

СИММЕТРИИ В ФИЗИКЕ

1. Настроимся на симметрию
 2. О симметрии вообще
 3. О скрытой симметрии в частности
 4. О чем статья?
 5. Путешествие по пространствам
 6. Импульсное пространство
 7. Фоковская окружность
 8. Назад к импульсному пространству
 9. От импульсного пространства к координатному
- Заключение

СИММЕТРИИ В ФИЗИКЕ*

1. НАСТРОИМСЯ НА СИММЕТРИЮ

Представьте себе двух игроков — A и B . Игроки поочередно кладут фишки на круглый стол до тех пор, пока не покроют его полностью. Выигрывает тот, кто кладет на стол последнюю фишку. Вопрос: кто из игроков выиграет партию? Известно, что игру начинает игрок A .

Ключ к решению задачи дает симметрия. Игрок A ставит фишку в центр стола и выигрывает. В самом деле: куда бы теперь ни положил свою фишку игрок B , игрок A найдет свободным место, расположенное симметрично относительно центра стола.

Эта простая задача дает представление о силе методов, основанных на симметрии.

2. О СИММЕТРИИ ВООБЩЕ

Греческое слово «ΣΥΜ-ΜΕ-ΤΡΙΑ» означает «совместно измеренное». Великий И. Кеплер [1], изучая симметрию снежинок, заложил основы кристаллографии. Литература, музыка, графика, математика, физика, химия и биология — все это связано с симметрией [2–9].

Симметрию могут иметь не только геометрические фигуры, но и уравнения. Симметрия уравнения определяется группой преобразований, которые оставляют это уравнение инвариантным, т. е. не меняют его формы.

Симметрия — любимица физиков. Она научила их классифицировать кристаллы и элементарные частицы, решать уравнения, вычислять вероятности квантовых переходов, выводить законы сохранения, объединять бозоны с фермионами, заглядывать в пространства высоких размерностей, делать более головокружительные обобщения.

* Вестник Международного университета природы, общества и человека «Дубна». 1996. №1. С. 43. Совместно с Г. С. Погосьяном и В. М. Тер-Антоняном. (Вводная лекция к курсу «Симметрии и интегрируемые системы», читаемому в МГУ им. М. В. Ломоносова и Международном университете природы, общества и человека «Дубна».)

3. О СКРЫТОЙ СИММЕТРИИ В ЧАСТНОСТИ

Различают симметрии явные и скрытые. Явная симметрия, подобно красоте внешности, видна сразу: здесь квадрат, там сфера, это поле центральное, а то — аксиальное. Другое дело скрытая симметрия. Ее, как и духовную красоту, обнаружить сложнее, но, найдя скрытую симметрию, поднимаешься на другой, гораздо более высокий уровень знания. Об этом хорошо сказал Геродот: «Скрытая симметрия сильнее явной».

4. О ЧЕМ СТАТЬЯ?

В этой статье будет рассказано о скрытой симметрии атома водорода в сильном магнитном поле. Вас ждет большое количество формул. Это связано с нашим желанием подать материал так, чтобы в нем мог разобраться не только преподаватель вуза или коллега по науке, но и студент, освоивший элементы физики и математики в пределах первых трех курсов университета.

Магнитное поле сжимает атом в направлении, перпендикулярном вектору магнитной индукции. Очень сильное магнитное поле деформирует атом в объект, похожий на иглу, ориентированную вдоль вектора магнитной индукции. Этот объект обозначают через $1DH$, что расшифровывается как одномерный атом водорода [10].

Не нужно думать, что $1DH$ — это плод воображения теоретиков. Такие объекты формируются в большом количестве в магнитных полях пульсаров. Они возникают также в некоторых задачах квантовой теории поля и физики конденсированных сред.

При включении магнитного поля уровни энергии расщепляются и уже не описываются боровской формулой

$$E_n = -\frac{1}{2n^2}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (1)$$

(мы работаем в атомных единицах).

