ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2003. Т. 34. ВЫП. 3

УДК 539.12.01

УРАВНЕНИЯ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

И. В. Полубаринов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Предисловие научного редактора	738
ВВЕДЕНИЕ	740
УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ВЕКТОР-ПОТЕНЦИАЛА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ	742
КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА В КАЛИБРОВКЕ ИЗЛУЧЕНИЯ (ФОРМУЛИРОВКА ДИРАКА)	748
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА НА ЯЗЫКЕ НАПРЯЖЕННОСТЕЙ	754
КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА С ПОПЕРЕЧНОЙ КАЛИБРОВКОЙ ВЕКТОРОВ СОСТОЯНИЯ (ФОРМУЛИРОВКА ФЕРМИ)	757
ТЕОРИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ	790
Приложение 1. ПРИМЕР ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ С НЕНУЛЕВОЙ МАССОЙ	804
Приложение 2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ КАК СОВОКУПНОСТЬ ОСЦИЛЛЯТОРОВ	805
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	810

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2003. Т. 34. ВЫП. 3

УДК 539.12.01

УРАВНЕНИЯ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

И. В. Полубаринов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Настоящий обзор посвящен изложению основных формулировок квантовой электродинамики. При этом рассмотрение ограничивается только уравнениями для операторов поля и не затрагивает уравнений для векторов состояния, функций Грина и т. д. Отмечаются трудности с квантованием уравнений Максвелла и вводится разложение вектор-потенциала, которое служит основой всего дальнейшего изложения. Рассматривается наиболее старая формулировка электродинамики — электродинамика в калибровке излучения. Эта первая формулировка электродинамики была создана Дираком и усовершенствована Гейзенбергом и Паули. Обсуждаются нелокальные формулировки электродинамики в терминах напряженностей. Дан полный анализ самой удобной и наиболее распространенной формулировки электродинамики с поперечной калибровкой векторов состояния, которая обладает явной ковариантностью. Проведено сравнение всех формулировок с формулировкой в калибровке излучения.

The review is devoted to the exposition of basic formulations of quantum electrodynamics. We consider only equations for the field operators, but not equations for vectors of states and the Green functions. Difficulties with the quantization of the Maxwell equations are discussed, and the expansion of vector — potential is introduced as the basis of the following exposition. The most old formulation of electrodynamics in the radiation gauge is considered. This first formulation of electrodynamics was created by Dirac and was improved by Heisenberg and Pauli. Nonlocal formulations of electrodynamics in terms tensions are discussed. And the complete analysis of the electrodynamics with the transverse gauge of vector states is given. We compare all these formulations with the one of the radiation gauge.

Предисловие научного редактора

Уважаемые читатели! Перед вами обзор, написанный еще в 1965 г. крупным специалистом в области теории калибровочных полей — Игорем Васильевичем Полубариновым (1929–1998). Обзор был опубликован в виде препринта ОИЯИ (Р-2421. Дубна, 1965). И. В. Полубаринов в течение 1967–1969 гг. пытался расширить этот обзор, дополняя его новыми результатами по квантованию калибровочных полей. Новые результаты радикально изменили смысл и интерпретацию такого квантования. Ознакомившись с обзором, можно обнаружить, что целый ряд хорошо известных фактов и выводов КЭД интерпретировались классиками вовсе не так, как это принято в современной литературе. Кулоновское поле есть точное следствие решения одного из классических уравнений (уравнения Гаусса), а не приближения больших масс. Действие электродинамики в кулоновской калибровке есть однозначное следствие решения уравнения Гаусса в терминах калибровочно-инвариантных дираковских переменных (1927, 1955), полученных позднее Фаддеевым и Джакивом (1988), а не результат выбора одной из многих калибровок. Протон и электрон в релятивистски движущемся атоме образуют этот атом благодаря кулоновскому полю, преобразованному в соответствующую лоренцевскую систему отсчета, а не в результате взаимодействия, описываемого дополнительно учтенными диаграммами Фейнмана.

Для лучшего понимания обзора И. В. Полубаринова полезно пояснить используемые Игорем Васильевичем понятия: *неявная релятивистская ковариантность*, зависящая от параметров *системы отсчета*, и *кулоновская калибровка* как следствие решения одного из классических уравнений, называемого уравнением *связи*. Чтобы пояснить эти понятия, напомним, что задачи теоретической физики сводятся к решению дифференциальных уравнений с начальными данными, измеряемыми набором физических приборов, которые Коперник и Галилей, а за ними все физики, включая Эйнштейна, отождествляли с *системой отсчета*. Группы преобразований дифференциальных уравнений калибровочной теории разделяются на два типа: C-преобразования, которые меняют начальные данные, т. е. *систему отсчета*; и K-преобразования, которые не меняют начальных данных и ассоциируются с *калибровкой* физических приборов. В каждой конкретной *системе отсчета* набор всех дифференциальных уравнений разделяется на *уравнения движения*, для решения которых требуется измерение начальных данных, и на *уравнения связи*, которые связывают начальные данные.

Нахождение C-ковариантных и K-инвариантных решений дифференциальных уравнений и C-ковариантное и K-инвариантное квантование калибровочных полей были генеральной линией развития теоретической физики, начиная с работ Дирака и кончая работами Швингера в 60-х годах, который называет это квантование *фундаментальным*. Стратегия этого *фундаментального квантования*, излагаемая в обзоре Игоря Васильевича, была следующей.

1) Использовать *уравнения связи* и калибровочную инвариантность, чтобы убрать лишние степени свободы и построить K-инвариантные нелокальные переменные (см. формулы (37), (38)), которые в обзоре Полубаринова называются *кулоновской калибровкой*, или *калибровкой излучения*.

2) Доказать C-ковариантность на уровне алгебры генераторов группы Пуанкаре для K-инвариантных наблюдаемых. Зависимость K-инвариантных наблюдаемых от параметров системы отсчета, в частности, от оси времени, называется *неявной релятивистской инвариантностью*.

3) Построить C-ковариантную S-матрицу в терминах K-инвариантных наблюдаемых.

Однако основным методом квантования в теориях калибровочных полей к концу 60-х стало другое, *эвристическое квантование*, предложенное Фейнманом. Вычисляя радиационные поправки к рассеянию, Фейнман обратил внимание, что амплитуды рассеяния элементарных частиц в теории возмущения не зависят от системы отсчета и выбора калибровки (Phys. Rev. 1949. V. 76. P. 769). Используя этот факт, можно даже изменить сам лагранжиан электродинамики, превратив ее в теорию без связей. Независимость от системы отсчета (C-инвариантность) стали называть просто *релятивистской инвариантностью*, а *выбор калибровки* превратился в формальную процедуру выбора калибровочно-неинвариантных полевых переменных. Такая незаметная подмена смысла понятий в методе K-ковариантного и C-инвариантного *эвристического квантования*, казалось бы, полностью обесценила цели и задачи C-ковариантного и K-инвариантного *фундаментального квантования*. Зачем доказывать «релятивистскую ковариантность на уровне алгебры генераторов группы Пуанкаре для K-инвариантных наблюдаемых», если результат вычисления амплитуды рассеяния C-инвариантен, т. е. не зависит от системы отсчета? И зачем нужны K-инвариантные наблюдаемые, если можно использовать любые переменные, в том числе для решения проблем построения унитарной теории возмущения и доказательства перенормируемости стандартной модели? Формулировка и решение этих актуальных проблем, выполненные в рамках *эвристического квантования*, привели к тому, что это квантование стало фактически единственным методом, с которым связывают решения всех проблем современной теории поля. Однако при этом забывают, что область применимости *эвристического квантования* есть только задачи рассеяния элементарных частиц, где это квантование и возникло. Для физики связанных состояний, адронизации и конфайнмента, для описания квантовой вселенной, как предсказывал Швингер, более адекватно *фундаментальное квантование*, которому и посвящен обзор И. В. Полубаринова.

Надеюсь, что знакомство с этим обзором, где дано исчерпывающее изложение пионерских работ Дирака по квантованию электромагнитных полей и работ по релятивистскому обобщению этого квантования, давно ставших библиографической редкостью, поможет лучше освоить методы классиков и применить их для решения актуальных проблем современной физики.

Рукопись подготовлена к печати А. А. Гусевым.

В. Н. Первушин

ВВЕДЕНИЕ

Успех квантовой электродинамики в объяснении широкого круга физических явлений сделал ее важнейшим завоеванием релятивистской квантовой теории. Она была создана раньше других квантовых полевых теорий и служила для них прообразом. Однако и сама квантовая электродинамика со времени своего возникновения претерпела значительные изменения. Создание теории перенормировок существенно расширило область ее применений.

Наряду с этим совершенствовалась формулировка ее основных уравнений, хотя, разумеется, здесь прогресс был менее заметен. Равенство нулю массы покоя фотона с самого начала вызвало определенные трудности при квантовании электромагнитного поля. Выработка удобного и явно ковариантного формализма продолжалась вплоть до недавнего времени.

Настоящий обзор посвящен изложению основных формулировок квантовой электродинамики. При этом рассмотрение ограничивается только уравнениями для операторов поля и не затрагивает уравнений для векторов состояния, функций Грина и т. д. В разд. 1 отмечаются трудности с квантованием уравнений Максвелла и вводится разложение вектор-потенциала, которое служит основой всего дальнейшего изложения. В разд. 2 рассматривается наиболее старая формулировка электродинамики — электродинамика в калибровке излучения. Эта первая формулировка электродинамики была создана Дираком [1] и усовершенствована Гейзенбергом и Паули [2]. Она не утратила своего значения и в настоящее время, но несколько неудобна из-за отсутствия явной ковариантности уравнений. В разд. 3 обсуждаются формулировки электродинамики в терминах напряженностей. В таких формулировках нет трудностей с выбором перестановочных соотношений, однако они также неудобны, так как имеют нелокальный вид. Раздел 4 посвящен электродинамике с поперечной калибровкой векторов состояния, которая обладает явной ковариантностью и потому используется наиболее широко. Она была создана в 1932 г. Ферми [3], который преодолел трудность с трактовкой условия Лоренца в операторном смысле путем наложения этого условия на векторы состояния. Формулировка Ферми неоднократно подвергалась критике и пересмотру. Так, в 1949–1950 гг. обнаружилось, что дополнительное условие Ферми противоречиво [4–6]. После этого в 1950 г. Гупта [7] (см. также [8]) придал дополнительному условию корректную форму, и, что очень существенно, выяснил, что формулировка Ферми с необходимостью ведет к неопределенной метрике в гильбертовом пространстве состояний. Однако и этот формализм подвергся критике с 1958 г., когда Сунакава [9] указал, что он нековариантен*. Формализм Гупты был усовершенствован и вместе с тем упрощен (см. [10, 11] и [12]), и теперь электродинамика с поперечной калибровкой векторов состояния приняла законченную форму. Пункты 1–6 и 10 разд. 4 представляют полный анализ этой самой удобной и наиболее распространенной формулировки. В частности, в п. 4.5 получен простой рецепт построения в компактной форме состояний, удовлетворяющих условию Лоренца–Ферми–Гупты в представлении взаимодействия, а в п. 4.6 изучено влияния этого условия на матричные элементы S-матрицы. Одновременно проведено сравнение данной формулировки с формулировкой в калибровке излучения. Эквивалентный анализ уравнений в гейзенберговском представлении дан в пп. 4.2 и 4.3.

Средством, позволяющим связать различные формулировки и понять все характерные свойства электродинамики, служит специальный 4-мерный базис в p-пространстве, который вводится в п. 1.2. Он дает геометрическое представление хорошо известному разложению 4-вектор-потенциала на поперечные, продольную и временную (скалярную) части.

---

*На самом деле, как показано в п. 4.6, старый формализм Гупты ковариантен, но только его ковариантность не является явной точно так же, как в случае калибровки излучения (разд. 2).

В разд. 5 затронуты некоторые вопросы теории преобразований в гильбертовом пространстве. В приложении 1 проведено сопоставление с теорией массивного векторного поля, а в приложении 2 изложен старый формализм Дирака, в котором электромагнитное поле сводится к набору осцилляторов.

Данный обзор, естественно, не является полным. Например, не обсуждаются электродинамика в β-формализме [13] и спинорная формулировка электродинамики (см. [14]). Однако обзор может быть полезен и для понимания этих формулировок. Обсуждаемые в обзоре вопросы так или иначе затрагивались не только в журнальных статьях, но и в монографиях [15–22]. Мы старались изложить их более полно, с единой точки зрения.

1. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ВЕКТОР-ПОТЕНЦИАЛА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

1.1. Трудности с квантованием вектор-потенциала. Электромагнитное поле мы будем описывать при помощи вектор-потенциала A_μ, а электронно-позитронное поле — при помощи дираковского спинора ψ. Тогда исходный лагранжиан теории Максвелла можно записать в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\ F_{\mu\nu} + j_\mu A_\mu - \bar{\psi}(\gamma\partial + M)\psi \quad (\gamma\partial = \gamma_\mu\partial_\mu), \tag{1}$$

где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{2}$$

$$j_\mu = \imath\bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \tag{3}$$

а e — заряд электрона. Из лагранжиана (1) следуют уравнения

$$\partial_\lambda\ F_{\lambda\nu} = -j_\nu, \tag{4}$$

$$(\gamma\partial + M)\psi\ = -\imath e\gamma_\mu\psi A_\mu. \tag{5}$$

Лагранжиан (1) и уравнения (4) и (5) обладают калибровочной инвариантностью, т. е. инвариантны относительно преобразований

$$A_\mu^\Lambda = A_\mu + \partial_\mu\Lambda, \quad \psi \Rightarrow \psi^\Lambda = \exp\left[\imath e\Lambda\right]\psi \tag{6}$$

с совершенно произвольными функциями $\Lambda(x)$. Такая инвариантность есть средство при нулевой массе векторного поля A_μ исключить спин 0 и позволить взаимодействовать только спину 1 (см. анализ этого вопроса в [23]). Обычная процедура канонического квантования [2]* состоит в выражении переменных поля на языке сопряженных координат q и импульсов p, на которые

*См. также [17]. Другие способы квантования см. в [16, 18, 24–26].

накладываются перестановочные соотношения

$$[q, q'] = 0, \quad [p, p'] = 0, \quad [q, p] = \imath l. \tag{7}$$

Если в лагранжиане (1) в качестве координат электромагнитного поля принять $A_{mu}(x)$, то им будут канонически сопряжены импульсы

$$\Pi_\mu = -\frac{\delta L(x)}{\delta \partial_4 A_\mu} = F_{4\mu}. \tag{8}$$

Непосредственное квантование согласно (7), т. е. постулирование одновременных ($x_0 = y_0$) перестановочных соотношений

$$\begin{gathered} [A_\mu(x),\ A_\nu(y)] = 0, \quad [F_{4\mu}(x),\ F_{4\nu}(y)] = 0, \\ [A_\mu(x),\ F_{4\nu}(y)] = \delta_{\mu\nu}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \end{gathered} \tag{9}$$

$$[A_\mu(x),\ \psi(y)] = 0, \quad [F_{\mu\nu}(x),\ \psi(y)] = 0, \tag{10}$$

$$[\psi(x),\ \psi(y)] = 0, \quad [\psi(x),\ \bar{\psi}(y)] = \gamma_4\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \tag{11}$$

невозможно $[2, 27]$, поскольку

$$\Pi_4 = F_{44} = 0. \tag{12}$$

В то же время среди уравнений (4) нет такого уравнения, которое позволило бы прямо выразить A_4 через другие координаты и импульсы*, как, например, в случае векторного поля A_μ с ненулевой массой** (см. [17], а также приложение 1). Таким образом, если исходить из уравнений Максвелла для вектор-потенциала, то не удается найти одновременные перестановочные соотношения для всех четырех компонент вектор-потенциала A_μ $[2, 27]$ (что связано с калибровочным произволом A_μ). Поэтому необходима та или иная модификация исходных уравнений.

1.2. Разложение вектор-потенциала. В дальнейшем важную роль будет играть разбиение вектор-потенциала на составляющие с более прямым физическим смыслом, чем компоненты A_μ, относящиеся к совершенно произвольному базису. Перейдем в p-пространство:

$$\tilde{A}_\mu(p) = \int d^4x\, \mathrm{e}^{-\imath px} A_\mu(x). \tag{13}$$

---

*На самом деле, A_4 исключить можно, если допустить нелокальные операции. Этот путь ведет к формулировке в калибровке излучения, которая будет обсуждаться в следующем разделе.

**То есть когда в лагранжиан (1) добавлен член $-(1/2)m^2 A_\mu A_\mu$.

Физический смысл имеют неизотропные составляющие $\tilde{A}_\mu(p)$, ортогональные к вектору p_μ:

$$p_\mu \tilde{A}_\mu(p) = 0. \tag{14}$$

Именно неизотропные векторы $\tilde{A}_\mu(p)$, удовлетворяющие условию (14), описывают состояния поляризации, отвечающие спину 1 и при времениподобном импульсе, и при изотропном. Анализируя (14), целесообразно ввести базис, одним из ортов которого был бы импульс p_μ. При этом нужно охватить случай изотропного вектора p, так как именно такой импульс соответствует излучаемым фотонам. Однако ситуация с изотропным вектором p_μ не совсем привычная.

Для любого (времениподобного, пространственноподобного или изотропного) лоренцевского вектора p_μ всегда можно построить два ортогональных к нему и между собой пространственноподобных вектора $e_\mu^{(1)}$ и $e_\mu^{(2)}$*:

$$pe^{(i)} = 0, \quad e^{(i)}e^{(j)} = \delta_{ij}. \tag{15}$$

Далее, полезно отметить, что

а) третий ортогональный к p_μ, $e_\mu^{(1)}$, $e_\mu^{(2)}$ вектор** e_μ будет пространственноподобным, если p_μ — времениподобный;

времениподобным, если p_μ — пространственноподобный;

изотропным и коллинеарным p_μ, если p_μ — изотропный.

б) Всякий вектор v_μ, ортогональный к изотропному вектору p_μ, линейно выражается через сам этот вектор p_μ и два неизотропных (пространственноподобных) вектора, ортогональных ему*** ($e_\mu^{(1)}$ и $e_\mu^{(2)}$):

$$v_\mu = ae_\mu^{(1)} + be_\mu^{(2)} + cp_\mu. \tag{16}$$

Коэффициент c не может быть фиксированным и остается совершенно произвольным [29].

Пространство векторов v_μ — поверхность, касательная к световому конусу [29]. Трехмерная модель пространства таких векторов $\mathbf{v} = a\mathbf{e} + c\mathbf{p}$ изображена на рисунке. Когда импульс пробегает все значения на световом конусе, гиперплоскость ортогональная к нему, выметает подпространство, содержащее все пространственноподобные и изотропные векторы (т. е. все пространство вне конуса и сам конус). Внутренняя часть конуса, содержащая все времениподобные векторы, остается совершенно не затронутой.

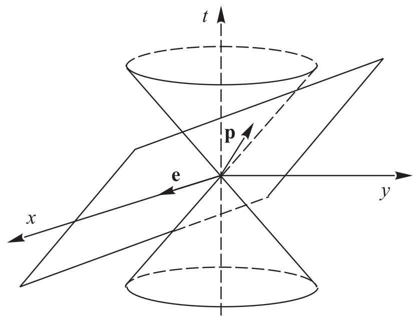
---

*Так как всякий пространственноподобный, времениподобный или изотропный вектор можно преобразовать к виду $(0, 0, p_3, p_4)$.

**Этот четвертый вектор можно построить в виде $e_\mu^{(3)} = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} e_\nu^{(1)} e_\lambda^{(2)} p_\rho$, причем можно доказать, что когда вектор p_μ изотропен, то так построенный вектор $e_\mu^{(3)} = -p_\mu$.

***Это утверждение — частный случай теоремы, приведенной у Эйзенхарта [28].

в) Нет ни одного времениподобного вектора, ортогонального к изотропному, а любой вектор v_μ (16) либо пространственноподобный, либо изотропный (последнее только при $a = b = 0$).



Итак, хотя любой вектор p_μ можно дополнить тройкой ортогональных к нему и между собой векторов, но они вместе составят ортогональный базис 4-мерного пространства только тогда, когда p_μ неизотропен. При неизотропном p_μ мы, очевидно, можем записать условие полноты базиса в виде

$$\sum_{i=0}^{3} e_\mu^{(i)} e_\nu^{(i)} + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} = \delta_{\mu\nu}. \tag{17}$$

Однако, если p_μ изотропен, то в упомянутую тройку входит он сам. Поэтому базис, содержащий изотропный вектор, не может быть ортогональным. Удобный неортогональный базис, пригодный не только при изотропном, но также при времениподобном или пространственноподобном векторе p_μ, получается, если дополнить $e_\mu^{(1)}$, $e_\mu^{(2)}$ и p_μ каким-либо независимым времениподобным вектором n_μ со свойствами

$$ne^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2), \quad n^2 = -1. \tag{18}$$

Соотношение полноты для такой четверки векторов имеет вид*

$$\sum_{i=0}^{3} e_\mu^{(i)} e_\nu^{(i)} + \frac{[p_\mu + (np)n_\mu][p_\nu + (np)n_\nu]}{p^2 + (np)^2} - n_\mu n_\nu = \delta_{\mu\nu}. \tag{19}$$

С помощью этого соотношения сразу же получается нужное нам разложение вектор-потенциала

$$\tilde{A}_\mu = \sum_{i=0}^{3} e_\mu^{(i)} (e^{(i)} \tilde{A}) + \frac{[p_\mu + (np)n_\mu][(p\tilde{A}) + (np)(n\tilde{A})]}{p^2 + (np)^2} - n_\mu (n\tilde{A}). \tag{20}$$

*Его можно вывести прямо или же, следуя Мишелю [30], прибегнуть к ортогонализации, в результате чего получим 4 взаимно ортогональных вектора $e_\mu^{(1)}$, $e_\mu^{(2)}$, n_μ и $p_\mu + (np)n_\mu$. В терминах таких векторов соотношение полноты (10), как мы видим, выглядит точно так же, как соотношение полноты (17).

Если ввести составляющую

$$\tilde{A}_\mu^r = \sum_{i=0}^{3} e_\mu^{(i)}(e^{(i)}\tilde{A}), \tag{21}$$

то можно записать разложение вектор-потенциала в виде

$$\tilde{A}_\mu = \tilde{A}_\mu^r + \frac{[p_\mu + (np)n_\mu][(p\tilde{A}) + (np)(n\tilde{A})]}{p^2 + (np)^2} - n_\mu(n\tilde{A}), \tag{22}$$

или в x-представлении

$$A_\mu = A_\mu^r + \frac{[\partial_\mu + n_\mu(n\partial)][(pA) + (np)(nA)]}{\Box + (n\partial)^2} - n_\mu(n\ A). \tag{23}$$

Такое разложение вектор-потенциала использовалось в литературе многими [6, 31–33]*. Для A_μ^r характерны свойства

$$\partial_\mu A_\mu^r = 0, \quad n_\mu A_\mu^r = 0. \tag{24}$$

При частном выборе вектора n_μ в виде $n_\mu = [0, 0, 0, \imath]$ соотношения (23) и (24) примут вид

$$A_\mu = A_\mu^r + \delta_{\mu m}\Delta^{-1}\partial_m\partial_n A_n + \delta_{\mu 4}A_4 = 0, \tag{25}$$

$$\partial_k A_k^r = 0, \quad A_4^r = 0, \tag{26}$$

где латинские индексы пробегают только значения 1, 2, 3; $\Delta = \partial_k\partial_k$ — оператор Лапласа. Величины A_n^r, $\partial_n A_n$ и A_4 часто называют поперечной, продольной (в трехмерном смысле) и временной (скалярной**) составляющими A_μ.

Приведем пример применения соотношений полноты (17) и (19). Пусть имеется нейтральное векторное поле $A_\mu(x)$, подчиняющееся уравнению Клейна–Гордона

$$(\Box - m^2)A_\mu = 0.$$

---

*Переход к формуле (23) подразумевает, что при всех значениях p_μ используется один и тот же вектор n_μ и что вектор n_μ не зависит от точки x_μ. В связи с бесконечно-временным формализмом Томонага [34] рассматривали также и векторы, зависящие от точки [31]. Такое обобщение нетрудно произвести, но мы будем рассматривать только постоянные векторы n_μ.

**Мы применяем ниже термин «временная» составляющая [21] вместо более распространенного термина «скалярная» составляющая (в трехмерном смысле), резервируя название «скалярная» составляющая и скалярные фотоны для величины $\partial_\mu A_\mu$ (четырехмерного скаляра) и соответствующих ей скалярных квантов.

