$.

Следовательно, мы воспроизводим условие (273).

Выпишем это чуть подробнее для случая $SL(3)$. Экранирующие операторы в этом случае имеют вид

$$Q^{(\alpha)} = \oint J^{(\alpha)}, \quad (286)$$

где $\{\alpha\}$ — набор из шести корней алгебры $SL(3)$. Экранирующие токи могут быть выписаны как в форме, билинейной по фермионам (чтобы правильно описывать элемент грассманиана в (282)), так и в бозонизованном виде, удобном для вычислений:

$$\begin{aligned} J^{(\alpha_1)} &= \psi^{(1)*}\psi^{(2)*} = \exp(\phi_1 + \phi_2), & J^{(-\alpha_1)} &= \psi^{(1)}\psi^{(2)} = \exp(-\phi_1 - \phi_2), \\ J^{(\alpha_2)} &= \psi^{(2)*}\psi^{(3)*} = \exp(\phi_2 + \phi_3), & J^{(-\alpha_2)} &= \psi^{(2)}\psi^{(3)} = \exp(-\phi_2 - \phi_3), \\ J^{(\alpha_3)} &= \psi^{(1)}\psi^{(3)*} = \exp(\phi_3 - \phi_1), & J^{(-\alpha_3)} &= \psi^{(3)}\psi^{(1)*} = \exp(\phi_1 - \phi_3), \end{aligned} \quad (287)$$

и интересующая нас τ -функция — это коррелятор

$$\tau_{\mathbf{N}}^{(3)}(\mathbf{t}) = \langle \mathbf{n} | e^{H(\mathbf{t})} G | 0 \rangle \quad (288)$$

с

$$G \sim \prod_{\alpha} \exp Q^{(\alpha)}. \quad (289)$$

Условие картановской нейтральности теперь гарантируется компенсацией зарядов между оператором (289) и левым вакуумом $\langle \mathbf{n} |$ в (288). Тогда очевидно, что благодаря этому условию картановской нейтральности коррелятора (подобно тому, как это происходит в моделях типа Весса–Зумино–Виттена–Новикова) диагональный ток $\tilde{J} = \partial\tilde{\phi} = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{i=1}^p \partial\phi_i$ отщепляется от коррелятора и τ -функция имеет вид

$$\begin{aligned} \tau_{\mathbf{n}}^{(3)}(\mathbf{t}) &= \langle \mathbf{N} | e^{H(\mathbf{x})} G | 0 \rangle = \\ &= \left| \langle 0 | \exp \left(\sum_{k>0} \tilde{J}_k \sum_{i=1}^3 t_k^{(i)} \right) | 0 \rangle_{\tilde{\phi}} \langle \mathbf{n} | e^{H(\mathbf{t})} G | 0 \rangle \right|_{\sum_i \phi_i = 0} = \tau_{\mathbf{n}}^{\text{red}}(\mathbf{t}), \end{aligned} \quad (290)$$

причем $\sum_{i=1}^p n_i = 0$, а второй коррелятор во втором равенстве тривиально равен единице. При специальном выборе элемента грассманиана G , как в (290),

$$G = G_{1,2} = \exp \left(\int J^{(\alpha_1)} \right) \exp \left(\int J^{(\alpha_2)} \right), \quad (291)$$

мы воспроизводим непосредственно формулу (156).

Итак, мы доказали, что конформные модели серии A_{p-1} отвечают $SL(p)$ -редукции «АКНС-типа» p -компонентной иерархии КП. Обобщение на дру-

гие группы совершенно непосредственное. Действительно, начиная с соответствующей W -алгебры, мы автоматически приходим к элементу грассманиана с подходящими групповыми свойствами. Это дает нам мощный инструмент для конструирования иерархий матричного типа (т. е. удовлетворяющих некоторому струнному уравнению) с данной группой симметрии, которая автоматически диктует все свойства этих иерархий. Так, как мы видели, определяющее свойство (обобщенной) иерархии АКНС — независимость τ -функции соответствующей многокомпонентной иерархии КП от суммы всех времен [101] — действительно отвечает $SL(p)$ -редукции с теоретико-групповой точки зрения [128].

Заметим, что τ -функция общей АКНС-системы определяется для любого набора нулевых (дискретных) времен

$$\tau_{\mathbf{n}, \mathbf{m}} \sim \langle \mathbf{n} | \dots | \mathbf{m} \rangle \quad (292)$$

с единственным условием $\sum N_i = \sum M_i$ из-за закона сохранения заряда. Однако условие аннигиляции правого вакуума оператором T_{-1} (т. е. выполнения струнного уравнения) требует нулевых значений \mathbf{m} . Интересно отметить, что в оригинальной статье [146], посвященной многокомпонентным иерархиям, были рассмотрены иерархии именно с такого рода ограничением. В $SL(2)$ -случае это приводит к τ -функции, зависящей только от одного дискретного индекса $\tau_{n, -n}$, что позволяет отождествить ее с τ -функцией иерархии цепочки Тоды (эта последняя зависит от единственного нулевого времени)*. В частности, первое уравнение двухкомпонентной иерархии, имеющее вид (166) [153], сводится в этом случае к первому уравнению иерархии цепочки Тоды (65).