С ростом магнитного поля основной уровень растет по модулю и в пределе бесконечного поля становится равным минус бесконечности. Это соответствует падению частицы на центр.

Под действием магнитного поля возбужденные уровни энергии сначала расщепляются. С ростом поля они ведут себя весьма сложным образом, но в пределе бесконечного поля снова описываются формулой (1). Однако здесь возникает важная деталь. Если у атома водорода кратность вырождения уровня меняется от уровня к уровню как n^2 , то у $1DH$ все возбужденные уровни энергии имеют одинаковую кратность, равную двум.

Почему же сильное магнитное поле не ликвидирует вырождения полностью? Ведь известно, что одномерные системы не могут иметь вырожденных дискретных уровней энергии [11].

Дело тут в том, что, компактифицируя поперечные к вектору магнитной индукции две размерности, магнитное поле заменяет кулонов потенциал потенциалом $|x|^{-1}$, а последний сингулярен, так как интеграл от него по отрезку $-\varepsilon < x < \varepsilon$ равен бесконечности. Для таких потенциалов вырождение не является запретом.

Остается ответить на вопрос: почему кратность вырождения 1ДН равна двум? Объясняется это так. Сингулярность потенциала вынуждает частицу находиться слева или справа от точки $x = 0$. В силу инвариантной инвариантности потенциала $|x|^{-1}$ обе эти возможности рождают один и тот же спектр энергий. В результате частица, имеющая данный уровень энергии, может находиться либо слева, либо справа от начала координат, и этот факт не зависит от того, каков номер энергетического уровня [12].

Описанной ситуации соответствуют две волновые функции

$$\begin{aligned}\Psi_n^{(L)}(x) &= \Theta(-x)F(x), \\ \Psi_n^{(R)}(x) &= \Theta(x)F(x).\end{aligned}\tag{2}$$

Здесь $\Theta(x) = 0$ при $x < 0$ и $\Theta(x) = 1$ при $x > 0$. Вид функции $F(x)$ определяется уравнением Шредингера.

Теперь о главном. В 1935 г. В. А. Фок [13] открыл первую скрытую симметрию в физике. Он доказал, что задача об атоме водорода тождественна задаче о свободном движении частицы на трехмерной сфере, погруженной в некое четырехмерное пространство. Отсюда сразу следовало, что атому водорода присуща не только явная симметрия $O(3)$, но и более высокая скрытая симметрия $O(4)$. Именно эта скрытая симметрия дала объяснение тому, что уровни энергии атома водорода вырождены с кратностью n^2 .

Что же происходит с фоковской симметрией после того, как сильное магнитное поле сжимает атом водорода в иглу? Мы собираемся доказать здесь, что под действием сильного магнитного поля трехмерная сфера В. А. Фока деформируется в окружность. Это значит, что симметрия $O(4)$ трансформируется в симметрию $O(2)$, которая и является скрытой симметрией 1ДН.

Скрытая симметрия 1ДН была открыта в 1987 г. группой теоретиков ЛТФ ОИЯИ и Ереванского госуниверситета [14]. Годом позднее ее подтвердили американские физики [15]. В настоящее время 1ДН стал одной из модных тем в квантовой механике и математической физике (см. [16] и приведенные там ссылки).

5. ПУТЕШЕСТВИЕ ПО ПРОСТРАНСТВАМ

Итак, мы уже знаем, что с 1ДН связано три уникальных факта:

- основному состоянию 1ДН соответствует энергия $E_0 = -\infty$;
- все возбужденные уровни 1ДН даются формулой (1);

- уровни энергии (1) двукратно вырождены.

