

УДК 539.149

ТРОЙНАЯ ТОЧКА НА ФАЗОВОЙ ДИАГРАММЕ ХОЛОДНОГО ЯДРА

*Р. В. Джолос**

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ	411
КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ	412
ТРОЙНАЯ ТОЧКА НА ФАЗОВОЙ ДИАГРАММЕ ЯДРА	420
ДИНАМИЧЕСКИЕ СИММЕТРИИ ВБЛИЗИ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЯДРА, СВОЙСТВА КОТОРЫХ БЛИЗКИ К ПРЕДСКАЗАНИЯМ	424
ДЛЯ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК	434
АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ПЕРЕХОДНОЙ ОБЛАСТИ $SO(6) \leftrightarrow U(5)$	437
СХЕМА Q -ФОНОНОВ И СВОЙСТВА ЯДЕР В ОБЛАСТИ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА ОТ СФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ К АКСИАЛЬНО ДЕФОРМИРОВАННОЙ	440
НЕАКСИАЛЬНЫЕ ЯДРА	445
ФОРМА ЯДРА, СТАБИЛЬНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ И ФОРМАЛИЗМ ТЕОРИИ КАТАСТРОФ	453
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	460

*E-mail: jolos@thsun1.jinr.ru

УДК 539.149

ТРОЙНАЯ ТОЧКА НА ФАЗОВОЙ ДИАГРАММЕ ХОЛОДНОГО ЯДРА

*Р. В. Джолос**

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Представлен обзор современного состояния исследований проблемы фазовых переходов в холодных ядрах между состояниями, характеризующимися различной геометрической формой. В рамках модели взаимодействующих бозонов и в пространстве трех контрольных параметров, являющихся параметрами гамильтониана модели, рассмотрены фазовые переходы между различными формами ядра. В зависимости от значений этих параметров равновесная форма ядра может быть сферической, деформированной аксиально-симметричной и неаксиальной. Показано, что на фазовой диаграмме ядра, каковой является треугольник Кастена, сферическая фаза отделяется от деформированных аксиально-симметричных фаз линией фазового перехода первого рода. Аналогичным образом и две деформированные фазы с разными знаками аксиальной деформации разделяются между собой линией фазового перехода первого рода. Эти линии сходятся в тройной точке, в которой имеет место фазовый переход второго рода. Рассмотрен вопрос о динамических симметриях в критических точках. Обсуждается экспериментальная информация о ядрах, свойства которых близки к предсказанным для критических точек фазовых переходов. Показано, что фазовый переход от аксиально-симметричной к неаксиальной деформации является фазовым переходом второго рода. В рамках модели Бора–Моттельсона получено приближенное решение, описывающее ядро вблизи критической точки фазового перехода от сферической формы к неаксиально деформированной.

Review of the modern status of investigations of the problem of phase transitions in cold nuclei between nuclear states of a different geometrical shape is presented. In the framework of the Interacting Boson Model phase transitions between different nuclear shapes are considered in the space of the three control parameters which are parameters of the Hamiltonian of the model. Depending on the values of these parameters equilibrium shape of a nucleus can be spherical, axially deformed or triaxial. It is shown that on the phase diagram of a nucleus, which is Casten triangle, in fact, spherical phase is separated from the axially deformed phases by the lines of the first order phase transitions. Also two deformed phases with different signs of axial deformation are separated one from the other, by the line of the first order phase transition. These lines come together in the triple point where the second order phase transition takes place. A question of dynamical symmetries in the critical points is considered. Experimental information on nuclei whose properties are close to those predicted for the critical points of the phase transitions is discussed. It is shown that the phase transition from axially symmetric to triaxial deformation is a second order phase transition. In the framework of the Bohr–Mottelson model an approximate solution describing nucleus near the critical point of the spherical-triaxially deformed phase transition is found.

*E-mail: jolos@thsun1.jinr.ru

*Нашей внучке, Танечке Вороновой,
посвящается*

Для описания свойств атомных ядер, структуры их низколежащих и высоколежащих состояний разработана изощренная теоретическая техника, требующая для своей реализации большого объема вычислений. На этом пути может быть достигнуто детальное описание структуры ядер. Однако для того, чтобы получить качественную картину того или иного явления, мы нередко обращаемся к простым моделям. Таких моделей немного: магическое ядро, одночастичная модель оболочек, гармонический осциллятор, аксиально-симметричный ротатор, модель γ -нестабильного ядра. Можно привести примеры ядер, достаточно хорошо описываемых этими моделями. Однако большинство из известных ядер следует относить к промежуточным областям, находящимся между областями, описываемыми указанными моделями. Таким образом, с точки зрения наших представлений о структуре ядер перечисленные выше модели относятся к предельным случаям. Для переходных же между этими предельными случаями областей простых качественных моделей, допускающих существование аналитических решений, нет. Начатые в последние годы экспериментальные исследования свойств ядер, удаленных от долины стабильности, лишь увеличивают число переходных ядер. Таким образом, резко возрастает потребность в разработке простых моделей именно для переходных областей.

В последние годы существенный прогресс был достигнут в этом направлении в работах [1,2], в которых были предложены «критические» симметрии как основа для анализа свойств ядер, принадлежащих переходным областям. Эти работы открывают новые возможности для реализации аналитического подхода к описанию структуры ядер вблизи критических точек фазового перехода второго рода и в области сосуществования фаз для фазовых переходов первого рода. Затем в работе [3] было показано, что в ядерном случае фазовый переход второго рода может иметь место только в изолированной точке на фазовой диаграмме ядра, что находится в полном соответствии с феноменологической теорией фазовых переходов второго рода, разработанной Ландау. Речь идет о так называемой тройной точке. Этот результат указывает на возможность применения классической теории фазовых переходов для описания изменения формы атомных ядер, являющихся конечными ферми-системами.

В классической физике наиболее известный пример тройной точки демонстрирует фазовая диаграмма воды. На диаграмме, где по осям отложены давление и температура, три линии, разделяющие газообразную и жидкую, жидкую и твердую и твердую и газообразную фазы, сходятся в одной точке при температуре 273,15 К. В физике сплошных сред фазовые переходы обычно вызваны изменением температуры. Когда лед тает, это происходит

при определенной температуре и с резким изменением структуры состояния: кристаллическая структура разрушается тепловым движением молекул воды. Это пример фазового перехода первого рода: при температуре среды, равной температуре фазового перехода, две фазы — твердая и жидкая — сосуществуют, и требуется так называемая скрытая теплота плавления, чтобы осуществить фазовый переход. В случае фазовых переходов второго рода состояние системы изменяется непрерывным образом без сосуществования различных фаз. Вместо этого две фазы в точке перехода становятся неразличимыми. Хорошо известным примером является фазовый переход в железе, при котором ферромагнитное состояние исчезает при температуре Кюри и система становится парамагнитной.

Фазовые переходы в классических системах происходят из-за конкуренции между упорядоченным движением и тепловыми флуктуациями. В квантовой системе фазовые переходы могут происходить и при нулевой температуре под воздействием других механизмов.

В основном состоянии геометрическая форма атомного ядра является результатом взаимодействия составляющих его нуклонов. При изменении числа протонов и нейтронов форма ядра может изменяться. Интерес к изучению фазовых переходов, связанных с изменением формы ядра, возродился в последнее время благодаря недавно выполненным экспериментальным исследованиям структуры переходных ядер, характеризующимся высокой точностью измерения вероятностей электромагнитных переходов между состояниями ядра. Особенно интересные результаты были получены для ^{134}Ba и ^{152}Sm .

Различные геометрические формы ядра можно рассматривать как различные фазы, в которых оно может существовать. Как было показано в [3], эти фазы (их три: сферическое ядро, «вытянутое» ядро и «сплюснутое» ядро) сходятся в одной точке (тройной точке) в точном соответствии с той картиной, которая следует из теории Ландау, разработанной для сплошных сред.

В теоретическом плане коллективное движение в ядрах, связанное с изменением формы ядра, может исследоваться как в рамках геометрических моделей, так и на основе моделей, использующих алгебраическую технику, которая связывает различные формы ядра с определенными математическими симметриями. Примером такой модели является модель взаимодействующих бозонов. В этой модели сферическим ядрам отвечает группа симметрии $U(5)$, деформированным «вытянутым» ядрам — группа симметрии $SU(3)$, а «сплюснутым» ядрам — сопряженная группа $\overline{SU}(3)$. Перечисленные выше симметрии являются предельными случаями. Произвольным же формам ядра соответствуют точки внутри расширенного треугольника Кастена, являющегося по существу фазовой диаграммой ядра.

В рамках геометрической модели, анализируя уравнения Бора–Моттельсона для специально выбранных потенциалов, подходящих для описания свойств переходных ядер, Ф. Якелло показал [1, 2], что можно ввести в рассмотрение

представление о «критических» симметриях, порождающих аналитические решения для описания ядер переходных областей.

Эти исследования продемонстрировали, что простые качественные модели, описывающие свойства переходных ядер, можно построить, опираясь на аналитические решения, соответствующие «критическим» симметриям, и применяя классическую теорию фазовых переходов к коллективным моделям ядра.

1. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

Прежде чем перейти к рассмотрению фазовых переходов между различными формами ядра, кратко напомним, как такой анализ осуществляется в классической статистической физике [10]. В статистической физике такое рассмотрение основывается на термодинамическом потенциале $\Phi(P, T; \xi)$, зависящем от внешних параметров — давления P и температуры T — и параметра порядка ξ . В теории Ландау фазовых переходов второго рода параметр порядка ξ характеризует симметрию системы, например кристалла. Термодинамический потенциал Φ может быть выражен через свободную энергию системы F :

$$\Phi(P, T; \xi) = F + PV \quad (1)$$

или через полную энергию E :

$$\Phi(P, T; \xi) = E - ST + PV, \quad (2)$$

где V — объем, занимаемый рассматриваемой системой, а S — энтропия системы. Термодинамический потенциал $\Phi(P, T; \xi = \xi_0)$ в равновесной конфигурации ξ_0 является непрерывной функцией P и T . Однако производные Φ не обязаны быть непрерывными функциями. Отсутствие непрерывности у производных первого или второго порядка приводит к фазовым переходам первого или второго рода соответственно. Например, в случае фазового перехода первого рода производная первого порядка от термодинамического потенциала $\partial\Phi(P, T; \xi_0)/\partial T$ имеет излом. Поэтому теплоемкость $C_p = -T\partial^2\Phi/\partial T^2$ характеризуется сингулярностью в точке фазового перехода, т. е. приводит к ненулевой скрытой теплоте перехода. Это соответствует ситуации, когда параметр порядка ξ_0 , характеризующий, например, симметрию кристалла, изменяется скачком в точке фазового перехода.

Рассмотрим фазовый переход второго рода между более симметричной ($\xi_0 = 0$) и менее симметричной ($\xi_0 \neq 0$) фазами. Для этого воспользуемся разложением термодинамического потенциала по степеням ξ :

$$\Phi(P, T; \xi) = \Phi_0(P, T) + A(P, T)\xi^2 + B(P, T)\xi^3 + C(P, T)\xi^4 + \dots \quad (3)$$

Равновесная конфигурация изменяет значение ξ от $\xi = 0$ к $\xi \neq 0$, если $A(P, T)$ изменяет свое значение от положительного к отрицательному. Следовательно, в точке фазового перехода $A(P, T)$ должно обращаться в нуль. Таким образом, первое условие фазового перехода имеет вид

$$A(P, T) = 0. \quad (4)$$

Для того чтобы точка фазового перехода была устойчивой, т. е. чтобы в ней Φ как функция ξ имела минимум при $\xi = 0$, необходимо, чтобы в этой точке обращался в нуль и член третьего порядка по ξ . Таким образом, второе условие фазового перехода имеет вид

$$B(P, T) = 0. \quad (5)$$

Коэффициент $C(P, T)$ должен быть положительным, чтобы обеспечивать устойчивость менее симметричной конфигурации с $\xi \neq 0$. Возможны два случая. Если коэффициент $B(P, T)$ тождественно равен нулю, то остается только одно условие $A(P, T) = 0$ и, следовательно, фазовый переход второго рода происходит вдоль линии в плоскости $P \otimes T$. В противном случае фазовый переход второго рода происходит в изолированной точке, удовлетворяющей условиям (4) и (5). Эта точка может быть только пересечением двух или большего числа кривых, вдоль которых осуществляются фазовые переходы первого рода. В простейшем случае фазовый переход происходит в тройной точке, в которой сходятся три фазы, одна из которых, фаза I, имеет более высокую симметрию ($\xi_0 = 0$), тогда как фазы II и III имеют более низкую симметрию и различаются, например, только знаком ξ_0 ($\xi_0 \neq 0$).

2. КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Наше рассмотрение фазовых переходов между различными формами ядра будет в значительной степени опираться на модель взаимодействующих бозонов. В этом разделе будет показано, что модель взаимодействующих бозонов связана с внутренней геометрической структурой ядра. В принципе, это свойство всех моделей, имеющих определенную групповую структуру. Наличие геометрических свойств у модели взаимодействующих бозонов особенно важно, так как они позволяют связать эту модель с описанием коллективных состояний ядер при помощи переменных, характеризующих форму ядра [4].

Изучение геометрических свойств модели взаимодействующих бозонов связано с введением в рассмотрение когерентных (внутренних) состояний. Существует много задач, которые исследуются с помощью метода когерентных состояний. Задача, которая рассматривается ниже, лишь одна из них.

Для заданной группы с математической структурой g разработана математическая процедура, с помощью которой можно присоединить к данной

группе геометрическое пространство. Эта процедура состоит в разложении алгебры g на две части. Ниже мы следуем изложению данного подхода в [5]. Это разложение можно символически записать так:

$$g = h \otimes p, \quad (6)$$

где h является подалгеброй g и, следовательно, операторы, принадлежащие h , замкнуты относительно перестановочных соотношений, тогда как операторы, входящие в остаток p , не образуют алгебры. Подалгебра h называется алгеброй стабильности. Геометрические переменные можно связать с каждым элементом из p . Их число совпадает с числом генераторов в p . С представлением алгебры g связан базис состояний $|\Lambda\rangle$. Среди этих базисных состояний есть состояние $|\Lambda_{\text{ext}}\rangle$, обладающее тем свойством, что по сравнению с другими базисными состояниями его можно аннигилировать максимально возможным числом генераторов из алгебры стабильности h .

Геометрические переменные η_i можно определить, вводя «алгебраические» когерентные состояния с помощью следующего определения:

$$|\eta_i\rangle = \exp\left(\sum_i \eta_i p_i\right) |\Lambda_{\text{ext}}\rangle, \quad (7)$$

где p_i являются элементами из p . Отметим, что так как алгебра g может иметь несколько подалгебр, то можно рассматривать несколько когерентных состояний, т. е. иметь несколько возможных геометрических реализаций. Обычно рассматривается максимально возможная алгебра стабильности.

Для алгебры $U(6)$, лежащей в основе модели взаимодействующих бозонов, максимально возможная алгебра стабильности — это $U(5) \otimes U(1)$, содержащая следующие генераторы алгебры $U(6)$:

$$(d^+ \bar{d})_{l\mu}, \quad l = 0, 1, 2, 3, 4, \quad s^+ s, \quad (8)$$

где $\bar{d}_\mu = (-1)^\mu d_{-\mu}$. Остаток p содержит генераторы

$$d_\mu^+ s \quad (9)$$

и их эрмитово-сопряженные. Так как генераторов (9) пять, то геометрическое пространство, связанное с моделью взаимодействующих бозонов, является пятимерным комплексным пространством.

В соответствии с данным выше определением экстремальным является следующее состояние:

$$|\Lambda_{\text{ext}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} (s^+)^N |0\rangle, \quad (10)$$

где N — максимальное число бозонов, характеризующее выделенное представление $U(6)$. Состояние (10) аннигилируется всеми операторами d_μ . Таким образом, «алгебраическое» когерентное состояние имеет вид

$$|N, \eta_\mu\rangle = \exp\left(\sum_\mu \eta_\mu d_\mu^+ s + \sum_\mu \eta_\mu^* s^+ \bar{d}_\mu\right) |\Lambda_{\text{ext}}\rangle. \quad (11)$$

Однако в практических целях более удобно использовать для обсуждения геометрических свойств модели взаимодействующих бозонов другой набор когерентных состояний — проективные состояния. Они были введены в [6–8]. Проективные когерентные состояния, которые еще называют внутренними состояниями, имеют вид

$$|N; \alpha_\mu\rangle = \left(s^+ + \sum_\mu \alpha_\mu d_\mu^+\right)^N |0\rangle, \quad (12)$$

где $|0\rangle$ — бозонный вакуум. Переменные α_μ непосредственно связаны с переменными, описывающими форму поверхности ядра в модели Бора–Моттельсона. Они являются комплексными величинами. Состояния (12) можно использовать для изучения как статических, так и динамических свойств ядра. Для изучения только статических свойств достаточно взять в качестве α_μ вещественные числа.

Вместо пяти вещественных переменных α_μ можно использовать три угла Эйлера $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, определяющие ориентацию внутренней системы в лабораторной системе координат, и две внутренние переменные β и γ :

$$\alpha_\mu = \sum_\nu D_{\mu\nu}^2(\theta_1, \theta_2, \theta_3) a_\nu, \quad (13)$$

где $D_{\mu\nu}^2$ — функция Вигнера, а

$$\begin{aligned} a_0 &= \beta \cos \gamma, \\ a_{\pm 2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma, \\ a_{\pm 1} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, нормированное внутреннее состояние записывается так:

$$|N; \beta, \gamma\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!(1+\beta^2)^N}} (B^+)^N |0\rangle, \quad (15)$$

где

$$B^+ = s^+ + \beta \left(\cos \gamma d_0^+ + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \gamma (d_2^+ + d_{-2}^+) \right). \quad (16)$$

Ниже будет показано [7], что состояние (15) обладает двумя очень важными свойствами. Во-первых, оно содержит все базисные состояния модели взаимодействующих бозонов и полный базис может быть построен с помощью этого состояния. Во-вторых, в этом состоянии флуктуации квадрупольного оператора малы по сравнению со средним значением этого оператора для равновесных значений β и γ , которые минимизируют квадруполь-квадрупольное взаимодействие.