Что касается конкретного решения $SL(2)$ -иерархии, отвечающего конформной одноматричной модели, то благодаря закону сохранения заряда оно полностью эквивалентно соответствующему решению иерархии цепочки Тоды [97, 106, 107]. На фермионном языке это соответствие может быть установлено следующей заменой в элементе грассманиана:

$$\psi^{(1)}(z) \rightarrow \psi(z), \quad \psi^{(2)}(z) \rightarrow \psi(1/z), \quad (293)$$

и аналогично для ψ^* . Это отражает тот факт, что цепочка Тоды в конструкции Кричевера [134, 135] описывается двумя отмеченными точками (скажем, 0 и ∞) и отвечает двум склеенным (из-за редукции из 2РТ) листам (дискам). Поэтому она может быть также описана двумя фермионами, заданными на

*В этом случае «двойное» детерминантное представление (аналогичное (164)) может быть перепорядочено таким образом, что получится детерминант блочной матрицы с заданными свойствами симметрии, связывающими различные блоки.

этих двух листах. Такое явление может обобщаться на старшие конформные модели, которые должны отвечать специальным редукциям многокомпонентных иерархий 2РТ.

Дальнейшие подробности, касающиеся общего элемента грассманиана, описывающего (обобщенную) иерархию АКНС, а также обсуждение роли и смысла потоков по различным нулевым (дискретным) временам могут быть найдены в работах [136, 142].

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В заключение данного обзора еще раз подчеркнем, что мы подробно обсудили только более старый и традиционный подход к описанию двумерной гравитации при помощи матричных моделей, который стартует с дискретных моделей (с последующей весьма сложной процедурой взятия двойного скейлингового предела, здесь не обсуждавшейся (см. [53]). Перечислим основные результаты, которые были получены на этом пути.

Прежде всего, получен ряд результатов по общей структуре дискретных матричных моделей двумерной гравитации.

1. Статистическая сумма эрмитовой одноматричной модели является τ -функцией иерархии цепочки Тоды и удовлетворяет бесконечному набору тождеств Уорда, образующих борелевскую подалгебру алгебры Виасоро.

2. Статистическая сумма эрмитовых многоматричных моделей является τ -функцией иерархии двумеризованной Тоды.

3. Статистическая сумма эрмитовой двухматричной асимметричной модели удовлетворяет бесконечному набору тождеств Уорда, образующих \widetilde{W} -алгебру. Исследованы свойства этой алгебры.

4. Введены и исследованы конформные p -матричные модели. Показано, что их статистическая сумма является τ -функцией обобщенной $SL(p+1)$ АКНС-иерархии и удовлетворяет бесконечному набору тождеств Уорда, образующих борелевскую подалгебру $W^{(p+1)}$ -алгебры.

5. Статистическая сумма унитарной матричной модели является τ -функцией иерархии релятивистской цепочки Тоды (или дискретной иерархии АКНС) и удовлетворяет бесконечному набору виасоровских условий.

Кроме того, получен ряд результатов, относящихся к τ -функциям интегрируемых иерархий. В частности, показано, что все дискретные матричные модели описываются *полубесконечными* интегрируемыми иерархиями.

Все эти результаты сведены в таблицу (подробное объяснение непрерывного предела в этой таблице может быть найдено в [53]).

Заметим теперь, что существует и другой, совершенно отличный от описанного, подход к описанию двумерной гравитации — при помощи так называемых непрерывных матричных моделей, которые дают непосредственно

Таблица

Матричная модель	Интегрируемая иерархия	Тождества Уорда	Непрерывный предел
Эрмитова одноматричная модель	Цепочка Тоды	Алгебра Вирасоро	Две КдВ-иерархии
Редуцированная эрмитова модель	Цепочка Вольтерра	Не существует до непрерывного предела	Иерархия КдВ, алгебра Вирасоро
Унитарная одноматричная модель	Релятивистская цепочка Тоды	Алгебра Вирасоро	Иерархия КдВ/мКдВ [133], алгебра Вирасоро
Комплексная одноматричная модель	Цепочка Тоды	Алгебра Вирасоро	Не существует
Эрмитовы многоматричные модели	Двумеризованная цепочка Тоды	Не существует до непрерывного предела	Редукции иерархии КП, W -алгебры [64]
Конформные матричные модели	Обобщенные иерархии АКНС	W -алгебры	Редукции иерархии КП, W -алгебры

(без необходимости взятия непрерывного предела) статистическую сумму двумерной гравитации. Это матричные модели во внешнем поле (так называемые обобщенные модели Концевича). Описание физической гравитации при помощи этих матричных моделей дано в отдельном обзоре [53]. В нем обсуждаются следующие результаты.

Построена теория непрерывных матричных моделей, описывающих производящие функции корреляторов двумерной гравитации.

1. Введена матричная модель — обобщенная модель Концевича (ОМК), зависящая от произвольного полиномиального потенциала, статистическая сумма которой описывает непрерывный предел различных матричных моделей. Исследованы интегрируемые свойства модели с произвольным потенциалом, а также ее тождества Уорда.

2. Доказано, что статистическая сумма ОМК с мономиальным потенциалом степени $p + 2$ совпадает со статистической суммой p -матричной модели в непрерывном пределе. Для доказательства этого факта проверяется, что статистическая сумма указанной ОМК является τ -функцией $(p+1)$ -редуцированной

иерархии КП и удовлетворяет струнному уравнению (что вместе эквивалентно бесконечной системе тождеств Уорда, которые в этом случае образуют борелевскую подалгебру $W^{(p+1)}$ -алгебры).

3. Введена ОМК с потенциалом, являющимся полиномом от обратных степеней матрицы. Исследованы ее интегрируемые свойства, а также тождества Уорда.

4. Изучены интегрируемые свойства дискретного аналога ОМК, описывающегося разложением по характерам и отвечающего мигдаловскому представлению двумерных калибровочных теорий.

5. Изучена унитарная матричная модель во внешнем поле, введенная Брезаном и Гроссом для изучения двумерных калибровочных теорий. Введена универсальная модель этого типа, объединяющая унитарные модели с любыми унитарными группами. Показано, что она является моделью ОМК, изучены ее интегрируемые свойства и тождества Уорда в различных режимах, отвечающих различным фазам калибровочной теории, построено $1/N$ -разложение и объяснен смысл аномалии т'Хофта–Де Вита.