Наша дальнейшая цель состоит в выводе скрытой симметрии, которая объясняет указанные выше три факта. Для этого нам придется совершить своеобразное путешествие по пространствам. Начнем мы с уравнения Шредингера для 1ДН. Затем мы получим уравнение, описывающее 1ДН в этом пространстве. Далее мы покинем импульсное пространство и направимся от него к окружности, о которой говорилось в конце предыдущего пункта. Уравнение, управляющее физикой 1ДН на окружности, окажется настолько простым, что мы без труда получим из него всю информацию об 1ДН. Более того, в этом уравнении скрытая симметрия 1ДН станет явной.

Теперь всю информацию о динамике системы нужно перенести назад, в координатное пространство, а это значит, что сначала следует от окружности вернуться в импульсное пространство, а затем направиться в пространство координатное.

Как видите, нам предстоит совершить «кругосветное путешествие».

6. ИМПУЛЬСНОЕ ПРОСТРАНСТВО

При магнитном поле, направленном вдоль оси x , 1ДН описывается уравнением в атомных единицах ($m = \hbar = e = 1$)

$$\partial_x^2 \Psi + 2(E + |x|^{-1}) = 0. \quad (3)$$

После умножения на $|x|$ его можно переписать в виде

$$|x|(\hat{p}^2 + p_0^2)\Psi(x) = 2\Psi(x). \quad (4)$$

Здесь введены обозначения

$$\hat{p} = -i\partial_x, \quad p_0^2 = -2E. \quad (5)$$

Подействуем на уравнение (4) слева оператором

$$\hat{G} = (\hat{p}^2 + p_0^2)|x|(\hat{p}^2 + p_0^2)|x|$$

и приведем его к уравнению

$$(\hat{p}^2 + p_0^2)|x|(\hat{p}^2 + p_0^2)|x|Z(x) = 4Z(x), \quad (6)$$

где

$$Z(x) = (\hat{p}^2 + p_0^2)\Psi(x).$$

Уравнение (6) билинейно по $|x|$, и поэтому к нему применимо обычное правило, по которому переходят от координатного представления к импульсному:

$$x \rightarrow i\partial_p, \quad \hat{p} \rightarrow p.$$

Волновая функция импульсного пространства связана с координатной волновой функцией фурье-преобразованием

$$\Psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a(p) e^{ipx} dp. \quad (7)$$

Введем функцию

$$b(p) = (p^2 + p_0^2) a(p). \quad (8)$$

Эта функция является фурье-преобразованием функции $Z(x)$. Функция $b(p)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left[\frac{1}{2} (p^2 + p_0^2) i \partial_p \right]^2 b(p) = b(p). \quad (9)$$

Это уравнение содержит в себе все, что есть в уравнении (3). Но и здесь мы не можем еще увидеть главного — скрытую симметрию 1ДН. Для этого нужно перейти на фоковскую окружность, чем мы и займемся в следующем пункте.

7. ФОКОВСКАЯ ОКРУЖНОСТЬ

В нашем рассказе наступил момент, который достоин особого внимания. Перейдем от переменной p к переменной φ с помощью знаменитого фоковского преобразования

$$p = p_0 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, \quad -\pi \leq \varphi < \pi. \quad (10)$$

Преобразование (10) имеет красивое геометрическое истолкование. Из (10) следует, что

$$\cos \varphi = \frac{p^2 - p_0^2}{p^2 + p_0^2}, \quad \sin \varphi = \frac{2p p_0}{p^2 + p_0^2}. \quad (11)$$

Рассмотрим плоскость с координатами (ξ, φ) . Для декартовых координат точки в этой плоскости имеем

$$\xi_1 = \xi \cos \varphi, \quad \xi_2 = \xi \sin \varphi.$$

Величины p и p_0 определяют лишь угол φ , но не дают никакой информации о радиусе ξ .

Сделаем следующий чертеж (см. рисунок).

Здесь отрезок MO имеет длину p/p_0 . Формула (10) следует из свойств треугольника OMQ . Радиус окружности произволен.

Мы видим, что формула (10) ставит в соответствие всякой точке p импульсного пространства точку N окружности в воображаемой плоскости (ξ_1, ξ_2) .

