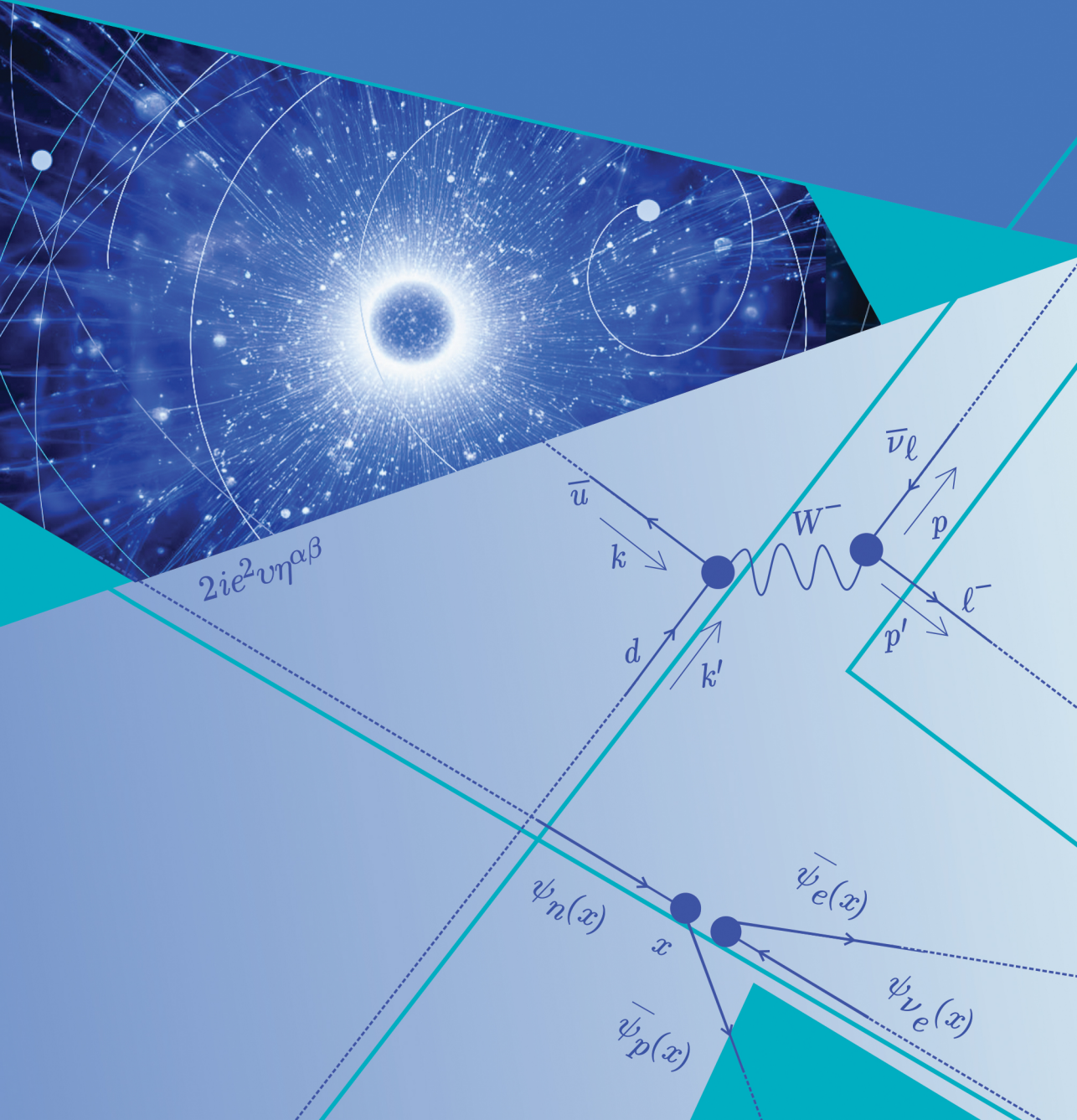


М. В. ЧИЖОВ

# СЛАБЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ



Объединенный институт ядерных исследований

М. В. Чижов

СЛАБЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ  
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Дубна 2024

**Чижов М. В.**  
Ч59 Слабые взаимодействия элементарных частиц. — Дубна: ОИЯИ,  
2024. — 102 с.: ил.

ISBN 978-5-9530-0612-5

Данный учебник представляет собой краткий курс, основанный на лекциях, которые автор читал с 1994 по 2021 г. для магистров физического факультета Софийского университета Св. Климента Охридского. Он посвящен основам теории и феноменологии слабых взаимодействий элементарных частиц. В нем также обсуждается нарушение основных симметрий в физике:  $P$ - и  $CP$ -четностей и спонтанное нарушение симметрии вакуума. Основная цель учебника — представить Стандартную модель элементарных частиц с точки зрения методики, которая понадобится для приобретения практических навыков аналитического расчета вероятностей и сечений. Этот аппарат находит широкое применение как в физике элементарных частиц, так и в астрофизике и космологии ранней Вселенной. Обязательным требованием для начала изучения этого курса является владение математическим аппаратом бакалаврской программы и понимание принципов квантовой механики. Также желательно, чтобы читатели имели базовые знания по квантовой теории поля.

ISBN 978-5-9530-0612-5

© Чижов М. В., 2024  
© Объединенный институт  
ядерных исследований, 2024

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение . . . . .	4
2. Уравнения Клейна–Гордона и Дирака . . . . .	8
3. Свойства спинорной волновой функции . . . . .	11
4. Свойства $\gamma$ -матриц Дирака и тождества Фирца . . . . .	15
5. Действие Дирака и $C$ -, $P$ - и $T$ -инвариантности . . . . .	18
6. $S$ -матрица и наблюдаемые величины . . . . .	21
7. Эффективная теория Ферми и матричный элемент . . . . .	24
8. Распад мюона . . . . .	26
9. Распад заряженного пиона . . . . .	32
10. Распад нейтрона . . . . .	37
11. Лептонные распады заряженных каонов . . . . .	45
12. Система нейтральных каонов . . . . .	47
13. Нарушение $CP$ -симметрии . . . . .	55
14. Глубоконеупругое рассеяние нейтрино . . . . .	58
15. Партоновая модель . . . . .	63
16. Упругое рассеяние нейтрино на электронах . . . . .	69
17. Калибровочная симметрия слабых и электромагнитных взаимодействий . . . . .	74
18. Механизм приобретения массы элементарными частицами . . . . .	80
19. Стандартная модель Глэшоу–Вайнберга–Салама . . . . .	84
20. Свойства заряженных векторных бозонов . . . . .	87
21. Свойства нейтральных векторных бозонов . . . . .	93
22. Свойства бозона Хиггса . . . . .	99

# 1. ВВЕДЕНИЕ

В этой вводной главе представлены все известные элементарные частицы\* и их типы взаимодействий, а также кратко упомянуты исторические факты их открытий. Мы будем использовать естественную систему единиц измерения, а именно положим фундаментальные константы: скорость света в вакууме  $c$  и редуцированную константу Планка (Max Karl Ernst Ludwig Planck, 1858–1947)  $\hbar$  равными единице:

$$\begin{aligned} c &= 299\,792\,458 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1} = 1, & c &\rightarrow \text{м}; \\ & & \downarrow & \\ \hbar &= \frac{h}{2\pi} = 1, \text{ где } h = 6,62607015 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} : c &\rightarrow \text{кг}^{-1}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

В этой системе все размерные величины можно выразить только через одну размерную константу, например, секунду.

Первая открытая элементарная частица — электрон, обозначается как  $e^-$ . Она имеет отрицательный электрический заряд  $q_e = -e$ , где

$$e = 1,602176634 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}, \quad (1.2)$$

и массу  $m_e \approx 0,511 \text{ МэВ}$  ( $1 \text{ эВ} = 1,602176634 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ ) и была открыта в 1897 г. Томсоном (Joseph John Thomson, 1856–1940) в катодных лучах, за что он получил Нобелевскую премию по физике за 1906 г. Ядро водородного атома — протон ( $p$ ) был открыт в 1919 г. Резерфордом (Ernest Rutherford, 1871–1937). Сегодня мы знаем, что  $p$  не является элементарной частицей и состоит из кварков и связывающих их глюонов.

В соответствии с теорией Дирака (Paul Adrien Maurice Dirac, 1902–1984) для любой заряженной элементарной или субатомной частицы, как, например, электрон или протон, должна существовать соответствующая античастица с такой же массой, но с противоположным зарядом. Эта теория была триумфально подтверждена в 1932 г. Андерсоном (Carl David Anderson, 1905–1991) открытием античастицы электрона — позитрона ( $e^+$ ) в космических лучах. Дирак и Андерсон получили нобелевские премии по физике за 1933 и 1936 г. соответственно. Антипротон был открыт только в 1955 г. Серге (Emilio Gino Segre, 1905–1989) и Чемберленом (Owen Chamberlain, 1920–2006), за что они тоже получили Нобелевскую премию по физике за 1959 г.

---

\* Частицы, структура которых остается неоткрытой до настоящего времени.

Ключевая для слабых взаимодействий почти безмассовая нейтральная элементарная частица — нейтрино — была введена Паули (Wolfgang Ernst Pauli, 1900–1958) в 1930 г., чтобы спасти закон сохранения энергии и импульса в радиоактивном бета-распаде. Нейтрино является продуктом нового в те времена слабого взаимодействия, теория которого еще не была построена. Первый камень в основу этой теории заложил Ферми (Enrico Fermi, 1901–1954) в 1934 г. Он также придумал и название «нейтрино» для новой гипотетической частицы, заменив название «нейтрон», предложенное Паули. Это было необходимо из-за открытия нейтрального компаньона протона — нейтрона ( $n$ ) в 1932 г. Чедвиком (James Chadwick, 1891–1974), получившим за это открытие Нобелевскую премию по физике за 1935 г. Более того, итальянский суффикс «ино» означает уменьшительное имя, которое более точно соответствует свойствам новой частицы. Вопреки предположению Паули, что эта частица не будет вообще обнаружена, антинейтрино было открыто в 1956 г. Коуэном (Clyde Lorrain Cowan Jr., 1919–1974) и Рейнесом (Frederick Reines, 1918–1998). Однако только в 1995 г. последний получил Нобелевскую премию за это открытие. Антинейтрино было открыто с помощью обратной реакции радиоактивного бета-распада

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n. \quad (1.3)$$

Оно называется электронным, потому что связано с появлением позитрона — античастицы электрона.

Очень интересное событие произошло в 1937 г., когда Андерсон и Неддермайер (Seth Henry Neddermeyer, 1907–1988) открыли в космических лучах частицу, похожую по своим свойствам на электрон, но с массой почти в 200 раз тяжелее его,  $m_\mu \approx 105,66$  МэВ. Эта частица называется мюоном ( $\mu$ ) и принадлежит к так называемому второму поколению частиц. К первому поколению принято относить пару частиц ( $\nu_e, e^-$ ). Соответствующее мюону мюонное нейтрино ( $\nu_\mu$ ) было открыто в 1962 г. Ледерманом (Leon Max Lederman, 1922–2018), Шварцем (Melvin Schwartz, 1932–2006) и Штейнбергером (Hans Jakob Steinberger, 1921–2020), которые получили за это открытие Нобелевскую премию по физике в 1988 г.

Заряженная частица третьего поколения  $\tau$  была описана Цайем (Yung-su Tsai, р. 1.02.1930) еще в 1971 г. и открыта в 1977 г. Перлом (Martin Lewis Perl, 1927–2014) с массой  $m_\tau \approx 1777$  МэВ. Перл получил Нобелевскую премию по физике за 1995 г. Соответствующее  $\tau$  тау-нейтрино ( $\nu_\tau$ ) было открыто в 2000 г. в эксперименте DONUT (Direct Observation of the Nu Tau) в Fermilab (США). Все эти частицы называются лептонами, потому что не участвуют в сильных взаимодействиях.

Составные части сильновзаимодействующих субатомных частиц — адронов называются кварками и были предсказаны Гелл-Манном (Murray Gell-Mann, 1929–2019) в 1964 г., за что ему в 1969 г. была присуждена Нобелевская премия по физике. Легкие  $u$  (up),  $d$  (down) и  $s$  (strange) кварки были открыты Фридманом (Jerome Isaac Friedman, р. 28.03.1930), Кендаллом (Henry Way Kendall, 1926–1999) и Тейлором (Richard Edward Taylor, 1929–2018)

в 1968 г. Они были удостоены Нобелевской премии по физике 1990 г. Первые два кварка —  $u$  и  $d$ , составляющие протон и нейтрон, а значит, и ядра химических элементов, обладают дробными зарядами  $(+2/3)e$  и  $(-1/3)e$  соответственно и являются элементарными частицами первого поколения. А  $s$ -кварк с зарядом  $(-1/3)e$  уже является элементарной частицей второго поколения. Если массы  $u$ - и  $d$ -кварков порядка нескольких МэВ, то масса  $s$ -кварка на сотню МэВ больше.

В целях установления симметрии между поколениями и по другим причинам, о которых речь пойдет далее, в 1970 г. Глэшоу (Sheldon Lee Glashow, р. 5.12.1932), Илиопулос (John Iliopoulos, р. 1940) и Майани (Luciano Maiani, р. 16.07.1941) ввели новый  $c$  (charm) кварк с зарядом  $(+2/3)e$  как элементарную частицу второго поколения. Этот кварк был открыт Рихтером (Burton Richter, 1931–2018) и независимо Тингом (Samuel Chao Chung Ting, р. 27.01.1936) с массой  $m_c \approx 1,3$  ГэВ в 1974 г. За свое открытие они были удостоены Нобелевской премии по физике 1976 г.

Более тяжелые кварки третьего поколения —  $b$  (bottom) и  $t$  (top) — были предсказаны в 1973 г. Кобаяши (Makoto Kobayashi, р. 7.04.1944) и Маскавой (Toshihide Maskawa, р. 7.02.1940), за что они получили Нобелевскую премию по физике 2008 г. Эти кварки были открыты в Fermilab в 1977 и 1995 гг. с массами  $m_b \approx 4,2$  ГэВ и  $m_t \approx 173,2$  ГэВ соответственно.

Каждый кварк может находиться в состоянии одного из трех цветов: красного, зеленого или синего, поэтому трехкварковые адроны являются белыми состояниями. Такое взаимодействие цветов описывается квантовой хромодинамикой (QCD). Переносчиками этого сильного цветного взаимодействия являются 8 безмассовых глюонов. Глюоны были открыты в 1979 г. на коллайдере PETRA (Positron-Elektron-Tandem-Ring-Anlage) в Германии.

К настоящему времени известны четыре типа основных взаимодействий: гравитационное, электромагнитное, слабое и сильное. Гравитационное взаимодействие было открыто в 1687 г. Ньютоном (Isaac Newton, 1643–1727), и оно включает в себя все известные и неизвестные частицы. Однако из-за малых масс элементарных частиц гравитационное взаимодействие между ними очень слабое по сравнению с другими типами взаимодействий, и поэтому оно обычно не учитывается.

Электромагнитное взаимодействие было открыто в 1864 г. Максвеллом (James Clerk Maxwell, 1831–1879), а его квантовый переносчик — фотон — в 1900, 1905 и 1923 гг. Планком, Эйнштейном (Albert Einstein, 1879–1955) и Комптоном (Arthur Holly Compton, 1892–1962), которые получили нобелевские премии в 1917, 1921 и 1927 гг. соответственно. Переносчики слабых взаимодействий —  $W^\pm$ - и  $Z$ -бозоны — были открыты в 1983 г. Руббиа (Carlo Rubbia, р. 31.03.1934) и ван дер Меером (Simon van der Meer, 1925–2011), которые получили Нобелевскую премию по физике за 1984 г. В отличие от безмассовых гравитона и фотона эти бозоны имеют довольно большие массы:

$$m_W^{\text{exp}} \approx 80,4 \text{ ГэВ} \quad \text{и} \quad m_Z^{\text{exp}} \approx 91,2 \text{ ГэВ}. \quad (1.4)$$

Quarks		Leptons		Bosons		
2.3 MeV $u^{+\frac{2}{3}}$ up-quark	4.8 MeV $d^{-\frac{1}{3}}$ down-quark	I	< 1 eV $\nu_1^0$ first neutrino	0.511 MeV $e^-$ electron	0 eV $\gamma^0$ photon	80.4 GeV $W^+$ W-boson
1.275 GeV $c^{+\frac{2}{3}}$ charm-quark	95 MeV $s^{-\frac{1}{3}}$ strange-quark	II	< 1 eV $\nu_2^0$ second neutrino	105.66 MeV $\mu^-$ muon	0 eV $g^0$ gluon	91.2 GeV $Z^0$ Z-boson
173.2 GeV $t^{+\frac{2}{3}}$ top-quark	4.18 GeV $b^{-\frac{1}{3}}$ bottom-quark	III	< 1 eV $\nu_3^0$ third neutrino	1776.8 MeV $\tau^-$ tau-lepton	0 eV $G^0$ graviton	125.1 GeV $h^0$ Higgs-boson

Рис. 1

Существует еще одна элементарная частица —  $h$ , бозон Хиггса (Peter Ware Higgs, p. 29.05.1929), которая является следствием механизма приобретения масс всеми элементарными частицами, с которыми она имеет непосредственное взаимодействие. Она была открыта в 2012 г. в ЦЕРН (Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire) в Швейцарии с массой

$$m_h^{\text{exp}} \approx 125,1 \text{ ГэВ}, \quad (1.5)$$

а в 2013 г. Энглер (François Englert, p. 6.11.1932) и Хиггс получили Нобелевскую премию по физике за теоретическое открытие этого механизма. На рис. 1 представлены все открытые, кроме гравитона, элементарные частицы. Кроме того, теперь известно, что  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  и  $\nu_\tau$  являются квантовыми смесями элементарных частиц  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  и  $\nu_3$  с определенными, но очень малыми массами, которые еще не известны.



## 2. УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА И ДИРАКА

Основное релятивистское уравнение свободной частицы имеет вид

$$E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2, \quad (2.1)$$

где  $E$  — ее полная энергия, а  $\mathbf{p}$  и  $m$  — импульс и масса данной частицы. В квантовой механике импульс  $\mathbf{p}$  является оператором в конфигурационном пространстве  $\mathbf{p} = -i\nabla$ . Кроме того, следуя уравнению Шредингера (Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger, 1887–1961),  $E$  тоже можем записать в виде оператора  $E = i\partial/\partial t$ . Тогда в релятивистских обозначениях

$$p^\mu = i\partial/\partial x_\mu \equiv i\partial^\mu, \quad (2.2)$$

где  $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ ,  $x^\mu = (t, \mathbf{x})$ , а  $\mu = 0, 1, 2, 3$  обозначает контравариантный лоренц-индекс. Ковариантный вектор  $x_\mu = \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} x^\nu$  получается из  $x^\mu$  с помощью метрического тензора

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

и, применяя правило сумм Эйнштейна, его можно записать как  $x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$ , где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Метрический тензор является матрицей в пространстве лоренц-индексов. Тогда уравнение Клейна (Oskar Benjamin Klein, 1894–1977) и Гордона (Walter Gordon, 1893–1939) для свободной частицы, которая описывается полем  $\varphi(x)$  в конфигурационном пространстве  $x^\mu$ , имеет вид

$$(\partial^2 + m^2)\varphi(x) = 0, \quad \partial^2 \equiv \partial_\mu \partial^\mu. \quad (2.4)$$

В импульсном пространстве получаем:

$$(p^2 - m^2)\tilde{\varphi}(p) = 0, \quad p^2 \equiv p_\mu p^\mu, \quad (2.5)$$

где  $\tilde{\varphi}(p) = \int \varphi(x) e^{ip_\mu x^\mu} d^4x$  является фурье-образом  $\varphi(x)$ .

Квадратное уравнение (2.1) имеет два решения:  $E = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ , и, следовательно, одно из решений соответствует нефизической отрицательной энергии. Чтобы избежать появления решений с отрицательной энергией, Дирак предлагает линеаризацию квадратного уравнения (2.5)

$$p^2 - m^2 = (\gamma_\nu p^\nu + m)(\gamma_\mu p^\mu - m) = 0. \quad (2.6)$$

Однако, чтобы разложение (2.6) было математически корректно, коэффициенты  $\gamma_\mu$  и  $\gamma_\nu$  должны удовлетворять уравнению

$$p^2 = \gamma_\nu p^\nu \gamma_\mu p^\mu = \frac{1}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu) p^\mu p^\nu = \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu. \quad (2.7)$$

Так как  $\gamma_\mu$  и  $\gamma_\nu$  с различными лоренц-индексами антикоммутируют, они должны быть матрицами в спинорном пространстве:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu} \mathbb{1}. \quad (2.8)$$

В четырехмерном лоренц-пространстве это может быть реализовано матрицей  $4 \times 4$  в спинорном пространстве\*. Используя последнее равенство в (2.6), получаем уравнения Дирака

$$\left[ (\gamma_\mu)_a^b p^\mu - m \delta_a^b \right] \tilde{\psi}_b(p) = 0 \quad \rightarrow \quad \left[ i (\gamma_\mu)_a^b \partial^\mu - m \delta_a^b \right] \psi_b(x) = 0 \quad (2.9)$$

в импульсном и конфигурационном пространствах соответственно, где  $\tilde{\psi}(p)$  и  $\psi(x)$  представляют собой 4-компонентные биспиноры. Спинорные индексы  $a$  и  $b$  пробегают значения от 1 до 4.

Ясно, что уравнение (2.8) ковариантно относительно унитарного преобразования  $\gamma$ -матриц

$$\gamma \rightarrow \gamma' = U \gamma U^\dagger \quad (2.10)$$

и, следовательно, существует бесконечное число таких представлений. Одно из представлений  $\gamma$ -матриц в блочной структуре  $2 \times 2$  имеет вид

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

где  $\sigma^\mu$  являются матрицами Паули

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Это представление называется энергетическим из-за диагональной матрицы  $\gamma^0$ .

Уравнение (2.9) в импульсном пространстве является алгебраическим, и поэтому его решения могут быть просто найдены. Давайте представим биспинор  $\tilde{\psi}(p)$  с помощью спиноров  $\varphi$  и  $\zeta$ :

$$\tilde{\psi}(p) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \zeta = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Тогда первое уравнение в (2.9) можно переписать в матричной форме

$$\begin{aligned} (\gamma_\mu p^\mu - m) \tilde{\psi}(p) &= \begin{pmatrix} E - m & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -E - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \zeta \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{aligned} \text{(a): } (E - m) \varphi &= (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \zeta \\ \text{(b): } (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \varphi &= (E + m) \zeta \end{aligned} \end{aligned} \quad (2.14)$$

\* Размерность спинорного представления в  $d$ -мерном пространстве выражается как  $2^{\lfloor d/2 \rfloor}$ , где квадратные скобки обозначают целую часть отношения  $d/2$ .

Для неотрицательной энергии  $E \geq 0$  уравнение (2.14b) дает

$$\zeta = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \varphi \quad \rightarrow \quad \tilde{\psi}^{(+)}(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \end{pmatrix} \varphi. \quad (2.15)$$

Чтобы решение системы (2.14) было самосогласованным, из уравнения (2.14a)

$$(E - m) \varphi \stackrel{(2.15)}{=} \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{E + m} \varphi = \frac{\mathbf{p}^2}{E + m} \varphi \quad \rightarrow \quad E = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad (2.16)$$

получаем и решение с отрицательной энергией.

Таким образом, даже линеаризованное уравнение опять приводит к двум решениям. Дирак предположил, что второе решение описывает античастицы. Чтобы энергия этого решения была неотрицательной, нужно изменить четырехимпульс  $p$  на противоположный:

$$\begin{aligned} (\gamma_\mu p^\mu + m) \tilde{\psi}^{(-)}(-p) &= \begin{pmatrix} E + m & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -E + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \zeta \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{aligned} \text{(a): } (E + m) \varphi &= (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \zeta \\ \text{(b): } (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \varphi &= (E - m) \zeta \end{aligned} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Тогда для  $E \geq 0$  из уравнения (2.17a) получаем соответствующее решение для античастиц:

$$\varphi = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \zeta \quad \rightarrow \quad \tilde{\psi}^{(-)}(-p) = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \\ 1 \end{pmatrix} \zeta. \quad (2.18)$$

### 3. СВОЙСТВА СПИНОРНОЙ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ

Уравнения Дирака (2.9) могут быть записаны и в виде уравнения Шредингера

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi_{\pm \mathbf{p}}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) = H(\mathbf{p}) \psi_{\pm \mathbf{p}}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m\beta) \psi_{\pm \mathbf{p}}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\alpha} \equiv \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}, \quad \beta \equiv \gamma^0. \quad (3.1)$$

Квадрат абсолютного значения решения этого уравнения  $|\psi_{\mathbf{p}}^{(\pm)}(t, \mathbf{x})|^2$  является плотностью вероятности найти частицу в точке  $\mathbf{x}$  в данный момент времени  $t$ . Для одной (анти)частицы в целом объеме она нормируется следующим образом:

$$\int |\psi_{\mathbf{p}}^{(\pm)}(t, \mathbf{x})|^2 d^3 \mathbf{x} = 1. \quad (3.2)$$

Из (3.2) видно, что плотность вероятности в данной точке бесконечно мала. Чтобы перейти к конечным значениям, введем инвариантным образом спиноры  $u(\pm p)$

$$\psi_{\mathbf{p}}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2p^0 V}} u(\pm p) e^{\mp i p x}; \quad p x \equiv p_\mu x^\mu, \quad p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, \quad V = \int d^3 \mathbf{x}. \quad (3.3)$$

Тогда из уравнения (3.2) получаем соотношение на спиноры  $u(\pm p)$

$$u^\dagger(\varepsilon p) u(\varepsilon p) = \bar{u}(\varepsilon p) \gamma^0 u(\varepsilon p) = 2p^0, \quad (3.4)$$

где знак  $\varepsilon = \pm 1$  отвечает частице или античастице, а  $\bar{u} \equiv u^\dagger \gamma^0$  является дираковски сопряженным спинором. Так как билинейная комбинация  $\bar{u}(\varepsilon p) \gamma^0 u(\varepsilon p)$  преобразуется как нулевая компонента четырехвектора, можем переписать (3.4) в лоренц-инвариантной форме:

$$\bar{u}(\varepsilon p) \gamma^\mu u(\varepsilon p) = 2p^\mu \xrightarrow{\times p^\mu} \bar{u}(\varepsilon p) \hat{p} u(\varepsilon p) = 2p^2 = 2m^2, \quad \hat{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu. \quad (3.5)$$

Используя уравнения (3.1) и (3.3), получаем уравнения на спиноры  $u$  и  $\bar{u}$ :

$$(\hat{p} - \varepsilon m) u(\varepsilon p) = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{u}(\varepsilon p) (\hat{p} - \varepsilon m) = 0. \quad (3.6)$$

Чтобы получить уравнение на спинор  $\bar{u}$  в (3.6), мы использовали свойство  $\gamma$ -матриц

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0. \quad (3.7)$$

Умножая первое уравнение в (3.6) слева на  $\bar{u}(\varepsilon p)$  и используя (3.5) для нормировки спиноров  $u$ , получаем

$$\bar{u}(\varepsilon p)u(\varepsilon p) = 2\varepsilon t. \quad (3.8)$$

Теперь, если умножить первое уравнение в (3.6) слева на  $\bar{u}(\varepsilon' p)$ ,  $\varepsilon' \neq \varepsilon$ , и использовать второе уравнение в (3.6), можно получить свойство ортогональности спиноров  $u$ :

$$\bar{u}(\varepsilon' p)u(\varepsilon p) = 2\varepsilon t \delta_{\varepsilon' \varepsilon}. \quad (3.9)$$

Спиноры  $u(\pm p)$  описывают четыре независимые спинорные компоненты. Значит, кроме квантового числа  $\varepsilon = \pm 1$  должно существовать еще одно квантовое число, скажем,  $\chi = \pm 1$ , чтобы было установлено полное соответствие между степенями свободы спиноров и их квантовыми числами. Для этого рассмотрим оператор  $\gamma^5 \hat{s}$ , где

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^0 \\ \sigma^0 & 0 \end{pmatrix} = \gamma^{5\dagger} : \quad (\gamma^5)^2 = 1, \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad (3.10)$$

а  $s_\mu$  представляет собой четырехвектор со следующими свойствами:

$$s_\mu p^\mu = 0, \quad s^2 = -1. \quad (3.11)$$

В этом случае оператор  $\gamma^5 \hat{s}$  коммутирует\* с  $\hat{p}$  и может принимать собственные значения  $\chi$  одновременно с  $\varepsilon$ :

$$\gamma^5 \hat{s} u^\chi(\varepsilon p) = \chi u^\chi(\varepsilon p) \xrightarrow{\dagger \gamma^0} \bar{u}^\chi(\varepsilon p) \gamma^5 \hat{s} = \chi \bar{u}^\chi(\varepsilon p). \quad (3.12)$$

Так как квадрат этого оператора  $\gamma^5 \hat{s} \gamma^5 \hat{s} = -s^2 = 1$ , то его собственные значения  $\chi = \pm 1$ . Это квантовое число называется *киральностью*. Используя уравнения (3.12), можно показать, что спиноры с различными киральностями  $\chi' \neq \chi$  ортогональны:

$$\bar{u}^{\chi'}(\varepsilon' p)u^\chi(\varepsilon p) = 2\varepsilon t \delta_{\varepsilon' \varepsilon} \delta_{\chi' \chi}. \quad (3.13)$$

Давайте теперь выясним физический смысл квантового числа киральность, которое, как мы покажем в дальнейшем, связано с оператором спина

$$\Sigma = \frac{1}{2} \gamma^5 \boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Начнем со случая покоящейся частицы  $p^{(0)} = (m, \mathbf{0})$ . Тогда  $s^{(0)} = (0, \mathbf{s})$ . Из первого уравнения в (3.6) получаем, что спинор  $u^\chi(\varepsilon p^{(0)})$  является собственной функцией оператора  $\gamma^0$ :

$$\gamma^0 u^\chi(\varepsilon p^{(0)}) = \varepsilon u^\chi(\varepsilon p^{(0)}). \quad (3.15)$$

---

\*  $[\gamma^5 \hat{s}, \hat{p}] = 2\gamma^5 s_\mu p^\mu = 0$ .

Если умножить первое уравнение в (3.12) слева на  $1/2\gamma^0$ , в левой части получим скалярное произведение оператора спина и вектора  $\mathbf{s}$ , а в правой — их квантовые числа

$$(\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{s})u^\chi(\varepsilon p^{(0)}) = \frac{1}{2}\chi\gamma^0 u^\chi(\varepsilon p^{(0)}) \stackrel{(3.15)}{=} \frac{1}{2}\chi\varepsilon u^\chi(\varepsilon p^{(0)}). \quad (3.16)$$

Это означает, что для покоящейся частицы киральность показывает направление спина по отношению к вектору  $\mathbf{s}$ .

Для частицы в движении вводится оператор спиральности  $\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$  (проекция спина на направление движения), который можно построить из оператора киральности, если вектор  $\mathbf{s}$  параллелен  $\mathbf{p}$ . Поэтому очень часто их путают один с другим. Если  $\mathbf{s} = a\mathbf{p}$ , то из условия ортогональности и нормировки (3.11) получаем:

$$s^0 p^0 = \mathbf{s} \cdot \mathbf{p} = a\mathbf{p}^2 \quad \rightarrow \quad a = \frac{s^0 p^0}{\mathbf{p}^2} : \quad \stackrel{(3.17b)}{\rightarrow} \quad \mathbf{s} = \frac{p^0}{m} \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad (3.17a)$$

$$1 = \mathbf{s}^2 - (s^0)^2 = a^2 \mathbf{p}^2 - (s^0)^2 \stackrel{(3.17a)}{=} \frac{(s^0 p^0)^2}{\mathbf{p}^2} - (s^0)^2 = \frac{(s^0 m)^2}{\mathbf{p}^2} : s^0 \stackrel{\uparrow}{=} \frac{|\mathbf{p}|}{m}. \quad (3.17b)$$

Тогда оператор

$$\frac{1}{2m}\gamma^5 \widehat{s} \widehat{p} = \frac{1}{2m}\gamma^5 \left( \frac{|\mathbf{p}|}{m}\gamma^0 - \frac{p^0}{m} \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}}{|\mathbf{p}|} \right) (p^0 \gamma^0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \quad (3.18)$$

совпадает с оператором спиральности и, чтобы найти его собственные значения  $\lambda$ , нужно использовать уравнения (3.6) и (3.12):

$$\frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} u^\chi(\varepsilon p) = \frac{1}{2m}\gamma^5 \widehat{s} \widehat{p} u^\chi(\varepsilon p) \stackrel{(3.6)}{=} \frac{1}{2}\varepsilon \gamma^5 \widehat{s} u^\chi(\varepsilon p) \stackrel{(3.12)}{=} \frac{1}{2}\chi \varepsilon u^\chi(\varepsilon p) = \lambda u^\chi(\varepsilon p). \quad (3.19)$$

Из этого уравнения и из (3.16) следует, что киральность связана с проекцией спина. Если  $\lambda > 0$ , то такие частицы называются правыми, а если  $\lambda < 0$  — левыми. Однако это понятие для массивных частиц не является лоренц-инвариантным.