Благодарности. Автор благодарен А. Герасимову, С. Харчеву, А. Маршакову, А. Морозову, А. Орлову и А. Забродину за участие в совместных работах, использованных при написании настоящего обзора, Я. Амбьорну, Е. Антонову, К. Бачасу, Д. Булатову, А. Жеданову, Х. Итояме, В. Корепину, И. Кричеву, И. Полюбину, Н. Славнову, Т. Такэбэ, И. Тютину и Л. Чехову за полезные обсуждения и Т. Султанову за техническую помощь.

Работа была частично поддержана грантами INTAS-00-334, РФФИ-00-02-16101-а и программой поддержки научных школ 96-15-96798.

Приложение ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫЕ ИЕРАРХИИ

Воспроизведем несколько технических вычислений, пропущенных в п. 2.5.3 [106, 107]. Рассмотрим полубесконечную иерархию, заданную условием

$$\tau_n = 0, \quad n < 0. \quad (\text{П.1})$$

Это отвечает выбору элемента грассманиана в виде

$$G = G_0 P_+, \quad (\text{П.2})$$

где P_+ — проектор на положительные состояния:

$$P_+ |n\rangle = \theta(n) |n\rangle, \quad (\text{П.3})$$

который реализуется как фермионный оператор

$$P_+ =: \exp \left[\sum_{i < 0} \psi_i \psi_i^* \right] : \quad (\text{П.4})$$

и обладает свойствами

$$P_+ \psi_{-k}^* = \psi_{-k} P_+ = 0, \quad k > 0, \quad (\text{П.5})$$

$$[P_+, \psi_k] = [P_+, \psi_k^*] = 0, \quad k \geq 0, \quad (\text{П.6})$$

$$P_+^2 = P_+. \quad (\text{П.7})$$

Мы также выбираем G_0 в виде, включающем только положительные моды фермионов ψ_k и ψ_k^* с $k \geq 0$:

$$G_0 =: \exp \left\{ \left(\int_{\gamma} A(z, w) \psi_+(z) \psi_+^*(w^{-1}) dz dw \right) - \sum_{i \geq 0} \psi_i \psi_i^* \right\} :, \quad (\text{П.8})$$

где $\psi_+(z) = \sum_{k \geq 0} \psi_k z^k$; $\psi_+^*(z) = \sum_{k \geq 0} \psi_k^* z^{-k}$ и γ — некоторый контур интегрирования. Кроме того, нам понадобится проектор на отрицательные состояния

$$P_- =: \exp \left[- \sum_{i \geq 0} \psi_i \psi_i^* \right] :, \quad (\text{П.9})$$

который обладает следующими свойствами:

$$P_- \psi_k = \psi_k^* P_- = 0, \quad k \geq 0, \quad (\text{П.10})$$

$$[P_-, \psi_{-k}] = [P_-, \psi_{-k}^*] = 0, \quad k > 0, \quad (\text{П.11})$$

$$P_-^2 = P_-. \quad (\text{П.12})$$

Вычислим состояние

$$G_0 P_+ e^{\bar{H}(y)} |n\rangle. \quad (\text{П.13})$$

Как легко увидеть, оно исчезает при $n < 0$. Действительно, применяя (236), (238) и (П.6), можно получить, что при $n < 0$ состояние

$$e^{\bar{H}(\bar{t})} |n\rangle = \psi_{-n}^*(\bar{t}) \dots \psi_{-1}^*(\bar{t}) e^{\bar{H}(\bar{t})} |0\rangle$$

содержит только отрицательные моды ψ_{-m}^* ($m > 0$). Следовательно, действие P_+ аннигилирует это состояние благодаря формуле (П.5). Для $n \geq 0$, используя формулы (236), (238) и (П.6), мы получаем

$$P_+ e^{\bar{H}(\bar{t})} |n\rangle = \psi_{n-1}(\bar{t}) \dots \psi_0(\bar{t}) P_+ e^{\bar{H}(\bar{t})} |0\rangle. \quad (\text{П.14})$$

Теперь мы воспользуемся тем фактом, что [53]

$$P_+ e^{\bar{H}(\bar{t})} |0\rangle = |0\rangle. \quad (\text{П.15})$$

Таким образом, с использованием формул (П.8), (П.9) мы получаем

$$\begin{aligned} G_0 P_+ e^{\bar{H}(\bar{t})} |n\rangle &= G \psi(\bar{t}) \dots \psi(\bar{t}) |0\rangle = \\ &= \sum \frac{1}{m!} \int_{\gamma} \prod_{i=1}^m A(z_i, w_i) dz_i dw_i \psi_+(z_1) \dots \psi_+(z_m) \times \\ &\quad \times P_- \psi_+^*(w_m^{-1}) \dots \psi_+^*(w_1^{-1}) \psi_{n-1}(\bar{t}) \dots \psi_0(\bar{t}) |0\rangle. \end{aligned} \quad (\text{П.16})$$

Теперь видим, что только член с $m = n$ дает ненулевой вклад в бесконечную сумму (П.16). Действительно, при $m > n$ состояние $\psi_+^*(w_m^{-1}) \dots \psi_+^*(w_1^{-1}) \times \psi_{n-1}(\bar{t}) \dots \psi_0(\bar{t}) |0\rangle$ исчезает, поскольку в этом случае некоторые положительные моды в $\psi_+^*(w_i^{-1})$ могут быть проташены до вакуума $|0\rangle$ и занулят его. Наоборот, при $m < n$ некоторые положительные моды в $\psi_k(-\bar{y})$ могут быть проташены до проектора P_- и благодаря (П.10) занулят его.