Между производными по переменным φ и p есть связь

$$i\partial_\varphi = \frac{1}{2} \frac{p^2 + p_0^2}{p_0} i\partial_p = \frac{1}{p_0} \hat{G}.$$

Учитывая эту связь, можно уравнению (9) придать следующий вид:

$$\partial_\varphi^2 \Phi(\varphi) + p_0^{-2} \Phi(\varphi) = 0. \quad (12)$$

Здесь $\Phi(\varphi) = b(p) = b[p(\varphi)]$.

Мы получили удивительно простое уравнение. Оно описывает плоский ротатор.

Уравнение (12) имеет два независимых решения

$$\Phi_n^{(L)}(\varphi) = e^{in\varphi}, \quad \Phi_n^{(R)}(\varphi) = e^{-in\varphi} \quad (13)$$

в соответствии с двумя типами движения по окружности — по часовой стрелке и против часовой стрелки.

Далее, $p_0^2 = n^2$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. Отсюда при $n = 0$ имеем уровень $E_0 = -\infty$, а при остальных n — формулу (1).

Итак, каждому уровню энергии соответствуют две волновые функции.

Мы получили все свойства, перечисленные в начале пункта, в котором обсуждалось путешествие по пространствам.

На этом, собственно, можно было закончить наш рассказ. Во всяком случае, здесь могут остановиться те, кто не очень любит математические вычисления. Но мы продолжим наше путешествие и постараемся перевести в координатное пространство все то, что нам удалось узнать.

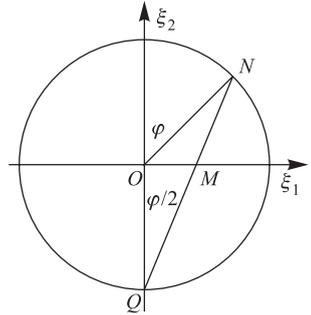
8. НАЗАД К ИМПУЛЬСНОМУ ПРОСТРАНСТВУ

Из формул (8), (10) и (13) следует, что волновые функции импульсного представления имеют вид

$$\begin{aligned} a_n^{(L)}(p) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{p_0^{3/2}}{p^2 + p_0^2} \exp\left(\frac{2i}{p_0} \operatorname{arctg} \frac{p}{p_0}\right), \\ a_n^{(R)}(p) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{p_0^{3/2}}{p^2 + p_0^2} \exp\left(-\frac{2i}{p_0} \operatorname{arctg} \frac{p}{p_0}\right). \end{aligned} \quad (14)$$

Эти функции нормированы условием

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |a_n^{(L)}(p)|^2 dp = \int_{-\infty}^{+\infty} |a_n^{(R)}(p)|^2 dp = 1.$$



Основному состоянию соответствует значение $n = 0$, т.е. $p = \infty$. Рассмотрим предел $p \rightarrow \infty$ в выражениях (13). Из формул (13) следует, что при больших p_0

$$a_0^{(L)}(p) = a_0^{(R)}(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{p_0^{3/2}}{p^2 + p_0^2}, \quad p \gg 1. \quad (15)$$

Итак, наши дела в импульсном пространстве закончены. Займемся переводом информации в координатное пространство.

9. ОТ ИМПУЛЬСНОГО ПРОСТРАНСТВА К КООРДИНАТНОМУ

Этот переход совершается с помощью фурье-преобразования.

Сначала рассмотрим основное состояние. Фурье-образ выражения (15) есть

$$\Psi_0(x) = \sqrt{p_0} e^{-p_0|x|}, \quad p \gg 1. \quad (16)$$

Если в формуле (16) перейти к пределу $p_0 \rightarrow \infty$, то получится функция, которая равна нулю всюду, за исключением точки $x = 0$, где она равна бесконечности.