Базисные состояния модели взаимодействующих бозонов характеризуются полным числом всех бозонов N , полным числом квадрупольных бозонов n_d , числом квадрупольных бозонов, не связанных в пары, имеющие угловой момент нуль, — τ , числом триплетов с нулевым полным угловым моментом, построенных из квадрупольных бозонов, — n_Δ , полным угловым моментом J и его проекцией M . Для каждого значения n_d τ может принимать следующие значения:

$$\tau = n_d, n_d - 2, \dots, 0 \quad \text{или} \quad 1. \quad (17)$$

Возможные значения n_Δ определяются соотношением

$$\tau = 3n_\Delta + \lambda, \quad (18)$$

где n_Δ и λ — неотрицательные целые числа. Полный угловой момент J принимает следующие значения:

$$J = 2\lambda, 2\lambda - 2, 2\lambda - 3, \dots, \lambda. \quad (19)$$

Любое из базисных состояний модели взаимодействующих бозонов можно построить соответствующим усреднением когерентного состояния:

$$|N, n_d, \tau, n_\Delta, J, M\rangle = \int d\Omega \int_0^\infty \beta^4 d\beta \int_0^{\pi/3} \sin 3\gamma d\gamma \times \\ \times f_{Nn_d\tau n_\Delta JM}(\beta, \gamma, \Omega) |N; \beta, \gamma, \Omega\rangle, \quad (20)$$

где $\Omega = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, а

$$|N; \beta, \gamma, \Omega\rangle = \exp(i\theta_1 \hat{J}_z) \exp(i\theta_2 \hat{J}_y) \exp(i\theta_3 \hat{J}_z) |N; \beta, \gamma\rangle. \quad (21)$$

Состояние $|N, n_d, \tau, n_\Delta, J, M\rangle$, построенное с использованием монополярных и квадрупольных бозонов, имеет вид

$$|N, n_d, \tau, n_\Delta, J, M\rangle = \\ = \mathcal{N}^{-1/2} (s^+)^{N-n_d} (d^+ \cdot d^+)^{1/2(N_d-\tau)} |\tau, \tau, \tau, n_\Delta, J, M\rangle, \quad (22)$$

где

$$\mathcal{N} = (N - n_d)!(n_d - \tau)!(n_d + \tau + 3)!/(2\tau + 3)!, \quad (23)$$

а точка в (22) обозначает скалярное произведение операторов. Вычислим скалярное произведение векторов (20) и (22), используя следующие свойства когерентных состояний:

$$s|N; \beta, \gamma, \Omega\rangle = \sqrt{\frac{N}{1 + \beta^2}}|N - 1; \beta, \gamma, \Omega\rangle, \quad (24)$$

$$d_\mu|N; \beta, \gamma, \Omega\rangle = \beta\sqrt{\frac{N}{1 + \beta^2}} \times \\ \times \left(D_{\mu 0}^2(\Omega) \cos \gamma + (D_{\mu 2}^2(\Omega) + D_{\mu - 2}^2(\Omega)) \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \gamma \right) |N - 1; \beta, \gamma, \Omega\rangle. \quad (25)$$

Получим следующий результат:

$$\langle N, n'_d, \tau', n'_\Delta, J', M' | N, n_d, \tau, n_\Delta, J, M \rangle = \\ = \sqrt{N!} \int d\Omega \int_0^\infty \beta^4 d\beta \int_0^{\pi/3} \sin 3\gamma d\gamma f_{N n_d \tau n_\Delta J M}(\beta, \gamma, \Omega) \times \\ \times \mathcal{N}^{-1/2} \frac{(\beta^2)^{n'_d}}{(1 + \beta^2)^{N/2}} \Psi_{\tau', n'_\Delta, J', M'}(\gamma, \Omega), \quad (26)$$

где функции

$$\Psi_{\tau, n_\Delta, J, M}(\gamma, \Omega) = \sum_K \Phi_K^{\tau, n_\Delta, J}(\gamma) D_{MK}^J(\Omega) \quad (27)$$

являются хорошо известными функциями гармонического квадрупольного вибратора [9]. Эти функции линейно независимы и формируют полный базис в четырехмерном пространстве (γ, Ω) . Теперь необходимо найти такую функцию $f_{N n_d \tau n_\Delta J M}(\beta, \gamma, \Omega)$, чтобы слева от знака равенства в (26) получить дельта-функцию. В $f_{N n_d \tau n_\Delta J M}(\beta, \gamma, \Omega)$ зависимость от β может быть отделена:

$$f_{N n_d \tau n_\Delta J M}(\beta, \gamma, \Omega) = g_{N, n_d}^\tau(\beta) \tilde{\Psi}_{\tau n_\Delta J M}(\gamma, \Omega). \quad (28)$$

Функции $\tilde{\Psi}_{\tau n_\Delta J M}(\gamma, \Omega)$ и $g_{N, n_d}^\tau(\beta)$ должны удовлетворять следующим соотношениям ортогональности:

$$\int d\Omega \int_0^{\pi/3} \sin 3\gamma d\gamma \tilde{\Psi}_{\tau n_\Delta J M}(\gamma, \Omega) \Psi_{\tau' n'_\Delta J' M'}(\gamma, \Omega) = \\ = \delta_{\tau\tau'} \delta_{n_\Delta n'_\Delta} \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \quad (29)$$

и

$$\sqrt{N!} \int_0^\infty \beta^4 d\beta g_{N,n_d}^\tau(\beta) \frac{\beta^{n'_d}}{(1+\beta^2)^{N/2}} = \delta_{n_d n'_d}. \quad (30)$$

Так как функции Ψ формируют линейно независимый набор волновых функций, то дуальный ортогональный базис $\tilde{\Psi}$, удовлетворяющий (29), должен существовать на самом деле для таких значений τ и τ' , при которых возможно только одно значение n_Δ , $\tilde{\Psi} = \Psi$, т.е. функции Ψ ортонормированны.

Функции g_{N,n_d}^τ , удовлетворяющие (30), можно построить, используя полиномы Лагерра $L_n^{\tau+3/2}(\beta^2)$, которые входят в радиальные волновые функции пятимерного осциллятора:

$$g_{N,n_d}^\tau(\beta) = \exp(-N\beta^2) \beta^\tau (1+\beta^2)^{N/2} C \sum_{n=l}^{\bar{l}} \binom{n}{l} L_n^{\tau+3/2}(N\beta^2), \quad (31)$$

где

$$C = \frac{2(-1)^l N^{l+\tau+5/2}}{\sqrt{N!} \Gamma(l+\tau+5/2)},$$

$$l = \frac{1}{2}(n_d - \tau), \quad (32)$$

$$\bar{l} = \frac{1}{2}(N - \tau)$$

и $\Gamma(l+\tau+5/2)$ является Γ -функцией. При $N \rightarrow \infty$

$$g_{N,n_d}^\tau(\beta) \sim \beta^{n_d} \exp(-N\beta^2/2). \quad (33)$$

Таким образом, выше было показано, что любое собственное состояние гамильтониана модели взаимодействующих бозонов может быть спроектировано из внутреннего состояния (15) с использованием соответствующей весовой функции f и усреднения по углам ориентации внутренней системы координат, которые задаются углами Эйлера, и переменным формы β и γ .

Для того чтобы быть полезным при описании свойств ядра, связанных с квадрупольными степенями свободы, волновой вектор (15) должен описывать, в принципе, состояния с большими значениями квадрупольного момента и одновременно с небольшой величиной флуктуаций относительно среднего значения квадрупольного момента. В предельном случае, когда флуктуации исчезают, такое состояние становится собственным вектором одной из компонент квадрупольного оператора.

В модели взаимодействующих бозонов квадрупольный оператор наиболее общего вида записывается следующим образом:

$$Q_\mu = d_\mu^+ s + s^+ \bar{d}_\mu + \chi(d^+ \bar{d})_{2\mu}, \quad (34)$$

где χ — параметр. При $\chi = 0$ Q_μ становится генератором группы $O(6)$, а при $\chi = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$ — генератором группы $SU(3)$. Квадрупольный момент нормированного состояния Ψ относительно оси z определяется выражением $\langle \Psi | Q_0 | \Psi \rangle$. Для того чтобы внутреннее состояние (15) было собственным вектором оператора Q_0 , оператор B^+ должен удовлетворять следующему условию:

$$[Q_0, B^+] \sim B^+. \quad (35)$$

Коммутатор $[Q_0, B^+]$ равен

$$\begin{aligned} [Q_0, B^+] = & \beta \cos \gamma s^+ + \left(1 - \sqrt{\frac{2}{7}} \chi \beta \cos \gamma \right) d_0^+ + \\ & + \sqrt{\frac{2}{7}} \chi \beta \sin \gamma \frac{1}{\sqrt{2}} (d_2^+ + d_{-2}^+). \end{aligned} \quad (36)$$

При $\gamma \neq 0$ условия существования собственной моды оператора Q_0 имеют вид

$$\beta \cos \gamma = \sqrt{\frac{2}{7}} \chi, \quad (37)$$

$$\beta^2 \cos^2 \gamma = 1 - \sqrt{\frac{2}{7}} \beta \cos \gamma,$$

откуда следует, что $\chi = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$. Если $\gamma = 0$, то условие существования собственной моды принимает вид

$$\beta^2 = 1 - \sqrt{\frac{2}{7}} \chi \beta, \quad (38)$$

или

$$\beta = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{\frac{2}{7}} \chi + \sqrt{\frac{2}{7} \chi^2 + 4} \right) \equiv \beta_0. \quad (39)$$

Таким образом, для произвольного значения параметра χ , т. е. для произвольного квадрупольного оператора модели взаимодействующих бозонов, существует внутреннее состояние $|N; \beta_0, \gamma_0\rangle$ с $\gamma_0 = 0$ и β_0 , определенным уравнением (39). Это внутреннее состояние является собственным вектором оператора Q_0 с собственным значением $N\beta_0$. В частном случае $\chi = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$ имеется

бесконечное число внутренних состояний, являющихся собственными векторами оператора Q_0 . Все они удовлетворяют условию $\beta \cos \gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ и имеют собственное значение $\frac{1}{\sqrt{2}}N$.

Естественно предположить, что состояние с хорошо определенным квадрупольным моментом, т. е. собственное состояние оператора Q_0 или близкое к нему состояние, будет выделяться квадруполь-квадрупольным взаимодействием. Это предполагает, что внутреннее состояние может быть охарактеризовано также и как состояние, минимизирующее среднее значение квадрупольного взаимодействия $-\kappa Q \cdot Q$, где точка обозначает скалярное произведение, а $\kappa > 0$ — константа взаимодействия.

Среднее значение квадруполь-квадрупольного взаимодействия в состоянии $|N; \beta, \gamma\rangle$ равно

$$\begin{aligned} \langle N; \beta, \gamma | -\kappa Q \cdot Q | N; \beta, \gamma \rangle = & -\frac{\kappa N}{1 + \beta^2} (5 + (1 + \chi^2)\beta^2) - \\ & - \frac{2\kappa N(N-1)\beta^2}{(1 + \beta^2)^2} \left(2 - 2\sqrt{\frac{2}{7}}\chi\beta \cos 3\gamma + \frac{1}{7}\chi^2\beta^2 \right). \end{aligned} \quad (40)$$

Это выражение имеет минимум при $\gamma = 0$, если $\chi < 0$, или при $\gamma = \pi/3$, если $\chi > 0$. Если минимум локализован при $\gamma = 0$, то при $\gamma = \pi/3$ находится максимум, и наоборот. Выбирая $\chi < 0$, находим, что квадрупольное взаимодействие минимально, если β удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} 4(N-1)\sqrt{\frac{2}{7}}\chi\beta^3 - \left(8 \left(1 - \frac{1}{7}\chi^2 \right) N - \frac{6}{7}\chi^2 \right) \beta^2 - \\ - 12(N-1)\sqrt{\frac{2}{7}}\chi\beta + 2(4(N-2) + \chi^2) = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

При $N \rightarrow \infty$ (41) упрощается и принимает вид

$$\sqrt{\frac{2}{7}}\beta^3 - 2 \left(1 - \frac{1}{7}\chi^2 \right) \beta^2 - 3\sqrt{\frac{2}{7}}\chi\beta + 2 = 0, \quad (42)$$

или

$$\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\chi\beta - 2 \right) \left(\beta^2 + \sqrt{\frac{2}{7}}\chi\beta - 1 \right) = 0, \quad (43)$$

т. е. минимум энергии квадрупольного взаимодействия достигается при $\beta = \beta_0$, определенном уравнением (39). Это значение β удовлетворяет и условию существования собственной моды оператора Q_0 . Таким образом, с

точностью до поправки порядка $1/N$ собственное состояние оператора Q_0 одновременно минимизирует квадруполь-квадрупольное взаимодействие.

Если используется более общий гамильтониан модели взаимодействующих бозонов, чем содержащий только член с квадруполь-квадрупольным взаимодействием, то внутреннее состояние, минимизирующее среднее значение такого гамильтониана, перестает быть собственным вектором оператора Q_0 . В этом случае интересно знать, как велики флуктуации квадрупольного момента в таком состоянии. Среднее значение квадрупольного момента и его флуктуации в произвольном внутреннем состоянии $|N; \beta, \gamma\rangle$ даются выражениями

$$\langle N; \beta, \gamma | Q_0 | N; \beta, \gamma \rangle = \frac{N}{1 + \beta^2} \left(2\beta \cos \gamma - \sqrt{\frac{2}{7}} \chi \beta^2 \cos 2\gamma \right), \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \langle \Delta Q_0 \rangle_{N; \beta, \gamma} &\equiv \sqrt{\langle N; \beta, \gamma | (Q_0)^2 | N; \beta, \gamma \rangle - \langle N; \beta, \gamma | Q_0 | N; \beta, \gamma \rangle^2} = \\ &= \left(1 - 2\sqrt{\frac{2}{7}} \chi \beta \cos \gamma - \frac{1}{2} \beta^2 \left(1 - \frac{4}{7} \chi^2 + 3 \cos 2\gamma \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2\sqrt{\frac{2}{7}} \chi \beta^3 \cos 3\gamma + \frac{1}{2} \beta^4 \left(1 + \frac{2}{7} \chi^2 + \cos 2\gamma - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{2}{7} \cos 4\gamma \right) \right)^{1/2} / \left(\beta \sqrt{N} \left| 2 \cos \gamma - \sqrt{\frac{2}{7}} \chi \cos 2\gamma \right| \right). \quad (45) \end{aligned}$$

При $\gamma = 0$ последнее выражение сводится к

$$\langle \Delta Q_0 \rangle_{N; \beta, \gamma=0} = \frac{|1 - \sqrt{2/7} \chi \beta - \beta^2|}{\beta \sqrt{N} |2 - \sqrt{2/7} \chi \beta|}. \quad (46)$$

Из (46) видно, что флуктуации исчезают, когда β принимает значение, отвечающее собственной моде оператора Q_0 , как это и должно быть. Вблизи собственной моды флуктуации ведут себя как $1/\beta\sqrt{N}$. Таким образом, флуктуации убывают с ростом максимального числа бозонов N . Ниже мы будем использовать внутреннее состояние (15) для анализа фазовых переходов между различными формами ядра.

3. ТРОЙНАЯ ТОЧКА НА ФАЗОВОЙ ДИАГРАММЕ ЯДРА

В этом разделе мы применим феноменологическую теорию Ландау к анализу фазовой диаграммы ядра — системы, состоящей из конечного числа фермионов, где фазами являются различные формы ядра. Поскольку форма

ядра в основном состоянии, т.е. при температуре $T = 0$, определяется его нуклонным составом, т.е. числом протонов и нейтронов, то разные фазы отвечают фактически разным ядрам. Таким образом, число протонов и число нейтронов в ядре являются контрольными параметрами. Вместо числа протонов и нейтронов в качестве контрольных параметров можно использовать параметры модельного гамильтониана, используемого для описания ядра. Естественно, эти параметры определяются числом протонов и нейтронов.

Итак, мы будем применять феноменологическую теорию Ландау к анализу фазовых переходов в конечной квантовой системе, каковой является атомное ядро. А в качестве модели для описания атомных ядер будем использовать модель взаимодействующих бозонов. Мы уже говорили в разд. 1, что модель взаимодействующих бозонов благодаря ее четко определенной структуре позволяет ввести в рассмотрение классические переменные, характеризующие геометрическую форму ядра. Это углы Эйлера θ_i ($i = 1, 2, 3$) и внутренние переменные β и γ .

Введем в рассмотрение стандартный двухпараметрический гамильтониан модели взаимодействующих бозонов

$$\hat{H}(N, \eta, \chi) = \eta \hat{n}_d - \frac{1 - \eta}{N} \hat{Q}_\chi \cdot \hat{Q}_\chi. \quad (47)$$

Здесь $\hat{n}_d = \sum_\mu d_\mu^+ d_\mu$ является оператором числа квадрупольных бозонов, а оператор квадрупольного момента \hat{Q}_χ был введен в разд. 1. Величина N характеризует суммарное число s - и d -бозонов и равна половине числа валентных нуклонов. Параметры η и χ играют роль контрольных параметров подобно давлению P и температуре T в классическом случае, рассмотренном в разд. 1. Они изменяются в следующих пределах. Параметр η принимает значения между нулем и единицей $\eta \in [0, 1]$. При $\eta = 0$ мы имеем предельный случай β -деформированного ядра, который включает случаи вытянутого аксиально-симметричного ядра, сплюснутого аксиально-симметричного ядра и γ -нестабильного ядра. Им отвечают следующие пределы динамических симметрий: $SU(3)$, $\overline{SU}(3)$ и $O(6)$ соответственно. При $\eta = 1$ мы имеем предельный случай сферического ядра, описываемого пятимерным гармоническим осциллятором. Это случай $U(5)$ динамической симметрии. Параметр χ изменяется в пределах $\chi \in [-\sqrt{7}/2, \sqrt{7}/2]$. При $\eta = 0$ и $\chi = -\sqrt{7}/2$ мы имеем случай $SU(3)$ динамической симметрии; при $\eta = 0$ и $\chi = \sqrt{7}/2$ — $\overline{SU}(3)$ динамическую симметрию, а при $\eta = 0$ и $\chi = 0$ — $O(6)$ -предел. Это двумерное параметрическое пространство представляется расширенным треугольником Кастена [3], приведенным на рис. 1.