Следовательно,

$$\begin{aligned} G_0 P_+ e^{\bar{H}(\bar{t})} |n\rangle &= \\ &= \frac{1}{n!} \int_{\gamma} \prod_{i=1}^n A(z_i, w_i) dz_i dw_i \psi_+(z_1) \dots \psi_+(z_n) \times \\ &\quad \times P_- \psi_+^*(w_n^{-1}) \dots \psi_+^*(w_1^{-1}) \psi_{n-1}(\bar{t}) \dots \psi_0(\bar{t}) |0\rangle. \end{aligned} \quad (\text{П.17})$$

Воспользуемся следующим утверждением [53]:

$$\begin{aligned} \psi_+^*(w_n^{-1}) \dots \psi_+^*(w_1^{-1}) \psi_{n-1}(\bar{t}) \dots \psi_0(\bar{t}) |0\rangle &= \\ &= \Delta(w) \exp \left[\sum_{j=1}^n \xi(\bar{t}, w_j) \right] |0\rangle. \end{aligned} \quad (\text{П.18})$$

Теперь, подставляя (П.18) в (П.17) и используя очевидный факт, что $P_- |0\rangle = |0\rangle$ и $\psi_-(z_i) |0\rangle = 0$, можно получить

$$\begin{aligned} G &= G_0 P_+ e^{\bar{H}(\bar{t})} |n\rangle = \\ &= \frac{1}{n!} \int_{\gamma} \prod_{i=1}^n A(z_i, w_i) e^{\xi(\bar{t}, w_i)} dz_i dw_i \Delta(w) \psi(z_1) \dots \psi(z_n) |0\rangle. \end{aligned} \quad (\text{П.19})$$

Наконец, взяв одну из основных формул работы [149] (которая может быть просто доказана в технике бозонизации)

$$\psi(z_1) \dots \psi(z_n)|0\rangle = \Delta(z) \exp \left[\bar{H} \left(\sum_{i=1}^n \epsilon(z_i) \right) \right] |0\rangle, \quad (\text{П.20})$$

где $\epsilon(z_i)$ — вектор с компонентами $\epsilon_k(z_i) = \frac{1}{k} z_i^k$, мы наконец получаем желаемый результат:

$$G_0 P_+ e^{\bar{H}(\bar{t})} |n\rangle = \frac{1}{n!} \int_{\gamma} \prod_{i=1}^n A(z_i, w_i) \times \\ \times e^{\xi(\bar{t}, w_i)} dz_i dw_i \Delta(w) \Delta(z) \exp \left[\bar{H} \left(\sum_{i=1}^n \epsilon(z_i) \right) \right] |0\rangle. \quad (\text{П.21})$$

Итак, окончательно имеем

$$\tau_n(t, \bar{t}) = \langle n | e^{H(x)} G_0 P_+ e^{\bar{H}(\bar{t})} |n\rangle = \\ = \frac{1}{n!} \int_{\gamma} \Delta(w) \Delta(z) \prod_{i=1}^n A(z_i, w_i) e^{\xi(t, z_i) + \xi(\bar{t}, w_i)} dz_i dw_i. \quad (\text{П.22})$$

Детерминантное представление. Используя формулы (236), (П.7) и тот факт, что $[P_+, g_0] = 0$, получаем

$$\tau_n(t, \bar{t}) = \langle 0 | \psi_0^* \dots \psi_{n-1}^* e^{H(t)} G_0 P_+ e^{\bar{H}(\bar{t})} \psi_{n-1} \dots \psi_0 |0\rangle = \\ = \langle 0 | e^{H(t)} \psi_0^*(-t) \dots \psi_{n-1}^*(-t) P_+ G_0 P_+ \psi_{n-1}(\bar{t}) \dots \psi_0(\bar{t}) e^{\bar{H}(\bar{t})} |0\rangle.$$

Поскольку $\psi_i^*(-t)$ и $\psi_i(\bar{t})$ содержат только положительные моды (см. формулы (238)), из (П.6) и (П.15) следует

$$\tau_n(t, \bar{t}) = \langle 0 | \psi_0^*(-t) \dots \psi_{n-1}^*(-t) G_0 \psi_{n-1}(\bar{t}) \dots \psi_0(\bar{t}) |0\rangle = \\ = \det [\langle 0 | \psi_i^*(-t) G_0 \psi_j(\bar{t}) |0\rangle]_{i,j=0,\dots,n-1}. \quad (\text{П.23})$$

Те же самые аргументы, которые мы использовали для перехода от (П.16) к (П.17), примененные к уравнению (П.23), приводят нас к заключению, что только линейный член в $A(z, w)$ дает вклад. Поэтому, используя (П.10),

получаем

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | \psi_i^*(-t) G \psi_j(\bar{t}) | 0 \rangle &= \\
 &= \int_{\gamma} A(z, w) dz dw \langle 0 | \psi_i^*(-t) \psi_+(z) P_- \psi_+^*(w^{-1}) \psi_j(\bar{t}) | 0 \rangle = \\
 &= \int_{\gamma} z^i w^j A(z, w) e^{\xi(t, z) + \xi(\bar{t}, w)} dz dw = \\
 &= \partial_t^i \partial_{\bar{t}}^j \int_{\gamma} A(z, w) e^{\xi(t, z) + \xi(\bar{t}, w)} dz dw. \quad (\text{П.24})
 \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно выражение для τ -функции в детерминантной форме имеет вид