Однако это не есть дельта-функция Дирака, так как если сначала проинтегрировать (16), а затем в полученном результате перейти к пределу $p_0 \rightarrow \infty$, то получается тождественный ноль. Поэтому перед тем, как переходить к пределу $p_0 \rightarrow \infty$ в ненаблюдаемом выражении (16), следует сначала сконструировать наблюдаемое $|\Psi(x)|^2$ и только потом совершить предельный переход. Тогда в пределе получается $\delta(x)$. Отсюда следует, что пределу $p_0 \rightarrow \infty$ действительно соответствует падение частицы на центр. С другой стороны, ситуация весьма пикантна: мы не можем основному состоянию приписать какой-либо волновой функции!

Возвратимся к формулам (14). Из них следует, что $Q_n^{(R)}(p) = Q_n^{(L)}(-p)$, или с учетом (7)

$$\Psi_n^{(R)}(x) = \Psi_n^{(L)}(-x). \quad (17)$$

Значит, достаточно вычислить $\Psi_n^{(R)}(x)$.

Имеем

$$\Psi_n^{(L)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a_n^{(L)}(p) e^{ipx} dp.$$

Сделаем в этом интеграле замену $px = q$:

$$\Psi_n^{(L)}(x) = \frac{\operatorname{sgn} x}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a_n^{(L)}\left(\frac{q}{x}\right) e^{iqx} dq. \quad (18)$$

Воспользуемся формулой

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x-i}{x+i}.$$

С помощью этой формулы можно показать, что

$$a_n^{(L)}\left(\frac{q}{x}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2}{n^2} \frac{(q-ix/n)^{n-1}}{(q+ix/n)^{n+1}}. \quad (19)$$

При $|q| \rightarrow \infty$ функция e^{iq} стремится к нулю в верхней полуплоскости. Это значит, что интегрирование в (18) можно дополнить до замкнутого контура, добавив к прежнему интегралу интеграл по дуге бесконечного радиуса.

Согласно (19) подынтегральное выражение в (18) имеет полюс $(n+1)$ -го порядка в точке $q_0 = -ix/n$. При $x < 0$ этот полюс попадает внутрь контура, а при $x > 0$ находится вне его.

Таким образом, $\Psi(x) = 0$ при $x > 0$, и остается рассмотреть область $x < 0$, где

$$\Psi_n^{(L)}(x) = -\frac{1}{2\pi x} \oint_C a_n^{(L)}\left(\frac{q}{x}\right) e^{iq} dq.$$

Отметим, что контур C обходит полюс q_0 в положительном направлении.

Перейдем к переменной интегрирования $z = q - ix/n$. Тогда

$$\Psi_n^{(L)}(x) = -\frac{\sqrt{n}}{\pi} \frac{x}{n^2} e^{-x/n} \oint_C \frac{e^{iz} z^{n-1}}{(z+2ix/n)^{n+1}} dz.$$

Совершим еще одну замену: $iz = -y$, тогда

$$\Psi_n^{(L)}(x) = -\frac{\sqrt{n}}{\pi} \frac{x}{n^2} e^{-x/n} \frac{1}{i} \oint_C \frac{e^{-y} y^{n-1}}{(y+2x/n)^{n+1}} dy.$$

Теперь из формулы Коши для производных от аналитической функции

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(t)}{(t-x)^{n+1}} dt$$

следует, что

$$\Psi_n^{(L)}(x) = -xe^{-x/n} \frac{\sqrt{n}}{\pi} \frac{1}{n^2} \frac{2\pi}{n!} (\partial_y^n e^{-y} y^{n-1})_{y=-2x/n}.$$

Далее, из формулы Родрига для обобщенной функции Лагерра

$$L_n^k(z) = \frac{n!}{(n-k)!} e^z \partial_z^n (e^{-z} z^{n-k})$$

имеем

$$\Psi_n^{(L)}(x) = -x e^{-x/n} \frac{2}{n^3} \frac{\sqrt{n}}{n!} L_n^1\left(-\frac{2x}{n}\right).$$