В заключение рассмотрим случай безмассовых частиц ( $m = 0$ ). В этом случае оператор спиральности имеет следующие собственные значения:

$$2 \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} u^\chi(\varepsilon p) \stackrel{\substack{\gamma \cdot \mathbf{p} = \gamma^0 p^0 \\ p^0 = |\mathbf{p}|}}{=} \gamma^5 u^\chi(\varepsilon p) \stackrel{(3.19)}{=} \chi \varepsilon u^\chi(\varepsilon p). \quad (3.20)$$

Это означает, что существует представление  $\gamma$ -матриц, где  $\gamma^5$  диагональная:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} : \quad \gamma^0 \stackrel{(2.10)}{=} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^0 \\ \sigma^0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i \stackrel{(2.10)}{=} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 \stackrel{(2.10)}{=} \begin{pmatrix} -\sigma^0 & 0 \\ 0 & \sigma^0 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Такое представление называется киральным. В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения для частиц и античастиц:

$$u^{\chi}(+p) = u^{\chi}(p), \quad (3.22a)$$

$$u^{\chi}(-p) = v^{\chi}(p). \quad (3.22b)$$

Из (3.20) становится понятно, что проекционные операторы

$$\Pi_R = \frac{1 + \gamma^5}{2}, \quad \Pi_L = \frac{1 - \gamma^5}{2} : \\ \Pi_R + \Pi_L = 1, \quad \Pi_R \Pi_L = 0, \quad \Pi_R \Pi_R = \Pi_R, \quad \Pi_L \Pi_L = \Pi_L, \quad (3.23)$$

выбирают правую или левую частицу. Тогда для безмассовых частиц получаем

$$\Pi_R u^1(p) = u^1(p), \quad \Pi_L u^1(p) = 0; \quad \Pi_R v^{-1}(p) = v^{-1}(p), \quad \Pi_L v^{-1}(p) = 0; \\ \Pi_L u^{-1}(p) = u^{-1}(p), \quad \Pi_R u^{-1}(p) = 0; \quad \Pi_L v^1(p) = v^1(p), \quad \Pi_R v^1(p) = 0. \quad (3.24)$$

В заключение этой главы мы получим основные формулы, которые будем использовать в дальнейшем во всех расчетах. Имея полную систему ортонормированных собственных векторов (3.13), любая матрица  $4 \times 4$  может быть представлена через их линейную комбинацию. Например, для дираковской скобки (2.6) можем записать, что

$$(\hat{p} + \varepsilon m)_a^b = \sum_{\varepsilon', \chi' = \pm 1} u_a^{\chi'}(\varepsilon' p) \omega^{\chi' b}(\varepsilon' p). \quad (3.25)$$

Чтобы найти коэффициенты  $\omega^{\chi b}(\varepsilon' p)$ , умножим уравнение (3.25) на  $\bar{u}^{\chi a}(\varepsilon'' p)$  и, используя второе уравнение в (3.6) и уравнение (3.13), получаем

$$m(\varepsilon'' + \varepsilon) \bar{u}^{\chi b}(\varepsilon'' p) = \sum_{\varepsilon', \chi' = \pm 1} \bar{u}^{\chi a}(\varepsilon'' p) u_a^{\chi'}(\varepsilon' p) \omega^{\chi' b}(\varepsilon' p) \stackrel{(3.13)}{\downarrow} 2m\varepsilon'' \omega^{\chi b}(\varepsilon'' p) \\ \omega^{\chi b}(\varepsilon' p) = \delta_{\varepsilon' \varepsilon} \bar{u}^{\chi b}(\varepsilon p). \quad (3.26)$$

В результате получаем следующее выражение:

$$(\hat{p} + \varepsilon m)_a^b = \sum_{\chi = \pm 1} u_a^{\chi}(\varepsilon p) \bar{u}^{\chi b}(\varepsilon p) \quad (3.27)$$

или

$$\sum_{\chi = \pm 1} u_a^{\chi}(p) \bar{u}^{\chi b}(p) = (\hat{p} + m)_a^b, \quad (3.28a)$$

$$\sum_{\chi = \pm 1} u_a^{\chi}(p) \bar{v}^{\chi b}(p) = (\hat{p} - m)_a^b. \quad (3.28b)$$

## 4. СВОЙСТВА $\gamma$ -МАТРИЦ ДИРАКА И ТОЖДЕСТВА ФИРЦА

В спинорном пространстве матриц  $4 \times 4$ , кроме единичной матрицы  $\mathbb{1}$ , должно существовать еще 15 независимых бесследовых матриц, 4 из которых (2.11) мы уже знаем. В соответствии с основным свойством  $\gamma$ -матриц (2.8) их симметризация сводится к единичной матрице или нулю. Поэтому, чтобы построить новые матрицы, будем следовать алгоритму их антисимметризации. Таким образом, получаем первые 6 новых матриц:

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (4.1)$$

Антисимметризация трех  $\gamma$ -матриц приводит к появлению еще 4 новых матриц:

$$\frac{1}{3!} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha = i \gamma^5 \gamma_\beta. \quad (4.2)$$

И, наконец, антисимметризация четырех  $\gamma$ -матриц определяет матрицу  $\gamma^5$  (3.10):

$$\frac{1}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta = i \gamma^5. \quad (4.3)$$

Полностью антисимметричный тензор Леви-Чивита (Tullio Levi-Civita, 1873–1941) определяется как

$$\varepsilon^{0123} = +1, \quad \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon^{\mu'\nu'\alpha'\beta'} = - \begin{vmatrix} \delta_\mu^{\mu'} & \delta_\mu^{\nu'} & \delta_\mu^{\alpha'} & \delta_\mu^{\beta'} \\ \delta_\nu^{\mu'} & \delta_\nu^{\nu'} & \delta_\nu^{\alpha'} & \delta_\nu^{\beta'} \\ \delta_\alpha^{\mu'} & \delta_\alpha^{\nu'} & \delta_\alpha^{\alpha'} & \delta_\alpha^{\beta'} \\ \delta_\beta^{\mu'} & \delta_\beta^{\nu'} & \delta_\beta^{\alpha'} & \delta_\beta^{\beta'} \end{vmatrix}. \quad (4.4)$$

Из (4.4) следуют следующие полезные соотношения:

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon^{\mu'\nu'\alpha'\beta} = - \begin{vmatrix} \delta_\mu^{\mu'} & \delta_\mu^{\nu'} & \delta_\mu^{\alpha'} \\ \delta_\nu^{\mu'} & \delta_\nu^{\nu'} & \delta_\nu^{\alpha'} \\ \delta_\alpha^{\mu'} & \delta_\alpha^{\nu'} & \delta_\alpha^{\alpha'} \end{vmatrix}, \quad \begin{aligned} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon^{\mu'\nu'\alpha\beta} &= 2(\delta_\mu^{\nu'} \delta_\nu^{\mu'} - \delta_\mu^{\mu'} \delta_\nu^{\nu'}), \\ \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon^{\mu'\nu\alpha\beta} &= -6\delta_\mu^{\mu'}, \\ \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} &= -24. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Сопоставим всем 16 матрицам символы  $\Gamma^k$  ( $k = S, V, T, A, P$ ), где индекс  $k$  будет иметь смысл, отражающий трансформационные свойства би-



линейных комбинаций спиноров  $\bar{u}\Gamma^k u$  по отношению к преобразованиям Лоренца и инверсии пространственных координат:

$$\begin{aligned} \Gamma^S &= 1, \quad \Gamma^V = \gamma^\mu, \quad \Gamma^T = \sigma^{\mu\nu} (\mu < \nu), \quad \Gamma^A = i\gamma^5 \gamma^\mu, \quad \Gamma^P = \gamma^5; \\ \Gamma_S &= 1, \quad \Gamma_V = \gamma_\mu, \quad \Gamma_T = \sigma_{\mu\nu} (\mu < \nu), \quad \Gamma_A = i\gamma^5 \gamma_\mu, \quad \Gamma_P = \gamma^5. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Они образуют полный набор матриц в спинорном пространстве со следующими свойствами:

$$\Gamma_k \Gamma^k = 1 \text{ (нет суммирования по } k), \quad \text{Tr} [\Gamma_k \Gamma^j] = 4\delta_k^j. \quad (4.7)$$

Тогда произведение элементов двух произвольных матриц  $Q$  и  $R$  может быть представлено как сумма произведений двух элементов матриц  $\Gamma^k$  с переставленными верхними спинорными индексами:

$$Q_a^b R_c^d = \sum_{k,j=S,V,T,A,P} C_{kj} (\Gamma^k)_a^d (\Gamma^j)_c^b. \quad (4.8)$$

Это и есть тождества Фирца (Markus Eduard Fierz, 1912–2006). Чтобы найти коэффициенты в разложении (4.8), нужно умножить обе стороны этого равенства на  $(\Gamma_m)_d^a (\Gamma_n)_b^c$ . Тогда, используя (4.7), получаем

$$C_{mn} = \frac{1}{16} \text{Tr} [Q \Gamma_n R \Gamma_m]. \quad (4.9)$$

Чтобы вычислить (4.9), нужно знать, как вычисляются следы произведения  $\gamma$ -матриц:

$$\text{Tr}[\gamma^5] = \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^5] = \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5] = \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^5] = 0, \quad \text{Tr}[\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}] = 0; \quad (4.10a)$$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^5] = -4i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}, \quad \text{Tr}[\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n}}] = 4 \sum_P (-1)^P \prod_{i<j}^n \eta^{\mu_i \mu_j}, \quad (4.10b)$$

где  $P$  обозначает всевозможные перестановки

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & \dots & \dots & \dots & \mu_{2n} \\ \dots & \mu_i & \dots & \mu_j & \dots \end{pmatrix}.$$

Например, для следов из двух и четырех  $\gamma$ -матриц получаем

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4\eta^{\mu\nu}, \quad \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta] = 4(\eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} - \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha}). \quad (4.11)$$

Давайте докажем тождество Фирца

$$[\gamma_\mu (1 - \gamma^5)]_a^b [\gamma^\mu (1 - \gamma^5)]_c^d = -[\gamma_\mu (1 - \gamma^5)]_a^d [\gamma^\mu (1 - \gamma^5)]_c^b, \quad (4.12)$$

используя следующие формулы произведений  $\gamma$ -матриц типа  $\gamma_\mu \mathcal{O} \gamma^\mu$ , где неявно подразумевается суммирование по лоренц-индексу  $\mu$ :

$$\gamma_\mu (\gamma^{\nu_1} \gamma^{\nu_2} \dots \gamma^{\nu_{2n+1}}) \gamma^\mu = -2\gamma^{\nu_{2n+1}} \dots \gamma^{\nu_2} \gamma^{\nu_1}, \quad \gamma_\mu (\gamma^\alpha \gamma^\beta) \gamma^\mu = 4\eta^{\alpha\beta}. \quad (4.13)$$

Тогда коэффициенты (4.9) имеют вид

$$C_{kS} = C_{Sk} = \frac{1}{16} \text{Tr}[\gamma_\mu(1 - \gamma^5)\Gamma_S\gamma^\mu(1 - \gamma^5)\Gamma_k] \stackrel{(3.10)}{=} \frac{1}{4} \text{Tr}[\gamma_\mu\Pi_L\Pi_R\gamma^\mu\Gamma_k] = 0, \quad (4.14a)$$

$$C_{kT} = C_{Tk} = \frac{1}{16} \text{Tr}[\gamma_\mu(1 - \gamma^5)\Gamma_T\gamma^\mu(1 - \gamma^5)\Gamma_k] \stackrel{(3.10)}{=} \frac{1}{4} \text{Tr}[\gamma_\mu\Pi_L\Gamma_T\Pi_R\gamma^\mu\Gamma_k] = 0, \quad (4.14b)$$

$$C_{kP} = C_{Pk} = \frac{1}{16} \text{Tr}[\gamma_\mu(1 - \gamma^5)\Gamma_P\gamma^\mu(1 - \gamma^5)\Gamma_k] \stackrel{(3.10)}{=} \frac{1}{4} \text{Tr}[\gamma_\mu\Pi_L\Gamma_P\Pi_R\gamma^\mu\Gamma_k] = 0, \quad (4.14c)$$

$$C_{VV} = \frac{1}{16} \text{Tr}[\gamma_\mu(1 - \gamma^5)\Gamma_V\gamma^\mu(1 - \gamma^5)\Gamma_V] \stackrel{(3.10)}{=} \frac{1}{4} \text{Tr}[\Pi_R\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma^\mu\gamma_\beta\Pi_R] \stackrel{(4.13)}{\stackrel{(3.23)}{=}} -\eta_{\alpha\beta}, \quad (4.14d)$$

$$C_{VA} = C_{AV} = \frac{1}{16} \text{Tr}[\gamma_\mu(1 - \gamma^5)\Gamma_V\gamma^\mu(1 - \gamma^5)\Gamma_A] \stackrel{(3.10)}{=} \stackrel{(3.10)}{=} \frac{1}{4} \text{Tr}[\Pi_R\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma^\mu i\gamma^5\gamma_\beta\Pi_R] \stackrel{(4.13)}{\stackrel{(3.23)}{=}} i\eta_{\alpha\beta}, \quad (4.14e)$$

$$C_{AA} = \frac{1}{16} \text{Tr}[\gamma_\mu(1 - \gamma^5)\Gamma_A\gamma^\mu(1 - \gamma^5)\Gamma_A] \stackrel{(3.10)}{=} \stackrel{(3.10)}{=} \frac{1}{4} \text{Tr}[\Pi_R\gamma_\mu i\gamma^5\gamma_\alpha\gamma^\mu i\gamma^5\gamma_\beta\Pi_R] \stackrel{(4.13)}{\stackrel{(3.23)}{=}} \eta_{\alpha\beta} \quad (4.14f)$$

и

$$\begin{aligned} & [\gamma_\mu(1 - \gamma^5)]_a^b [\gamma^\mu(1 - \gamma^5)]_c^d = \\ & = \eta_{\alpha\beta} \{ -[\gamma^\alpha]_a^d [\gamma^\beta]_c^b + i[\gamma^\alpha]_a^d [i\gamma^5\gamma^\beta]_c^b + i[i\gamma^5\gamma^\alpha]_a^d [\gamma^\beta]_c^b + [i\gamma^5\gamma^\alpha]_a^d [i\gamma^5\gamma^\beta]_c^b \} = \\ & = -\eta_{\alpha\beta} [\gamma^\alpha(1 - \gamma^5)]_a^d [\gamma^\beta(1 - \gamma^5)]_c^b. \end{aligned} \quad (4.15)$$

## 5. ДЕЙСТВИЕ ДИРАКА И $C$ -, $P$ - И $T$ -ИНВАРИАНТНОСТИ

Плотность лагранжиана Дирака и его действие можно получить из уравнения (2.9), предполагая, что биспиноры  $\psi(x)$  и  $\bar{\psi}(x)$  независимые,

$$\mathcal{A} = \int L(t)dt = \int \mathcal{L}(t, \mathbf{x})d^3\mathbf{x} dt = \int \bar{\psi}(x)(i\hat{\partial} - m)\psi(x)d^4x. \quad (5.1)$$

Плотность лагранжиана\* определяется с точностью до полной четырехмерной дивергенции, например,

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x)(i\hat{\partial} - m)\psi(x) - i\alpha \partial_\mu [\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)], \quad (5.2)$$

где  $\alpha$  является произвольной константой. Тогда кроме выражения (5.1) при  $\alpha = 0$  можно записать еще два специальных выражения:

$$\alpha = 1 : \quad \mathcal{L}(x) = -i\bar{\psi}(x)\overleftrightarrow{\partial}_\mu\gamma^\mu\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x), \quad (5.3a)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} : \quad \mathcal{L}(x) = \frac{i}{2}\bar{\psi}(x)\overleftrightarrow{\partial}_\mu\gamma^\mu\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x), \quad (5.3b)$$

где  $\overleftrightarrow{\partial}_\mu \equiv \partial_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu$ . Известно, что действие Дирака  $P$ ,  $C$  и  $T$  инвариантно, поэтому будем действовать прагматично и определим эти три дискретных преобразования, используя этот факт.

Начнем с преобразования инверсии пространственных координат

$$\mathcal{P} : \quad \begin{aligned} \psi'(x') &= P\psi(x), \quad x' = (x'^0, \mathbf{x}') = (x^0, -\mathbf{x}); \\ \bar{\psi}'(x') &= \bar{\psi}(x)D. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Матрица  $D$  определяется из инвариантности массового члена

$$m\bar{\psi}(x)\psi(x) \xrightarrow{\mathcal{P}} m\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = m\bar{\psi}(x)DP\psi(x) : \quad D = P^{-1}. \quad (5.5)$$

Чтобы определить свойства матрицы  $P$ , нужно отдельно рассмотреть временную и пространственную части с производной в кинетическом члене:

$$i\bar{\psi}(x)\gamma^0\partial_0\psi(x) \xrightarrow{\mathcal{P}} i\bar{\psi}'(x')\gamma^0\partial'_0\psi'(x') = i\bar{\psi}(x)P^{-1}\gamma^0P\partial_0\psi(x) : \quad P^{-1}\gamma^0P = \gamma^0, \quad (5.6a)$$

$$i\bar{\psi}(x)\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\partial}\psi(x) \xrightarrow{\mathcal{P}} i\bar{\psi}'(x')\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\partial}'\psi'(x') = -i\bar{\psi}(x)P^{-1}\boldsymbol{\gamma}P\cdot\boldsymbol{\partial}\psi(x) : \quad P^{-1}\boldsymbol{\gamma}P = -\boldsymbol{\gamma}. \quad (5.6b)$$

---

\* Для краткости в дальнейшем будем использовать термин лагранжиан, подразумевая  $\mathcal{L}(x)$ , а не  $L(t)$ .

Используя основное соотношение  $\gamma$ -матриц (2.8), из двух условий (5.6) получаем

$$P = \gamma^0 = P^{-1} = P^\dagger. \quad (5.7)$$

Надо отметить, что эта матрица и другие преобразования всегда определяются с точностью до фазового множителя  $e^{i\varphi}$ .

В (4.6) мы ввели индекс  $k$ , смысл которого мы сможем понять, используя, например,  $\mathcal{P}$ -преобразование. Уравнение (5.5) демонстрирует, что билинейная комбинация спиноров  $\bar{\psi}\Gamma^S\psi$  не преобразуется при инверсии пространственных координат, т.е. является скаляром. В то же время инвариантная при лоренц-преобразованиях комбинация

$$\bar{\psi}\Gamma^P\psi \xrightarrow{\mathcal{P}} \bar{\psi}'\gamma^5\psi' = \bar{\psi}P^{-1}\gamma^5P\psi \stackrel{(3.10)}{\stackrel{(5.7)}}{=} -\bar{\psi}\gamma^5\psi \quad (5.8)$$

меняет знак при инверсии пространственных координат, т.е. является псевдоскаляром. Четырехмерный вектор  $\bar{\psi}\Gamma^V\psi$  содержит временную компоненту, которая инвариантна, и трехмерный вектор, который меняет знак при  $\mathcal{P}$ -преобразовании:

$$\bar{\psi}\Gamma^V\psi \xrightarrow{\mathcal{P}} \bar{\psi}'\gamma^\mu\psi' = \bar{\psi}P^{-1}\gamma^\mu P\psi \stackrel{(5.6)}{=} \begin{cases} \mu = 0 : & \bar{\psi}\gamma^0\psi \\ \mu = 1, 2, 3 : & -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \end{cases}. \quad (5.9)$$

Четырехмерный вектор

$$\bar{\psi}\Gamma^A\psi \xrightarrow{\mathcal{P}} i\bar{\psi}'\gamma^5\gamma^\mu\psi' = i\bar{\psi}P^{-1}\gamma^5\gamma^\mu P\psi \stackrel{(5.6)}{=} \begin{cases} \mu = 0 : & -i\bar{\psi}\gamma^5\gamma^0\psi \\ \mu = 1, 2, 3 : & i\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi \end{cases} \quad (5.10)$$

имеет противоположные свойства и называется псевдовектором или аксиальным вектором.

Перейдем к более сложному преобразованию — зарядовому сопряжению

$$C : \quad \begin{aligned} \psi'(x') &= C\bar{\psi}^T(x), & x' &= x; \\ \bar{\psi}'(x') &= \psi^T(x)D. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Мы будем снова использовать массовый член, чтобы определить матрицу  $D$ . Однако в этом случае нужно использовать антикоммутируемость полевых операторов

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x)\psi(x) &\xrightarrow{C} \bar{\psi}'(x')\psi'(x') \\ &= \psi^T(x)DC\bar{\psi}^T(x) = -\bar{\psi}(x)(DC)^T\psi(x) : \quad D = -C^{-1}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Преобразование  $C$ , в отличие от  $\mathcal{P}$ -преобразования, не влияет на координаты, поэтому будем использовать полный кинетический член

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}\hat{\partial}\psi &\xrightarrow{C} i\bar{\psi}'\hat{\partial}'\psi' = -i\psi^T C^{-1}\gamma^\mu C \partial_\mu \bar{\psi}^T \\ &= i\bar{\psi}\overset{\leftarrow}{\partial}_\mu (C^{-1}\gamma^\mu C)^T \psi \stackrel{(5.3a)}{=} C^{-1}\gamma^\mu C = -\gamma^{\mu T}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Матрица  $C$  связана со свойствами симметрии  $\gamma$ -матриц. Из четырех  $\gamma$ -матриц (2.11)  $\gamma^0$  и  $\gamma^2$  являются симметричными, а  $\gamma^1$  и  $\gamma^3$  — антисимметричными. Можно легко проверить, что произведение симметричных матриц удовлетворяет (5.13):

$$C = \gamma^0 \gamma^2 = C^{-1} = C^\dagger. \quad (5.14)$$

Последнее дискретное преобразование является обращением времени  $T$ . Оно является еще сложнее, потому что, кроме обращения времени, нужно поменять местами начальное и конечное состояния:

$$\mathcal{T} : \begin{aligned} \psi'^T(x') &= \bar{\psi}(x)T, \quad x' = (x'^0, \mathbf{x}') = (-x^0, \mathbf{x}), \quad |\text{in}\rangle \leftrightarrow \langle \text{out}|; \\ \bar{\psi}'^T(x') &= D\psi(x). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Поэтому все полевые операторы в лагранжиане нужно поменять местами, однако при этом не нужно менять знак перед ними:

$$\bar{\psi}(x)\psi(x) \xrightarrow{\mathcal{T}} \psi'^T(x')\bar{\psi}'^T(x') = \bar{\psi}(x)DT\psi(x) : \quad D = T^{-1}. \quad (5.16)$$

Инвариантность временной и пространственной частей с производной в кинетическом члене приводит к следующим уравнениям на матрицу  $T$ :

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}(x)\gamma^0\partial_0\psi(x) &\xrightarrow{\mathcal{T}} i\psi'^T(x')\overleftarrow{\partial}'_0\gamma^{0T}\bar{\psi}'^T(x') \\ &= -i\bar{\psi}(x)\overleftarrow{\partial}'_0T^{-1}\gamma^{0T}T\psi(x) \stackrel{(5.3a)}{=} T\gamma^{0T}T^{-1} = \gamma^{0T}, \end{aligned} \quad (5.17a)$$

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}(x)\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\partial}\psi(x) &\xrightarrow{\mathcal{T}} i\psi'^T(x')\overleftarrow{\boldsymbol{\partial}}' \cdot \boldsymbol{\gamma}^T \bar{\psi}'^T(x') \\ &= i\bar{\psi}(x)\overleftarrow{\boldsymbol{\partial}}' \cdot T^{-1}\boldsymbol{\gamma}^T T\psi(x) \stackrel{(5.3a)}{=} T\boldsymbol{\gamma}^T T^{-1} = -\boldsymbol{\gamma}^T. \end{aligned} \quad (5.17b)$$

Комбинируя свойства матриц  $P$  (5.6) и  $C$  (5.13), получаем

$$T = \gamma^5 \gamma^2 = T^{-1} = T^\dagger. \quad (5.18)$$

Существует интересная теорема Людерса (Gerhart Lüders, 1920–1995) и Паули о том, что любая локальная и лоренц-инвариантная теория поля является инвариантной при нетривиальном  $CPT$ -преобразовании

$$\begin{aligned} CPT : \quad x' &= (x'^0, \mathbf{x}') = (-x^0, -\mathbf{x}), \quad |\text{in}\rangle \leftrightarrow \langle \text{out}|; \\ \psi &\xrightarrow{C} C\bar{\psi}^T \xrightarrow{P} C(P^{-1})^T\bar{\psi}^T \xrightarrow{T} C(P^{-1})^T T^{-1}\psi = -\gamma^5\psi. \end{aligned} \quad (5.19)$$

## 6. S-МАТРИЦА И НАБЛЮДАЕМЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

$S$ -матрица описывает всевозможные переходы из начального в конечные состояния

$$S = I + iT : \quad T_{fi} = i \langle \text{out} | I - S | \text{in} \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( \sum_{f=1}^n p_f - \sum_{i=1}^k p_i \right) M_{fi}, \quad (6.1)$$

здесь  $T_{fi}$  является трансформационной матрицей, а  $M_{fi}$  — амплитудой процесса. Нетривиальная трансформационная матрица отвечает за взаимодействие между частицами и за интересующие нас переходы. Вероятность перехода из начального в конечные состояния определяется как квадрат абсолютного значения  $T_{fi}$

$$\bar{\omega}_{fi} = |T_{fi}|^2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( \sum_{f=1}^n p_f - \sum_{i=1}^k p_i \right) \left[ (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) \right] |M_{fi}|^2. \quad (6.2)$$

Чтобы понять значение выражения в квадратных скобках в (6.2), будем использовать представление  $\delta$ -функции Дирака

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p) = \int e^{ipx} d^4x \quad \rightarrow \quad (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) = \int d^4x = \Delta T \cdot V, \quad (6.3)$$

здесь  $\Delta T$  отвечает интервалу времени, а  $V$  — объему, для соответствующего перехода. Ясно, что во всем пространстве-времени вероятность (6.2) бесконечна. Поэтому мы должны найти такие наблюдаемые, которые не содержат  $\Delta T$  и  $V$  и принимают конечные значения.

Чтобы определить вероятность перехода в конечное состояние с  $n$  частицами, нужно умножить вероятность (6.2) на фазовое пространство:

$$d\bar{\Phi} = \prod_{f=1}^n \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} V. \quad (6.4)$$

Плотность спиноров (3.4) нормирована на  $2p^0$ , поэтому, чтобы получить нормированную вероятность, нужно разделить (6.2) на

$$N = \prod_{f=1}^n 2p_f^0 V \cdot \prod_{i=1}^k 2p_i^0 V. \quad (6.5)$$

Соответствующая нормированная вероятность перехода за единицу времени равна

$$d\omega_{fi} = \frac{\bar{\omega}_{fi} d\bar{\Phi}}{\Delta T N} = \frac{V |M_{fi}|^2}{\prod_{i=1}^k 2p_i^0 V} d\Phi, \quad (6.6)$$

где

$$d\Phi = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( \sum_{f=1}^n p_f - \sum_{i=1}^k p_i \right) \prod_{f=1}^n \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2p_f^0} \quad (6.7)$$

является фазовым объемом.

Если в начальном состоянии имеется только одна частица ( $k = 1$ ), то бесконечный объем  $V$  в (6.6) сокращается и вероятность (6.6) имеет смысл парциальной ширины распада в  $n$  частиц:

$$d\Gamma = \frac{|M|^2}{2p^0} d\Phi. \quad (6.8)$$

Рассеяние является процессом, при котором, например, на частицу  $a$  в покое налетает частица  $b$  со скоростью  $v_b$  ( $k = 2$ ). В таком случае сечение процесса определяется как

$$d\sigma = \frac{d\omega}{j} = \frac{|M|^2}{4I} d\Phi, \quad (6.9)$$

где  $j = v_b/V$  является плотностью потока налетающих частиц, а фактор  $I$  может быть записан в инвариантной форме:

$$I = m_a p_b^0 v_b = m_a |\mathbf{p}_b| = \sqrt{(p_a p_b)^2 - p_a^2 p_b^2}. \quad (6.10)$$

Таким образом, мы представили вероятности (6.8) и (6.9) как произведение квадрата модуля матричного элемента, характеризующего динамику процесса, на фазовый объем, соответствующий кинематике процесса.

В соответствии с квантовой теорией поля матрица  $S$  определяется как упорядоченное по времени произведение лагранжианов взаимодействия:

$$\begin{aligned} S &= T \left[ e^{i \int \mathcal{L}_{\text{int}}(x) d^4 x} \right] \\ &= 1 + i \int \mathcal{L}_{\text{int}}(x) d^4 x + \dots + \sum_{n>1} \frac{i^n}{n!} \int T [\mathcal{L}_{\text{int}}(x_1) \dots \mathcal{L}_{\text{int}}(x_n)] d^4 x_1 \dots d^4 x_n. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Это разложение можно визуализировать с помощью диаграмм Фейнмана (Richard Phillips Feynman, 1918–1988). Например, для квантовой электродинамики лагранжиан взаимодействия имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(x) = e \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \cdot A_\mu(x). \quad (6.12)$$

Если обозначить  $\bar{\psi}(x)$  направленной линией, выходящей из точки  $x$ , а  $\psi(x)$  — как входящую линию, фотон — волнистой линией, а точке  $x$  предписать значение  $ie\gamma^\mu$ , то первый член разложения (6.11) может быть представлен в виде следующей диаграммы Фейнмана (рис. 2).

Так как фотон является безмассовым, то по кинематическим соображениям данная диаграмма не может описать никакой реальный процесс.

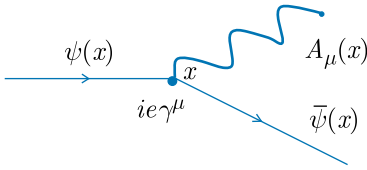


Рис. 2

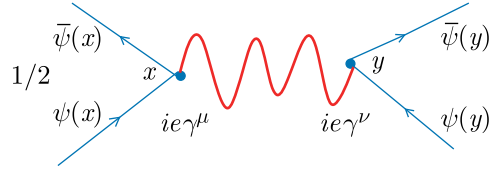


Рис. 3

Чтобы вычислить следующие члены разложения (6.11), нужно использовать теорему Вика (Gian Carlo Wick, 1909–1992), которая позволяет представить хронологически упорядоченное произведение лагранжианов взаимодействия. Для этого будем использовать причинные функции Грина (George Green, 1793–1841) для соответствующих полей:

$$\langle T(A_\mu(x)A_\nu(y)) \rangle_0 = \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 + i\varepsilon} d^4p, \quad (6.13a)$$

$$\langle T(\psi_b(x)\bar{\psi}^c(y)) \rangle_0 = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{(\hat{p} - m)_b^c}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip(x-y)} d^4p. \quad (6.13b)$$

Так, например, рис. 3 представляет собой диаграмму\* по константе электромагнитного взаимодействия  $e$  второго порядка (6.12), где две фотонные линии становятся внутренней линией (6.13a) виртуальной частицы. В зависимости от направления времени эта диаграмма может описывать кулоновское рассеяние электронов (снизу вверх) или позитронов (сверху вниз), а также электрон-позитронную аннигиляцию (слева направо). То есть одна и та же диаграмма из разложения  $S$ -матрицы (6.11) может описывать несколько процессов. Например, диаграмма на рис. 4, где внутренняя линия образована спинорной парой  $\psi_b(x)$  и  $\bar{\psi}^c(y)$  (6.13b), может описывать комптоновское рассеяние на электроне (если стрелка времени указывает слева направо) или на позитроне (справа налево), а также электрон-позитронную аннигиляцию в два фотона (сверху вниз) или двухфотонную аннигиляцию в электрон-позитронную пару (снизу вверх).

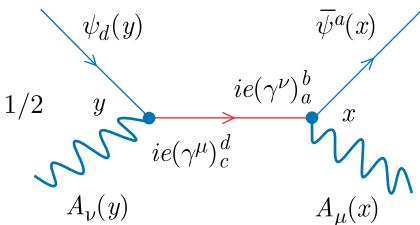


Рис. 4

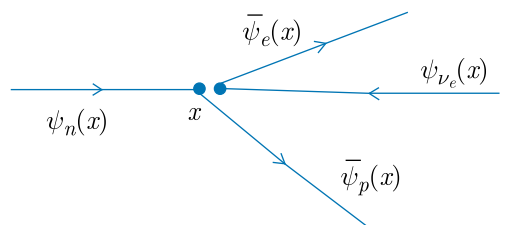


Рис. 5

\* Коэффициент 1/2 возникает из разложения (6.11).



## 7. ЭФФЕКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФЕРМИ И МАТРИЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

В этой главе мы представим эффективный лагранжиан слабого взаимодействия и кратко опишем, как получить матричный элемент лагранжиана взаимодействия. Чтобы описать бета-распад

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \quad (7.1)$$

Ферми использовал аналогию с процессом из квантовой электродинамики, показанным на рис. 3, без внутренней фотонной линии (рис. 5):

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\psi}_p(x)\gamma_\mu(g_V - g_A\gamma^5)\psi_n(x)] \cdot [\bar{\psi}_e(x)\gamma^\mu(1 - \gamma^5)\psi_{\nu_e}(x)] + \text{h. c.}, \quad (7.2)$$

где имеет место локальное взаимодействие адронного и электронного токов. Здесь необходимо подчеркнуть разницу между безразмерной электромагнитной константой  $e$  и эффективной константой Ферми  $G_F$ . Для расчета размерности константы  $G_F$  необходимо знать размерности лагранжиана и спинорного поля. В естественной системе единиц (1.1) действие безразмерно, и из (5.1) получаем размерности лагранжевой плотности и спинорных полей, выраженные в единицах массы:

$$[\mathcal{L}] = M^4, \quad [\psi] = M^{3/2}. \quad (7.3)$$

Из (7.3) и (7.2) сразу следует, что размерность эффективной константы Ферми равна

$$[G_F] = 1/M^2. \quad (7.4)$$

Комбинации  $\gamma$ -матриц между спинорными полями в (7.2) являются плодом многолетних экспериментов и теоретических предположений. Для элементарных частиц, таких как электрон и нейтрино, присутствует оператор проектирования  $\Pi_L$  (3.23), а для составных частиц, таких как протон и нейтрон, — формфакторы  $g_V$  и  $g_A$ , которые мы обсудим позже в этом курсе. Интересно отметить, что лагранжиан (7.2) не инвариантен относительно преобразования  $\mathcal{P}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) &\xrightarrow{\mathcal{P}} \mathcal{L}'(x') \\ &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\psi}_p(x)\gamma_\mu(g_V + g_A\gamma^5)\psi_n(x)] \cdot [\bar{\psi}_e(x)\gamma^\mu(1 + \gamma^5)\psi_{\nu_e}(x)] + \text{h. c.}, \end{aligned} \quad (7.5)$$

однако является  $CP$ -симметричным.

В квантовой теории поля спиноры  $\psi(x)$  и  $\bar{\psi}(x)$  являются операторами, поэтому помимо ортонормированных спиноров (3.22), отражающих их спинорную структуру, они содержат еще и операторы рождения  $a_{\chi}^{+}(p)$  ( $a_{\chi}^{*+}(p)$ ) и уничтожения  $a_{\chi}^{-}(p)$  ( $a_{\chi}^{*-}(p)$ ):

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\chi} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{2p^0}} [a_{\chi}^{+}(p)v^{\chi}(p)e^{ipx} + a_{\chi}^{-}(p)u^{\chi}(p)e^{-ipx}], \quad (7.6a)$$

$$\bar{\psi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\chi} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{2p^0}} [a_{\chi}^{*-}(p)\bar{v}^{\chi}(p)e^{-ipx} + a_{\chi}^{*+}(p)\bar{u}^{\chi}(p)e^{ipx}]. \quad (7.6b)$$

Чтобы перейти от  $S$ -матрицы к матричному элементу  $M_{fi}$ , который соответствует переходу (6.1)

$$\langle \text{out} | S | \text{in} \rangle \stackrel{|\text{in}\rangle \neq |\text{out}\rangle}{=} iT_{fi}, \quad (7.7)$$

нам нужно определить, как операторы рождения и уничтожения действуют на начальное и конечное состояния. Простейшим является состояние вакуума, которое обладает следующими свойствами:

$$a_{\chi}^{-}(p) |0\rangle = a_{\chi}^{*-}(p) |0\rangle = 0, \quad \langle 0 | a_{\chi}^{*+}(p) = \langle 0 | a_{\chi}^{+}(p) = 0. \quad (7.8)$$

Одночастичные начальные (конечные) состояния описываются как  $a_{\chi}^{*+}(p)|0\rangle$  ( $\langle 0|a_{\chi}^{-}(p)$ ) для частицы и  $a_{\chi}^{+}(p)|0\rangle$  ( $\langle 0|a_{\chi}^{*-}(p)$ ) — для античастицы. Используя в (7.7) правила антикоммутируемости операторов

$$\begin{aligned} \{a_{\chi}^{*-}(p), a_{\chi'}^{+}(p')\} &= \delta_{\chi\chi'}\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), & \{a_{\chi}^{-}(p), a_{\chi'}^{*+}(p')\} &= \delta_{\chi\chi'}\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \\ \{a_{\chi}^{*-}(p), a_{\chi'}^{-}(p')\} &= \{a_{\chi}^{*-}(p), a_{\chi'}^{*+}(p')\} \\ &= \{a_{\chi}^{*+}(p), a_{\chi'}^{+}(p')\} = 0, \\ \{a_{\chi}^{*+}(p), a_{\chi'}^{+}(p')\} &= \{a_{\chi}^{+}(p), a_{\chi'}^{+}(p')\} = \{a_{\chi}^{+}(p), a_{\chi'}^{-}(p')\} = \{a_{\chi}^{-}(p), a_{\chi'}^{-}(p')\} = 0 \end{aligned} \quad (7.9)$$

и свойства (7.8), приходим к правилам Фейнмана для матричных элементов (рис. 6).

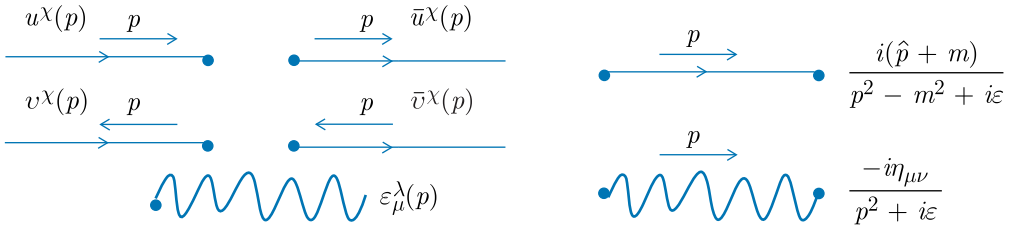


Рис. 6

Аналогично получаются правила Фейнмана для фотона, но вместо спиноров используется вектор поляризации  $\varepsilon_{\mu}^{\lambda}(p)$ .

## 8. РАСПАД МЮОНА

Для описания распадов мюонов, а также распадов тау-лептонов на лептоны с эффективным лагранжианом Ферми, помимо электронного тока, необходимо включить все лептонные токи

$$J_{\text{lept}}^\alpha(x) = \bar{\psi}_e(x)\gamma^\alpha(1 - \gamma^5)\psi_{\nu_e}(x) + \bar{\psi}_\mu(x)\gamma^\alpha(1 - \gamma^5)\psi_{\nu_\mu}(x) + \bar{\psi}_\tau(x)\gamma^\alpha(1 - \gamma^5)\psi_{\nu_\tau}(x), \quad (8.1)$$

поэтому, используя свойство их универсальности, лагранжиан будет иметь вид

$$\mathcal{L}_{\text{lept}}(x) = -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} J_{\alpha \text{lept}}^\dagger J_{\text{lept}}^\alpha(x). \quad (8.2)$$

Здесь вместо константы Ферми  $G_F$ , определяемой бета-распадом (7.2), вводится новая константа  $G_\mu$ , определяемая распадом мюона, описываемым лагранжианом

$$\mathcal{L}_\mu(x) = -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} \left[ \bar{\psi}_{\nu_\mu}(x)\gamma_\alpha(1 - \gamma^5)\psi_\mu(x) \right] \left[ \bar{\psi}_e(x)\gamma^\alpha(1 - \gamma^5)\psi_{\nu_e}(x) \right] + \text{h. c.} \quad (8.3)$$

В соответствии с правилами, описанными в гл. 6, первый член этого лагранжиана можно представить следующей диаграммой Фейнмана (рис. 7):

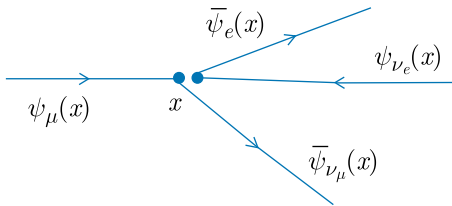


Рис. 7

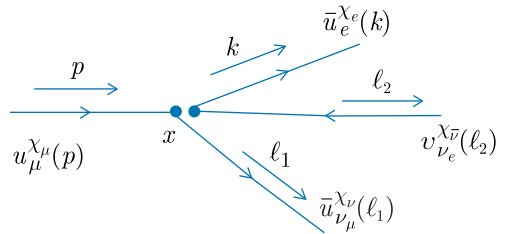


Рис. 8

которая может описывать и другие процессы. Если нас интересует распад мюона, то стрела времени должна указывать слева направо. Используя правила Фейнмана на рис. 6, для матричного элемента получаем соответствующую диаграмму распада мюона  $\mu^- \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e$  (рис. 8). С его помощью мы очень легко можем записать аналитическое выражение для матричного элемента

$$M = -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} \left\{ \bar{u}_{\nu_\mu}^{\chi_\nu}(\ell_1)^a [\gamma_\alpha(1 - \gamma^5)]_a^b u_\mu^{\chi_\mu}(p)_b \right\} \left\{ \bar{u}_e^{\chi_e}(k)^c [\gamma^\alpha(1 - \gamma^5)]_c^d v_{\nu_e}^{\chi_{\bar{\nu}}}(l_2)_d \right\}. \quad (8.4)$$

Здесь явно выписаны спинорные индексы  $a, b, c, d$  и соответствующие киральности  $\chi_\nu, \chi_\mu, \chi_e, \chi_{\bar{\nu}}$  для мюонного нейтрино, мюона, электрона и электронного антинейтрино.