$$\tau_n(t, \bar{t}) = \det \left[\partial_{x_1}^i \partial_{\bar{t}_1}^j \int_{\gamma} A(z, w) e^{\xi(t, z) + \xi(\bar{t}, w)} dz dw \right] \Big|_{i, j=0, \dots, n-1}. \quad (\text{П.25})$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hoker E. D., Phong* // Rev. Mod. Phys. 1988. V. 60. P. 917;
Морозов А. Ю. // ЭЧАЯ. 1992. Т. 23, вып. 1. С. 174–238.
2. *Морозов А. Ю.* // УФН. 1992. Т. 162, вып. 8. С. 84.
3. *Замолодчиков А. Б.* // Письма в ЖЭТФ. 1987. Т. 46. С. 129–132.
4. *Kupershmidt B. A., Mathieu P.* // Phys. Lett. B. 1989. V. 227. P. 245;
Eguchi T., Yang S. K. // Ibid. V. 244. P. 373–378.
5. *Ludwig A., Cardy J.* // Nucl. Phys. B. 1987. V. 285. P. 687–718;
Dotsenko V. S. // Nucl. Phys. B. 1989. V. 314. P. 687.
6. *Zamolodchikov A. B.* // Adv. Stud. in Pure Math. 1989. V. 19. P. 641–674.
7. *Sasaki R., Yamanaka I.* // Adv. Stud. in Pure Math. 1988. V. 18. P. 271–296.
8. *Kazakov V., Migdal A.* // Nucl. Phys. B. 1988. V. 311. P. 171;
Brézin E. Two Dimensional Quantum Gravity and Randon Surfaces // Proc. of Jerusalem Winter School (90/91) / Eds. D. Gross, T. Piran, S. Weinberg;
Gross D. // Ibid.
David F. Lectures given at Les Houches Summer School, July 1992. Saclay T93/028; hep-th/9303127;
Alvarez-Gaume L. Lausanne Lectures. 1990;
Martinec E. Lectures at 1991 Trieste Spring School. Rutgers Preprint RU-91-51; hep-th/9112019;
Ginsparg P., Moore G. Lectures on 2D Gravity and 2D String Theory. Cambridge University Press, 1993;
DiFrancesco P., Ginsparg P., Zinn-Justin J. // Phys. Rept. 1995. V. 254. P. 1–133;
Bilal A. John Hopkins Lectures. CERN TH5867/90;
Mañes J., Lozano Y. Barcelona Preprint UB-ECM-PF3/91;

- Kazakov V.* // Proc. of Cargese Workshop, 1990; LPTENS 90/30;
Klebanov I. Lectures at 1991 Trieste Spring School. Princeton Preprint PUPT-1271; hep-th/9108019;
Marshakov A. // Int. J. Mod. Phys. A. 1993. V. 8, No. 22. P. 3831–3882.
9. *Морозов А. Ю.* // УФН. 1994. Т. 164, вып.1. С. 3–62.
 10. *Mironov A.* // Int. J. Mod. Phys. A. 1994. V. 9. P. 355–4405.
 11. *Polyakov A. M.* // Phys. Lett. B. 1981. V. 103. P. 207–210.
 12. *Polyakov A. M.* // Ibid. P. 211–213.
 13. *Alvarez O.* // Nucl. Phys. B. 1983. V. 216. P. 125;
Friedan D. Les Houches Summer School, 1982. Recent Advances in Field Theory and Statistical Physics / Eds. J.-B. Zuber, R. Stora. North-Holland, 1984. P. 839.
 14. *Polchinsky J.* // Nucl. Phys. B. 1989. V. 324. P. 123.
 15. *Polyakov A.* // Phys. Lett. B. 1979. V. 82. P. 247–250;
Dotsenko V. // Nucl. Phys. B. 1987. V. 285[FS19]. P. 45–69;
Kavalov A., Sedrakyan A. // Ibid. P. 264–278.
 16. *Bilal A.* // Phys. Rept. 1989. V. 184, No. 2–4. P. 113–120.
 17. *Knizhnik V., Polyakov A., Zamolodchikov A.* // Mod. Phys. Lett. A. 1988. V. 3. P. 819.
 18. *David F.* // Ibid. P. 1651;
Distler J., Kawai H. // Nucl. Phys. B. 1989. V. 312. P. 509.
 19. *Ambjørn J.* // Nucl. Phys. B. 1986. V. 270. P. 457.
 20. *Polyakov A. M.* // Ibid. V. 268. P. 406–412.
 21. *Грин М., Шварц Дж., Виттен Е.* Теория суперструн. М.: Мир, 1990. Т. 1–2.
 22. *Polyakov A. M.* // Mod. Phys. Lett. A. 1987. V. 2. P. 893–898.
 23. *Goulian M., Li M.* // Phys. Rev. Lett. 1991. V. 66. P. 2051–2055;
Dotsenko V. // Mod. Phys. Lett. A. 1991. V. 6. P. 3601–3612;
Kitazawa Y. // Phys. Lett. B. 1991. V. 265. P. 262–268;
Sakai N., Tani Y. // Progr. Theor. Phys. 1991. V. 86. P. 547–554.
 24. *DiFrancesco P., Kutasov D.* // Phys. Lett. B. 1991. V. 261. P. 385–390.
 25. *DiFrancesco P., Kutasov D.* // Nucl. Phys. B. 1991. V. 375. P. 119–172.
 26. *Bershadsky M., Klebanov I.* // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 65. P. 3088–3091.
 27. *Gerasimov A., Marshakov A., Morozov A.* // Phys. Lett. B. 1990. V. 242. P. 345–353;
Distler J. // Nucl. Phys. B. 1990. V. 342. P. 523–538.
 28. *Witten E.* // Ibid. V. 340. P. 281–332.
 29. *Witten E.* // Surveys Diff. Geom. 1991. V. 1. P. 243–310.
 30. *Dijkgraaf R., Witten E.* // Nucl. Phys. B. 1990. V. 342. P. 486–522;
Witten E. // Nucl. Phys. B. 1992. V. 371. P. 191–245.
 31. *Li K.* // Nucl. Phys. B. 1991. V. 354. P. 711–724.
 32. *Dijkgraaf R., Verlinde E., Verlinde H.* // Ibid. V. 352. P. 59–86.