Вместо термодинамического потенциала, используемого в классической статистической физике, мы будем анализировать среднее значение гамильтониана в когерентном состоянии (12) как функцию контрольных параметров η и χ :

$$E(N, \eta, \chi; \beta, \gamma) = \langle N; \beta, \gamma | \hat{H}(N, \eta, \chi) | N; \beta, \gamma \rangle. \quad (48)$$

Подставляя в (48) гамильтониан (47) и используя технику вычислений, описанную в разд. 2, получаем

$$\begin{aligned} E(N, \eta, \chi; \beta, \gamma) = & -5(1 - \eta) + \frac{1}{(1 + \beta^2)^2} \times \\ & \times \left((N\eta - (1 - \eta)(4N + \chi^2 - 8))\beta^2 + 4(N - 1)(1 - \eta)\sqrt{\frac{2}{7}}\chi\beta^3 \cos 3\gamma + \right. \\ & \left. + \left(N\eta - (1 - \eta) \left(\frac{2N + 5}{7}\chi^2 - 4 \right) \right) \beta^4 \right). \quad (49) \end{aligned}$$

Вместо параметра порядка ξ в (49) мы имеем внутренние переменные β и γ . Задача состоит в том, чтобы минимизировать энергетический функционал $E(N, \eta, \chi; \beta, \gamma)$, варьируя β и γ для каждого значения η и χ . Простая форма зависимости (49) от γ позволяет легко определить то значение γ , которое отвечает минимуму $E(N, \eta, \chi; \beta, \gamma)$. Обозначим это значение γ через γ_0 . При $\chi < 0$ $\gamma_0 = 0$. При $\chi > 0$ $\gamma_0 = \pi/3$. В обоих случаях $\chi \cos 3\gamma = -|\chi|$.

Значение функционала энергии в точке глобального минимума мы будем трактовать как приближенное значение энергии основного состояния ядра. Как и в классическом случае, эта величина должна быть непрерывной функцией контрольных параметров η и χ . Это действительно так, хотя положение глобального минимума в плоскости переменных β и γ может изменяться скачком. Однако производные $E(N, \eta, \chi; \beta_0, \gamma_0)$ по контрольным параметрам могут иметь точки разрыва. Разрывы у производных первого или второго порядка отвечают фазовым переходам первого или второго рода соответственно. Это отвечает ситуации, когда параметры порядка β_0 и γ_0 изменяются скачком в точке фазового перехода.

Подход Ландау полностью применим к анализу фазовых переходов между различными формами ядра в модели взаимодействующих бозонов, т. е. к анализу энергетического функционала (49). Разлагая (49) по степеням β и полагая $\gamma = 0$, получаем

$$\begin{aligned} E(N, \eta, \chi; \beta, \gamma = 0) = & -5(1 - \eta) + (N\eta - (1 - \eta)(4N + \chi^2 - 8))\beta^2 - \\ & - 4(N - 1)(1 - \eta)\sqrt{\frac{2}{7}}|\chi|\beta^3 + \\ & + \left((1 - \eta) \left(8N - \frac{2N - 9}{7}\chi^2 - 12 \right) - N\eta \right) \beta^4 + \dots \quad (50) \end{aligned}$$

Из этого выражения видно, что в общем случае аналог коэффициента $B(\eta, \chi)$ не равен нулю. Следовательно, фазовый переход второго рода между сфе-

рической и деформированной формами может иметь место только в изолированной точке на $\eta \otimes \chi$ -плоскости (т.е. в треугольнике Кастена). Анализ показывает, что действительно есть только одна такая точка. Эта точка лежит на прямой, соединяющей $U(5)$ - и $O(6)$ -пределы динамических симметрий в треугольнике Кастена, т.е. при $\chi = 0$. Значение η в этой точке равно $\eta_{\text{trip}}(N) = (4N - 8)/(5N - 8)$ (см. рис. 1). Как показано на рис. 1, тройная точка расположена на стыке сферической фазы ($\beta_0 = 0$), находящейся в области $\eta > \eta_{\text{trip}}$, и двух деформированных фаз, расположенных при $\eta < \eta_{\text{trip}}$. При этом при $\chi < 0$ мы имеем вытянутое ядро, а при $\chi > 0$ — сплюснутое ядро. Две деформированные фазы разделены линией $\chi = 0$. За исключением тройной точки в остальной области треугольника Кастена фазовые переходы между сферической и деформированными фазами и между двумя деформированными фазами являются фазовыми переходами первого рода в полном соответствии с теорией Ландау.

При $\chi \neq 0$, т.е. везде за исключением линии, соединяющей $U(5)$ - и $O(6)$ -пределы на рис. 1, переход от деформированной к сферической фазе происходит следующим образом. Когда η , увеличиваясь, достигает значения $(4N + \chi^2 - 8)/(5N + \chi^2 - 8)$, у энергетического функционала $E(N, \eta, \chi; \beta, \gamma)$ появляется минимум при $\beta = 0$ (коэффициент $A(\eta, \chi)$ становится положительным). Сначала, однако, это только локальный минимум. Глобальный минимум продолжает находиться при $\beta_0 \neq 0$. При значении $\eta = \eta_c(N, \chi)$, где

$$\eta_c(N, \chi) = \frac{4 + (2/7)\chi^2}{5 + (2/7)\chi^2} + O\left(\frac{1}{N}\right), \quad (51)$$

глубины сферического и деформированного минимумов сравниваются. Конечно, при $\chi = 0$ мы имеем $\eta_c(N, \chi = 0) = \eta_{\text{trip}}(N)$. Таким образом, при $\chi \neq 0$ мы можем при определенных значениях η иметь энергетический функционал с двумя минимумами. Это означает, что при $\chi \neq 0$ сферическая и деформированная фазы могут сосуществовать. В тройной же точке, т.е. при $\chi = 0$, двойного минимума у $E(N, \eta, \chi; \beta, \gamma)$ не возникает.

Что касается перехода от сплюснутой к вытянутой деформированной форме, то в этом случае картины с двумя минимумами также не возникает. Положение минимума изменяется скачком от $\gamma = 0$ к $\gamma = \pi/3$ при изменении

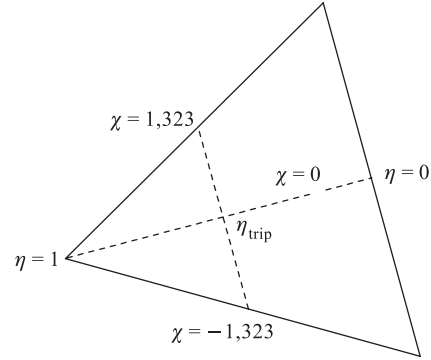


Рис. 1. Расширенный треугольник Кастена ($\zeta = 0$)

знака χ . При $\chi = 0$ $E(N, \eta, \chi; \beta, \gamma)$ не зависит от γ . Этот переход является, однако, фазовым переходом первого рода, так как при $\eta < \eta_{\text{trip}}$ минимум энергетического функционала изменяет свое положение скачком.

Итак, в рассмотренном выше случае различие между фазовыми переходами первого и второго рода ярко проявляется в поведении энергетического функционала в области фазового перехода. В случае фазового перехода первого рода энергетический функционал имеет два минимума, тогда как в случае фазового перехода второго рода деформированный минимум плавно переходит в сферический. В первом случае можно говорить о сосуществовании сферической и деформированной фаз в области фазового перехода. Во втором случае в области фазового перехода различие между сферической и деформированной фазами исчезает. Анализ, описанный в этом разделе, показал, что феноменологическая теория фазовых переходов Ландау применима и к исследованию ситуации в конечной квантовой системе, каковой является атомное ядро. Этот подход позволяет понять, почему фазовый переход второго рода осуществляется в изолированной точке и почему на фазовой диаграмме есть две линии фазовых переходов первого рода, которые «встречаются» в точке фазового перехода второго рода. Эти переходы происходят между фазами с высокой (сферической) и низкой (аксиально-симметричной) симметриями и между фазами, различающимися знаком параметра порядка (вытянутая и сплюснутая аксиально-симметричные формы).

4. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИММЕТРИИ ВБЛИЗИ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

Предыдущее рассмотрение выявило семейство критических точек в треугольнике Кастена, отвечающих фазовым переходам первого и второго рода. Это тройная точка, расположенная при $\chi = 0$ и $\eta = \eta_{\text{trip}}$, и линии, разделяющие сферическую и деформированные фазы при $\chi \neq 0$. Эти линии являются семействами критических точек фазовых переходов первого рода. В этом разделе мы рассмотрим модели, предложенные для аналитического описания свойств ядер вблизи критических точек [1, 2].

Как известно, гамильтониан модели взаимодействующих бозонов при определенных значениях параметров сводится к линейной комбинации операторов Казимира для определенной цепочки редукции группы $U(6)$. В этом случае собственные функции и собственные значения гамильтониана могут быть найдены аналитически. К сожалению, такой путь нахождения аналитического решения не удастся реализовать для значений параметров гамильтониана, отвечающих критическим точкам. Аналитические решения можно, однако, найти, основываясь на уравнении Бора–Моттельсона. С точки зрения модели взаимодействующих бозонов эти уравнения отвечают пределу $N \rightarrow \infty$,

где N — максимально возможное число бозонов. И хотя число бозонов, т. е. число пар валентных нуклонов, ограничено, тем не менее такие решения также интересны, так как позволяют выявлять особенности в поведении переходных ядер.

Рассмотрим сначала возможность получения аналитического решения уравнения Бора–Моттельсона вблизи тройной точки. Рассмотрим гамильтониан Бора [11]

$$H = -\frac{\hbar^2}{2B} \left(\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1}^3 \frac{I_k^2}{\sin^2(\gamma - (2\pi/3)k)} \right) + V(\beta, \gamma). \quad (52)$$

Этот гамильтониан действует в пятимерном пространстве, координатами которого являются внутренние переменные β, γ и три угла Эйлера θ_i ($i = 1, 2, 3$). Операторы I_k — это операторы проекций углового момента на оси внутренней системы координат. В треугольнике Кастена тройная точка находится на линии $\chi = 0$. В этом случае среднее от гамильтониана модели взаимодействующих бозонов в когерентном состоянии не зависит от γ . Поэтому мы предположим, что потенциал $V(\beta, \gamma)$ зависит только от β , т. е. $V(\beta, \gamma) = U(\beta)$. В этом случае волновая функция $\Psi(\beta, \gamma, \theta_i)$ факторизуется:

$$\Psi(\beta, \gamma, \theta_i) = f(\beta) \Phi(\gamma, \theta_i). \quad (53)$$

Тогда уравнение Шредингера распадается на два уравнения: одно для функции $\Phi(\gamma, \theta_i)$ и другое для функции $f(\beta)$:

$$\left[-\frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^3 \frac{I_k^2}{\sin^2(\gamma - (2\pi/3)k)} \right] \Phi(\gamma, \theta_i) = \Lambda \Phi(\gamma, \theta_i), \quad (54)$$

где

$$\Lambda = \tau(\tau + 3), \quad \tau = 0, 1, 2, \dots, \quad (55)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2B} \left(\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\Lambda}{\beta^2} \right) + U(\beta) \right] f(\beta) = E f(\beta). \quad (56)$$

Величина Λ является, по существу, собственным значением квадрата оператора вращения в пятимерном пространстве. Вводя безразмерные величины $\varepsilon = (2B/\hbar^2)E$ и $u(\beta) = (2B/\hbar^2)U(\beta)$, уравнение (56) можно переписать следующим образом:

$$\left[-\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\Lambda}{\beta^2} + u(\beta) \right] f(\beta) = \varepsilon f(\beta). \quad (57)$$

Введем новую функцию $\varphi(\beta)$:

$$f(\beta) = \beta^{-3/2} \varphi(\beta). \quad (58)$$

Функция $\varphi(\beta)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 \varphi}{d\beta^2} + \frac{1}{\beta} \frac{d\varphi}{d\beta} + \left[\varepsilon - u(\beta) - \frac{(\tau + 3/2)^2}{\beta^2} \right] \varphi = 0. \quad (59)$$

Применим это уравнение к изучению свойств ядер вблизи тройной точки. В этой области минимум потенциальной энергии при $\beta = 0$ плавно переходит в минимум при ненулевом значении β . В тройной точке потенциал является плоским. Эта ситуация типична для фазовых переходов. Чтобы описать ее, предположим, что $u(\beta)$ является потенциалом прямоугольной ямы

$$\begin{aligned} u(\beta) &= 0, & \beta &\leq \beta_w, \\ u(\beta) &= \infty, & \beta &\geq \beta_w. \end{aligned} \quad (60)$$

В этом случае уравнение (59) сводится к уравнению для функции Бесселя с индексом $\nu = \tau + 3/2$:

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\varphi}{dz} + \left[1 - \frac{(\tau + 3/2)^2}{z^2} \right] \varphi = 0, \quad z = \beta k, \quad (61)$$

где $k = \varepsilon^{1/2}$. Граничное условие $\varphi(\beta_w) = 0$ определяет собственные значения

$$E_{n,\tau} = \frac{\hbar^2}{2B} k_{n,\tau}^2, \quad k_{n,\tau} = \frac{x_{n,\tau}}{\beta_w}, \quad (62)$$

где $x_{n,\tau}$ — n -й нуль функции $J_{\tau+3/2}(z)$. Собственные функции имеют вид

$$\varphi(\beta) = C_{n,\tau} J_{\tau+3/2}(k_{n,\tau} \beta), \quad (63)$$

$$f_{n,\tau}(\beta) = C_{n,\tau} \beta^{-3/2} J_{\tau+3/2}(k_{n,\tau} \beta). \quad (64)$$

Нормировочная константа $C_{n,\tau}$ определяется соотношением

$$\int_0^\infty \beta^4 d\beta f^2(\beta) = 1. \quad (65)$$

В итоге задача решена точно. Поскольку функция Бесселя в (64) имеет полуцелый индекс, можно говорить о симметрии, присущей рассмотренной задаче. Функции Бесселя формируют базис представления евклидовой группы. В данном случае рассматривается движение в пятимерном пространстве, поэтому соответствующую симметрию реализует группа $E(5)$.

Имея нули функции Бесселя $x_{n,\tau}$, мы можем рассчитать все наблюдаемые: энергии возбужденных состояний и вероятности $E2$ -переходов. В табл. 1

приведены энергии возбуждения низколежащих состояний для нескольких значений τ и n . Все энергии нормированы на энергию первого возбужденного состояния. Следует подчеркнуть, что все отношения энергий в данной модели фиксированы и не содержат свободных параметров. Неопределенной является только шкала, которую можно фиксировать, приравняв энергию первого возбужденного состояния экспериментально измеренной энергии. Особенно интересны следующие отношения энергий, которые можно получить, воспользовавшись данными из табл. 1: $E_{4_{1,2}}/E_{2_{1,1}} = 2, 20$; $E_{2_{1,2}}/E_{2_{1,1}} = 2, 20$ и $E_{0_{2,0}}/E_{2_{1,1}} = 3, 03$, где состояния обозначены следующим образом: $I_{n,\tau}$.

Вероятности электрических квадрупольных переходов могут быть найдены в результате расчета матричных элементов оператора $E2$ -перехода $T_\mu(E2)$:

$$T_\mu(E2) = e_{2,\text{eff}}\beta \left(D_{\mu 0}^2 \cos \gamma + \frac{1}{\sqrt{2}}(D_{\mu 2}^2 + D_{\mu -2}^2) \sin \gamma \right), \quad (66)$$

где $e_{2,\text{eff}}$ — эффективный заряд. Результаты расчетов приведенных вероятностей $E2$ -переходов представлены в табл. 2–4. Значения $B(E2; I_{n,\tau} \rightarrow I'_{n',\tau'})$ даны в единицах $B(E2; 2_{1,1}^+ \rightarrow 0_{1,0}^+)$. Опять, как и в случае энергий возбуждения, отношения приведенных вероятностей $E2$ -переходов не содержат свободных параметров. Из значений отношений, показанных в табл. 2, наибольший интерес представляют следующие величины: $B(E2; 4_{1,2}^+ \rightarrow 2_{1,1}^+)/B(E2; 2_{1,1}^+ \rightarrow 0_{1,0}^+) = 1, 68$; $B(E2; 2_{1,2}^+ \rightarrow 2_{1,1}^+)/B(E2; 2_{1,1}^+ \rightarrow 0_{1,0}^+) = 1, 68$ и $B(E2; 0_{2,0}^+ \rightarrow 2_{1,1}^+)/B(E2; 2_{1,1}^+ \rightarrow 0_{1,0}^+) = 0, 86$.

Мы рассмотрели выше ситуацию, когда потенциал ведет себя как достаточно плоская функция β . По-видимому, это типичная ситуация для фазовых переходов. Тем не менее интересно рассмотреть случай другой параметризации потенциала, когда минимум сдвигается от точки $\beta = 0$ к $\beta = \beta_0 \neq 0$. С этой целью вместо (60) воспользуемся для $u(\beta)$ другой аппроксимацией:

$$u(\beta) = \frac{1}{16\beta_{00}^4} \left(\frac{\beta_0^4}{\beta^2} + \beta^2 \right) \quad (67)$$

и подставим (67) в уравнение (57). Мы получим следующий результат:

$$\left[-\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\Lambda + (\beta_0/(2\beta_{00}))^4}{\beta^2} + \frac{1}{16\beta_{00}^4} \beta^2 \right] f(\beta) = \varepsilon f(\beta). \quad (68)$$

Таблица 1. Энергии возбуждения низколежащих состояний в случае $E(5)$ -симметрии

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$\tau = 0$	0	3,03	7,58
$\tau = 1$	1	4,80	10,11
$\tau = 2$	2,20	6,78	12,86
$\tau = 3$	3,59	8,97	15,81

Примечание. Энергия первого возбужденного состояния принята равной единице.

Таблица 2. Приведенные вероятности $E2$ -переходов в случае $E(5)$ -симметрии

$B(E2; 4_1^+ \rightarrow 2_{1,1}^+)$	$B(E2; 6_{1,3}^+ \rightarrow 4_{1,2}^+)$	$B(E2; 2_{1,2}^+ \rightarrow 2_{1,1}^+)$	$B(E2; 4_{1,3}^+ \rightarrow 2_{1,1}^+)$	$B(E2; 3_{1,3}^+ \rightarrow 2_{1,2}^+)$
1,68	2,21	1,68	1,16	1,57
$B(E2; 4_{1,3}^+ \rightarrow 4_{1,2}^+)$	$B(E2; 0_{1,3}^+ \rightarrow 2_{1,2}^+)$	$B(E2; 0_{2,0}^+ \rightarrow 2_{1,1}^+)$	$B(E2; 2_{2,1}^+ \rightarrow 0_{2,0}^+)$	$B(E2; 4_{2,2}^+ \rightarrow 2_{2,1}^+)$
1,05	2,21	0,86	0,75	1,65
$B(E2; 2_{2,2}^+ \rightarrow 2_{2,1}^+)$	$B(E2; 0_{3,0}^+ \rightarrow 2_{2,1}^+)$	$B(E2; 2_{3,1}^+ \rightarrow 0_{3,0}^+)$	$B(E2; 4_{3,2}^+ \rightarrow 2_{3,1}^+)$	$B(E2; 2_{3,2}^+ \rightarrow 2_{3,1}^+)$
1,65	1,24	0,66	1,63	1,63

Примечание. Величина $B(E2; 2_{1,1}^+ \rightarrow 0_{1,0}^+)$ принята равной единице.