Чтобы вычислить квадрат абсолютного значения матричного элемента, нам нужно найти выражение для его зарядового сопряженного

$$M^\dagger = -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} \left\{ \bar{u}_\mu^{\chi_\mu}(p)^e [\gamma_\beta(1 - \gamma^5)]_e^f u_{\nu_\mu}^{\chi_\nu}(\ell_1)_f \right\} \left\{ \bar{\nu}_e^{\chi_{\bar{\nu}}}(l_2)^g [\gamma^\beta(1 - \gamma^5)]_g^h u_e^{\chi_e}(k)_h \right\}. \quad (8.5)$$

В нашем курсе мы не будем рассматривать процессы с поляризованными частицами, поэтому при вычислении  $|M|^2$  можно просто просуммировать по киральностям, используя формулы (3.28):

$$\begin{aligned} \sum_{\chi_\mu} u_\mu^{\chi_\mu}(p)_b \bar{u}_\mu^{\chi_\mu}(p)^e &= (\hat{p} + m_\mu)_b^e, & \sum_{\chi_e} u_e^{\chi_e}(k)_h \bar{u}_e^{\chi_e}(k)^c &= (\hat{k} + m_e)_h^c, \\ \sum_{\chi_\nu} u_{\nu_\mu}^{\chi_\nu}(\ell_1)_f \bar{u}_{\nu_\mu}^{\chi_\nu}(\ell_1)^a &= (\hat{\ell}_1 + m_{\nu_\mu})_f^a, & \sum_{\chi_{\bar{\nu}}} \nu_e^{\chi_{\bar{\nu}}}(l_2)_d \bar{\nu}_e^{\chi_{\bar{\nu}}}(l_2)^g &= (\hat{l}_2 - m_{\nu_e})_d^g. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Тогда, полагая, что нейтрино — безмассовые частицы ( $m_{\nu_\mu} = m_{\nu_e} = 0$ ), получаем

$$\begin{aligned} \sum_x |M|^2 &= \frac{G_\mu^2}{2} [\gamma_\alpha(1 - \gamma^5)]_a^b (\hat{p} + m_\mu)_b^e [\gamma_\beta(1 - \gamma^5)]_e^f (\hat{\ell}_1)_f^a \\ &\quad \times [\gamma^\alpha(1 - \gamma^5)]_c^d (\hat{l}_2)_d^g [\gamma^\beta(1 - \gamma^5)]_g^h (\hat{k} + m_e)_h^c \\ &\equiv \frac{G_\mu^2}{2} \text{Tr} \left[ \gamma_\alpha(1 - \gamma^5) (\hat{p} + m_\mu) \gamma_\beta(1 - \gamma^5) \hat{\ell}_1 \right] \\ &\quad \times \text{Tr} \left[ \hat{l}_2 \gamma^\beta(1 - \gamma^5) (\hat{k} + m_e) \gamma^\alpha(1 - \gamma^5) \right]. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Теперь все сводится к вычислению следов  $\gamma$ -матриц по формулам (4.10). Однако, прежде чем приступить к расчету следов, можно немного упростить выражения в них, воспользовавшись свойствами операторов проектирования (3.23):

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha \Pi_L (\hat{p} + m_\mu) \gamma_\beta \Pi_L \hat{\ell}_1 &= \gamma_\alpha \Pi_L \hat{p} \gamma_\beta \Pi_L \hat{\ell}_1 = \gamma_\alpha \hat{p} \gamma_\beta \hat{\ell}_1 \Pi_R, \\ \hat{\ell}_2 \gamma^\beta \Pi_L (\hat{k} + m_e) \gamma^\alpha \Pi_L &= \hat{\ell}_2 \gamma^\beta \Pi_L \hat{k} \gamma^\alpha \Pi_L = \hat{\ell}_2 \gamma^\beta \hat{k} \gamma^\alpha \Pi_L. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_x |M|^2 &= 2G_\mu^2 \text{Tr} [\gamma_\alpha \hat{p} \gamma_\beta \hat{\ell}_1 (1 + \gamma^5)] \text{Tr} [\hat{\ell}_2 \gamma^\beta \hat{k} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5)] \\ &= 32G_\mu^2 [L_{\alpha\beta}(\ell_1, p) - i\varepsilon_{\alpha p \beta \ell_1}] [L^{\alpha\beta}(\ell_2, k) + i\varepsilon^{\alpha \ell_2 \beta k}] \\ &\stackrel{(4.5)}{=} 128G_\mu^2 (\ell_1 k) (\ell_2 p), \end{aligned} \quad (8.9)$$

где  $L^{\alpha\beta}(a, b)$  определяет симметричную часть следа

$$L^{\alpha\beta}(a, b) = a^\alpha b^\beta + a^\beta b^\alpha - \eta^{\alpha\beta}(ab), \quad (8.10a)$$

а индекс антисимметричного тензора, по которому происходит суммирование с индексом импульса, для краткости можно заменить просто импульсом:

$$\varepsilon_{\dots\alpha\dots} p^\alpha \equiv \varepsilon_{\dots p\dots}. \quad (8.10b)$$

Вычисления во второй строке (8.9) очень длинные, поскольку содержат 11 ненулевых членов из 16 произведений. Здесь мы покажем, как можно получить всего один след, используя тождество Фирца (4.12). Поменяем местами верхние индексы  $f$  и  $h$   $\gamma$ -матриц в (8.5):

$$M^\dagger = \frac{G_\mu}{\sqrt{2}} \left\{ \bar{u}_\mu^{\chi\mu}(p)^e [\gamma_\beta(1 - \gamma^5)]_e^h u_e^{\chi e}(k)_h \right\} \left\{ \bar{v}_{\nu e}^{\chi\nu}(\ell_2)^g [\gamma^\beta(1 - \gamma^5)]_g^f u_{\nu\mu}^{\chi\nu}(\ell_1)_f \right\}. \quad (8.11)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_x |M|^2 &= -\frac{G_\mu^2}{2} [\gamma_\alpha(1 - \gamma^5)]_a^b (\hat{p} + m_\mu)_b^e [\gamma_\beta(1 - \gamma^5)]_e^h (\hat{k} + m_e)_h^c \\ &\quad \times [\gamma^\alpha(1 - \gamma^5)]_c^d (\hat{\ell}_2)_d^g [\gamma^\beta(1 - \gamma^5)]_g^f (\hat{\ell}_1)_f^a \\ &\equiv -\frac{G_\mu^2}{2} \text{Tr} \left[ \gamma_\alpha(1 - \gamma^5) (\hat{p} + m_\mu) \gamma_\beta(1 - \gamma^5) (\hat{k} + m_e) \gamma^\alpha(1 - \gamma^5) \hat{\ell}_2 \gamma^\beta(1 - \gamma^5) \hat{\ell}_1 \right] \end{aligned} \quad (8.12)$$

и, используя свойства операторов проектирования (3.23) и формулы суммирования (4.13), получаем

$$\begin{aligned} \sum_x |M|^2 &= -4G_\mu^2 \text{Tr} \left[ \hat{\ell}_1 \gamma_\alpha (\hat{p} \gamma_\beta \hat{k}) \gamma^\alpha \hat{\ell}_2 \gamma^\beta (1 - \gamma^5) \right] \\ &\stackrel{(4.13)}{=} 8G_\mu^2 \text{Tr} \left[ \hat{\ell}_1 \hat{k} \gamma_\beta (\hat{p} \hat{\ell}_2) \gamma^\beta (1 - \gamma^5) \right] \\ &\stackrel{(4.13)}{=} 32G_\mu^2 (\ell_2 p) \text{Tr} \left[ \hat{\ell}_1 \hat{k} (1 - \gamma^5) \right] = 128G_\mu^2 (\ell_2 p) (\ell_1 k). \end{aligned} \quad (8.13)$$

Для расчета вероятности распада неполяризованного мюона по формуле (6.8) необходимо учитывать также его спин, поскольку при вычислении квадрата модуля матричного элемента мы суммировали по всем кирально-стям. Это правильный учет для частиц в конечном состоянии, когда они остаются необнаруженными или детекторы нечувствительны к их спиновым состояниям и регистрируют частицы независимо от спина. В начальном состоянии неполяризованная частица имеет вероятность  $1/(2J_i + 1)$  быть найденной в одном из  $2J_i + 1$  состояний. Поэтому в формуле (6.8) вместо  $|M|^2$  нужно взять среднее значение  $\sum_x |M|^2$  по спиновым состояниям исходной

частицы:

$$\overline{\sum_x |M|^2} = \frac{1}{2J_i + 1} \sum_x |M|^2. \quad (8.14)$$

Таким образом, в системе покоя мюона

$$p = (m_\mu, \mathbf{0}), \quad k = (E, \mathbf{k}), \quad \ell_1 = (\ell_1^0, \boldsymbol{\ell}_1), \quad \ell_2 = (\ell_2^0, \boldsymbol{\ell}_2), \quad (8.15)$$

получаем

$$d\Gamma = \frac{1}{2} \frac{\sum |M|^2}{2m_\mu} d\Phi_3, \quad (8.16)$$

$$d\Phi_3 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - k - \ell_1 - \ell_2) \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E} \frac{d^3\boldsymbol{\ell}_1}{(2\pi)^3 2\ell_1^0} \frac{d^3\boldsymbol{\ell}_2}{(2\pi)^3 2\ell_2^0},$$

где множитель  $1/2$  учитывает усреднение по спину мюона. Далее нам понадобятся следующие кинематические соотношения:

$$p - k = q = \ell_1 + \ell_2: \quad \begin{aligned} q^2 &= 2(\ell_1 \ell_2) = 2(q\ell_1) = 2(q\ell_2) = m_\mu^2 - 2m_\mu E + m_e^2 \geq 0, \\ (pk) &= m_\mu E, \quad (qp) = m_\mu(m_\mu - E), \quad (qk) = m_\mu E - m_e^2. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Следующим шагом будет расчет фазового объема в (8.16) для трех частиц в конечном состоянии, который умножается на кинематический фактор матричного элемента (8.9). Нейтрино — это частицы, которые обычно остаются недетектируемыми, и нам надо интегрировать по их импульсам. Итак, сначала вычислим интеграл

$$I^{\alpha\beta}(q) = \int \ell_1^\alpha \ell_2^\beta \delta^{(4)}(p - k - q) \frac{d^3\boldsymbol{\ell}_1}{\ell_1^0} \frac{d^3\boldsymbol{\ell}_2}{\ell_2^0}. \quad (8.18)$$

Этот интеграл имеет размерность  $M^2$  в единицах массы и зависит только от переданного нейтрино импульса  $q$ . Поэтому, исходя из соображений лоренц-ковариантности, его можно представить в виде

$$I^{\alpha\beta}(q) = Aq^2 \eta^{\alpha\beta} + Bq^\alpha q^\beta. \quad (8.19)$$

Чтобы найти коэффициенты  $A$  и  $B$ , умножим (8.18) и (8.19) с  $\eta_{\alpha\beta}$  и  $q_\alpha q_\beta$ :

$$\begin{cases} \eta_{\alpha\beta} I^{\alpha\beta}(q) = \int (\ell_1 \ell_2) \delta^{(4)}(p - k - q) \frac{d^3\boldsymbol{\ell}_1}{\ell_1^0} \frac{d^3\boldsymbol{\ell}_2}{\ell_2^0} \stackrel{(8.17)}{=} \frac{q^2}{2} I_0 = (4A + B)q^2, \\ q_\alpha q_\beta I^{\alpha\beta}(q) = \int (q\ell_1)(q\ell_2) \delta^{(4)}(p - k - q) \frac{d^3\boldsymbol{\ell}_1}{\ell_1^0} \frac{d^3\boldsymbol{\ell}_2}{\ell_2^0} \stackrel{(8.17)}{=} \left(\frac{q^2}{2}\right)^2 I_0 = (A + B)(q^2)^2, \end{cases} \quad (8.20)$$

где  $I_0$  является безразмерной константой:

$$I_0 = \int \delta^{(4)}(p - k - q) \frac{d^3\boldsymbol{\ell}_1}{\ell_1^0} \frac{d^3\boldsymbol{\ell}_2}{\ell_2^0}. \quad (8.21)$$

Из системы (8.20) получаем, что  $B = 2A = I_0/6$ . Интеграл (8.21) является инвариантом, поэтому мы можем вычислить его в удобной для нас системе покоя нейтрино

$$q = (q^0, \mathbf{0}),$$

$$\frac{d^3 \ell_1}{\ell_1^0} = 4\pi \ell_1^0 d\ell_1^0 : \quad I_0 = 4\pi \int \ell_1^0 d\ell_1^0 \delta(q^0 - \ell_1^0 - \ell_2^0) \delta^{(3)}(\ell_1 + \ell_2) \frac{d^3 \ell_2}{\ell_2^0} \quad (8.22)$$

$$\stackrel{\ell_2^0 = \ell_1^0}{=} 4\pi \int d\ell_1^0 \delta(q^0 - 2\ell_1^0) = 2\pi.$$

Используя полученные результаты, можно записать дифференциальную вероятность распада мюона (8.16) в зависимости от энергии электрона (рис. 9):

$$d\Gamma = \frac{4G_\mu^2}{(2\pi)^5 m_\mu} \frac{\pi}{6} \left[ q^2(pk) + 2(qp)(qk) \right] \frac{d^3 \mathbf{k}}{E} \stackrel{d^3 \mathbf{k} = |\mathbf{k}|^2 d|\mathbf{k}| \int d\Omega_3 = 4\pi |\mathbf{k}| E dE}{=} \\ = \frac{G_\mu^2}{12\pi^3} \left[ m_\mu E(3m_\mu - 4E) + m_e^2(3E - 2m_\mu) \right] \sqrt{E^2 - m_e^2} dE. \quad (8.23)$$

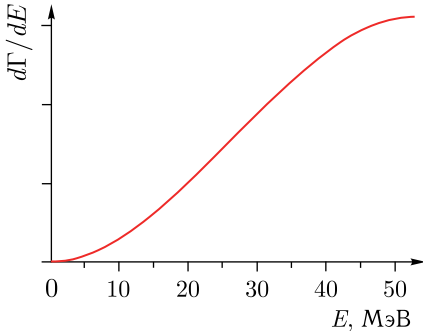


Рис. 9

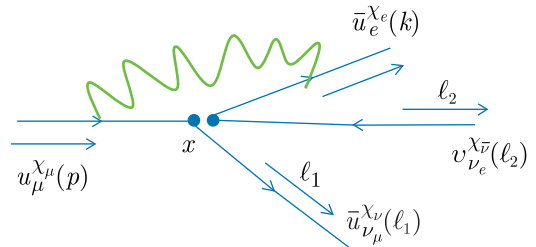


Рис. 10

Из рис. 9 видно, что максимальная вероятность распада достигается при максимальной энергии электронов

$$E_{\max} \stackrel{(8.17)}{=} \frac{m_\mu^2 + m_e^2}{m_\mu} \simeq \frac{m_\mu}{2}. \quad (8.24)$$

Таким образом, для расчета полной вероятности распада мы можем использовать с хорошей точностью приближение  $E \gg m_e$ . Тогда дифференциальную вероятность (8.23) можно записать в виде

$$d\Gamma = \frac{G_\mu^2 m_\mu^5}{96\pi^3} (3 - 2x)x^2 dx, \quad (8.25)$$

где  $x$  является безразмерным параметром относительной энергии электрона:

$$0 \leq x = E/E_{\max} \simeq 2E/m_\mu \leq 1. \quad (8.26)$$

Полная ширина распада получается интегрированием (8.25) в пределах (8.26):

$$\Gamma = \int_0^1 \frac{d\Gamma}{dx} dx = \frac{G_\mu^2 m_\mu^5}{192\pi^3}. \quad (8.27)$$

Мы можем сравнить ее с экспериментально измеренным значением времени жизни мюона  $\tau_{\text{exp}} \approx 2,197 \cdot 10^{-6}$  с:

$$\tau_{\text{exp}} = \frac{\hbar}{\Gamma} \approx \frac{6,582 \cdot 10^{-22} \text{ МэВ} \cdot \text{с}}{G_\mu^2 (105,66 \text{ МэВ})^5} \cdot 192\pi^3, \quad (8.28)$$

откуда получаем приближенное значение константы  $G_\mu \approx 1,164 \cdot 10^{-5} \text{ ГэВ}^{-2}$ . Чтобы получить ее более точное значение, мы должны учесть малый параметр в (8.27)  $\rho = m_e^2/m_\mu^2 \approx 2,34 \cdot 10^{-5}$  и радиационную поправку на рис. 10:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{G_\mu^2 m_\mu^5}{192\pi^3} f(\rho) \left[ 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \left( \frac{25}{4} - \pi^2 \right) + \mathcal{O}(\alpha^2, \rho) \right] \rightarrow G_\mu = \\ &= 1,1663787(6) \cdot 10^{-5} \text{ ГэВ}^{-2}, \end{aligned} \quad (8.29)$$

где  $\alpha = e^2/4\pi$  является постоянной тонкой структуры, а

$$f(\rho) = 1 - 8\rho + 8\rho^3 - \rho^4 - 12\rho^2 \ln \rho. \quad (8.30)$$



## 9. РАСПАД ЗАРЯЖЕННОГО ПИОНА

Этот распад более сложен, чем чисто лептонный, поскольку в нем участвуют кварки, или, другими словами, сильновзаимодействующие частицы. Нейтрон и протон состоят из тройки легких кварков:  $dud$  и  $duu$  соответственно, т. е. лагранжиан бета-распада (7.2) может быть переписан как лагранжиан, включающий кварки для процесса  $d \rightarrow u + \ell + \bar{\nu}_\ell$  и др.:

$$\mathcal{L}_w(x) = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{u}(x)\gamma_\alpha(1 - \gamma^5)d(x)] \cdot J_{\text{lept}}^\alpha(x) - \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{d}(x)\gamma_\alpha(1 - \gamma^5)u(x)] \cdot J_{\text{lept}}^{\alpha\dagger}(x), \quad (9.1)$$

где  $J_{\text{lept}}^\alpha = \sum_{\ell=e,\mu,\tau} \bar{\ell}\gamma^\alpha(1 - \gamma^5)\nu_\ell$  является универсальным лептонным током (8.1). В этой главе нас будут интересовать распады заряженных пионов  $\pi^+$  или  $\pi^-$ , которые состоят из кварк-антикварковых пар:  $u\bar{d}$  или  $d\bar{u}$ , а бета-распад мы оставим для следующей главы. Распад положительно заряженного пиона  $\pi^+ \rightarrow \ell^+ + \nu_\ell$ , где  $\ell = e$  или  $\mu$ , описывается диаграммой, представленной на рис. 11.

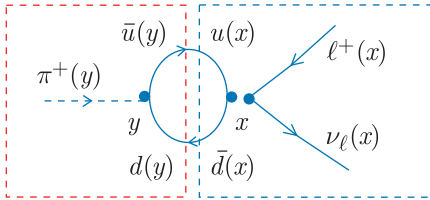


Рис. 11

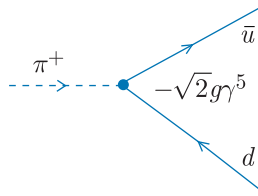


Рис. 12а

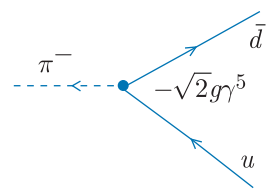


Рис. 12б

Он состоит из двух процессов: первый — сильновзаимодействующий процесс превращения пиона в пару кварк-антикварк, а второй — их аннигиляция с испусканием лептонной пары, описываемая лагранжианом слабого взаимодействия (9.1). Поскольку кварки не могут находиться в свободном состоянии, они образуют петлю виртуальных частиц. Чтобы вычислить эту диаграмму, нам нужно предложить для первого процесса некоторый феноменологический лагранжиан\*. Самый простой лагранжиан для двух типов

---

\* Сильное взаимодействие описывается квантовой хромодинамикой, но ее пертурбативная версия неприменима при низких энергиях.

кварковых ароматов относится к типу Юкавы (Hideki Yukawa, 1907–1981):

$$\mathcal{L}_s(y) = ig \bar{\psi}(y) \gamma^5 \boldsymbol{\tau} \psi(y) \cdot \boldsymbol{\pi}(y), \quad (9.2)$$

где  $\psi$  описывает изотопический дублет, а  $\boldsymbol{\pi}$  — триплет пионных полей:

$$\bar{\psi} = (\bar{u} \bar{d}), \quad \psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\pi} = (\pi^1, \pi^2, \pi^3). \quad (9.3)$$

Он инвариантен относительно преобразований группы ароматов  $SU(2)_f$ . Матрицы  $\boldsymbol{\tau}$  идентичны матрицам Паули (2.12), однако обозначаются другой буквой, потому что действуют не в спинорном, а в изотопическом пространстве. Чтобы лагранжиан (9.2) был эрмитовым и скаляром, используется матрица  $i\gamma^5$ , поскольку пионы являются псевдоскалярными частицами. Заряженные пионы определяются как

$$\pi^\pm = \frac{\pi^1 \mp i\pi^2}{\sqrt{2}}, \quad (9.4)$$

а нейтральный  $\pi^0$  идентифицируется с  $\pi^3$ . Тогда лагранжиан (9.2) приобретает вид

$$\mathcal{L}_s = i\sqrt{2} g \bar{u} \gamma^5 d \cdot \pi^+ + ig (\bar{u} \gamma^5 u - \bar{d} \gamma^5 d) \cdot \pi^0 + i\sqrt{2} g \bar{d} \gamma^5 u \cdot \pi^-. \quad (9.5)$$

Диаграммы Фейнмана для первого и последнего членов показаны на рис. 12а и 12б соответственно.

Петля, которую нам нужно рассчитать, представлена на рис. 13.

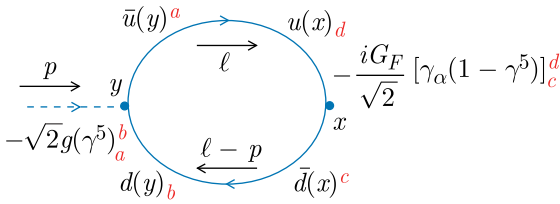


Рис. 13

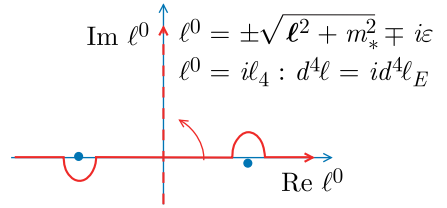


Рис. 14

Она образована хронологическим спариванием антикоммутирующих фермионных операторов

$$\langle T(\bar{u}(y)^a d(y)_b \bar{d}(x)^c u(x)_d) \rangle_0 = (-1) \langle T(u(x)_d \bar{u}(y)^a) \rangle_0 \langle T(d(y)_b \bar{d}(x)^c) \rangle_0, \quad (9.6)$$

что приводит к дополнительному знаку минус и интегрированию по внутреннему импульсу  $\ell$ . Суммирование по цветовым индексам кварков приводит к появлению коэффициента для числа цветов  $N_C = 3$ . Таким образом, лагранжиан, полученный из диаграммы на рис. 11, имеет вид

$$\Delta \mathcal{L} = (-i)(-1)(-\sqrt{2} g) \left( -\frac{iG_F}{\sqrt{2}} \right) \times \text{Tr}_{\text{color}} \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr} \left\{ i(\widehat{\ell} + m_u) \gamma^5 i[(\widehat{\ell} - \widehat{p}) + m_d] \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) \right\}}{[\ell^2 - m_u^2 + i\epsilon][(\ell - p)^2 - m_d^2 + i\epsilon]} \cdot J_{\text{left}}^{\alpha\dagger}$$

$$m_u \approx m_d = m \quad 4imgG_F N_C p_\alpha \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{(-i)}{[\ell^2 - m^2 + i\varepsilon][(\ell - p)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \times \bar{v}_\ell \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \ell. \quad (9.7)$$

Для вычисления интеграла в (9.7) сначала объединим два знаменателя в один, используя параметризацию Фейнмана:

$$\frac{1}{[\ell^2 - m^2 + i\varepsilon][(\ell - p)^2 - m^2 + i\varepsilon]} = \int_0^1 \frac{dx}{\{(1-x)[\ell^2 - m^2 + i\varepsilon] + x[(\ell - p)^2 - m^2 + i\varepsilon]\}^2} \underset{\substack{\ell' = \ell - xp \\ m_*^2 = m^2 - x(1-x)m_\pi^2}}{=} \int_0^1 \frac{dx}{[\ell'^2 - m_*^2 + i\varepsilon]^2}. \quad (9.8)$$

В этом случае получаем

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{(-i) dx}{[\ell^2 - m_*^2 + i\varepsilon]^2} \stackrel{\text{Рис. 14}}{=} \int_0^1 \int \frac{d^4 \ell_E}{(2\pi)^4} \frac{dx}{[\ell_E^2 + m_*^2]^2} \\ &= \int_0^1 \int \frac{\ell_E^2 d\ell_E^2 d\Omega_4}{2(2\pi)^4} \frac{dx}{[\ell_E^2 + m_*^2]^2} \stackrel{\ell_E^2 = z}{=} \lim_{\Lambda^2 \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{16\pi^2} \int_0^{\Lambda^2} \frac{z dz}{[z + m_*^2]^2} \\ &= \lim_{\Lambda^2 \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{16\pi^2} \left( \ln \frac{\Lambda^2 + m_*^2}{m_*^2} - 1 \right) \\ &\stackrel{\Lambda^2 \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{16\pi^2} \left( \ln \frac{\Lambda^2 + m^2}{m^2} - 2 \frac{\sqrt{4m^2 - m_\pi^2}}{m_\pi} \cdot \arctg \frac{m_\pi}{\sqrt{4m^2 - m_\pi^2}} + 1 \right). \quad (9.9) \end{aligned}$$

Здесь мы использовали вращение Вика в комплексной плоскости  $\ell^0$  (рис. 14), переход к полярным координатам в евклидовом четырехмерном пространстве\* и регуляризацию с обрезанием  $\Lambda^2$ . Ясно, что интеграл (9.9) логарифмически расходится, что является обычным явлением в квантовой теории поля, и мы не можем вычислить его значение, а должны извлечь его из эксперимента. Определим константу распада пиона как

$$F_\pi = 4\sqrt{2} mg N_C I, \quad (9.10)$$

\* Интегрируя по углам в  $d$ -мерном пространстве, получаем  $\Omega_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ .

с помощью которой можно выразить эффективный лагранжиан (9.7) в импульсном и конфигурационном представлениях

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} F_\pi i p_\alpha \cdot \bar{v}_\ell \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \ell \xrightarrow{e^{-ipx}} -\frac{G_F}{\sqrt{2}} F_\pi \partial_\alpha \pi^+ \cdot \bar{v}_\ell \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \ell. \quad (9.11)$$

Теперь у нас есть все необходимое для записи матричного элемента

$$\begin{aligned} M &= \frac{iG_F}{\sqrt{2}} F_\pi p_\alpha \cdot \bar{u}_\nu(q) \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) v_\ell(k) = \frac{iG_F}{\sqrt{2}} F_\pi \bar{u}_\nu(q) (\hat{q} + \hat{k}) (1 - \gamma^5) v_\ell(k) \\ &\quad \begin{array}{l} \bar{u}_\nu(q) \hat{q}=0 \\ \hat{k} v_\ell(k) = -m_\ell v_\ell(k) \end{array} - \frac{iG_F}{\sqrt{2}} F_\pi m_\ell \bar{u}_\nu(q) (1 + \gamma^5) v_\ell(k) \rightarrow M^\dagger \\ &= \frac{iG_F}{\sqrt{2}} F_\pi m_\ell \bar{v}_\ell(k) (1 - \gamma^5) u_\nu(q) \end{aligned} \quad (9.12)$$

и вычисления вероятности распада. Суммируя по киральностям лептонов, получаем

$$\begin{aligned} \sum_x |M|^2 &= \frac{G_F^2 F_\pi^2 m_\ell^2}{2} \text{Tr}[\hat{q}(1 + \gamma^5)(\hat{k} - m_\ell)(1 - \gamma^5)] \\ &= 4G_F^2 F_\pi^2 m_\ell^2 (qk) = 2G_F^2 F_\pi^2 m_\ell^2 (m_\pi^2 - m_\ell^2). \end{aligned} \quad (9.13)$$

В системе покоя пиона

$$p = (m_\pi, \mathbf{0}), \quad k = (E, \mathbf{k}), \quad q = (q^0, \mathbf{q}), \quad (9.14)$$

вероятность распада имеет вид

$$\Gamma = \frac{\sum |M|^2}{2m_\pi} \Phi_2, \quad \Phi_2 = (2\pi)^4 \int \delta^{(4)}(p - k - q) \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E} \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3 2q^0}. \quad (9.15)$$

Для двухчастичного распада фазовый объем является константой, которую можно рассчитать как

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \frac{1}{8\pi^2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{E} \delta^{(4)}(p - k - q) \theta(q^0) \delta(q^2) d^4q \stackrel{d^3\mathbf{k}=4\pi|\mathbf{k}|E dE}{=} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dE \sqrt{E^2 - m_\ell^2} \delta(m_\pi^2 + m_\ell^2 - 2m_\pi E) = \frac{m_\pi^2 - m_\ell^2}{8\pi m_\pi^2}. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Итак, мы получаем

$$\Gamma_{\pi \rightarrow \ell \nu} = \frac{G_F^2 F_\pi^2 m_\ell^2 m_\pi}{8\pi} \left(1 - \frac{m_\ell^2}{m_\pi^2}\right)^2. \quad (9.17)$$

Матричный элемент распада пиона (9.12) пропорционален массе лептона\* и был бы равен нулю, если бы лептон был безмассовым. Здесь играет роль закон сохранения момента импульса (рис. 15).

\* А вероятность распада (9.17) пропорциональна квадрату массы лептона.

Пион до распада

$$S = 0$$



Рис. 15а

Пион после распада

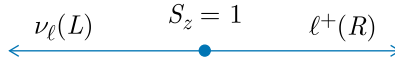


Рис. 15б

$\ell^+(R)$   $\ell^+(L)$



Рис. 16

В начальном состоянии спин системы равен нулю для бесспиновой частицы, такой как пион (рис. 15а). В конечном состоянии рождаются левое нейтрино и правый заряженный лептон, имеющие противоположные импульсы и суммарный единичный спин (рис. 15б). Единственный способ сохранить угловой момент — это обратить спиральность массивной частицы (рис. 16), поскольку массовый член смешивает левое и правое состояния:

$$\mathcal{L}_m = m \bar{\psi} \psi = m \bar{\psi} \Pi_L \psi + m \bar{\psi} \Pi_R \psi = m \bar{\psi}_R \psi_L + m \bar{\psi}_L \psi_R. \quad (9.18)$$

Этот факт сразу означает, что для пиона распад в мюонную частицу, как более массивную, чем электрон (позитрон), будет доминировать и

$$\frac{\Gamma_{\pi \rightarrow e\nu}}{\Gamma_{\pi \rightarrow \mu\nu}} = \frac{m_e^2(m_\pi^2 - m_e^2)^2}{m_\mu^2(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2} \approx 1,28 \cdot 10^{-4}, \quad (9.19)$$

где  $m_\pi \approx 139,57$  МэВ — масса заряженного пиона. Действительно, экспериментально было обнаружено, что относительные вероятности распадов имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} \text{Br}(\pi \rightarrow \mu\nu) &= \left. \frac{\Gamma_{\pi \rightarrow \mu\nu}}{\Gamma_{\text{tot}}} \right|_{\text{exp}} \approx 99,99 \%, \\ \text{Br}(\pi \rightarrow e\nu) &= \left. \frac{\Gamma_{\pi \rightarrow e\nu}}{\Gamma_{\text{tot}}} \right|_{\text{exp}} \approx 1,23 \cdot 10^{-4}, \end{aligned} \quad (9.20)$$

которые хорошо согласуются с оценкой (9.19). При условии, что  $G_F = G_\mu$  (8.29), мы можем определить константу распада пиона, сравнивая (9.17) с экспериментально измеренным временем жизни пиона  $\tau_{\text{exp}} \approx 2,6 \cdot 10^{-8}$  с:  $F_\pi \approx 128,3$  МэВ. Реальное значение

$$F_\pi = 130,5(1) \text{ МэВ}, \quad (9.21)$$

которое принято сейчас, получено с учетом радиационных поправок и того факта, что  $G_F$  не совсем точно равна  $G_\mu$ .

## 10. РАСПАД НЕЙТРОНА

В этой главе мы изучим еще более сложный процесс бета-распада, в котором как в начальном, так и в конечном состоянии присутствуют сильно-взаимодействующие частицы — кварки. В этом случае такой детальный расчет диаграмм Фейнмана, какой мы сделали для распада пиона, невозможен. Поэтому здесь мы предложим менее информативный, но более универсальный способ введения формфакторов, таких как  $F_\pi$ , с использованием метода скобок Дирака. Чтобы получить эффективный лагранжиан (9.11) из лагранжиана слабого взаимодействия (9.1), нам необходимо поставить кварковый ток между бра- и кет-состояниями сильно-взаимодействующих частиц:

$$\langle 0 | \bar{d} \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) u | \pi^+(p) \rangle = -i F_\pi p_\alpha. \quad (10.1)$$

Кварковый ток содержит векторную и аксиальную компоненты, которые при пространственной инверсии трансформируются по-разному: (5.9) и (5.10) соответственно. Поскольку пион является псевдоскалярной частицей (5.8), матричный элемент векторного кваркового тока фактически представляет собой аксиальный вектор, который не может быть построен только из импульса  $p$  и индекса Лоренца  $\alpha$  и поэтому равняется нулю. Однако матричный элемент аксиальной компоненты кваркового тока является вектором и может быть выражен через импульс  $p$ :

$$\langle 0 | \bar{d} \gamma_\alpha \gamma^5 u | \pi^+(p) \rangle = i F_\pi p_\alpha. \quad (10.2)$$

Еще одно преобразование, которое нам понадобится, имеет вид

$$G = CT_2 = C e^{i\pi\tau^2/2} = C \left( \cos \frac{\pi}{2} + i\tau^2 \sin \frac{\pi}{2} \right) = C \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.3)$$

Оно определяет новое квантовое число для заряженных сильно-взаимодействующих частиц —  $G$ -четность. Поскольку сильное взаимодействие инвариантно относительно преобразований зарядового сопряжения и вращения в изотопическом пространстве, в данном случае на угол  $\pi$  вокруг его второй оси,

$$T_2 [u] = T_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -d, \quad T_2 [d] = T_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u. \quad (10.4)$$

Зарядовое сопряжение переводит заряженный пион в состояние с противоположным электрическим зарядом и поэтому не является собственным опера-

тором. Однако  $G$ , совершая еще один поворот в изотопическом пространстве, и есть собственный оператор. Например, для пиона

$$\begin{aligned} G[\pi^+] &= CT_2[\bar{d}\gamma^5 u] = -C[\bar{u}\gamma^5 d] = -\pi^+, \\ G[\pi^0] &= CT_2\left[\frac{\bar{u}\gamma^5 u - \bar{d}\gamma^5 d}{\sqrt{2}}\right] = C\left[\frac{\bar{d}\gamma^5 d - \bar{u}\gamma^5 u}{\sqrt{2}}\right] = -\pi^0, \quad \rightarrow G[\pi] = (-1)\pi, \\ G[\pi^-] &= CT_2[\bar{u}\gamma^5 d] = -C[\bar{d}\gamma^5 u] = -\pi^-, \end{aligned} \quad (10.5)$$

$G$ -четность отрицательная. Прямым следствием этого является то, что в процессах сильных взаимодействий число пионов должно быть четным.

Используя эти факты, обратимся к распаду свободного нейтрона  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ . Чтобы получить эффективный лагранжиан, нужно поставить кварковый ток (9.1) между бра- и кет-состояниями протона с импульсом  $p$  и нейтроном с импульсом  $r$  соответственно:  $\langle p(p) | \bar{u}\gamma_\alpha (1 - \gamma^5) d | n(r) \rangle$ . Сначала проанализируем матричный элемент векторного кваркового тока, который должен зависеть от переданного лептонной паре импульса  $q = k + l = r - p$ , где  $k$  и  $l$  являются импульсами электрона и антинейтрино,

$$\langle p(p) | \bar{u}\gamma_\alpha d | n(r) \rangle = \bar{u}_p(p) \left[ f_1(q^2)\gamma_\alpha + f_2(q^2)\sigma_{\alpha\beta}q^\beta + f_3(q^2)q_\alpha \right] u_n(r). \quad (10.6)$$

Здесь  $f_1(q^2)$ ,  $f_2(q^2)$  и  $f_3(q^2)$  являются векторными формфакторами, возникающими из диаграммы на рис. 17, которую, к сожалению, мы не сможем вычислить. Однако эти формфакторы для распада нейтрона являются почти константами, поскольку квадрат изменения переданного импульса ограничен  $(0,511 \text{ МэВ})^2 \approx m_e^2 \leq (k + l)^2 = q^2 = (r - p)^2 \leq (m_n - m_p)^2 \approx (1,293 \text{ МэВ})^2$ .