33. *Martinec E.* // Phys. Lett. B. 1989. V. 217. P. 431;
Vafa C., Warner N. // Ibid. V. 218. P. 51;
Greene B., Vafa C., Warner N. // Ibid. V. 324. P. 371–390;
Lerche W., Vafa C., Warner N. // Ibid. P. 427;
Vafa C. // Mod. Phys. Lett. A. 1990. V. 6. P. 337–346.
34. *Cecotti S., Vafa C.* // Nucl. Phys. B. 1991. V. 367. P. 359–461.
35. *Лоцев А.* // ТМФ. 1993. Т. 95. С. 595–603.
36. *Krichever I.* hep-th/9205110.
37. *Losev A., Polyubin I.* // Int. J. Mod. Phys. A. 1995. V. 10, No. 29. P. 4161–4178.
38. *Kharchev S. et al.* // Mod. Phys. Lett. A. 1993. V. 8. P. 1047–1061.
39. *Dijkgraaf R.* hep-th/9201003.
40. *David F.* // Nucl. Phys. B. 1985. V. 257[FS14]. P. 45;
David F. // Ibid. P. 543;
Ambjørn J., Durhuus B., Frohlich J. // Ibid. P. 433;
Kazakov V.A., Kostov I.K., Migdal A.A. // Phys. Lett. B. 1985. V. 157. P. 295–300;
Boulatov D. et al. // Phys. Lett. B. 1986. V. 174. P. 87–93; Nucl. Phys. B. 1986. V. 275[FS17]. P. 641.
41. *Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.* Гравитация. М.: Мир, 1977. Т. 1–3.
42. *Shabat G., Voevodsky V.* The Grothendieck Festschrift. Progress in Mathematics. Birkhauser, 1990. V. III. P. 199–227;
Levin A., Morozov A. // Phys. Lett. B. 1990. V. 243. P. 207–214.
43. *Smit D.-J.* // Comm. Math. Phys. 1992. V. 143. P. 253–286.
44. *Kazakov V.* // Mod. Phys. Lett. A. 1989. V. 4. P. 2125.
45. *Friedan D., Shenker S.* // Phys. Lett. B. 1986. V. 175. P. 287.
46. *Ishibashi N., Matsuo Y., Ooguri H.* // Mod. Phys. Lett. A. 1987. V. 2. P. 119.
47. *Alvarez-Gaume L., Gomez C., Reina C.* // Phys. Lett. B. 1987. V. 190. P. 55.
48. *Witten E.* // Comm. Math. Phys. 1988. V. 113. P. 529.
49. *Morozov A.* // Phys. Lett. B. 1987. V. 196. P. 325.
50. *Книжник В.* // УФН. 1989. Т. 159, вып. 3. С. 401–453.
51. *Schwarz J.H.* Preprint CALT-68-2065, Mar. 1996. 65 p.; references therein.
52. *Banks T. et al.* hep-th/9610043;
Periwal V. hep-th/9611103.
53. *Миронов А.* τ -функции и матричные модели // Лекционные заметки Казанского гос. ун-та. 1999.
54. *Ambjørn J., Chekhov L., Makeenko Yu.* // Phys. Lett. B. 1992. V. 282. P. 341–348;
Ambjørn J. et al. // Nucl. Phys. B. 1993. V. 404. P. 127–172.
55. *Saito S.* // Phys. Rev. Lett. 1987. V. 59. P. 1798; Phys. Rev. D. 1987. V. 36. P. 1819.
56. *Barouch E., McCoy B.M., Wu T.T.* // Phys. Rev. Lett. 1973. V. 31. P. 1409;
Tracy C.A., McCoy B.M. // Ibid. P. 1500;
Wu T.T. et al. // Phys. Rev. B. 1976. V. 13. P. 316–374.
57. *Its A.R. et al.* // Int. J. Mod. Phys. B. 1990. V. 4. P. 1003–1037.