Таблица 3. Приведенные вероятности $E2$ -переходов вблизи критической точки фазового перехода от сферической формы к аксиально-деформированной

$B(E2; 4_1^+ \rightarrow 2_1^+)$	$B(E2; 0_2^+ \rightarrow 2_1^+)$	$B(E2; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+)$	$B(E2; 2_2^+ \rightarrow 0_2^+)$	$B(E2; 4_2^+ \rightarrow 2_2^+)$
1,58	0,63	0,09	0,79	1,20

Примечание. Величина $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$ принята равной единице. В таблице приведены только состояния, характеризующиеся отсутствием возбуждения γ -моды.

Таблица 4. Некоторые свойства решений, полученных в случае $E(5)$ динамической симметрии, в приближении, обозначенном через $X(5)$, и в пределах $U(5)$, $O(6)$ и $SU(3)$ динамических симметрий

Свойства	$E(5)$	$X(5)$	$U(5)$	$O(6)$	$SU(3)$
Критический индекс ν	$\tau + 3/2$	$\left(\frac{I(I+1)}{3} + \frac{9}{4}\right)^{1/2}$			
$R = (E_{4_1} - E_{0_1})/(E_{2_1} - E_{0_1})$	2,20	2,91	2,00	2,50	3,33
$R' = (E_{0_2} - E_{0_1})/(E_{2_1} - E_{0_1})$	3,03	5,67			
<i>Примечание.</i> В случаях $U(5)$, $O(6)$ и $SU(3)$ динамических симметрий величина R' не указана, поскольку она зависит от свободных параметров.					

Потенциал (67) имеет минимум при $\beta = \beta_0$, а параметр β_{00} характеризует амплитуду нулевых колебаний в этом потенциале. Вблизи $\beta = \beta_0$

$$u(\beta) \approx \frac{1}{\beta_{00}^4}(\beta - \beta_0)^2. \quad (69)$$

С помощью подстановки

$$f(\beta) = \exp\left(-\frac{\beta^2}{8\beta_{00}^2}\right) \left(\frac{\beta}{\beta_{00}}\right)^{2s} \varphi, \quad (70)$$

где

$$s = \frac{3}{4} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{9} \left[\Lambda + \left(\frac{\beta_0}{2\beta_{00}}\right)^4 \right]} - 1 \right), \quad (71)$$

и введения новой переменной z

$$z = (\beta_0/(2\beta_{00}))^2 \quad (72)$$

уравнение (68) сводится к следующему уравнению для функции φ :

$$\left[z \frac{d^2}{dz^2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2}s - z \right) \frac{d}{dz} + \varepsilon\beta_{00}^2 - \frac{1}{4} - s \right] \varphi = 0. \quad (73)$$

Решением уравнения (73) является вырожденная гипергеометрическая функция

$$\varphi = F\left(1 - n, \frac{5}{2}s + \frac{1}{2}, z\right), \quad (74)$$

где n принимает значения $n = 1, 2, 3 \dots$

Собственное значение ε определяется соотношением

$$\varepsilon\beta_{00}^2 - \frac{1}{4} - s = n - 1. \quad (75)$$

Переходя от ε к E и вводя в рассмотрение с помощью стандартного соотношения жесткость C вблизи минимума потенциала:

$$\beta_{00}^2 = \frac{\hbar}{2\sqrt{BC}}, \quad (76)$$

получаем следующее выражение для энергии E :

$$E = \hbar\sqrt{\frac{C}{B}} \left(n + s - \frac{3}{4} \right). \quad (77)$$

Вблизи минимума исходный потенциал $U(\beta)$, имеющий размерность энергии, приближенно равен

$$U(\beta) \approx \frac{1}{2}C(\beta - \beta_0)^2. \quad (78)$$

При $\beta_0 = 0$ выражение (77) приводит к эквидистантному спектру возбужденных состояний с характерной частотой $\hbar\omega = (1/2)\hbar\sqrt{C/B}$. В общем случае для энергий возбуждения $E^*(I_{n,\tau}^\pi)$ наиболее интересных состояний мы получаем следующие результаты:

$$E^*(2_{1,1}^+) = \frac{1}{4}\hbar\sqrt{\frac{C}{B}} \left(\sqrt{25 + 4(\beta_0/(2\beta_{00}))^4} - \sqrt{9 + 4(\beta_0/(2\beta_{00}))^4} \right), \quad (79)$$

$$E^*(4_{1,2}^+) = E^*(2_{1,2}^+) = \frac{1}{4}\hbar\sqrt{\frac{C}{B}} \left(\sqrt{49 + 4(\beta_0/(2\beta_{00}))^4} - \sqrt{9 + 4(\beta_0/(2\beta_{00}))^4} \right), \quad (80)$$

$$E^*(0_{2,0}^+) = \frac{1}{4}\hbar\sqrt{\frac{C}{B}}. \quad (81)$$

При увеличении параметра $\beta_0/(2\beta_{00})$ отношение (80) приближается к величине 2,5, что соответствует пределу $O(6)$ динамической симметрии.

В отличие от случая прямоугольной ямы рассматриваемый потенциал содержит свободный параметр $\beta_0/(2\beta_{00})$ — отношение величины равновесной деформации к амплитуде нулевых колебаний. Поэтому результаты вычислений зависят от этого параметра. Мы можем зафиксировать величину $\beta_0/(2\beta_{00})$ так, чтобы получить экспериментальное значение энергии возбуждения $0_{2,0}^+$ -состояния и затем рассчитать остальные энергии. Фиксируем, например, $\beta_0/(2\beta_{00})$ так, чтобы для $E^*(0_{2,0}^+)/E^*(2_{1,1}^+)$ получить значение 3,03, как в случае с прямоугольной ямой. Тогда для $E^*(4_{1,2}^+)/E^*(2_{1,1}^+) = E^*(2_{1,2}^+)/E^*(2_{1,1}^+)$ получаем 2,21, что практически совпадает с результатом для прямоугольной ямы.

Как видно из выражения (77), все энергетические интервалы в квазиращионной полосе, построенной на $0_{2,0}^+$ -состоянии, совпадают с интервалами в полосе, построенной на основном состоянии. Этим данный потенциал отличается от прямоугольной ямы.

Отметим, что в данном случае, в противоположность случаю с потенциалом прямоугольной ямы, хотя аналитическое решение и найдено, но один из индексов вырожденной гипергеометрической функции $5/2s + 1/2$ является в общем случае иррациональным числом. Поэтому такая аппроксимация не приводит к динамической симметрии.

Основываясь по-прежнему на уравнении Бора–Моттельсона, исследуем поведение ядра вблизи критической точки фазового перехода первого рода от сферической к деформированной аксиально-симметричной форме. Начнем наше рассмотрение, как и в предыдущем случае, с уравнения (52). Будем предполагать, что потенциал $V(\beta, \gamma)$ имеет глубокий минимум при $\gamma = 0$. В этом случае решение уравнения Шредингера с гамильтонианом (52) имеет вид

$$\Psi(\beta, \gamma, \theta_i) = \varphi_{IK}(\beta, \gamma) D_{MK}^I(\theta_i), \quad (82)$$

где $D_{MK}^I(\theta_i)$ — функция Вигнера. При $\gamma = 0$ ротационный член в (52) может быть переписан следующим образом:

$$\sum_{k=1}^3 \frac{I_k^2}{\sin^2(\gamma - (2\pi/3)k)} = \frac{4}{3}(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2) + I_3^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{4}{3} \right). \quad (83)$$

Введя, как и выше, приведенную энергию $\varepsilon = (2B/\hbar^2)E$ и потенциал $u(\beta, \gamma) = (2B/\hbar^2)v(\beta, \gamma)$, мы приходим к уравнению

$$\left\{ -\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{1}{4\beta^2} \left[\frac{4}{3} I(I+1) + K^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{4}{3} \right) \right] + u(\beta, \gamma) \right\} \varphi_{IK}(\beta, \gamma) = \varepsilon \varphi_{IK}(\beta, \gamma), \quad (84)$$

где K — проекция углового момента на ось аксиальной симметрии.

Рассмотрим теперь случай, когда $u(\beta, \gamma) = u(\beta) + v(\gamma)$. Тогда уравнение (84) приближенно распадается на два уравнения

$$\left[-\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{I(I+1)}{3\beta^2} + u(\beta) \right] \rho_I(\beta) = \varepsilon_\beta \rho_I(\beta), \quad (85)$$

$$\left[-\frac{1}{\langle \beta^2 \rangle} \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{1}{4\langle \beta^2 \rangle} K^2 \right] \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{4}{3} \right) + v(\gamma) \omega_K(\gamma) = \varepsilon_\gamma \omega_K(\gamma), \quad (86)$$

где $\varepsilon = \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma$; $\varphi_{IK} = \rho_I(\beta) \omega_K(\gamma)$ и $\langle \beta^2 \rangle$ — среднее от β^2 по $\rho_I(\beta)$.

Предположим теперь, что $u(\beta)$ является прямоугольной ямой, как в (60), а $v(\gamma)$ — потенциал гармонического осциллятора с минимумом при $\gamma = 0$. В этом случае оба уравнения (85) и (86) могут быть решены. Для потенциала $u(\beta)$, взятого в виде прямоугольной ямы, мы приходим с помощью подстановки $\rho_I(\beta) = \beta^{-3/2}\tilde{\rho}_I(\beta)$ к уравнению

$$\frac{d^2 \tilde{\rho}_I}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\tilde{\rho}_I}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) \tilde{\rho}_I = 0 \quad (87)$$

и

$$\tilde{\rho}_I(\beta_w) = 0, \quad (88)$$

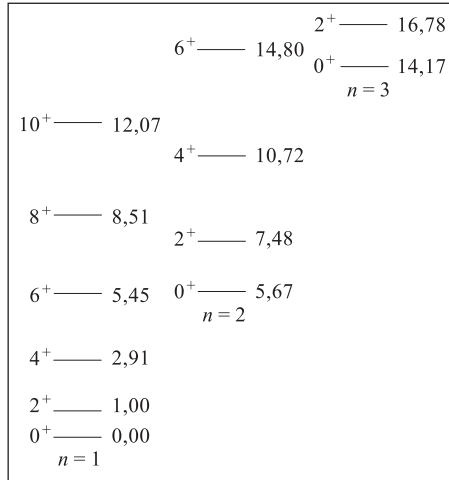


Рис. 2. Спектр низколежащих возбужденных состояний ядра вблизи критической точки фазового перехода от сферической формы к деформированной с аксиальной симметрией. Энергия первого возбужденного состояния принята равной единице. Показаны только состояния с невозбужденной γ -модой

для энергий уровней: $E_{n,I}$. Энергии возбуждения состояний, лежащих в основании различных вибрационных семейств, также фиксированы в таком подходе. Например, $(E_{2,0} - E_{1,0})/(E_{1,2} - E_{1,0}) = 5,67$.

Рассмотрим теперь возбуждение γ -моды. Подставим в (86) следующее выражение для $v(\gamma)$:

$$v(\gamma) = \frac{1}{2}(3a)^2\gamma^2. \quad (91)$$

где $z = \beta k$, $k = \sqrt{\varepsilon_\beta}$ и

$$\nu = \left(\frac{I(I+1)}{3} + \frac{9}{4}\right)^{1/2}. \quad (89)$$

Решением уравнения (87) является функция Бесселя

$$\rho_{n,I}(\beta) = c_{n,I}\beta^{-3/2}J_\nu(k_{n,I}\beta), \quad (90)$$

$$\varepsilon_{\beta;n,I} = (k_{n,I})^2, \quad k_{n,I} = \frac{x_{n,I}}{\beta_w},$$

где $x_{n,I}$ — n -й нуль функции $J_\nu(z)$; $c_{n,I}$ — нормировочная константа. Энергетический спектр, полученный из (90), показан на рис. 2, где все энергии указаны в единицах энергии первого возбужденного состояния. Уровни сгруппированы в семейства с одинаковым значением n . Интересно, что отношение $R_n \equiv (E_{n,4} - E_{n,0})/(E_{n,2} - E_{n,0})$ зависит от n . Так, $R_1 = 2,91$, а затем R_n убывает с увеличением n . Выше использовано следующее обозначение

Таблица 5. Сравнение экспериментальных отношений энергий и приведенных вероятностей $E2$ -переходов в ^{134}Ba с предсказаниями для $E(5)$ динамической симметрии

	$R_{4/2}$	$\frac{E(0_{2,0}^+)}{E(2_{1,1}^+)}$	$\frac{E(0_{2,0}^+)}{E(0_{1,3}^+)}$	$\frac{B(E2; 4_{1,2}^+ \rightarrow 2_{1,1}^+)}{B(E2; 2_{1,1}^+ \rightarrow 0_{1,0}^+)}$	$\frac{B(E2; 0_{2,0}^+ \rightarrow 2_{1,1}^+)}{B(E2; 2_{1,1}^+ \rightarrow 0_{1,0}^+)}$	$\frac{B(E2; 0_{2,0}^+ \rightarrow 2_{1,2}^+)}{B(E2; 0_{1,3}^+ \rightarrow 2_{1,2}^+)}$
$E(5)$	2,19	3,68	1,04	1,38	0,51	0
^{134}Ba	2,31	3,57	1,23	1,56(18)	0,42(12)	0,037(3)

Таблица 6. Сравнение экспериментальных значений приведенных вероятностей $E2$ -переходов в ^{152}Sm с предсказаниями для $X(5)$ -предела

	$B(E2; 4_1^+ \rightarrow 2_1^+)$	$B(E2; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+)$	$B(E2; 0_2^+ \rightarrow 2_1^+)$	$B(E2; 2_2^+ \rightarrow 0_2^+)$	$B(E2; 4_2^+ \rightarrow 2_2^+)$
$X(5)$	1,58	0,090	0,021	0,79	1,20
^{152}Sm	1,45	0,042	0,007	0,77	1,42

Примечание. Все приведенные вероятности даны в единицах $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$.

Тогда уравнение (86) становится радиальным уравнением для двумерного осциллятора со следующим решением:

$$\varepsilon_\gamma = \frac{3a}{\sqrt{\langle \beta^2 \rangle}} (n_\gamma + 1) - \frac{K^2}{3\langle \beta^2 \rangle}, \quad n_\gamma = 0, 1, 2, \dots \quad (92)$$

Если $n_\gamma = 0$, то $K = 0$. Если $n_\gamma = 1$, то $K = \pm 2$. Если $n_\gamma = 2$, то $K = 0, \pm 4$. Функция $\omega(\gamma)$ дается выражением

$$\omega_{n_\gamma, K}(\gamma) = c_{n, K} \gamma^{|K/2|} \exp(-3a\gamma^2/2) L_n^{|K|}(3a\gamma^2), \quad (93)$$

$$n = (n_\gamma - |K|)/2,$$

где $L_n^{|K|}$ — полином Лагерра, а $c_{n, K}$ — нормировочная константа. Значения I для заданных n и n_γ определяются величиной K . Для $K = 0$ $I = 0, 2, 4, \dots$. Для $K \neq 0$ $I = K, K + 1, K + 2, \dots$. Полная волновая функция $\Psi(\beta\gamma, \theta_i)$ должна быть симметризована:

$$\Psi(\beta, \gamma, \theta_i) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_{I, K}(\beta, \gamma) D_{MK}^I(\theta_i) + (-1)^{I+K} \varphi_{I, -K}(\beta, \gamma) D_{M-K}^I(\theta_i)]. \quad (94)$$

Результаты расчета приведенных вероятностей $E2$ -переходов показаны в табл. 5. Решение уравнения Бора, о котором шла речь выше, предназначено для описания фазового перехода между сферической и аксиально деформированной формами. В [2] это решение было обозначено через $X(5)$. Интересно сравнить свойства этого решения с результатами, приведенными в начале этого раздела для случая $E(5)$ динамической симметрии (см. табл. 6).

Рассмотрим индекс ν функции Бесселя, нули которой определяют энергии возбуждения. В случае $E(5)$ динамической симметрии это полуцелые числа, связанные с сеньорити τ , квантовым числом подалгебры $SO(5)$. Для решения, обозначенного через $X(5)$, это иррациональное число. По этой причине решение, обозначенное через $X(5)$, не отвечает динамической симметрии в обычном смысле.

5. ЯДРА, СВОЙСТВА КОТОРЫХ БЛИЗКИ К ПРЕДСКАЗАНИЯМ ДЛЯ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК

В разд. 4 были получены два аналитических решения, предлагаемых для описания свойств ядер вблизи критических точек фазовых переходов. Одно решение, отвечающее $E(5)$ динамической симметрии, описывает ядра, локализованные вблизи тройной точки. Второе решение, обозначенное как $X(5)$,

предложено для описания ядер вблизи критической точки фазового перехода от сферической формы к аксиально деформированной. Возникает естественный вопрос, существуют ли ядра, свойства которых близки к предсказанным для $E(5)$ - и $X(5)$ -решений.

В [21] было показано, что свойства ^{134}Ba находятся в хорошем соответствии с предсказаниями для предела $E(5)$ динамической симметрии. Прежде чем перейти непосредственно к сравнению, необходимо принять во внимание тот факт, что $^{134}_{56}\text{Ba}_{78}$ имеет только десять валентных нуклонов (протоны — частицы, а нейтроны — дырки) и, следовательно, далек от предельного случая $N \rightarrow \infty$, которому фактически соответствует решение, полученное для уравнения Бора–Моттельсона. Чтобы принять во внимание конечность числа валентных нуклонов, нужно выполнить расчеты, основываясь на гамильтониане модели взаимодействующих бозонов для $N = 5$, $\chi = 0$ и $\eta = \eta_{\text{trip}}$. Это, в свою очередь, позволит проверить, как скажутся на результатах отклонения η от η_{trip} .