Формфактор  $f_1(q^2)$  называется слабым зарядом, который аналогичен электромагнитному заряду. Действительно, электромагнитное взаимодействие с кварками можно описать нейтральной составляющей изотопического триплета и синглета:

$$eA^\alpha \left[ \left( +\frac{2}{3} \right) \bar{u}\gamma_\alpha u + \left( -\frac{1}{3} \right) \bar{d}\gamma_\alpha d \right] = eA^\alpha \left[ \frac{1}{2} \bar{\psi}\gamma_\alpha \tau^3 \psi + \frac{1}{6} \bar{\psi}\gamma_\alpha \psi \right], \quad (10.7)$$

где  $\psi$  — изотопический дублет (9.3), а кварковые токи

$$\begin{aligned} V_\alpha^+ &= \bar{\psi}\gamma_\alpha \tau^+ \psi = \bar{u}\gamma_\alpha d, & V_\alpha^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\psi}\gamma_\alpha \tau^3 \psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{u}\gamma_\alpha u - \bar{d}\gamma_\alpha d), \\ V_\alpha^- &= \bar{\psi}\gamma_\alpha \tau^- \psi = \bar{d}\gamma_\alpha u \end{aligned} \quad (10.8)$$

образуют изотопический триплет. Матрицы  $\tau^+$  и  $\tau^-$  играют роль повышающих и понижающих операторов в изотопическом пространстве

$$\tau^\pm = \frac{\tau^1 \pm i\tau^2}{2} : \quad \begin{aligned} \tau^+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \tau^- \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10.9)$$

Это означает, что кварковые токи (10.8) обладают теми же свойствами, что и электромагнитный ток, который сохраняется:

$$q^\alpha V_\alpha = 0. \quad (10.10)$$

Это свойство называется сохранением векторного тока (CVC). Последнее приводит к нетривиальному выводу об аддитивности электрического заряда, а именно: полный заряд системы равен сумме зарядов ее составных частей независимо от того, как они взаимодействуют друг с другом. Например, заряд протона получается как сумма зарядов составляющих его кварков. Это относится и к слабому заряду кварков и нуклонов. Электрический заряд определяется при нулевом переданном импульсе, поэтому

$$f_1(0) = 1. \quad (10.11)$$

Второй член в правой части (10.6) называется слабым магнетизмом и формфактор  $f_2(q^2)$  может быть оценен с помощью электромагнитных свойств нуклонов. Взаимодействие протона и нейтрона с электромагнитным полем можно описать нейтральной составляющей изотопического триплета и синглета:

$$\begin{aligned} eA^\alpha \bar{p} \left( \gamma_\alpha + \frac{1,79}{2m_N} \sigma_{\alpha\beta} q^\beta \right) p + eA^\alpha \bar{n} \left( -\frac{1,91}{2m_N} \sigma_{\alpha\beta} q^\beta \right) n \\ = \frac{1}{2} eA^\alpha \bar{\Psi} \left( \gamma_\alpha + \frac{3,7}{2m_N} \sigma_{\alpha\beta} q^\beta \right) \tau^3 \Psi + \frac{1}{2} eA^\alpha \bar{\Psi} \left( \gamma_\alpha - \frac{0,12}{2m_N} \sigma_{\alpha\beta} q^\beta \right) \Psi, \end{aligned} \quad (10.12)$$

где  $\Psi^T = (pn)$  является нуклонным изотопическим дублетом. Учитывая, что компонента  $V_\alpha^+$  принадлежит тому же изотопическому мультиплету, что и нейтральная компонента  $V_\alpha^0$  (10.8), для формфактора  $f_2(q^2)$  получаем

$$f_2(0) = \frac{3,7}{2m_N}. \quad (10.13)$$

Из (10.12) также видно, что

$$f_3 = 0. \quad (10.14)$$

Третий член в правой части (10.6) с формфактором  $f_3(q^2)$  называется эффективным скаляром, и мы можем указать еще две причины его отсутствия (10.14). Первая следует из сохранения векторного тока (10.10) в случае



точной изотопической симметрии

$$q^\alpha V_\alpha^+ = q^\alpha \bar{u}(p_u) \gamma_\alpha d(p_d) = \bar{u}(p_u) (\hat{p}_d - \hat{p}_u) d(p_d) = (m_d - m_u) \bar{u}(p_u) d(p_d) \stackrel{m_d \approx m_u}{\approx} 0, \\ q^\alpha \bar{u}_p(p) [f_1 \gamma_\alpha + f_2 \sigma_{\alpha\beta} q^\beta + f_3 q_\alpha] u_n(r) = [f_1 (m_n - m_p) + f_3 q^2] \bar{u}_p u_n \stackrel{m_n \approx m_p}{\approx} f_3 \approx 0. \quad (10.15)$$

Вторая причина связана с сохранением квантового числа  $G$  (10.3) в сильных взаимодействиях.  $G$ -четность векторного тока является положительной, а скалярного тока — отрицательной:

$$G[\bar{u} \gamma_\alpha d] = (+1) \bar{u} \gamma_\alpha d, \quad G[\bar{u}_p u_n] = (-1) \bar{u}_p u_n. \quad (10.16)$$

Следовательно, эффективный скаляр не может возникнуть в сильных взаимодействиях.

Обратимся теперь к более интересному случаю аксиального кваркового тока, не имеющему аналогов, таких как электромагнетизм:

$$\langle p(p) | \bar{u} \gamma_\alpha \gamma^5 d | n(r) \rangle = \bar{u}_p(p) [g_1(q^2) \gamma_\alpha \gamma^5 + g_2(q^2) \sigma_{\alpha\beta} \gamma^5 q^\beta + g_3(q^2) \gamma^5 q_\alpha] u_n(r). \quad (10.17)$$

Во-первых, можно сразу исключить второй член в правой части (10.17) с формфактором  $g_2$ , который называют слабым электризмом. Действительно,  $G$ -четность аксиального тока отрицательна, а тензорного тока положительна:

$$G[\bar{u} \gamma_\alpha \gamma^5 d] = (-1) \bar{u} \gamma_\alpha \gamma^5 d, \quad G[\bar{u}_p \sigma_{\alpha\beta} \gamma^5 u_n] = (+1) \bar{u}_p \sigma_{\alpha\beta} \gamma^5 u_n. \quad (10.18)$$

Интересно, что аксиальный ток сохраняется и для безмассовых кварков (киральное-симметричное приближение):

$$q^\alpha A_\alpha^+ = q^\alpha \bar{u}(p_u) \gamma_\alpha \gamma^5 d(p_d) = \bar{u}(p_u) (\hat{p}_d - \hat{p}_u) \gamma^5 d(p_d) \\ = -(m_d + m_u) \bar{u}(p_u) \gamma^5 d(p_d) \stackrel{m \rightarrow 0}{\approx} 0. \quad (10.19)$$

Это называется частичным сохранением аксиального тока (PCAC). Тогда из правой стороны (10.17)

$$0 \stackrel{(10.19)}{\approx} q^\alpha \bar{u}_p(p) [g_1(q^2) \gamma_\alpha + g_3(q^2) q_\alpha] \gamma^5 u_n(r) \\ \downarrow \\ = [-g_1(q^2)(m_n + m_p) + g_3(q^2) q^2] \bar{u}_p \gamma^5 u_n \quad (10.20) \\ g_3(q^2) \approx \frac{2m_N}{q^2} g_1(q^2)$$

получаем соотношение между формфактором  $g_3$  перед эффективным псевдоскаляром и аксиальным зарядом  $g_1$ . Если применить гипотезу PCAC к соотношению (10.2):

$$p^\alpha \langle 0 | \bar{d} \gamma_\alpha \gamma^5 u | \pi^+(p) \rangle = i F_\pi p^2 = i F_\pi m_\pi^2 \stackrel{(10.19)}{\approx} 0, \quad (10.21)$$

мы получаем, что пион становится безмассовым в случае безмассовых кварков.

Чтобы прояснить природу соотношения (10.20), рассмотрим лагранжиан Юкавы (9.2) для дублета нуклонов  $\Psi$  из (10.12):

$$\mathcal{L}_s = ig \bar{\Psi} \gamma^5 \boldsymbol{\tau} \Psi \cdot \boldsymbol{\pi} = i\sqrt{2} g \bar{p} \gamma^5 n \cdot \pi^+ + ig (\bar{p} \gamma^5 p - \bar{n} \gamma^5 n) \cdot \pi^0 + i\sqrt{2} g \bar{n} \gamma^5 p \cdot \pi^-, \quad (10.22)$$

взаимодействия аксиального нуклонного тока из (7.2):

$$\mathcal{L}_A \stackrel{g_A = -g_1}{=} \frac{G_F}{\sqrt{2}} g_A \bar{p} \gamma_\alpha \gamma^5 n \cdot \bar{e} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \nu_e + \text{h. c.} \quad (10.23)$$

и лагранжиана распада пиона (9.11). Первое слагаемое (10.23) показано на рис. 18.

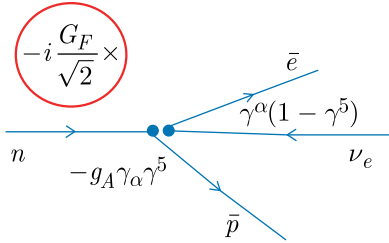


Рис. 18

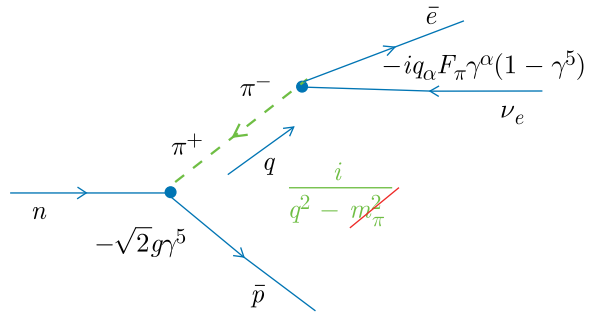


Рис. 19

На рис. 19 представлен дополнительный процесс распада нейтрона с испусканием лептонной пары посредством виртуального пиона. Он состоит из первого члена лагранжиана (10.22) и эрмитово-сопряженного лагранжиана (9.11) распада отрицательно заряженного пиона, что приводит эффективно к лагранжиану

$$\Delta \mathcal{L}_A = (-i) \left( -i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \right) \left( -\sqrt{2} g \right) \bar{p} \gamma^5 n \frac{i}{q^2} (-i q_\alpha F_\pi) \cdot \bar{e} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \nu_e. \quad (10.24)$$

Если объединить оба лагранжиана, мы получим детальную структуру адронного тока (10.17):

$$\mathcal{L}_A + \Delta \mathcal{L}_A = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{p} \left[ g_A \gamma_\alpha \gamma^5 + \frac{\sqrt{2} g F_\pi}{q^2} \gamma^5 q_\alpha \right] n \cdot \bar{e} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \nu_e + \text{h. c.} \quad (10.25)$$

Сравнивая (10.20) и (10.25), получаем новую связь — соотношение Гольдбергера (Marvin Leonard Goldberger, 1922–2014) и Треймана (Sam Bard Treiman, 1925–1999)

$$g_A \approx \frac{g F_\pi}{\sqrt{2} m_N} \approx 1,3, \quad (10.26)$$

которое связывает эффективную константу сильного взаимодействия Юкавы  $g$ , массу нуклона  $m_N$  и константы слабого взаимодействия: аксиального

заряда  $g_A$  и распада заряженного пиона  $F_\pi$ . Для оценки (10.26) мы использовали следующие экспериментальные значения:

$$\frac{g^2}{4\pi} \simeq 14 \rightarrow g \simeq 13,26, \quad F_\pi = 130,5 \text{ МэВ}, \quad (10.27)$$

$$m_N = \frac{m_n + m_p}{2} \approx 938,9 \text{ МэВ}.$$

Переданный импульс  $|\mathbf{q}|$  очень мал по сравнению с массами нуклонов, и протон можно рассматривать в нерелятивистском приближении. Таким образом, для покоящегося нейтрона и протона в энергетическом представлении (2.11) получаем

$$\bar{u}_p \stackrel{(2.15)}{=} \begin{pmatrix} \varphi_p^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad u_n \stackrel{(2.15)}{=} \begin{pmatrix} \varphi_n \\ 0 \end{pmatrix} : \quad \bar{u}_p \sigma_0 u_n = 0, \quad (10.28)$$

$$\frac{|\mathbf{q}|}{m_N} \ll \frac{1}{c}; \quad \bar{u}_p \gamma^5 u_n = 0.$$

Это означает, что слабый магнетизм и эффективный псевдоскаляр не вносят существенного вклада в распад нейтрона, и мы можем использовать лагранжиан Ферми (7.2) в качестве хорошего приближения. Следовательно, матричный элемент имеет вид

$$M \stackrel{f_1 \equiv g_V}{=} -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}_p(p) \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma^5) u_n(r) \cdot \bar{u}_e(k) \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) v_\nu(\ell). \quad (10.29)$$

С учетом нерелятивистского приближения для спиноров (10.28) его можно разбить на две части:

$$M = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} g_V \bar{u}_p(p) \gamma_0 u_n(r) \cdot \bar{u}_e(k) \gamma^0 (1 - \gamma^5) v_\nu(\ell) + \frac{G_F}{\sqrt{2}} g_A \sum_i \bar{u}_p(p) \gamma^i \gamma^5 u_n(r) \cdot \bar{u}_e(k) \gamma^i (1 - \gamma^5) v_\nu(\ell), \quad (10.30)$$

первая из которых описывает ферми-переходы, а вторая — переходы Гамова (George Gamow, 1904–1968) и Теллера (Edward Teller, 1908–2003). Используя формулы

$$m_n \approx m_p \approx m_N, \quad m_n - m_p = \Delta \approx 1,293 \text{ МэВ}; \quad (10.31)$$

$$r = (m_n, \mathbf{0}), \quad p \approx (m_p, \mathbf{p}), \quad k = (E, \mathbf{k}), \quad \ell = (\ell^0, \boldsymbol{\ell}),$$

получаем

$$\sum_x |M|^2 = \frac{G_F^2}{2} g_V^2 \text{Tr}[(\hat{p} + m_p) \gamma^0 (\hat{r} + m_n) \gamma^0] \text{Tr}[(\hat{k} + m_e) \gamma^0 (1 - \gamma^5) \hat{\ell} \gamma^0 (1 - \gamma^5)] + \frac{G_F^2}{2} g_A^2 \sum_{i,j} \text{Tr}[(\hat{p} + m_p) \gamma^i \gamma^5 (\hat{r} + m_n) \gamma^j \gamma^5] \text{Tr}[(\hat{k} + m_e) \gamma^i (1 - \gamma^5) \hat{\ell} \gamma^j (1 - \gamma^5)]$$

$$\begin{aligned} &\approx 32m_N^2 G_F^2 g_V^2 [2E\ell^0 - (k\ell)] + 32m_N^2 G_F^2 g_A^2 [2(\mathbf{k} \cdot \ell) + 3(k\ell)] \\ &\stackrel{\substack{\mathbf{k} = E\mathbf{v}_e \\ \ell = \ell^0 \mathbf{v}_\nu}}{=} 32m_N^2 G_F^2 E\ell^0 [(g_V^2 + 3g_A^2) + (g_V^2 - g_A^2)(\mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v}_\nu)]. \end{aligned} \quad (10.32)$$

Теперь мы можем вычислить дифференциальную вероятность распада свободного неполяризованного нейтрона, не учитывая корреляции между импульсами нейтрино и электрона:

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{1}{2} \frac{\sum |M|^2}{2m_n} \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(r - p - k - \ell) \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_p} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E} \frac{d^3\ell}{(2\pi)^3 2\ell^0} \\ &\approx \frac{G_F^2}{(2\pi)^5} [(g_V^2 + 3g_A^2) + (g_V^2 - g_A^2)(\mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v}_\nu)] \\ &\quad \times \delta(\Delta - E - \ell^0) \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{k} + \ell) d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{k} d^3\ell \\ &= \frac{G_F^2}{(2\pi)^5} [(g_V^2 + 3g_A^2) + (g_V^2 - g_A^2)(\mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v}_\nu)] d^3\mathbf{k} d^3\ell \delta(\Delta - E - \ell^0) \\ &\stackrel{d^3\mathbf{k} d^3\ell = (4\pi)^2 (\ell^0)^2 d\ell^0 |\mathbf{k}|_{|E dE}}{=} \frac{G_F^2}{2\pi^3} (g_V^2 + 3g_A^2) \sqrt{E^2 - m_e^2} (\Delta - E)^2 E dE. \end{aligned} \quad (10.33)$$

Эксперименты, в которых можно измерить корреляции между импульсами нейтрино и электрона, чувствительны к аксиальному заряду  $g_A$  и позволяют более точно определить его значение

$$g_A = 1,2756(13). \quad (10.34)$$

Эта величина хорошо согласуется с оценкой (10.26).

Для расчета полной ширины распада нам необходимо определить энергетический интервал электронного спектра из неравенств

$$\begin{aligned} m_p^2 \leq (p + \ell)^2 = (r - k)^2 \leq (m_n - m_e)^2 &\rightarrow \\ \rightarrow m_e \leq E \leq E_{\max} = \frac{m_n^2 - m_p^2 + m_e^2}{2m_n} \end{aligned} \quad (10.35)$$

и вычислить интеграл

$$\frac{30}{\Delta^5} \int_{m_e}^{E_{\max}} \sqrt{E^2 - m_e^2} (\Delta - E)^2 E dE \approx 0,4726. \quad (10.36)$$

Тогда полная ширина распада равна

$$\Gamma \approx \frac{G_F^2 \Delta^5}{60\pi^3} (g_V^2 + 3g_A^2) \cdot 0,47. \quad (10.37)$$

Если учесть радиационные поправки фактором  $(1 + 0,04)$  и кулоновское взаимодействие между протоном и электроном фазового объема (10.36) фактором  $(1 + 0,03)$ , то можно более точно сравнить рассчитанную вероятность распада с экспериментально измеренным временем жизни нейтрона  $\tau_{\text{exp}} \approx 879,4$  с:

$$\Gamma_{\text{cor}} \approx \frac{G_F^2 \Delta^5 (g_V^2 + 3g_A^2) (1 + 0,04) \cdot 0,47(1 + 0,03)}{60\pi^3} \approx \frac{6,582 \cdot 10^{-22} \text{ МэВ} \cdot \text{с}}{879,4 \text{ с}}. \quad (10.38)$$

Из этого соотношения получаем значение константы Ферми

$$G_F \approx 1,1368 \cdot 10^{-5} \text{ ГэВ}^{-2}, \quad (10.39)$$

которое оказывается на 2,6% меньше, чем  $G_\mu$  (8.29). Почему это так, мы узнаем в следующей главе.

## 11. ЛЕПТОННЫЕ РАСПАДЫ ЗАРЯЖЕННЫХ КАОНОВ

До сих пор мы рассматривали взаимодействия  $u$ - и  $d$ -кварков первого поколения. Однако в космических лучах, помимо пионов, были обнаружены новые сильновзаимодействующие частицы с относительно большим временем жизни порядка  $10^{-8}$  с — каоны. Они состоят из кварк-антикварковых пар и включают кварк второго поколения — странный кварк  $s$  —  $K^+ : u\bar{s}$ ,  $K^0 : d\bar{s}$ ,  $\bar{K}^0 : s\bar{d}$ ,  $K^- : s\bar{u}$ . Заряженные каоны напоминают заряженные пионы, за исключением того, что  $d$ -кварк в пионах заменен в каонах  $s$ -кварком. Отсюда и лептонный распад  $K^+ \rightarrow \ell^+ + \nu_\ell$ , где  $\ell = e$  или  $\mu$ , можно описать аналогично распаду заряженных пионов (гл. 9). Пусть лагранжиан нового взаимодействия имеет ту же структуру, что и для бета-распада (9.1), где  $d$ -кварк заменен на  $s$ -кварк, а константа Ферми  $G_F$  — на константу  $G_K$ :

$$\mathcal{L}'_w(x) = -\frac{G_K}{\sqrt{2}} [\bar{u}(x)\gamma_\alpha(1-\gamma^5)s(x)] \cdot J_{\text{lept}}^\alpha(x) - \frac{G_K}{\sqrt{2}} [\bar{s}(x)\gamma_\alpha(1-\gamma^5)u(x)] \cdot J_{\text{lept}}^{\alpha\dagger}(x). \quad (11.1)$$

Тогда парциальная ширина распада определяется по формуле, аналогичной (9.17):

$$\Gamma_{K \rightarrow \ell\nu} = \frac{G_K^2 F_K^2 m_\ell^2 m_K}{8\pi} \left(1 - \frac{m_\ell^2}{m_K^2}\right)^2. \quad (11.2)$$

Давайте сначала проверим, что теоретически предсказанное соотношение

$$\frac{\Gamma_{K \rightarrow e\nu}}{\Gamma_{K \rightarrow \mu\nu}} = \frac{m_e^2(m_K^2 - m_e^2)^2}{m_\mu^2(m_K^2 - m_\mu^2)^2} \approx 2,57 \cdot 10^{-5}, \quad (11.3)$$

которое зависит только от масс частиц\*, совпадает с экспериментально измеренным значением. Действительно, экспериментальные значения относительных вероятностей распада

$$\begin{aligned} \text{Br}(K \rightarrow e\nu) &= 1,582(7) \cdot 10^{-5} \\ \text{Br}(K \rightarrow \mu\nu) &= 63,56(11) \% \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \frac{\text{Br}(K \rightarrow e\nu)}{\text{Br}(K \rightarrow \mu\nu)} = 2,49(2) \cdot 10^{-5} \quad (11.4)$$

находятся в хорошем согласии с (11.3). Чтобы получить информацию о новой константе  $G_K$  из сравнения с полной шириной распада, которая определяется временем жизни заряженных каонов  $\tau_{\text{exp}} = 1,238(2) \cdot 10^{-8}$  с,

$$\Gamma_{\text{tot}} = \frac{\hbar}{\tau_{\text{exp}}} \approx \frac{6,582 \cdot 10^{-22} \text{ МэВ} \cdot \text{с}}{1,238 \cdot 10^{-8} \text{ с}} = \frac{1}{\text{Br}(K \rightarrow \ell\nu)} \frac{G_K^2 F_K^2 m_\ell^2 m_K}{8\pi} \left(1 - \frac{m_\ell^2}{m_K^2}\right)^2, \quad (11.5)$$

\* Масса заряженных каонов  $m_{K^\pm} = 493,677(16)$  МэВ.

нам еще нужно знать константу распада каона  $F_K$ . Расчеты (9.7) проводились в приближении  $m_u \approx m_d \approx m$ . Для более длительных расчетов с неравными массами кварков формула (9.10) должна была принять вид

$$F_\pi = 2\sqrt{2}(m_u + m_d)gN_C I, \quad (11.6)$$

где множитель  $I$  (9.9) слабо (логарифмически) зависит от масс кварков. Для нас в оценке  $F_K$  будет важна линейная зависимость от масс кварков, поэтому

$$F_K = 2\sqrt{2}(m + m_s)gN_C I. \quad (11.7)$$

Для определения составляющих масс кварков воспользуемся массами барионов, из которых они состоят. Например, из масс протона  $p(uud)$  и нейтрона  $n(udd)$   $m_p \approx 938,272$  МэВ и  $m_n \approx 939,565$  МэВ получаем

$$m_u = \frac{2m_p - m_n}{3} \approx 312,3 \text{ МэВ}, \quad (11.8)$$

$$m_d = \frac{2m_n - m_p}{3} \approx 313,6 \text{ МэВ} : m = \frac{m_u + m_d}{2} \approx 313,0 \text{ МэВ},$$

а используя массу гиперона  $\Lambda^0(uds)$   $m_\Lambda \approx 1115,7$  МэВ,

$$m_s = m_\Lambda - m_u - m_d \approx 489,8 \text{ МэВ}. \quad (11.9)$$

Тогда отношение констант распада

$$\frac{F_K}{F_\pi} \simeq \frac{m + m_s}{2m} \approx 1,28 \quad (11.10)$$

определяет соотношение констант взаимодействия

$$\frac{G_K}{G_F} = \frac{F_\pi}{F_K} \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_K^2 - m_\mu^2} \sqrt{\frac{\text{Br}(K \rightarrow \mu\nu)}{\text{Br}(\pi \rightarrow \mu\nu)}} \left(\frac{m_K}{m_\pi}\right)^3 \approx 0,2147. \quad (11.11)$$

Тот факт, что константа  $G_K$  примерно в 5 раз меньше  $G_F$ , требует объяснения. Такое объяснение дает следующий лагранжиан, описывающий слабое взаимодействие легких кварков, предложенный Кабиббо (Nicola Cabibbo, 1935–2010):

$$\mathcal{L}_w(x) = -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} [\bar{u}(x)\gamma_\alpha(1 - \gamma^5)d'(x)] \cdot [\hat{\ell}(x)\gamma^\alpha(1 - \gamma^5)\nu_\ell(x)] + \text{h. c.}, \quad (11.12)$$

где  $d'$  является смешанным состоянием  $d$ - и  $s$ -кварков, имеющих одинаковый заряд,

$$d' = \cos \theta_C d + \sin \theta_C s, \quad (11.13)$$

а  $\theta_C$  называется углом смешивания Кабиббо. Таким образом, для констант Ферми и  $G_K$  получаем

$$G_F = G_\mu \cos \theta_C, \quad G_K = G_\mu \sin \theta_C. \quad (11.14)$$

Тогда из (11.11) и (11.14) следует, что

$$\text{tg } \theta_C \approx 0,2147 \rightarrow \cos \theta_C \approx 0,98, \quad \sin \theta_C \approx 0,21. \quad (11.15)$$

То есть теперь мы можем объяснить, почему константы Ферми (10.39) и  $G_K$  меньше константы  $G_\mu$ .

## 12. СИСТЕМА НЕЙТРАЛЬНЫХ КАОНОВ

Для описания системы нейтральных каонов, включающей третий аромат  $s$ , нам необходимо расширить группу симметрии  $SU(2)_f$  лагранжиана (9.2) до группы  $SU(3)_f$ :

$$\mathcal{L}_s = ig \sum_{A=1}^8 \bar{\psi} \gamma^5 \lambda_A \psi \cdot \varphi_A, \quad (12.1)$$

где  $\varphi$  описывает октет бозонных полей, а  $\psi$  — триплет кварков:

$$\bar{\psi} = (\bar{u} \ \bar{d} \ \bar{s}), \quad \psi = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}. \quad (12.2)$$

Здесь  $\lambda$  являются матрицами Гелл-Манна

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (12.3)$$

Тогда система нейтральных каонов описывается лагранжианом

$$\mathcal{L}_s(K^0, \bar{K}^0) = ig \sum_{A=6}^7 \bar{\psi} \gamma^5 \lambda_A \psi \cdot \varphi_A = \sqrt{2} g [\bar{d} \gamma^5 s \cdot K^0 - \bar{s} \gamma^5 d \cdot \bar{K}^0], \quad (12.4)$$

где поля нейтральных каонов определяются как

$$K^0 = \frac{\varphi_7 + i\varphi_6}{\sqrt{2}}, \quad \bar{K}^0 = \frac{\varphi_7 - i\varphi_6}{\sqrt{2}}. \quad (12.5)$$

Лагранжиан сильных взаимодействий инвариантен как относительно пространственной инверсии, так и относительно зарядового сопряжения. Отсюда мы можем определить, как преобразуются поля нейтральных каонов по отношению к  $\mathcal{P}$ - и  $\mathcal{C}$ -преобразованиям:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}: \quad & \bar{d} \gamma^5 s \cdot K^0 - \bar{s} \gamma^5 d \cdot \bar{K}^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} \bar{d} P^{-1} \gamma^5 P s \cdot P[K^0] - \bar{s} P^{-1} \gamma^5 P d \cdot P[\bar{K}^0] \\ & = -\bar{d} \gamma^5 s \cdot P[K^0] + \bar{s} \gamma^5 d \cdot P[\bar{K}^0] \Rightarrow P[K^0] = -K^0, \quad P[\bar{K}^0] = -\bar{K}^0, \end{aligned} \quad (12.6)$$



$$\begin{aligned}
C: \bar{d}\gamma^5 s \cdot K^0 - \bar{s}\gamma^5 d \cdot \bar{K}^0 &\xrightarrow{C} -d^T C^{-1} \gamma^5 C \bar{s}^T \cdot C[K^0] + s^T C^{-1} \gamma^5 C \bar{d}^T \cdot C[\bar{K}^0] \\
&= \bar{s}\gamma^5 d \cdot C[K^0] - \bar{d}\gamma^5 s \cdot C[\bar{K}^0] \Rightarrow C[K^0] = -\bar{K}^0, \quad C[\bar{K}^0] = -K^0. \quad (12.7)
\end{aligned}$$

Поскольку преобразование  $CP$  не является собственным оператором для состояний  $K^0$  и  $\bar{K}^0$ , они не могут быть физическими состояниями для сильновзаимодействующих частиц. Следовательно, нам необходимо определить  $CP$ -четные состояния  $K_1$  и  $CP$ -нечетные состояния  $K_2$ :

$$\begin{aligned}
CP[K^0] = \bar{K}^0 &\Rightarrow K_1 = (K^0 + \bar{K}^0)/\sqrt{2} \\
CP[\bar{K}^0] = K^0 &\Rightarrow K_2 = (K^0 - \bar{K}^0)/\sqrt{2}, \quad (12.8)
\end{aligned}$$

которые будут играть роль физических состояний с определенными массами. Эти состояния имеют почти одинаковые массы

$$\begin{aligned}
m_{K_1} \cong m_{K_2} = m_{K^0} &= 497,611(13) \text{ МэВ}, \\
\Delta m_K = m_{K_2} - m_{K_1} &= 3,484(6) \cdot 10^{-12} \text{ МэВ}. \quad (12.9)
\end{aligned}$$

Лагранжиан Ферми является  $CP$ -инвариантным, поэтому состояние  $K_1$  распадается преимущественно на два пиона с положительной  $CP$ -четностью:

$$CP[\pi^0\pi^0] = (+1)\pi^0\pi^0, \quad CP[\pi^+\pi^-] = (+1)\pi^+\pi^-, \quad (12.10)$$

а  $CP$ -нечетное состояние  $K_2$  должно распадаться на три пиона с отрицательной  $CP$ -четностью:

$$CP[\pi^0\pi^0\pi^0] = (-1)\pi^0\pi^0\pi^0. \quad (12.11)$$

Однако из-за малой разницы между массой нейтрального каона и суммой масс трех пионов фазовое пространство распада  $K_2$  оказывается суженным, и это состояние живет гораздо дольше, чем  $K_1$ . Именно поэтому  $K_1$  назвали  $K_S^0$  (Short), а  $K_2$  —  $K_L^0$  (Long) мезонами\*.

Наша цель теперь состоит в том, чтобы объяснить очень небольшую разницу масс (12.9) на основе опыта, полученного с лагранжианом Ферми:

$$\begin{aligned}
\langle K_1 | \mathcal{L} | K_1 \rangle = -m_{K_1}^2 &\Rightarrow m_{K_2}^2 - m_{K_1}^2 \cong 2m_{K^0} \Delta m_K \\
\langle K_2 | \mathcal{L} | K_2 \rangle = -m_{K_2}^2 &= \langle \bar{K}^0 | \mathcal{L} | K^0 \rangle + \langle K^0 | \mathcal{L} | \bar{K}^0 \rangle = 2\text{Re} \langle \bar{K}^0 | \mathcal{L} | K^0 \rangle. \quad (12.12)
\end{aligned}$$

Соотношение (12.12) означает, что ненулевая разность масс является результатом переходов  $\bar{K}^0 \leftrightarrow K^0$  (рис. 20).

Для того чтобы такие переходы были возможны, лагранжиан взаимодействия должен изменять странность на две единицы. Запишем такое взаимодействие, используя новую константу  $G'_K$  по аналогии с лагранжианом Ферми:

$$\mathcal{L}_K^{\Delta S=2} = -G'_K \bar{d}^a \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) s_a \cdot \bar{d}^b \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) s_b + \text{h. c.} \quad (12.13)$$

\* На самом деле в гл. 13 будет показано, что состояние  $K_L^0$  лишь в основном состоит из  $K_2$ , так как имеет также небольшую примесь  $K_1$ .

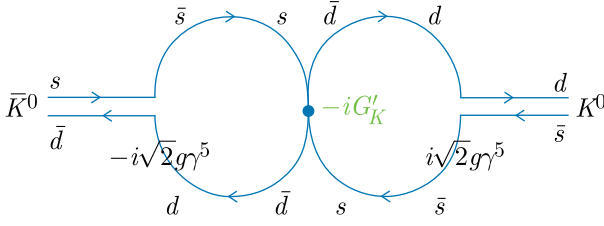


Рис. 20

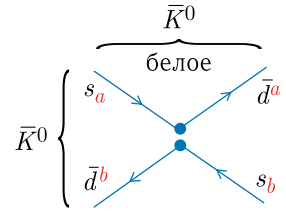


Рис. 21

В этом лагранжиане мы явно обозначили индексы цветов кварков  $a$  и  $b$ , по которым происходит суммирование от 1 до 3. Для оценки силы этого взаимодействия воспользуемся методом скобок Дирака для формфакторов, т. е. нам нужно взять лагранжиан (12.13) между состояниями  $\langle \bar{K}^0 |$  и  $| K^0 \rangle$ . Из рис. 21 видно, что возможны два варианта спаривания кварковых пар в каоны. Каоны являются бесцветными состояниями и состоят из кварк-антикварковых пар одного цвета, например,  $\bar{K}^0 : s_a \bar{d}^a$ . Таким образом, суммы верхних и нижних комбинаций представляют собой бесцветные состояния. Однако состояния слева и справа не бесцветны, и мы должны заменить  $s_a$  из одного кваркового тока в (12.13) на  $s_b$  в другом, используя тождества Фирца.

При этом, помимо тождества Фирца для спиноров (4.12), необходимо отметить, что кварки представляют собой цветные триплеты, на которые действуют генераторы  $T^A = \lambda_A/2$  группы цвета  $SU(3)_C$ , где  $\lambda_A$  являются матрицами Гелл-Манна (12.3). Генераторы  $T^A$  обладают свойствами

$$\text{Tr} [T^A] = 0, \quad \text{Tr} [T^A T^B] = \frac{1}{2} \delta^{AB} \quad (12.14)$$

и вместе с унитарной матрицей  $\mathbb{1}$  образуют полный базис в пространстве унитарных матриц  $3 \times 3$ . Тогда мы сможем записать тождество Фирца в виде

$$\delta_a^c \delta_b^d = C \delta_a^d \delta_b^c + D \sum_{A=1}^8 (T^A)_a^d (T^A)_b^c, \quad (12.15)$$

где константы  $C$  и  $D$  можно определить, если умножить (12.15) с  $\delta_a^a \delta_c^b$  и  $\delta_a^b \delta_c^a$ , суммируя по цветовым индексам

$$\begin{aligned} 3 &= C \cdot 3 \cdot 3 + D \sum_{A=1}^8 \text{Tr} [T^A] \text{Tr} [T^A] && \rightarrow C = \frac{1}{3}. \\ 3 \cdot 3 &= C \cdot 3 + D \sum_{A=1}^8 \text{Tr} [T^A T^A] && \rightarrow D = 2 \end{aligned} \quad (12.16)$$

Используя эти формулы, мы теперь можем переставить спиноры, учитывая их антикоммутируемость в (12.13) таким образом, чтобы пары на рис. 21 слева

и справа давали бесцветные комбинации

$$\begin{aligned} \bar{d}^a \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) \delta_{ac}^c s_c \cdot \bar{d}^b \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \delta_{bd}^d s_d \stackrel{(4.12)}{\stackrel{(12.15)}}{=} \frac{1}{3} \bar{d}^a \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) \delta_{ad}^d s_d \cdot \bar{d}^b \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \delta_{bc}^c s_c \\ + 2 \sum_{A=1}^8 \bar{d}^a \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) (T^A)^d_{ad} s_d \cdot \bar{d}^b \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) (T^A)^c_{bc} s_c. \end{aligned} \quad (12.17)$$

Суммируя по всевозможным спариваниям кварковых линий в приближении вакуумного насыщения\*, получаем

$$\langle \bar{K}^0 | \mathcal{L}_K^{\Delta S=2} | K^0 \rangle \simeq -\frac{8}{3} G'_K \langle \bar{K}^0 | \bar{d} \gamma_\alpha \gamma^5 s | 0 \rangle \langle 0 | \bar{d} \gamma_\alpha \gamma^5 s | K^0 \rangle = \frac{8}{3} G'_K F_K^2 m_{K^0}^2. \quad (12.18)$$

Тогда из (12.18) и (12.12) следует, что

$$G'_K = \frac{3 \Delta m_K}{8 F_K^2 m_{K^0}} \approx 10^{-13} \text{ ГэВ}^{-2} \quad \rightarrow \quad \frac{G'_K}{G_\mu} \approx 10^{-8}. \quad (12.19)$$

Это взаимодействие получило название сверхслабого взаимодействия. Естественно возникает вопрос, могло бы взаимодействие с кварковым током Кабиббо (11.12)

$$\mathcal{L}_w(x) = -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} [\bar{u}(x) \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) d'(x)] \cdot [\bar{d}'(x) \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) u(x)] \quad (12.20)$$

породить взаимодействие (12.13). На рис. 22 представлены все диаграммы лагранжиана (12.20).

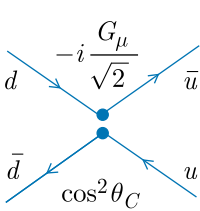


Рис. 22а

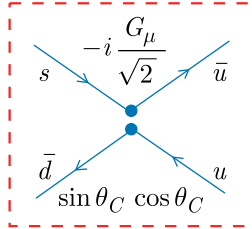


Рис. 22б

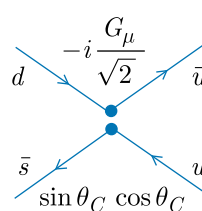


Рис. 22в

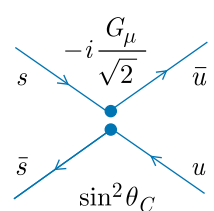


Рис. 22г

Если мы дважды возьмем диаграмму рис. 22б, соответствующую второму члену разложения (6.11), и сделаем виковское спаривание для полей  $u$ -кварков, то получим диаграмму на рис. 23, которая после расчета средней петли сводится к рис. 20.

Давайте оценим среднюю петлю на рис. 23 в приближении нулевых внешних импульсов. Ее аналитическое выражение, в соответствии с правилами

\* Приближение вакуумного насыщения заключается во вставке единицы  $\mathbb{1} = \sum_i |i\rangle \langle i| \simeq |0\rangle \langle 0|$  между кварковыми токами и учете только основного вклада вакуумного состояния.