58. *Sato M., Dzhimbo M., Miwa T.* Голономные квантовые поля. М.: Мир, 1983.
59. *Bernard D., LeClair A.* hep-th/9402144.
60. *Izergin A. G., Coker D. A., Korepin V. E.* // J. Phys.: Math. Gen. A. 1992. V. 25. P. 4315–4334.
61. *Seiberg N., Witten E.* // Nucl. Phys. B. 1994. V. 426. P. 19–52; *ibid.* V. 431. P. 484–550.
62. *Gorsky A. et al.* // Phys. Lett. B. 1995. V. 355. P. 466–474.
63. *Итояма Н., Морозов А.* hep-th/9601168;
Маришаков А. // ЭЧАЯ. 1999. Т. 30, вып. 5. С. 1120;
Mironov A. hep-th/9801149;
Donagi R. alg-geom/9705010.
64. *Fukuta M., Kawai H., Nakayama R.* // Int. J. Mod. Phys. A. 1991. V. 6. P. 1385.
65. *Marshakov A., Mironov A., Morozov A.* // Phys. Lett. B. 1996. V. 389. P. 43–52; hep-th/9607109; hep-th/9701123.
66. *Marshakov A., Morozov A.* // Phys. Lett. B. 1990. V. 235. P. 97–105.
67. *Dotsenko V., Fateev V.* // Nucl. Phys. 1984. V. 240. P. 312–348.
68. *Dotsenko V.* // Adv. Stud. in Pure Math. 1988. V. 16. P. 123–170.
69. *Маришаков А., Миронов А.* // Тр. XXV зимней шк. ЛИЯФ. 1990. С. 1.
70. *Grisaru M. T. et al.* // Nucl. Phys. B. 1990. V. 342. P. 564–588.
71. *Замолодчиков А. Б.* // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 43. С. 565–567.
72. *Lian B., Zuckerman G.* // Phys. Lett. B. 1991. V. 254. P. 417–423; *ibid.* V. 266. P. 21–28;
Bouwknegt P., McCarthy J., Pilch K. // Comm. Math. Phys. 1992. V. 145. P. 541–560.
73. *Witten E.* // Nucl. Phys. B. 1992. V. 373. P. 187;
Polyakov A., Klebanov I. // Mod. Phys. Lett. A. 1992. V. 6. P. 3273;
Kutasov D., Martinec E., Seiberg N. // Phys. Lett. B. 1992. V. 276. P. 437.
74. *Marshakov A. et al.* // Nucl. Phys. B. 1993. V. 404. P. 427–456.
75. *Seiberg N.* Preprint RU-90-29. 1990.
76. *Kadanoff L. P.* Phase Transitions and Critical Phenomena / Eds. Domb, Green. London, 1976. V. 5A. P. 1–34;
Вильсон К., Козут Дж. Ренормализационная группа и ϵ -разложение. М.: Мир, 1975.
77. *Belavin A., Polyakov A., Zamolodchikov A.* // Nucl. Phys. B. 1984. V. 241. P. 333–380.
78. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
79. *'tHooft G.* // Nucl. Phys. 1974. V. 72. P. 461–473.
80. *Brézin E. et al.* // Comm. Math. Phys. 1978. V. 59. P. 35.
81. *Bessis D., Itzykson C., Zuber J.-B.* // Adv. Appl. Math. 1980. V. 1. P. 109.
82. *Staudacher M.* // Nucl. Phys. B. V. 336. P. 349.
83. *Banks T. et al.* // Phys. Lett. B. 1990. V. 238. P. 279.
84. *Mehta M. L.* // Comm. Math. Phys. 1981. V. 79. P. 327–340;
Chadha S., Mahoux G., Mehta M. L. // J. Phys. A. 1981. V. 14. P. 579.
85. *Itzykson C., Zuber J.-B.* // J. Math. Phys. 1980. V. 21. P. 411.
86. *Boulatov D., Kazakov V.* // Phys. Lett. B. 1987. V. 186. P. 379–384.

87. Crnković C., Ginsparg P., Moore G. // Phys. Lett. B. 1990. V. 237. P. 196;
Brézin E. et al. // Ibid. P. 43;
Gross D., Migdal A. // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 717.
88. Brezin E., Gross D. // Phys. Lett. B. 1980. V. 97. P. 120;
Gross D., Witten E. // Phys. Rev. D. 1980. V. 21. P. 446–453;
Wadia S.R. // Phys. Rev. D. 1981. V. 24. P. 970–978;
Neuberger H. // Nucl. Phys. B. 1981. V. 179. P. 253–282; Nucl. Phys. B. 1990. V. 340. P. 703–720.
89. Brezin E., Kazakov V. // Phys. Lett. B. 1990. V. 236. P. 144;
Douglas M., Shenker S. // Nucl. Phys. B. 1990. V. 335. P. 635.
90. Gross D., Migdal A. // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 127.
91. Gross D., Migdal A. // Nucl. Phys. B. 1990. V. 340. P. 333.
92. Douglas M. // Phys. Lett. B. 1990. V. 238. P. 176.
93. DiFrancesco P., Kutasov D. // Nucl. Phys. B. 1990. V. 342. P. 589–624.
94. Dijkgraaf R., Verlinde E., Verlinde H. // Nucl. Phys. B. 1991. V. 348. P. 435.
95. Маршаков А., Миронов А., Морозов А. // Письма в ЖЭТФ. 1991. Т. 54. С. 536–541.
96. Mehta M. L. Random Matrices. N. Y.: Academic Press, 1990.
97. Gerasimov A. // Nucl. Phys. B. 1991. V. 357. P. 565–618.
98. Кричевер И. М. // УМН. 1981. Т. 36, вып. 2. С. 72–77.
99. Toda M. Нелинейные решетки. М.: Мир, 1984.
100. Хирота Р. Солитоны / Под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри. М., 1983. С. 175–192.
101. Ueno K., Takasaki K. // Adv. Studies in Pure Math. 1984. V. 4. P. 1–95.
102. Фаддеев Л. Д., Тахтаджан Л. А. Гамильтонов подход в теории солитонов М.: Наука, 1986.
103. Bachas C., Petropoulos P. M. S. // Phys. Lett. B. 1990. V. 247. P. 363.
104. Semenov-Tian-Shansky M. // Publ. RIMS. 1985. V. 21. P. 1237–1260.
105. Захаров В. Е. и др. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
106. Kharchev S. // Nucl. Phys. B. 1993. V. 397. P. 339–378.
107. Kharchev S. et al. // Nucl. Phys. B. 1991. V. 366. P. 569–601.
108. Mironov A., Morozov A. // Phys. Lett. B. 1990. V. 252. P. 47–52.
109. Itoyama H., Matsuo Y. // Phys. Lett. B. 1991. V. 255. P. 202;
David F. // Mod. Phys. Lett. A. 1990. V. 5. P. 1019–1030.
110. Ambjørn J., Jurkiewicz J., Makeenko Yu. // Phys. Lett. B. 1990. V. 251. P. 517–524.
111. Mikhailov A. V., Olshanetsky M. A., Perelomov A. M. // Comm. Math. Phys. 1981. V. 79. P. 473.
112. Leznov A., Saveliev M. // Physica D. 1981. V. 3. P. 62–72.
113. Gava E., Narain K. // Phys. Lett. B. 1991. V. 293. P. 213–219.
114. Marshakov A., Mironov A., Morozov A. // Phys. Lett. B. 1992. V. 274. P. 280;
Gross D., Newman M. // Phys. Lett. B. 1991. V. 266. P. 291–297.
115. Kharchev S. et al. // Nucl. Phys. B. 1992. V. 380. P. 181–240.
116. Mironov A., Morozov A., Semenov G. // Int. J. Mod. Phys. A. 1995. V. 10. P. 2015.