Сравнение результатов таких расчетов с экспериментальными данными для ^{134}Ba , относящимися к энергиям и вероятностям $E2$ -переходов, показывает, что в целом соответствие очень хорошее. Это относится и к ключевым величинам, таким как наиболее характерные отношения энергий $R_{4/2} \equiv E(4_{1,2}^+)/E(2_{1,1}^+)$, $E(0_{2,0}^+)/E(2_{1,1}^+)$ и $E(0_{2,0}^+)/E(0_{1,3}^+)$ и наиболее характерные отношения приведенных вероятностей $E2$ -переходов $B(E2; 4_{1,2}^+ \rightarrow 2_{1,1}^+)/B(E2; 2_{1,1}^+ \rightarrow 0_{1,0}^+)$, $B(E2; 0_{2,0}^+ \rightarrow 2_{1,1}^+)/B(E2; 2_{1,1}^+ \rightarrow 0_{1,0}^+)$, $B(E2; 0_{2,0}^+ \rightarrow 2_{1,2}^+)/B(E2; 0_{2,0}^+ \rightarrow 2_{1,1}^+)$ и $B(E2; 0_{1,3}^+ \rightarrow 2_{1,1}^+)/B(E2; 0_{1,3}^+ \rightarrow 2_{1,2}^+)$. Эти отношения энергий и приведенных вероятностей переходов фиксируются симметрией и не содержат свободных параметров. Сравнение с экспериментальными данными для всех перечисленных выше величин приведено в табл. 5. Из табл. 5 видно, что отношение $R_{4/2}$ воспроизводится хорошо и принимает как раз промежуточное значение между предельными случаями $U(5)$ ($R_{4/2} = 2, 0$) и $O(6)$ ($R_{4/2} = 2, 5$) симметрии. Особенно интересно, как указатель $E(5)$ -симметрии, отношение $B(E2; 0_{2,0}^+ \rightarrow 2_{1,1}^+)/B(E2; 2_{1,1}^+ \rightarrow 0_{1,0}^+)$. В пределе $U(5)$ -симметрии это отношение равно 1,6. В пределе $O(6)$ -симметрии переход $0_{2,0}^+ \rightarrow 2_{1,1}^+$ запрещен как переход с $\Delta\sigma = 2$. Предсказание $E(5)$ -симметрии — 0,5, а экспериментальное значение — $0,42 \pm 0,12$. Правило отбора для распада $0_{1,3}^+$ -уровня, а именно: в случае $E(5)$ -симметрии переход разрешен только в состоянии $2_{1,2}^+$, также подтверждено экспериментально. Однако в этом случае было бы желательно иметь и экспериментальные значения самих величин вероятностей переходов, а не только их отношение. Экспериментальное значение энергии $0_{2,0}^+$ -состояния также находится в хорошем соответствии с предсказанием $E(5)$ -симметрии.

Интересно, в какой степени небольшие расхождения между теоретическими и экспериментальными результатами, приведенными в табл. 5, могут

быть скорректированы небольшими изменениями параметров χ и η . Такие расчеты показали, что ^{134}Ba либо точно локализован в тройной точке, либо сдвинут в сторону $O(6)$ -симметрии.

Имеются и другие ядра, свойства которых близки к предсказаниям $E(5)$ -симметрии. Это некоторые из изотопов Zn и Pd. Однако нужна дополнительная экспериментальная информация, особенно о вероятностях $E2$ -переходов, включая и их абсолютные значения.

Рассмотрим теперь область фазового перехода от сферической формы к аксиально деформированной. В [13] было показано, что свойства ^{152}Sm очень близки к полученным для $X(5)$ -решения. Отношение $R_{4/2}$ в ^{152}Sm , равное $R_{4/2} = 3,01$, близко к полученному для $X(5)$ -решения, где $R_{4/2} = 2,91$. В то же время экспериментальное значение $R_{4/2}$ для полосы, построенной на $0_{2,0}^+$ -состоянии, существенно меньше — 2,69. $X(5)$ -результат — 2,80. Это говорит о том, что основное состояние ^{152}Sm более деформировано, чем $0_{2,0}^+$ -состояние, что подтверждает предположение о сосуществовании сферической и деформированной фаз в этом ядре. Однако эти состояния с различной формой имеют коллективные по величине связывающие их $E2$ -переходы, что предполагает смешивание фаз. Различие в деформациях между группами состояний, построенных на 0_1^+ - и 0_2^+ -уровнях, подтверждается тем, что $B(E2; 2_2^+ \rightarrow 0_2^+)$ на 25 % меньше, чем $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$. Общее согласие между экспериментальными данными и теоретическими результатами, полученными в $X(5)$ -пределе, достаточно хорошее как в отношении энергий возбуждения, так и для вероятностей переходов. Например, экспериментальное значение отношения $E(0_2^+)/E(2_1^+)$ равно 5,62, тогда как теоретический результат составляет 5,67. Существенно расходятся предсказания и экспериментальные данные для величины $E(2_2^+) - E(0_2^+)$: экспериментальное значение заметно меньше предсказанного.

Приведенные вероятности $E2$ -переходов внутри групп состояний с $n = 1$ и $n = 2$ находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными, что демонстрирует зависимость от углового момента I , промежуточную между вибрационным и ротационным пределами. Предсказаны также вероятности переходов между группами состояний с $n = 1$ и $n = 2$. Переходы $I \rightarrow I + 2$ предсказаны коллективными, что находится в соответствии с экспериментальными данными. Остальные переходы менее коллективны. Однако рассчитанные абсолютные значения $B(E2)$ для переходов между состояниями с $n = 1$ и $n = 2$ в три раза больше экспериментальных, хотя отношения вероятностей хорошо согласуются. Некоторые из значений вероятностей переходов приведены в табл. 6.

Таким образом, мы показали, что ядра ^{134}Ba и ^{152}Sm по своим свойствам близки к предсказаниям для ядер, находящихся вблизи критических точек фазовых переходов второго и первого рода соответственно.

6. АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ПЕРЕХОДНОЙ ОБЛАСТИ $SO(6) \leftrightarrow U(5)$

Как было показано в [14], диагонализация гамильтониана, описывающего переходную область, может быть осуществлена, если использовать аффинную алгебру $\widehat{SU}(1, 1)$. Для построения $\widehat{SU}(1, 1)$ рассмотрим сначала некомпактную алгебру $SU(1, 1)$. Ее генераторы S^\pm , S^0 удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[S^0, S^\pm] = \pm S^\pm, \quad [S^+, S^-] = -2S^0. \quad (95)$$

Оператор Казимира этой алгебры имеет следующий вид:

$$\hat{C}_2(SU(1, 1)) = S^0(S^0 - 1) - S^+S^-. \quad (96)$$

Обозначим через $|k\mu\rangle$ базисный вектор, отвечающий неприводимому представлению группы $SU(1, 1)$. Здесь k — любое положительное вещественное число, а $\mu = k, k+1, k+2, \dots$. Тогда

$$\hat{C}_2(SU(1, 1))|k\mu\rangle = k(k-1)|k\mu\rangle, \quad (97)$$

$$S^0|k\mu\rangle = \mu|k\mu\rangle. \quad (98)$$

Известно, что базисные состояния редукционных цепочек $U(5) \supset SO(5)$ и $SO(6) \supset SO(5)$ являются одновременно базисами редукционных цепочек $SU^d(1, 1) \supset U(1)$ и $SU^{sd}(1, 1) \supset U(1)$ соответственно. Для случая $U(5) \supset SO(5)$ мы имеем

$$|Nn_d\nu n_\Delta IM\rangle = \left| N, k^d = \frac{1}{2} \left(\nu + \frac{5}{2} \right), \mu_d = \frac{1}{2} \left(n_d + \frac{5}{2} \right), n_\Delta IM \right\rangle, \quad (99)$$

где $Nn_d\nu IM$ — квантовые числа групп $U(6)$, $U(5)$, $SO(5)$, $SO(3)$ и $SO(2)$ соответственно, n_Δ — дополнительное квантовое число, необходимое при редукции $SO(5) \rightarrow SO(3)$; k^d и μ_d — квантовые числа $SU^d(1, 1)$ и $U(1)$ соответственно.

В модели взаимодействующих бозонов генераторы $SU^d(1, 1)$ имеют вид

$$S^+(d) = \frac{1}{2}(d^+ \cdot d^+), \quad S^-(d) = \frac{1}{2}(\bar{d} \cdot \bar{d}), \quad (100)$$

$$S^0(d) = \frac{1}{4} \sum_\nu (d_\nu^+ d_\nu + d_\nu d_\nu^+). \quad (101)$$

Оператор Казимира группы $SO(5)$ также может быть выражен через оператор Казимира группы $SU^d(1, 1)$

$$\hat{C}_2(SU(1, 1)) = S^0(S^0 - 1) - \frac{1}{4}(d^+ \cdot d^+)(\bar{d} \cdot \bar{d}) \quad (102)$$

следующим образом:

$$\hat{C}_2(SO(5)) = 4\hat{C}_2(SU^d(1, 1)) - \frac{5}{4}. \quad (103)$$

Генераторы группы $SU(1, 1)$ могут быть построены и с помощью операторов монопольных бозонов

$$\frac{1}{2}s^+s^+, \quad \frac{1}{2}ss, \quad \frac{1}{4}(s^+s + ss^+). \quad (104)$$

Обозначим эту последнюю алгебру через $SU^s(1, 1)$. Объединяя генераторы (100), (101) и (104), можно построить объединенную алгебру $SU^{sd}(1, 1)$:

$$S^+(sd) = \frac{1}{2}(d^+d^+ \pm s^+s^+), \quad S^-(sd) = \frac{1}{2}(\bar{d}\bar{d} \pm ss), \quad (105)$$

$$S^0(sd) = \frac{1}{4} \sum_{\nu} (d_{\nu}^+d_{\nu} + d_{\nu}d_{\nu}^+) + \frac{1}{4}(s^+s^+ + ss). \quad (106)$$

Базисные векторы редукционной цепочки $U(6) \supset SO(6) \supset SO(5) \supset SO(3)$ являются одновременно базисными векторами $SU^{sd}(1, 1)$ и $SU^d(1, 1)$. Отметим, что знак в (105) может быть выбран произвольно.

Между базисными векторами $SO(6)$ и $SU^{sd}(1, 1)$ имеет место следующее соотношение:

$$\begin{aligned} |N\sigma\nu n_{\Delta}IM\rangle &= \left| N, k^{sd} = \frac{1}{2}(\sigma + 3), \mu^{sd} = \frac{1}{2}(N + 3), k^d = \right. \\ &= \left. \frac{1}{2} \left(\nu + \frac{5}{2} \right), n_{\Delta}IM \right\rangle, \quad (107) \end{aligned}$$

где σ — квантовое число $SO(6)$. Ясно, что волновые векторы $SO(6)$ могут быть выражены как результат связи базисных векторов $SU^d(1, 1)$ и $SU^s(1, 1)$:

$$|N\sigma\nu\alpha IM\rangle = \sum_{\mu_d, \mu_s} C_{k^d \mu^d k^s \mu^s}^{k^{sd} \mu^{sd}} |N, k^d \mu_d; k^s \mu_s; n_{\Delta}IM\rangle, \quad (108)$$

где $C_{k^d \mu^d k^s \mu^s}^{k^{sd} \mu^{sd}}$ — $SU(1, 1)$ -коэффициент Клебша–Гордона. Операторы Казимира групп $SO(6)$ и $SU^{sd}(1, 1)$ связаны соотношением $\hat{C}_2(SU^{sd}(1, 1)) = (1/4)\hat{C}_2(SO(6)) + 3/4$.

Сделаем следующий шаг к диагонализации гамильтониана модели взаимодействующих бозонов при $\chi = 0$. Рассмотрим бесконечную алгебру операторов

$$S_n^{\pm} = c_s^{2n+1} S^{\pm}(s) + c_d^{2n+1} S^{\pm}(d), \quad (109)$$

$$S_n^0 = c_s^{2n} S^0(s) + c_d^{2n} S^0(d), \quad (110)$$

где c_s и c_d являются вещественными параметрами, а $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Отметим, что случай $c_s = c_d$ отвечает пределу $SO(6)$ динамической симметрии.

Генераторы (109) и (110) удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[S_m^+, S_n^-] = -2S_{m+n+1}^0, \quad [S_m^0, S_n^\pm] = \pm S_{m+n}^\pm. \quad (111)$$

Таким образом, операторы S_m^μ ($\mu = 0, \pm; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) формируют аффинную алгебру Ли $\widehat{SU}(1, 1)$.

Нижайший весовой вектор $|lw\rangle$ этой алгебры удовлетворяет условиям

$$S^-(s)|lw\rangle = 0, \quad S^-(d)|lw\rangle = 0. \quad (112)$$

Так как полное число бозонов N конечно, а базис должен соответствовать редукционной цепочке $SO(5) \supset SO(3)$, то имеет место следующее соотношение:

$$\begin{aligned} |lw\rangle &= \left| N; k_d = \frac{1}{2} \left(\nu + \frac{5}{2} \right), \mu_d = \frac{1}{2} \left(n_d + \frac{5}{2} \right); k_s = \right. \\ &= \left. \frac{1}{2} \left(\nu_s + \frac{1}{2} \right), \mu_s = \frac{1}{2} \left(n_s + \frac{1}{2} \right); n_{\Delta IM} \right\rangle \end{aligned} \quad (113)$$

с $n_d = \nu$ и $n_s = \nu_s = 0$ или 1.

Используя генераторы $\widehat{SU}(1, 1)$, мы можем построить гамильтониан модели взаимодействующих бозонов, отвечающий переходу $U(5) \leftrightarrow SO(6)$:

$$\hat{H} = gS_0^+ S_0^- + \alpha S_1^0 + \gamma \hat{C}_2(SO(5)) + \delta \hat{C}_2(SO(3)), \quad (114)$$

где $g, \alpha, \gamma, \delta$ — вещественные параметры. Гамильтониан (114) эквивалентен гамильтониану $SO(6)$, если $c_s = c_d$, и гамильтониану $U(5)$, если $c_s = 0$, а $c_d \neq 0$.

Собственные функции гамильтониана (114) имеют вид

$$|k; \nu_s \nu n_{\Delta IM}\rangle = \mathcal{N} S_{x_1}^+ S_{x_2}^+ \dots S_{x_k}^+ |lw\rangle, \quad (115)$$

где \mathcal{N} — нормировочная константа, а

$$S_{x_i}^+ = \frac{c_s}{1 - c_s^2 x_i} S^+(s) + \frac{c_d}{1 - c_d^2 x_i} S^+(d). \quad (116)$$

Величины x_i определяются следующей системой уравнений:

$$\frac{\alpha}{x_i} = \frac{g c_s^2 (\nu_s + 1/2)}{1 - c_s^2 x_i} + \frac{g c_d^2 (\nu_d + 5/2)}{1 - c_d^2 x_i} - \sum_{j \neq i} \frac{2}{x_i - x_j}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (117)$$

Собственные значения $E^{(k)}$ гамильтониана (114) определяются соотношениями

$$E^{(k)} = h^{(k)} + \gamma\nu(\nu + 1) + \delta I(I + 1) + \alpha\Lambda_1^0, \quad (118)$$

$$h^{(k)} = \sum_{i=1}^k \frac{\alpha}{x_i}, \quad (119)$$

$$\Lambda_1^0 = \frac{1}{2} \left[c_s^2 \left(\nu_s + \frac{1}{2} \right) + c_d^2 \left(\nu + \frac{5}{2} \right) \right]. \quad (120)$$

Квантовое число k следующим образом связано с полным числом бозонов N :

$$N = 2k + \nu_s + \nu. \quad (121)$$

Волновые функции (115) и соотношения, определяющие собственные значения (117)–(121), могут быть использованы для описания свойств ядер в области фазового перехода второго рода.

7. СХЕМА Q -ФОНОНОВ И СВОЙСТВА ЯДЕР В ОБЛАСТИ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА ОТ СФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ К АКСИАЛЬНО ДЕФОРМИРОВАННОЙ

Схема Q -фононов была предложена и развита в работах [15–18]. Она основывается на следующих соображениях. Основные состояния ядер имеют очень сложную структуру. Для описания основного состояния среднего или тяжелого ядра требуется огромное конфигурационное пространство. Поэтому полное описание волновой функции основного состояния лежит за пределами возможностей существующих теоретических подходов. В то же время возбужденные состояния могут быть получены с достаточно хорошей точностью, если действовать одночастичными операторами на волновую функцию основного состояния. Именно такой способ построения волновых функций возбужденных состояний и реализуется в схеме Q -фононов. В этом подходе низколежащие коллективные состояния четно-четных ядер представлены как результат многократного действия квадрупольного оператора на основное состояние ядра:

$$|I^+, n\rangle = \mathcal{N}^{(I,n)} \underbrace{(Q \dots Q)}_n |0_1^+\rangle, \quad (122)$$

где $|0_1^+\rangle$ — вектор основного состояния. Волновые векторы (122) формируют базис для разложения собственных векторов гамильтониана модели взаимодействующих бозонов. Возникает вопрос: как много базисных состояний такого типа потребуется, чтобы описать собственные векторы гамильтониана

с достаточной точностью? Было показано, что собственные векторы иррациональных состояний могут быть описаны с хорошей точностью (лучше чем 90 % от нормы состояния) во всем треугольнике Кастена с помощью простого универсального выражения, содержащего только одну Q -фононную конфигурацию

$$|I^+, 1\rangle = \mathcal{N}^{(I,1)} \underbrace{(Q \dots Q)}_{I/2} |0_1^+\rangle. \quad (123)$$

Затем было показано, что возбужденное 2^+ -состояние, которое является двухфононным состоянием в пределе гармонических квадрупольных колебаний (сферические ядра) и γ -вибрационным состоянием в пределе аксиально деформированного ядра, может быть описано с точностью лучше 90 % во всем треугольнике Кастена с помощью следующей Q -фононной конфигурации:

$$|2_{QQ}^+\rangle = \mathcal{N}^{(2,2)} \left[(QQ)_{(2)} - \frac{\langle 0_1^+ | (QQQ)_{(0)} | 0_1^+ \rangle}{\langle 0_1^+ | (QQ)_{(0)} | 0_1^+ \rangle} Q \right] |0_1^+\rangle. \quad (124)$$

Вектор (124) ортогонален вектору (123) с $I = 2$. Чтобы описать слабый распад 2_{γ}^+ -состояния в основное состояние, необходимо учесть небольшое смешивание векторов (124) и (123) с $I = 2$. Последний вектор состояния имеет вид

$$|2_Q^+\rangle = \mathcal{N}^{(2,Q)} Q |0_1^+\rangle. \quad (125)$$

С учетом такой примеси 2_{γ}^+ -состояние будет описываться с точностью около 98 % от нормы.