Решение уравнения Клейна–Гордона может быть представлено в виде

$$A_\mu = \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}} \{a_\mu(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{\imath px} + a_\mu^*(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{-\imath px}\},$$

где $p^2 = -m^2$, $a_\mu^* = \{a_1^*, a_2^*, a_3^*, \imath a_0^*\}$, а сохраняющийся 4-импульс поля $A_\mu(x)$, отвечающий этому уравнению, записывается как

$$P_\rho = -\imath \int T_{4\rho} d\mathbf{x} = \int d\mathbf{p} p_\rho a_\mu^*(\mathbf{p}) a_\mu(\mathbf{p}).$$

Наложим теперь на $A_\mu(x)$ условие Лоренца

$$\partial_\mu A_\mu(x) = 0,$$

в соответствии с которым

$$p_\mu a_\mu(\mathbf{p}) = 0, \quad p_\mu a_\mu^*(\mathbf{p}) = 0.$$

Используя соотношения полноты (17) и (19) и принимая во внимание эти дополнительные условия, находим, соответственно,

$$P_\rho = \int d\mathbf{p} p_\rho \left\{ \sum_{i=1}^{3} (e^{(i)} a)(e^{(i)} a^*) - \frac{1}{m^2} (pa)(pa^*) \right\} = \\ = \int d\mathbf{p} p_\rho \left\{ \sum_{i=1}^{3} (e^{(i)} a)(e^{(i)} a^*) \right\},$$

$$P_\rho = \int d\mathbf{p} p_\rho \Bigg\{ \sum_{i=1}^{2} (e^{(i)} a)(e^{(i)} a^*) + \\ + \frac{[pa + (np)(na)][(pa^*) + (np)(na^*)]}{-m^2 + (np)^2} - (na)(na^*) \Bigg\} = \\ = \int d\mathbf{p} p_\rho \left\{ \sum_{i=1}^{2} (e^{(i)} a)(e^{(i)} a^*) + \frac{m^2}{-m^2 + (np)^2} (na)(na^*) \right\}.$$

Оба выражения показывают, что энергия есть сумма вкладов от трех степеней свободы, а не от четырех, как в отсутствие условия Лоренца.

В случае $m = 0$ соотношение полноты в форме (17) неприменимо, а соотношение полноты в форме (19) дает

$$P_\rho = \int d\mathbf{p} p_\rho \left\{ \sum_{i=1}^{2} (e^{(i)} a)(e^{(i)} a^*) \right\},$$

т. е. энергия оказывается суммой вкладов всего от двух степеней свободы. К такому же выводу можно прийти и относительно момента количества движения. Этим иллюстрируется тот факт, что безмассовое векторное поле, подчиняющееся условию Лоренца, описывает только две степени свободы, два спиновых состояния.

2. КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА В КАЛИБРОВКЕ ИЗЛУЧЕНИЯ (ФОРМУЛИРОВКА ДИРАКА)

Первой формулировкой квантовой электродинамики мы обязаны Дираку [1]. Первоначальная трактовка Дираком поля излучения как совокупности квантовых осцилляторов (см. приложение 2) была усовершенствована Гейзенбергом и Паули [2] и сформулирована в терминах компонент поля. В формулировке Ферми [3] квантовалось лишь поперечное (в трехмерном смысле) поле излучения A^r_m, остававшееся после выделения кулоновского взаимодействия. Поэтому теперь эту формулировку называют формулировкой электродинамики в калибровке излучения, или в кулоновской калибровке.

Недостатками электродинамики в калибровке излучения являются:

1) раздельное рассмотрение поперечного и продольного полей в отличие от теории Максвелла, где они рассматриваются как единое целое;

2) присутствие мгновенного кулоновского взаимодействия, тогда как в теории Максвелла скорость распространения электромагнитного возбуждения конечна и равна c;

3) нековариантная запись основных уравнений. На самом деле, теория ковариантна, но неявно. В частности, исходя из ее «нековариантных» уравнений, можно получать ковариантную S-матрицу Фейнмана–Дайсона.

Однако у этой формулировки есть важное преимущество — положительная определенность метрики гильбертова пространства состояний, тогда как в более распространенной и удобной формулировке с поперечной калибровкой векторов состояния (разд. 4) приходится иметь дело с неопределенной метрикой.

Перейдем к получению основных уравнений в калибровке излучения.

2.1. Исключение 3-продольной и временной составляющих в теории Максвелла. Из уравнений Максвелла можно исключить все составляющие, кроме A^r_μ. Для простоты сперва выберем вектор n_μ в виде $n_\mu = [0, 0, 0, \imath]$ и используем соотношения (25) и (26).

Рассмотрим раздельно взаимодействие с трехмерно-продольной и трехмерно-поперечной частями тока. Для этого свернем уравнение (4) один раз с оператором $\delta_{kn} - \dfrac{\partial_k \partial_n}{\triangle}$, а второй — с ∂_n и выпишем отдельно уравнение (4).

$$\left(\delta_{kn} - \frac{\partial_k \partial_n}{\triangle}\right) \partial_\mu \; F_{\mu n} = -\left(\delta_{kn} - \frac{\partial_k \partial_n}{\triangle}\right) j_n, \tag{27}$$

$$\partial_n \partial_\lambda F_{\lambda n} = -\partial_n j_n, \tag{28}$$

$$\partial_\lambda F_{\lambda 4} = -j_4. \tag{29}$$

Во-первых, заметим, что уравнения (27) и (28) вместе эквивалентны уравнениям (4). Чтобы убедиться в этом, следует умножить (28) на $\partial_k/\triangle$ и сложить с (27). Во-вторых, на том основании, что

$$\partial_n \partial_\lambda F_{\lambda n} = \partial_n \partial_m F_{mn} + \partial_n \partial_4 F_{4n} = -\partial_4 \partial_\lambda F_{\lambda 4}, \tag{30}$$

заключаем, что уравнение (28) с учетом закона сохранения тока

$$\partial_\mu j_\mu = 0 \tag{31}$$

является следствием уравнения (29) и из рассмотрения может быть исключено. Оставшиеся уравнения (27) и (29) записываются через вектор-потенциал следующим образом:

$$\Box \left(\delta_{kn} - \frac{\partial_k \partial_n}{\triangle}\right) \partial_\mu A_n = -\left(\delta_{kn} - \frac{\partial_k \partial_n}{\triangle}\right) j_n, \tag{32}$$

$$\triangle A_4 - \partial_4 \partial_k A_k = -j_4. \tag{33}$$

Вместе они эквивалентны уравнениям (4). Из поперечной $\left(\delta_{kn} - \dfrac{\partial_k \partial_n}{\triangle}\right)$, продольной $\partial_k A_k$ и временной A_4 составляющих электромагнитного поля последние две не могут быть заданы независимо* в начальный момент времени t_0 (т. е. нельзя независимо задать ($A_k(\mathbf{x}, t)$, $A_4(\mathbf{x}, t)$, $\partial_k A_k(\mathbf{x}, t)$ и $\partial_4 A_k(\mathbf{x}, t)$), как это видно из уравнения (33), носящего характер дополнительного условия. Однако из уравнения (33) можно нелокальным образом выразить $A_4(\mathbf{x}, t)$:

$$A_4 = \triangle^{-1}(\partial_4 \partial_k A_k - j_4). \tag{34}$$

Теперь с помощью (34) можно исключить компоненту $A_4(\mathbf{x}, t)$ из других уравнений и тем самым уменьшить число независимых переменных. После этого остаются уравнения

$$\Box \left(\delta_{kn} - \frac{\partial_k \partial_n}{\triangle}\right) \partial_\mu A_n = -\left(\delta_{kn} - \frac{\partial_k \partial_n}{\triangle}\right) j_n, \tag{35}$$

*При независимом задании $\psi(\mathbf{x}, t)$.

$$(\gamma\partial + M)\psi \ = \imath e\gamma_n\psi A_n + \imath e\gamma_4\psi\triangle^{-1}(\partial_4\partial_k A_k - j_4), \tag{36}$$

эквивалентные исходным уравнениям (4), (5).

Наконец, после преобразования

$$\psi \ = \exp{(\imath e\triangle^{-1}\partial_k A_k)}\psi^r, \tag{37}$$

исключающего из уравнения Дирака продольную составляющую, в уравнениях движения остается только поперечное поле

$$A_k^r = \left(\delta_{kn} - \frac{\partial_k\partial_n}{\triangle}\right)A_n. \tag{38}$$

2.2. Основные уравнения в калибровке излучения. Основные уравнения в калибровке излучения, таким образом, имеют вид

$$\Box\partial_\mu A_n^r = -\left(\delta_{kn} - \frac{\partial_k\partial_n}{\triangle}\right)j_n, \tag{39}$$

$$(\gamma\partial + M)\psi^r = \imath e\gamma_n\psi A_n^r - \imath e\gamma_4\{\psi, \triangle^{-1}j_4\}. \tag{40}$$

Последний член в (40) — кулоновское взаимодействие, оставшееся после исключения временной и продольной компонент*.

К уравнениям (39) и (40) нужно добавить как определение A_k^r дополнительное условие

$$\partial_n A_n^r = 0. \tag{41}$$

Уравнения (39), (40) можно получить из вариационного принципа, подобрав соответствующий лагранжиан

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_k^r\partial_\mu A_k^r + A_k^r j_k^r - \frac{1}{2}j_4^r\triangle^{-1}j_4^r - \bar{\psi}^r(\gamma\partial + M)\psi^r.$$

Дополнительное условие (41) должно учитываться отдельно. В частности, для получения уравнений (38), (41) нужно искать условный экстремум действия $W = \int d^4x\mathcal{L}(x)$. Для этого в соответствии с методом множителей Лагранжа добавим к лагранжевой плотности $\mathcal{L}(x)$ член $\lambda\partial_n A_n^r$, где $\lambda(x)$ — вспомогательное поле, и будем искать безусловный минимум выражения $W' = \int d^4x(\mathcal{L}(x) + \lambda\partial_n A_n^r)$. Варьирование полей A^r и λ дает уравнения

$$\Box A_m^r = -j_m^r - \partial_m\lambda; \quad \partial_m A_m^r = 0.$$

---

*Антикоммутатор в (40) приобретает правильный смысл после квантования.

Действуя на первое уравнение оператором $\left(\delta_{kn} - \dfrac{\partial_k \partial_n}{\triangle}\right)$, исключаем вспомогательное поле $\lambda(x)$ и получаем уравнения (39) и (41). Уравнение для поля $\psi^r(x)$ находится обычным путем.

До сих пор все уравнения понимались как неквантованные. Исходя из этой лагранжевой плотности, с помощью процедуры канонического квантования получаем одновременные $(x_0 = y_0)$ перестановочные соотношения

$$\begin{gathered}[A^r_m(x),\ A^r_n(y)] = 0, \quad [A^r_m(x),\ \partial_4 A_n(y)] = \left(\delta_{kn} - \frac{\partial_k \partial_n}{\triangle}\right)\delta_{\mu\nu}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}),\\ \{\psi^r(x),\ \psi^r(y)\} = 0, \quad \{\psi^r(x),\ \bar\psi^r(y)\} = \gamma_4 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}),\\ [A^r_{mu}(x),\ \psi^r(y)] = 0, \quad [\partial_4 A_n(x),\ \psi^r(y)] = 0.\end{gathered} \tag{42}$$

Уравнения (39), (40) и перестановочные соотношения (42) и составляют формулировку квантовой электродинамики в калибровке излучения.

Отметим, что в отсутствие взаимодействия $(e = 0)$ перестановочные соотношения (42) следующим образом распространяются на любые времена x_0 и y_0:

$$\begin{gathered}\{\psi^r(x),\ \bar\psi^r(y)\} = \imath(-\gamma\partial + M)\triangle_M(x - y),\\ [A^r_m(x),\ A^r_n(y)] = \left(\delta_{mn} - \frac{\partial_m \partial_n}{\triangle}\right)\triangle_0(x - y),\end{gathered} \tag{43}$$

где

$$\triangle_M(x - y) = \int d^4p\, \mathrm{e}^{(\imath px)}\delta(p^2 + M^2\epsilon(p_0)). \tag{44}$$

Соотношения, стоящие в последней строке (42), остаются без изменения.

2.3. «Ковариантная» запись уравнений в калибровке излучения. Уравнения (39)–(41) можно, используя произвольный положительный времениподобный вектор, записать формально ковариантно [31–33]:

$$\Box\partial_\mu A^r_n = -j^r_\mu - \frac{n_\mu \Box + (n\partial)\partial_\mu}{\Box + (n\partial)^2} n_\nu j^r_\nu, \tag{45}$$

$$(\gamma\partial + M)\psi^r \ = e\gamma_\mu \psi A^r_\mu + \imath e n_\mu \gamma_\mu \left\{\psi^r, \frac{1}{\Box + (n\partial)^2} n_\nu j^r_\nu\right\}, \tag{46}$$

$$\partial_\mu A^r_\mu = 0, \quad n_\mu A^r_\mu = 0. \tag{47}$$

Вывод этой более общей формы уравнений будет просто повторением того, что делалось в предыдущем пункте. Будем исходить из общего разложения (23) и свернем уравнения (4) с

$$\delta_{\mu\nu} - \frac{[\partial_\mu + n_\mu(n\partial)][\partial_\nu + n_\nu(n\partial)]}{\Box + (n\partial)^2} + n_\mu, \quad \partial_\nu + n_\nu(n\partial), \quad n_\nu.$$

Тогда вместо (27)–(29) получим

$$\Box\partial_\mu A_n^r = -j_\mu^r - \frac{n_\mu\Box + (n\partial)\partial_\mu}{\Box + (n\partial)^2} n_\nu j_\nu^r, \tag{48}$$

$$(n\partial)(\partial_\lambda F_{\lambda\nu} n_\nu) = -[\partial_\nu j_\nu + (n\partial)(nj)], \tag{49}$$

$$\partial_\lambda F_{\lambda\nu} n_\nu = -nj, \tag{50}$$

где уравнение (49) с учетом закона сохранения тока есть следствие уравнения (50). Уравнение (50) можно записать в форме

$$[\Box + (n\partial)^2](nA) = (n\partial)[(\partial A) + (n\partial)(nA)] - nj, \tag{51}$$

которая позволяет выразить (нелокально) временную составляющую (nA) через продольную $[(\partial A) + (n\partial)(nA)]$ и (nj):

$$(nA) = [\Box + (n\partial)^2]^{-1}\{(n\partial)[(\partial A) + (n\partial)(nA)] - nj\}. \tag{52}$$

Если исключить с помощью (52) из уравнения Дирака (5), то затем с помощью калибровочного преобразования

$$\psi^r = \exp\left[ie\frac{\partial_\mu + n_\mu(n\partial)}{\Box + (n\partial)^2} A_\mu\right]\psi \tag{53}$$

(обобщение (37)) исключается и продольная составляющая. В результате такого перехода к калибровке излучения уравнения движения и принимают «ковариантный» вид (45)–(47). Перестановочные соотношения также нетрудно записать «ковариантно».

2.4. Лоренц-инвариантность. Система уравнений (45)–(47) лоренц-инвариантна, несмотря на то, что в уравнения входит посторонний вектор (n_μ). Лоренц-инвариантность гарантируется возможностью взять в качестве (n_μ) любой времениподобный вектор* и, если понадобится, от данного вектора (n_μ) перейти к любому другому времениподобному вектору (n'_μ). Установим связь между соответствующими (A_μ) и (A'_μ).

---

*В качестве такого вектора можно выбрать вектор нормали к пространственноподобной поверхности [31], на которой задаются начальные данные. Другой выбор — 4-импульс той или иной начальной или конечной частицы [33].

Сперва с помощью (52) исключим из (23), как и всюду, nA:

$$A_\mu^r = A_\mu - [\Box + (n\partial)^2]^{-1}\{\partial_\mu[(\partial A) + (n\partial)(nA)] + n_\mu(nj)\}. \tag{54}$$

Входящая сюда продольная составляющая $[(\partial A)+(n\partial)(nA)]$ не определяется уравнениями Максвелла (для нее у нас не получилось никакого уравнения движения), так что мы можем ее выбирать как угодно. Результат действия на нее оператора Даламбера можно с помощью (51) записать как

$$\Box[(\partial A) + (n\partial)(nA)] = [\Box + (n\partial)^2](\partial A)\{\partial_\mu - (n\partial)(nj)\}, \tag{55}$$

и, следовательно, продольную часть можно представить в виде

$$\begin{aligned}(\partial A) + (n\partial)(nA) = [(\partial A) + (n\partial)(nA)]_0 +& \\ + \Box^{-1}\{[\Box + (n\partial)^2](\partial A) - (n\partial)(nj)\},&\end{aligned} \tag{56}$$

где $[(\partial A) + (n\partial)(nA)]_0$ — та часть продольной составляющей, которая является решением однородного уравнения Даламбера

$$\Box[(\partial A) + (n\partial)(nA)]_0 = 0. \tag{57}$$

После подстановки (56) выражение (54) для A_μ^r принимает вид

$$\begin{aligned}A_\mu^r = A_\mu - [\Box + (n\partial)^2]^{-1}\{\partial_\mu[(\partial A) + (n\partial)(nA)]_0 +& \\ + [n_\mu - \Box^{-1}\partial_\mu(n\partial)](nj)\} - \Box^{-1}\partial_\mu(\partial A).&\end{aligned} \tag{58}$$

Отсюда получаем искомую связь между составляющими A_μ^r и $A_\mu'^r$, соответствующими n_μ и n'_μ:

$$\begin{aligned}A_\mu'^r = A_\mu + [\Box + (n\partial)^2]^{-1}\{\partial_\mu[(\partial A) + (n\partial)(nA)]_0 +& \\ + [n_\mu - \Box^{-1}\partial_\mu(n\partial)](nj)\} - [\Box + (n'\partial)^2]^{-1} \times& \\ \times \{\partial_\mu[(\partial A) + (n'\partial)(nA)]_0 + [n_\mu - \Box^{-1}\partial_\mu(n'\partial)](n'j)\}.&\end{aligned} \tag{59}$$

В это соотношение, как мы видим, вошли только продольные составляющие свободного уравнения Даламбера, которые могут быть заданы произвольно. В то же время

$$\Box A_\mu'^r = \Box A_\mu + \frac{n_\mu\Box + \partial_\mu(n\partial)}{\Box + (n\partial)^2}(nj^r) - \frac{n'_\mu\Box + \partial_\mu(n'\partial)}{\Box + (n'\partial)^2}(n'j^r)\ . \tag{60}$$

Следовательно, уравнение (45) инвариантно относительно преобразования (59). Наконец, с помощью калибровочного преобразования

$$\psi'^r = \exp\left[\imath e\left(\frac{\partial_\mu + n'_\mu(n'\partial)}{\Box + (n'\partial)^2} - \frac{\partial_\mu + n_\mu(n\partial)}{\Box + (n\partial)^2}\right)A_\mu\right]\psi^r \tag{61}$$

проверяется инвариантность уравнения Дирака (46).

Отметим, что преобразование (59) можно сделать более определенным, конкретизировав продольные части тем или иным частным способом. Так как они должны лишь подчиняться уравнению Даламбера, а в остальном произвольны, то можно, например, конкретизировать их путем замены в них A^r_μ на ту часть A'^r_μ, которая подчиняется свободному уравнению Даламбера:

$$\Box A^r_{\mu 0} = 0. \tag{62}$$

Тогда преобразование (59) примет следующий частный вид:

$$\begin{aligned} A'^r_\mu = A^r_\mu + [\Box + (n\partial)^2]^{-1}[n_\mu - \Box^{-1}\partial_\mu(n\partial)](nj) - \\ - [\Box + (n\partial)^2]^{-1}\{\partial_\mu[(\partial A) + (n\partial)(nA)]_0 + [n_\mu - \Box^{-1}\partial_\mu(n\partial)](nj)\}. \end{aligned} \tag{63}$$

Преобразование (61) при этом перейдет в

$$\psi'^r = \exp\{\imath e[\Box + (n'\partial)^2]^{-1}(n'\partial)(n'A^r)_0\}\psi^r. \tag{64}$$

Итак, теперь в преобразования входит только A^r_μ, но не A_μ.

Ковариантность уравнений (45)–(47) не является явной, так как при преобразованиях Лоренца вектор n_μ изменяется и переходит в n'_μ. Однако в новой системе всегда можно восстановить первоначальный вид вектора n_μ (например, $n_\mu = (0, 0, 0, \imath)$) с помощью подходящих преобразований (59) и (61). В этой связи целесообразно в качестве «истинных» операторов преобразования Лоренца выбрать операторы, включающие и это дополнительное преобразование [35].

Представление взаимодействия в калибровке излучения обсуждается в пп. 4.4 и 4.8.

3. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА НА ЯЗЫКЕ НАПРЯЖЕННОСТЕЙ

Гейзенберг и Паули [2] первыми пытались преодолеть указанные в разд. 2 недостатки формулировки электродинамики в калибровке излучения путем непосредственного квантования уравнений Максвелла (4). Они обратили внимание на то, что хотя и не удается найти перестановочные соотношения между всеми компонентами вектор-потенциала A_μ, однако с помощью канонического квантования можно получить перестановочные соотношения между не зависящими от калибровки компонентами тензора электромагнитного поля. Если исключить A_μ из числа канонических переменных, а для остальных принять перестановочные соотношения (9) (для $\mu, \nu = 1, 2, 3$), то из них следует

$$[F_{\mu\nu}(x),\ F_{\lambda\rho}(y)] = \left\{ \delta^{\mu\nu}_{4\lambda} \frac{\partial}{\partial x_\rho} - \delta^{\mu\nu}_{4\rho} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} + \delta^{\lambda\rho}_{4\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} - \delta^{\lambda\rho}_{4\nu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right\} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$
$$\delta^{\mu\nu}_{\lambda\rho} = \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho} - \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda}, \quad x_4 = y_4. \tag{65}$$

Для свободных уравнений Максвелла ($e = 0$) легко записать перестановочные соотношения с любыми (не равными) временами:

$$[F_{\mu\nu}(x),\ F_{\lambda\rho}(y)] = -\imath\{\delta_{\mu\lambda}\partial_\nu\partial_\rho - \delta_{\mu\rho}\partial_\nu\partial_\lambda + \\ + \delta_{\nu\rho}\partial_\mu\partial_\lambda - \delta_{\nu\lambda}\partial_\mu\partial_\rho\}\triangle_0(x - y), \tag{66}$$

где функция $\triangle_0(x - y)$ определена формулой (44) с $M = 0$. При $x_4 = y_4$ (66) совпадает с (65).

Существует много работ, в которых авторы, так же, как Гейзенберг и Паули, стремятся преодолеть трудности с квантованием уравнений Максвелла путем использования только калибровочно-инвариантных величин, например, напряженностей поля [20, 26, 35–43].

В качестве примера формулировок электродинамики в терминах напряженностей мы приведем формулировку Гаммера и Гуда [41].

3.1. Формулировка Гаммера и Гуда. Гаммер и Гуд [41] предложили формулировку квантовой электродинамики, в которой действительно фигурируют только напряженности электромагнитного поля и не входит вектор-потенциал A_μ. Для ее получения в исходных уравнениях (4), (5) из числа многочисленных преобразований, применявшихся при получении формулировки Дирака, нужно привести лишь одно преобразование (37):

$$\psi \ = \exp{(\imath e \triangle^{-1} \partial_k\ A_k)} \psi^r. \tag{67}$$

Тогда уравнения (4) и (5) перепишутся так:

$$\partial_\lambda F_{\lambda\nu} = -\imath \bar{\psi}^r \gamma_{mu} \psi^r, \tag{68}$$

$$(\gamma\partial + M)\psi = -\imath e \gamma_\mu \psi^r A'_\mu, \tag{69}$$

где A'_μ — краткое обозначение следующих нелокальных выражений:

$$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \Delta^{-1} \partial_k A_k = \frac{\partial_k}{\Delta}(\partial_k A_\mu - \partial_\mu A_k) = \frac{\partial_k}{\Delta} F_{k\mu} \tag{70}$$

или

$$A'_m = \imath\epsilon_{mkn}\frac{\partial_k}{\Delta}H_n, \tag{71}$$

$$A'_4 = -\imath\frac{\partial_k}{\Delta}E_k. \tag{72}$$

Чтобы вообще не упоминать о потенциалах, уравнения (68) и (69) нужно дополнить условиями

$$\partial_\mu \check{F}_{\mu\nu} = 0, \quad \check{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F_{\lambda\rho}, \tag{73}$$

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}. \tag{74}$$

С уравнениями (68)–(74) совместимы следующие одновременные перестановочные соотношения*:

$$\begin{gathered}
[(E_m + \imath H_m)(x),\ (E_m + \imath H_m)(y)] = 0,\\
[(E_m + \imath H_m)(x),\ (E_m - \imath H_m)(y)] = 2\epsilon_{mnk}\frac{\partial}{\partial x_k}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\\
[\psi^r(x),\ \psi^r(y)] = 0, \quad [\psi^r(x),\ \bar{\psi}^r(y)] = \gamma_4\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}),
\end{gathered} \tag{75}$$

$$\begin{aligned}
&[\psi^r(x),\ (E_m + \imath H_m)(y)] = [\psi^r(x),\ (E_m - \imath H_m)(y)] =\\
&\qquad = -e\psi^r(x)\Delta^{-1}\frac{\partial}{\partial x_m}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = e\psi^r(x)\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_m}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}.
\end{aligned}$$

Они согласуются с перестановочными соотношениями (42). Комбинации из напряженностей $E_m + \imath H_m$ и $E_m - \imath H_m$ выступают здесь как канонически сопряженные величины.