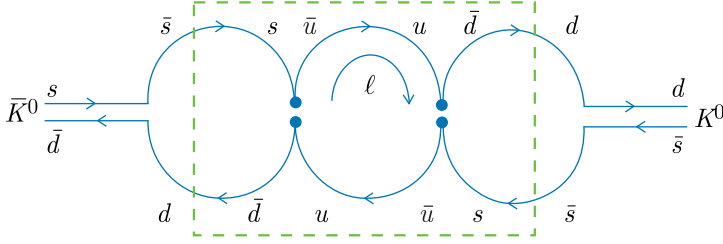


Рис. 23

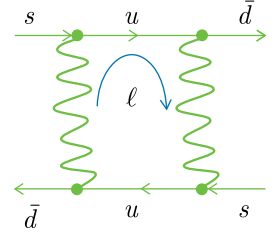


Рис. 24

Фейнмана, имеет вид

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_K^{\Delta S=2} &= (-i) \frac{1}{2} \left( -i \frac{G_\mu}{\sqrt{2}} \sin \theta_C \cos \theta_C \right)^2 \\
 &\times \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{\bar{d} \gamma_\beta (1 - \gamma^5) i (\hat{\ell} + m_u) \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) s \cdot \bar{d} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) i (\hat{\ell} + m_u) \gamma^\beta (1 - \gamma^5) s}{(\ell^2 - m_u^2 + i\varepsilon)^2} \\
 &= -G_\mu^2 \sin^2 \theta_C \cos^2 \theta_C \int \frac{i d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell_\mu \ell^\nu}{(\ell^2 - m_u^2 + i\varepsilon)^2} \bar{d} \gamma_\beta \gamma_\nu \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) s \\
 &\quad \times \bar{d} \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta (1 - \gamma^5) s. \quad (12.21)
 \end{aligned}$$

Интеграл в (12.21) квадратично расходится, поэтому его необходимо регуляризовать, как в (9.9). Кроме того, он зависит от индексов Лоренца и должен быть приведен к скалярному виду с помощью формулы  $\int \ell_\mu \ell^\nu f(\ell^2) d^4 \ell = (\delta_\mu^\nu / 4) \int \ell^2 f(\ell^2) d^4 \ell$ ,

$$\begin{aligned}
 I_\mu^\nu &= \int \frac{i d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell_\mu \ell^\nu}{(\ell^2 - m_u^2 + i\varepsilon)^2} = \frac{\delta_\mu^\nu}{4} \int \frac{i d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^2}{(\ell^2 - m_u^2 + i\varepsilon)^2} \\
 &\stackrel{\text{Рис. 14}}{=} \frac{\delta_\mu^\nu}{4} \int \frac{d^4 \ell_E}{(2\pi)^4} \frac{\ell_E^2}{(\ell_E^2 + m_u^2)^2} \stackrel{\ell_E^2 = z}{=} \frac{\delta_\mu^\nu}{64\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{z^2 dz}{(z + m_u^2)^2} \stackrel{\Lambda^2 \rightarrow \infty}{=} \frac{\Lambda^2}{64\pi^2} \delta_\mu^\nu. \quad (12.22)
 \end{aligned}$$

Комбинации  $\gamma$ -матриц в произведении токов в (12.21) можно упростить по формуле  $\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta = \eta^{\alpha\mu} \gamma^\beta - \eta^{\alpha\beta} \gamma^\mu + \eta^{\mu\beta} \gamma^\alpha + i\varepsilon^{\alpha\mu\nu\lambda} \gamma_\lambda \gamma^5$ :

$$\bar{d} \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) s \cdot \bar{d} \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta (1 - \gamma^5) s = 4 \bar{d} \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) s \cdot \bar{d} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) s. \quad (12.23)$$

Итак, учитывая (12.22), (12.23) и сравнивая (12.21) с (12.13), получаем

$$G'_K = \frac{G_\mu^2 \sin^2 \theta_C \cos^2 \theta_C}{16 \pi^2} \Lambda^2 \stackrel{(12.19)}{\rightarrow} \Lambda \approx 1,6 \text{ ГэВ}. \quad (12.24)$$

Столь маленькое значение параметра регуляризации вызывает подозрения, что здесь что-то не так. Действительно, физической причиной регуляризации является обмен калибровочными  $W$ -бозонами между кварковыми токами (рис. 24). Как мы узнаем позже, они из-за своей большой массы  $M_W \approx 80,4 \text{ ГэВ}$  и при малых переданных импульсах могут эффективно ими-

тировать одноточечное взаимодействие Ферми. Таким образом, константа Ферми выражается через калибровочную константу  $g$  и массу  $W$ -бозона\*:

$$\left(\frac{g}{2\sqrt{2}}\right)^2 \frac{1}{M_W^2} = \frac{G_\mu}{\sqrt{2}}. \quad (12.25)$$

Аналитическое выражение диаграммы на рис. 24 отличается от (12.21) из-за наличия пропагаторов  $W$ -бозона:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_K^{\Delta S=2} &= (-i) \frac{1}{2} \sin^2 \theta_C \cos^2 \theta_C \left(\frac{ig}{2\sqrt{2}}\right)^4 \\ &\times \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{\bar{d} \gamma_\beta (1 - \gamma^5) (\hat{\ell} + m_u) \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) s \cdot \bar{d} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) (\hat{\ell} + m_u) \gamma^\beta (1 - \gamma^5) s}{(\ell^2 - m_u^2 + i\varepsilon)^2 (\ell^2 - M_W^2 + i\varepsilon)^2} \\ &= -\sin^2 \theta_C \cos^2 \theta_C \frac{g^4}{32} \int \frac{i d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^2}{(\ell^2 - m_u^2 + i\varepsilon)^2 (\ell^2 - M_W^2 + i\varepsilon)^2} \bar{d} \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) s \\ &\quad \times \bar{d} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) s. \end{aligned} \quad (12.26)$$

Интеграл в (12.26) сходится и легко вычисляется в предположении  $M_W \gg \gg m_u \approx 0$ :

$$\int \frac{i d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{\ell^2 (\ell^2 - M_W^2 + i\varepsilon)^2} = \frac{1}{16\pi^2 M_W^2}. \quad (12.27)$$

Учитывая соотношение (12.25), получаем, что параметр регуляризации  $\Lambda$  в точности совпадает с массой  $W$ -бозона. Это означает, что взаимодействие (12.20) приводит к большему на три порядка вкладу в разность масс нейтральных каонов, чем экспериментальное значение (12.9).

Эта проблема решается с введением нового кварка второго поколения, названным механизмом Глэшоу–Илиопулоса–Майни (GIM). Их идея связана с комбинацией ортогонального смешивания Кабиббо (11.13)

$$s' = -\sin \theta_C d + \cos \theta_C s \quad (12.28)$$

и восстановлением симметрии между числом кварков с зарядом  $+(2/3)$  и  $-(1/3)$ . Согласно лагранжиану (11.12) слабое взаимодействие обеспечивает переходы  $u \leftrightarrow d'$ , поэтому должен существовать еще один кварк, назовем его  $s$ , с которым связана другая комбинация  $s'$  (12.28). Тогда лагранжиан взаимодействия с новым кварком можно построить согласно кварковому току

$$J^\alpha = \bar{u} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) d' + \bar{c} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) s' \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}_w(x) = -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} J_\alpha^\dagger J^\alpha. \quad (12.29)$$

\* Эта формула будет получена в гл. 17.

На рис. 25 показаны все взаимодействия из лагранжиана (12.29) с одним входящим  $s$ -кварком и одним выходящим  $d$ -кварком.

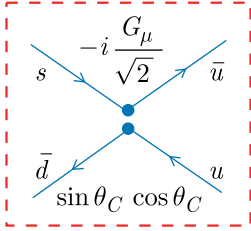


Рис. 25а

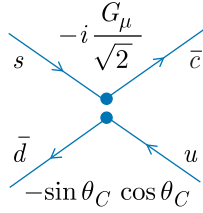


Рис. 25б

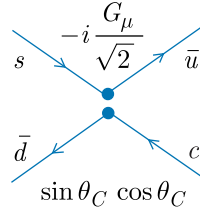


Рис. 25в

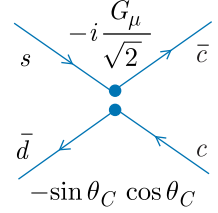


Рис. 25г

Диаграмма на рис. 25а одинакова с рис. 22б, для которой мы получили петлю на рис. 24. Имея 4 диаграммы на рис. 25, давайте получим интересные нас 4 диаграммы (рис. 26).

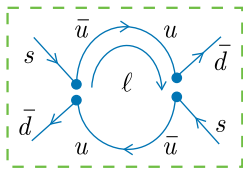


Рис. 26а

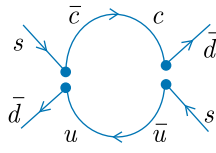


Рис. 26б

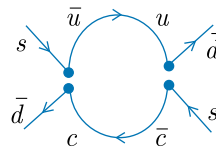


Рис. 26в

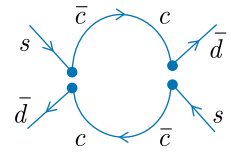


Рис. 26г

Из-за разных знаков в рис. 26а–г мы ожидаем некоторого сокращения между ними. Таким образом, сумму всех диаграмм на рис. 26 можно записать как

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_K^{\Delta S=2} &= (-i) \frac{G_\mu^2}{4} \sin^2 \theta_C \cos^2 \theta_C \\ &\times \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \bar{d} \gamma_\beta (1 - \gamma^5) \left[ \frac{\hat{\ell}}{\ell^2} - \frac{\hat{\ell} + m_c}{\ell^2 - m_c^2} \right] \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) s \\ &\times \bar{d} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \left[ \frac{\hat{\ell}}{\ell^2} - \frac{\hat{\ell} + m_c}{\ell^2 - m_c^2} \right] \gamma^\beta (1 - \gamma^5) s, \quad (12.30) \end{aligned}$$

где мы пренебрегли массой  $u$ -кварка и подразумеваем наличие слагаемого  $+i\epsilon$  в знаменателях. Преобразуем комбинации  $\gamma$ -матриц и фермионных пропагаторов в (12.30) к более компактному виду

$$\gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \left[ \frac{\hat{\ell}}{\ell^2} - \frac{\hat{\ell} + m_c}{\ell^2 - m_c^2} \right] \gamma^\beta (1 - \gamma^5) = -2m_c^2 \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta (1 - \gamma^5) \frac{\ell_\mu}{\ell^2 (\ell^2 - m_c^2)}. \quad (12.31)$$

То есть с учетом вклада  $c$ -кварка вместо (12.22) необходимо вычислить интеграл

$$I_\mu^\nu = \int \frac{i d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell_\mu \ell^\nu}{[\ell^2(\ell^2 - m_c^2 + i\varepsilon)]^2} = \frac{\delta_\mu^\nu}{4} \int \frac{i d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{\ell^2(\ell^2 - m_c^2 + i\varepsilon)^2}$$

$$\stackrel{\text{рис. 14}}{=} \frac{\delta_\mu^\nu}{4} \int \frac{d^4 \ell_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{\ell_E^2 (\ell_E^2 + m_u^2)^2} \stackrel{\ell_E^2 = z}{=} \frac{\delta_\mu^\nu}{64\pi^2} \int_0^\infty \frac{dz}{(z + m_c^2)^2} = \frac{1}{64\pi^2 m_c^2} \delta_\mu^\nu. \quad (12.32)$$

Используя (12.23), окончательно получаем

$$\mathcal{L}_K^{\Delta S=2} = -\frac{G_\mu^2 m_c^2}{16\pi^2} \sin^2 \theta_C \cos^2 \theta_C \bar{d} \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) s \cdot \bar{d} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) s + \text{h. c.}, \quad (12.33)$$

что из (12.24) сразу дает значение массы  $c$ -кварка, т. е. в предлагаемом механизме GIM роль параметра регуляризации выполняет именно масса  $c$ -кварка.

### 13. НАРУШЕНИЕ $CP$ -СИММЕТРИИ

В 1964 г. Кристенсен (James Henry Christenson, 1937–2020), Кронин (James Watson Cronin, 1931–2016), Фитч (Val Logsdon Fitch, 1923–2015) и Турлей (Réne Turlay, 1932–2002) зарегистрировали распад  $K_L^0 (K_2) \rightarrow \pi^+ \pi^-$  долгоживущего  $CP$ -нечетного нейтрального каона  $K_2$  в  $CP$ -четное состояние с двумя заряженными пионами с вероятностью

$$\text{Br}(K_L^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-) \approx 2 \cdot 10^{-3}. \quad (13.1)$$

Это было интерпретировано, как будто долгоживущий нейтральный каон имеет небольшую примесь  $CP$ -четного состояния  $K_1$  (рис. 27):

$$K_L^0 = \frac{K_2 + \varepsilon K_1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}. \quad (13.2)$$

Это называется косвенным нарушением  $CP$ -симметрии. Параметр смешивания  $\varepsilon$  пропорционален элементу матрицы перехода  $K_1 \leftrightarrow K_2$  (рис. 27):

$$\begin{aligned} \varepsilon \sim \langle K_1 | \mathcal{L}_K^{\Delta S=2} | K_2 \rangle &= \frac{1}{2} \left[ \langle \bar{K}^0 | \mathcal{L}_K^{\Delta S=2} | K^0 \rangle - \langle K^0 | \mathcal{L}_K^{\Delta S=2} | \bar{K}^0 \rangle \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \langle K^0 | \mathcal{L}_K^{\Delta S=2} | K^0 \rangle - \langle \bar{K}^0 | \mathcal{L}_K^{\Delta S=2} | \bar{K}^0 \rangle \right] = i \text{Im} \langle \bar{K}^0 | \mathcal{L}_K^{\Delta S=2} | K^0 \rangle, \end{aligned} \quad (13.3)$$

где второй член в квадратных скобках равен нулю из-за  $CPT$ -симметрии. Однако, имея всего два поколения кварков: ( $ud$ ) и ( $cs$ ) со смешиванием  $d \leftrightarrow s$ , получаем, что матричный элемент перехода  $\bar{K}^0 \leftrightarrow K^0$  (12.18) действителен, и это делает невозможным объяснение наблюдаемого нарушения  $CP$ -симметрии (13.1) при наличии только двух поколений кварков.

Рассмотрим общий случай с  $N$  поколениями кварков. Чтобы сохранить нормировку, матрица смешивания нижних кварков  $V$  должна быть унитарной матрицей ( $V^\dagger V = \mathbb{1}$ ) с размерностью  $N \times N$ , которая имеет  $N^2$  независимых параметров. Тогда полный кварковый ток (12.29) можно записать в виде

$$J^\alpha = \bar{U} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) D' = \sum_{k,l=1}^N \bar{u}_k \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) V_{kl} d_l. \quad (13.4)$$

Поскольку в квантовой теории спинорные поля определяются с точностью до постоянного фазового множителя, мы можем удалить нефизические параметры из матрицы смешивания. Преобразования  $\bar{u}_k \rightarrow \bar{u}_k e^{i\alpha_k}$  позволяют удалить

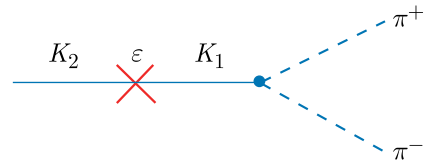


Рис. 27



$N$  нефизических фаз, например, в первом столбце  $V$ , а преобразования  $d_l \rightarrow e^{i\beta_l} d_l$  удаляют оставшиеся  $N - 1$  нефизических фаз, например, в первой строке комплексных элементов матрицы смешивания. Это оставляет  $(N - 1)^2$  физических параметров смешивания, из которых

$$N_\theta = \frac{N(N - 1)}{2} \quad (13.5)$$

являются действительными параметрами ортогональной матрицы или углами смешивания, а

$$N_\varphi = \frac{(N - 1)(N - 2)}{2} \quad (13.6)$$

являются фазами.

Для случая двух поколений кварков матрица  $V$  является действительной только с одним углом смешивания — углом Кабиббо. Добавление третьего поколения с топ и боттом кварками ( $tb$ ) приводит к трем углам смешивания и одной фазе, т.е. хотя бы один элемент в матрице смешивания является комплексным:

$$U = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}, \quad D' = V_{\text{CKM}} D = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix};$$

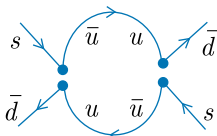
$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & s_{13} & 0 \\ -s_{13} & c_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (13.7)$$

$$= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{13}s_{23} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{13}c_{23} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица называется матрицей Кабиббо–Кобаяши–Маскавы (СКМ). Здесь использованы обозначения  $s_{kl} = \sin \theta_{kl}$  и  $c_{kl} = \cos \theta_{kl}$ , а  $\delta$  представляет фазу. Экспериментальные значения параметров составляют

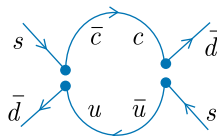
$$s_{12} \approx 0,2265, \quad s_{23} \approx 0,0405, \quad s_{13} \approx 0,0036, \quad \delta \approx 68,5^\circ. \quad (13.8)$$

Таким образом, если рассмотреть диаграммы с  $t$ -кварками (рис. 28в), то можно получить комплексное значение матричного элемента (13.3).



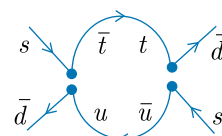
( $V_{ud}^* V_{us}$ )<sup>2</sup>

Рис. 28а



$V_{ud}^* V_{us} V_{cd}^* V_{cs}$

Рис. 28б



$V_{ud}^* V_{us} V_{td}^* V_{ts}$

Рис. 28в

...

Прямое нарушение  $CP$ -симметрии можно продемонстрировать на распадах  $b$ -кварков, которые описываются лагранжианом

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ub} = & -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} V_{ub} \bar{u} \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) b \cdot \bar{\ell} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \nu_\ell \\ & - \frac{G_\mu}{\sqrt{2}} V_{ub}^* \bar{b} \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) u \cdot \bar{\nu}_\ell \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \ell, \end{aligned} \quad (13.9)$$

который явно нарушает  $CP$ -симметрию:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ub} \xrightarrow{CP} & -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} V_{ub} \bar{b} \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) u \cdot \bar{\nu}_\ell \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \ell \\ & - \frac{G_\mu}{\sqrt{2}} V_{ub}^* \bar{u} \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) b \cdot \bar{\ell} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \nu_\ell. \end{aligned} \quad (13.10)$$

Экспериментальные значения углов смешивания (13.8) демонстрируют иерархическую структуру  $s_{13} \ll s_{23} \ll s_{12}$ , поэтому очень часто используется также параметризация Вольфенштейна (Lincoln Wolfenstein, 1923–2015), где  $s_{12} = \lambda$ ,  $s_{23} = A\lambda^2$ ,  $s_{13} e^{i\delta} = A\lambda^3 (\rho + i\eta)$  и

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2/2 & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \lambda^2/2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4). \quad (13.11)$$

## 14. ГЛУБОКОНЕУПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ НЕЙТРИНО

В этой главе мы начинаем рассматривать процессы рассеяния нейтрино как представителя слабозаимодействующих частиц. Для создания пучка нейтрино используются заряженные пионы, которые распадаются преимущественно на мюоны и мюонные нейтрино. Это означает, что пучок частиц, попадающих в мишень, будет состоять преимущественно из мюонных нейтрино. Рассмотрим сначала неупругое рассеяние мюонных нейтрино на нуклонах  $\nu_\mu + N \rightarrow \mu^- + X$  (рис. 29а).

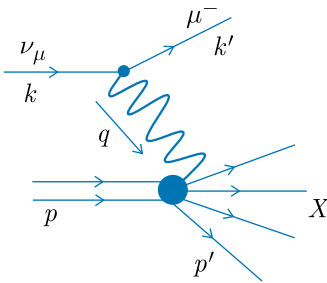


Рис. 29а

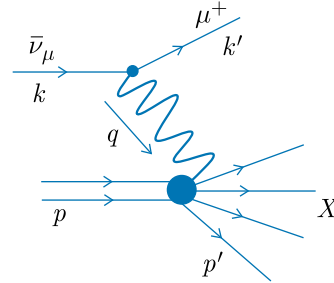


Рис. 29б

Здесь  $X$  обозначает все адронные состояния с полным импульсом  $p'$ , которые не регистрируются. Регистрируется только вылетающий мюон. Запишем лагранжиан взаимодействия, пока не уточняя тип адронного тока:

$$\mathcal{L}_w = -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} \bar{\mu} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \nu_\mu \cdot J_\alpha^h - \frac{G_\mu}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_\mu \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \mu \cdot J_\alpha^{h\dagger}. \quad (14.1)$$

Тогда матричный элемент процесса на рис. 29а имеет вид

$$M = -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} \bar{u}_\mu(k') \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) u_\nu(k) \cdot \langle p' | J_\alpha^h | p \rangle, \quad (14.2)$$

$$M^\dagger = -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} \bar{u}_\nu(k) \gamma^\beta (1 - \gamma^5) u_\mu(k') \cdot \langle p | J_\beta^{h\dagger} | p' \rangle.$$

Согласно формуле (6.9) сечение процесса выражается через произведение квадрата модуля матричного элемента и фазового объема:

$$d\sigma = \frac{|M|^2}{4\sqrt{(kp)^2 - k^2 p^2}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' - p - q) \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^3 2k'_0} \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3 2p'_0}. \quad (14.3)$$

Чтобы отделить лептонный ток от адронного, воспользуемся переданным импульсом  $q = k - k' = p' - p$ . Для расчета квадрата модуля матричного элемента просуммируем по киральностям всех частиц, усредняя по начальному нуклону\*:

$$\begin{aligned} \overline{\sum_x |M|^2} &= \frac{1}{2} \frac{G_\mu^2}{2} \text{Tr} \left[ \widehat{k} \gamma^\beta (1 - \gamma^5) (\widehat{k}' + m_\mu) \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \right] \sum \langle p | J_\beta^{h\dagger} | p' \rangle \langle p' | J_\alpha^h | p \rangle \\ &= 2G_\mu^2 \left[ L^{\alpha\beta}(k, k') + i\varepsilon^{\alpha\beta kk'} \right] \sum \langle p | J_\beta^{h\dagger} | p' \rangle \langle p' | J_\alpha^h | p \rangle. \end{aligned} \quad (14.4)$$

Здесь мы использовали обозначения (8.10) и предположение о том, что нейтрино безмассовое ( $k^2 = 0$ ). Тогда дифференциальное сечение (14.3) рассеяния нейтрино имеет вид

$$d\sigma_\nu = \frac{G_\mu^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{|kp|} \left[ L^{\alpha\beta}(k, k') + i\varepsilon^{\alpha\beta kk'} \right] W_{\alpha\beta}^+(p, q) \frac{d^3\mathbf{k}'}{k'_0}, \quad (14.5)$$

где мы ввели безразмерную структурную функцию (формфактор) нуклона

$$W_{\alpha\beta}^+(p, q) = \frac{1}{8} \sum \int \langle p | J_\beta^{h\dagger} | p' \rangle \langle p' | J_\alpha^h | p \rangle \delta^{(4)}(p' - p - q) \frac{d^3\mathbf{p}'}{p'_0}. \quad (14.6)$$

Аналогично матричный элемент рассеяния мюонного антинейтрино (рис. 29б) имеет вид

$$\begin{aligned} M &= -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} \bar{v}_\nu(k) \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) v_\mu(k') \cdot \langle p' | J_\alpha^{h\dagger} | p \rangle, \\ M^\dagger &= -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} \bar{v}_\mu(k') \gamma^\beta (1 - \gamma^5) v_\nu(k) \cdot \langle p | J_\beta^h | p' \rangle, \end{aligned} \quad (14.7)$$

а дифференциальное сечение

$$d\sigma_{\bar{\nu}} = \frac{G_\mu^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{|kp|} \left[ L^{\alpha\beta}(k, k') - i\varepsilon^{\alpha\beta kk'} \right] W_{\alpha\beta}^-(p, q) \frac{d^3\mathbf{k}'}{k'_0} \quad (14.8)$$

выражается через структурную функцию

$$W_{\alpha\beta}^-(p, q) = \frac{1}{8} \sum \int \langle p | J_\beta^h | p' \rangle \langle p' | J_\alpha^{h\dagger} | p \rangle \delta^{(4)}(p' - p - q) \frac{d^3\mathbf{p}'}{p'_0}. \quad (14.9)$$

Структурные функции  $W_{\alpha\beta}^\pm(p, q)$  зависят от индексов Лоренца, которые можно выразить с помощью шести независимых лоренц-ковариантных комбинаций:  $p_\alpha p_\beta$ ,  $p_\alpha q_\beta$ ,  $q_\alpha p_\beta$ ,  $q_\alpha q_\beta$ ,  $\eta_{\alpha\beta}$ ,  $\varepsilon_{\alpha\beta pq}$  и шести скалярных структурных функций  $W_i^\pm(p, q)$  соответственно:

$$W_{\alpha\beta}^\pm(p, q) = - \left( \eta_{\alpha\beta} - \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} \right) W_1^\pm(p, q)$$

\* Нейтрино имеет только одну киральность, и поэтому усреднения не требуется.

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{M^2} \left( p_\alpha - \frac{qp}{q^2} q_\alpha \right) \left( p_\beta - \frac{qp}{q^2} q_\beta \right) W_2^\pm(p, q) + i \frac{\varepsilon_{\alpha\beta pq}}{2M^2} W_3^\pm(p, q) \\
& + \frac{q_\alpha q_\beta}{M^2} W_4^\pm(p, q) + \frac{p_\alpha q_\beta + q_\alpha p_\beta}{M^2} W_5^\pm(p, q) + \frac{p_\alpha q_\beta - q_\alpha p_\beta}{M^2} W_6^\pm(p, q). \quad (14.10)
\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь кинематику процесса. Будем работать в лабораторной системе

$$p = (M, \mathbf{0}), \quad k = (E, \mathbf{k}), \quad k' = (E', \mathbf{k}'). \quad (14.11)$$

Удобно использовать следующие размерные и лоренц-инвариантные безразмерные переменные:

$$E = \frac{(kp)}{M}, \quad \nu = \frac{(qp)}{M} = E - E' \Rightarrow x = \frac{-q^2}{2(qp)} = \frac{-q^2}{2M\nu}, \quad y = \frac{(qp)}{(kp)} = \frac{\nu}{E}. \quad (14.12)$$

В глубоконеупругом рассеянии (DIS) размерные переменные в идеале должны быть бесконечными:  $E \rightarrow \infty$ ,  $\nu \rightarrow \infty$ ,  $Q^2 = -q^2 \rightarrow \infty$ , однако безразмерные переменные  $x$  и  $y$  имеют фиксированные значения. Переменные  $x$  и  $y$  полностью описывают кинематику в конечном состоянии, поэтому интересно знать пределы их изменения. Начнем с переменной  $x$ , выбрав удобную для этого систему покоя мюона:

$$\begin{aligned}
k' = (m_\mu, \mathbf{0}) : \quad & \begin{aligned} q_0 &= k_0 - m_\mu \\ \mathbf{q} = \mathbf{k} & \xrightarrow{k^2=k_0^2} |\mathbf{q}| = k_0 \end{aligned} \Rightarrow \\
& \begin{aligned} \text{(a)} \quad Q^2 &= -q^2 = \mathbf{q}^2 - q_0^2 = k_0^2 - (k_0 - m_\mu)^2 \geq 0; \\ \Rightarrow \text{(b)} \quad p'^2 &= (p + q)^2 \geq M^2 \rightarrow 2(qp) \geq -q^2; \\ \text{(c)} \quad (kq) &= k_0(k_0 - m_\mu) - k_0^2 < 0. \end{aligned} \quad (14.13)
\end{aligned}$$

Из неравенств (14.13a) и (14.13b) сразу получаем, что

$$0 \leq x \leq 1, \quad (14.14)$$

где пределы  $x = 0$  и  $x = 1$  отвечают глубоконеупругому рассеянию при бесконечной энергии налетающего нейтрино и квазиупругому рассеянию, когда в конечном состоянии образуется только один лептон и один нуклон,  $p'^2 = M^2$ , соответственно.

Теперь проанализируем переменную  $y$ . Возвращаясь снова к лабораторной системе (14.11), получаем

$$\nu = E - E' \stackrel{q_0}{=} p'_0 - M \geq 0 \rightarrow y \geq 0. \quad (14.15)$$

Для определения верхней границы  $y$  рассмотрим пространственноподобный 4-вектор

$$N_\alpha = \varepsilon_{\alpha k q p}, \quad N_0 = \varepsilon_{0\beta\mu\nu} k^\beta q^\mu p^\nu \stackrel{p=0}{=} 0 \rightarrow N^2 = - \begin{vmatrix} k^2 & (kq) & (kp) \\ (kq) & q^2 & (qp) \\ (kp) & (qp) & p^2 \end{vmatrix} \leq 0. \quad (14.16)$$

Разделим последнее неравенство в (14.16) на  $2(kp)^2(kq)$ , заметив, что в соответствии с  $(kq) < 0$  (14.13с) необходимо изменить знак неравенства:

$$\frac{2(qp)(kp)(kq) - M^2(kq)^2 - q^2(kp)^2}{2(kp)^2(kq)} = y - \frac{2(kq)M^2}{2(kp) \cdot 2} - \frac{q^2}{2(kq)}$$

$$\stackrel{(k-q)^2=k'^2}{q^2=2(kq)+m_\mu^2} \left[ 1 + \frac{M \cdot x}{2E} + \frac{m_\mu^2}{4\nu E} \right] y - \left[ 1 + \frac{m_\mu^2}{q^2 - m_\mu^2} \right] \leq 0 \stackrel{\text{DIS}}{\rightarrow} y \leq 1. \quad (14.17)$$

Таким образом, из (14.15) и (14.17) в случае глубоконеупругого рассеяния получаем

$$0 \leq y \leq 1. \quad (14.18)$$

Для расчета дифференциальных сечений рассеяния нейтрино (14.5) и антинейтрино (14.8) нам понадобятся следующие соотношения:

$$2(k'q) = Q^2 - m_\mu^2, \quad 2(kk') = -(kq) = Q^2 - m_\mu^2:$$

$$-\eta_{\alpha\beta} L^{\alpha\beta}(k, k') = 2(kk') \approx Q^2 = 2MExy,$$

$$\frac{p_\alpha p_\beta}{M^2} L^{\alpha\beta}(k, k') = \frac{2(kp)(k'p)}{M^2} - (kk') \approx 2E\nu \left( \frac{1}{y} - 1 \right),$$

$$i \frac{\varepsilon_{\alpha\beta pq}}{2M^2} i \varepsilon^{\alpha\beta kk'} = \frac{(kp)(k'q) - (kq)(k'p)}{M^2} \approx 2E\nu x \left( 1 - \frac{y}{2} \right), \quad (14.19)$$

$$\frac{q_\alpha}{M} L^{\alpha\beta}(k, k') = \frac{(kq)k'^\beta + (k'q)k^\beta - (kk')q^\beta}{M} = -\frac{m_\mu^2}{M^2} M k^\beta \ll 1,$$

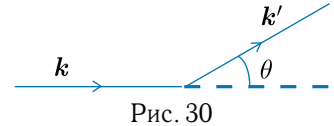
$$\frac{q_\alpha}{M} i \varepsilon^{\alpha\beta kk'} = 0.$$

Как видно из двух последних равенств в (14.19), слагаемые с  $q_\alpha$  в разложении (14.10) не дают значительного вклада в сечения, т. е. только учет форм-факторов  $W_1^\pm(p, q)$ ,  $W_2^\pm(p, q)$  и  $W_3^\pm(p, q)$  является существенным. Выразим теперь фазовый объем конечного мюона через переменные  $x$  и  $y$ :

$$x \approx \frac{EE'(1 - \cos \theta)}{M(E - E')}, \quad y = \frac{E - E'}{E} \quad dx dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\cos \theta, E')} \right| dE' d \cos \theta \approx$$

$$\frac{1}{|kp|} \frac{d^3 \mathbf{k}'}{k'_0} \Big|_{|\mathbf{k}'|=k'_0=E'} \approx \frac{2\pi}{ME} E' dE' d \cos \theta \quad \approx \frac{1}{2\pi y} \frac{1}{|kp|} \frac{d^3 \mathbf{k}'}{k'_0}, \quad (14.20)$$

где  $\theta$  — угол рассеяния мюона относительно направления пучка нейтрино (рис. 30). Итак, учтя все представленные нами соотношения, получим дифференциальное сечение глубоконеупругого рассеяния нейтрино и антинейтрино на нуклонах:



$$\frac{d^2 \sigma_{\nu/\bar{\nu}}}{dx dy} = \frac{G_\mu^2}{\pi} ME \left[ xy^2 W_1^\pm(p, q) + (1-y) \frac{\nu}{M} W_2^\pm(p, q) \pm xy \left( 1 - \frac{y}{2} \right) \frac{\nu}{M} W_3^\pm(p, q) \right]$$

$$= \sigma_0 \left[ xy^2 F_1^\pm(p, q) + (1-y) F_2^\pm(p, q) \pm xy \left( 1 - \frac{y}{2} \right) F_3^\pm(p, q) \right]. \quad (14.21)$$

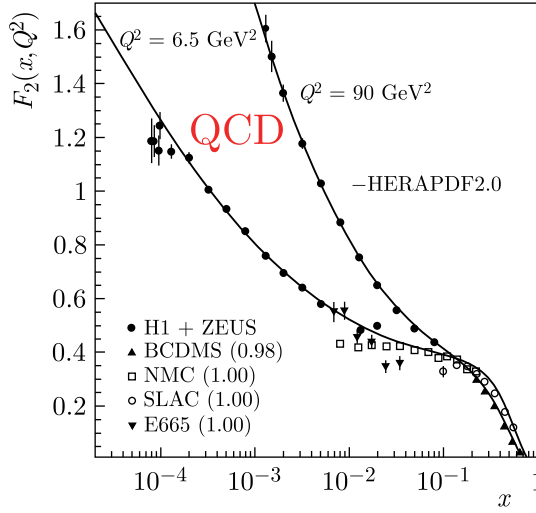


Рис. 31

Здесь были введены характерные сечения слабого взаимодействия при рассеянии на нуклонах

$$\sigma_0 = \frac{G_\mu^2}{\pi} M E \approx 1,6 \cdot 10^{-38} \text{ см}^2 \cdot \frac{E}{\text{ГэВ}} \quad (14.22)$$

и новые структурные функции

$$\begin{aligned} F_1^\pm(p, q) &= W_1^\pm(p, q), \\ F_2^\pm(p, q) &= \frac{\nu}{M} W_2^\pm(p, q), \\ F_3^\pm(p, q) &= \frac{\nu}{M} W_3^\pm(p, q), \end{aligned} \quad (14.23)$$

чтобы избежать появления размерной переменной  $\nu$ . Структурные безразмерные функции  $F_i^\pm(p, q)$  при  $(qp)/M = \nu \rightarrow \infty$  и  $-q^2 \rightarrow \infty$  на самом деле зависят только от  $x$ :  $F_i^\pm(x)$ . Это свойство называется скейлингом Бьёркена (James Daniel Bjorken, р. 22.06.1934) (рис. 31\*). Отклонение от скейлинга для разных переданных импульсов  $q$  при очень малых  $x < 0,1$  на рис. 31 обусловлено квантово-хромодинамическими эффектами.

\* Этот рисунок взят из статьи *Particle Data Group (Zyla P.A. et al.) (Prog. Theor. Exp. Phys. 2020 (2020) 083C01)*.

## 15. ПАРТОННАЯ МОДЕЛЬ

В этой главе мы будем использовать микроскопическую картину, как более информативную, чем метод скобок Дирака, для описания взаимодействия нейтрино с нуклоном. Она называется партонной моделью Фейнмана. Согласно этой модели партоны\* ( $q$ ) являются свободными (невзаимодействующими) безмассовыми фермионами со спином  $1/2$ , на которых и происходит рассеяние нейтрино  $\nu_\mu + q_i \rightarrow \mu^- + q_f$ . Поскольку квадрат импульса  $q^2 \leq 0$  является пространственноподобным вектором, мы можем выбрать систему  $q_0 = 0$ . В этой системе при  $Q^2 \rightarrow \infty$  и  $\nu \rightarrow \infty$ , если пренебречь поперечными импульсами  $p_\perp$ , импульсы  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{p}$  принимают большие значения и противоположны:

$$M\nu = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} \stackrel{p_\perp=0}{\approx} \sqrt{Q^2} |\mathbf{p}| : |\mathbf{p}|^2 = \frac{\nu^2}{Q^2} M^2 \stackrel{Q^2=2M\nu x}{=} \frac{\nu}{2Mx} M^2 \gg M^2, \quad (15.1)$$

$$x = \frac{-q^2}{2(qp)} \stackrel{p_\perp=0}{\approx} \frac{|\mathbf{q}|^2}{2|\mathbf{q}||\mathbf{p}|} = \frac{|\mathbf{q}|}{2|\mathbf{p}|} : \mathbf{q} = -2x\mathbf{p}.$$

Если провести кинематический анализ начальных  $q_i$ - и конечных  $q_f$ -партонов с импульсами  $\mathbf{p}_i$  и  $\mathbf{p}_f$  соответственно

$$\mathbf{q} + \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f \quad \stackrel{q_\uparrow \downarrow \mathbf{p}_i}{\Rightarrow} |\mathbf{q}| - |\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_f| = |\mathbf{p}_i| \rightarrow \mathbf{q} = -2\mathbf{p}_i = \quad (15.2)$$

$$p_i^0 = p_f^0 \stackrel{m_q=0}{\rightarrow} |\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_f| \quad \stackrel{(15.1)}{=} -2x\mathbf{p} : \mathbf{p}_i = x\mathbf{p},$$

получаем смысл кинематической переменной  $x$  как доли импульса нуклона, которым обладает начальный партон, участвующий в рассеянии (рис. 32).

$$\mathbf{p}_i = x\mathbf{p} \quad \mathbf{q} = -2x\mathbf{p} \quad \mathbf{p}_f = -x\mathbf{p}$$

Рис. 32

Рассмотрим рассеяние нейтрино на партонах — кварках и антикварках:

$$\begin{aligned} \nu_\mu + d \rightarrow \mu^- + u(c), \quad \nu_\mu + s \rightarrow \mu^- + c(u), \\ \nu_\mu + \bar{u} \rightarrow \mu^- + \bar{d}(\bar{s}), \quad \nu_\mu + \bar{c} \rightarrow \mu^- + \bar{s}(\bar{d}), \end{aligned} \quad (15.3)$$

---

\* Название «партоны» происходит от английского слова part, и их обычно отождествляют с кварками.