Наконец, пользуясь связью обобщенных полиномов Лагерра с вырожденной геометрической функцией

$$L_n^k(z) = (-1)^k \frac{(n!)^2}{k!(n-k)!} F(k-n, k+1, z),$$

получаем

$$\begin{aligned} \Psi_n^{(L)}(x) &= \Theta(-x) e^{-|x|/n} \frac{2\sqrt{n}}{n^2} F(1-n, 2, \frac{2|x|}{n}), \\ \Psi_n^{(R)}(x) &= \Theta(x) e^{-|x|/n} \frac{2\sqrt{n}}{n^2} F(1-n, 2, \frac{2|x|}{n}). \end{aligned} \quad (20)$$

Эти формулы конкретизируют смысл общих формул (2). Формулы (20) были впервые выведены в работе [10] непосредственно из уравнения (3).

Таким образом, пользуясь скрытой симметрией $O(2)$, мы получили полную информацию, относящуюся к 1ДН. Затем мы перенесли эту информацию в координатное пространство, проделав при этом довольно долгий путь.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Наше путешествие подошло к концу. Если вы ощутили красоту скрытой симметрии 1ДН, то знайте, что мир симметрии необъятен и в нем есть место для всех, кто стремится познать Истину. Симметрией занимаются во всем мире. Одним из центров науки о симметрии является ОИЯИ. Ученые ОИЯИ внесли весомый вклад в освоение симметрии элементарных частиц, квантованных полей и уравнений математической физики.

В Дубне в последние годы проводится одна из крупнейших в мире конференций по методам симметрии в физике. На этой конференции специалисты из разных стран обмениваются идеями и строят планы на будущее. Создается важная для научной работы творческая атмосфера. Симметрия продолжает жить в стенах ОИЯИ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kepler J.* Strena, seu De Nive sexangula. 1611. English translation: The sixcomered snowflake. Oxford: Clarendon Press, 1966.
2. *Shubnikov A. V., Koptsik V. A.* Symmetry in Science and Art. N. Y.: Plenum Press, 1974.
3. *Pavlovic B., Trinajstic N.* On symmetry and asymmetry in literature // *Comp. & Math., Appl.* 1986. V. 12B. P. 197.
4. *Donnini R.* The visualization of music: symmetry and asymmetry // *Ibid.* P. 435.
5. *Esher M. C.* Grafiek en Tekeningen. Zwolle: Tijl, 1959.
6. *Hilton P., Pedersen J.* Symmetry in mathematics // *Comp. & Math., Appl.* 1986. V. 12B. P. 315.
7. *Rosen J.* Symmetry and Group Theory in Physics // *Am. J. Phys.* 1981. V. 49. P. 304.
8. *Pearson R. G.* Symmetry rules for chemical reactions // *Comp. & Math., Appl.* 1986. V. 12B. P. 229.
9. *Vainstein B. K.* Symmetry of biological macromolecules and their associations // *Ibid.* P. 237.
10. *London R.* The one-dimensional hydrogen atom // *Am. J. Phys.* 1981. V. 27. P. 649.
11. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. М.: Наука, 1974.
12. *Andrews M.* Singular potentials in one dimension // *Am. J. Phys.* 1976. V. 44. P. 1064.
13. *Fock V. A.* Zur Theorie des Wasserstoffatom // *Zs. Phys.* 1935. V. 98. P. 145.
14. *Davtyan L. S. et al.* On the hidden symmetry of a one-dimensional hydrogen atom // *J. Phys. A.* 1987. V. 20. P. 2765.
15. *Boya L. J., Kmiecik M., Bohm A.* Hydrogen atom in one dimension // *Phys. Rev. A.* 1988. V. 37. P. 3567.
16. *Oseguera U., de Llano M.* Two singular potentials: The space-splitting effect // *J. Math. Phys.* 1993. V. 34. P. 4575.