В этой формулировке кулоновское взаимодействие не выделено и, действительно, присутствуют только напряженности. В ней не приходится обращаться к нефизической неопределенной метрике. Вместе с тем она, как и формулировка Дирака, не обладает явной ковариантностью. Существуют и ковариантные формулировки в терминах напряжености [42, 43]. Однако они нелокальны, причем не только пространственно, как формулировка Гаммера и Гуда, но также и по времени.

*Первые два тождественны с (65).

4. КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА С ПОПЕРЕЧНОЙ КАЛИБРОВКОЙ ВЕКТОРОВ СОСТОЯНИЯ (ФОРМУЛИРОВКА ФЕРМИ)

4.1. Теория с 4 сортами квантов (без дополнительного условия). Чтобы избежать указанных в разд. 2 недостатков формулировки в калибровке излучения, положим в основу электродинамики не представляющий трудностей для канонического квантования лагранжиан*

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu\ \partial_\mu A_\nu + j_\mu A_\mu - \bar{\psi}(\gamma\partial + M)\psi, \tag{76}$$

и, следовательно, уравнения

$$\Box A_\nu = -j_\nu, \tag{77}$$

$$(\gamma\partial + M)\psi\ = -\imath e\gamma_\mu\psi A_\mu. \tag{78}$$

Каноническое квантование теории с лагранжианом (76) дает следующие одновременные ($x_4 = y_4$) перестановочные соотношения:

$$\begin{aligned} &\{\psi(x), \psi(y)\} = 0, && \{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} = \gamma_4\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\\ &[A_\mu(x), A_\nu(y)] = 0, && [A_\mu(x), \partial_4 A_\nu(y)] = \delta_{\mu\nu}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\\ &[A_\mu(x), \psi(y)] = 0, && [\partial_4 A_\nu(x),\ \psi(y)] = 0. \end{aligned} \tag{79}$$

В свободном случае ($e = 0$) эти перестановочные соотношения следующим образом распространяются на любые x_4 и y_4:

$$\{\psi(x),\ \bar{\psi}(y)\} = \imath(-\gamma\partial + M)\triangle_M(x-y), \tag{80}$$

$$[A_\mu(x),\ A_\nu(y)] = \imath\delta_{\mu\nu}\triangle_0(x-y). \tag{81}$$

4.2. Сравнение с формулировкой в калибровке излучения. Для сравнения с уравнениями в калибровке излучения обратимся к разложению (23) в форме (25) и произведем следующие преобразования.

1. Действуя операторами $\delta_{kn} - \dfrac{\partial_k\partial_n}{\Delta}$ и ∂_n на уравнение (77) для $\mu = n$ и выписывая отдельно уравнение (77) для $\mu = 4$, запишем уравнения для трехмерных поперечной, продольной и временной составляющих вектор-потенциала.

---

*С целью избавиться от трудностей к лагранжиану (1) добавляли член $+1/2(\partial_\mu A_\mu)^2$ (см. [2]). Такой лагранжиан равноценен лагранжиану (76), так как отличается от (76) лишь на дивергенцию.

2. Уравнение для продольной части заменим уравнением

$$\Box \partial_\mu A_\mu = 0.$$

(Уравнение для продольной составляющей

$$\Box \partial_n A_n = -\partial_n j_n \tag{82}$$

можно получить, комбинируя это уравнение с уравнением (77) и законом сохранения тока $\partial_\mu j_\mu = 0$.)

3. Разрешим уравнение (77) для $\mu = 4$ относительно A_4:

$$A_4 = \frac{1}{\triangle}(-\partial_4^2 A_4 - j_4) = \frac{1}{\triangle}(-\partial_4 \partial_\nu A_\nu + \partial_4 \partial_n A_n - j_4) \tag{83}$$

и подставим это выражение для A_4 в уравнение Дирака (78).

4. С помощью калибровочного преобразования (37) исключим из уравнения Дирака продольную составляющую $\partial_n A_n$.

Тогда получим систему уравнений

$$\Box \partial_\mu A_m^r = -j_m^r + \frac{\partial_k \partial_n}{\triangle} j_n^r, \tag{84}$$

$$\partial_n A_n^r = 0, \tag{85}$$

$$(\gamma\partial + M)\psi^r \ = \imath e \gamma_n \psi A_n^r - \frac{\imath e}{2}\gamma_4 \{\psi^r, \triangle^{-1} j_4\} - \imath e \gamma_4 \psi^r \triangle^{-1} \partial_4 \partial_\mu A_\mu, \tag{86}$$

$$\Box \partial_\mu A_\mu = 0. \tag{87}$$

Хотя продольная и временная составляющие исключены, но от них остался след $\partial_\mu A_\mu$ — скалярная составляющая.

Уравнение (87) означает, что скалярную составляющую $\partial_\mu A_\mu$ можно рассматривать как некоторое свободное поле*. Вычислим одновременные перестановочные соотношения для этого «поля»:

$$\left[\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}(x), \frac{\partial A_\nu}{\partial y_\nu}(y)\right] = 0, \tag{88.0}$$

$$\left[\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}(x), \frac{\partial}{\partial y_4}\frac{\partial A_\nu}{\partial y_\nu}(y)\right] = \left[\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}, \frac{\partial}{\partial y_\nu}\frac{\partial A_\nu}{\partial y_4} + (-\Delta A_4 - j_4)\right] = 0, \tag{88.1}$$

$$\left[\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}(x), \frac{\partial^2}{\partial y_4^2}\frac{\partial A_\nu}{\partial y_\nu}(y)\right] = \left[\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}, -\Delta \frac{\partial}{\partial y_\nu}(y)\right] = 0, \tag{88.2}$$

---

*Анализ свойств оператора $\partial_\mu A_\mu$ заимствован из второй работы [23].

. . . .

$$\left[\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}(x), \frac{\partial^n}{\partial y_{\lambda_1}\cdots y_{\lambda_n}}\frac{\partial A_\nu}{\partial y_\nu}(y)\right] = 0, \tag{88.n}$$

. . . .

Таким образом, для любых времен x_0 и y_0

$$\left[\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}(x), \frac{\partial A_\nu}{\partial y_\nu}(y)\right] = 0. \tag{88}$$

Коммутаторы (88.2), . . . , (88.n), . . . следуют из (88.0), (88.1) и уравнения (87). Отметим, что полученные перестановочные соотношения свойственны c-числовому скалярному полю.

Величина $\partial_\mu A_\mu$ коммутирует с величинами* A^r_m и ψ^r. В самом деле,

$$\left[A^r_m(x), \frac{\partial A_\nu}{\partial y_\nu}(y)\right] = \left[A_m, \frac{\partial A_\nu}{\partial y_\nu}\right] - \left[\frac{\partial}{\partial x_m}\frac{1}{\Delta}\frac{\partial A_n}{\partial x_n}, \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu}\right] = 0, \tag{89.0}$$

$$\left[A^r_m(x), \frac{\partial}{\partial y_4}\frac{\partial A_\nu}{\partial y_\nu}(y)\right] = 0, \tag{89.1}$$

. . . .

$$\left[A^r_m(x), \frac{\partial^n}{\partial y_{\lambda_1}\cdots y_{\lambda_n}}\frac{\partial A_\nu}{\partial y_\nu}(y)\right] = 0, \tag{89.n}$$

. . . .

$$[A^r_m(x), \partial_\nu A_\nu(y)] = 0, \tag{89}$$

$$\left[\psi^r(x), \frac{\partial A_\nu}{\partial y_\nu}(y)\right] = 0 \tag{90.0}$$

$$\left[\psi^r(x), \frac{\partial}{\partial y_4}\frac{\partial A_\nu}{\partial y_\nu}(y)\right] = \left[\exp\left(-\imath e\frac{1}{\Delta}\frac{\partial A_n}{\partial x_n}\right), \frac{\partial}{\partial y_4}\frac{\partial A_\nu}{\partial y_\nu}(y)\right]\psi +$$

$$+ \exp\left(-\imath e\frac{1}{\Delta}\partial_n A_n\right)\left[\psi, \frac{\partial}{\partial y_4}\frac{\partial A_\nu}{\partial y_\nu}(y)\right] = 0, \tag{90.1}$$

*$\partial_\mu A_\mu$ коммутирует также и с четвертой комбинацией этого типа $A_4 - \partial_4\Delta^{-1}\partial A$.

. . . .

$$\left[\psi^r(x), \frac{\partial^n}{\partial y_{\lambda_1} \cdots y_{\lambda_n}} \frac{\partial A_\nu}{\partial y_\nu}(y)\right] = 0, \tag{90.n}$$

. . . .

$$\left[\psi^r(x), \frac{\partial A_\nu}{\partial y_\nu}(y)\right] = 0. \tag{90}$$

Коммутаторы (89.2), ... , (89.n), ... и (90.2), ... , (90.n), ... следуют из (89.0), (89.1) и (90.0), (90.1) соответственно при учете уравнения (87) следуют из уравнений (87), (88).

Перестановочные соотношения (89) и (90) свидетельствуют о том, что поля $A_m^r(x)$ и $\psi^r(x)$ независимы от $\partial_\mu A_\mu$, что по отношению к ним $\partial_\mu A_\mu$ выступает как внешнее c-числовое поле.

Отметим, что если к уравнениям (84)–(87) добавить уравнения (82) и (83) в качестве определений продольной $\partial_m A_m$ и временной A_4 частей, то от уравнений (84)–(87) можно вернуться к исходным уравнениям (77), (78).

Система уравнений (84)–(86) отличается от уравнений (39)–(41) присутствием лишнего члена в (86). Этот член — взаимодействие с полем $\partial_\mu A_\mu$, подчиняющимся свободному уравнению (87) и, как было показано, являющемуся c-числом в соответствующем гильбертовом пространстве состояний.

4.3. Дополнительное условие. Для того чтобы уравнения (84)–(86) перешли в уравнения (39)–(41), необходимо наложить условие Лоренца

$$\partial_\mu A_\mu = 0. \tag{91}$$

Оно не противоречит уравнениям, однако противоречит принятым перестановочным соотношением (79), в которых явно содержится предположение о полной независимости всех четырех компонент оператора A_μ*.

Ферми [3] предложил накладывать ограничение на векторы состояния

$$\partial_\mu A_\mu \Psi = 0. \tag{92}$$

---

*В принципе перестановочные соотношения, совместимые с условием Лоренца (лоренцевская калибровка), могут быть записаны (см. [43]) в свободном случае в виде

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)] = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{(\partial_\mu \partial_\nu)}{\Box}\right) \imath \Delta_0(x-y).$$

Такие перестановочные соотношения введены в теорию для оператора $A^\Lambda = \Box^{-1}\partial_\nu F_{\nu\mu}$, и весь аппарат, развитый в [43] с другой целью, очевидным образом может быть истолкован как аппарат квантовой электродинамики в лоренцевской калибровке в представлении взаимодействия. Однако, как мы видим, в отличие от обычных, эти перестановочные соотношения имеют нелокальную форму и не имеют одновременного предела.

Однако впоследствии было обнаружено, что это условие противоречиво [4–6]. Мы проиллюстрируем это в п. 4.5 на примере свободного случая.

В современной форме, которую ему придал Гупта [7, 8, 19], ограничение, отбирающее физические векторы состояния, выглядит так:

$$\partial_\mu A_\mu^+ \Psi = 0, \tag{93}$$

где $+$ означает, что берется положительно-частотная часть $\partial_\mu A_\mu$. Для векторных частиц с ненулевой массой это условие означало бы, что в состояниях Ψ не содержится скалярных квантов [23]. Однако поскольку $\partial_\mu A_\mu$ здесь подчиняется свободному уравнению (87) с массой нуль, то ситуация оказывается более сложной (см. ниже). Скалярные кванты в состояниях Ψ присутствовать могут, однако норма состояния, содержащего хотя бы один скалярный квант, равна нулю. Кроме того, такие состояния ортогональны другим (физическим) состояниям, удовлетворяющим (93). Поэтому состояния со скалярными квантами дают нулевой вклад при вычислении матричных элементов S-матрицы, и поэтому, если взять проекцию уравнений (84)–(88) на подпространство состояний Ψ, удовлетворяющих (93), то лишний член в (86) выпадает, и они превращаются в уравнения (39)–(41).

Таким образом, подпространство состояний Ψ ведет самостоятельное существование.

4.4. Переход в представление взаимодействия. Выше мы обсуждали уравнения для операторов поля в гейзенберговском представлении: в формулировке Ферми — уравнения (77) и (78) и в калибровке излучения — уравнения (38)–(41) (или (84)–(87) и (93)). Векторы состояния в гейзенберговском представлении подчиняются уравнению движения

$$\frac{\partial \Psi^r}{\partial t} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \Psi^r(\sigma)}{\partial \sigma(x)} = 0, \tag{94}$$

где σ — любая пространственноподобная поверхность [31], частным случаем которой является поверхность $t = \text{const}$. Теперь мы перейдем в представление взаимодействия, в котором операторы поля по определению подчиняются свободным уравнениям. Мы обсудим переход в двух формулировках: в формулировке с поперечной калибровкой векторов состояния и в калибровке излучения.

1) *Формулировка с поперечной калибровкой векторов состояния.* Впервые переход из гейзенберговского представления в представление взаимодействия был исследован Швингером [31, 44] (см. также [19]). Преобразование из одного представления в другое

$$\begin{gathered} A_\mu^B(x) = S(t,t_0) A_\mu^r(x) S(t,t_0)^{-1}, \quad \psi_\mu^B(x) = S(t,t_0)\psi_\mu^r(x) S(t,t_0)^{-1}, \\ \Psi^B(t) = S(t,t_0)\Psi^r(t), \end{gathered} \tag{95}$$

где $x^4 = t$, осуществляется с помощью оператора

$$S(t,t_0) = T\ \exp\left\{\imath\int\limits_{t_0}^{t} d^4x j^B_\mu(x) A^B_\mu(x)\right\}, \tag{96}$$

который одновременно является S-матрицей Фейнмана–Дайсона [45–47] (см. также [19, 21]). Преобразование удобно производить, используя соотношения

$$S\frac{\partial Q^r(x)}{\partial x_4}S^{-1} = \frac{\partial Q^B(x)}{\partial x_4} - \left[\frac{dS}{dx_4}, Q^B(x)\right] \quad (x_4 = t), \tag{97}$$

$$\frac{dS}{dx_4}S^{-1} = \int d\mathbf{x} j^B_\mu(x) A^B_\mu(x), \tag{98}$$

где $Q(x)$ — любой оператор.

Прежде всего, нетрудно убедиться, что в представлении взаимодействия перестановочные соотношения (79) сохранят свою форму, а при произвольных временах запишутся в виде (80), (81). Нетрудно далее проверить, что уравнения для операторов поля примут вид

$$\Box A^B_\mu(x) = 0, \qquad (\gamma\partial + M)\Psi^B(x) = 0, \tag{99}$$

а уравнение движения для векторов состояния (94) перейдет в

$$\frac{\partial \Psi^B(t)}{\partial t} = \int d\mathbf{x} j^B_\mu(x) A^B_\mu(x)\Psi^B(t). \tag{100}$$

При преобразовании дополнительного условия (93) мы воспользуемся перестановочными соотношениями

$$[A^{B(+)}_\mu(x), A^{B(+)}_\nu(y)] = 0, \tag{101}$$

$$[A^{B(+)}_\mu(x), A^{B(+)}_\nu(y)] = \imath\delta_{\mu\nu}\Delta^{(+)}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\,\mathrm{e}^{\imath p(x-y)}. \tag{102}$$

Тогда дополнительное условие (83) перейдет [8] в*

$$\left[\partial_\mu A^{B(+)}_\mu(x) - \int\limits_\sigma d\sigma'_\mu \Delta^{(+)}(x-x') j^B_\mu(x')\right]\Psi(\sigma) = 0, \tag{103}$$

*Впервые это дополнительное условие в представлении взаимодействия получил Швингер [31]. Однако он исходил из условия Ферми в первоначальной форме (92) и поэтому пришел к условию

$$\left[\partial_\mu A^{B(+)}_\mu(x) - \int\limits_\sigma d\sigma'_\mu \Delta_0(x-x') j^B_\mu(x')\right]\Psi^B(\sigma) = 0.$$

где $d\sigma'_\mu$ — 4-вектор дифференциальных элементов поверхности:

$$d\sigma'_\mu = \frac{\imath}{6}\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} dx_\nu dx_\lambda dx_\rho = \\ = (-dx_2 dx_3 dx_4, dx_1 dx_2 dx_4, -dx_1 dx_2 dx_4, -\imath dx_1 dx_2 dx_3).$$

Точка x' всегда лежит на поверхности σ, на которой задано состояние $\Psi(\sigma)$, а точка x — где угодно. Если ее также поместить на поверхность σ, то условие (103) упростится:

$$\partial_\mu A_\mu^{B(+)}(x)\Psi^B(\sigma) = 0 \quad (x \in \sigma), \tag{103$'$}$$

или при выборе σ в виде $t = \text{const}$

$$\partial_\mu A_\mu^{B(+)}(x)\Psi^B(t) = 0 \quad (x_4 = t). \tag{103$''$}$$

Отметим попутно, что система уравнений (99), (100) и (103) инвариантна относительно калибровочных преобразований [31]

$$A_\mu(x) = A'_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x), \quad \Box\Lambda(x) = 0, \tag{104}$$

$$\Psi(t) \to \Psi'(t) = \exp\left(-\imath \int d\sigma_\mu j_\mu(x)\Lambda(x)\right)\Psi(t) = \\ = \exp\left(-\int d\mathbf{x} j_4(x)\Lambda(x)\right)\Psi(t). \tag{105}$$

Операторы поля ψ^B в представлении взаимодействия нельзя подвергать калибровочным преобразованиям, так как это изменило бы соответствующее уравнение движения (99).

2) *Калибровка излучения.* Чтобы перейти к представлению взаимодействия в случае калибровки излучения (к которой мы перешли в п. 4.2), подвергнем гейзенберговские операторы $\mathbf{A}^{(r\Gamma)}(x)$ и $\psi^{(r\Gamma)}(x)$ преобразованию

$$\begin{aligned} A_m^{(rB)}(x) &= S(t,t_0) A_m^{(r\Gamma)}(x) S(t,t_0)^{-1}, \\ \psi_m^{(rB)}(x) &= S(t,t_0) \psi_m^{(r\Gamma)}(x) S(t,t_0)^{-1}, \end{aligned} \tag{106}$$

где теперь оператор $S(t, t_0)$ выберем в форме

$$S(t,t_0) = T\exp\left\{\imath \int d^4x \left[j_m^B(x) A_m^{(rB)}(x) - \right.\right. \\ \left.\left. - \frac{1}{2} j_4^B(x) \frac{1}{\Delta} j_4^B(x) - j_4^B(x) \partial_4 \frac{1}{\Delta} \partial_\mu A_\mu(x) \right]\right\}. \tag{107}$$

Отсюда

$$\frac{dS}{dx_4}S^{-1} = \int d\mathbf{x}\Big[j_m^B(x)A_m^{(rB)}(x) - \\ - \frac{1}{2}j_4^B(x)\frac{1}{\Delta}j_4^B(x) - j_4^B(x)\partial_4\frac{1}{\Delta}\partial_\mu A_\mu(x)\Big]. \quad (108)$$

Используя (97) и (108), нетрудно убедиться, что перестановочные соотношения сохранят свой вид (42), а уравнения (84)–(86) превратятся в

$$\Box\partial_\mu A_n^{rB} = 0, \quad \partial_m A_m^{rB} = 0, \quad (109)$$

$$(\gamma\partial + M)\psi^{rB} = 0. \quad (110)$$

Это и есть уравнения движения для операторов поля в калибровке излучения в представлении взаимодействия. Уравнение движения для гейзенберговских векторов состояния (94) с учетом (109) переходит в

$$\frac{\partial\Psi^{rB}}{\partial x_4} = \int d\mathbf{x}\Big[j_m^B(x)A_m^{(rB)}(x) - \\ - \frac{1}{2}j_4^B(x)\frac{1}{\Delta}j_4^B(x) - j_4^B(x)\partial_4\frac{1}{\Delta}\partial_\mu A_\mu(x)\Big]\Psi^{rB}. \quad (111)$$

Как видно из (111), оператор $S(t, t_0)$ является S-матрицей в калибровке излучения.

Что касается дополнительного условия (93), то оно в данном случае не изменяется [8] при переходе в представление взаимодействия

$$\partial_\mu A_\mu^+\Psi^{rB} = 0, \quad (112)$$

где x_4 и t — любые. Это обусловлено тем, что оператор $\partial_\mu A_\mu(x)$ (а следовательно, и его положительно- и отрицательно-частотные части) коммутирует со всеми операторами, входящими в $S(t, t_0)$ и, следовательно, с $S(t, t_0)$, каковы бы ни были времена x_4, t и t_0. Обращает на себя внимание то, что в отличие от условия (103) здесь времена x_4 и t совершенно независимы.

Еще одно замечание по поводу $\partial_\mu A_\mu(x)$. Этот оператор отсутствует в уравнении (112) в калибровке излучения (36) и возник у нас в уравнении (86). Как и (86), уравнения (107), (108) и (111) можно спроецировать на подпространство состояний, удовлетворяющих условию (112), т. е. рассматривать матричные элементы только между такими состояниями. Тогда с учетом (112) этот член отовсюду выпадает. Оператор $S(t, t_0)$ (107), соотношение (108) и уравнение движения (111) с опущенным членом $j_4\partial_4\dfrac{1}{\Delta}\partial_\mu A_\mu$ вместе с уравнениями (108) и (110) составляют аппарат представления взаимодействия для электродинамики в калибровке излучения.

Интересно, оставаясь в рамках представления взаимодействия, перейти от калибровки излучения к формулировке Ферми. Если бы при этом в (107), (108) и (111) член $j_4\partial_4\dfrac{1}{\Delta}\partial_\mu A_\mu$ отсутствовал, то его пришлось бы добавить, что с привлечением условия (112) безопасно и безвредно. Для реального осуществления перехода к формулировке Ферми дополним поле A_m^{rB} вместе $\partial_\mu A_\mu$ до 4-вектора. Для этого определим продольную составляющую уравнением

$$\Box\partial_m A_m^{rB} = 0, \tag{113}$$

а временную составляющую A_4^B определим как

$$A_4^B = \Delta^{-1}(-\partial_4\partial_\nu A_\nu + \partial_4\partial_m A_m^{rB}), \tag{114}$$

и в целом определим 4-вектор A_ν^B с помощью разложения вида (25)

$$A_\mu^{rB} = A_\mu^r + \delta_{\mu m}\Delta^{-1}\partial_m\partial_n A_n^B + \delta_{\mu 4}A_4^B = 0 \tag{115}$$

с общим уравнением движения

$$\Box A_m^{rB} = 0 \tag{116}$$

и перестановочными соотношениями

$$[A_\mu^B(x),\ A_\nu^B(y)] = 0,\quad [A_\mu^B(x),\ \partial_4 A_\nu^B(y)] = \delta_{\mu\nu}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\quad (x_4 = y_4). \tag{117}$$

Подставив $\partial_4\dfrac{1}{\Delta}\partial_\mu A_\mu$ из (114) в (111), получим

$$\frac{\partial\Psi^{rB}}{\partial x_4} = \int d\mathbf{x}\left[j_\mu^B(x)A_\mu^{rB} - \frac{1}{2}j_4^B\frac{1}{\Delta}j_4^B - j_\mu^B\partial_\mu\frac{1}{\Delta}\partial_m A_m^B\right]\Psi^{rB}. \tag{118}$$

Теперь подвергнем Ψ^{rB} калибровочному преобразованию

$$\Psi^{rB}(t) = V\Psi^{rB}(t) = \mathrm{e}^G\Psi^{rB}(t) = \exp\left\{\int d\mathbf{x}j_4^B\frac{1}{\Delta}\partial_m A_m^B\right\}\Psi^{rB}(t). \tag{119}$$

При преобразовании уравнения следует воспользоваться формулами

$$V\frac{\partial V^{-1}}{\partial x_4} = -\frac{\partial G^{-1}}{\partial x_4} - \frac{1}{2!}\left[G, \frac{\partial G^{-1}}{\partial x_4}\right] + \ldots = \\ = \int d\mathbf{x}\partial_\mu\frac{1}{\Delta}\partial_m A_m^B + \frac{1}{2}j_4^B\frac{1}{\Delta}j_4^B, \tag{120}$$

$$V\Delta^{-1}\partial_\mu\partial_m A_m^B V^{-1} + \delta_{\mu 4}[G, \Delta^{-1}\partial_\mu\partial_m A_m^B] = \\ = \Delta^{-1}\partial_\mu\partial_m A_m^B - \delta_{\mu 4}\partial x_4 V^{-1} - j_4^B \frac{1}{\Delta} j_4^B. \quad (121)$$

В результате уравнение движения для векторов состояния принимает вид

$$\frac{\partial \Psi^B}{\partial x_4} = \int d\mathbf{x} j_\mu^B(x) A_\mu^B(x) \Psi^B,$$

в точности совпадающий с (96).