Второе возбужденное 0^+ -состояние (0_2^+), которое интерпретируется как двухфононное состояние в сферическом пределе и как β -вибрационное состояние в пределе аксиально деформированного ядра, может быть представлено во всем треугольнике Кастена как линейная комбинация следующих векторов:

$$|0_{QQ}^+\rangle = \frac{((QQ)_0 - \langle 0_1^+ | (QQ)_0 | 0_1^+ \rangle)}{\sqrt{\langle 0_1^+ | (QQ)_0 (QQ)_0 | 0_1^+ \rangle - \langle 0_1^+ | (QQ)_0 | 0_1^+ \rangle^2}} |0_1^+\rangle \quad (126)$$

и

$$|0_{QQQ}^+\rangle = \frac{((QQQ)_0 - \langle 0_1^+ | (QQQ)_0 | 0_1^+ \rangle)}{\sqrt{\langle 0_1^+ | (QQQ)_0 (QQQ)_0 | 0_1^+ \rangle - \langle 0_1^+ | (QQQ)_0 | 0_1^+ \rangle^2}} |0_1^+\rangle. \quad (127)$$

Волновые векторы (126) и (127) линейно независимы, но неортогональны. Однако они могут быть ортогонализированы стандартным образом. Вектор, ортогональный $|0_{QQ}^+\rangle$, обозначим $|\widetilde{0_{QQ}^+}\rangle$. В общем случае

$$|0_2^+\rangle = \cos \varphi |0_{QQ}^+\rangle + \sin \varphi |\widetilde{0_{QQ}^+}\rangle. \quad (128)$$

Однако при больших значениях $|\chi|$, т. е. на линии, связывающей в треугольнике Кастена сферические ядра с аксиально деформированными, преобладает первая компонента в (128) за исключением области вблизи деформированного предела. Вторая компонента становится основной при $\chi = 0$.

Итак, в модели взаимодействующих бозонов во всем треугольнике Кастена определена Q -фононная структура наиболее исследованных низколежащих коллективных состояний. Эта структура достаточно проста и содержит одну-две компоненты, необходимые для описания с точностью не ниже 90% от нормы. Конечно, при изменении контрольных параметров η и χ изменяется структура основного состояния. Таким образом, используя схему Q -фононов, мы можем исследовать свойства ядер и в области фазовых переходов.

Имея простые выражения для волновых векторов наиболее исследованных низколежащих коллективных состояний ядер в терминах квадрупольного оператора Q и волнового вектора основного состояния ядра, мы можем получить соотношения между различными наблюдаемыми.

Рассмотрим поведение приведенных вероятностей $E2$ -переходов при фазовом переходе $U(5) \leftrightarrow SU(3)$. В области фазового перехода этого типа ядра являются мягкими относительно β -колебаний и жесткими по отношению к γ -колебаниям. Поэтому для волнового вектора 0_2^+ -состояния можно использовать следующее выражение:

$$|0_2^+\rangle = |0_{QQ}^+\rangle. \quad (129)$$

При описании 2_1^+ - и 2_2^+ -состояний мы учтем смешивание 2_Q^+ - и 2_{QQ}^+ -компонент:

$$|2_1^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+R_1}}|2_{\mu,Q}^+\rangle + \text{sign}(\langle 0_1^+|(QQQ)_0|0_1^+\rangle)\sqrt{\frac{R_1}{1+R_1}}|2_{\mu,QQ}^+\rangle, \quad (130)$$

$$|2_2^+\rangle = -\text{sign}(\langle 0_1^+|(QQQ)_0|0_1^+\rangle)\sqrt{\frac{R_1}{1+R_1}}|2_{\mu,Q}^+\rangle + \frac{1}{\sqrt{1+R_1}}|2_{\mu,QQ}^+\rangle, \quad (131)$$

где

$$R_1 = \frac{B(E2; 2_2^+ \rightarrow 0_1^+)}{B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)}. \quad (132)$$

Знак величины $\langle 0_1^+|(QQQ)_0|0_1^+\rangle$ совпадает со знаком квадрупольного момента первого 2^+ -состояния. Нормировочные коэффициенты даются выражениями

$$\mathcal{N}^{(2,Q)} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \langle 0_1^+|(QQ)_0|0_1^+\rangle \right)^{-1/2}, \quad (133)$$

$$\mathcal{N}^{(2,QQ)} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\langle 0_1^+ | ((QQ)_2(QQ)_2)_0 | 0_1^+ \rangle - \frac{\langle 0_1^+ | (QQQ)_0 | 0_1^+ \rangle^2}{\langle 0_1^+ | (QQ)_0 | 0_1^+ \rangle} \right] \right)^{-1/2}. \quad (134)$$

На основе представленных выше формул для векторов состояний с помощью прямых вычислений можно получить следующие выражения для приведенных матричных элементов оператора квадрупольного момента $Q_{2\mu}$:

$$\langle 2_\gamma^+ \parallel Q \parallel 0_2^+ \rangle = -\text{sign}(\langle 0_1^+ | (QQQ)_0 | 0_1^+ \rangle) \sqrt{\frac{R_1}{1+R_1}} \sqrt{A} + \frac{5^{1/4}}{\sqrt{1+R_1}} \frac{(T-1)B}{\sqrt{N_1 N_2}}, \quad (135)$$

$$\langle 2_\gamma^+ \parallel Q \parallel 0_1^+ \rangle = -\text{sign}(\langle 0_1^+ | (QQQ)_0 | 0_1^+ \rangle) \times \sqrt{\frac{R_1}{1+R_1}} \sqrt{\sqrt{5} \langle 0_1^+ | (QQ)_0 | 0_1^+ \rangle}, \quad (136)$$

где

$$T = \frac{\langle 0_1^+ | (QQQ)_0 (QQ)_0 | 0_1^+ \rangle \langle 0_1^+ | (QQ)_0 | 0_1^+ \rangle}{\langle 0_1^+ | (QQ)_0^2 | 0_1^+ \rangle \langle 0_1^+ | (QQQ)_0 | 0_1^+ \rangle}, \quad (137)$$

$$A = \sqrt{5} \left(\frac{\langle 0_1^+ | (QQ)_0^2 | 0_1^+ \rangle}{\langle 0_1^+ | (QQ)_0 | 0_1^+ \rangle} - \langle 0_1^+ | (QQ)_0 | 0_1^+ \rangle \right), \quad (138)$$

$$B = \frac{\langle 0_1^+ | (QQ)_0^2 | 0_1^+ \rangle \langle 0_1^+ | (QQQ)_0 | 0_1^+ \rangle}{\langle 0_1^+ | (QQ)_0 | 0_1^+ \rangle}, \quad (139)$$

$$N_1 = \frac{2\sqrt{5}}{7} \langle 0_1^+ | (QQ)_0^2 | 0_1^+ \rangle - \frac{\langle 0_1^+ | (QQQ)_0 | 0_1^+ \rangle^2}{\langle 0_1^+ | (QQ)_0 | 0_1^+ \rangle}, \quad (140)$$

$$N_2 = \langle 0_1^+ | (QQ)_0^2 | 0_1^+ \rangle - \langle 0_1^+ | (QQ)_0 | 0_1^+ \rangle^2. \quad (141)$$

Используя (135)–(141), получаем следующий результат для отношения приведенных матричных элементов:

$$\frac{\langle 2_\gamma^+ \parallel Q \parallel 0_2^+ \rangle}{\langle 2_\gamma^+ \parallel Q \parallel 0_1^+ \rangle} = \sqrt{K_4 - 1} - \frac{T-1}{\sqrt{R_1}} K_4 \left(\frac{7}{2\sqrt{5}} \frac{\langle 0_1^+ | (QQQ)_0 | 0_1^+ \rangle^2}{\langle 0_1^+ | (QQ)_0 | 0_1^+ \rangle^3} \right)^{1/2} \times \left[(K_4 - 1) \left(K_4 - \frac{7}{2\sqrt{5}} \frac{\langle 0_1^+ | (QQQ)_0 | 0_1^+ \rangle^2}{\langle 0_1^+ | (QQ)_0 | 0_1^+ \rangle^3} \right) \right]^{-1/2}, \quad (142)$$

где

$$K_4 = \frac{\langle 0_1^+ | (QQ)_0^2 | 0_1^+ \rangle}{\langle 0_1^+ | (QQ)_0 | 0_1^+ \rangle^2}; \quad (143)$$

$$\begin{aligned} \frac{\langle 2_1^+ \parallel Q \parallel 0_2^+ \rangle}{\langle 2_1^+ \parallel Q \parallel 0_1^+ \rangle} &= \sqrt{K_4 - 1} + (T-1) \sqrt{R_1} K_4 \left(\frac{7}{2\sqrt{5}} \frac{\langle 0_1^+ | (QQQ)_0 | 0_1^+ \rangle^2}{\langle 0_1^+ | (QQ)_0 | 0_1^+ \rangle^3} \right)^{1/2} \times \\ &\times \left[(K_4 - 1) \left(K_4 - \frac{7}{2\sqrt{5}} \frac{\langle 0_1^+ | (QQQ)_0 | 0_1^+ \rangle^2}{\langle 0_1^+ | (QQ)_0 | 0_1^+ \rangle^3} \right) \right]^{-1/2}. \quad (144) \end{aligned}$$

Сравнивая (142) и (144), приходим к соотношению, содержащему только экспериментально измеряемые величины:

$$\left| \frac{\langle 2_\gamma^+ \parallel Q \parallel 0_2^+ \rangle}{\langle 2_\gamma^+ \parallel Q \parallel 0_1^+ \rangle} \right| = \sqrt{K_4 - 1} - \frac{1}{R_1} \left(\left| \frac{\langle 2_1^+ \parallel Q \parallel 0_2^+ \rangle}{\langle 2_1^+ \parallel Q \parallel 0_1^+ \rangle} \right| - \sqrt{K_4 - 1} \right), \quad (145)$$

или

$$R_1 \left| \frac{\langle 2_\gamma^+ \parallel Q \parallel 0_2^+ \rangle}{\langle 2_\gamma^+ \parallel Q \parallel 0_1^+ \rangle} \right| = (1 + R_1) \sqrt{K_4 - 1} - \left| \frac{\langle 2_1^+ \parallel Q \parallel 0_2^+ \rangle}{\langle 2_1^+ \parallel Q \parallel 0_1^+ \rangle} \right|. \quad (146)$$

В терминах вероятностей $E2$ -переходов последнее соотношение может быть переписано следующим образом:

$$\begin{aligned} R_1 \sqrt{\frac{B(E2; 2_\gamma^+ \rightarrow 0_2^+)}{B(E2; 2_\gamma^+ \rightarrow 0_1^+)}} &= (1 + R_1) \sqrt{\frac{\langle 0_1^+ | (QQ)_0 (QQ)_0 | 0_1^+ \rangle}{\langle 0_1^+ | (QQ)_0 | 0_1^+ \rangle^2} - 1} - \\ &- \sqrt{\frac{B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_2^+)}{B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)}}. \quad (147) \end{aligned}$$

Вспользуемся приближенным соотношением

$$\frac{\langle 0_1^+ | (QQ)_0^2 | 0_1^+ \rangle}{\langle 0_1^+ | (QQ)_0 | 0_1^+ \rangle^2} - 1 \approx \left(\frac{\langle 0_1^+ | (QQ)_0 | 0_2^+ \rangle}{\langle 0_1^+ | (QQ)_0 | 0_1^+ \rangle} \right)^2. \quad (148)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_2^+)}{B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)} &= \left(\frac{\langle 2_1^+ \parallel Q \parallel 0_2^+ \rangle}{\langle 2_1^+ \parallel Q \parallel 0_1^+ \rangle} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{\langle 2_1^+, \mu | Q_\mu | 0_2^+ \rangle}{\langle 2_1^+, \mu | Q_\mu | 0_1^+ \rangle} \right)^2 = \left(\frac{\langle 0_1^+ | (-1)^\mu Q_{-\mu} Q_\mu | 0_2^+ \rangle}{\langle 0_1^+ | (-1)^\mu Q_{-\mu} Q_\mu | 0_1^+ \rangle} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{\langle 0_1^+ | (QQ)_0 | 0_2^+ \rangle}{\langle 0_1^+ | (QQ)_0 | 0_1^+ \rangle} \right)^2 \approx \frac{\langle 0_1^+ | (QQ)_0 (QQ)_0 | 0_1^+ \rangle}{\langle 0_1^+ | (QQ)_0 | 0_1^+ \rangle^2} - 1. \quad (149) \end{aligned}$$

Подставляя этот результат в (147), получаем

$$\sqrt{\frac{B(E2; 2_{\gamma}^{+} \rightarrow 0_2^{+})}{B(E2; 2_{\gamma}^{+} \rightarrow 0_1^{+})}} = \sqrt{\frac{B(E2; 2_1^{+} \rightarrow 0_2^{+})}{B(E2; 2_1^{+} \rightarrow 0_1^{+})}} \quad (150)$$

или

$$\frac{B(E2; 2_{\gamma}^{+} \rightarrow 0_2^{+})}{B(E2; 2_1^{+} \rightarrow 0_1^{+})} = \frac{B(E2; 0_2^{+} \rightarrow 2_1^{+})}{5B(E2; 2_1^{+} \rightarrow 0_1^{+})} R_1. \quad (151)$$

Отношение, стоящее справа в (151), заметно убывает в переходной области при движении от сферических ядер к критической точке, а затем растет при приближении к аксиально деформированным ядрам благодаря смешиванию состояний $(QQ)_2|0_1^{+}\rangle$ и $(QQQ)_2|0_1^{+}\rangle$, которое увеличивается из-за того, что β -мода становится более жесткой, как это показано в [17]. В ^{152}Sm $R_1 = 0,025$, а $B(E2; 0_2^{+} \rightarrow 2_1^{+})/B(E2; 2_1^{+} \rightarrow 0_1^{+}) = 0,229$. Подставляя эти данные в (151), получаем

$$\frac{B(E2; 2_{\gamma}^{+} \rightarrow 0_2^{+})}{B(E2; 2_{\gamma}^{+} \rightarrow 0_1^{+})} = 0,0011, \quad (152)$$

тогда как экспериментальное значение этой величины 0,0012.

8. НЕАКСИАЛЬНЫЕ ЯДРА

В предыдущих разделах были рассмотрены методы анализа свойств ядер в критических точках фазовых переходов. Были найдены простые аналитические решения для критических точек фазовых переходов $U(5) \leftrightarrow SU(3)$ [1] и $U(5) \leftrightarrow O(6)$ [2]. Проведен детальный анализ фазовых переходов между ядрами различной формы в рамках модели взаимодействующих бозонов [3, 19]. Анализ экспериментальных данных показал, что имеются ядра, свойства которых близки к свойствам, предсказанным для ядерных систем, локализованных в критических точках [20, 21]. Однако до сих пор не рассматривались возможности перехода к неаксиальным ядрам. Нельзя, однако, исключить, что в ряде областей карты нуклидов, особенно благодаря расширению области исследуемых ядер в связи с появлением радиоактивных пучков, могут существовать неаксиальные деформированные ядра или, по крайней мере, ядра, проявляющие мягкость относительно перехода к неаксиальной деформации. Целью данного раздела [22] является включение в рассмотрение фазовых переходов между различными формами ядра также и неаксиальной формы. Анализ будет проведен в рамках модели взаимодействующих бозонов, так как эта модель особенно удобна для рассмотрения систем с конечным числом частиц.

Форму ядра в основном состоянии удобно описывать, как это уже отмечалось выше, используя три угла Эйлера, характеризующие ориентацию ядра в лабораторной системе координат, и переменные деформации β и γ . С помощью последних строится когерентное состояние $|N, \beta, \gamma\rangle$ [7]

$$|N, \beta, \gamma\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!(1+\beta^2)^N}} (B^+)^N |0\rangle, \quad (153)$$

где

$$B^+ \equiv s^+ + \beta \left(\cos \gamma d_0^+ + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \gamma (d_2^+ + d_{-2}^+) \right), \quad (154)$$

s^+ — оператор рождения монопольного бозона; d_μ^+ — оператор рождения квадрупольного бозона; $|0\rangle$ — бозонный вакуум.

Усредняя гамильтониан по состоянию (153), мы получаем энергию деформации ядра $E(N; \beta, \gamma)$

$$E(N; \beta, \gamma) = \langle N, \beta, \gamma | \hat{H} | N, \beta, \gamma \rangle, \quad (155)$$

где \hat{H} — гамильтониан ядра.

Гамильтониан ядра возьмем теперь в следующем виде:

$$\hat{H} = \eta \hat{n}_d - \frac{1-\eta}{N} \hat{Q}_\chi \cdot \hat{Q}_\chi + \sum_r c_r ((d^+ d^+)_r)_d \cdot ((\bar{d}\bar{d})_r)_d, \quad (156)$$

где $\hat{n}_d = d^+ \cdot \bar{d}$ — оператор числа d -бозонов; $\hat{Q}_\chi = (d^+ s + s \bar{d})_2 + \chi (d^+ \bar{d})_2$ — квадрупольный оператор.

Точкой между операторами в (156) обозначено скалярное произведение. Первые два слагаемых в (156) являются стандартными. Последнее слагаемое взято из работы [23]. Благодаря включению в гамильтониан этого члена энергия деформации может иметь минимум, отвечающий неаксиальной форме. Константы взаимодействия c_r ($r = 0, 2, 3, 4, 6$) определены ниже.

Усредняя гамильтониан (156) по когерентному состоянию (153) и налагая на константы c_r следующие условия:

$$\frac{1}{5}c_2 - \frac{1}{7}c_3 + \frac{3}{49}c_4 + \frac{14}{55}c_6 = 0, \quad (157)$$

$$\frac{2}{35}c_0 + \frac{1}{7}c_3 + \frac{3}{35}c_4 - \frac{8}{385}c_6 = \zeta(1-\eta) \frac{1}{N(N-1)}, \quad (158)$$

мы получаем такое выражение для энергии деформации $E(N, \eta, \chi, \zeta; \beta, \gamma)$:

$$E(N, \eta, \chi, \zeta; \beta, \gamma) = -5(1 - \eta) + \frac{1}{(1 + \beta^2)^2} \times \\ \times \left\{ (N\eta - (1 - \eta)(4N + \chi^2 - 8))\beta^2 + \left(N\eta + (1 - \eta) \left(4 - \frac{2N + 5}{7}\chi^2 \right) \right) \beta^4 + \right. \\ \left. + 4(N - 1)(1 - \eta) \sqrt{\frac{2}{7}} \chi \beta^3 \cos 3\gamma + \zeta(N - 2)(1 - \eta) \frac{\beta^6 \cos^2 3\gamma}{1 + \beta^2} \right\}. \quad (159)$$

Будем предполагать, что параметр ζ положителен. В отличие от случая, рассмотренного в [19], последнее выражение зависит не от двух, а от трех контрольных параметров η , χ и ζ . Таким образом, рассмотрение неаксиальных форм ядра требует трехмерного пространства контрольных параметров.