пренебрегая наличием  $b$ -кварков в нуклоне. Тогда адронный ток в (14.1) имеет вид

$$\begin{aligned} J_\alpha^h &= V_{q_f q_i} \bar{q}_f(p_f) \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) q_i(p_i), \\ V_{ud} &= V_{cs} = \cos \theta_C, \quad V_{us} = -V_{cd} = \sin \theta_C, \end{aligned} \quad (15.4)$$

который мы можем использовать для вычисления структурной функции (14.6). Тогда для структурной функции рассеяния нейтрино на кварках получаем

$$\begin{aligned} (W_{\alpha\beta}^+)_{q_f q_i} &= \frac{1}{8} \int \frac{|kp|}{|kp_i|} |V_{q_f q_i}|^2 \text{Tr} \left[ \hat{p}_f \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) \hat{p}_i \gamma_\beta (1 - \gamma^5) \right] \\ &\quad \times \delta^{(4)}(p_f - p_i - q) \frac{d^3 p_f}{p_f^0} f_{q_i}(x_i) dx_i \\ &= \int |V_{q_f q_i}|^2 [L_{\alpha\beta}(p_i, p_f) + i\varepsilon_{\alpha\beta p_i p_f}] \delta^{(4)}(p_f - p_i - q) \frac{d^3 p_f}{p_f^0} f_{q_i}(x_i) \frac{dx_i}{x_i}. \end{aligned} \quad (15.5)$$

Здесь  $f_{q_i}(x_i)$  является функцией распределения партонов  $q_i$  в нуклоне, несущих импульс  $x_i p$ , множитель  $|kp|/|kp_i|$  учитывает, что рассеяние происходит на партоне, а не на нуклоне, как в формулах (14.5) и (14.8). Интегрирование по конечным импульсам адронов осуществляется по формуле

$$\begin{aligned} \int \delta^{(4)}(p_f - p_i - q) \frac{d^3 p_f}{p_f^0} &= 2 \int \delta^{(4)}(p_f - p_i - q) \delta(p_f^2) \theta(p_f^0) d^4 p_f \\ &\stackrel{p_f = p_i + q}{=} 2\delta(2qp_i + q^2) \delta\left(\frac{q^2}{2p_i q}\right) \frac{\delta(x_i - x)}{|qp|}, \end{aligned} \quad (15.6)$$

что позволяет в дальнейшем легко интегрировать по импульсному распределению партонов. Здесь  $\theta(x)$  — ступенчатая функция Хевисайда (Oliver Heaviside, 1850–1925):

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}. \quad (15.7)$$

Импульсы  $p_i$  и  $p_f$  выражаются как

$$p_i = \frac{n - q}{2}, \quad p_f = \frac{n + q}{2}, \quad (15.8)$$

где

$$n = p_f + p_i = 2p_i + q \stackrel{q^2 = -2p_i q}{=} 2x \left( p - \frac{qp}{q^2} q \right), \quad n^2 = -q^2. \quad (15.9)$$

Тогда структурная функция (15.5) принимает вид

$$\begin{aligned} (W_{\alpha\beta}^+)_{q_f q_i} &= \left[ - \left( \eta_{\alpha\beta} - \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} \right) + \frac{1}{M^2} \left( p_\alpha - \frac{qp}{q^2} q_\alpha \right) \left( p_\beta - \frac{qp}{q^2} q_\beta \right) \frac{2xM}{\nu} \right. \\ &\quad \left. + i \frac{\varepsilon_{\alpha\beta pq}}{2M^2} \frac{2M}{\nu} \right] |V_{q_f q_i}|^2 f_{q_i}(x), \end{aligned} \quad (15.10)$$

который мы можем сравнить с (14.10), и, используя (14.23), получаем

$$2xF_1(x) = F_2(x). \quad (15.11)$$

Эта формула называется соотношением Каллана (Curtis Gove Callan Jr., p. 11.10.1942) и Гросса (David Jonathan Gross, p. 19.02.1941).

Используя тот же адронный ток (15.4) и соответствующий матричный элемент из определения (14.6), для структурной функции рассеяния нейтрино на антикварках получаем

$$\begin{aligned} (W_{\alpha\beta}^+)_{\bar{q}_f\bar{q}_i} = & \left[ - \left( \eta_{\alpha\beta} - \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} \right) + \frac{1}{M^2} \left( p_\alpha - \frac{qp}{q^2} q_\alpha \right) \left( p_\beta - \frac{qp}{q^2} q_\beta \right) \frac{2xM}{\nu} \right. \\ & \left. - i \frac{\varepsilon_{\alpha\beta pq}}{2M^2} \frac{2M}{\nu} \right] |V_{q_i q_f}|^2 f_{\bar{q}_i}(x). \quad (15.12) \end{aligned}$$

Для рассеяния антинейтрино на кварках

$$\bar{\nu}_\mu + u \rightarrow \mu^+ + d(s), \quad \bar{\nu}_\mu + c \rightarrow \mu^+ + s(d) \quad (15.13)$$

получаем структурную функцию

$$\begin{aligned} (W_{\alpha\beta}^-)_{q_f q_i} = & \left[ - \left( \eta_{\alpha\beta} - \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} \right) + \frac{1}{M^2} \left( p_\alpha - \frac{qp}{q^2} q_\alpha \right) \left( p_\beta - \frac{qp}{q^2} q_\beta \right) \frac{2xM}{\nu} \right. \\ & \left. + i \frac{\varepsilon_{\alpha\beta pq}}{2M^2} \frac{2M}{\nu} \right] |V_{q_i q_f}|^2 f_{q_i}(x), \quad (15.14) \end{aligned}$$

а для рассеяния антинейтрино на антикварках

$$\bar{\nu}_\mu + \bar{d} \rightarrow \mu^+ + \bar{u}(\bar{c}), \quad \bar{\nu}_\mu + \bar{s} \rightarrow \mu^+ + \bar{c}(\bar{u}), \quad (15.15)$$

соответственно,

$$\begin{aligned} (W_{\alpha\beta}^-)_{\bar{q}_f\bar{q}_i} = & \left[ - \left( \eta_{\alpha\beta} - \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} \right) + \frac{1}{M^2} \left( p_\alpha - \frac{qp}{q^2} q_\alpha \right) \left( p_\beta - \frac{qp}{q^2} q_\beta \right) \frac{2xM}{\nu} \right. \\ & \left. - i \frac{\varepsilon_{\alpha\beta pq}}{2M^2} \frac{2M}{\nu} \right] |V_{q_f q_i}|^2 f_{\bar{q}_i}(x). \quad (15.16) \end{aligned}$$

Адроны, которые состоят из кварков и антикварков в конечном состоянии, не регистрируются, поэтому необходимо просуммировать по всем возможным типам кварков в сечениях (14.5) и (14.8) или в структурных функциях (15.10), (15.12), (15.14) и (15.16):

$$\sum_{q_f} |V_{q_f q_i}|^2 = \sum_{q_f} |V_{q_i q_f}|^2 = 1, \quad (15.17)$$

что в силу унитарности матрицы смешивания равно единице. Функции распределения партонов (PDF) в нуклоне определяются относительно их рас-

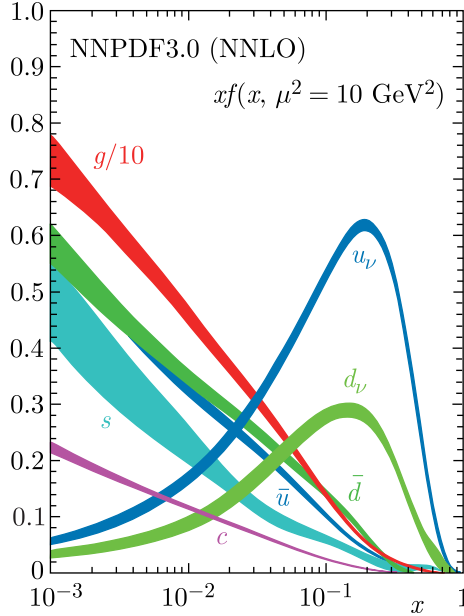


Рис. 33

пределения в протоне и обозначаются соответствующей буквой кварка или антикварка (рис. 33\*):

$$f_{q_i}(x) = q_i(x), \quad f_{\bar{q}_i}(x) = \bar{q}_i(x). \quad (15.18)$$

Значение  $q_i(x)dx$  определяет количество кварков  $q_i$  в протоне с относительными импульсами в диапазоне от  $x$  до  $x + dx$  от импульса протона. Таким образом, функции распределения на рис. 33 должны удовлетворять правилу сумм для валентных кварков в протоне:

$$\int_0^1 u_v(x) dx = \int_0^1 [u(x) - \bar{u}(x)] dx = 2, \quad \int_0^1 d_v(x) dx = \int_0^1 [d(x) - \bar{d}(x)] dx = 1, \quad (15.19)$$

$$\int_0^1 [s(x) - \bar{s}(x)] dx = \int_0^1 [c(x) - \bar{c}(x)] dx = 0.$$

Учитывая процессы (15.3) для процесса рассеяния нейтрино на протоне  $\nu_\mu + p \rightarrow \mu^- + X$ , структурные функции можно выразить соответствующими

\* Этот рисунок взят из статьи *Particle Data Group (Zyla P. A. et al.) (Prog. Theor. Exp. Phys. 2020 (2020) 083C01)*.

функциями партонных распределений в протоне (15.18):

$$\begin{aligned} F_1^+(x) &= d(x) + s(x) + \bar{u}(x) + \bar{c}(x) = \frac{1}{2} [q_+(x) + \bar{q}_+(x)], \\ F_3^+(x) &= 2 [d(x) + s(x) - \bar{u}(x) - \bar{c}(x)] = [q_+(x) - \bar{q}_+(x)]. \end{aligned} \quad (15.20)$$

Тогда соответствующее дифференциальное сечение (14.21) принимает вид

$$\frac{d^2 \sigma_\nu^p}{dx dy} = \sigma_0 x [q_+(x) + (1-y)^2 \bar{q}_+(x)]. \quad (15.21)$$

Для рассеяния нейтрино на нейтроне  $\nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + X$ , в соответствии с изотопической симметрией, необходимо поменять местами функции распределения между  $u$ - и  $d$ -кварками  $u(x) \leftrightarrow d(x)$  в структурных функциях (15.20).

Рассеяние антинейтрино на кварках (15.13) и (15.15) для процесса  $\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow \mu^+ + X$  приводит к следующим структурным функциям:

$$\begin{aligned} F_1^-(x) &= u(x) + c(x) + \bar{d}(x) + \bar{s}(x) = \frac{1}{2} [q_-(x) + \bar{q}_-(x)], \\ F_3^-(x) &= 2 [u(x) + c(x) - \bar{d}(x) - \bar{s}(x)] = [q_-(x) - \bar{q}_-(x)] \end{aligned} \quad (15.22)$$

и дифференциальному сечению

$$\frac{d^2 \sigma_\nu^p}{dx dy} = \sigma_0 x [(1-y)^2 q_-(x) + \bar{q}_-(x)]. \quad (15.23)$$

Соответственно, для рассеяния антинейтрино на нейтроне  $\bar{\nu}_\mu + n \rightarrow \mu^+ + X$ , в соответствии с изотопической симметрией, необходимо поменять местами функции распределения между  $u$ - и  $d$ -кварками  $u(x) \leftrightarrow d(x)$  в структурных функциях (15.22).

В формулах (15.21) и (15.23) мы видим коэффициент подавления  $(1-y)^2$ , который требует дальнейшего пояснения. Рассмотрим процессы в системе покоя (анти)нейтрино и (анти)кварка

$$k = (E^*, \mathbf{k}^*), \quad p_i = (E^*, -\mathbf{k}^*), \quad k' \stackrel{m_\mu \approx 0}{\approx} (E^*, \mathbf{k}'^*), \quad p_f = (E^*, -\mathbf{k}'^*). \quad (15.24)$$

Тогда переменная  $y$  связана с углом рассеяния в этой системе  $\theta^*$  между импульсами  $\mathbf{k}^*$  и  $\mathbf{k}'^*$ :

$$y = \frac{(qp)}{(kp)} = \frac{x [(kp_i) - (k'p_i)]}{x(kp_i)} = \sin^2 \frac{\theta^*}{2}. \quad (15.25)$$

При  $\theta^* = 180^\circ$   $y = 1$ , поэтому множитель  $(1-y)^2$  запрещает обратное рассеяние нейтрино на антикварках (15.21) или антинейтрино — на кварках (15.23). Это следует из закона сохранения момента импульса (рис. 34).

Величина  $dQ_i = x q_i(x) dx$  определяет, какую долю полного импульса протона переносят кварки  $q_i$  в интервале от  $x$  до  $x + dx$  по отношению к импульсу

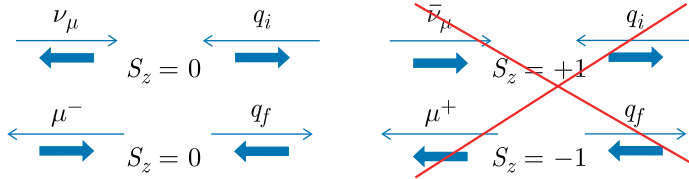


Рис. 34

протона. Давайте определим интегральные значения

$$Q_i = \int_0^1 x q_i(x) dx, \quad Q = U + D + S + C, \quad \bar{Q} = \bar{U} + \bar{D} + \bar{S} + \bar{C}. \quad (15.26)$$

Тогда их можно физически измерить по угловым распределениям рассеяния нейтрино и антинейтрино, например, на изотопически-симметричной мишени (с равным количеством протонов и нейтронов), такой как железная мишень:

$$\frac{d\sigma_\nu}{dy} = \frac{1}{2} \left[ \frac{d\sigma_\nu^p}{dy} + \frac{d\sigma_\nu^n}{dy} \right] = \sigma_0 \left[ Q + S - C + (1-y)^2(\bar{Q} - \bar{S} + \bar{C}) \right], \quad (15.27a)$$

$$\frac{d\sigma_{\bar{\nu}}}{dy} = \frac{1}{2} \left[ \frac{d\sigma_{\bar{\nu}}^p}{dy} + \frac{d\sigma_{\bar{\nu}}^n}{dy} \right] = \sigma_0 \left[ (1-y)^2(Q - S + C) + \bar{Q} + \bar{S} - \bar{C} \right]. \quad (15.27b)$$

Соответствующие полные сечения имеют вид

$$\sigma_\nu = \sigma_0 \left[ Q + S - C + \frac{1}{3}(\bar{Q} - \bar{S} + \bar{C}) \right], \quad (15.28a)$$

$$\sigma_{\bar{\nu}} = \sigma_0 \left[ \frac{1}{3}(Q - S + C) + \bar{Q} + \bar{S} - \bar{C} \right]. \quad (15.28b)$$

Если бы нуклоны содержали только  $u$ - и  $d$ -кварки и не содержали бы другие кварки и антикварки, то отношение  $R = \sigma_{\bar{\nu}}/\sigma_\nu$  должно было бы равняться примерно  $1/3$ . Однако его экспериментальное значение  $R_{\text{exp}} \approx 0,5$ . Детальный анализ показывает, что

$$U \approx 0,28, \quad D \approx 0,15, \quad \bar{U} \approx \bar{D} \approx 0,03, \quad S \approx \bar{S} \approx 0,01, \quad C \approx \bar{C} \approx 0. \quad (15.29)$$

Кварки, отличные от валентных кварков (15.19), называются морскими кварками, поскольку они возникают из вакуума в результате квантовых флуктуаций. Посчитаем, какую долю общего импульса протона несут все кварки:

$$Q + \bar{Q} = U + D + S + C + \bar{U} + \bar{D} + \bar{S} + \bar{C} \approx 0,51. \quad (15.30)$$

Полученное нами значение означает, что не только кварки в протоне переносят его импульс. Оказывается, что глюоны несут остальную часть импульса протона ( $\sim 50\%$ ). Их распределение также представлено на рис. 33 в уменьшенном масштабе.

## 16. УПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ НЕЙТРИНО НА ЭЛЕКТРОНАХ

В этой главе мы рассмотрим более простой и в то же время гораздо более сложный процесс упругого рассеяния нейтрино на электронах  $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$ , который фактически намекает на будущее объединение слабых и электромагнитных взаимодействий. Этот процесс протекает без изменения заряда и поэтому называется взаимодействием с нейтральными токами (рис. 35).

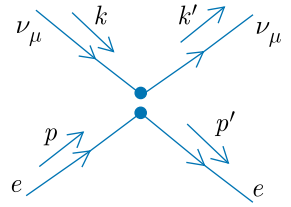


Рис. 35

Нейтрино участвует только в слабых взаимодействиях (исключая, конечно, гравитационное, в котором участвуют все частицы), спинорную структуру которого мы знаем из заряженных токов (8.1). При этом электрон участвует как в электромагнитном (6.12), так и в слабом взаимодействии (8.2), проявляя различную структуру спинорного взаимодействия. Поэтому запишем лагранжиан нового взаимодействия по аналогии с лагранжианом Ферми (7.2), где в электронную часть входят неизвестные коэффициенты  $g_V^e$  и  $g_A^e$ :

$$\mathcal{L}^{\text{NC}} = -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_\mu \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) \nu_\mu \cdot \bar{e} \gamma^\alpha (g_V^e - g_A^e \gamma^5) e. \quad (16.1)$$

Перепишем электронный ток в (16.1) с помощью операторов проектирования (3.23), вводя новые константы  $g_L$  и  $g_R$ :

$$\begin{aligned} & \bar{e} \gamma^\alpha (g_V^e - g_A^e \gamma^5) e \\ &= g_L \bar{e} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) e + g_R \bar{e} \gamma^\alpha (1 + \gamma^5) e : \quad \begin{aligned} g_L &= (g_V^e + g_A^e)/2 \\ g_R &= (g_V^e - g_A^e)/2. \end{aligned} \end{aligned} \quad (16.2)$$

Для расчета квадрата модуля матричного элемента упругого рассеяния нейтрино на электронах просуммируем по киральностям всех частиц и усредняя по начальному электрону

$$\begin{aligned} \overline{\sum |M_\nu|^2} &= \frac{1}{2} \frac{G_\mu^2}{2} \text{Tr} \left[ \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) \hat{k} \gamma_\beta (1 - \gamma^5) \hat{k}' \right] \\ &\quad \times \left\{ g_L^2 \text{Tr} \left[ \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) (\hat{p} + m) \gamma^\beta (1 - \gamma^5) (\hat{p}' + m) \right] \right. \\ &\quad \left. + g_L g_R \text{Tr} \left[ \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) (\hat{p} + m) \gamma^\beta (1 + \gamma^5) (\hat{p}' + m) \right] \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + g_R g_L \text{Tr} \left[ \gamma^\alpha (1 + \gamma^5) (\hat{p} + m) \gamma^\beta (1 - \gamma^5) (\hat{p}' + m) \right] \\
& + g_R^2 \text{Tr} \left[ \gamma^\alpha (1 + \gamma^5) (\hat{p} + m) \gamma^\beta (1 + \gamma^5) (\hat{p}' + m) \right] \Big\} \\
= & 16 G_\mu^2 [L_{\alpha\beta}(k, k') + i\varepsilon_{\alpha\beta k k'}] \left\{ g_L^2 [L^{\alpha\beta}(p, p') + i\varepsilon^{\alpha\beta p p'}] \right. \\
& \left. + 2g_L g_R m^2 \eta^{\alpha\beta} + g_R^2 [L^{\alpha\beta}(p, p') - i\varepsilon^{\alpha\beta p p'}] \right\} \\
\stackrel{(8.9)}{=} & 64 G_\mu^2 \left\{ g_L^2 (k p) (k' p') - g_L g_R m^2 (k k') + g_R^2 (k p') (k p') \right\}. \quad (16.3)
\end{aligned}$$

Усредненный квадрат модуля матричного элемента упругого рассеяния антинейтрино на электронах имеет вид

$$\overline{\sum |M_{\nu/\bar{\nu}}|^2} = 64 G_\mu^2 \left\{ g_L^2 (k p') (k' p) - g_L g_R m^2 (k k') + g_R^2 (k p) (k' p') \right\}. \quad (16.4)$$

Для расчета дифференциального сечения рассеяния

$$d\sigma_{\nu/\bar{\nu}} = \frac{\overline{\sum |M_{\nu/\bar{\nu}}|^2}}{4 |k p|} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' - p - q) \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^3 2k'_0} \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3 2p'_0} \quad (16.5)$$

необходимо изучить кинематику процесса, которая почти полностью совпадает с кинематикой процесса глубоконеупругого рассеяния (14.11) и (14.12), рассмотренного в двух предыдущих главах. В данном случае упругого рассеяния после интегрирования по конечному импульсу электрона

$$\begin{aligned}
\int \delta^{(4)}(p' - p - q) \frac{d^3 \mathbf{p}'}{p'_0} &= 2 \int \delta^{(4)}(p' - p - q) \delta(p'^2 - m^2) \theta(p'_0) d^4 p' \\
& \stackrel{p'=\underline{p}+q}{=} 2 \delta(2qp + q^2) \stackrel{qp=\underline{m}Ey}{=} \frac{\delta(1-x)}{mEy} \quad (16.6)
\end{aligned}$$

получаем, что  $x = 1$  и сечения зависят только от одного параметра  $y$ :

$$\frac{d\sigma_\nu}{dy} = 2\sigma_0 \left[ g_L^2 + g_R^2 (1-y)^2 - g_L g_R \left( \frac{m}{E} \right) y \right], \quad (16.7a)$$

$$\frac{d\sigma_{\bar{\nu}}}{dy} = 2\sigma_0 \left[ g_L^2 (1-y)^2 + g_R^2 - g_L g_R \left( \frac{m}{E} \right) y \right], \quad (16.7b)$$

где  $\sigma_0$  является характерным сечением слабых взаимодействий рассеяния на электронах

$$\sigma_0 = \frac{G_\mu^2}{\pi} m E \approx 8,6 \cdot 10^{-42} \text{ см}^2 \cdot \frac{E}{\Gamma_{\text{ЭВ}}}. \quad (16.8)$$

Здесь следует обратить внимание на то, что характерное сечение рассеяния нейтрино на электронах даже по сравнению с (14.22) почти на четыре порядка меньше.

Переменная  $y$ , определенная в (14.12), связана с начальной и конечной энергиями нейтрино в лабораторной системе покоящегося электрона. Однако нейтрино в конечном состоянии не регистрируется, и поэтому нам надо выразить переменную  $y$  через другие переменные:

$$y = \frac{(qp)}{(kp)} \stackrel{q=p'-p}{=} \frac{(E_e - m)m}{E_\nu m} = \frac{T_e^{\text{kin}}}{E_\nu}. \quad (16.9)$$

Здесь  $E_\nu$  — начальная энергия нейтрино, а  $E_e$  и  $T_e^{\text{kin}}$  — полная и кинетическая энергии электрона в конечном состоянии. Из (14.15) и (14.17) сразу получаем пределы переменной  $y$

$$0 \leq y \leq \frac{1}{1 + m/2E_\nu}. \quad (16.10)$$

При энергии налетающего нейтрино, много большей массы электрона  $E_\nu \gg m_e$ , получаем полные сечения в виде

$$\sigma_\nu = 2\sigma_0 \left[ g_L^2 + g_R^2/3 \right], \quad (16.11a)$$

$$\sigma_{\bar{\nu}} = 2\sigma_0 \left[ g_L^2/3 + g_R^2 \right], \quad (16.11b)$$

которые мы можем сравнить с их экспериментальными значениями

$$\sigma_\nu^{\text{exp}} = (1,6 \pm 0,1) \cdot 10^{-42} \text{ см}^2 \cdot \frac{E}{\text{ГэВ}}, \quad (16.12a)$$

$$\sigma_{\bar{\nu}}^{\text{exp}} = (1,4 \pm 0,1) \cdot 10^{-42} \text{ см}^2 \cdot \frac{E}{\text{ГэВ}}. \quad (16.12b)$$

Для определения констант  $g_L$  и  $g_R$  воспользуемся экспериментальными значениями (16.12):

$$\begin{aligned} \sigma_\nu - \sigma_{\bar{\nu}}/3 &= 16\sigma_0 g_L^2/9 & \rightarrow & g_L^2 = 0,074 \pm 0,009, \\ \sigma_{\bar{\nu}} - \sigma_\nu/3 &= 16\sigma_0 g_R^2/9 & & g_R^2 = 0,057 \pm 0,009, \end{aligned} \quad (16.13)$$

которые приводят к четырехкратной неоднозначности (рис. 36 \*)

$$(g_V^e)^2 = 0,260 \pm 0,025 \approx (\pm 0,5)^2, \quad (16.14a)$$

$$(g_A^e)^2 = 0,001 \pm 0,002 \approx 0,$$

$$(g_V^e)^2 = 0,001 \pm 0,002 \approx 0, \quad (16.14b)$$

$$(g_A^e)^2 = 0,260 \pm 0,025 \approx (\pm 0,5)^2.$$

Экспериментальные результаты, представленные в (16.13), показывают, что в отличие от левого взаимодействия заряженных токов электронный нейтральный ток содержит и правую составляющую. Ответ на вопрос, почему это так, будет найден после построения объединенной модели слабого и элект-

\* Этот рисунок взят из статьи *Vilain P. et al. (CHARM II Collab.) (Phys. Lett. B 335 (1994) 246)*.



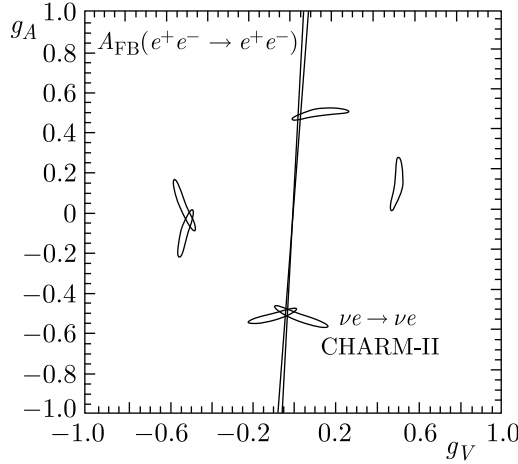


Рис. 36

ромагнитного взаимодействий. Пока мы лишь можем уменьшить неоднозначность в решениях (16.14), используя другие процессы рассеяния нейтрино.

Рассмотрим теперь процесс упругого рассеяния электронного нейтрино на электронах  $\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$ . Этот процесс, в отличие от только что рассмотренных, включает в себя 2 диаграммы — нейтрального (рис. 37а) и заряженного токов (рис. 37б) соответственно:

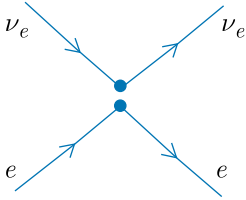


Рис. 37а

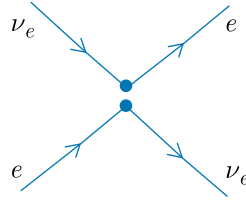


Рис. 37б

Соответствующий полный лагранжиан имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \mathcal{L}^{\text{NC}} + \mathcal{L}^{\text{CC}} = & -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_e \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) \nu_e \cdot \bar{e} \gamma^\alpha (g_V^e - g_A^e \gamma^5) e \\ & -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_e \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) e \cdot \bar{e} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \nu_e \\ \stackrel{\text{Fierz}}{=} & -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_e \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) \nu_e \cdot \left[ (g_L + 1) \bar{e} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) e + g_R \bar{e} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) e \right]. \end{aligned} \quad (16.15)$$

В последнем равенстве мы использовали тождество Фирца (4.12) для второго слагаемого с учетом антикоммутируемости спиноров. Экспериментальные данные показывают, что

$$g_L^{\text{exp}} < 0 \quad \rightarrow \quad g_V^e + g_A^e < 0 \quad (16.16)$$

и только два из решений (16.14) на рис. 36 являются возможными:

$$\begin{array}{ccc} g_V^e \approx -0,5, & & g_V^e \approx 0, \\ g_A^e \approx 0 & \text{или} & g_A^e \approx -0,5. \end{array} \quad (16.17)$$

Забегая вперед, отметим, что только одно из решений в (16.17)

$$g_V^{\text{exp}} = -0,035 \pm 0,017, \quad g_A^{\text{exp}} = -0,503 \pm 0,017 \quad (16.18)$$

соответствует современным экспериментальным данным, которые мы обсудим в гл. 21.

## 17. КАЛИБРОВОЧНАЯ СИММЕТРИЯ СЛАБЫХ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Для объяснения короткодействующего взаимодействия слабых сил с промежуточным носителем (см. рис. 24) нам понадобится массивная векторная частица, которая обеспечит радиус взаимодействия порядка  $1/M_W$  (12.25). Безмассовая векторная частица фотон (см. рис. 3) приводит к бесконечно-малому радиусу действия, что является следствием калибровочно-инвариантного лагранжиана. Если мы добавим массовый член к калибровочно-инвариантному лагранжиану, калибровочная симметрия будет нарушена:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M^V(x) &= -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}(x)F^{\alpha\beta}(x) + \frac{M^2}{2}V_\alpha(x)V^\alpha(x) \\ F_{\alpha\beta}(x) &\stackrel{\Rightarrow}{=} \partial_\alpha V_\beta(x) - \partial_\beta V_\alpha(x) \quad -\frac{1}{2}(\partial_\alpha V_\beta)(\partial^\alpha V^\beta) + \frac{1}{2}(\partial_\alpha V^\alpha)^2 + \frac{M^2}{2}V_\alpha V^\alpha \\ & \quad V_\alpha \rightarrow V'_\alpha = V_\alpha - \partial_\alpha \lambda(x) \\ & \quad \mathcal{L}_M^V \rightarrow \mathcal{L}'_M^V \neq \mathcal{L}_M^V \end{aligned} \quad (17.1)$$

Используя уравнения Лагранжа (Joseph-Louis Lagrange, 1736–1813), можно получить уравнения движения, и, дифференцируя их, получаем также условие Лоренца (Ludvig Valentin Lorenz\*, 1829–1891)

$$\frac{\delta \mathcal{L}_M^V}{\delta V_\beta} - \partial_\alpha \left( \frac{\delta \mathcal{L}_M^V}{\delta \partial_\alpha V_\beta} \right) = 0 \rightarrow \partial_\alpha \partial^\alpha V^\beta - \partial^\beta \partial^\alpha V_\alpha + M^2 V^\beta = 0 \xrightarrow{\partial_\beta} \partial_\beta V^\beta(x) = 0, \quad (17.2)$$

что оставляет только три независимых степени свободы для массивной векторной частицы из четырех для векторного потенциала  $V_\alpha$ . Уравнение движения (17.2) в импульсном пространстве является алгебраическим:

$$\left[ (q^2 - M^2)\eta^{\alpha\beta} - q^\alpha q^\beta \right] \tilde{V}_\alpha(q) = 0, \quad (17.3)$$

и функцию Грина можно легко построить из

$$\left[ (q^2 - M^2)\eta^{\alpha\gamma} - q^\alpha q^\gamma \right] D_{\alpha\beta}(q) = -i\delta_\beta^\gamma \rightarrow D_{\alpha\beta}(q) = -i \frac{\eta_{\alpha\beta} - q_\alpha q_\beta / M^2}{q^2 - M^2}. \quad (17.4)$$

---

\* Иногда его путают с Хендриком Лоренцем (Hendrik Antoon Lorentz, 1853–1928), в честь которого названа группа симметрии релятивистских преобразований.

Эта функция, к сожалению, при  $q \rightarrow \infty$  стремится к константе и не может играть роль регуляризации в (12.26). Более того, такое поведение функции Грина приводит к неперенормируемости квантовой теории поля для массивных векторных полей. Ответ на вопрос, как этого избежать, мы отложим до следующей главы. Пока будем считать, что векторные частицы описываются безмассовыми калибровочными векторными полями Янга (Chen-Ning Yang, p. 1.10.1922) и Миллса (Robert Laurence Mills, 1927–1999).

Попробуем ввести их взаимодействия с заряженными токами лептонов (8.1) и кварков (13.4):

$$J_\alpha = J_\alpha^h + J_\alpha^\ell = \sum_{i=1,2,3} \bar{u}_i \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) d'_i + \sum_{\ell=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_\ell \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) \ell$$

$$= 2 \sum_{i=1,2,3} \bar{Q}_{iL} \gamma_\alpha \tau^+ Q_{iL} + 2 \sum_{\ell=e,\mu,\tau} \bar{L}_{\ell L} \gamma_\alpha \tau^+ L_{\ell L}, \quad (17.5)$$

используя лагранжиан

$$\mathcal{L}^{\text{CC}} = -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} J_\alpha^\dagger J^\alpha, \quad (17.6)$$

где  $\tau^+$  является повышающим оператором (10.9) в пространстве левых дублетов  $Q_{iL}$  и  $L_{\ell L}$ :

$$Q_{iL} = \begin{pmatrix} u_L \\ d'_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_L \\ s'_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_L \\ b'_L \end{pmatrix}, \quad L_{\ell L} = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}. \quad (17.7)$$

Калибровочные поля, действующие на эти дублеты, принадлежат неабелевой группе (с некоммутирующими генераторами)  $SU(2)_L$ :  $\mathbf{W}_\alpha(x) \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}$ . Недиагональные по  $SU(2)_L$  поля  $(W_\alpha^1 \tau^1 + W_\alpha^2 \tau^2)/2 = (W_\alpha^+ \tau^+ + W_\alpha^- \tau^-)/\sqrt{2}$ , где  $W_\alpha^\pm = (W_\alpha^1 \mp iW_\alpha^2)/\sqrt{2}$ , взаимодействуют с заряженными токами в виде  $gW_\alpha^- J^\alpha + gW_\alpha^+ J^\alpha$ , здесь  $g$  — константа взаимодействия группы  $SU(2)_L$ . К сожалению, диагональное нейтральное поле не может выполнять роль электромагнитного поля  $A_\alpha(x)$ , поскольку оно взаимодействует только с левыми фермионами.

Чтобы объединить слабое и электромагнитное взаимодействия, следуя идее Глэшоу, необходимо добавить абелевое калибровочное поле  $B_\alpha(x)$  из группы  $U(1)_Y$ , которое будет взаимодействовать с фермионами, имеющими гиперзаряд

$$Y = 2 \left( Q - \tau^3/2 \right), \quad (17.8)$$

с константой взаимодействия  $g'$ . Сначала построим объединенную лептонную модель, используя калибровочную группу  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ . Для этого, помимо дублетов левых лептонов (17.7), участвующих в заряженных токах, необходимо включить еще и правые лептоны, участвующие в нейтральных токах (16.1) и в электромагнитном токе, которые являются синглетами группы  $SU(2)_L$ :

$$L = \begin{pmatrix} \nu_{\ell L} \\ \ell_L \end{pmatrix}, \quad \ell_R, \quad \nu_{\ell R}. \quad (17.9)$$

Чтобы получить полную симметрию, мы также добавили правое нейтрино. Оно является синглетом по группе  $SU(2)_L$  и поэтому не взаимодействует с калибровочными полями  $\mathbf{W}_\alpha$ . Согласно формуле (17.8) его гиперзаряд равен нулю:

$$Y(\nu_{\ell R}) = 0, \quad (17.10)$$

и поэтому оно тоже не взаимодействует с калибровочным полем  $B_\alpha$ . Именно поэтому  $\nu_{\ell R}$  называется стерильным\*. Гиперзаряды дублета и заряженного лептона, который является синглетом, равны

$$Y(L) = (-1) \left\{ \begin{pmatrix} 2(0 - 1/2) \\ 2(-1 + 1/2) \end{pmatrix} \right\}, \quad Y(\ell_R) = (-2). \quad (17.11)$$

Калибровочная ковариантная производная, которая заменяет обычную, чтобы сделать теорию калибровочно-инвариантной, имеет вид

$$\partial_\alpha \psi \rightarrow D_\alpha \psi = \left( \partial_\alpha - ig \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \mathbf{W}_\alpha - ig' \frac{Y}{2} B_\alpha \right) \psi. \quad (17.12)$$

Тогда для разных полей (17.9) мы получим разные формы ковариантной производной:

$$D_\alpha L = \left( \partial_\alpha - ig \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \mathbf{W}_\alpha + ig' \frac{1}{2} B_\alpha \right) L, \quad (17.13a)$$

$$D_\alpha \ell_R = (\partial_\alpha + ig' B_\alpha) \ell_R, \quad (17.13b)$$

$$D_\alpha \nu_{\ell R} = \partial_\alpha \nu_{\ell R}, \quad (17.13c)$$

а соответствующий лагранжиан имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{EW}^\ell = & i\bar{L}\hat{D}L + i\bar{\ell}_R\hat{D}\ell_R + i\bar{\nu}_{\ell R}\hat{D}\nu_{\ell R} = i\bar{L}\hat{D}L + i\bar{\ell}_R\hat{D}\ell_R + i\bar{\nu}_{\ell R}\hat{D}\nu_{\ell R} \\ & + \bar{L}\gamma^\alpha \left( g \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \mathbf{W}_\alpha - g' \frac{1}{2} B_\alpha \right) L - g' \bar{\ell}_R \gamma^\alpha B_\alpha \ell_R. \end{aligned} \quad (17.14)$$

Заметим здесь, что массовый член, смешивающий левый и правый спиноры (9.18), запрещен в (17.14) по соображениям симметрии. Действительно, лагранжиан должен быть инвариантен относительно калибровочной группы, т. е. быть синглетом, а произведение левого дублета и правого синглета (17.9) преобразуется как дублет.

Давайте рассмотрим сначала взаимодействие калибровочных бозонов с заряженными токами, следующее из (17.14):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{EW}^{CC} = & \frac{g}{2} \bar{L} \gamma^\alpha (W_\alpha^1 \tau^1 + W_\alpha^2 \tau^2) L = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{L} \gamma^\alpha (W_\alpha^+ \tau^+ + W_\alpha^- \tau^-) L \\ = & \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{\nu}_{\ell} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \ell \cdot W_\alpha^+ + \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{\ell} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \nu_{\ell} \cdot W_\alpha^-. \end{aligned} \quad (17.15)$$

Соответствующие диаграммы Фейнмана представлены на рис. 38.