Остается рассмотреть дополнительное условие. Прежде всего, составляя $\partial_\mu A_\mu^B = \partial_n A_n^B + \partial_4 A_4^B$ и подставляя сюда A_4^B в форме (114), выясняем, что

$$\partial_\mu A_\mu = \partial_\mu A_\mu^B. \quad (122)$$

Интересно, что оператор $\partial_\mu A_\mu^B$ в представлении взаимодействия оказался в точности тем же, что и в гейзенберговском представлении. Это естественно, так как он подчиняется свободному уравнению (87), и переход в представление взаимодействия, в котором по определению все поля свободные, не должен был его изменить. Так как векторы состояния были подвергнуты преобразованию (119), то мы должны сделать то же самое и в дополнительном (112), после чего оно приобретает вид

$$\left[\partial_\mu A_\mu^{B(+)}(x) - \int_\sigma d\sigma'_\mu \Delta^{(+)}(x - x') j_\mu^B(x')\right] \Psi(\sigma) = 0,$$

т. е. мы снова пришли к условию (103). Нетрудно совершить обратный переход от формулировки Ферми к калибровке излучения. Для этого вектор-потенциал A_μ^B представляется в виде (115), его четвертая компонента исключается с помощью формулы (114), а продольная часть $\partial_n A_n^B$ — с помощью калибровочного преобразования векторов состояния, обратного к (110).

Остальная часть этого раздела посвящена различным вопросам представления взаимодействия. При этом значок B, указываюший на представление взаимодействия, в дальнейшем будет опускаться.

4.5. Квантование свободного векторного поля с нулевой массой. Для вектор-потенциала свободного электромагнитного поля можно записать разложение

$$A_\mu = \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}} \{a_\mu(\mathbf{p})\, e^{ipx} + a_\mu^*(\mathbf{p})\, e^{-ipx}\}, \quad (123)$$

где $(p_0 = |\mathbf{p}|)$. При такой записи состояние поляризации характеризуется векторным индексом μ. Здесь нам удобнее отказаться от евклидовской метрики

Минковского и связанной с этим мнимой четвертой компонентой лоренцевских векторов. Поэтому в формуле (123) и всюду дальше в данном пункте мы считаем, что μ принимает значения $0, 1, 2, 3$, а метрический тензор имеет вид

$$g_{\mu\nu} = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{Vmatrix}. \tag{124}$$

Тогда все четыре компоненты A_μ «вещественны», т. е. операторы A_μ эрмитовы, а следовательно, операторы a_μ^+ эрмитово сопряжены к операторам a_μ^+. Смысл операции эрмитова сопряжения уточнен ниже.

Стандартная процедура квантования свободного электромагнитного поля, описываемого лагранжианом (76) с $e = 0$, приводит к перестановочным соотношениям

$$\left[a_\mu(\mathbf{p}), a_\nu^+(\mathbf{q})\right] = \delta_{\mu\nu}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}). \tag{125}$$

а) *Общие определения для гильбертовых пространств с положительно определенной и с неопределенной метрикой.* Вне зависимости от того, положительно определена метрика или нет, можно дать следующие общие определения [10].

i) Скалярное произведение двух векторов Ψ_1 и Ψ_2:

$$\Psi_1^+\Psi_2. \tag{126}$$

Крестом отмечается дуальный вектор состояния, об операции для получения которого мы пока не предполагаем ничего, кроме того, что она содержит комплексное сопряжение. Предполагается, что норма вектора $\Psi^+\Psi$ вещественна, но в остальном произвольна. Векторы называются нормированным, если

$$\Psi^+\Psi = \pm 1,\ 0. \tag{127}$$

Условие ортогональности записывается

$$\Psi^+\Phi = 0. \tag{128}$$

ii) Эрмитово-сопряженный оператор определяется как

$$\Psi^+ a^+ = (a\Psi)^+. \tag{129}$$

iii) Эрмитов оператор определяется обычным требованием, чтобы все его средние были вещественны:

$$\Psi^+ a\Psi = (\Psi^+ a\Psi)^* = \Psi^+ a^+\Psi, \tag{130}$$

и, следовательно, обладает свойством

$$a^{+} = a. \tag{131}$$

Если Ψ — собственная функция эрмитова оператора a, то из

$$\Psi^{+} a \Psi = a \Psi^{+} \Psi \tag{132}$$

и

$$\Psi^{+} a \Psi = a^{*} \Psi^{+} \Psi \tag{133}$$

получаем

$$(a - a^{*}) \Psi^{+} = 0. \tag{134}$$

При положительно определенной метрике отсюда следует вещественность всех собственных значений эрмитова оператора. Если метрика положительно не определена, то вектор Ψ может иметь нулевую норму, а тогда из (134) нельзя сделать вывод о вещественности соответствующего собственного значения. Собственные значения эрмитовых операторов могут быть даже комплексными.

iv) Если $\{\Psi_m\}$ — полная система векторов, построенная исключительно из векторов с ненулевыми нормами, и если

$$\eta_{lm} = \Psi_l^{+} \Psi_m = \pm \delta_{lm}, \tag{135}$$

то условие полноты запишется

$$\sum_{l,m} \Psi_l \eta_{lm} \Psi_m^{+} = 1. \tag{136}$$

б) *Положительно определенная метрика.* Напомним основные факты, связанные с квантованием согласно перестановочным соотношениям:

$$[a, a^{+}] = 1 \tag{137}$$

при положительно определенной метрике. Эрмитово сопряжение при этом есть просто комплексное сопряжение и транспонирование. Задание перестановочных соотношений (137) имеет следующую цепь следствий.

i) Оператор a^{+} является эрмитовым и, кроме того, он есть произведение двух эрмитово-сопряженных операторов. Поэтому при положительно определенной метрике он должен обладать не только вещественными, но и неотрицательными диагональными элементами*, а значит, собственные значения его

*Так как $\langle n|a^{+}a|n\rangle = \sum_m \langle n|a^{+}|m\rangle\langle m|a|n\rangle = \sum_m |\langle m|a|n\rangle|^2$.

вещественны и неотрицательны:

$$a^+a\Psi_\lambda = \lambda\Psi_\lambda, \qquad \lambda > 0. \tag{138}$$

ii) Операторы a уменьшают, а операторы a^+ увеличивают собственные значения a^+ на единицу:

$$(a^+a)a\Psi_\lambda = (\lambda - 1)a\Psi_\lambda, \tag{139}$$

$$(a^+a)a^+\Psi_\lambda = (\lambda + 1)a^+\Psi_\lambda. \tag{140}$$

iii) Из i и ii следует, что оператор a^+ обладает только целочисленным спектром собственных значений*

$$\lambda = 0, 1, 2, \ldots \tag{141}$$

Эти факты позволяют интерпретировать операторы a, a^+ и a^+a как операторы уничтожения, рождения и числа частиц соответственно.

iv) Полная система нормированных состояний может быть записана

$$\Psi_\lambda = \frac{(a^+)^\lambda}{\sqrt{\lambda!}}\Psi_0, \tag{142}$$

где наинизшее состояние (состояние без частиц) Ψ_0, т. е. вакуум, обладает свойством

$$a\Psi_0 = 0. \tag{143}$$

Для анализа перестановочных соотношений (125) мы будем считать, что a_μ и a_μ^+ принадлежат одному импульсу $\mathbf{p} = \mathbf{q}$, и упрощенно запишем (125) как

$$[a_\mu,\ a_\nu^+] = \delta_{\mu\nu}. \tag{144}$$

---

*В самом деле, пусть существует какое-то $\lambda_{\min} < 1$ и соответствующий $\psi_{\lambda_{\min}} \neq 0$. Рассмотрим вектор $a\psi_{\lambda_{\min}}$:

$$(a^+a)a\Psi_{\lambda_{\min}} = (\lambda_{\min} - 1)a\Psi_{\lambda_{\min}}.$$

Так как получившееся собственное значение отрицательно, что невозможно, то

$$a\Psi_{\lambda_{\min}} = 0.$$

Отсюда, подействовав на это равенство оператором a^+, находим

$$(a^+a)\Psi_{\lambda_{\min}} = 0,$$

т. е. $\lambda_{\min} = 0$.

Эти перестановочные соотношения при $\mu, \nu \neq 4$ трактуются так же, как перестановочные соотношения (137). Например, a_m — операторы уничтожения. Однако для временных операторов перестановочные соотношения имеют другой вид:

$$[a_0,\ a_0^+] = -1, \tag{145}$$

и, следовательно, операторами уничтожения, рождения и числа частиц будут, соответственно, a_0^+, a_0 и $a_0 a_0^+$, а вакуум будет обладать свойством

$$a_m \Psi_0 = 0, \qquad a_0^+ \Psi_0 = 0. \tag{146}$$

Такая теория с различным толкованием пространственных и временных операторов a_μ возможна. Однако она, подобно формулировке Дирака, не носит нужного явно ковариантного вида.

Замечание. Утверждения i–iv являются необходимыми и достаточными, и поэтому желательное с точки зрения ковариантности противоположное данному выше толкование a_0^+ и a_0 как операторов рождения и уничтожения и приписывание вакууму свойства

$$a_0 \Psi_0 = 0 \tag{147}$$

с необходимостью противоречиво. К противоречию легко прийти и непосредственно. А именно, взяв от (145) среднее по вакууму, с учетом (147) получаем

$$(\Psi_0, a_0 a_0^+ \Psi_0) = -(\Psi_0, \Psi_0), \tag{148}$$

где при положительно определенной метрике левая часть определена положительно, а правая отрицательно*.

в) *Неопределенная метрика и квантование электромагнитного поля.* Явно ковариантной будет только такая формулировка, в которой одновременно все a_μ суть операторы уничтожения, а все a_μ^+ — операторы рождения. Как мы видели, при положительно определенной метрике это не так. Обратимся к неопределенной метрике и дополнительно *постулируем*, что существует вакуум — состояние со свойством

$$a_0 \Psi_0 = 0. \tag{149}$$

Такое состояние будет обладать наинизшей энергией, импульсом и т. д. Состояния

$$\Psi_n = \frac{(a_0^+)^{n_0} (a_1^+)^{n_1} (a_2^+)^{n_2} (a_3^+)^{n_3}}{\sqrt{n_0! n_1! n_2! n_3!}} \Psi_0 \tag{150}$$

*Это противоречие — упрощенная версия противоречия, приведенного в [21, с. 98].

будут собственными функциями операторов числа частиц $N=-a_0^+a_0$, $N=a_1^+a_1$, $N=a_2^+a_2$, $N=a_3^+a_3$ с собственными значениями

$$n_0, n_1, n_2, n_3 = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{151}$$

Эти состояния не образуют теперь базиса полного гильбертова пространства, так как у операторов числа частиц, в принципе, могут быть собственные функции с другими собственными значениями, например, отрицательными, комплексными. Однако на основании *гипотезы* (148) совокупность состояний Ψ_n образует инвариантное (относительно действия операторов a_μ и a_μ^+) подпространство всего гильбертова пространства. Никакие операторы в теории поля, например, в представлении взаимодействия или выраженные через «in»- и «out»-операторы, не выводят из этого подпространства.

В полном согласии с тем, что принятые соотношения несовместимы с положительно определенной метрикой, норма состояний (150), действительно, может быть как положительной, так и отрицательной:

$$\Psi_n^+\Psi_n = (-1)^{n_0}. \tag{152}$$

При этом норма вакуума считается положительной:

$$\Psi_0^+\Psi_0 = 1. \tag{153}$$

Эта норма явно инвариантна (см. [11]). Так, например, рассмотрим четыре состояния $a_\mu^+\Psi_0$:

$$\begin{aligned}
&(a_0^+\Psi_0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0),\\
&(0,\ \ a_1^+\Psi_0,\ \ 0,\ \ 0),\\
&(0,\ \ 0,\ \ a_2^+\Psi_0,\ \ 0),\\
&(0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ a_3^+\Psi_0).
\end{aligned} \tag{154}$$

Каждое из них — лоренцевский 4-вектор. Первое — «времениподобное» с отрицательной нормой состояние, а три остальные — «пространственноподобные» с положительной нормой. Благодаря перестановочным соотношениям (144) эти свойства векторов состояния (154) не зависят от системы отсчета.

В этом смысле все пространство состояний $a_\mu^+\Psi_0$ инвариантно разбивается на подпространство «пространственноподобных векторов состояния» с положительной нормой и подпространство «времениподобных векторов состояния» с отрицательной нормой. Аналогично разбиваются на инвариантные подпространства (но уже на большее число) двухчастичные состояния $a_\mu^+a_\nu^+\Psi_0$ и т. д.

Можно сказать, что неопределенная метрика в гильбертовом пространстве состояний есть отображение неопределенной метрики в пространстве Минковского. В этой связи в литературе операторам поля, векторам состояний даже приписывали верхние и нижние индексы, относящиеся к гильбертову пространству [12].

г) *Роль дополнительного условия.* Чаще всего мы рассматриваем такие задачи, когда дополнительное условие ($103''$) накладывается на векторы состояния Ψ, не зависящие от времени. Это, во-первых, тривиальный случай отсутствия взаимодействия, когда уравнение (100) превращается в уравнение для свободного гейзенберговского вектора состояния. Во-вторых, даже в случае взаимодействия начальными и конечными состояниями служат свободные гейзенберговские векторы Ψ^{in} и Ψ^{out}:

$$\frac{\partial \Psi^{\text{in, out}}}{\partial t} = 0. \tag{155}$$

В этих случаях 4-мерный фурье-образ от условия ($103''$) есть*

$$p_\mu a_\mu(\mathbf{p})\Psi = 0. \tag{156}$$

На самом деле, это условие есть бесконечная совокупность дополнительных условий, возникающая, когда импульс $\mathbf{p}$ пробегает все возможные значения. Подчеркнем, что в (156) $\mathbf{p}^2 = 0$, причем даже в гейзенберговском представлении при рассмотрении дополнительного условия нужно рассматривать только изотропные векторы $\mathbf{p}_\mu$, так как $\partial_\mu A_\mu$ подчиняется уравнению Даламбера (87). На примере одночастичного состояния

$$\Psi = v_\mu a_\mu^+ \Psi_0, \tag{157}$$

где v — произвольный вектор, выясняем, что условие (156) с помощью перестановочных соотношений

$$[a_\mu(\mathbf{p}), a_\nu(\mathbf{q})] = \delta_{\mu\nu}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \tag{158}$$

сводится к обычному условию Лоренца

$$p_\mu v_\mu = 0. \tag{159}$$

Чтобы построить одночастичные состояния, удовлетворяющие (156), или, эквивалентно, векторы v_μ, удовлетворяющие (159), нужно использовать базис, одним из ортов которого служит изотропный вектор p_μ. Такой базис

---

*Начиная с этого пункта мы вновь используем евклидову метрику пространства-времени, причем четвертые компоненты векторов получаются из нулевых путем умножения на $\imath$. Соответственно α_μ обозначает вектор $\{a_1, a_2, a_3, \imath a_0\}$, а α_μ^+ — вектор $\{a_1^+, a_2^+, a_3^+, \imath a_0^+\}$.

был построен в п. 1.2 (формулы (15) и (18)). Из сказанного там вытекает следующее.

1) Наиболее общий вектор v_μ, удовлетворяющий условию (159), записывается (см. п. 1.2)

$$v_\mu = ae_\mu^{(1)} + be_\mu^{(2)} + cp_\mu. \tag{160}$$

Таким образом, полный набор одночастичных состояний, удовлетворяющих (156) и имеющих импульс, есть

$$(e^{(1)}a^+)\Psi_0, \quad (e^{(2)}a^+)\Psi_0, \quad (pa^+)\Psi_0. \tag{161}$$

Аналогично, чтобы получить удовлетворяющее (156) многофотонное состояние, нужно подействовать на вакуум тем или иным числом операторов рождения, соответствующих одинаковым или различным значениям импульса.

Действительно, наиболее общее состояние, соответствующее одному импульсу, записывается так:

$$\Psi = \sum_{m_1,m_2,m_3,m_0} c(m_1,m_2,m_3,m_0) \times \\ \times (e^1a^+)^{m_1}(e^2a^+)^{m_2}(pa^+)^{m_3}(na^+)^{m_0}\Psi_0. \tag{162}$$

Подстановка этого состояния в (156) дает

$$pa^+\Psi = (np) \sum_{m_1,m_2,m_3,m_0} c(m_1,m_2,m_3,m_0)(e^1a^+)^{m_1} \times \\ \times (e^2a^+)^{m_2}(pa^+)^{m_3}(na^+)^{m_0-1}\Psi_0. \tag{163}$$

Как для коэффициентов при линейно независимых состояниях получаем

$$c(m_1,m_2,m_3,m_0)m_0 = 0, \quad m_0 \geq 1, \tag{164}$$

$$c(m_1,m_2,m_3,m_0) \text{ любые}, \quad m_0 = 0. \tag{165}$$

Итак, вклад в Ψ дают только состояния с $m_0 = 0$. Если состояние Ψ описывает фотоны с несколькими импульсами, то, проводя подобные рассуждения независимо для каждого импульса, убеждаемся, что состояния, содержащие любое число фотонов, строятся путем действия на вакуум только тремя сортами операторов: $(e^{(1)}a^+)$, $(e^{(2)}a^+)$, (pa^+).

2) Условие (159) запрещает любые времениподобные v_μ (например, $v_\mu = n_\mu$). Следовательно, условие Лоренца исключает из рассмотрения состояния с отрицательной нормой, порождаемые операторами (na^+), например, одночастичное состояние $(na^+)\Psi_0$. В исключении состояний с отрицательной

нормой, порождаемых операторами $(na^+)\Psi$, — *истинное назначение условия Лоренца*.

3) Условие Лоренца (156) не запрещает присутствовать в состоянии Ψ любому числу квантов, порождаемых (pa^+) (скалярные кванты). Таким образом, фон, на котором разыгрываются физические события, состоит из состояний

$$\Psi_0, \quad (pa^+)\Psi_0, \quad (p_1 a^+(p_1))(p_2 a^+(p_2))\Psi_0, \ldots, (pa^+)^n \Psi_0, \ldots \tag{166}$$

Однако любое состояние, содержащее хотя бы один скалярный квант, имеет нулевую норму и ортогонально остальным разрешенным состояниям.

4) Из общего выражения для v_μ (160) ясно, что у свободного фотона только два физических состояния, описываемых $e_\mu^{(1)}$ и $e_\mu^{(2)}$. Что касается члена, пропорционального p_μ, то он ведет к несущественным состояниям. Коэффициент c при p_μ в разложении (160) остается неопределенным, демонстрируя калибровочный произвол в определении $e_\mu^{(1)}$ и $e_\mu^{(2)}$. Этот произвол позволяет, если нужно, переходить от одного времениподобного вектора, входящего в определение базиса (15), (18), к любому другому, а это, как уже говорилось в п. 2.4, гарантирует лоренц-инвариантность.

Общий вид преобразований перехода от одного вектора a_μ к другому в свободном случае ($e = 0$) получится из (59) и (61), если там положить $e = 0$. Точно тем же путем из (63) и (64) следует частная форма преобразований, соответствующая замене в (58) общего вектор-потенциала A_μ на часть A_μ^r ($\Box A_\mu^r = 0$):

$$A'^r_\mu = A^r_\mu - \frac{\partial_\mu}{n'\partial}(n' A^r), \tag{167}$$

$$\psi'^r = \psi^r. \tag{168}$$

Именно так преобразуются векторы $e_\mu^{(i)}$ ($i = 1, 2$) [33]

$$e'_\mu = e'_\mu - \frac{p_\mu}{n'p}(n'e) \tag{169}$$

при переходе от одного вектора n_μ, когда

$$pe = 0, \quad ne = 0, \tag{170}$$

к другому n'_μ, когда

$$pe' = 0, \quad n'e' = 0. \tag{171}$$

Отрицательный вклад в энергию вносили состояния, порождаемые операторами (na^+) (например, $(na^+)\Psi_0$). Поэтому, устраняя состояния с отрицательной нормой, условие Лоренца делает энергию положительной. Действительно, для среднего от 4-импульса имеем

$$(\Psi, P_\rho \Psi) = (\Psi p_\rho : a_\mu^+(\mathbf{p}) a_\mu(\mathbf{p}) : \Psi) = \left(\Psi, \int d\mathbf{p}_\rho \left\{ \sum_{i=1}^{2} (e^{(i)} a^+)(e^{(i)} a) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{(pa^+)(pa) + (np)[(pa^+)(na) + (na^+)(pa)]}{(np)^2} \right\} \Psi \right) =$$
$$= \left(\Psi, \int d\mathbf{p} p_\rho \sum_{i=1}^{2} (e^{(i)} a^+)(e^{(i)} a) \right), \quad (172)$$

где во второй строке мы воспользовались соотношением полноты (19) при $p^2 = 0$, а в третьей учли условие Лоренца

$$\Psi(pa) = 0, \qquad \Psi^+(pa^+) = 0. \quad (173)$$

Итак, энергия положительна*: положительно определена для состояний, порождаемых операторами $e^{(1)}a^+$, $e^{(2)}a^+$, и равна нулю для состояний, содержащих хотя бы один оператор pa^+. Можно показать, что только поперечные фотоны вносят вклад в средние и от других физических операторов, например, от оператора момента количества движения.

Таким образом, условие Лоренца разбивает гильбертово пространство состояний фотона на физическое и нефизическое подпространства, или, точнее говоря, даже на три части: 1) физическое подпространство — состояния, порождаемые действием на вакуум операторами $e^{(1)}a^+$ и $e^{(2)}a^+$, 2) безвредный «фон» — состояния, порождаемые, кроме того, операторами pa^+ (отличительная их черта — нулевая норма) и 3) нефизическое подпространство — все состояния, порождаемые операторами na^+ (независимо или наряду с другими операторами рождения).

д) *Противоречивость условия Ферми.* Предложенное Ферми в 1932 г. дополнительное условие выглядело так:

$$\partial_\mu A_\mu(x) \Psi = 0. \quad (174)$$

Вычисляя один раз интеграл $\int d^4x \exp(-\imath px) \partial_\mu A_\mu(x)$, а второй раз — $\int d^4x \exp(\imath px) \partial_\mu A_\mu(x)$, причем в обоих случаях $p_0 = |\mathbf{p}|$, заключаем, что в импульсном пространстве условие Ферми сводится к двум условиям:

$$p_\mu a_\mu(\mathbf{p}) \Psi = 0, \quad p_\mu a_\mu^+(\mathbf{p}) \Psi = 0. \quad (175)$$

*Ср. с п. 1.2, где аналогичный вывод получался при использовании условия Лоренца для вектор-потенциала, а не для векторов состояний.

Теперь проанализируем две возможности.

1) Пусть имеется полная ковариантность. Тогда метрика — неопределенная, все операторы a_μ суть операторы уничтожения, все операторы a_μ^+ — операторы рождения, а вакуум определяется согласно (149). Первое из этих условий состоятельно и проанализировано выше. Подействуем на второе оператором $(na(\mathbf{p}))$. Тогда с помощью определения вакуума (148) и перестановочных соотношений (158) получим

$$(an)(pa^+)\Psi = (np)\Psi = 0. \tag{176}$$

Но поскольку ни (np), ни Ψ не равны нулю, то условие Ферми противоречиво.