Исследование точек стационарности $E(N, \eta, \chi, \zeta; \beta, \gamma)$ показало, что при малых значениях η энергия деформации $E(N, \eta, \chi, \zeta; \beta, \gamma)$ имеет минимум, отвечающий неаксиальной деформированной форме ядра, если контрольные параметры η , χ , ζ удовлетворяют следующим двум условиям:

$$N\eta < (1 - \eta) \left(4N + \chi^2 - 8 - \frac{8(N - 1)^2 \chi^2}{7(N - 2)\zeta} \right), \quad (160) \\ \frac{\left((1 - \eta) \left(4N + \chi^2 - 8 - \frac{8(N - 1)^2 \chi^2}{7(N - 2)\zeta} \right) - N\eta \right)^{3/2}}{4(1 - \eta)(N - 1) \left(2 - \frac{1}{7}\chi^2 \right) \sqrt{N\eta + (1 - \eta) \left(4N - \frac{4N + 3}{7}\chi^2 + \frac{8(N - 1)^2 \chi^2}{7(N - 2)\zeta} \right)}} > \\ > 2 \frac{N - 1}{N - 2} \sqrt{\frac{2}{7}} \chi^2 \frac{1}{\zeta}. \quad (161)$$

Границы, в пределах которых могут изменяться параметры η , χ и ζ , определяют треугольную призму, в основании которой, т.е. в плоскости $\zeta = 0$, лежит расширенный треугольник Кастена [19] (см. рис. 1). Таким образом, условия (160) и (161) определяют поверхность в пространстве контрольных параметров, отделяющую область параметров, при которых существует неаксиальный деформированный минимум, от области, в которой неаксиальная деформация отсутствует.

Условие (160) накладывает на η ограничение сверху:

$$\eta < \frac{4N - 8 + \chi^2 - \frac{8(N - 1)^2 \chi^2}{7(N - 2)\zeta}}{5N - 8 + \chi^2 - \frac{8(N - 1)^2 \chi^2}{7(N - 2)\zeta}}, \quad (162)$$

а условие (161) накладывает на ζ ограничение снизу, которое при $N \rightarrow \infty$ принимает вид

$$\zeta \left(1 - \frac{2\chi^2}{7\zeta} \right) > 8\sqrt{\frac{\chi^2}{7}}. \quad (163)$$

Из (163) видно, что нижняя граница для ζ определяется в основном величиной χ . Например, при χ , близком к нулю, и η , удовлетворяющем (162), неаксиальный деформированный минимум появляется при значениях ζ , близких к нулю. При $|\chi| = \sqrt{7}/2$ минимальное значение ζ , необходимое для появления неаксиального минимума, составляет $\approx 4, 18$. Таким образом, появление ядер с неаксиальной деформацией или мягких относительно отклонений от аксиальной симметрии наиболее вероятно, как это и предполагалось обычно, там, где $\chi \approx 0$. Это, например, изотопы Ва, Рт и Ос.

Если условия появления неаксиального деформированного минимума не выполняются, то минимум локализуется при $\gamma = 0$ ($\chi < 0$) или $\gamma = \pi/3$ ($\chi > 0$). Ограничение, налагаемое на η требованием существования аксиально-симметричного минимума, имеет вид

$$\begin{aligned} N\eta < (1 - \eta) \left\{ 4N + \chi^2 - 8 - \frac{8(N-1)^2\chi^2}{7(N-2)\zeta} + \right. \\ \left. + 3\beta_{\min}\zeta(N-2) \left| \frac{\beta_{\min}^3}{1 + \beta_{\min}^2} - 2\frac{(N-1)}{(N-2)}\sqrt{\frac{2}{7}\chi^2\frac{1}{\zeta}} \right| + \right. \\ \left. + \zeta(N-2) \left(\frac{\beta_{\min}^3}{1 + \beta_{\min}^2} - 2\frac{(N-1)}{(N-2)}\sqrt{\frac{2}{7}\chi^2\frac{1}{\zeta}} \right)^2 \right\}, \quad (164) \end{aligned}$$

где β_{\min} — значение β в минимуме. Сравнивая (164) с условием (160), видим, что при увеличении η от нуля при некотором значении этого параметра перестает выполняться условие (160), но выполняется условие (164). Таким образом, при увеличении η деформированный неаксиальный минимум переходит в деформированный аксиально-симметричный минимум. Ниже будет показано, что это фазовый переход второго рода. В этом случае нет сосуществования деформированных аксиально-симметричной и неаксиальной фаз. Вдоль линии перехода исчезает различие между этими двумя фазами. При дальнейшем увеличении η ($\chi \neq 0$) появляется минимум при $\beta = 0$, но минимум при ненулевом β продолжает существовать. Глубины обоих минимумов сравниваются при $\eta = \eta_{\text{crit}}$ [19].

Рассмотрим более детально переход от аксиально-симметричной формы ядра к неаксиальной. При условии существования неаксиального деформиро-

ванного минимума

$$\begin{aligned}
 E(N, \eta, \chi, \zeta; \beta, \gamma_{\min}) = & N\eta - (1 - \eta) \left(1 + \frac{2N + 5}{7} \chi^2 \right) - \\
 & - \frac{1}{1 + \beta^2} \left\{ N\eta + (1 - \eta) \left(4N - \frac{4N + 3}{7} \chi^2 \right) + (1 - \eta) \frac{8(N - 1)^2 \chi^2}{7(N - 2)\zeta} \right\} + \\
 & + \frac{1}{(1 + \beta^2)^2} 2(1 - \eta)(N - 1) \left(2 - \frac{1}{7} \chi^2 \right). \quad (165)
 \end{aligned}$$

Если деформированный минимум аксиально-симметричный (ζ недостаточно велико), то

$$\begin{aligned}
 E(N, \eta, \chi, \zeta; \beta, \gamma = 0 \text{ или } \pi/3) = & N\eta - (1 - \eta) \left(1 + \frac{2N + 5}{7} \chi^2 \right) - \\
 & - \frac{1}{1 + \beta^2} \left\{ N\eta + (1 - \eta) \left(4N - \frac{4N + 3}{7} \chi^2 \right) + (1 - \eta) \frac{8(N - 1)^2 \chi^2}{7(N - 2)\zeta} \right\} + \\
 & + \frac{1}{(1 + \beta^2)^2} 2(1 - \eta)(N - 1) \left(2 - \frac{1}{7} \chi^2 \right) + \\
 & + (1 - \eta)\zeta(N - 2) \left(\frac{\beta^3}{1 + \beta^2} - 2 \frac{(N - 1)}{(N - 2)} \sqrt{\frac{2}{7}} \chi^2 \frac{1}{\zeta} \right)^2 \frac{1}{1 + \beta^2}. \quad (166)
 \end{aligned}$$

Детальное рассмотрение показало, что если

$$\frac{\beta^3}{1 + \beta^2} < 2 \frac{(N - 1)}{(N - 2)} \sqrt{\frac{2}{7}} \chi^2 \frac{1}{\zeta}, \quad (167)$$

то существует только аксиально-симметричный деформированный минимум. Положение этого минимума по β можно найти, приравняв нулю производную от выражения (166) по β .

Если

$$\frac{\beta^3}{1 + \beta^2} > 2 \frac{(N - 1)}{(N - 2)} \sqrt{\frac{2}{7}} \chi^2 \frac{1}{\zeta} \quad (168)$$

(это условие эквивалентно (161)), то вместо аксиально-симметричного деформированного минимума появляется неаксиальный деформированный минимум. Положение этого минимума можно найти, приравняв нулю производную от выражения (165) по β . В точке фазового перехода от аксиально-симметричной деформации к неаксиальной

$$\frac{\beta^3}{1 + \beta^2} = 2 \frac{(N - 1)}{(N - 2)} \sqrt{\frac{2}{7}} \chi^2 \frac{1}{\zeta}. \quad (169)$$

Из сравнения выражений (165) и (166) видно, что энергия деформации в точке фазового перехода является непрерывной функцией контрольных параметров. Поскольку выражения (165) и (166) различаются слагаемым, квадратичным по

$$\left(\frac{\beta^3}{1 + \beta^2} - 2 \frac{(N-1)}{(N-2)} \sqrt{\frac{2}{7}} \chi^2 \frac{1}{\zeta} \right), \quad (170)$$

то и первые производные от энергии деформации по контрольным параметрам непрерывны в точке фазового перехода. Однако вторые производные терпят разрыв в этой точке. Таким образом, переход от аксиально-симметричной к неаксиальной деформации является фазовым переходом второго рода.

Рассмотрим поведение ядер вблизи критической точки по η при значениях ζ , обеспечивающих появление неаксиального минимума. Используем для этих целей уравнение Бора–Мотгельсона

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{\beta^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \right) - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^3 \frac{\hat{I}_k^2}{\sin^2(\gamma - (2\pi/3)k)} \right) \right] + \right. \\ \left. + V(\beta, \gamma) - E \right\} \Psi(\beta, \gamma, \theta_i) = 0, \quad (171)$$

где θ_i — три угла Эйлера. Потенциал $V(\beta, \gamma)$ возьмем в следующем виде:

$$V(\beta, \gamma) = u(\beta) + \frac{1}{2} D \beta^6 \cos^2 3\gamma. \quad (172)$$

Предположим, что коэффициент жесткости D достаточно велик, чтобы рассматривать только колебания малой амплитуды относительно $\gamma = \pi/6$. Тогда уравнение (171) приближенно запишется следующим образом:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{9DB}{\hbar^2} \beta^8 x^2 - I(I+1) + \frac{3}{4} I_1^2 \right) \right] + \right. \\ \left. + u(\beta) - E \right\} \Psi(\beta, x, \theta_i) = 0, \quad (173)$$

где $x = \gamma - \pi/6$. Из (173) видно, что зависимость полной волновой функции от x и θ_i может быть отделена:

$$\Psi(\beta, x, \theta_i) = f(\beta) \exp\left(-\frac{B\omega}{2\hbar}\beta^4 x^2\right) \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi n!} 2^n}} H_n\left(x\beta^2 \sqrt{\frac{B\omega}{\hbar}}\right) D_{MK}^I(\theta_i), \quad (174)$$

где $\omega = 3(D/B)^{1/2}$; H_n — полином Эрмита; $n = 0, 1, 2, \dots$; K — проекция углового момента на ось 1 внутренней системы координат. С точки зрения модели взаимодействующих бозонов предположение о том, что минимум по γ локализован при $\gamma = \pi/6$, означает, что $\chi = 0$. Но при $\chi = 0$ неаксиальный минимум возникает уже при небольших значениях ζ . Рост ζ лишь увеличивает энергию 0_r^+ -состояния.

Уравнение для функции $f(\beta)$ имеет вид

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2B} \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{\beta^2} \frac{\hbar^2}{2B} \left(I(I+1) - \frac{3}{4} K^2 \right) + \right. \\ \left. + u(\beta) + \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \beta^2 - E \right\} f(\beta) = 0. \quad (175)$$

Следуя [2], аппроксимируем эффективную потенциальную энергию как функцию β прямоугольной ямой:

$$u(\beta) + \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \beta^2 \rightarrow \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \langle \beta^2 \rangle, \quad \beta \leq \beta_w, \\ u(\beta) + \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \beta^2 \rightarrow \infty, \quad \beta > \beta_w. \quad (176)$$

В этом случае

$$f(\beta) = \beta^{-3/2} C_{lIK} J_\nu(k_{lIK}\beta), \quad (177)$$

где $\nu = \sqrt{I(I+1) - (3/4)K^2 + 9/4}$; $k_{lIK} = x_{lIK}/\beta_w$; x_{lIK} — l -й корень $J_\nu(z)$; $l = 1, 2, 3, \dots$; $C_{lIK} = \sqrt{2}/\beta_w J'_\nu(x_{lIK})$ и

$$E_{lIKn} = \frac{\hbar^2}{2B\beta_w^2} x_{lIK}^2 + \hbar\omega n \langle lIKn | \beta^2 | lIKn \rangle. \quad (178)$$

Оператор квадрупольного момента, необходимый для расчета вероятностей $E2$ -переходов, имеет вид

$$Q_{2\mu} = e_2 \beta \left(D_{\mu 0}^2 \cos \gamma + \frac{1}{\sqrt{2}} (D_{\mu 2}^2 + D_{\mu -2}^2) \sin \gamma \right), \quad (179)$$

где e_2 — эффективный заряд. В наших расчетах он, однако, не использовался, поскольку вычислялись только отношения вероятностей $E2$ -переходов.

Результаты расчета отношений энергий нескольких низколежащих состояний и вероятностей $E2$ -переходов и их сравнение с результатами, полученными в пределе $E(5)$ -симметрии [2], и с экспериментальными данными для ^{134}Ba приведены в табл. 7, 8. ^{134}Ba выбран для сравнения как ядро, наиболее близкое к переходной области по β -деформации и одновременно γ -нестабильное [13].

Таблица 7. Сравнение отношений энергий низколежащих состояний, рассчитанных в настоящем разделе (Th), с результатами, полученными в пределе $E(5)$ -симметрии, и экспериментальными данными для ^{134}Ba

	$E(4_1^+)/E(2_1^+)$	$E(6_1^+)/E(2_1^+)$	$E(2_2^+)/E(2_1^+)$	$E(0_\beta^+)/E(2_1^+)$
Th	2,35	3,98	1,84	3,91
^{134}Ba	2,31	3,66	1,93	3,57
$E(5)$	2,20	3,59	2,20	3,03

Таблица 8. Сравнение отношений вероятностей $E2$ -переходов, рассчитанных в настоящем разделе (Th), с результатами, полученными в пределе $E(5)$ -симметрии, и экспериментальными данными для ^{134}Ba

	$\frac{B(E2; 4_1^+ \rightarrow 2_1^+)}{B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)}$	$\frac{B(E2; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+)}{B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)}$	$\frac{B(E2; 0_\beta^+ \rightarrow 2_1^+)}{B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)}$	$\frac{B(E2; 0_\beta^+ \rightarrow 2_2^+)}{B(E2; 0_\beta^+ \rightarrow 2_1^+)}$
Th	1,59	1,62	0,75	0
^{134}Ba	1,56(18)	$2,2 \pm 0,7$	0,42(12)	0,18(8)
$E(5)$	1,68	1,68	0,86	0

Из табл. 7 и 8 видно, что результаты, полученные в настоящем разделе, находятся в хорошем согласии с данными для ^{134}Ba . В то же время они близки к результатам, полученным в пределе $E(5)$ -симметрии, хотя и имеются некоторые отличия. Например, отношение $E(2_2^+)/E(2_1^+)$ в ^{134}Ba ближе к результатам данной работы, тогда как величина $E(0_\beta^+)/E(2_1^+)$ лучше описывается в пределе $E(5)$ -симметрии. $E(5)$ -симметрия предполагает независимость потенциальной энергии от γ , тогда как в нашем расчете предполагается, что энергия деформации при заданном β имеет минимум при $\gamma = \pi/6$. Таким образом, трудно сделать выбор между этими двумя предположениями, основываясь на имеющихся данных для ^{134}Ba . Следует отметить, что учет конечности числа валентных нуклонов очень важен и результаты, полученные в модели взаимодействующих бозонов для $N = 5$, несколько отличаются от полученных в рамках модели Бора–Моттельсона в пределе $E(5)$ -симметрии. Однако наши

результаты следует сравнивать с $E(5)$ -пределом модели Бора–Моттельсона, так как в обоих случаях в основе лежит один и тот же гамильтониан.

Итак, используя модель взаимодействующих бозонов, мы рассмотрели фазовые переходы между различными формами ядра в пространстве трех контрольных параметров η , χ и ζ . В зависимости от значений этих параметров равновесная форма ядра может быть сферической, деформированной аксиально-симметричной и неаксиальной. Было показано, что при $\chi \approx 0$ небольшое увеличение параметра ζ может привести к появлению неаксиального минимума. Далее, основываясь на гамильтониане модели Бора–Моттельсона, мы рассмотрели случай, когда энергия деформации имеет минимум при $\gamma = \pi/6$, но система β -нестабильна. В этом случае результаты для энергий и вероятностей $E2$ -переходов близки к полученным в пределе $E(5)$ -симметрии (β - и γ -нестабильность), хотя и несколько отличаются от последних. В то же время эти результаты близки к экспериментальным данным для ^{134}Ba . Таким образом, включение в рассмотрение неаксиальной деформации расширяет область, в которой могут наблюдаться различные фазовые переходы. Учет неаксиальности может оказаться полезным и при интерпретации экспериментальных данных, относящихся к ядрам, которые принято считать γ -нестабильными.

9. ФОРМА ЯДРА, СТАБИЛЬНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ И ФОРМАЛИЗМ ТЕОРИИ КАТАСТРОФ

В этом разделе обзора мы исследуем свойства энергетической поверхности (потенциальной энергии), т.е. среднего от гамильтониана ядра, как функции переменных, описывающих форму, и контрольных параметров, используя более общий формализм, чем в предыдущих разделах, а именно формализм теории катастроф, которая базируется на математических результатах функционального анализа [24]. В общем случае усреднение гамильтониана осуществляется по некоторой пробной функции. При этом следует отметить, что чем более общий вид имеет пробная функция, тем большим будет пространство исследуемых решений. Если гамильтониан имеет, как в случае модели взаимодействующих бозонов, алгебраическую структуру, то лучшими пробными функциями будут когерентные состояния. Именно на них и базировалось наше предыдущее рассмотрение. Мы уже показали, что когерентные состояния модели взаимодействующих бозонов содержат в качестве компонент полный базис состояний, с помощью которого строятся собственные векторы гамильтониана.

В данном разделе, в отличие от рассмотрения в предыдущих разделах, мы проанализируем наиболее общего вида гамильтониан модели взаимодействующих бозонов. В то же время будет показано, что, несмотря на более

общий вид гамильтониана, равновесные конфигурации можно будет описывать, как и выше, при помощи только двух контрольных параметров. Наше рассмотрение будет проводиться по следующей схеме. На первом этапе найдем все критические точки, т. е. все точки равновесия, и выясним, какие из них являются точками морсовского типа, а какие нет. По определению в точках морсовского типа поверхность потенциальной энергии может быть аппроксимирована квадратичной формой. В неморсовских точках энергетическая поверхность аппроксимируется функцией катастрофы [24], которая строится при помощи ростка катастрофы и возмущения. В случае, когда число контрольных параметров не превышает пяти, все канонические ростки катастроф и возмущения известны (они приведены в монографии [24]).