\* Это название ввел Бруно Максимович Понтекорво (Bruno Pontecorvo, 1913–1993).

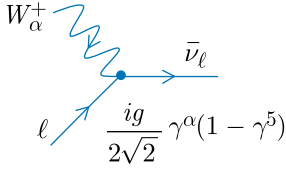


Рис. 38а

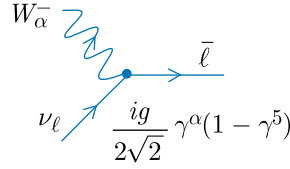


Рис. 38б

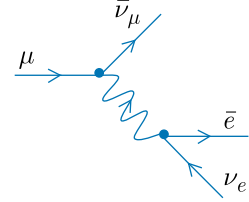


Рис. 39

Теперь, если мы воспользуемся массивным пропагатором векторного поля (17.4) и учтем, что лептоны на данный момент считаются безмассовыми частицами, из диаграммы на рис. 39 получаем соотношение (12.25) между калибровочной константой  $g$ , массой  $W^\pm$ -бозона и эффективной константой распада мюона  $G_\mu$ :

$$\mathcal{L}_F^{\text{CC}} = (-i) \frac{1}{2} \cdot 2 \left( \frac{ig}{2\sqrt{2}} \right)^2 \bar{\nu}_\mu \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \mu \frac{(-i) (\eta_{\alpha\beta} - q_\alpha q_\beta / M_W^2)}{q^2 - M_W^2} \bar{e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5) \nu_e$$

$$q^2 \ll M_W^2 \Rightarrow \frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{G_\mu}{\sqrt{2}}. \quad (17.16)$$

Взаимодействие калибровочных бозонов с нейтральными токами

$$\mathcal{L}_{EW}^{\text{NC}} = \frac{1}{2} \bar{L} \gamma^\alpha (g\tau^3 W_\alpha^3 - g' B_\alpha) L - g' \bar{\ell}_R \gamma^\alpha B_\alpha \ell_R = \frac{1}{2} \bar{\nu}_{\ell L} \gamma^\alpha (gW_\alpha^3 - g' B_\alpha) \nu_{\ell L}$$

$$- \frac{1}{2} \bar{\ell}_L \gamma^\alpha (gW_\alpha^3 + g' B_\alpha) \ell_L - g' \bar{\ell}_R \gamma^\alpha B_\alpha \ell_R \quad (17.17)$$

немного сложнее, однако представляет полную картину объединения слабых и электромагнитных взаимодействий. Например, из (17.17) следует, что левое нейтрино взаимодействует только с определенной комбинацией  $W_\alpha^3$  и  $B_\alpha$ , которая соответствует новой нейтральной частице —  $Z$ -бозону

$$Z_\alpha = \frac{gW_\alpha^3 - g'B_\alpha}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \quad (17.18)$$

Нормировочная константа

$$\bar{g} = \sqrt{g^2 + g'^2} \quad (17.19)$$

выбрана таким образом, чтобы сохранить нормировку волновой функции  $Z$ -бозона. Тогда часть лагранжиана взаимодействия (17.17) для нейтрино имеет вид

$$\mathcal{L}_\nu^{\text{NC}} = \frac{\bar{g}}{2} \bar{\nu}_{\ell L} \gamma^\alpha \nu_{\ell L} \cdot Z_\alpha. \quad (17.20)$$

Естественно предположить, что другая ортогональная комбинация  $W_\alpha^3$  и  $B_\alpha$  должна соответствовать электромагнитному полю

$$A_\alpha = \frac{g' W_\alpha^3 + g B_\alpha}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \quad (17.21)$$

Тогда мы можем ввести ортогональную матрицу смешивания

$$\begin{pmatrix} Z_\alpha \\ A_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\alpha^3 \\ B_\alpha \end{pmatrix} \quad (17.22)$$

и параметры смешивания

$$\cos \theta_W = \frac{g}{g'}, \quad \sin \theta_W = \frac{g'}{g}, \quad (17.23)$$

здесь  $\theta_W$  является углом смешивания Вайнберга (Steven Weinberg, 1933–2021). Запишем теперь часть лагранжиана взаимодействия (17.17) для заряженного лептона с полями  $Z_\alpha$  и  $A_\alpha$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\ell^{\text{NC}} &= -\frac{1}{2\bar{g}} \bar{\ell}_L \gamma^\alpha [g(g'A_\alpha + gZ_\alpha) + g'(gA_\alpha - g'Z_\alpha)] \ell_L - \frac{g'}{\bar{g}} \bar{\ell}_R \gamma^\alpha (gA_\alpha - g'Z_\alpha) \ell_R \\ &= -\frac{g g'}{\bar{g}} \bar{\ell} \gamma^\alpha \ell \cdot A_\alpha - \frac{\bar{g}}{2} (\bar{\ell}_L \gamma^\alpha \ell_L - 2 \sin^2 \theta_W \bar{\ell} \gamma^\alpha \ell) \cdot Z_\alpha \\ &\equiv -e \bar{\ell} \gamma^\alpha \ell \cdot A_\alpha + \frac{\bar{g}}{2} \bar{\ell} \gamma^\alpha (g_V^\ell - g_A^\ell \gamma^5) \ell \cdot Z_\alpha. \end{aligned} \quad (17.24)$$

Последнее равенство обеспечивает полезную связь между двумя неизвестными параметрами,  $g$  и  $\sin \theta_W$ , и известной константой электромагнитного взаимодействия  $e$  (1.2):

$$e = g \sin \theta_W. \quad (17.25)$$

При этом константы (16.1) нейтрального тока для заряженного лептона выражаются из (17.24) как

$$g_V^\ell = -\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W, \quad g_A^\ell = -\frac{1}{2}. \quad (17.26)$$

Сравнивая эти выражения с экспериментальными данными (16.18), получаем значение второго неизвестного параметра объединенной модели

$$\sin^2 \theta_W^{\text{exp}} = 0,2325 \pm 0,0085. \quad (17.27)$$

Теоретическое предсказание для  $g_A^\ell$  согласуется с его экспериментальным значением.

Чтобы получить общую формулу для векторной и аксиальной константы одного из кварков

$$Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad u_R, \quad d_R \quad (17.28)$$

или лептонов (17.9), воспользуемся операторным равенством (17.8). Запишем взаимодействие (17.17) калибровочных бозонов с нейтральными токами для произвольного поля  $\psi = u, d, \nu, l$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{EW}^{\text{NC}} &= \bar{\psi}_L \gamma^\alpha \left( g \frac{\tau^3}{2} W_\alpha^3 + g' \frac{Y}{2} B_\alpha \right) \psi_L + g' \bar{\psi}_R \gamma^\alpha \frac{Y}{2} B_\alpha \psi_R \\ &\stackrel{(17.8)}{=} \frac{1}{\bar{g}} \bar{\psi}_L \gamma^\alpha \left[ g(g'A_\alpha + gZ_\alpha) \frac{\tau^3}{2} + g'(gA_\alpha - g'Z_\alpha) \left( Q - \frac{\tau^3}{2} \right) \right] \psi_L \\ &\quad + \frac{g'}{\bar{g}} \bar{\psi}_R \gamma^\alpha (gA_\alpha - g'Z_\alpha) Q \psi_R \equiv e \bar{\psi} \gamma^\alpha Q \psi \cdot A_\alpha + \frac{\bar{g}}{2} \bar{\psi} \gamma^\alpha (g_V^\psi - g_A^\psi \gamma^5) \psi \cdot Z_\alpha. \end{aligned} \quad (17.29)$$

Тогда из последнего равенства получаем

$$g_V^\psi = \frac{\tau^3}{2} - 2Q \sin^2 \theta_W, \quad g_A^\psi = \frac{\tau^3}{2}. \quad (17.30)$$

Взаимодействие спинорного поля  $\psi$  с нейтральным бозоном  $Z$  зависит от его квантовых чисел и показано на рис. 40, а с электромагнитным полем  $A_\alpha$  — на рис. 2, где взаимодействие в последнем случае зависит от собственного значения оператора  $Q$ :  $ie\gamma^\alpha Q$ . Например, для кварка мы получаем взаимодействие в (10.7), а для отрицательно заряженного лептона — в (17.24). Явный вид констант нейтрального тока (17.30) для всех частиц представлен следующими формулами:

$$\begin{aligned} g_V^\nu &= \frac{1}{2}, \quad g_A^\nu = \frac{1}{2}; & g_V^u &= \frac{1}{2} - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W, \quad g_A^u = \frac{1}{2}; \\ g_V^\ell &= -\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W, \quad g_A^\ell = -\frac{1}{2}; & g_V^d &= -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W, \quad g_A^d = -\frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (17.31)$$

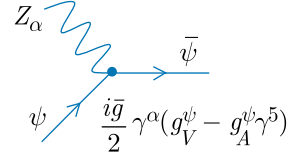


Рис. 40



## 18. МЕХАНИЗМ ПРИОБРЕТЕНИЯ МАССЫ ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ ЧАСТИЦАМИ

Начнем с интересной теоремы, предсказывающей появление безмассовых частиц в результате спонтанного нарушения непрерывной симметрии и носящей имя Голдстоуна (Jeffrey Goldstone, р. 3.09.1933). Ее формулировка такова: «Если лагранжиан инвариантен относительно непрерывного преобразования, то либо вакуумное состояние также инвариантно относительно этого преобразования, либо в спектре должны появиться бесспиновые частицы нулевой массы». Например, существование триплетов пионов с очень малой массой, равной нулю в случае безмассовых кварков (10.21), является результатом нарушения киральной симметрии. Мы проведем доказательство теоремы Голдстоуна, используя следующий лагранжиан для скалярного комплексного поля:

$$\mathcal{L} = (\partial_\alpha \varphi^\dagger) \partial^\alpha \varphi - V[\varphi^\dagger, \varphi], \quad V = \lambda(\varphi^\dagger \varphi)^2 - \mu^2 \varphi^\dagger \varphi, \quad (18.1)$$

который инвариантен относительно преобразования  $U(1)$ :

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}} \rightarrow \varphi e^{i\theta} = \frac{(\varphi_1 \cos \theta - \varphi_2 \sin \theta) + i(\varphi_1 \sin \theta + \varphi_2 \cos \theta)}{\sqrt{2}}. \quad (18.2)$$

Перепишем лагранжиан (18.1) в терминах двух действительных полей —  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  (18.2):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} (\partial_\alpha \varphi_i) \partial^\alpha \varphi_i - V[\varphi_1, \varphi_2], \\ V &= \frac{\lambda}{4} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2 - \frac{\mu^2}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2), \quad \lambda > 0. \end{aligned} \quad (18.3)$$

Константа взаимодействия скалярных полей  $\lambda$  должна быть положительной, чтобы обеспечить минимум потенциала  $V$ . Минимум этого потенциала можно определить из решений для его локальных экстремумов

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \varphi_1} = \lambda \varphi_1 (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \mu^2 \varphi_1 = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi_2} = \lambda \varphi_2 (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \mu^2 \varphi_2 = 0. \end{cases} \quad (18.4)$$

Если  $\mu^2 \leq 0$ , то система (18.4) имеет только тривиальное симметричное решение

$$\langle \varphi_1 \rangle_0 = \langle \varphi_2 \rangle_0 = 0, \quad (18.5)$$

что соответствует минимуму. Оно, конечно, инвариантно относительно преобразования (18.2), и спектр системы состоит из двух скалярных частиц с одинаковыми массами

$$m_{\varphi_1} = m_{\varphi_2} = \sqrt{-\mu^2}. \quad (18.6)$$

Если  $\mu^2 > 0$ , то система (18.4), кроме тривиального решения (18.5), которое на этот раз соответствует локальному максимуму, имеет бесконечно много других нетривиальных решений, соответствующих минимуму. Из всех возможных решений можно выбрать одно, которое фиксирует нарушение симметрии (18.2):

$$\langle \varphi_1^2 + \varphi_2^2 \rangle_0 = \frac{\mu^2}{\lambda} \rightarrow \langle \varphi_1 \rangle_0 \equiv v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \neq 0, \quad \langle \varphi_2 \rangle_0 = 0. \quad (18.7)$$

Такое нарушение называется спонтанным. Для исследования спектра системы с нарушенной симметрией вакуумного состояния необходимо выбрать новое поле  $\tilde{\varphi}_1$  с нулевым вакуумным средним

$$\tilde{\varphi}_1 = \varphi_1 - v \rightarrow \langle \tilde{\varphi}_1 \rangle_0 = 0. \quad (18.8)$$

Тогда лагранжиан (18.3) принимает вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha \tilde{\varphi}_1) \partial^\alpha \tilde{\varphi}_1 - \mu^2 \tilde{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} (\partial_\alpha \varphi_2) \partial^\alpha \varphi_2 - \frac{\lambda}{4} [(\tilde{\varphi}_1^2 + \varphi_2^2)^2 + 4v\tilde{\varphi}_1(\tilde{\varphi}_1^2 + \varphi_2^2) - v^4], \quad (18.9)$$

из чего можно сделать вывод, что одна частица является массивной, а другая безмассовой:

$$m_{\tilde{\varphi}_1} = \sqrt{2\mu^2} = \sqrt{2\lambda} v, \quad m_{\varphi_2} = 0. \quad (18.10)$$

Безмассовую частицу называют бозоном Голдстоуна, а массивную — бозоном Хиггса (рис. 41).

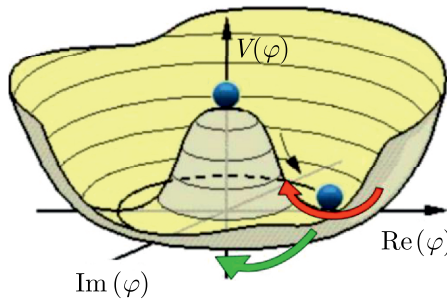


Рис. 41

Одна степень свободы движения в двумерном потенциальном поле  $V$  соответствует круговому движению (18.7) с одной и той же энергией, а значит, оно применимо к безмассовой голдстоуновской частице. А степень свободы, связанная с поперечными колебаниями, описывает массивный бозон Хиггса. Таким образом, при спонтанном нарушении симметрии возникают как массив-

ные, так и безмассовые скалярные частицы. Проблема в том, что в природе не существует безмассовых скалярных частиц и, согласно теореме Голдстоуна, спонтанное нарушение непрерывной симметрии приводит к нефизической реальности.

С другой стороны, калибровочная симметрия не позволяет ввести массивное векторное поле (17.1), не нарушая ее. Решение этих двух различных проблем нашли Браут (Robert Brout, 1928–2011), Энглер и Хиггс. Построим из скалярного лагранжиана (18.1), в случае спонтанного нарушения симметрии (18.7), калибровочно-инвариантный лагранжиан, добавив к нему калибровочное поле  $A_\alpha$ :

$$\mathcal{L} = (D_\alpha \varphi)^\dagger D^\alpha \varphi - V[\varphi^\dagger, \varphi] - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad (18.11)$$

где

$$D_\alpha \varphi = (\partial_\alpha - ie A_\alpha) \varphi \quad \text{и} \quad F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \quad (18.12)$$

— ковариантная производная и калибровочно-инвариантный тензор поля  $A_\alpha$  соответственно.

Выразим теперь комплексное поле  $\varphi(x)$  в лагранжиане (18.11) через новые поля  $h(x)$  и  $\theta(x)$ :

$$\varphi(x) = \frac{h(x) + v}{\sqrt{2}} e^{i\theta(x)}. \quad (18.13)$$

Тогда лагранжиан (18.11) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} [\partial_\alpha h - i(h+v) \partial_\alpha \theta + ie(h+v) A_\alpha] [\partial^\alpha h + i(h+v) \partial^\alpha \theta - ie(h+v) A^\alpha] \\ &- V[h] - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad \begin{matrix} V_\alpha = A_\alpha - \partial_\alpha \theta / e \\ F'_{\alpha\beta} = \partial_\alpha V_\beta - \partial_\beta V_\alpha \end{matrix} \quad \frac{1}{2} [\partial_\alpha h + ie(h+v) V_\alpha] [\partial^\alpha h - ie(h+v) V^\alpha] \\ &- V[h] - \frac{1}{4} F'_{\alpha\beta} F'^{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\alpha h) \partial^\alpha h - V[h] - \frac{1}{4} F'_{\alpha\beta} F'^{\alpha\beta} + \frac{e^2 v^2}{2} V_\alpha V^\alpha + e^2 \left( vh + \frac{h^2}{2} \right) V_\alpha V^\alpha. \end{aligned} \quad (18.14)$$

Примечательно, что последнее выражение не содержит поля  $\theta(x)$ , которое поглощается полем  $A_\alpha$  в результате калибровочного преобразования

$$V_\alpha = A_\alpha - \frac{1}{e} \partial_\alpha \theta. \quad (18.15)$$

Калибровка (18.15), при которой возникает новое векторное поле с массой  $V_\alpha$

$$M_V = ev, \quad (18.16)$$

а бозон Голдстоуна  $\theta(x)$  исчезает, называется унитарной.

Интересно посчитать степени свободы лагранжианов в (18.11) и в последней строке (18.14). Лагранжиан (18.11) содержит 2 степени свободы для скалярного поля и 2 степени свободы для калибровочного безмассового

векторного поля\*. Этот лагранжиан эквивалентен лагранжиану в унитарной калибровке, содержащий только одну степень свободы скалярного поля Хиггса  $h(x)$  и 3 степени свободы массивного векторного поля  $V_\alpha$ . Последнее слагаемое в (18.14) соответствует взаимодействию поля Хиггса с калибровочными полями (рис. 42).

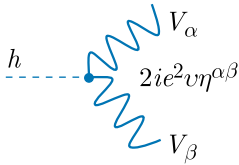


Рис. 42а

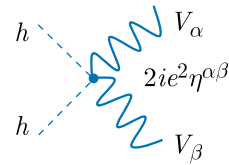


Рис. 42б

Диаграмма на рис. 42а отвечает за процесс распада бозона Хиггса на два калибровочных бозона. Этот процесс был одним из основных при открытии бозона Хиггса в 2012 г. в ЦЕРН.

---

\* Как известно, в силу калибровочной симметрии безмассовое векторное поле имеет две поперечные степени свободы.

## 19. СТАНДАРТНАЯ МОДЕЛЬ ГЛЭШОУ–ВАЙНБЕРГА–САЛАМА

Идея Глэшоу о добавлении абелева калибровочного поля  $B_\alpha(x)$ , которое будет взаимодействовать с фермионами, имеющими гиперзаряд (17.8), описывает только калибровочную группу объединенной модели, но не объясняет массы задействованных в ней частиц. Механизм, который мы обсуждали в предыдущей главе, предлагает способ приобретения массы элементарными частицами без нарушения калибровочной симметрии. Чтобы реализовать этот механизм для лагранжиана (17.14), необходимо добавить к нему лагранжиан калибровочных полей

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^3 W_{\alpha\beta}^i W^{i\alpha\beta}, \quad (19.1)$$

где

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha B_\beta - \partial_\beta B_\alpha, \quad W_{\alpha\beta}^i = \partial_\alpha W_\beta^i - \partial_\beta W_\alpha^i + g\varepsilon^{ijk}W_\alpha^j W_\beta^k \quad (19.2)$$

являются тензорами калибровочных полей  $B_\alpha$  и  $W_\alpha^i$ , а также лагранжиан комплексного дублета скалярных полей

$$\mathcal{L}_H = (D_\alpha H)^\dagger D^\alpha H - V[H^\dagger, H], \quad V = \lambda(H^\dagger H)^2 - \mu^2 H^\dagger H, \quad (19.3)$$

где гиперзаряды дублетов

$$H = \begin{pmatrix} H^+ \\ H^0 \end{pmatrix} : Y(H) = (+1) \left\{ \begin{pmatrix} 2(1-1/2) \\ 2(0+1/2) \end{pmatrix} \right\}, \quad (19.4)$$

$$H^\dagger = (H^- \bar{H}^0) : Y(H^\dagger) = (-1)$$

определяют их ковариантные производные (17.12)

$$D_\alpha H = \left( \partial_\alpha - ig\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\alpha - ig'\frac{1}{2}B_\alpha \right) H, \quad (19.5)$$

$$(D_\alpha H)^\dagger = H^\dagger \left( \overleftarrow{\partial}_\alpha + ig\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\alpha + ig'\frac{1}{2}B_\alpha \right).$$

Запишем теперь  $H$ -дублет (19.4) в терминах новых полей  $h(x)$  и  $\theta(x) = (\theta_1(x), \theta_2(x), \theta_3(x))$ :

$$H(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ h(x) + v \end{pmatrix} e^{i\theta(x) \cdot \frac{\vec{\tau}}{2}}. \quad (19.6)$$

В унитарной калибровке три степени свободы голдстоуновских бозонов  $\theta(x)$  должны исчезнуть и только поле Хиггса  $h(x)$  и вакуумное среднее

$$\langle H \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (19.7)$$

будут определять динамику системы. Например, массы калибровочных бозонов можно определить из одной из частей лагранжиана (19.3)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M &= \langle H^\dagger \rangle_0 \left( g \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\alpha + g' \frac{1}{2} B_\alpha \right) \left( g \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}^\alpha + g' \frac{1}{2} B^\alpha \right) \langle H \rangle_0 \\ &= \frac{v^2}{8} \left[ g^2 \vec{W}_\alpha \cdot \vec{W}^\alpha - 2gg' W_\alpha^3 B^\alpha + g'^2 B_\alpha B^\alpha \right] \\ &= \frac{g^2 v^2}{4} W_\alpha^+ W^{-\alpha} + \frac{\bar{g}^2 v^2}{8} Z_\alpha Z^\alpha. \end{aligned} \quad (19.8)$$

Это выражение обеспечивает безмассовость электромагнитного поля  $A_\alpha$  и предсказывает массы калибровочных бозонов  $W_\alpha^\pm$  и  $Z_\alpha$  и их отношение

$$M_A = 0, \quad M_W = \frac{gv}{2}, \quad M_Z = \frac{\bar{g}v}{2}, \quad \rightarrow \quad \frac{M_W}{M_Z} = \cos \theta_W \leq 1. \quad (19.9)$$

Это означает, что симметрия  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  нарушается до симметрии  $U(1)_{\text{em}}$  электромагнитного взаимодействия, в результате чего остается только один безмассовый калибровочный бозон — фотон, ответственный за сохранение заряда  $Q$ . Действительно, из  $2 + 3 \times 2 = 8$  степеней свободы безмассовых калибровочных бозонов и 4 скалярных степеней свободы в результате спонтанного нарушения симметрии в унитарной калибровке остается один безмассовый фотон с двумя степенями свободы, 3 массивных векторных бозона каждый с тремя степенями свободы и один бозон Хиггса с одной степенью свободы.

Используя формулы (12.25) и (19.9), получаем соотношение между эффективной константой распада мюона  $G_\mu$  и вакуумным средним  $v$  (19.7):

$$\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{1}{2v^2} \quad \rightarrow \quad v = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2} G_\mu}} \approx 246,22 \text{ ГэВ}. \quad (19.10)$$

Используя значения предсказанных масс (19.9), мы теперь можем получить эффективный лагранжиан нейтральных токов (16.1) из диаграммы на рис. 43 в полной аналогии с диаграммой для заряженных токов, приведенной на рис. 39:

$$\mathcal{L}_F^{\text{NC}} = (-i) \frac{1}{2} \left( \frac{i\bar{g}}{2} \right)^2 \bar{\nu}_\mu \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \nu_\mu \frac{-i\eta_{\alpha\beta}}{q^2 - M_Z^2} \bar{e} \gamma^\beta (g_V^e - g_A^e \gamma^5) e. \quad (19.11)$$

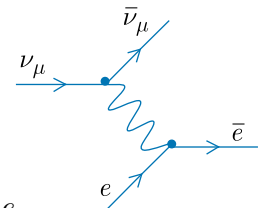


Рис. 43

Для малых переданных импульсов по сравнению с массой  $Z$ -бозона получаем, что эффективная константа нейтральных токов (16.1) совпадает с эффективной константой распада мюона  $G_\mu$ :

$$\frac{G_\mu^{\text{NC}}}{\sqrt{2}} = \frac{\bar{g}^2}{8M_Z^2} \rightarrow \rho = \frac{G_\mu^{\text{NC}}}{G_\mu} = 1. \quad (19.12)$$

Последнее равенство является очень важным, и поэтому даже вводится специальный параметр  $\rho$ , который в приближении Борна (Max Born, 1882–1970) равен единице. Используя соотношения (19.9), (19.10), (17.25) и (17.27), можно предсказать массы  $W^\pm$ - и  $Z$ -бозонов:

$$M_W = \frac{gv}{2} \underset{\alpha = \frac{e^2}{4\pi}}{g = \frac{e}{\sin \theta_W}} \sqrt{\frac{\pi\alpha}{\sin^2 \theta_W}} \cdot v \alpha^{-1} \approx 137 \frac{37,28 \text{ ГэВ}}{\sqrt{\sin^2 \theta_W}} \approx 77 \text{ ГэВ}, \quad (19.13)$$

$$M_Z = \frac{M_W}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_W}} \approx \frac{74,56 \text{ ГэВ}}{\sin 2\theta_W} \approx 88 \text{ ГэВ},$$

которые очень близки к их экспериментальным значениям (1.4)\*. Массу бозона Хиггса нельзя предсказать по формуле (18.10), не зная константы взаимодействия скалярных полей  $\lambda$ . Однако, зная экспериментальное значение массы бозона Хиггса (1.5), мы можем, наоборот, оценить его константу самодействия  $\lambda$  в лагранжиане (19.3):

$$\lambda = \frac{1}{2} \left( \frac{m_h}{v} \right)^2 \approx 0,129. \quad (19.14)$$

Фермионы также приобретают массу за счет вакуумного среднего поля Хиггса (19.7). Например, для заряженных лептонов масса возникает из  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  инвариантного лагранжиана

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F^\ell &= g_\ell \bar{L} H \ell_R + g_\ell \bar{\ell}_R H^\dagger L \Rightarrow \frac{g_\ell}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_L \bar{\ell}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ h + v \end{pmatrix} \ell_R + \text{h. c.} = g_\ell \frac{h + v}{\sqrt{2}} \bar{\ell} = \\ &= m_\ell \bar{\ell} \ell + \frac{m_\ell}{v} h \cdot \bar{\ell} \ell. \end{aligned} \quad (19.15)$$

Массы кварков получаются аналогично. Таким образом, мы получаем единое описание слабых и электромагнитных взаимодействий со многими теоретическими предсказаниями. Такое описание называется стандартной моделью Глэшоу–Вайнберга–Салама (Mohammad Abdus Salam, 1926–1996).

\* Разница обусловлена квантовыми поправками.

## 20. СВОЙСТВА ЗАРЯЖЕННЫХ ВЕКТОРНЫХ БОЗОНОВ

В этой главе мы изучим свойства  $W^\pm$ -бозонов, связанные с их распадами и рождением. Из диаграммы на рис. 38б получаем матричный элемент распада  $W^-$ -бозона  $W^- \rightarrow l^- + \bar{\nu}_l$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \frac{g}{2\sqrt{2}} \varepsilon_\alpha^\lambda(p) \cdot \bar{u}_l(k) \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) v_\nu(q), \\ \mathcal{M}^\dagger &= \frac{g}{2\sqrt{2}} \varepsilon_\beta^{*\lambda}(p) \cdot \bar{v}_\nu(q) \gamma^\beta (1 - \gamma^5) u_l(k),\end{aligned}\quad (20.1)$$

где соответствующие импульсы имеют такие же обозначения, как при распаде пиона в (9.14):

$$p = (M_W, \mathbf{0}), \quad k = (E, \mathbf{k}), \quad q = (q^0, \mathbf{q}). \quad (20.2)$$

Чтобы вычислить квадрат абсолютного значения матричного элемента (20.1), необходимо просуммировать по всем киральностям. Единственная новизна здесь состоит в том, что помимо суммирования по киральностям фермионов мы должны суммировать и по киральностям массивных векторных бозонов:

$$\sum_{\lambda=1,2,3} \varepsilon_\alpha^\lambda(p) \varepsilon_\beta^{*\lambda}(p) = -\eta_{\alpha\beta} + \frac{p_\alpha p_\beta}{M_W^2}, \quad (20.3)$$

где правая часть равенства фактически является числителем функции Грина в (17.4),

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda,\chi} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{g^2}{8} \left( -\eta_{\alpha\beta} + \frac{p_\alpha p_\beta}{M_W^2} \right) \text{Tr} \left[ \hat{k} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \hat{q} \gamma^\beta (1 - \gamma^5) \right] \\ &= g^2 \left( -\eta_{\alpha\beta} + \frac{p_\alpha p_\beta}{M_W^2} \right) L^{\alpha\beta}(k, q) = g^2 M_W^2.\end{aligned}\quad (20.4)$$

Здесь мы пренебрегли массами лептонов по сравнению с массами  $W^\pm$ -бозонов. Тогда парциальная вероятность распада на фермионную пару равна

$$\Gamma = \frac{\overline{\sum |\mathcal{M}|^2}}{2M_W} \Phi_2, \quad \Phi_2 = (2\pi)^4 \int \delta^{(4)}(p - k - q) \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E} \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3 2q_0}, \quad (20.5)$$

где для  $\overline{\sum |\mathcal{M}|^2}$ , в соответствии с (8.14), получаем значение

$$\overline{\sum |\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{3} \sum |\mathcal{M}|^2, \quad (20.6)$$



а  $\Phi_2$  (9.16) для двухчастичного распада при  $m_l^2 \ll M_W^2$  имеет вид

$$\Phi_2 \approx \frac{1}{8\pi}. \quad (20.7)$$

Используя предыдущие формулы для вероятности распада заряженного векторного бозона лептонной пары, получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_W^\ell &\equiv \Gamma(W^- \rightarrow \ell^- \bar{\nu}_\ell) = \Gamma(W^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e) = \Gamma(W^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu) \\ &= \Gamma(W^- \rightarrow \tau^- \bar{\nu}_\tau) = \frac{g^2 M_W}{48\pi} = \frac{G_\mu M_W^3}{6\pi\sqrt{2}} \approx 227,2 \text{ МэВ}. \end{aligned} \quad (20.8)$$

Теперь нам нужно обобщить лагранжиан (17.15) на случай взаимодействий с кварками:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q^{\text{CC}} = \frac{g}{2\sqrt{2}} \sum_{c=1,2,3}^{\text{color}} \sum_{i,j=1,2,3}^{\text{family}} & \left[ \bar{u}_i^c \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) V_{u_i d_j}^c d_j^c \cdot W_\alpha^+ \right. \\ & \left. + \bar{d}_i^c \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) V_{u_i d_j}^{*c} u_j^c \cdot W_\alpha^- \right]. \end{aligned} \quad (20.9)$$

Этот лагранжиан описывает распады

$$\begin{aligned} \Gamma(W^- \rightarrow d^- \bar{u}) &= 3 |V_{ud}|^2 \Gamma_W^\ell, & \Gamma(W^- \rightarrow s^- \bar{u}) &= 3 |V_{us}|^2 \Gamma_W^\ell, \\ \Gamma(W^- \rightarrow b^- \bar{u}) &= 3 |V_{ub}|^2 \Gamma_W^\ell \end{aligned} \quad (20.10)$$

и

$$\begin{aligned} \Gamma(W^- \rightarrow d^- \bar{c}) &= 3 |V_{cd}|^2 \Gamma_W^\ell, & \Gamma(W^- \rightarrow s^- \bar{c}) &= 3 |V_{cs}|^2 \Gamma_W^\ell, \\ \Gamma(W^- \rightarrow b^- \bar{c}) &= 3 |V_{cb}|^2 \Gamma_W^\ell, \end{aligned} \quad (20.11)$$

где коэффициент 3 возникает из-за суммирования по цвету. Распад на  $t$ -кварк запрещен, поскольку его масса больше массы  $W$ -бозона. Используя свойства унитарной матрицы смешивания  $V_{\text{CKM}}$  (13.7)

$$\begin{aligned} |V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2 + |V_{ub}|^2 &= 1, \\ |V_{cd}|^2 + |V_{cs}|^2 + |V_{cb}|^2 &= 1, \end{aligned} \quad (20.12)$$

получаем, что парциальная вероятность распада  $W$ -бозона на кварки равна

$$\Gamma_W^q \stackrel{d'=V_{ud}d+V_{us}s+V_{ub}b}{s'=V_{cd}d+V_{cs}s+V_{cb}b} \Gamma(W^- \rightarrow d'^- \bar{u}) + \Gamma(W^- \rightarrow s'^- \bar{c}) = 2 \cdot 3 \Gamma_W^\ell. \quad (20.13)$$

Отсюда мы можем оценить полную вероятность распада

$$\Gamma_W = (3 + 2 \cdot 3) \cdot \Gamma_W^\ell \approx 2,05 \text{ ГэВ}, \quad (20.14)$$

что хорошо согласуется с экспериментальным значением  $\Gamma_W^{\text{exp}} = 2,085 \pm 0,042 \text{ ГэВ}$ .

Давайте теперь обсудим рождение и детектирование заряженных векторных бозонов на адронном коллайдере, с помощью чего мы сможем подтвердить их существование. Выбор адронного коллайдера (встречные пучки: с.т.)

вместо ускорителя (фиксированная мишень: lab.) был сделан Руббиа специально для обеспечения максимальной эффективной энергии  $M$ :

$$k_{\bar{p}} + k'_p = Q : \begin{cases} \text{с.м.} & k_{\bar{p}} = (E, \mathbf{k}), k'_p = (E, -\mathbf{k}) \rightarrow M = \sqrt{Q^2} = 2E, \\ \text{lab.} & k_{\bar{p}} = (E, \mathbf{k}), k'_p = (m_p, \mathbf{0}) \rightarrow M = \sqrt{Q^2} \approx \sqrt{2m_p E} \end{cases} \quad (20.15)$$

для рождения новых массивных частиц в результате столкновения антипротонов и протонов при высоких энергиях. Но все имеет свою цену, и для обеспечения большого количества событий, так называемой светимости, на адронном коллайдере необходимо иметь очень интенсивные пучки. В результате адронных столкновений  $\bar{p} + p \rightarrow W + X$ , помимо  $W$ -бозона, рождается множество других частиц, которые нас не интересуют, и мы обозначим их буквой  $X$ , как при глубоконеупругом рассеянии.

Например, для рождения  $W^-$  сечение адронного процесса  $\sigma(\bar{p} + p \rightarrow W^- + X)$  можно выразить через сечение  $\tilde{\sigma}(\bar{u}_i + d_j \rightarrow W^-)$  партонного процесса  $\bar{u}_i(k) + d_j(k') \rightarrow W^-(q)$

$$\sigma(p + \bar{p} \rightarrow W^- + X) = \sum_{i,j} \int dx_1 dx_2 f_{u_i}(x_1, q^2) f_{d_j}(x_2, q^2) \times \tilde{\sigma}(\bar{u}_i + d_j \rightarrow W^-), \quad (20.16)$$

где параметры  $x_1$  и  $x_2$  обозначают части импульса (15.2), которые носят в антипротоне и протоне один из верхних антикварков  $\bar{u}_i$  ( $k = x_1 k_{\bar{p}}$ ) и один из нижних кварков  $d_j$  ( $k' = x_2 k_p$ ), а  $f_{u_i}(x_1, q^2)$  и  $f_{d_j}(x_2, q^2)$  являются их структурными функциями соответственно. Чтобы обнаружить рождение заряженных векторных бозонов на адронном коллайдере, нам необходимо выбрать специальные каналы их распада, чтобы мы могли отличить эту сигнатуру от множества других частиц  $X$ . Это возможно, если использовать процессы распада в лептонные пары  $W^- \rightarrow l^- + \bar{\nu}_l$  ( $l = e, \mu$ ), носящие имя Дрелла (Sidney David Drell, 1926–2016) и Яна (Tung-Mow Yan, р. 1937). В данном случае сигнатура события выглядит таким образом: среди всех рожденных частиц должен быть один высокоэнергетический заряженный лептон с большим поперечным импульсом и не должно быть обнаружено никаких частиц в противоположном ему направлении, которые, однако, должны присутствовать согласно закону сохранения импульса. Подразумевается, что этот импульс переносится необнаруженным нейтрино.