2) Пусть, отказавшись от явной ковариантности, мы примем положительно определенную метрику, операторы a_m, a_4^+ — за операторы уничтожения, операторы a_m^+, a_4 — за операторы рождения, а вакуум определим согласно (146). Выберем в качестве Ψ вакуум Ψ_0. Тогда с учетом (146)

$$(\mathbf{pa}^+ - p_0 a_0^+)\Psi = \mathbf{pa}^+\Psi = 0, \quad (\mathbf{pa} - p_0 a_0)\Psi = -p_0 a_0 \Psi = 0. \tag{177}$$

Эти соотношения противоречивы. Действие операторов рождения a_m^+, a_0 на вакуум не может давать нуль, что следует из общего анализа (п. 4.5, в). Состоятельную теорию такого рода можно получить, если, например, принять вместо (175) нековариантное условие вида

$$(\mathbf{pa}^+ - p_0 a_0^+)\Psi = 0. \tag{178}$$

Еще одна возможность — изменить определение вакуума так, чтобы он был обычным вакуумом только для поперечных фотонов (см. [4]):

$$(\mathbf{e}^{(1)}\mathbf{a})\Psi_0 = 0, \quad (\mathbf{e}^{(2)}\mathbf{a})\Psi_0 = 0. \tag{179}$$

Здесь принято $n = (0, 0, 0, \imath)$. При этом мы еще больше удаляемся от ковариантной формулировки. Введем полную систему состояний

$$\Psi(n_1, n_2, n_3, n_0) = (\mathbf{e}^{(1)}\mathbf{a}^+)^{n_1}(\mathbf{e}^{(2)}\mathbf{a}^+)^{n_2}(\mathbf{pa}^+)^{n_3} a_0^{n_0}\Psi_0 \tag{180}$$

и разложим по ней произвольное состояние

$$\Psi = \sum c(n_1, n_2, n_3, n_0)\Psi(n_1, n_2, n_3, n_0). \tag{181}$$

Тогда из условия (175) нетрудно найти

$$c(n_1, n_2, n_3, n_0) = \delta_{n_0 n_3} c'(n_1, n_2) \tag{182}$$

с произвольной зависимостью c' от n_1, n_2. Это означает, что состояние

$$\Psi_{\text{физ.вак}} = \sum_{n_0=0}^{\infty} [(\mathbf{pa}^+)a_0]^{n_0}\Psi_0 \tag{183}$$

играет роль физического вакуума, а физические состояния порождаются путем действия на него операторами $(\mathbf{e}^{(1)}\mathbf{a}^+)$ и $(\mathbf{e}^{(2)}\mathbf{a}^+)$. Однако, не говоря уже об отсутствии явной ковариантности, эта форма теории неудовлетворительна тем, что состояние $\Psi_{\text{физ.вак}}$ и все остальные возможные состояния ненормируемы [4]. Причем это не связано с непрерывностью спектра, состояния обладают бесконечной нормой в подпространстве с одним единственным значением импульса. Таким образом, и в этом случае условие Ферми в первоначальной форме ведет к противоречию.

4.6. S-матрица. Обратимся к S-матрице в представлении взаимодействия (96). Ее всегда можно представить в нормальной форме [21, 22]

$$S = \sum_{m,n=0}^{\infty} \int dx_1 \cdots dx_n dy_1 \cdots dy_m dz_1 \cdots dz_m K_{\mu_1,\ldots,\mu_n} \times \\ \times (x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_m) \times \\ \times : A_{\mu_1}(x_1),\ldots,A_{\mu_n}(x_n) :: \psi(y_1),\ldots,\psi(y_m)\bar{\psi}(z_1)\cdots\bar{\psi}(z_m) :, \quad (184)$$

где $A_\mu(x)$ и $\psi_\mu(y)$ — свободные электромагнитные и электронно-позитронные поля; $K_{\mu_1,\ldots,\mu_n}$ — коэффициентные функции [21], известным образом выражающиеся через спаривания (свободные одночастичные функции распространения). Функция распространения фотона в формулировке с поперечной калибровкой векторов состояния берется в виде [46]

$$A_\mu(x)A_\nu(y) = \frac{-\imath}{(2\pi)^4}\int d^4p\, \mathrm{e}^{\imath px}\frac{\delta_{\mu\nu}}{p^2-\imath\epsilon}, \quad \epsilon > 0. \quad (185)$$

Пока свободные операторы $A_\mu(x)$ в (184) описывают все 4 типа векторных квантов. Подставим в S-матрицу (184) вектор-потенциал в форме разложения по плоским волнам

$$A_\mu(x) = \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}}\{a_\mu(\mathbf{p})\,\mathrm{e}^{\imath px} + a_\mu^+(\mathbf{p})\,\mathrm{e}^{-\imath px}\}, \quad (186)$$

а здесь, в свою очередь, с помощью условия полноты (19) представим операторы a_μ и a_μ^+ разложениями

$$a_\mu = \sum_{i=1}^{2} e_\mu^{(i)}(e^{(i)}a) + \frac{p_\mu}{(pn)^2}[(pa)+(pn)(na)] + \frac{p_\mu}{(pn)}(pa) \quad (187)$$

(мы учли, что $p^2 = 0$). Благодаря калибровочной инвариантности, т. е. в представлении взаимодействия инвариантности относительно преобразований

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\Lambda(x) \quad (188)$$

коэффициентные функции обладают свойством [21]

$$\frac{\partial}{\partial x^i_{\mu_i}}[K_{\mu_1,\dots,\mu_n}(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m,z_1,\dots,z_m)\times \\ \times :\psi(y_1)\cdots\psi(y_m),\bar{\psi}(z_1)\cdots\bar{\psi}(z_m):]=0. \quad (189)$$

С учетом этого свойства в S-матрице из a_μ (187) можно опустить член, пропорциональный p_μ, т. е. там можно произвести замену

$$a_\mu \to \sum_{i=1}^{2} e^{(i)}_\mu (e^{(i)}a) + \frac{n_\mu}{np}(pa) \quad (190)$$

и аналогично для a^+_μ.

В формулировке с поперечной калибровкой состояний матричные элементы S-матрицы, а следовательно, и матричные элементы

$$(\Psi_f, : A_{\mu_1}(x_1)\cdots A_{\mu_n}(x_n) : \Psi_i) \quad (191)$$

берутся только между состояниями Ψ_i и Ψ_f, удовлетворяющими дополнительному условию (156). Напомним, что такие состояния Ψ_i и Ψ_f строятся путем действия на вакуум операторами $e^{(i)}a^+$ и pa^+, но не na^+. Поэтому после замены (190) любой оператор pa (или pa^+) коммутирует со всеми операторами: $e^{(i)}a$, $e^{(i)}a^+$ $(i=1,2)$, pa и pa^+, встречающимися в матричном элементе (191)*, вплоть до левого и правого вакуумов. Оператором pa удобно подействовать на правый вакуум, так как это дает нуль. Оператор pa^+ даст нуль при действии на левый вакуум. Это означает, что мы можем заменить a_μ в (191) на

$$a_\mu \to \sum_{i=1}^{2} e^{(i)}_\mu (e^{(i)}a), \quad (192)$$

т. е. можно считать, что в N-произведении в (191) и в S-матрице (184) вместо A_μ стоят операторы

$$A^r_\mu(x) = \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}}\{a_\mu(\mathbf{p})\,\mathrm{e}^{\imath px} + a^+_\mu(\mathbf{p})\,\mathrm{e}^{-\imath px}\}. \quad (193)$$

*Оператор pa не коммутирует только с оператором na^+.

Таким образом, S-матрица запишется

$$S = \sum_{m,n=0}^{\infty} \int dx_1 \cdots dx_n dy_1 \cdots dy_m dz_1 \cdots dz_m K_{\mu_1,\ldots,\mu_n} \times \\ \times (x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_m, z_1 \cdots z_m) \times \\ \times :A^r_{\mu_1}(x_1) \cdots A^r_{\mu_n}(x_n) :: \psi(y_1) \cdots \psi(y_m) \bar{\psi}(z_1) \cdots \bar{\psi}(z_m) : . \quad (194)$$

Итак, когда речь идет о свободных концах диаграммы Фейнмана, то там следует использовать тот же поперечный в 3-мерном смысле вектор-потенциал, который рассматривается в калибровке излучения (разд. 2). Это означает, что каждый излучающийся или поглощающийся фотон с определенным импульсом обладает только двумя степенями свободы: вектор-потенциал (193), входящий в (194), описывает только два состояния фотона: $e_\mu^{(1)}$ и $e_\mu^{(2)}$. В электродинамике с поперечной калибровкой векторов состояния этот факт — следствие не только калибровочной инвариантности, исключающей продольную (в четырехмерном смысле) составляющую A_μ, но и дополнительного условия (156) на векторы состояния, которое исключает состояния, рождаемые операторами na^+.

Для сравнения напомним, что в классической электродинамике составляющая вектор-потенциала A_μ, направленная по n_μ, также исключается: в теории Максвелла — самим уравнением Максвелла $\Box A_\mu - \partial_\mu \partial_\nu A_\nu = 0$, в теории, использующей уравнение Даламбера $\Box A_\mu = 0$, дополнительным условием Лоренца $\partial_\mu A_\mu = 0$. Составляющая A_μ, направленная по p_μ, как и выше, исключается калибровочной инвариантностью.

4.7. Сводка результатов по формулировке с поперечной калибровкой векторов состояния. В формулировке с поперечной калибровкой векторов состояния используют уравнения движения (77) и (78) (лагранжиан (76)), перестановочные соотношения (79) и дополнительное условие (93). Проведенный анализ показал полную эквивалентность этой совокупности уравнений уравнениям в калибровке излучения.

В представления взаимодействия используются разложение вектор-потенциала $Ap_\mu(x)$ по плоским волнам (123), перестановочные соотношения (158), дополнительное условие на векторы состояния (156), функция распространения (185) и S-матрица в форме (184). S-матрица может быть приведена к виду (194), куда входит вектор-потенциал (193). Входящие в (193) векторы $e_\mu^{(1)}$ и $e_\mu^{(2)}$ определяются (хотя и неоднозначно) уравнением (159). Все перечисленные уравнения и соотношения явно лоренц-ковариантны.

4.8. Старый формализм Гупты. Симметричную трактовку четырех компонент вектор-потенциала впервые удалось представить в корректной форме Гупте. До этого равноправная трактовка всех четырех компонент вектор-потенциала, интенсивно использовавшаяся в работах Фейнмана и Швингера, не имела законных прав. Гупта первый осознал, что равноправие всех четырех компонент вектор-потенциала подразумевает неопределенную метрику в гильбертовом пространстве состояний.

Идею старого формализма Гупты [7] (см. также [8, 19]) можно понять так: взять в качестве строительного материала хорошо знакомое (с хорошо определенными понятиями) пространство с положительной метрикой, пусть не лоренц-инвариантное и не имеющее физического смысла, и в его терминах построить лоренц-инвариантное пространство с неопределенной метрикой. Таким образом, старый формализм Гупты есть лишь одна частная реализация пространства с неопределенной метрикой.

Основные определения, касающиеся двух упомянутых гильбертовых пространств, приведены в табл. 1.

Таблица 1

Величины	Вспомогательное гильбертово пространство с положительной метрикой	Реализация гильбертова пространства с неопределенной метрикой
Метрический тензор	1 (195.1)	η (195.2)
Сопряженное состояние	Ψ^* (196.1)	$\Psi^+ = \Psi^* \eta$ (196.2)
Норма	$\Psi^* \Psi > 0$ (197.1)	$\Psi^+ \Psi = \Psi^* \eta \Psi$ (197.2)
Среднее оператора B	$\Psi^* B \Psi$ (198.1)	$\Psi^+ B \Psi = \Psi^* \eta B \Psi$ (198.2)
Оператор, эрмитово-сопряженный к B	B^* (199.1)	$B^+ = \eta B^* \eta^{-1}$ (199.2)
Пример: операторы уничтожения	a_μ (200.1)	a_μ (200.2)
Операторы рождения	a_μ^* (201.1)	$a_\mu^+ = \eta a_\mu^* \eta^{-1}$ (201.2)
Перестановочные соотношения для операторов рождения и уничтожения	$[a_\mu, a_\nu^*] = \delta_{\mu\nu}$ (202.1) $[a_0, a_0^*] = 1$ (203.1)	$[a_\mu, a_\nu^*] = \delta_{\mu\nu}$ (202.2) $[a_0, a_0^*] = -1$ (203.2)
Определение вакуума	$a_\mu \Psi_0 = 0$ (204.1)	$a_\mu \Psi_0 = 0$ (204.2)
Условие эрмитовости	$B^* = B$ (205.1)	$B^+ = \eta B^* \eta^{-1} = B$ (205.2)
Условие унитарности	$B^* = B^{-1}$ (206.1)	$B^+ = \eta B^* \eta^{-1} = B^{-1}$ (206.2)

По поводу перестановочного соотношения (203.1) напомним, что поскольку под a_0 и a_0^* мы понимаем эрмитово-сопряженные операторы уничтожения и рождения, то для них в гильбертовом пространстве с положительно определенной метрикой возможно только такое перестановочное соотношение (см. п. 4.5, б). При построении гильбертова пространства с неопределенной метрикой вводится метрический тензор η и определяется сопряженное состояние $\Psi^+ = \Psi^* \eta$. Все остальное в этой таблице следует из общих определений п. 4.5 для гильбертовых пространств.

Существенный момент: как следствие того, что мы исходим из гильбертова пространства с положительной метрикой, определение вакуума (204.2) есть не предположение, а результат построения. Далее, из (202.1) и (202.2), (203.1) и (203.2) заключаем, что

$$a_m^+ = a_m^*, \tag{207}$$

$$a_0^+ = -a_0^* \tag{208}$$

и, следовательно,

$$[\eta, a_m^+] = 0, \tag{209}$$

$$[\eta, a_0^+] = 0. \tag{210}$$

Отсюда

$$\eta = (-1)^{a_0^* a_0}. \tag{211}$$

Наконец, приведем разложения вектор-потенциала A_μ по плоским волнам (табл. 2).

Таблица 2

Во вспомогательном гильбертовом пространстве с положительной метрикой	В гильбертовом пространстве с неопределенной метрикой
$A_\mu = \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}} \times$ $\times [a_\mu(\mathbf{p})\, e^{\imath \mathbf{px}} + a_\mu^*(\mathbf{p})\, e^{-\imath \mathbf{px}}]$ (эрмитов) (212.1)	$A_\mu = \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}} \times$ $\times [a_\mu(\mathbf{p})\, e^{\imath \mathbf{px}} + a_\mu^+(\mathbf{p})\, e^{-\imath \mathbf{px}}]$ (эрмитов) (212.2)
$A_0 = \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}} \times$ $\times [a_0(\mathbf{p})\, e^{\imath \mathbf{px}} - a_0^*(\mathbf{p})\, e^{-\imath \mathbf{px}}]$ (антиэрмитов) (213.1)	$A_0 = \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}} \times$ $\times [a_0(\mathbf{p})\, e^{\imath \mathbf{px}} + a_0^+(\mathbf{p})\, e^{-\imath \mathbf{px}}]$ (эрмитов) (213.2)

Во вторично-квантованной теории переход из одной системы отсчета в другую можно трактовать двумя эквивалентными способами, рассмотренными в разд. 5. Мы будем придерживаться одной из этих трактовок, когда при переходе из одной системы отсчета в другую:

а) преобразованию подвергаются операторы;

б) векторы состояния Ψ, описывающие физические системы, не изменяются*;

а отсюда, вследствие независимости нормы от системы отсчета:

в) не изменяется метрический тензор η.

Вектор-потенциал в старой системе отсчета A_μ и вектор-потенциал в новой системе отсчета A'_μ связаны преобразованием Лоренца

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A}' + \mathbf{n}' \frac{n'_\mu A'_\mu - A_0}{1 + n'_0}. \tag{214}$$

(Мы привели обратное преобразование Лоренца, прямое можно получить из (214) заменами $A \to A'$, $\mathbf{n}' \to -\mathbf{n}'$.) Обычный параметр преобразования Лоренца $\boldsymbol{\beta}$ представлен в (214) с помощью единичного, положительного времениподобного вектора n':

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{n}'}{n'_0}, \quad n'^2_\mu = n'^2 - n'^2_0 = -1, \quad n'_0 > 0. \tag{215}$$

По закону преобразования (214) преобразуются и операторы рождения и уничтожения a_μ и a^+_μ.

Так как метрический тензор (211) не преобразуется, то с помощью (214) в новой системе отсчета его можно записать в виде

$$(-1)^{\int d\mathbf{p} a_0^+ a_0} = (-1)^{\int d\mathbf{p} n'_\mu a'^+_\mu n'_\nu a'_\nu}. \tag{216}$$

Далее нетрудно вывести, что эквивалентом перестановочных соотношений (209) и (210) в новой системе отсчета будет**

$$[\eta, a'^+_\mu + n'_\mu (n' a'^+)] = 0, \quad [\eta, (n' a'^+)] = 0. \tag{217}$$

---

*Точнее говоря, вектор состояния является скалярной функцией переменных, характеризующих физическое состояние.

**Вывод. Если в (209) и (210) подставить a^+_μ, выраженными согласно (214) через a'^+_μ, то получим

$$\left[\eta, a'^+_m + n'_m \frac{(n' a'^+ - a'^+_0)}{n'_0 + 1}\right] = 0, \quad \{\eta, n' a'^+\} = 0.$$

Второе соотношение сразу получилось в «ковариантной» форме, а первое должно быть преобразовано дальше. Свернем его один раз с $\delta_{mn} + \dfrac{(n'_n n'_m)}{n'_0 + 1}$ и второй с n'. Это даст, соответственно, два соотношения:

$$[\eta, a'^+_m + n'_m (n' a'^+)] = 0, \quad [\eta, a'^+_0 + n'_0 (n' a'^+)] = 0,$$

которые уже имеют нужный вид.

Таким образом, приходим к выводу, что форма метрического тензора (211) и перестановочных соотношений (208) и (210) была частной, возможной только в одной системе отсчета. Общей, справедливой в любой системе отсчета записью метрического тензора и перестановочных соотношений с η является

$$\eta = (-1)^{\int d\mathbf{p}(na^+)(na)}, \tag{218}$$

$$[\eta, a_\mu^+ + n_\mu(na^+)] = 0, \quad [\eta, (na^+)] = 0. \tag{219}$$

Первоначальные перестановочные соотношения (208) и (210) соответствуют той системе отсчета, в которой $n_\mu = (0, 0, 0, \imath)$.

Появление в теории постороннего времениподобного вектора n_μ говорит о том, что в теории, во всяком случае, нет явной лоренц-инвариантности. Такая ситуация обусловлена исходными предположениями. В то время как a_μ^+ образуют 4-вектор, а перестановочные соотношения (202.2), (203.2) явно ковариантны $([a_\mu, a_\nu^+] = \delta_{\mu\nu})$, a_μ^* лоренцевского 4-вектора не образуют, а перестановочные соотношения (202.1) и (203.1) явной ковариантностью не обладают (см. в этой связи рассуждения в п. 4.5, б). Естественно, что метрический тензор η, осуществляющий связь между этими величинами и соотношениями, также не обладает явной ковариантностью. Присутствие постороннего времениподобного вектора n_μ вообще могло бы означать отсутствие всякой лоренц-инвариантности. Утверждение об отсутствии лоренц-инвариантности в старом формализме Гупты впервые было высказано Сунакавой в 1958 г. [9]. После его критики Гупта [10, 11] и Кониси и Огимото нашли выход в переходе к новому, упрощенному и вместе с тем более общему, и явно лоренц-инвариантному формализму, о котором говорилось выше в пп. 4.5–4.7.

Однако на самом деле и старая формулировка Гупты не столь уж плоха. На самом деле в ней ситуация такая же, как в формулировке Дирака: несмотря на присутствие вектора $n_m u$, лоренц-инвариантность существует, но только она не является явной.

Чтобы убедиться в существовании лоренц-инвариантности, достаточно доказать, что вектор $n_m u$ может быть выбран любым, и от него, если угодно, можно перейти к любому другому положительному времениподобному вектору. Переход от одного $n_m u$ к другому можно произвести с помощью калибровочного преобразования:

$$a_\mu = a'_\mu + \frac{p_\mu}{(np)}(n' - n, a). \tag{220}$$

Умножение обеих частей этого равенства на $n_m u$ и на $n'_m u$ дает два соотношения

$$na = n'a', \quad (n' - n, a) = \frac{n'p}{np}(n' - n, a'). \tag{221}$$

Второе соотношение гарантирует взаимную однозначность перехода от $a_m u$ к $a'_m u$, и наоборот, а первое дает нужный нам переход к новому времениподобному вектору

$$\eta = (-1)^{\int d\mathbf{p}(na^+)(na)} = (-1)^{\int d\mathbf{p}(n'a'^+)(n'a')}. \tag{222}$$

В частности, выбрав $n'_m u$ в виде $n'_m u = (0,0,0,1)$, мы можем вернуть метрическому тензору форму (211). Однако этим вопрос решается еще не полностью. В самом деле, калибровочное преобразование (220) изменяет перестановочные соотношения, и они переходят в

$$[a'_\mu(\mathbf{p}), a'_\nu(\mathbf{q})] = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu}{(n'p)}(n'-n,a)_\nu - (n'-n,a)_\mu \times \right.$$
$$\left. \times \frac{p_\nu}{(n'p)} + \frac{p_\mu p_\nu}{(n'p)^2}(n'-n,n'-n)\right)\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}). \tag{223}$$

Несмотря на это, благодаря калибровочной инвариантности и дополнительному условию (156), мы имеем право использовать обычные перестановочные соотношения

$$[a'_\mu(\mathbf{p})a'_\nu(\mathbf{q})] = \delta_{\mu\nu}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}). \tag{224}$$

Дело в том, что и до, и после калибровочного преобразования векторы состояния удовлетворяют дополнительному условию (156):

$$ap\Psi = 0, \quad \Psi^+(a^+p) = 0, \tag{225}$$

$$a'p\Psi = 0, \quad \Psi^+(a'^+p) = 0 \tag{226}$$

и поэтому строятся путем действия на вакуум Ψ_0 операторами $a^+e(i)$ и $a'^+e(i)$ соответственно. Благодаря калибровочной инвариантности S-матрица также перевыражается только через операторы $ae(i)$ до калибровочного преобразования (220) и через $a'e(i)$ после. Однако для остающихся в игре операторов $ae(i)$ и $a'e(i)$ перестановочные соотношения одинаковы:

$$[ae(i), a^+e(j)] = \delta_{ij}, \tag{227}$$

$$[a'e(i), a'^+e(j)] = \delta_{ij}. \tag{228}$$

Эти рассуждения оправдывают использование перестановочных соотношений (224) и завершают доказательство возможности перейти от одного вектора к любому другому.

Остановимся немного на критике Сунакавы [9]. Он придерживался второй точки зрения, согласно которой при преобразованиях Лоренца преобразуются векторы состояния (см. разд. 5)

$$\Psi' = V_L\Psi = (1 + \imath\omega_{\mu\nu}M_{\mu\nu})\Psi, \quad \Psi'^* = \Psi^* V_L^*. \tag{229}$$

Сунакава продемонстрировал, что оператор V_L унитарен в смысле пространства с неопределенной метрикой (в смысле (206.2))*

$$V_L^+ \equiv \eta^{-1} V_L^* = V_L^{-1}. \tag{230}$$

Унитарность в этом смысле как раз то свойство, которое гарантирует независимость нормы $\Psi^* \eta \Psi$ от системы отсчета:

$$\Psi'^* \eta \Psi' = \Psi^* \eta \Psi, \tag{231}$$

причем метрический тензор остается неизменным:

$$\eta' = V_L^* \eta V_L = \eta V_L^{-1} V_L = \eta. \tag{232}$$

Сунакава считал закон преобразования η (232) противоречащим принципу относительности, поскольку (232) означает, что $\eta' \neq (-1)^{-a'^+_0 a^+_0}$ и, следовательно, перестановочные соотношения (209) и (210) перестают быть верными для a'_μ и η'. Сунакава не заметил, что изменившийся после преобразования Лоренца вектор n_μ можно преобразовать к первоначальному виду $n_\mu = (0, 0, 0, \imath)$ с помощью дополнительного калибровочного преобразования (см. выше). А это, в противоположность выводу Сунакавы, и доказывает ковариантность старого формализма Гупты. Характеризуя старый формализм Гупты, важно подчеркнуть, что здесь определение вакуума (204) — следствие перестановочных соотношений (202.1), (203.1) (см. п. 4.5, б), а не постулат, как в п. 4.5, в. Благодаря этому построенное гильбертово пространство с неопределенной метрикой исчерпывается системой состояний (150). Эта система полна.

Следовательно, старый формализм Гупты демонстрирует состоятельность постулата (149) и принципиальную возможность построения необходимого гильбертова пространства с неопределенной метрикой.

Старый формализм Гупты впервые обеспечил равноправие всех четырех компонент A_μ, однако за это была заплачена дорогая цена. Сверх нужного пространства с неопределенной метрикой было введено еще одно, вспомогательное пространство с положительной метрикой. За счет этого формализм, ковариантный в целом, оказался не обладающим явной ковариантностью, что выразилось прежде всего в зависимости метрического тензора (211) от постороннего времениподобного вектора. В то же время новый общий формализм Гупты с неопределенной метрикой, изложенный в п. 4.5, явно лоренц-инвариантен. Вместе с тем он существенно проще, так как в нем мы имеем дело только с одним гильбертовым пространством, а не с двумя.