В дальнейшем будем использовать следующий общий гамильтониан модели взаимодействующих бозонов, зависящий от семи размерных параметров [25]:

$$\begin{aligned}
H_{\text{IBM}} = & \left(\epsilon - \frac{u_0(N-1)}{2} \right) \hat{n}_d + \sum_{L=0,2,4} \frac{1}{2} c_L \sqrt{2L+1} ((d^+ d^+)_L (\bar{d} \bar{d})_L)_0 + \\
& + \frac{v_2}{\sqrt{2}} (((d^+ d^+)_2 \bar{d})_0 s + \text{h. c.}) + \frac{v_0}{2} ((d^+ d^+)_0 s s + \text{h. c.}) + \\
& + \left(\frac{u_2}{\sqrt{5}} - \frac{u_0}{2} \right) \hat{n}_d s^+ s. \quad (180)
\end{aligned}$$

Для сравнения приведем рассмотренный выше гамильтониан с квадруполь-квадрупольным взаимодействием, зависящий только от двух безразмерных контрольных параметров и записанный в нормальном виде:

$$\begin{aligned}
H = & \left(\eta + \frac{4}{N}(1-\eta) - \chi^2 \frac{(1-\eta)}{N} \right) \hat{n}_d - \chi^2 \frac{(1-\eta)}{N} (d^+ d^+)_0 (\bar{d} \bar{d})_0 + \\
& + \frac{3\sqrt{5}}{14} \chi^2 \frac{(1-\eta)}{N} ((d^+ d^+)_2 (\bar{d} \bar{d})_2)_0 - \frac{6}{7} \chi^2 \frac{(1-\eta)}{N} ((d^+ d^+)_4 (\bar{d} \bar{d})_4)_0 - \\
& - 2\sqrt{5} \chi \frac{(1-\eta)}{N} (((d^+ d^+)_2 \bar{d})_0 s + \text{h. c.}) - \sqrt{5} \frac{(1-\eta)}{N} ((d^+ d^+)_0 s s + \text{h. c.}) - \\
& - \frac{2(1-\eta)}{N} \hat{n}_d s^+ s. \quad (181)
\end{aligned}$$

Так как гамильтониан (181) безразмерный, то, сравнивая выражения (180) и (181) и сопоставляя коэффициенты перед одинаковыми операторами в обоих гамильтонианах, можно говорить только о пропорциональности коэффициентов, но с общим коэффициентом пропорциональности. Такое сравнение

приводит к следующим результатам:

$$\begin{aligned} v_0 &\sim -2\sqrt{5}\frac{(1-\eta)}{N}; & v_2 &\sim 2\sqrt{5}\chi\frac{(1-\eta)}{N}; \\ c_0 &\sim -2\chi^2\frac{(1-\eta)}{N}; & c_2 &\sim \frac{3}{7}\chi^2\frac{(1-\eta)}{N}; & c_4 &\sim -\frac{4}{7}\chi^2\frac{(1-\eta)}{N}; \\ \left(\frac{u_2}{\sqrt{5}} - \frac{u_0}{2}\right) &\sim -\frac{2(1-\eta)}{N}; & \left(\epsilon - \frac{u_0(N-1)}{2}\right) &\sim \eta + (4-\chi^2)\frac{(1-\eta)}{N}. \end{aligned} \quad (182)$$

Для среднего от гамильтониана (180) по когерентному состоянию получается следующий результат:

$$\begin{aligned} E(\beta, \gamma) = \langle N, \beta\gamma | H_{\text{IBM}} | N, \beta\gamma \rangle &= \frac{N\epsilon\beta^2}{(1+\beta^2)} + \frac{N(N-1)}{(1+\beta^2)^2} \times \\ &\times \left(a_1\beta^4 + a_2\beta^3 \cos 3\gamma + a_3\beta^2 + \frac{u_0}{2} \right), \end{aligned} \quad (183)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{10}c_0 + \frac{1}{7}c_2 + \frac{9}{35}c_4, \\ a_2 &= -\frac{2}{\sqrt{35}}v_2, & a_3 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(v_0 + u_2). \end{aligned}$$

Таким образом, $E(\beta, \gamma)$ зависит от пяти размерных параметров ϵ , u_0 , a_1 , a_2 и a_3 .

Применим теперь аппарат теории катастроф к анализу выражения (183). В общем случае такой анализ включает следующие шаги.

i) Определяются существенные контрольные параметры и ростки катастроф. Одновременно находятся критические точки, т. е. точки равновесия. Из них выделяется критическая точка с максимальным вырождением. Она называется фундаментальным корнем. Затем потенциальная энергия $E(\beta, \gamma)$ разлагается в ряд Тейлора вблизи фундаментального корня. Ростком катастрофы для гамильтониана модели взаимодействующих бозонов является первый член в этом разложении, который нельзя уничтожить подбором контрольных параметров.

ii) Определяется бифуркационное множество, т. е. геометрическое место точек в пространстве существенных контрольных параметров, в которых происходит переход из одного локального минимума в другой. Бифуркационное множество определяется условием $\det \mathcal{H} = 0$, где \mathcal{H} — матрица вторых производных потенциальной энергии в критических точках, т. е.

$$\mathcal{H}_{ij} = \left. \frac{\partial^2 E(x_k)}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{x_1^*, x_2^*} \quad (184)$$

с $x_1 = \beta$, $x_2 = \gamma$, а индекс c у переменных означает, что они относятся к критической точке. Отметим, что если градиент потенциальной энергии используется для нахождения критических точек, то матрица \mathcal{H} используется для определения их природы, если $\det \mathcal{H} \neq 0$, т. е. критическая точка является минимумом, максимумом или седловой точкой. По этой причине матрица \mathcal{H} называется матрицей стабильности. Однако если $\det \mathcal{H} = 0$, то природа критических точек изменяется. Детерминант матрицы стабильности равен произведению ее собственных значений. Появление нулевых собственных значений у матрицы стабильности означает, что потенциальная энергия в критической точке не может быть аппроксимирована квадратичной функцией от переменных β и γ .

iii) Определяется максвелловское множество, т. е. геометрическое место точек в пространстве существенных контрольных параметров, для которых потенциальная энергия имеет одно и то же значение в двух или большем числе критических точек. Это множество может быть определено с помощью уравнения Клаузиуса–Клапейрона. В модели взаимодействующих бозонов есть только два существенных контрольных параметра. Обозначим их через r_1, r_2 . Тогда если для значений критических параметров r_1^0, r_2^0 имеется p критических точек $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)}$, в которых потенциальная энергия принимает одно и то же критическое значение, то уравнение Клаузиуса–Клапейрона запишется так:

$$\epsilon^{(1)} = \epsilon^{(2)} = \dots = \epsilon^{(p)}, \quad (185)$$

$$\sum_{\alpha} \left(\frac{\partial E(x^{(k)})}{\partial r_{\alpha}^0} - \frac{\partial E(x^{(k+1)})}{\partial r_{\alpha}^0} \right) \delta r_{\alpha}^0 = 0. \quad (186)$$

Здесь $x^{(k)}$ — точка в пространстве переменных (β, γ) .

iv) Определяется сепаратриса для модели взаимодействующих бозонов, т. е. геометрическое место точек в пространстве контрольных параметров, разделяющее это пространство на области, отвечающие различным стабильным формам.

Начнем с нахождения критических точек потенциальной энергии. Критические точки определяются уравнениями

$$\frac{\partial E(\beta, \gamma)}{\partial \beta} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial E(\beta, \gamma)}{\partial \gamma} = 0. \quad (187)$$

Легко определить, что критические точки находятся на линиях $\gamma_c = 0$ (вытянутая форма ядра) и $\gamma_c = \pi/3$ (сплюснутая форма ядра). Можно считать все критические точки расположенными на декартовой оси x , при этом значения $x > 0$ отвечают $\gamma_c = 0$, а значения $x < 0$ — $\gamma_c = \pi/3$. Для переменной β и $\gamma_c = 0$ критические точки являются корнями следующего алгебраического уравнения:

$$\beta \left[a_2 \beta^3 + 2 \left(a_3 - 2a_1 - \frac{\epsilon}{N-1} \right) \beta^2 - 3a_2 \beta + \right. \\ \left. + 2 \left(u_0 - a_3 - \frac{\epsilon}{N-1} \right) \right] = 0. \quad (188)$$

Из (188) видно, что $\beta_c = 0$ является критической точкой при любых значениях параметров. Следовательно, точка $\beta = 0$ является фундаментальным корнем. Разложение Тейлора для потенциальной энергии $E(\beta) = E(\beta, \gamma_c = 0)$ вблизи фундаментального корня имеет вид

$$E(\beta) = \frac{N(N-1)u_0}{2} + N(N-1) \left[(a_3 - u_0 + w)\beta^2 + a_2\beta^3 + \right. \\ \left. + \left(a_1 - 2a_3 + \frac{3}{2}u_0 - w \right) \beta^4 \right] + O(\beta^5), \quad (189)$$

где $w \equiv \epsilon/(N-1)$. Квадратичный член в (189) обращается в нуль, если контрольные параметры удовлетворяют уравнению

$$a_3 - u_0 + w = 0. \quad (190)$$

В этом случае корень $\beta_c = 0$ является дважды вырожденным, так как обращается в нуль и вторая производная $E(\beta)$. Фундаментальный корень будет трехкратно вырожденным, если выполняется условие (190) и, кроме того,

$$a_2 = 0. \quad (191)$$

Можно попытаться обратить в нуль член с β^4 в разложении (189). Для этого необходимо, чтобы выполнялось условие

$$a_1 - 2a_3 + \frac{3}{2}u_0 - w = 0. \quad (192)$$

Однако если контрольные параметры удовлетворяют условиям (190)–(192), то потенциальная энергия (183) становится независимой от β и γ :

$$E = \epsilon N + a_1 N(N-1). \quad (193)$$

Следовательно, потенциальная энергия становится переопределенной, если мы фиксируем три параметра. Таким образом, росток катастрофы характеризуется членом, пропорциональным β^4 , так как этот член нельзя обратить в нуль. Для характеристики поверхности потенциальной энергии остается два безразмерных контрольных параметра

$$r_1 = \frac{a_3 - u_0 + w}{2a_1 + w - a_3}, \quad r_2 = -\frac{2a_2}{2a_1 + w - a_3}. \quad (194)$$

Используя соотношение (182), мы можем выразить r_1 и r_2 через η и χ :

$$r_1 = \frac{\eta N - (1 - \eta)[4(N - 2) + \chi^2]}{\eta N + (1 - \eta)(4N - (11/7)\chi^2)}, \quad (195)$$

$$r_2 = -8\sqrt{\frac{2}{7}} \frac{\chi(N - 1)(1 - \eta)}{\eta N + (1 - \eta)(4N - (11/7)\chi^2)}. \quad (196)$$

При $\eta = 1$ $r_1 = 1$, а при $\eta = 0$ $r_1 = -1$. Можно говорить о соответствии между r_1 и η . Параметр r_2 пропорционален χ .

Используя контрольные параметры r_1 и r_2 и вычитая постоянный член, получаем следующее выражение для потенциальной энергии в безразмерных единицах:

$$\begin{aligned} \epsilon(\beta, \gamma) &\equiv 2 \frac{E(\beta, \gamma) - (u_0/2)N(N - 1)}{N(N - 1)(2a_1 + w - a_3)} = \\ &= \frac{1}{(1 + \beta^2)^2} (\beta^4 + r_1\beta^2(\beta^2 + 2) - r_2\beta^3 \cos 3\gamma). \end{aligned} \quad (197)$$

В терминах новых контрольных параметров критические точки определяются решениями следующего алгебраического уравнения:

$$\beta(r_2\beta^3 + 4\beta^2 - 3r_2\beta + 4r_1) = 0. \quad (198)$$

Следуя описанному выше шагу ii) общей процедуры, мы определим бифуркационное множество.

Как видно из (198), критическая точка $\beta_c = 0$ дважды вырождена, если и только если $r_1 = 0$. В этом случае вся ось r_2 является бифуркационным множеством. Две других критических точки при $r_1 = 0$ локализованы при

$$\beta = \beta_{r_2}^{(\pm)} = \frac{1}{r_2} \left(-2 \pm \sqrt{4 + 3r_2^2} \right). \quad (199)$$

При этом $\beta_{r_2}^{(+)}$ является минимумом, а $\beta_{r_2}^{(-)}$ — максимумом.

При $r_2 = 0$ и $r_1 \neq 0$ мы имеем случай γ -нестабильного потенциала, так как в (197) исчезает зависимость от γ . В этом случае имеется три критических точки, одна при $\beta_c = 0$ и две других при $\beta = \beta_{r_1}^{(\pm)}$, где

$$\beta_{r_1}^{(\pm)} = \pm \sqrt{-r_1}. \quad (200)$$

Точка $\beta_c = 0$ отвечает максимуму, а в точках $\beta_{r_1}^{(\pm)}$ расположены минимумы. Полуось $r_1 < 0$ является бифуркационным множеством. Более сложный анализ требуется для нахождения бифуркационных множеств, лежащих вне осей

r_1 и r_2 . Эти множества являются линиями на плоскости (r_1, r_2) , определяемыми уравнениями

$$r_1 = r_{11} \equiv -\frac{(9r_2^2 + 16)^{3/2}}{54r_2^2} - \frac{32}{27r_2^2} - 1 \quad (201)$$

и

$$r_1 = r_{12} \equiv \frac{(9r_2^2 + 16)^{3/2}}{54r_2^2} - \frac{32}{27r_2^2} - 1. \quad (202)$$

Построение максвелловского множества с помощью уравнений (185) и (186) дает следующий результат. Линии

$$r_1 = r_{13}^{(\pm)} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{2}r_2^2} \quad (203)$$

в двумерном пространстве контрольных параметров образуют максвелловское множество, т. е. множество точек, для которых потенциальная энергия имеет одно и то же значение по крайней мере в двух критических точках. Подмножество $r_{13}^{(+)}$ отвечает вырожденным минимумам, а подмножество $r_{13}^{(-)}$ соответствует вырожденным максимумам. Критические значения β , отвечающие (203), даются выражением

$$\beta = \beta_{13}^{(\pm)} \equiv \frac{r_2}{\pm \sqrt{1 + (1/2)r_2^2} + 1}. \quad (204)$$

Таким образом, мы определили бифуркационное и максвелловское множества точек в двумерном пространстве контрольных параметров r_1 и r_2 . Эти точки образуют сепаратрисы, которые делят пространство контрольных параметров на шесть областей. Внутри каждой из этих областей типичная форма потенциала остается стабильной. Однако при прохождении через сепаратрисы качественная природа потенциальной энергии изменяется. Наглядное представление о том, как изменяется форма ядра при изменении величин контрольных параметров, можно получить, отслеживая изменение формы при движении вдоль одной из линий в пространстве контрольных параметров. Фиксируем, например, $r_2 = 4\sqrt{2}/3$ и будем изменять r_1 . При $r_1 > r_{12}$ (см. (202)) основное состояние имеет сферическую форму. При $r_{12} > r_1 > r_{13}^{(+)}$ у потенциальной энергии появляется второй минимум, отвечающий деформированной вытянутой форме ядра. Однако сферический минимум остается более глубоким. В этой области значений контрольных параметров может наблюдаться явление сосуществования форм. Для $0 < r_1 < r_{13}^{(+)}$ минимум, соответствующий деформированной вытянутой форме ядра, становится более глубоким, но сферический минимум продолжает существовать. По-прежнему может иметь место явление сосуществования форм. При $r_{13}^{(-)} < r_1 < 0$ сферический

минимум исчезает и потенциальная энергия имеет только деформированный минимум, отвечающий вытянутой форме ядра.

Если в пространстве контрольных параметров мы будем двигаться вдоль линии $r_2 = 0$, то при $r_1 > 0$ потенциал будет иметь только сферический минимум, а при $r_1 < 0$ — деформированный γ -нестабильный минимум. Этот случай отвечает движению вдоль линии $\chi = 0$ в треугольнике Кастена, тогда как предыдущий случай соответствует движению вдоль линии с $\chi < 0$.

При движении вдоль линии $r_1 = -2$ при $r_2 < 0$ мы имеем деформированный минимум, соответствующий сплюснутой форме ядра, а при $r_2 > 0$ имеем деформированный минимум, отвечающий вытянутой форме ядра. В треугольнике Кастена этот случай соответствует движению вдоль линии $\eta = \text{const}$. Мы можем сказать, что фазовые переходы имеют место, когда точка в пространстве контрольных параметров, определяемая параметрами гамильтониана, пересекает одну из сепаратрис.

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Iachello F.* // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 85. P. 3580.
2. *Iachello F.* // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87. P. 052502.
3. *Jolie J. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89. P. 182502.
4. *Bohr A., Mottelson B. R.* Nuclear Structure. N. Y.: Benjamin, 1975. V. II.
5. *Arima A., Iachello F.* Interacting Boson Model. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
6. *Bohr A., Mottelson B. R.* // Phys. Scrip. 1980. V. 22. P. 468.
7. *Ginocchio J. N., Kirson M. W.* // Nucl. Phys. A. 1980. V. 350. P. 31.
8. *Dieperink A. E. L., Scholten O., Iachello F.* // Phys. Rev. Lett. 1980. V. 44. P. 1747.
9. *Bes D.* // Nucl. Phys. 1959. V. 10. P. 373.
10. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. М.: Наука, 1964.
11. *Bohr A.* // Mat. Fys. Medd. K. Dan. Vidensk. Selsk. 1952. V. 26, No. 14.
12. *Casten R. F., Zamfir N. V.* // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 85. P. 3584.
13. *Casten R. F., Zamfir N. V.* // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87. P. 052503.
14. *Pan F., Draayer J. P.* // Nucl. Phys. A. 1998. V. 636. P. 156.
15. *Pietralla N. et al.* // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 73. P. 2962.
16. *Pietralla N. et al.* // Phys. Lett. B. 1995. V. 349. P. 1.
17. *Pietralla N. et al.* // Phys. Rev. C. 1998. V. 57. P. 150.
18. *Palchikov Yu. V., von Brentano P., Jolos R. V.* // Ibid. P. 3026.
19. *Jolie J. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87. P. 162501.
20. *Iachello F., Zamfir N. V., Casten R. F.* // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 1191.
21. *Casten R. F., Zamfir N. V.* // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87. P. 052503.

22. *Jolos R. V.* // Subm. to «*Rus. J. Nucl. Phys.*».
23. *Van Isacker P., Chen J. Q.* // *Phys. Rev. C.* 1981. V. 24. P. 684.
24. *Гилмор Р.* Прикладная теория катастроф. М.: Мир, 1984.
25. *Lopez-Moreno E., Castaños O.* // *Phys. Rev. C.* 1996. V. 54. P. 2374.