Матричный элемент процесса рождения и детектирования  $W^-$ -бозона:  $\bar{u} + d \rightarrow W^- \rightarrow l^- + \bar{\nu}_l$  можно записать из диаграммы, изображенной на рис. 44:

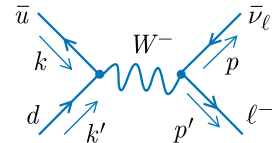


Рис. 44

$$\mathcal{M} = (-i) \left( \frac{ig}{2\sqrt{2}} \right)^2 V_{ud} \bar{v}_{u_c}(k) \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) u_{d_c}(k') \times \frac{(-i) (\eta^{\alpha\beta} - q^\alpha q^\beta / M_W^2)}{q^2 - M_W^2 + iM_W \Gamma_W} \bar{u}_\ell(p') \gamma_\beta (1 - \gamma^5) v_\nu(p). \quad (20.17)$$

В знаменателе функции Грина векторного бозона в (20.17) учтена его нестабильность, использующая полную вероятность его распада (20.14), согласно формуле Брейта (Gregory Breit, Григорий Альфредович Брейт-Шнайдер, 1899–1981) и Вигнера (Eugene Paul Wigner, 1902–1995). Член, пропорциональный переданному импульсу  $q$  в числителе функции Грина векторного бозона в (20.17), приводит к незначительному вкладу в матричный элемент, по отношению к массе заряженного бозона (1.4):

$$\begin{aligned} q^\alpha \bar{v}_u(k) \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) u_d(k') &= \bar{v}_u(k) (\hat{k} + \hat{k}') (1 - \gamma^5) u_d(k') \\ &= m_u \bar{v}_u(k) (1 - \gamma^5) u_d(k') + m_d \bar{v}_u(k) (1 + \gamma^5) u_d(k'), \end{aligned} \quad (20.18)$$

$$q^\beta \bar{u}_\ell(p') \gamma_\beta (1 - \gamma^5) v_\nu(p) = \bar{u}_\ell(p') (\hat{p} + \hat{p}') (1 - \gamma^5) v_\nu(p) = m_\ell \bar{u}_\ell(p') (1 - \gamma^5) v_\nu(p).$$

Суммируя по цвету кварков и киральностям всех фермионов, получаем

$$\begin{aligned} \sum |\mathcal{M}|^2 &= \frac{3g^4 |V_{ud}|^2}{64} \text{Tr} \left[ \hat{k} \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) \hat{k}' \gamma_\beta (1 - \gamma^5) \right] \cdot |\chi|^2 \\ &\quad \times \text{Tr} \left[ \hat{p}' \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \hat{p} \gamma^\beta (1 - \gamma^5) \right] \\ &= 3g^4 |V_{ud}|^2 [L_{\alpha\beta}(k, k') - i\varepsilon_{\alpha\beta kk'}] \cdot [L^{\alpha\beta}(p, p') + i\varepsilon^{\alpha\beta pp'}] \cdot |\chi|^2 \\ &= 12g^4 |V_{ud}|^2 (kp')(k'p) \cdot |\chi|^2, \end{aligned} \quad (20.19)$$

где  $\chi$  обозначает дробь со знаменателем функции Грина векторного бозона в (20.17):

$$\chi = \frac{1}{q^2 - M_W^2 + iM_W\Gamma_W}. \quad (20.20)$$

На рис. 45 показано резонансное распределение  $W$ -бозона  $M_W^2 \Gamma_W^2 |\chi|^2$  в зависимости от  $\sqrt{q^2}$ . Ширина резонансного пика на половине его высоты

$$\sqrt{q_+^2} - \sqrt{q_-^2} = \sqrt{M_W^2 + M_W\Gamma_W} - \sqrt{M_W^2 - M_W\Gamma_W} \approx \Gamma_W$$

при  $M_W \gg \Gamma_W$  примерно равна полной вероятности распада.

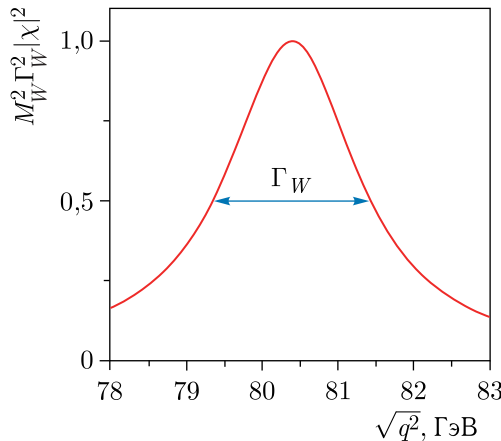


Рис. 45

При расчете сечения этого процесса необходимо учитывать усреднение не только по киральностям исходных кварков, но и по их цвету:

$$d\tilde{\sigma} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} \frac{\sum |\mathcal{M}|^2}{4 |kk'|} d\Phi, \quad (20.21)$$

$$d\Phi = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + p - q) \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3 2p'_0}.$$

При высоких энергиях сталкивающихся адронов  $E \gg m_q, m_l$  в системе центра масс

$$\begin{aligned} k &= (k_0, \mathbf{k}) = (E, \mathbf{k}), & p &= (p_0, \mathbf{p}) = (E, \mathbf{p}), \\ k' &= (k'_0, \mathbf{k}') = (E, -\mathbf{k}), & p' &= (p'_0, \mathbf{p}') = (E, -\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (20.22)$$

мы можем рассматривать фермионы как безмассовые частицы,  $E \approx |\mathbf{k}| \approx |\mathbf{p}|$ . Угол рассеяния в этой системе показан на рис. 46.

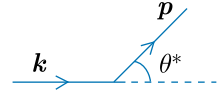


Рис. 46

Фазовый объем в (20.21) можно рассчитать, как в (16.6):

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{d^3\mathbf{p}}{2p_0} \int \delta^{(4)}(p' + p - q) \theta(p'_0) \delta(p'^2 - m_l^2) d^4p' = \frac{\delta(q^2 - 2qp)}{(2\pi)^2 2p_0} \\ &\stackrel{\text{c.m.}}{=} \frac{\delta(4k_0^2 - 4k_0 p_0) p_0 dp_0 d \cos \theta^*}{4\pi} = \frac{d \cos \theta^*}{16\pi}, \quad k_0 = p_0 = E. \end{aligned} \quad (20.23)$$

Тогда из дифференциального сечения (20.21) получим полное сечение

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_W &\stackrel{q^2=4E^2}{=} \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} \cdot \frac{3}{128\pi} \cdot \frac{g^4 |V_{ud}|^2 q^2}{(q^2 - M_W^2)^2 + M_W^2 \Gamma_W^2} \int_{-1}^1 (1 + \cos \theta^*)^2 d \cos \theta^* \\ &= \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} \cdot \frac{1}{16\pi} \cdot \frac{g^4 |V_{ud}|^2 q^2}{(q^2 - M_W^2)^2 + M_W^2 \Gamma_W^2} \\ &\stackrel{\Gamma_W \ll M_W}{=} \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} \cdot \frac{g^4 |V_{ud}|^2 M_W}{16 \Gamma_W} \delta(q^2 - M_W^2), \end{aligned} \quad (20.24)$$

где в последнем уравнении мы использовали приближение нулевой ширины распада. Мы можем записать полное сечение (20.24), также используя (20.8) и (20.10), выразив его только через наблюдаемые:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_W &= \frac{\overbrace{2J+1}^3}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} \frac{4\pi}{M_W^2} \frac{4M_W^2 \Gamma_W^i \Gamma_W^\ell}{(q^2 - M_W^2)^2 + M_W^2 \Gamma_W^2} \stackrel{\Gamma_W \ll M_W}{=} \frac{4\pi^2}{3} \frac{\Gamma_W^i \Gamma_W^\ell}{M_W \Gamma_W} \delta(q^2 - M_W^2) \\ &= \frac{\sqrt{2} \pi G_\mu M_W^2}{27} \delta(q^2 - M_W^2), \end{aligned} \quad (20.25)$$

где  $J$  — спин промежуточного бозона, а  $\Gamma_W^i$  и  $\Gamma_W^\ell$  — его ширины распада в начальном и конечном состояниях.

Сечение процесса  $\bar{p} + p \rightarrow W^- + X \rightarrow l^- + \bar{\nu}_l + X$  можно вычислить по формулам (20.16) и (20.25):

$$\begin{aligned} \sigma(p + \bar{p} \rightarrow W^- \rightarrow \ell^- \bar{\nu}_\ell) &= \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi G_\mu}{27} \int \delta(x_1 x_2 - \tau) \left[ x_1 f_u(x_1, M_W^2) dx_1 \right] \left[ x_2 f_d(x_2, M_W^2) dx_2 \right], \end{aligned} \quad (20.26)$$

где мы учли, что для безмассовых кварков — партонов  $q^2 = x_1 x_2 Q^2$ , и ввели переменную  $\tau = M_W^2 / Q^2$ . Из (15.29) мы знаем только интегральные значения  $U$  и  $D$ , но не знаем значение интеграла в (20.26). Поэтому вводится коэффициент

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{UD} \int \delta(x_1 x_2 - \tau) \left[ x_1 f_u(x_1, M_W^2) dx_1 \right] \left[ x_2 f_d(x_2, M_W^2) dx_2 \right] \\ &\quad \underset{\xi=x_1-x_2}{\overset{\tau=x_1 x_2}{=}} \frac{1}{UD} \int_{-1+\tau}^{1-\tau} \frac{x_1 f_u(x_1, M_W^2) x_2 f_d(x_2, M_W^2)}{\sqrt{\xi^2 + 4\tau}} d\xi, \end{aligned} \quad (20.27)$$

и полное сечение рассчитывается как

$$\sigma(p + \bar{p} \rightarrow W^- \rightarrow \ell^- \bar{\nu}_\ell) = K \cdot \frac{\sqrt{2}\pi G_\mu}{27} UD \approx K \cdot 33 \text{ пб}. \quad (20.28)$$

Из (20.27) видно, что малое  $\tau$  увеличивает коэффициент  $K$  и полное сечение (20.28). Например, для энергии в системе центра масс 540 ГэВ на Super Proton Synchrotron (SPS)  $p\bar{p}$ -коллайдере в ЦЕРН для  $\tau = M_W^2 / (540 \text{ ГэВ})^2 \approx 0,022$  получаем  $K \approx 6$ . Именно на этом коллайдере с пиковой  $L_{\text{peak}} \approx 5 \times 10^{28} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$  и  $\int L dt \approx 20 \text{ нб}^{-1}$  интегральной светимостями в 1982 г. были открыты  $W$ -бозоны. При полном сечении

$$\sigma_{\text{SPS}}(p + \bar{p} \rightarrow W^\pm \rightarrow e^\pm \nu_e) \approx 400 \text{ пб} = 4 \cdot 10^{-34} \text{ см}^2 \quad (20.29)$$

коллораации UA1 и UA2 детектировали 6 и 4 событий распадов  $W$ -бозонов соответственно.

## 21. СВОЙСТВА НЕЙТРАЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ БОЗОНОВ

Из диаграммы на рис. 40 получаем матричный элемент распада нейтрального  $Z$ -бозона на произвольные фермион-антифермионные пары, описываемые спинорными полями  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \frac{\bar{g}}{2} \varepsilon_{\alpha}^{\lambda}(q) \cdot \bar{u}_{\psi}(p) \gamma^{\alpha} (g_V - g_A \gamma^5) u_{\psi}(p'), \\ \mathcal{M}^{\dagger} &= \frac{\bar{g}}{2} \varepsilon_{\beta}^{*\lambda}(q) \cdot \bar{v}_{\psi}(p') \gamma^{\beta} (g_V - g_A \gamma^5) u_{\psi}(p),\end{aligned}\quad (21.1)$$

где параметры  $g_V$  и  $g_A$  приведены в (17.30), а  $\varepsilon_{\alpha}^{\lambda}(q)$  описывает поляризованный вектор нейтрального массивного векторного бозона. Вычислим квадрат модуля матричного элемента в приближении  $m_{\psi} \ll M_Z$ , суммируя по киральностям всех частиц:

$$\begin{aligned}\sum |\mathcal{M}_{\psi}|^2 &= \frac{\bar{g}^2}{4} \left( -\eta_{\alpha\beta} + \frac{q_{\alpha} q_{\beta}}{M_Z^2} \right) \text{Tr} \left[ \hat{p} \gamma^{\alpha} (g_V - g_A \gamma^5) \hat{p}' \gamma^{\beta} (g_V - g_A \gamma^5) \right] \\ &= \bar{g}^2 (g_V^2 + g_A^2) \left( -\eta_{\alpha\beta} + \frac{q_{\alpha} q_{\beta}}{M_Z^2} \right) L^{\alpha\beta}(p, p') = \bar{g}^2 (g_V^2 + g_A^2) M_Z^2.\end{aligned}\quad (21.2)$$

Парциальная вероятность распада равна

$$\Gamma(Z \rightarrow \psi\bar{\psi}) = \frac{1}{3} \frac{\sum |\mathcal{M}_{\psi}|^2}{2M_Z \cdot 8\pi},\quad (21.3)$$

где множитель  $1/3$  соответствует усреднению по спину векторного бозона, а фазовый объем берется из формулы (20.7). Тогда для распада на нейтрино получаем

$$\Gamma_Z^{\nu_e} = \Gamma_Z^{\nu_e} = \Gamma_Z^{\nu_{\mu}} = \Gamma_Z^{\nu_{\tau}} = \frac{\bar{g}^2 M_Z}{96\pi} = \frac{G_{\mu} M_Z^3}{12\sqrt{2}\pi} \approx 166 \text{ МэВ}.\quad (21.4)$$

Вероятность распада на заряженные лептоны равна

$$\begin{aligned}\Gamma_Z^{\ell} = \Gamma_Z^e = \Gamma_Z^{\mu} = \Gamma_Z^{\tau} &= 2 \left[ (g_V^{\ell})^2 + (g_A^{\ell})^2 \right] \Gamma_Z^{\nu_e} \\ &= 2 \left[ \left( -\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W \right)^2 + \frac{1}{4} \right] \Gamma_Z^{\nu_e} \approx 83,3 \text{ МэВ},\end{aligned}\quad (21.5)$$

что хорошо согласуется с экспериментальным значением\*

$$\Gamma_Z^{\ell \text{exp}} = 83,91 \pm 0,12 \text{ МэВ.} \quad (21.6)$$

Для распада на нижние кварки получаем следующую вероятность:

$$\begin{aligned} \Gamma_Z^d = \Gamma_Z^s = \Gamma_Z^b &= 2 \left[ (g_V^d)^2 + (g_A^d)^2 \right] \Gamma_Z^{\nu \ell} \\ &= 3 \cdot 2 \left[ \left( -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \right)^2 + \frac{1}{4} \right] \Gamma_Z^{\nu \ell} \approx \frac{13}{6} \Gamma_Z^{\nu \ell}. \end{aligned} \quad (21.7)$$

Распад на верхние кварки возможен только для  $u$ - и  $c$ -кварков, поскольку масса  $t$ -кварка больше массы  $Z$ -бозона:

$$\begin{aligned} \Gamma_Z^u = \Gamma_Z^c &= 2 \left[ (g_V^u)^2 + (g_A^u)^2 \right] \Gamma_Z^{\nu \ell} \\ &= 3 \cdot 2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W \right)^2 + \frac{1}{4} \right] \Gamma_Z^{\nu \ell} \approx \frac{5}{3} \Gamma_Z^{\nu \ell}, \quad m_t > M_Z : \Gamma_Z^t = 0. \end{aligned} \quad (21.8)$$

Таким образом, вероятность распада на адроны равна

$$\Gamma_Z^{\text{had}} \approx \left( 2 \cdot \frac{5}{3} + 3 \cdot \frac{13}{6} \right) \cdot \Gamma_Z^{\nu \ell} = \frac{59}{6} \cdot \Gamma_Z^{\nu \ell}, \quad (21.9)$$

а ее отношение к лептонной вероятности распада

$$R_h = \frac{\Gamma_Z^{\text{had}}}{\Gamma_Z^{\ell}} \approx 19,7 \quad (21.10)$$

можно сравнить с экспериментальным значением

$$R_h^{\text{exp}} = 20,804 \pm 0,050. \quad (21.11)$$

В конечном итоге, теоретическая полная вероятность распада  $Z$ -бозона

$$\Gamma_Z^{\text{tot}} \approx \frac{43}{3} \cdot \Gamma_Z^{\nu \ell} \approx 2,4 \text{ ГэВ} \quad (21.12)$$

хорошо согласуется с экспериментальным значением

$$\Gamma_Z^{\text{exp}} = 2,4952 \pm 0,0023 \text{ ГэВ.} \quad (21.13)$$

Зная полную вероятность распада  $Z$ -бозона, мы можем определить его невидимую часть, связанную с распадом на нейтрино (21.4), которые ускользают

---

\* В дальнейшем мы будем сравнивать значения только в борновском приближении без радиационных поправок.

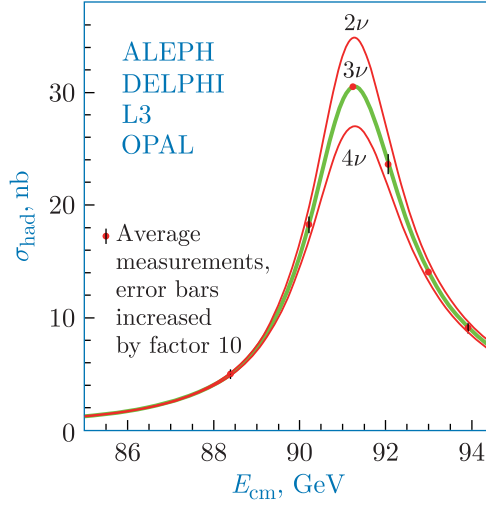


Рис. 47

незамеченными (рис. 47\*):

$$\Gamma_Z^{\text{tot}} = \Gamma_Z^{\text{inv}} + 3\Gamma_Z^\ell + \Gamma_Z^{\text{had}},$$

$$\left. \frac{\Gamma_Z^{\text{inv}}}{\Gamma_Z^\ell} \right|_{\text{exp}} \approx \frac{1}{0,0337} - 3 - 20,804 \approx 5,9 \approx 3 \left. \frac{\Gamma_Z^{\nu_\ell}}{\Gamma_Z^\ell} \right|_{SM} \rightarrow N_\nu = 3. \quad (21.14)$$

Последнее экспериментальное значение для числа типов нейтрино равно

$$N_\nu^{\text{exp}} = 2,9963 \pm 0,0074. \quad (21.15)$$

Рождение и детектирование нейтральных калибровочных бозонов с наилучшей точностью может быть осуществлено на лептонных коллайдерах. Сечение процесса можно найти по формуле (20.25):

$$\sigma_Z = \frac{\overbrace{2S+1}^3}{2 \cdot 2} \frac{4\pi}{M_Z^2} \frac{4M_Z^2 \Gamma_Z^\ell \Gamma_Z}{(q^2 - M_Z^2)^2 + M_Z^2 \Gamma_Z^2}, \quad (21.16)$$

которое в резонансе имеет значение

$$\begin{aligned} q^2 = M_Z^2 &\Rightarrow \frac{12\pi}{M_Z^2} \frac{\Gamma_Z^\ell}{\Gamma_Z} \approx 6 \cdot 10^{-32} \text{ см}^2. \end{aligned} \quad (21.17)$$

В 1989 г. в ЦЕРН начал работать Large Electron-Positron (LEP) коллайдер с пиковой светимостью  $L_{\text{peak}} \sim 10^{32} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ , что означает производство шести  $Z$ -бозонов в секунду. Поэтому LEP называют фабрикой  $Z$ -бозонов.

В этой главе мы рассмотрим дополнительно интерференцию фотона и  $Z$ -бозона для процесса  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  (рис. 48), приводящую к  $P$ -нечетным

\* Этот рисунок заимствован из статьи *ALEPH, DELPHI, L3, OPAL, SLD Collaborations, LEP Electroweak Working Group and SLD Electroweak and Heavy Flavour Groups* (Phys. Rep. **427** (2006) 257).



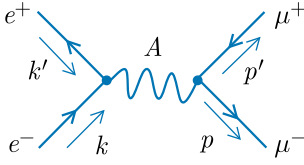


Рис. 48а

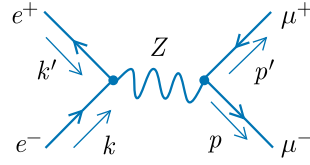


Рис. 48б

эффектам и снимающую неопределенность в определении констант  $g_V^e$  и  $g_A^e$  (16.17).

При высоких энергиях сталкивающихся лептонов  $E \gg m_e, m_\mu$  в системе центра масс

$$\begin{aligned} k &= (E, \mathbf{k}), & p &= (E, \mathbf{p}), \\ k' &= (E, -\mathbf{k}), & p' &= (E, -\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (21.18)$$

можем считать фермионы безмассовыми частицами,  $E \approx |\mathbf{k}| \approx |\mathbf{p}|$ . Матричный элемент суммы процессов двух диаграмм, изображенных на рис. 48, имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= (-i) (-ie)^2 \bar{v}_e(k') \gamma_\alpha u_e(k) \frac{(-i)}{q^2} \bar{u}_\mu(p) \gamma^\alpha v_\mu(p') \\ &+ (-i) \left( \frac{i\bar{g}}{2} \right)^2 \bar{v}_e(k') \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma^5) u_e(k) \frac{(-i)}{q^2 - M_Z^2 + iM_Z \Gamma_Z} \\ &\quad \times \bar{u}_\mu(p) \gamma^\alpha (g_V - g_A \gamma^5) v_\mu(p') \\ &= \frac{e^2}{q^2} \left[ \bar{v}_e(k') \gamma_\alpha u_e(k) \cdot \bar{u}_\mu(p) \gamma^\alpha v_\mu(p') \right. \\ &\quad \left. + \chi \cdot \bar{v}_e(k') \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma^5) u_e(k) \cdot \bar{u}_\mu(p) \gamma^\alpha (g_V - g_A \gamma^5) v_\mu(p') \right], \end{aligned} \quad (21.19)$$

где мы ввели резонансную функцию

$$\chi = \frac{1}{\sin^2 2\theta_W} \frac{q^2}{q^2 - M_Z^2 + iM_Z \Gamma_Z}. \quad (21.20)$$

Тогда квадрат модуля матричного элемента после усреднения по киральностям начальных частиц и суммирования по киральностям промежуточной и конечных частиц будет иметь вид

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{1}{4} \frac{e^4}{q^4} \left\{ \text{Tr} \left[ \hat{k}' \gamma_\alpha \hat{k} \gamma_\beta \right] \text{Tr} \left[ \hat{p} \gamma^\alpha \hat{p}' \gamma^\beta \right] \right. \\ &\quad + \chi \cdot \text{Tr} \left[ \hat{k} \gamma_\beta \hat{k}' \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma^5) \right] \text{Tr} \left[ \hat{p}' \gamma^\beta \hat{p} \gamma^\alpha (g_V - g_A \gamma^5) \right] \\ &\quad + \chi^* \cdot \text{Tr} \left[ \hat{k}' \gamma_\alpha \hat{k} \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma^5) \right] \text{Tr} \left[ \hat{p} \gamma^\alpha \hat{p}' \gamma^\beta (g_V - g_A \gamma^5) \right] \\ &\quad + |\chi|^2 \cdot \text{Tr} \left[ \hat{k}' \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma^5) \hat{k} \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma^5) \right] \\ &\quad \left. \times \text{Tr} \left[ \hat{p} \gamma^\alpha (g_V - g_A \gamma^5) \hat{p}' \gamma^\beta (g_V - g_A \gamma^5) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4e^4}{q^4} \left\{ L_{\alpha\beta}(k, k') L^{\alpha\beta}(p, p') + 2\text{Re } \chi [g_V L_{\alpha\beta}(k, k') + i g_A \varepsilon_{\alpha\beta k k'}] \right. \\
&\times \left[ g_V L^{\alpha\beta}(p, p') - i g_A \varepsilon^{\alpha\beta p p'} \right] + |\chi|^2 \left[ (g_V^2 + g_A^2) L_{\alpha\beta}(k, k') + 2i g_V g_A \varepsilon_{\alpha\beta k k'} \right] \\
&\quad \times \left[ (g_V^2 + g_A^2) L^{\alpha\beta}(p, p') - 2i g_V g_A \varepsilon^{\alpha\beta p p'} \right] \left. \right\} \\
&\quad \stackrel{q^2=4E^2}{=} \frac{e^4}{2E^4} \left\{ [(kp)(k'p') + (k'p)(kp)] \right. \\
&\quad + 2\text{Re } \chi \left( g_V^2 [(kp)(k'p') + (k'p)(kp)] - g_A^2 [(kp)(k'p') - (k'p)(kp)] \right) \\
&\quad \left. + |\chi|^2 \left[ (g_V^2 + g_A^2)^2 [(kp)(k'p') + (k'p)(kp)] - 4g_V^2 g_A^2 [(kp)(k'p') - (k'p)(kp)] \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{21.21}$$

Скалярные произведения в (21.21) можно вычислить как

$$\begin{aligned}
(kp) &= (k'p') = E^2(1 - \cos \theta^*), & (k'p) &= (kp) = E^2(1 + \cos \theta^*); \\
(kp)(k'p') + (k'p)(kp) &= 2E^4(1 + \cos^2 \theta^*), & & \\
(k'p)(kp) - (kp)(k'p') &= 4E^4 \cos \theta^*, & &
\end{aligned} \tag{21.22}$$

где угол рассеяния  $\theta^*$  в системе центра масс определен на рис. 46. Таким образом, мы получаем окончательный вид для квадрата модуля матричного элемента (21.21)

$$\begin{aligned}
\overline{\sum |\mathcal{M}|^2} &= e^4 \left\{ (1 + \cos^2 \theta^*) + 2\text{Re } \chi [g_V^2 (1 + \cos^2 \theta^*) + 2g_A^2 \cos \theta^*] \right. \\
&\quad \left. + |\chi|^2 \left[ (g_V^2 + g_A^2)^2 (1 + \cos^2 \theta^*) + 8g_V^2 g_A^2 \cos \theta^* \right] \right\}, \tag{21.23}
\end{aligned}$$

где первое слагаемое в скобках соответствует обмену с фотоном (рис. 48а), второе учитывает интерференцию фотона с  $Z$ -бозоном, а последнее соответствует обмену с  $Z$ -бозоном (рис. 48б).

Дифференциальное сечение процесса имеет вид

$$d\sigma = \frac{\overline{\sum |\mathcal{M}|^2}}{4 |kk'|} d\Phi = \frac{\overline{\sum |\mathcal{M}|^2}}{128\pi E^2} d\cos \theta^*, \tag{21.24}$$

где фазовый объем был вычислен в (20.23). Для нахождения  $P$ -нечетных эффектов определим сечения рассеяния  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  вперед:

$$\begin{aligned}
\sigma_F &= \int_0^1 \frac{d\sigma}{d\cos \theta^*} d\cos \theta^* \\
&= \frac{\pi\alpha^2}{6E^2} \left\{ 1 + 2 \left[ g_V^2 + \frac{3g_A^2}{4} \right] \text{Re } \chi + \left[ (g_V^2 + g_A^2)^2 + 3g_V^2 g_A^2 \right] |\chi|^2 \right\} \tag{21.25}
\end{aligned}$$

и назад:

$$\begin{aligned} \sigma_B &= \int_{-1}^0 \frac{d\sigma}{d \cos \theta^*} d \cos \theta^* \\ &= \frac{\pi \alpha^2}{6E^2} \left\{ 1 + 2 \left[ g_V^2 - \frac{3g_A^2}{4} \right] \operatorname{Re} \chi + \left[ (g_V^2 + g_A^2)^2 - 3g_V^2 g_A^2 \right] |\chi|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (21.26)$$

Тогда мы можем определить  $P$ -нечетную асимметрию

$$A_{FB} = \frac{\sigma_F - \sigma_B}{\sigma_F + \sigma_B} = \frac{3}{2} \frac{g_A^2 \operatorname{Re} \chi + 2g_V^2 g_A^2 |\chi|^2}{1 + 2g_V^2 \operatorname{Re} \chi + (g_V^2 + g_A^2)^2 |\chi|^2}, \quad (21.27)$$

которая показана на рис. 49\* в сравнении с экспериментальными данными и в зависимости от лоренц-инвариантной переменной Мандельштама (Stanley Mandelstam, 1928–2016)  $s = q^2$ . Из сравнения с экспериментальными данными получаем неравенство  $g_A^2 > g_V^2$ , что позволяет окончательно выбрать одно решение (16.18) из двух возможных в (16.17).

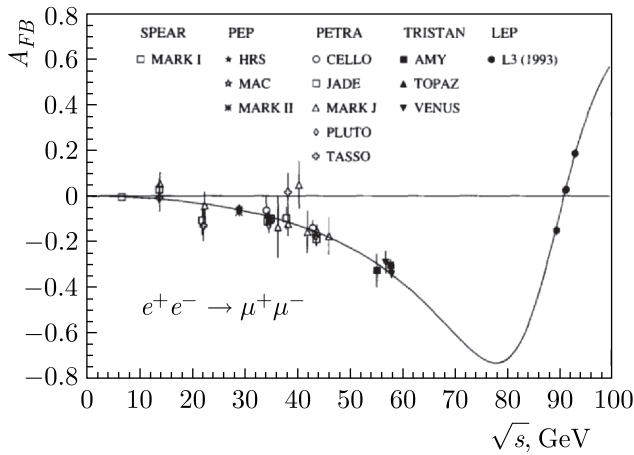


Рис. 49

\* Этот рисунок заимствован из статьи *Mnich J.* (Phys. Rep. **271** (1996) 181).

## 22. СВОЙСТВА БОЗОНА ХИГГСА

В этой последней главе мы рассмотрим необычные свойства последней открытой элементарной частицы — бозона Хиггса. Согласно формуле (19.14) эта частица взаимодействует с фермионами с силой, пропорциональной их массе  $m/v$ , где  $v$  — вакуумное среднее (19.10). Например, наибольшее значение имеет взаимодействие бозона Хиггса с  $t$ -кварком,  $m_t/v \approx 0,7 \approx 1/\sqrt{2}$ . Таким образом, аннигиляция пар  $t\bar{t}$  с большой вероятностью приводит к возникновению бозона Хиггса (рис. 50а). Как мы узнали в конце гл. 15, половину импульса протона несут глюоны, которые при больших энергиях могут породить виртуальные  $t$ -кварки. Данный процесс является доминирующим процессом рождения бозонов Хиггса на Large Hadron Collider (LHC) в ЦЕРН.

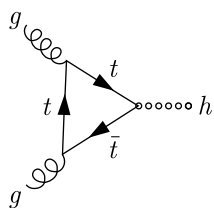


Рис. 50а

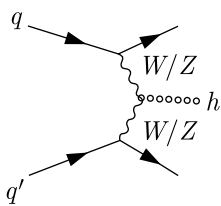


Рис. 50б

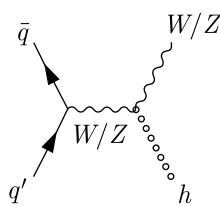


Рис. 50в

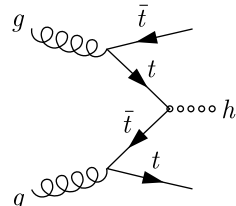


Рис. 50г

Диаграмма на рис. 42а описывает как рождение бозона Хиггса при аннигиляции калибровочных бозонов (рис. 50б), так и испускание бозона Хиггса (рис. 50в) калибровочным полем, аналогичное тормозному излучению фотонов. Эти процессы имеют меньшую вероятность, чем глюон-глюонное слияние через петлю  $t$ -кварков (рис. 50а). Кроме того, энергия протонных пучков LHC достаточна также для рождения, кроме бозона Хиггса, еще и пары  $t\bar{t}$  кварков (рис. 50г). Однако из-за их большой массы этот процесс еще менее вероятен, чем предыдущие. На сегодня все эти процессы рождения бозона Хиггса обнаружены на LHC и дают независимую информацию о его свойствах.

Помимо рождения бозона Хиггса нам необходимо также изучить процессы его обнаружения по продуктам его распада. Поскольку масса  $t$ -кварка больше массы бозона Хиггса, его распад на пару  $t\bar{t}$  кварков запрещен. Поэтому его распад происходит в основном на пару  $b\bar{b}$  кварков, которые имеют вторую по величине силу взаимодействия с бозоном Хиггса. Вычислим вероятность процесса распада бозона Хиггса на произвольную пару фермионов, описываемую полями  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ . Разумеется, масса фермиона должна быть меньше половины

массы бозона Хиггса. Матричный элемент этого процесса и его эрмитово сопряженный имеют очень простой вид

$$\mathcal{M} = \frac{m_\psi}{v} \bar{u}(p) v(p'), \quad \mathcal{M}^\dagger = \frac{m_\psi}{v} \bar{v}(p') u(p). \quad (22.1)$$

Беря их произведение и суммируя по киральностям фермионов, получаем

$$\begin{aligned} \sum |\mathcal{M}|^2 &= \frac{m_\psi^2}{v^2} \text{Tr} [(\hat{p} + m_\psi)(\hat{p}' - m_\psi)] \\ &= \frac{2m_\psi^2 m_h^2}{v^2} \left(1 - \frac{4m_\psi^2}{m_h^2}\right) \stackrel{(19.10)}{=} 2\sqrt{2} G_\mu m_\psi^2 m_h^2 \left(1 - \frac{4m_\psi^2}{m_h^2}\right), \end{aligned} \quad (22.2)$$

где во втором равенстве мы использовали кинематическую зависимость  $2(pp') = m_h^2 - 2m_\psi^2$ . Тогда вероятность распада определяется формулой вида (9.15)

$$\Gamma_\psi = \frac{\sum |\mathcal{M}|^2}{2m_h} \Phi_2, \quad \Phi_2 = (2\pi)^4 \int \delta^{(4)}(q - p - p') \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3 2p'_0}, \quad (22.3)$$

где  $q$  — импульс бозона Хиггса. Для двухчастичного распада фазовый объем является константой, которую можно вычислить, например, в системе покоя бозона Хиггса  $q = (m_h, \mathbf{0})$ :

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \frac{1}{8\pi^2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p_0} \delta^{(4)}(q - p - p') \theta(p'_0) \delta(p'^2 - m_\psi^2) d^4 p' \stackrel{d^3\mathbf{p}=4\pi|\mathbf{p}|p_0 dp_0}{=} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dp_0 \sqrt{p_0^2 - m_\psi^2} \delta(m_h^2 - 2m_h p_0) = \frac{1}{8\pi} \sqrt{1 - \frac{4m_\psi^2}{m_h^2}}. \end{aligned} \quad (22.4)$$

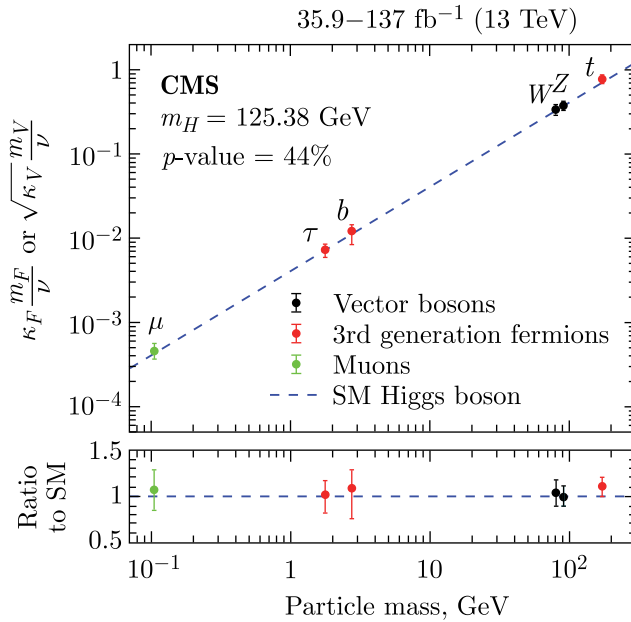
Таким образом, мы окончательно получаем

$$\Gamma_\psi = \frac{G_\mu m_\psi^2 m_h}{4\sqrt{2}\pi} \left(1 - \frac{4m_\psi^2}{m_h^2}\right)^{3/2}. \quad (22.5)$$

Отсюда следует, что основной вклад в вероятность распада бозона Хиггса вносит  $b$ -кварк:

$$\Gamma_h^{\text{tot}} \approx \Gamma_b = 3 \cdot \Gamma_\psi \stackrel{m_b=4,2 \text{ ГэВ}}{\approx} 4,5 \text{ МэВ}, \quad (22.6)$$

где коэффициент **3** получается из-за суммирования по цвету. Данное значение является чрезвычайно малой величиной по сравнению с массой бозона Хиггса, и ее невозможно напрямую измерить на ЛНС из-за недостаточного энергетического разрешения. Вклад  $c$ -кварка в вероятность распада бозона Хиггса составляет около 10%.



В настоящее время экспериментально измерена сила взаимодействия различных фермионов с бозоном Хиггса для заряженных частиц третьего поколения и мюона (рис. 51\*). График на рисунке ясно показывает линейную зависимость между массой и силой взаимодействия различных фермионов с бозоном Хиггса.

Поскольку бозон Хиггса имеет наибольшую вероятность распада на пару  $b\bar{b}$  кварков, признаком его рождения должны быть две  $b$ -струи с большими энергиями. Однако в процессе рождения бозона Хиггса в результате слияния двух глюонов на рис. 50а, которое является наиболее вероятным процессом, мы не можем доказать, что эти две  $b$ -струи возникают именно в результате распада бозона Хиггса. Поэтому используются другие процессы, такие как на рис. 50б, рис. 50в или рис. 50г. В первом случае две  $b$ -струи с большой энергией из распада бозона Хиггса должны появляться в ассоциации с двумя струями легких кварков, которые должны быть также кинематически связаны. Во втором случае рождение бозона Хиггса связано с одновременным рождением  $W$ - или  $Z$ -бозона. И, наконец, в последнем, наименее вероятном процессе рождение бозона Хиггса, его появление связано с рождением пар  $t\bar{t}$  кварков, которые сразу же распадаются на  $b$ -кварки и  $W$ -бозоны. Все это означает, что обнаружение бозона Хиггса путем его распада на пару  $b\bar{b}$  кварков не является самым чистым процессом, т. е. присутствует большой фон других процессов, который только иногда можно подавить эффективно.

\* Этот рисунок заимствован из статьи коллаборации CMS (JHEP **01** (2021) 148).

Наиболее чистым процессом регистрации рождения бозона Хиггса является его распад на два  $Z$ -бозона (рис. 42а), который, однако, подавлен по кинематическим соображениям. Действительно, сумма масс двух  $Z$ -бозонов больше массы бозона Хиггса, и поэтому только один из  $Z$ -бозонов рождается как реальная частица на массовой поверхности, а другой — в виртуальном состоянии. Если реальный и виртуальный  $Z$ -бозоны распадаются на пары заряженных лептонов, то масса бозона Хиггса однозначно восстанавливается из импульсов и энергий лептонов.

Таково краткое описание свойств бозона Хиггса, которым мы и завершаем изложение нашего курса.





Учебное издание  
ЧИЖОВ Михаил Владимирович  
**СЛАБЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ  
ЧАСТИЦ**

2023-67

Редактор *Е. В. Калининкова*  
Корректор *Е. А. Черногорова*  
Компьютерная верстка *И. Г. Андреевой, О. А. Буловой*

Подписано в печать 16.03.2024. Формат 70 × 100/16.  
Усл. печ. л. 8,61. Уч.-изд. л. 8,28. Тираж 230. Заказ № 60838.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований  
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6  
E-mail: [publish@jinr.ru](mailto:publish@jinr.ru)  
[www.jinr.ru/publish/](http://www.jinr.ru/publish/)