---

*Это свойство проверяется с помощью формул (208), (210) и выражения (286) для $M_{\mu\nu}$, которое в явном виде записывается с помощью (301) и (307) (разд. 5).

4.9. Переход к представлению взаимодействия в калибровке излучения. В п. 4.6 сформулировано представление взаимодействия для теории с наложением дополнительного условия на векторы состояния. При этом было показано, что S-матрица может быть приведена к виду (194), куда входит вектор-потенциал $A_\mu^r(x)$ как раз в калибровке излучения. Записывая выражение (193) для $A_\mu^r(x)$ в виде

$$A_\mu^r(x) = \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}} [b_\mu(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{\imath px} + b_\mu^+(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{-\imath px}] \quad (p^2 = 0), \tag{233}$$

мы вводим операторы уничтожения b_μ и рождения b_μ^+:

$$b_\mu = \sum_{i=1}^{2} e_\mu^{(i)} (e^{(i)} a), \quad b_\mu^+ = \sum_{i=1}^{2} e_\mu^{(i)} (e^{(i)} a^+), \tag{234}$$

отвечающие калибровке излучения. С помощью перестановочных соотношений (158) и условия полноты (19) нетрудно вычислить перестановочные соотношения для операторов b_μ и b_μ^+:

$$[b_\mu(\mathbf{p}), b_\nu(\mathbf{q})] = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{n_\mu p_\nu + n_\nu p_\mu}{np} - \frac{p_\mu p_\nu}{(np)^2} \right) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \tag{235}$$

а b_μ с b_ν и b_μ^+ с b_ν^+, естественно, коммутируют. Законченную формулировку представления взаимодействия в калибровке излучения мы получим, если в S-матрице (194) перейдем к соответствующему описанию виртуальных фотонов, т. е. если вместо функции распространения (185) введем функцию распространения в калибровке излучения. Такой переход был осуществлен Фейнманом [46] при $n_\mu = |0, 0, 0, \imath|$. Мы с этой целью используем соотношение полноты (19), с помощью которого в функции распространения в p-представлении $\delta_{\mu\nu}/p^2$ символ Кронекера может быть представлен в виде

$$\delta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - \frac{[p_\mu + (np)n_\mu][p_\nu + (np)n_\nu]}{p^2 + (pn)^2} + n_\mu n_\nu + \\ + \frac{[p_\mu + (np)n_\mu][p_\nu + (np)n_\nu]}{p^2 + (pn)^2} - n_\mu n_\nu. \tag{236}$$

Затем в последней строке отбросим члены, пропорциональные p_μ или p_ν. Это позволяет калибровочная инвариантность. После приведения оставшихся в этой строке членов получаем, что фейнмановская функция распространения переходит в

$$\frac{\delta_{\mu\nu}}{p^2} \to \frac{1}{p^2}\left\{\delta_{\mu\nu} - \frac{[p_\mu + (np)n_\mu][p_\nu + (np)n_\nu]}{p^2 + (np)^2} + n_\mu n_\nu\right\} - \\ - \frac{n_\mu n_\nu}{p^2 + (pn)^2}, \quad (237)$$

где первая строка есть функция распространения для поля $A_m u^r$, а вторая — обобщенная на любые n_μ запись кулоновского взаимодействия. Действительно, понимая T-упорядочивание как упорядочивание в направлении n_μ, имеем для функции распространения для поля $A_m u^r$:

$$\overline{A^r_\mu(x)A^r_\nu(y)} = \langle 0|TA^r_\mu(x)A^r_\nu(y)|0\rangle = \frac{-\imath}{(2\pi)^4}\int d^4p \frac{\mathrm{e}^{\imath p(x-y)}}{p^2 - \imath\epsilon}\sum_{i=1}^{2} e^{(i)}_\mu e^{(i)}_\nu = \\ = \frac{-\imath}{(2\pi)^4}\int d^4p \frac{\mathrm{e}^{\imath p(x-y)}}{p^2 - \imath\epsilon}\left\{\delta_{\mu\nu} - \frac{[p_\mu + (np)n_\mu][p_\nu + (np)n_\nu]}{p^2 + (np)^2} + n_\mu n_\nu\right\}, \quad (238)$$

где последняя строка получается с помощью соотношения полноты (19). В частном случае $n_\mu = \{0, 0, 0, \imath\}$ мы имеем обычное T-упорядочивание по оси времени [47]:

$$\overline{A^r_\mu(x)A^r_\nu(y)} = \langle 0|TA^r_\mu(x)A^r_\nu(y)|0\rangle = \\ = \begin{cases} \dfrac{-\imath}{(2\pi)^4}\displaystyle\int d^4p \frac{\mathrm{e}^{\imath p(x-y)}}{p^2 - \imath\epsilon}\left(\delta_{mn} - \frac{p_m p_n}{\mathbf{p}^2}\right), & \mu = m \neq 4 \\ 0, & \nu = n \neq 4 \end{cases}. \quad (238.1)$$

Функция распространения (238), как обычно, является функцией Грина свободного (т. е. с $e = 0$) уравнения (45):

$$\Box\overline{A^r_\mu(x)A^r_\nu(y)} = \\ = -\imath\left\{\delta_{\mu\nu} - \frac{[\partial_\mu + n_\mu(n\partial)][\partial_\nu + n_\nu(n\partial)]}{\Box + (n\partial)^2} + n_\mu n_\nu\right\}\delta(x-y). \quad (239)$$

Наконец, очевидно, что функция распространения (238) подчиняется тем же дополнительным условиям (24), что и сам оператор поля $A_m u^r$. Точно так же (238.1) подчиняется дополнительным условиям (26).

Второй строке (237), представляющей кулоновское взаимодействие, соответствует в x-представлении выражение

$$D^0_{\mu\nu}(x-y) = \frac{\imath}{(2\pi)^4}\int d^4p\, \mathrm{e}^{\imath p(x-y)}\frac{n_\mu n_\nu}{p^2 + (pn)^2}, \quad (240)$$

которое при частном выборе $n_\mu = \{0, 0, 0, \imath\}$ сводится к обычному кулоновскому взаимодействию

$$D^0_{\mu\nu} = \frac{-\imath}{(2\pi)^4}\delta_{\mu 4}\delta_{\nu 4}\int d^4p\, \mathrm{e}^{\imath p(x-y)}\frac{1}{\mathbf{p}^2} =$$
$$= -\imath\delta_{\mu 4}\delta_{\nu 4}\delta(x_0 - y_0)\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} = \imath\delta_{\mu 4}\delta_{\nu 4}\Delta^{-1}\delta^4(x-y). \quad (240.1)$$

Итак, мы пришли к представлению взаимодействия в калибровке излучения с S-матрицей в форме (194), в которой в качестве функций распространения фотонов стоят выражения

$$\overline{A^r_\mu(x)A^r_\nu(y)} + D^0_{\mu\nu}. \quad (241)$$

Операторы $A^r(x)$, стоящие под знаком нормального произведения, разлагаются по плоским волнам согласно (233), а операторы уничтожения b и рождения b^+ подчиняются перестановочным соотношениям (235). Такая S-матрица есть в точности S-матрица (107) (без члена $j^B\partial_4/\triangle\partial_\mu A_\mu$) которая непосредственно получается в калибровке излучения.

Только фотоны, соответствующие операторам рождения $e(1)a^+$ и $e(2)a^+$, присутствуют в свободных состояниях, например, в начальных и конечных. Однако и фотоны, соответствующие операторам pa^+ и na^+, не исчезли бесследно. Когда они находятся в виртуальном состоянии, то «обмен» такими фотонами порождает кулоновское взаимодействие. Другими словами, как видно из вычислений данного пункта, у виртуального фотона сверх двух-трех поперечных степеней свободы, только и свойственных свободному фотону, появляется еще одна степень свободы, ответственная за кулоновское взаимодействие (четвертая степень свободы исключается калибровочной инвариантностью). Только вместе эти три степени свободы лоренц-инвариантны*. И это не удивительно: поскольку масса виртуального фотона не равна нулю, у него как у частицы [23] со спином 1 должно быть три степени свободы.

4.10. Суммирование по состояниям поляризации свободного фотона. Соотношение полноты (18) использовалось почти в каждом пункте. Здесь мы его применим еще раз для вывода фейнмановского правила суммирования по состояниям поляризации фотона.

Из записи S-матрицы в форме (194) с вектор-потенциалом A^r_μ (193) и из того, что состояния фотона образуются из вакуума только при помощи операторов $e(1)a^+$ и $e(2)a^+$, ясно, что матричный элемент S-матрицы с фотоном

*В частности, в [48] продемонстрировано, что кулоновское взаимодействие возникает из требования лоренц-инвариантности.

в состоянии $e(1)$ в начальном или конечном состоянии представим в виде

$$\langle f|S|i\rangle = e_\mu^{(j)}(\mathbf{p})M_\mu. \tag{242}$$

Образуем вероятность перехода и просуммируем ее по состояниям фотона $j = 1, 2$:

$$\sum_{j=1}^{2} |\langle f|S|i\rangle|^2 = \sum_{j=1}^{2} e_\mu^{(j)}(\mathbf{p}) e_\nu^{(j)}(\mathbf{p}) M_\mu M_\nu^+, \tag{243}$$

где $M_\nu^+ = \{M_1^*, M_2^*, M_3^*, \imath M_0^*\}$. Используя соотношение полноты (19), получаем

$$\sum_{j=1}^{2} |\langle f|S|i\rangle|^2 = \\ = \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{(np)(p_\mu n_\nu + p_\nu n_\mu) + p_\mu p_\nu}{(np)^2}\right] M_\mu M_\nu^+ \quad (p^2 = 0). \tag{244}$$

В силу калибровочной инвариантности*

$$p_\mu M_\mu = 0 \tag{245}$$

и поэтому

$$\sum_{j=1}^{2} |\langle f|S|i\rangle|^2 = M_\mu M_\mu^+. \tag{246}$$

Таким образом, суммирование по двум состояниям поляризации сводится к суммированию по четырем значениям векторного индекса (Фейнман [46]). Это правило, очевидно, справедливо в случае любого числа фотонов в начальном и конечном состояниях.

Соблазн и дальше равноправно толковать фотоны всех четырех поляризаций на основе S-матрицы (184), т. е. рассматривать амплитуды $M_\nu^+ = \langle\beta|Sa_\mu^+|\alpha\rangle$ для процессов с участием фотонов в состояниях $a_\mu^+\Psi_0(\mu = 1, 2, 3, 4)$, порочен, так как, не говоря уже об отсутствии соответствия с теорией Максвелла, при этом оказываются отличными от нуля матричные элементы

*Изящный способ проверки этого соотношения в любом порядке теории возмущений дан Фейнманом в p-представлении. Эквивалентное рассмотрение в x-представлении можно найти в книге Боголюбова и Ширкова [21].

$n_\mu M_\nu = \langle\beta|Sna^+|\alpha\rangle$ для процессов с участием временных фотонов (в состоянии $na^+\Psi_0)^*$. Появление ненулевых матричных элементов для процессов с временными фотонами (в частности, для комптон-эффекта таких фотонов), обладающих отрицательными энергиями и нормами состояний, есть неизбежная плата за отказ от условия Лоренца–Ферми–Гупты (156): действительно, состояния $a_\mu^+\Psi_0$ и $na^+\Psi_0$ не удовлетворяют этому условию. С учетом этого условия матричные элементы S-матрицы отличны от нуля только тогда, когда фотоны находятся в состояниях $e^{(1)}a^+\Psi_0$ и $e^{(2)}a^+\Psi_0$, т. е. спроецированы соответствующим образом:

$$M'_\mu = \sum_{i=1}^{2} e_\mu^{(i)} e_\nu^{(i)} M_\nu = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu a_\nu}{np}\right) M_\nu \tag{247}$$

(где для получения последнего выражения использовано соотношение полноты (19) и свойство (245)), в результате чего удовлетворяют условиям (24). К выражению (247) автоматически ведет S-матрица (194), в которой полностью учтено условие Лоренца–Ферми–Гупты (156). Однако практически всегда мы отдаем предпочтение S-матрице (184), так как она явно ковариантна. Она всегда даст правильный результат, если мы позаботимся, чтобы начальное и конечное состояния удовлетворяли условию Лоренца–Ферми–Гупты, которое также имеет явно ковариантный вид.

5. ТЕОРИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

1. Преобразования вектор-потенциала, которые мы упоминали выше, выглядели чисто классически. Здесь мы кратко обсудим преобразования в гильбертовом пространстве, в котором действуют ψ и a^+ как операторы поля. Мы кратко обсудим операторы гильбертова пространства V_L, осуществляющие преобразования неоднородной группы Лоренца. Они должны обладать свойством унитарности

$$V_L^+ = V_L^{-1}$$

и могут быть определены условиями

$$\psi'(x) = V_L^{-1}\psi(x)V_L = S\psi(a^{-1}x - c) \approx \{1 - \imath c_\lambda p_\lambda + \imath\omega_{\rho\sigma} m_{\rho\sigma}\}\psi(x), \tag{248}$$

---

*Калибровочная инвариантность здесь не помогает. Даже после ее учета, как мы видели в п. 4.6, все еще остается часть вектор-потенциала, не коммутирующая с na^+: от операторов a_μ остается выражение (190), в котором присутствует оператор pa, не коммутирующий с na^+ ($[pa, na^+] = np \neq 0$).

$$A'_{\mu}(x) = V_L^{-1} A_{\mu}(x) V_L = a_{\mu\nu} A_n u \psi(a^{-1}x - c) \approx$$
$$\approx \{(1 - \imath c_{\lambda} p_{\lambda})\delta_{\mu\nu} + \imath\omega_{\rho\sigma}(m_{\rho\sigma})_{\mu\nu}\} A_n u(x), \quad (249)$$

где третьи и четвертые части равенств соответственно конечные и инфинитезимальные классические преобразования $\psi(x)$ и $A_{\mu}(x)$ как спинорной и векторной функций. В третьих частях (248) и (249): $a \equiv ||a_{\mu\nu}||$ — ортогональные $a_{\mu\nu}a_{\nu\lambda} = \delta_{\mu\lambda}$ матрицы 4-вращений (т. е. трехмерных вращений и преобразований Лоренца) 4-вектора; $S = \exp\left(\frac{\imath}{2}\omega_{\rho\sigma}\sigma_{\rho\sigma}\right)$ — соответствующие матрицы преобразования спинора, $\sigma_{\rho\sigma} = -\imath(\gamma_{\rho}\sigma\gamma_{\sigma} - \delta_{\rho\sigma})$. Инфинитезимально

$$a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \omega_{\rho\sigma}\delta^{\rho\sigma}_{\mu\nu}, \text{ где } \delta^{\rho\sigma}_{\mu\nu} = \delta_{\rho\mu}\delta_{\sigma\nu} - \delta_{\rho\nu}\delta_{\sigma\mu\nu}, \quad (250)$$

$$S = 1 + \frac{\imath}{2}\omega_{\rho\sigma}\sigma_{\rho\sigma}. \quad (251)$$

В четвертых частях (248) и (249): $p_{\lambda} = \dfrac{1}{\imath}\dfrac{\partial}{\partial x_{\lambda}}$ генераторы сдвига; $m_{\rho\sigma}$ — генераторы 4-вращений, имеющие вид для $\psi(x)$

$$m_{\rho\sigma}\left(x_{\rho}\frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} - x_{\sigma}\frac{\partial}{\partial x_{\rho}}\right) + s_{\rho\sigma}, \quad s_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\sigma_{\rho\sigma} \quad (252)$$

и для $A_{\mu}(x)$

$$(m_{\rho\sigma})_{\mu\nu} = \frac{1}{\imath}\delta_{\mu\nu}\left(x_{\rho}\frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} - x_{\sigma}\frac{\partial}{\partial x_{\rho}}\right) + (s_{\rho\sigma})_{\mu\nu}, \quad (s_{\rho\sigma})_{\mu\nu} = -\imath\delta^{\rho\sigma}_{\mu\nu}. \quad (253)$$

Заметим, что эти примеры иллюстрируют общую, справедливую для любого поля $q(x)$ форму классического инфинитезимального закона*

$$\delta^* q(x) = q'(x) - q(x) = (-\imath c_{\lambda} p_{\lambda} + \imath\omega_{\rho\sigma} m_{\rho\sigma}) q(x), \quad (254)$$

где

$$p_{\lambda} = -\imath\partial_{\lambda}, \quad m_{\rho\sigma} = -\imath(x_{\rho}\partial_{\sigma} - x_{\rho}\partial_{\sigma}\partial_{\rho}) + s_{\rho\sigma}. \quad (255)$$

Отсюда классический оператор конечного преобразования для любого поля $q(x)$ можно представить в виде

$$\exp(-\imath c_{\lambda} p_{\lambda} + \imath\omega_{\rho\sigma} m_{\rho\sigma}). \quad (256)$$

*Вариации (254) называют локальными в отличие от субстанциональных вариаций $\delta q = q'(x') - q(x)$ (см. [16]).

По групповым соображениям операторы V_L (действующие в гильбертовом пространстве) также должны иметь аналогичное представление:

$$V_L = \exp\left(-\imath c_\lambda P_\lambda + \imath \omega_{\rho\sigma} M_{\rho\sigma}\right), \tag{257}$$

где P_λ — генераторы сдвигов; $M_{\rho\sigma}$ — генераторы 4-вращений, действующие в гильбертовом пространстве. Операторы P_λ и $M_{\rho\sigma}$ служат операторами полных 4-импульса и момента $[2, 25]$.

Как и классические операторы преобразования, операторы V_L обладают групповым свойством:

$$V_L(3,2)V_L(2,1) = V_L(3,1), \tag{258}$$

где $V_L(2,1)$, $V_L(3,2)$ и $V_L(3,1)$ соответствуют переходу из первой во вторую, из второй в третью и прямо из первой в третью систему отсчета.

Сравнивая инфинитезимальные формы законов преобразования, нетрудно получить связь между генераторами p_λ и P_λ, а также $m_{\rho\sigma}$ и $M_{\rho\sigma}$:

$$p_\lambda \psi(x) = -[P_\lambda, \psi(x)], \quad p_\lambda A_\mu(x) = -[P_\lambda, A_\mu(x)], \tag{259}$$

$$m_{\rho\sigma} \psi(x) = -[M_{\rho\sigma}, \psi(x)], \quad m_{\rho\sigma} A_\mu(x) = -[M_{\rho\sigma}, A_\mu(x)]. \tag{260}$$

Если бы рассматривались и какие-либо другие поля, то аналогичные соотношения соблюдались бы и для них.

2. Пусть нам известны операторы V_L. Тогда переход из одной системы координат в другую допускает на языке гильбертова пространства две следующие трактовки.

а) В первой векторы состояния Ψ, описывающие физические системы, не изменяются:

$$\Psi' = \Psi, \tag{261}$$

а все операторы преобразуются согласно

$$O' = V^{-1} O V. \tag{262}$$

Так преобразуются операторы поля $\psi(x)$ и $A_\mu(x)$ и любые наблюдаемые (они могут быть построены из операторов поля, см. ниже). Пусть далее имеется полный набор наблюдаемых $O_i (i = 1, \ldots, n)$ и полная система их собственных функций Φ_λ:

$$O_i \Phi_\lambda = \lambda_i \Phi_\lambda. \tag{263}$$

Тогда очевидно, что собственные функции, соответствующие одному и тому же (численно) набору собственных значений $\lambda = \lambda_1 \cdots \lambda_n$*, в старой и новой системах отсчета связаны соотношением

$$\Phi'_\lambda = V^{-1}\Phi_\lambda. \tag{264}$$

Таким образом, вместе с операторами преобразуются и их собственные функции.

Если в старой системе отсчета мы имели

$$\Psi = \sum_\lambda c_\lambda \Phi_\lambda \quad \text{с} \quad c_\lambda = (\Phi_\lambda^+, \Psi), \tag{265}$$

то в новой получим

$$\Psi = \sum_\lambda c'_\lambda \Phi'_\lambda \quad \text{с} \quad c'_\lambda = (\Phi_\lambda'^+, \Psi). \tag{266}$$

Таким образом, анализ состояния Ψ с помощью полного набора операторов будет давать разные результаты в разных системах отсчета.

б) Во второй трактовке, наоборот, при переходе из одной системы отсчета в другую изменяются состояния:

$$\Psi' = V\Psi, \tag{267}$$

а операторы остаются неизменными:

$$O'_i = O_i. \tag{268}$$

Соответственно остаются неизменными собственные функции операторов

$$\Phi'_\lambda \Phi_\lambda. \tag{269}$$

Поэтому, если нами раз и навсегда фиксирован набор операторов O_1, то при анализе состояния во всех системах отсчета разложение ведется по одним и

*Здесь подразумевается, что у вектора Φ_λ набор чисел $\lambda = (\lambda_1 \cdots \lambda_n)$ отнесен к осям старой системы отсчета, а у вектора Φ тот же набор чисел $\lambda = (\lambda_1 \cdots \lambda_n)$ отнесен к осям новой системы отсчета. Рассмотрим, например, одночастичные состояния скалярной частицы с определенным импульсом — собственные функции оператора 4-импульса P_μ, т. е. с $\lambda = p = p\mu$. Тогда в указанном смысле у Φ_p компоненты 4-импульса p_μ относятся к осям старой системы отсчета, а у компоненты Φ'_p p'_μ, численно равные прежним, отнесены к осям новой системы отсчета. Подчеркнем, что собственные состояния Φ'_λ и Φ_λ физически различны. Так, физически тождественным с Φ_p (описывающим ту же физическую систему) в новой системе было бы состояние $\Phi'_{p'}$ с $p'_\mu = a_{\mu\nu}p_\nu$. См. также [49].

тем же собственным функциям:

$$\Psi = \sum_\lambda c_\lambda \Phi_\lambda \quad \text{с} \quad c_\lambda = (\Phi_\lambda^+, \Psi), \tag{270}$$

$$\Psi' = \sum_\lambda c'_\lambda \Phi_\lambda \quad \text{с} \quad c'_\lambda = (\Phi_\lambda^+, \Psi'). \tag{271}$$

Итак, обе трактовки дают одинаковые амплитуды вероятности.

Укажем на формальное сходство первой трактовки с гейзенберговским представлением, в котором векторы состояния постоянны, а операторы изменяются (со временем). Аналогично вторая трактовка похожа на шредингеровское представление, в котором изменяются только векторы состояния, а операторы постоянны. В принципе возможны и промежуточные трактовки, при которых частично векторы состояния — аналоги представления взаимодействия.

3. Отметим важное значение операторов V для выражения релятивистской инвариантности. Если Ψ — возможное состояние физической системы в системе отсчета 1, то $\Psi' = V(2,1)\Psi$ также есть возможное состояние физической системы в системе отсчета 1, причем, вообще говоря, отличное от Ψ, а $V(\alpha,1)\Psi$ пробегает все возможные состояния физической системы отсчета 1, когда α пробегает все возможные лоренцевы системы отсчета. Это — конструктивный способ выражения релятивистской инвариантности в рамках одной системы отсчета (см. [22], глава 1, п. 4).

4. В рамках лагранжева формализма нетрудно найти явный вид операторов P_μ и $M_{\mu\nu}$. С первых работ Дирака [1], Гейзенберга и Паули [2] во вторично-квантованной теории гамильтонианы, лагранжианы, уравнения, условия квантования и т. д. записывали по принципу соответствия с классической теорией поля. Замкнутую, не зависящую от классической теории поля, форму для квантовой теории поля предложил Швингер [25]. Он сформулировал квантовый динамический принцип, из которого могут быть выведены и уравнения движения, и генераторы различных преобразований, в том числе и генераторы P_μ, $M_{\mu\nu}$ и перестановочные соотношения. Квантовый динамический принцип (постулат) Швингера состоит в следующем.

Пусть $\Phi_{\xi'_1}(\sigma_1)^*|\xi'_1\sigma_1\rangle$ — собственные функции полного набора коммутирующих операторов ξ'_1 на пространственно-подобной поверхности σ_1, а $\Phi_{\xi'_2}(\sigma_2) = \xi''_2\sigma_2$ — собственные функции полного набора коммутирующих операторов ξ'_2 на пространственноподобной поверхности σ_2. Пусть далее бесконечно малое изменение их скалярного произведения $\langle\xi'_2\sigma_2|\xi'_1\sigma_1\rangle$ представлено в виде

$$\delta\langle\xi''_2\sigma_2|\xi'_1\sigma_1\rangle = -\imath\langle\xi''_2\sigma_2|\delta W_{21}|\xi'_1\sigma_1\rangle, \tag{272}$$

что всегда можно сделать. Тогда имеется класс вариаций, для которых соответствующие операторы δW_{21} получаются подходящей вариацией одного единственного оператора — оператора действия

$$W_{21} = L = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d^4x \mathcal{L}(x), \tag{273}$$

где лагранжева плотность $\mathcal{L}(x)$ — эрмитов оператор, построенный из основных динамических переменных — операторов поля.