117. Crncović Č., Moore G. // Phys. Lett. B. 1991. V. 257. P. 322;
Demeterfiet K. et al. // Phys. Rev. D. 1990. V. 42. P. 4105–4122;
Lechtenfeld O., Ray R., Ray A. // Int. J. Mod. Phys. A. 1991. V. 6. P. 4491–4516;
Crnković Č., Douglas M., Moore G. // Nucl. Phys. B. 1991. V. 360. P. 507.
118. Marshakov A., Mironov A., Morozov A. // Phys. Lett. B. 1991. V. 265. P. 99–107.
119. Kharchev S. et al. // Nucl. Phys. B. 1993. V. 404. P. 717–750.
120. Mironov A., Pakuliak S. // ТМФ. 1993. Т. 95. С. 317–340.
121. Kostov I. // Phys. Lett. B. 1992. V. 297. P. 74–81.
122. Fateev V., Lukyanov S. // Int. J. Mod. Phys. A. 1988. V. 3. P. 507–548.
123. Alvarez-Gaume L. et al. // Int. J. Mod. Phys. A. 1992. V. 7. P. 5337–5368.
124. Orlov A., Shulman E. // Lett. Math. Phys. 1986. V. 12. P. 171–179;
Grinevich P., Orlov A. Preprint Cornell Univ. Sept. 1989.
125. Miwa T. // Proc. Japan Acad. 1982. V. 58. P. 9–12.
126. Gato-Rivera B., Semikhatov A. // Nucl. Phys. B. 1993. V. 408. P. 133–179.
127. Ablowitz M. J. et al. // Stud. Appl. Math. 1974. V. 53. P. 249–315.
128. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989.
129. Hirota R., Ohta Y., Satsuma J. // J. Phys. Soc. Japan. 1988. V. 57. P. 1901–1904.
130. Kharchev S. et al. // Phys. Lett. B. 1992. V. 275. P. 311–314.
131. Morozov A. // Nucl. Phys. B. 1991. V. 357. P. 619–631.
132. Periwal V., Shevitz D. // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 1326; Nucl. Phys. B. 1990. V. 344. P. 731.
133. Bowick M., Morozov A., Shewitz D. // Nucl. Phys. B. 1991. V. 354. P. 496–530.
134. Segal G., Wilson G. // Publ. I. H. E. S. 1985. V. 61. P. 5–65.
135. Кричевер И. М. // ФАН. 1977. Т. 11. С. 15–31; УМН. 1977. Т. 32. С. 183–208.
136. Kharchev S., Mironov A., Zhedanov A. hep-th/9606144.
137. Kharchev S., Mironov A. // Int. J. Mod. Phys. A. 1992. V. 7. P. 4803–4824.
138. Абловитц М., Сузур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
139. Ablowitz M. J., Ladik J. E. // J. Math. Phys. 1976. V. 17. P. 1011–1018.
140. Faddeev L. D., Tahtadjian L. A. // Lecture Notes in Physics. 1986. V. 246. P. 166–179.
141. Ruijsenaars S. N. // Comm. Math. Phys. 1990. V. 133. P. 217–247.
142. Kharchev S., Mironov A., Zhedanov A. // Proc. of SIDE-II, Canterbury, 1996; Preprint FIAN/TD-18/96; ITEP/TH-53/96.
143. Hua L. K. Harmonic Analysis of Functions of Several Complex Variables in the Classical Domain. Providence, 1963.
144. Hansen P. J., Kaup D. J. // J. Phys. Soc. Japan. 1985. V. 54. P. 4126.
145. Kashiwara M., Miwa T. // Proc. Japan. Acad. A. 1981. V. 57. P. 342–347;
Date E., Kashiwara M., Miwa T. // Ibid. P. 387–392.
146. Date E. et al. // J. Phys. Soc. Japan 1981. V. 50. P. 3806–3812.
147. Date E. et al. // Physica D. 1982. V. 4. P. 343–365.

148. *Date E. et al.* // Publ. RIMS, Kyoto Univ. 1983. V. 18. P. 1111–1119; J. Phys. Soc. Japan. 1981. V. 50. P. 3813–3818.
149. *Date E. et al.* // Proc. of RIMS Symp. Nonlinear Integrable Systems — Classical Theory and Quantum Theory. Singapore, 1983. P. 39.
150. *Jimbo M., Miwa T.* // Publ. RIMS, Kyoto Univ. 1983. V. 19. P. 943–1001.
151. *Sato M.* // RIMS Kokyuroku. 1981. V. 439. P. 30–40.
152. *Kac V., Schwarz A. S.* // Phys. Lett. B. 1991. V. 257. P. 329;
Schwarz A. // Mod. Phys. Lett. A. 1991. V. 6. P. 611; *ibid.* P. 2713–2725.
153. *Date E., Jimbo M., Miwa T.* // J. Phys. Soc. Japan. 1982. V. 51. P. 4116–4124; *ibid.* P. 4125–4131.