Рассмотрим класс вариаций, когда варьируются поля $q(x)$ и координаты x, а поверхности σ_1 и σ_2 не изменяются. Тогда вариация действия может быть представлена

$$\delta W_{21} = \delta L = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma_\nu \delta^* \mathcal{L}(x) + \partial_\mu(\mathcal{L}(x)\delta x_\mu). \tag{274}$$

В предположении, что $\mathcal{L}(x)$ зависит от полей и только от их первых производных

$$\delta^* \mathcal{L}(x) = \sum_q \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q} \delta^* q + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\nu q} \partial_\nu \delta^* q \right), \tag{275}$$

где сумма берется по всем полям и по всем компонентам каждого поля*, после подстановки (275) вариация (274) может быть приведена к виду

$$\delta W_{21} = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma_\nu \sum_q \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q} - \partial_\nu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\nu q} = 0 \right) \delta^* q + G(\sigma_2) - G(\sigma_1), \tag{276}$$

где

$$G(\sigma) = \left(\sum_q \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\nu q} \delta^* q + \mathcal{L} \delta x_\nu \right) = \int_\sigma d\sigma_\nu V_\nu(x). \tag{277}$$

Условие стационарности действия относительно любых вариаций полей (без изменения x) дает уравнения движения для операторов поля

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q} - \partial_\nu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\nu q} = 0 \tag{278}$$

— уравнения Эйлера. С учетом этих уравнений

$$\delta W_{21} = G(\sigma_2) - G(\sigma_1). \tag{279}$$

---

*Это выражение для $\delta^* \mathcal{L}(x)$, вообще говоря, нужно понимать символически, в том смысле, что порядок операторов $\mathcal{L}(x)$ не должен меняться при проведении вариации.

Теперь операторы $G(\sigma_1)$ и $G(\sigma_2)$ легко интерпретируются как генераторы изменения, соответственно, на их поверхностях σ_1 и σ_2 [25]*. Другими словами, вариация (272) интерпретируется как результат вариаций

$$\delta\Phi^*_{\xi_1'}(\sigma_1) = +\imath\Phi^*_{\xi_1'}(\sigma_1)G(\sigma_1), \tag{280}$$

$$\delta\Phi^*_{\xi_2''}(\sigma_2) = -\imath\Phi^*_{\xi_2''}(\sigma_2)G(\sigma_2). \tag{281}$$

Оператор конечного преобразования

$$V = \mathrm{e}^{\imath G(\sigma)}. \tag{282}$$

Для получения, например, генераторов лоренцевых вращений и сдвигов рассмотрим класс вариаций, когда операторы поля $q(x)$ варьируются согласно (254), а координаты x — согласно

$$\delta x_\mu = c_m u + 2\omega_{\mu\nu}x_\nu. \tag{283}$$

Тогда оператор $G(\sigma)$ может быть представлен в виде

$$G(\sigma) = -c_\lambda P_\lambda(\sigma) + \omega_{\rho\sigma}M_{\rho\sigma}(\sigma), \tag{284}$$

где P_λ — генераторы сдвигов; $M_{\rho\sigma}$ — генераторы 4-вращений. В соответствии с выражением $G(\sigma)$ в виде (277) генераторы $P_\lambda(\sigma)$ и $M_{\rho\sigma}(\sigma)$ также записываются аналогично:

$$P_\lambda(\sigma) = \int_\sigma d\sigma_\nu T_{\nu\lambda}(x), \tag{285}$$

$$M_{\rho\sigma}(\sigma) = \int_\sigma d\sigma_\nu M_{\rho\sigma,\nu}. \tag{286}$$

С помощью законов преобразования (254) и (283) из (277) можно найти $T_{\nu\lambda}$ и $M_{\rho\sigma,\nu}$ в виде

$$T_{\nu\lambda} = -\sum_q \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\nu q}\partial_\lambda q + \delta_{\nu\lambda}\mathcal{L}, \tag{287}$$

*Отметим, что добавление к плотности лагранжиана дивергенции произвольного вектора не меняет уравнения движения, но модифицирует генератор, связанный с данной поверхностью. Эта неоднозначность в выборе плотности лагранжиана соответствует возможности подвергнуть коммутирующую совокупность операторов на σ произвольному унитарному преобразованию.

$$M_{\rho\sigma,\nu} = -x_\rho T_{\nu\sigma} + x_\sigma T_{\nu\rho} + \imath \sum_q \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\nu q} s_{\rho\sigma} q. \tag{288}$$

Эти операторы определены с точностью до «трехмерных» дивергенций.

5. Пусть теория инвариантна относительно некоторого класса преобразований. Тогда относительно них инвариантно действие (лагранжиан) (273), т. е. равна нулю его вариация (276), и, следовательно,

$$G(\sigma_2) = G(\sigma_1) \tag{289}$$

на классе решений уравнений движения (278). Это значит, что генераторы $G(\sigma)$ не зависят от поверхности σ, или, если в качестве σ выбираются плоские поверхности $t = \mathrm{const}$, что генераторы $G(t)$ не зависят от времени:

$$\frac{\partial G(t)}{\partial t} = 0. \tag{289.1}$$

Закон сохранения (289) можно выразить в дифференциальной форме

$$\partial_\mu V_\mu(x) = 0, \tag{290}$$

где $V(x)$ — плотность, соответствующая генератору $G(\sigma)$ (277). Так, инвариантность преобразований сдвигов и 4-вращений, которые мы только что обсуждали, влечет сохранение операторов $P_\lambda(\sigma)$ и $M_{\mu\nu}(\sigma)$ и независимость их от времени, т. е. сохранение энергии, импульса и четырехмерного момента количества движения. На языке плотностей $T_{\mu\lambda}$ и $M_{\rho\sigma,\nu}$ записывается дифференциальная форма этих законов сохранения

$$\partial_\nu T_{\mu\lambda} = 0, \tag{290.1}$$

$$\partial_\nu M_{\rho\sigma,\nu} = 0. \tag{290.2}$$

Аналогично инвариантность теории относительно еще каких-либо преобразований влечет новые законы сохранения и соответствующие сохраняющиеся величины. Например, инвариантность относительно замены всех заряженных полей $q(x)$ на $\mathrm{e}^{\imath\alpha} q(x)$ обеспечивает сохранение заряда и т. д.

Изложенная здесь связь между инвариантностями и законами сохранения хорошо известна из классической теории поля и составляет содержание первой теоремы Э. Нетер [16, 50]. Теорема одинаково хорошо применима и к свободному случаю, и к случаю взаимодействия и позволяет получать сохраняющиеся величины, если нам известен полный лагранжиан теории и вид преобразований, относительно которых лагранжиан инвариантен*. Например,

*В теории взаимодействия в большинстве интересующих случаев мы не имеем решения уравнений для операторов поля. Тем не менее мы можем с успехом применять построенные по теореме Нетер формальные выражения при обсуждении многих вопросов, где можно обойтись без явного вида операторов поля (вопросы о трансформационных свойствах различных комбинаций, вопрос положительной определенности энергии и т. д.).

нам хорошо известен лагранжиан электродинамики, а преобразования сдвигов и 4-вращений (248), (249), (254) одни и те же и для свободных, и для взаимодействующих полей. Поэтому мы в качестве приложения формул (287) и (288) без труда можем найти сохраняющиеся (вследствие уравнений движения) плотности $T_{\mu\lambda}$ и $M_{\rho\sigma,\nu}$. Эти плотности в явном виде выписаны ниже, в этом же пункте.

Первая теорема Э. Нетер рассматривает инвариантности с постоянными параметрами (параметрами-числами). Э. Нетер [50] обсуждает также вторую теорему, которая касается инвариантностей относительно преобразований с параметрами-функциями, зависящими от x_μ. Эти инвариантности ведут не к законам сохранения, а к тождествам для лагранжевой плотности $\mathcal{L}(x)$. Хотя эта вторая теорема имеет прямое отношение к калибровочным преобразованиям в электродинамике, мы на ней не останавливаемся. Важно еще раз подчеркнуть роль величин $G(\sigma)$ как *генераторов* преобразований, причем даже тогда, когда они не сохраняются. Впервые эта роль была осознана в квантовой теории поля, $[2, 25]$, но, разумеется, это так и в классической теории.

6. Колеман [51] недавно показал, что из инвариантности только вакуума относительно каких-либо преобразований следует сохранение генераторов этих преобразований. Например, из инвариантности вакуума относительно преобразований неоднородной группы Лоренца следует сохранение генераторов P_λ и $M_{rh0\sigma}$. Аргументы Колемана следующие. Пусть вакуум инвариантен относительно преобразований с генератором $\int d\mathbf{x}V_0(x,t)$. Тогда собственное значение этого генератора для вакуума равно нулю:

$$\int d\mathbf{x}V_0(\mathbf{x},t)|0\rangle = 0 \tag{291}$$

и далее

$$\langle n|\int d\mathbf{x}V_0(\mathbf{x},t)|0\rangle = 0, \tag{292}$$

где $\langle n|$ — любое состояние. Мы всегда можем без потери общности ограничиться рассмотрением состояний $\langle n|$ с определенным импульсом и при том частного вида: $p = (0, \imath p_0)$. Подставляя в последнее соотношение

$$\langle n|V_0(x)|0\rangle = \mathrm{e}^{-\imath px}\langle n|V_0(0)|0\rangle = \mathrm{e}^{\imath p_0 t}\langle n|V_0(0)|0\rangle, \tag{293}$$

получаем

$$\mathrm{e}^{\imath p_0 t}\langle n|V_0(0)|0\rangle \int d\mathbf{x} = 0. \tag{294}$$

После сокращения на $\int d\mathbf{x}$ и перехода в произвольную систему отсчета находим

$$\langle n|\partial_\mu V_\mu(x)|0\rangle = 0, \tag{295}$$

в силу полноты системы состояний $|nn\rangle$

$$\partial_\mu V_\mu(x)|0\rangle = 0. \tag{296}$$

По теореме Федербуша–Джонсона [52] из теории функций Уайтмана любой локальный оператор, дающий нуль при действии на вакуум, равен нулю. Таким образом, мы приходим к дифференциальной форме закона сохранения

$$\partial_\mu V_\mu(x) = 0 \tag{297}$$

и, наконец, к интегральной

$$\frac{\partial}{\partial t}\int d\mathbf{x}V_0(\mathbf{x},t) = 0. \tag{298}$$

Итак, инвариантность вакуума есть инвариантность мира [51].

7. Тензор $T_{\mu\lambda}$ называют каноническим тензором энергии-импульса. Он, вообще говоря, не симметричен по индексам $\mu\lambda$. Согласно Белинфанте [53] (см. также [54]) в любой теории, в которой сохраняется момент количества движения (т. е. $M_{\rho\sigma,\nu}$), можно построить симметричный тензор энергии-импульса

$$\Theta_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}(T_{\nu\lambda}+T_{\lambda\nu}) + \frac{\imath}{2}\partial_\sigma\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\nu q}s_{\sigma\lambda}q + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\lambda q}s_{\sigma\lambda}q\right). \tag{299}$$

Он отличается от канонического только на трехмерную дивергенцию, так что

$$\int d\sigma_\nu\Theta_{\nu\lambda} = \int d\sigma_\nu T_{\nu\lambda}. \tag{300}$$

Тензор $\Theta_{\nu\lambda}$ интересен тем, что оператор $M_{\rho\sigma,\nu}$ записывается через него в виде

$$M_{\rho\sigma} = -x_\rho\Theta_{\sigma\nu} + x_\sigma\Theta_{\rho\nu}. \tag{301}$$

8. Приведем выражения для канонического и симметричного тензоров энергии импульса, соответствующих двум формам записи лагранжиана в электродинамике.

а) Лагранжиан

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + j_\mu A_\mu - \frac{1}{2}\bar{\psi}(\gamma\partial + M)\psi - \frac{1}{2}\bar{\psi}(-\gamma\overleftarrow{\partial} + M)\psi$$
$$(F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu). \tag{302}$$

Канонический тензор энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = F_{\nu\lambda}\partial_\mu A_\lambda + \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\nu\psi - \frac{1}{2}\partial_\mu\bar{\psi}\gamma_\nu\psi + \delta_{\mu\nu}\mathcal{L}. \quad (303)$$

Симметричный тензор энергии-импульса

$$\Theta_{\mu\nu} = F_{\mu\lambda}F_{\nu\lambda} - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}F_{\lambda\rho} + \frac{1}{4}[\bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\nu - \imath eA_\nu)\psi + \bar{\psi}\gamma_\nu(\partial_\mu - \imath eA_\mu)\psi - \\ - (\partial_\mu + \imath eA_\mu)\bar{\psi}\gamma_\nu\psi - (\partial_\nu + \imath eA_\nu)\bar{\psi}\gamma_\mu\psi]. \quad (304)$$

б) Лагранжиан

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu\partial_\nu A_\mu + j_\mu A_\mu - \frac{1}{2}\bar{\psi}(\gamma\partial + M)\psi - \frac{1}{2}\bar{\psi}(-\gamma\overleftarrow{\partial} + M)\psi. \quad (305)$$

Канонический тензор энергии-импульса

$$T'_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\lambda\partial_\nu A_\lambda + \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma_\nu\partial_\mu\psi - \frac{1}{2}\partial_\mu\bar{\psi}\gamma_\nu\psi + \delta_{\mu\nu}\mathcal{L}. \quad (306)$$

Симметричный тензор энергии-импульса

$$\Theta'_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\lambda\partial_\nu A_\lambda - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\partial_\lambda A_\rho\partial_\lambda A_\rho - \\ - \frac{1}{2}\partial_\lambda[\partial_\mu A_\lambda A_\nu + \partial_\nu A_\lambda A_\mu - (\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu)A_\lambda] + \\ + \frac{1}{4}[\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\nu\psi + \bar{\psi}\gamma_\nu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar{\psi}\gamma_\nu\psi - \partial_\nu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi]. \quad (307)$$

По поводу $\Theta_{\mu\nu}$ в (304) отметим, что 4-компонента относящейся к электромагнитному полю части

$$\Theta_{\mu\nu} = F_{\mu\lambda}F_{\nu\lambda} - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}F_{\lambda\rho}$$

может быть представлена в хорошо известной форме

$$\Theta_{00} = -\Theta_{44} = \frac{1}{2}(\mathbf{H}^2 + \mathbf{E}^2) \quad \left(H_k = \frac{1}{2}\epsilon_{klm}F_{mn},\ E_k = F_{0k}\right),$$

откуда, в частности, видно, что энергия электромагнитного поля положительно определена.

Следует иметь в виду, что выражения (303), (304), (306) и (307) для обеспечения свойств эрмитовости должны быть симметризованы по расположению в них операторов A_μ. Напомним, однако, что в квантовой теории избегают использовать лагранжиан (302) из-за трудностей, отмеченных в п. 1.1.

Тем не менее возможность привести тензор энергии-импульса (306) или (307) к виду (303) расценивается как одно из свидетельств соответствия с теорией Максвелла. Действительно, тензоры $\Theta'_{\mu\nu}$ и $\Theta_{\mu\nu}$ связаны соотношением

$$\Theta'_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\lambda[F_{\mu\lambda}A_\nu + \partial_\mu A_\nu A_\lambda - \partial_\lambda A_\mu A_\nu + \\ + (\delta_{\nu\lambda}\delta_{\mu\rho} - \delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\rho})A_\sigma\partial_\sigma A_\rho] + \frac{1}{2}(\partial_\lambda A_\lambda\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu\partial_\lambda A_\lambda) + \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}A_\rho\partial_\rho\partial_\lambda A_\lambda + \\ + \frac{1}{2}A_\mu(\partial_\lambda F_{\lambda\nu} + \imath e\bar{\psi}\gamma_\nu\psi) + \frac{1}{2}A_\nu(\partial_\lambda F_{\lambda\mu} + \imath e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi), \quad (308)$$

т. е. отличаются друг от друга только трехмерной дивергенцией, не дающей вклада в интеграл (300), и членами, содержащими $\partial_\mu A_\mu$, которые пропадают при учете условия Лоренца в той или иной форме. В (308) также подразумевается симметризация по расположению операторов A_μ.

Последовательная симметричная трактовка электрона и позитрона требует, чтобы все физические операторы были записаны симметрично относительно ψ и зарядово-сопряженного к нему спинора ψ^c:

$$\psi^0 = C\bar{\psi}, \qquad \bar{\psi}^0 = C^{-1}\psi. \quad (309)$$

Это будет получаться автоматически, если в согласии с этим требованием записать лагранжиан. А именно вместо (305) (или (76)) следует принять лагранжиан [31]

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu\partial_\mu A_\nu + \frac{\imath e}{2}(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi - \bar{\psi}^c\gamma_\mu\psi^c) - \frac{1}{4}\bar{\psi}(\gamma\partial + M)\psi - \\ - \frac{1}{4}\bar{\psi}(-\gamma\overleftarrow{\partial} + M)\psi - \frac{1}{4}\bar{\psi}^0(\gamma\partial + M)\psi^0 - \frac{1}{4}\bar{\psi}^0(-\gamma\overleftarrow{\partial} + M)\psi^0. \quad (310)$$

Соответственно в качестве симметричного тензора энергии-импульса получим

$$\Theta'_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\partial_\mu A_\lambda\partial_\nu A_\lambda + \partial_\nu A_\lambda\partial_\mu A_\lambda - \partial_\lambda A_\rho\partial_\lambda A_\rho\delta_{\mu\nu}] - \\ - \frac{1}{4}\partial[\partial_\mu A_\lambda A_\nu + A_\nu\partial_\mu A_\lambda + \partial_\nu A_\lambda A_\mu + A_\mu\partial_\nu A_\lambda - \\ - (\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu)A_\lambda - A_\lambda(\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu)] + \\ + \frac{1}{8}[\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\nu\psi + \bar{\psi}\gamma_\nu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar{\psi}\gamma_\nu\psi - \partial_\nu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi + \bar{\psi}^c\gamma_\mu\partial_\nu\psi^c + \\ + \bar{\psi}^c\gamma_\nu\partial_\mu\psi^c - \partial_\mu\bar{\psi}^c\gamma_\nu\psi^c - \partial_\nu\bar{\psi}^c\gamma_\mu\psi^c], \quad (311)$$

где также явно произведена симметризация по расположению операторов A_μ.

Аналогично можно переписать и тензор энергии-импульса (304)

$$\Theta_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(F_{\mu\lambda}F_{\nu\lambda} + F_{\nu\lambda}F_{\mu\lambda} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}F_{\lambda\rho}\right) +$$
$$+\frac{1}{8}[\bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\nu - \imath eA_\nu)\psi + \bar{\psi}\gamma_\nu(\partial_\mu - \imath eA_\mu)\psi - (\partial_\mu + \imath eA_\mu)\bar{\psi}\gamma_\nu\psi - (\partial_\nu + \imath eA_\nu)\bar{\psi}\gamma_\mu\psi] +$$
$$+\frac{1}{8}[\bar{\psi}^0\gamma_\mu(\partial_\nu + \imath eA_\nu)\psi^0 + \bar{\psi}^0\gamma_\nu(\partial_\mu + \imath eA_\mu)\psi^0 -$$
$$-(\partial_\mu - \imath eA_\mu)\bar{\psi}^0\gamma_\nu\psi^0 - (\partial_\nu - \imath eA_\nu)\bar{\psi}^0\gamma_\mu\psi^0]. \quad (312)$$

Несимметричная относительно Ψ и Ψ^0 форма теории ведет к трудностям с равноправным описанием электрона и позитрона (пример будет дан ниже в связи с обсуждением оператора заряда).

9. Лагранжианы (302), (305) и (310) инвариантны относительно группы фазовых преобразований заряженного спинорного поля

$$\psi \to \psi' = e^{\imath\alpha}\psi, \quad \bar{\psi} \to \bar{\psi}' = e^{-\imath\alpha}\bar{\psi}, \quad (313)$$

где α — произвольная константа. Используя инфинитезимальный вид преобразований

$$\delta^*\psi = \imath\alpha\psi, \quad \delta^*\bar{\psi} = -\imath\alpha\bar{\psi}, \quad (314)$$

нетрудно вычислить генератор (277) в этом случае (при этом x_μ не варьируется, $\delta x_\mu = 0$). Мы выполним вычисления с помощью лагранжиана (310)

$$G(\sigma) = \int_\sigma d\sigma_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\psi}\delta^*\psi - \delta^*\bar{\psi}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\bar{\psi}}\right) =$$
$$= \frac{\imath\alpha}{2}\int_\sigma d\sigma_\mu(\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) - \bar{\psi}^0(x)\gamma_\mu\psi^0(x)). \quad (315)$$

При вычислениях должна приниматься во внимание связь (308). После сокращения на параметр и соответствующей нормировки этот генератор, служащий оператором заряда, принимает стандартный вид

$$Q(\sigma) = \frac{\imath e}{2}\int_\sigma d\sigma_\mu(\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) - \bar{\psi}^0(x)\gamma_\mu\psi^0(x)). \quad (316)$$

Его плотностью служит 4-вектор тока [31]*

$$j_\mu = \frac{\imath e}{2}(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi - \bar{\psi}^0\gamma_\mu\psi^0) \quad (317)$$

*Впервые этот ток был введен Гейзенбергом в форме $j_\mu = (\imath e)/2[\bar{\psi}, \gamma_\mu\psi]$.

с законом сохранения

$$\partial_\mu j_\mu = 0. \tag{318}$$

При выборе σ в виде $t = \text{const}$ оператор заряда определяется четвертой компонентой этого тока

$$Q = \frac{e}{2}\int d\mathbf{x}(\psi^+\psi - \psi^{0+}\psi^0), \quad \psi^+ = \bar\psi\gamma_4. \tag{319}$$

Оператор $\psi^+\psi$ как эрмитов и произведение оператора на ему эрмитово-сопряженный имеет только положительные собственные значения. То же относится и к оператору $\psi^{0+}\psi^0$.

Отсюда следует, что спектр собственных значений оператора заряда не обладает определенным знаком.

Здесь уместно отметить, что часто (в том числе и в данной статье) для краткости используют ток $j_\mu = \imath e\bar\psi\gamma_\mu\psi$, которому соответствует оператор заряда $Q' = e\int d\mathbf{x}\psi^+\psi$ и вместе с тем утверждают, что в связи со статистикой Ферми–Дирака заряд не имеет определенного знака. Если принять приведенное выражение для заряда всерьез, то указанное выше свойство $\psi^+\psi$ вопреки утверждению гарантирует положительность заряда. И действительно, если вычислить среднее от Q' в свободном одноэлектронном и в свободном однопозитронном состояниях, то мы получим* $\langle Q\rangle_{\text{электрон}} = 2e$, $\langle Q\rangle_{\text{позитрон}} = 0$. Такая ситуация совместима только с теорией дырок. Для равноправного описания электронов и позитронов оператор заряда должен иметь вид (316) или (310). В этом случае $\langle Q\rangle_{\text{электрон}} = e$, $\langle Q\rangle_{\text{позитрон}} = -e$.

10. Мы обсудили классы вариаций, которые приводили к генераторам преобразований неоднородной группы Лоренца и оператор заряда. Еще один класс вариаций ведет к перестановочным соотношениям [25].

---

*Исходя из обычного разложения

$$\psi(x) = (2\pi)^{-3/2}\int d\mathbf{p}\sum_{s=1}^{2}[b(\mathbf{p},s)u(\mathbf{p},s)\,\mathrm{e}^{\imath px} + c^+(\mathbf{p},s)C\bar u(\mathbf{p},s)\,\mathrm{e}^{-\imath px}],$$

где b — оператор уничтожения электрона; c^+ — оператор рождения позитрона; $u(\mathbf{p},s)$ — решение свободного уравнения Дирака в p-пространстве для спинового состояния s, а $\bar u(\mathbf{p},s) = u^+(\mathbf{p},s)\gamma_4$, имеем

$$Q' = e\int d\mathbf{x}\psi^+\psi = \int d\mathbf{p}\sum_{s}^{2}\{b^+(\mathbf{p},s)b(\mathbf{p},s)\,\mathrm{e}^{\imath px} + c(\mathbf{p},s)c^+(\mathbf{p},s)\,\mathrm{e}^{-\imath px}\}.$$

Состояния электрона и позитрона определяются как $|\text{электрон}\rangle = b^+(\mathbf{p},s)\Psi_0$; $|\text{позитрон}\rangle = c^+(\mathbf{p},s)\Psi_0$.

Приложение 1

ПРИМЕР ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ С НЕНУЛЕВОЙ МАССОЙ

Векторное поле с массой может служить примером ситуации, когда, несмотря на (12), квантование возможно без всяких осложнений. В этом случае лагранжиан

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{m^2}{2}A_\mu A_\mu + j_\mu A_\mu - \bar{\psi}(\gamma\partial + M)\psi \tag{П.1}$$

(где $F_{\mu\nu}$ и j_μ снова даются формулами (2) и (3)) отличается от (1) только присутствием массового члена, так же, как и уравнение

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} - m^2 A_\nu = -j_\nu \tag{П.2}$$

(уравнение Дирака сохраняет прежний вид (5)). В этом случае также справедливы соотношения (8) и (12), и, следовательно, также нельзя принять A_4 за независимую каноническую переменную, так как равенство $[A_4, \Pi_4] = 1$ невозможно. Однако, в отличие от безмассового случая, здесь легко установить, что A_4, действительно, зависимая переменная. В самом деле, из (П.2) при $\nu = 4$ находим

$$A_4 = \frac{1}{m^2}(\partial_k F_{k4} + j_4) = \frac{1}{m^2}(\partial_k \Pi_k + j_4), \tag{П.3}$$

т. е. A_4 выразилось через другие канонические переменные. $\partial_4 A_4$ также можно выразить через A_k, ибо из (П.2) после взятия дивергенции следует

$$\partial_m u A_\mu = 0. \tag{П.4}$$

Итак, за канонически-сопряженные координаты и импульсы можно принять только A_k и Π_k $(k = 1, 2, 3)$, и, следовательно, выбрать перестановочные соотношения $(9mn)$ и $(10m)$ с $m, n = 1, 2, 3$. С помощью этих соотношений и (П.3) можно вычислить одновременные $(x_0 = y_0)$ перестановочные соотношения для всех компонент вектор-потенциала:

$$\begin{gathered}
[A_\mu(x), A_\nu(y)] = \frac{1}{m^2}(\delta_{\mu k}\delta_{\nu 4} + \delta_{\mu 4}\delta_{\nu k})\frac{\partial}{\partial x}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
\left[A_\mu(x), \frac{\partial}{\partial y_4}A_\nu(y)\right] = \\
= \left\{\delta_{\mu\nu} - \frac{1}{m^2}\left[\delta_{\mu k}\delta_{\nu n}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_n} - \delta_{\mu k}\delta_{\nu 4}(\Delta - m^2)\right]\right\}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
[\psi(x), A_\nu(y)] = \delta_{\mu 4}\frac{\imath e}{m^2}\psi(x)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
\left[\psi(x), \frac{\partial}{\partial y_4}A_\nu(y)\right] = \frac{\imath e}{m^2}\psi(x)\delta_{\mu m}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}).
\end{gathered} \tag{П.5}$$

У этих перестановочных соотношений далеко не такой простой вид, как у перестановочных соотношений для независимых канонических переменных $(9mn)$ и $(10m)$. Отметим, что в отсутствие взаимодействия $(e = 0)$ перестановочные соотношения для A_μ следующим образом распространяются на любые x'_0 и y_0:

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)] = \imath \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{1}{m^2}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)\Delta_m(x-y), \tag{П.6}$$

где Δ_m дается выражением (44).

Приложение 2

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ КАК СОВОКУПНОСТЬ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Здесь, чтобы установить связь со старыми формами электродинамики [1, 15, 17] и с классической аналитической механикой, мы кратко рассмотрим первоначальную формулировку квантовой электродинамики.

В качестве плотности лагранжиана мы примем выражение (305) и далее представим электромагнитное поле в виде

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\mathbf{k} a_\mu(\mathbf{k},t)\,\mathrm{e}^{\imath\mathbf{kx}} + a^*_\mu(\mathbf{k},t)\,\mathrm{e}^{-\imath\mathbf{kx}} = \\ = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\mathbf{k} b_\mu(\mathbf{k},t)\,\mathrm{e}^{\imath\mathbf{kx}}. \tag{П.7}$$

Наряду с $b_\mu(\mathbf{k},t)$ мы будем использовать также величины

$$b^*_\mu(\mathbf{k},t) = a_\mu(-\mathbf{k},t) + a^*_\mu(\mathbf{k},t) = b_\mu(-\mathbf{k},t), \quad u(\mathbf{k},t)\gamma_4, \tag{П.8}$$

не являющиеся независимыми. Аналогично представим спинорное поле:

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\mathbf{k} u(\mathbf{k},t)\,\mathrm{e}^{\imath\mathbf{kx}}, \tag{П.9}$$

$$\bar\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\mathbf{k} \bar u(\mathbf{k},t)\,\mathrm{e}^{-\imath\mathbf{kx}}. \tag{П.10}$$

В этих терминах лагранжиан $L = \int dx\mathcal{L}(x)$ с лагранжевой плотностью (305) запишется

$$L = \int dt \int d\mathbf{k}\left\{\frac{1}{2}[\dot b^*_\mu(\mathbf{k},t)\dot b_\mu(\mathbf{k},t) - k^2 b^*_\mu(\mathbf{k},t)b_\mu(\mathbf{k},t)] + \imath\bar u(\mathbf{k},t)\gamma_4\dot u(\mathbf{k},t) - \\ - \imath\bar u(\mathbf{k},t)\boldsymbol{\gamma}\mathbf{k}u(\mathbf{k},t) + \frac{\imath e}{(2\pi)^{3/2}} b_\mu(\mathbf{k},t)\int d\mathbf{k}'\bar u(\mathbf{k}+\mathbf{k}',t)\gamma_\mu u(\mathbf{k}',t)\right\}, \tag{П.11}$$

где точка означает производную по времени. Выбрав за канонические координаты q

$$b_\mu^*(\mathbf{k},t) = b_\mu(-\mathbf{k},t), \quad u(\mathbf{k},t)\gamma_4, \tag{П.12}$$

найдем для канонических импульсов p

$$\dot{b}_\mu^*(\mathbf{k},t) = \dot{b}_\mu(-\mathbf{k},t), \quad u^+(\mathbf{k},t) = \bar{u}(\mathbf{k},t)\gamma_4. \tag{П.13}$$

Гамильтониан можно построить либо по правилам аналитической механики

$$P_0 = H = \sum p\dot{q} - L, \tag{П.14}$$

либо прямо вычисляя $P_0 = -\int d\mathbf{x}T_{44}(x)$ с плотностью (306):

$$P_0 = \int dt \int d\mathbf{k}\Big\{\frac{1}{2}[\dot{b}_\mu^*(\mathbf{k},t)\dot{b}_\mu(\mathbf{k},t) + k^2 b_\mu^*(\mathbf{k},t)b_\mu(\mathbf{k},t)] + \bar{u}(\mathbf{k},t) \times$$
$$\times (\imath\boldsymbol{\gamma}\mathbf{k} + M)u(\mathbf{k},t) - \frac{\imath e}{(2\pi)^{3/2}} b_\mu(\mathbf{k},t) \int d\mathbf{k}'\bar{u}(\mathbf{k}+\mathbf{k}',t)\gamma_\mu u(\mathbf{k}',t)\Big\}. \tag{П.15}$$

Теперь еще раз обратимся к разложению по базису (15), (18) и с помощью соотношения полноты (19) с $n_\mu = (0,0,0,1)$ представим $b_\mu(k,t)$ в виде

$$b_\mu(\mathbf{k},t) = b_\mu^r(\mathbf{k},t) + \delta_{\mu m}\frac{k_m}{k^2}(\mathbf{k}\mathbf{b}(\mathbf{k},t)) + \delta_{\mu 4}b_4(\mathbf{k},t), \tag{П.16}$$

где

$$b_m^r(\mathbf{k},t) = \sum_{i=1}^{2} e_m^{(i)}(\mathbf{k})(\mathbf{e}^{(i)}(\mathbf{k})\mathbf{b}(\mathbf{k},t)), \qquad b_4^r(\mathbf{k},t) = 0. \tag{П.17}$$

Далее, следующим образом выберем канонически-сопряженные координаты и импульсы:

$$\begin{array}{ll}
\text{координаты} & \text{импульсы} \\
Q_0(\mathbf{k},t) = b_0(\mathbf{k},t), & \Pi_0(\mathbf{k},t) = \dot{b}_0^*(\mathbf{k},t), \\
Q_i(\mathbf{k},t) = \mathbf{e}^{(i)}\mathbf{b}(\mathbf{k},t), & \Pi_i(\mathbf{k},t) = \mathbf{e}^{(i)}\dot{\mathbf{b}}^*(\mathbf{k},t), \\
Q_3(\mathbf{k},t) = \dfrac{1}{|\mathbf{k}|}\mathbf{k}\mathbf{b}(\mathbf{k},t), & \Pi_3(\mathbf{k},t) = \dfrac{1}{|\mathbf{k}|}\mathbf{k}\dot{\mathbf{b}}^*(\mathbf{k},t), \\
u(\mathbf{k},t), & \pi(\mathbf{k},t) = u^+(\mathbf{k},t).
\end{array} \tag{П.18}$$

В этих обозначениях гамильтониан записывается

$$P_0 = \int d\mathbf{k} \left\{ \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{2} (\Pi_i^*(\mathbf{k},t)\Pi_i(\mathbf{k},t) + k^2 Q_i^*(\mathbf{k},t) Q_i(\mathbf{k},t)) + \right.\right.$$
$$+ \Pi_3^*(\mathbf{k},t)\Pi_3(\mathbf{k},t) + k^2 Q_3^*(\mathbf{k},t) Q_3(\mathbf{k},t) - \Pi_0^*(\mathbf{k},t)\Pi_0(\mathbf{k},t) -$$
$$\left. - k^2 Q_0^*(\mathbf{k},t) Q_0(\mathbf{k},t) \right] + \pi(\mathbf{k},t)\gamma_4 u(\mathbf{k},t) - \frac{\imath e}{(2\Pi)^{3/2}} \sum_{i=1}^{2} Q_i(\mathbf{k},t) e_m^{(i)} j_m(\mathbf{k},t) -$$
$$\left. - \frac{\imath e}{(2\Pi)^{3/2}} Q_3(\mathbf{k},t) \frac{k_m}{|\mathbf{k}|} j_m(\mathbf{k},t) + \frac{e}{(2\Pi)^{3/2}} Q_0(\mathbf{k},t) j_4(\mathbf{k},t) \right\}, \qquad (\Pi.19)$$

где

$$j_\mu(\mathbf{k},t) = \int d\mathbf{k}' \pi(\mathbf{k}-\mathbf{k}',t)\gamma_4\gamma_\mu u(\mathbf{k}',t). \qquad (\Pi.20)$$

Теперь мы снова перейдем к калибровке излучения. Это можно сделать либо с помощью замен переменных поля, которые использовались в п. 4.2, либо с помощью канонического преобразования. Мы здесь пойдем, следуя Гайтлеру [15], по второму пути.

Поскольку гамильтониан не зависит явно от времени, то он не изменится при каноническом преобразовании — нужно только старые переменные выразить в нем через новые (см., например, [55]). Каноническое преобразование удобно сделать с помощью производящего функционала (см. [55]), в данном случае с помощью функционала $F(q,p')$, зависящего от старых координат q и новых импульсов p'. Функционал $F(q,p')$ можно выбрать в виде

$$F(q,p') = \int d\mathbf{k} \left\{ \sum_{i=1}^{2} \Pi_i'^*(\mathbf{k},t) Q_i(\mathbf{k},t) - |\mathbf{k}| Q_3^*(\mathbf{k},t) Q_0(\mathbf{k},t) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(2\Pi)^3} \int d\mathbf{x}\, \mathrm{e}^{\imath \mathbf{k}\mathbf{x}}\, \mathrm{e}^{-\imath e \Delta^{-1}\partial_k A_k(x)} \int d\mathbf{k}'\, \mathrm{e}^{-\imath \mathbf{k}'\mathbf{x}} \pi'(\mathbf{k}',t) u(\mathbf{k},t) \right\}, \qquad (\Pi.21)$$

где

$$\partial_k A_k(x) = \frac{\imath}{(2\Pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k}\, \mathrm{e}^{\imath \mathbf{k}\mathbf{x}} |\mathbf{k}| Q_3(\mathbf{k},t).$$

С помощью производящего функционала получаем

$$
\begin{aligned}
&\Pi_0^*(\mathbf{k},t)=\frac{\delta F}{\delta Q_0(\mathbf{k},t)}=-|\mathbf{k}|Q_3^*(\mathbf{k},t), && Q_0'(\mathbf{k},t)=\frac{\delta F}{\delta \Pi_0'^*(\mathbf{k},t)}=0,\\
&\Pi_1^*(\mathbf{k},t)=\frac{\delta F}{\delta Q_1(\mathbf{k},t)}=\Pi'^*_1(\mathbf{k},t), && Q_1'(\mathbf{k},t)=\frac{\delta F}{\delta \Pi_1'^*(\mathbf{k},t)}=Q_1(\mathbf{k},t),\\
&\Pi_2^*(\mathbf{k},t)=\frac{\delta F}{\delta Q_2(\mathbf{k},t)}=\Pi'^*_2(\mathbf{k},t), && Q_2'(\mathbf{k},t)=\frac{\delta F}{\delta \Pi_2'^*(\mathbf{k},t)}=Q_2(\mathbf{k},t),\\
&\Pi_3^*(\mathbf{k},t)=\frac{\delta F}{\delta Q_3(\mathbf{k},t)}= && Q_3'(\mathbf{k},t)=\frac{\delta F}{\delta \Pi_3'^*(\mathbf{k},t)}=0,\\
&=-|\mathbf{k}|Q_0^*(\mathbf{k},t)-\frac{e}{(2\pi)^{3/2}|\mathbf{k}|}j_4(\mathbf{k},t),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\pi(\mathbf{k},t)&=\frac{\delta F}{\delta u(\mathbf{k},t)}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{x}\,\mathrm{e}^{\imath\mathbf{k}\mathbf{x}}\,\mathrm{e}^{-\imath e\Delta^{-1}\partial_k A_k(x)}\int d\mathbf{k}'\,\mathrm{e}^{-\imath\mathbf{k}'\mathbf{x}}\pi'(\mathbf{k}',t),\\
u'(\mathbf{k},t)&=\frac{\delta F}{\delta \pi'(\mathbf{k},t)}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{x}\,\mathrm{e}^{-\imath\mathbf{k}\mathbf{x}}\,\mathrm{e}^{-\imath e\Delta^{-1}\partial_k A_k(x)}\int d\mathbf{k}'\,\mathrm{e}^{\imath\mathbf{k}'\mathbf{x}}u(\mathbf{k}',t).
\end{aligned}
\tag{П.22}
$$

В преобразованиях π и u нетрудно узнать калибровочное преобразование (37), которое, как мы видим, проще и естественней выполнять в x-пространстве. Так как при преобразованиях (37)

$$\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)=\bar{\psi}'(x)\gamma_\mu\psi'(x),$$

то очевидно, что при полученных преобразованиях π и u

$$j_m u(\mathbf{k},t)=j'_m u(\mathbf{k},t)=\int d\mathbf{k}'\pi'(\mathbf{k}+\mathbf{k}',t)\gamma_4\gamma_\mu u'(\mathbf{k}',t). \tag{П.23}$$

Далее,

$$
\begin{aligned}
\int d\mathbf{k}\pi(\mathbf{k},t)\gamma_4(\imath\boldsymbol{\gamma}\mathbf{k}+M)u(\mathbf{k},t)=\int d\mathbf{k}\pi'(\mathbf{k},t)\gamma_4(\imath\boldsymbol{\gamma}\mathbf{k}+M)u'(\mathbf{k},t)+\\
+\frac{\imath e}{(2\pi)^{3/2}}\int d\mathbf{k}Q_3(\mathbf{k},t)\frac{k_m}{|\mathbf{k}|}j'_m(\mathbf{k},t).
\end{aligned}
\tag{П.24}
$$

Эту формулу также легче получить, возвращаясь в x-пространство. К новому гамильтониану мы приходим, выразив в старом старые переменные через новые. Это дает

$$P_0' = \int d\mathbf{k}\Bigg\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(\Pi_i'^*(\mathbf{k},t)\Pi_i'(\mathbf{k},t) + k^2 Q_i'^*(\mathbf{k},t)Q_i'(\mathbf{k},t)) + \\ + \pi'(\mathbf{k},t)\gamma_4(\imath\boldsymbol{\gamma}\mathbf{k} + M)u'(\mathbf{k},t) - \frac{\imath e}{(2\Pi)^{3/2}} \times \\ \times \sum_{i=1}^{2} Q_i'(\mathbf{k},t)e_m^{(i)}j'_m(\mathbf{k},t) + \frac{e^2}{(2\Pi)^3\mathbf{k}^2}j_4'(\mathbf{k},t)j_4'(-\mathbf{k},t)\Bigg\}. \quad (\Pi.25)$$

Отметим, что выполненное каноническое преобразование является особенным, так как оно уменьшает число канонических переменных.

Таким образом, у электромагнитного поля остались две степени свободы, представляемые комплексными координатами $Q_i(\mathbf{k},t)$ и комплексными импульсами $\Pi(\mathbf{k},t)$. От остальных степеней свободы осталось только четырехфермионное кулоновское взаимодействие. При каждом значении импульса $\mathbf{k}$ свободный гамильтониан для электромагнитного поля имеет вид суммы гамильтонианов для двух комплексных осцилляторов с собственной частотой $|\mathbf{k}|$. Если перейти к вещественным переменным, как это обычно делают [15], то число осцилляторов удвоится. При создании квантовой электродинамики такое представление электромагнитного поля как континуума осцилляторов указывало возможный путь квантования электродинамики. Перестановочные соотношения для координаты импульса квантового осциллятора были уже хорошо известны, и естественно было проквантовать электродинамику путем наложения перестановочных соотношений вида

$$[Q_i'(\mathbf{k},t), \Pi_i'^{8}(\mathbf{k}',t)] = \imath\delta_{ij}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'). \quad (\Pi.26)$$

Представление электромагнитного поля в виде совокупности осцилляторов успешно применялось не только в квантовой теории, но и в классической [1, 15, 56].

Этот метод позволил успешно применить в квантовой электродинамике гамильтонов формализм [2, 17]. Однако существенный недостаток такого подхода состоит в том, что ковариантность здесь глубоко спрятана, и вся процедура в целом носит нековариантный характер. В дальнейшем было затрачено довольно много усилий, чтобы придать квантовой электродинамике явно ковариантный вид.

Автор глубоко благодарен Р. А. Асанову за стимулирующие дискуссии, В. И. Огиевецкому за многочисленные полезные обсуждения практически всех вопросов, затронутых в обзоре, М. А. Маркову и Я. А. Смородинскому за интерес и поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dirac P. A. M.* // Proc. Roy. Soc. A. 1927. V. 114. P. 243.
2. *Heisenberg W., Pauli W.* // Z. Phys. 1929. V. 56. P. 1; 1930. V. 59. P. 166.
3. *Fermi E.* // Rev. Mod. Phys. 1932. V. 4. P. 87.
4. *Ma S. T.* // Phys. Rev. 1949. V. 75. P. 535.
5. *Belinfante F. J.* // Ibid. V. 76. P. 226.
6. *Coester F., Jauch J. M.* // Phys. Rev. 1960. V. 78. P. 149.
7. *Gupta S. N.* // Proc. Phys. Soc. A. 1950. V. 63. P. 682.
8. *Bleuler K.* // Helv. Phys. Acta. 1950. V. 23. P. 567.
9. *Sunakawa S.* // Progr. Theor. Phys. 1958. V. 19. P. 221.
10. *Gupta S. N.* // Can. J. Phys. 1957. V. 35. P. 961.
11. *Gupta S. N.* // Progr. Theor. Phys. 1959. V. 21. P. 581.
12. *Konisi G., Ogimoto T.* // Progr. Theor. Phys. 1958. V. 20. P. 868; 1959. V. 21. P. 727.
13. *Марков М. А.* Дисс. ФИАН. 1940;
    Федоров Ф. И. // ЖЭТФ. 1956. Т. 31. С. 140;
    Мороз Л. Г., Федоров Ф. И. // Тр. Ин-та физ. и матем. АН БССР. Минск, 1959. Вып. 3.
14. *Sachs M., Schwebel S. L.* // Supp. Nuovo Cim. 1961. V. 21. P. 197; J. Math. Phys. 1959. V. 3. P. 843.
15. *Гайтлер В.* Квантовая теория излучения. М.: Иностр. лит., 1956.
16. *Паули В.* Релятивистская теория элементарных частиц. М.: Иностр. лит., 1947.
17. *Вентцель Г.* Введение в квантовую теорию волновых полей. М.; Л.: ГИТТЛ, 1947.
18. *Соколов А., Иваненко Д.* Квантовая теория поля. М.; Л.: ГИТТЛ, 1952.
19. *Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б.* Квантовая электродинамика. М.: Физматгиз, 1959.
20. *Jauch J. M., Rohrlich P.* The Theory of Photons and Electrons. Addison Wisley Press, 1955.
21. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. М.: ГИТТЛ, 1957.
22. *Швебер С.* Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М.: Иностр. лит., 1963.
23. *Огиевецкий В. И., Полубаринов И. В.* // ЖЭТФ. 1961. Т. 41. С. 247; Nuovo Cim. l962. V. 23. P. 173.
24. *Peierls R. E.* // Proc. Roy. Soc. A. 1952. V. 214. P. 143.
25. *Швингер Ю.* Теория квантованных полей. М.: Иностр. лит., 1956.
26. *DeWitt B. S.* // J. Math. Phys. 1961. V. 2. P. 151.
27. *Гайзенберг В.* Физические принципы квантовой теории. Л.; М., 1932. С. 113.
28. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия. М., 1948. С. 56.
29. *Рашевский П. К.* // УМН. 1958. Т. 13, №3. С. 3.
30. *Michel L.* // Supp. Nuovo Cim. 1959. V. 14, No. l. P. 95.
31. *Schwinger J.* // Phys. Rev. 1948. V. 74. P. 1439.
32. *Ozaki S.* // Progr. Theor. Phys. 1955. V. 14. P. 511.
33. *Любошиц В. Л., Смородинский Я. А.* // ЖЭТФ. 1962. Т. 42. С. 846.
34. *Tomonaga S.* // Progr. Theor. Phys. 1946. V. 1. P. 27.

35. *Johnson K.* // Ann. of Phys. 1960. V. 10. P. 536.

36. *Novobatsky K. F.* // Z. Phys. 1938. V. 111. P. 292.

37. *Dirac P. A. M.* // Can. J. Phys. 1955. V. 33. P. 650.

38. *Goldberg I.* // Phys. Rev. 1958. V. 112. P. 1361.

39. *Arnowitt R., Deser S.* // Phys. Rev. 1959. V. 113. P. 745.

40. *Фрадкин Е. С.* Докт. дисс. ФИАН СССР. 1960.

41. *Hammer C. L., Good R. H.* // Ann. of Phys. 1961. V. 12. P. 463.

42. *Mandelstam S.* // Ann. of Phys. 1962. V. 19. P. 1.

43. *Огиевецкий В. И., Полубаринов И. В.* // ЖЭТФ. 1962. V. 43. P. 1365.

44. *Schwinger J.* // Phys. Rev. 1951. V. 82. P. 664.

45. *Hori S.* // Progr. Theor. Phys. 1952. V. 7. P. 578.

46. *Feynman R. P.* // Phys. Rev. 1949. V. 76. P. 749; 769.

47. *Dyson F. J.* // Ibid. V. 75. P. 486; 1736.

48. *Sato S.* // Progr. Theor. Phys. 1964. V. 31. P. 256.

49. *Гольфанд Ю. А.* // ЖЭТФ. 1956. Т. 31. С. 35.

50. *Нетер Э.* Инвариантные вариационные задачи // Вариационные принципы механики. М., 1959;
Bessel-Hagen E. // Math. Ann. 1921;
Tetrode H. // Z. Phys. 1928. V. 49. P. 858;
Марков М. А. // ЖЭТФ. 1937. Т. 7. С. 579.

51. *Coleman S.* Invariance of Vacuum is Invariance of the World. CERN Preprint. 1965.

52. *Federbush P., Johnson K. J.* // Phys. Rev. 1960. V. 120. P. 1926;
Johnson K. J. // Nucl. Phys. 1961. V. 25. P. 431.

53. *Belinfante F. J.* // Physica. 1939. V. 6. P. 887;
Rosenfeld L. // Memories de l'Academic Roy Belgique. 1940. V. 61. P. 30.

54. *Умадзава Х.* Квантовая теория поля. М., 1958.

55. *Голдстейн Г.* Классическая механика. М., 1957. С. 262.

56. *Гинзбург В. Л.* // ЖЭТФ. 1940. Т. 10. С. 588; 601; 608.