

УДК 539.12.01

**БЛОХИНЦЕВ**  
**И НЕЛОКАЛЬНАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ**

*Г. В. Ефимов*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ	1116
КООРДИНАТЫ И ВРЕМЯ В МЕХАНИКЕ	1119
КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ И ПРОБЛЕМА ЛОКАЛЬНОСТИ	1121
КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ	1130
АКСИОМАТИЧЕСКАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ	1134
ПОВЕДЕНИЕ ПРИ БОЛЬШИХ ЭНЕРГИЯХ	1135
АНАЛИТИЧЕСКИЙ КОНФАЙНМЕНТ. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЙ ПОДХОД	1137
САМОДУАЛЬНОЕ ПОЛЕ И СТАБИЛЬНОСТЬ КЭД И КХД	1139
ВАКУУМНОЕ ГЛЮОННОЕ ПОЛЕ В КХД. МОДЕЛЬ ИНДУЦИРОВАННЫХ КВАРКОВЫХ ТОКОВ	1150
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	1159
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1159

УДК 539.12.01

## БЛОХИНЦЕВ И НЕЛОКАЛЬНАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

*Г. В. Ефимов*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Дан ретроспективный обзор идей, связанных с физическими понятиями пространства и времени, на которых основана нелокальная квантовая теория поля с пропагаторами, являющимися целыми аналитическими функциями в импульсном пространстве, и адронная физика с аналитическим конфинментом кварков и глюонов\*.

The retrospective review is devoted to the discussion of ideas connected with physical conceptions of space and time, on which the nonlocal quantum field theory with propagators, being entire analytical functions in momentum space, and hadron physics with analytical confinement quarks and gluons are based.

— Почему ты так предубежден против мышления? — спросил Мастера философ.  
— Ведь мысль — единственный инструмент, с помощью которого мы можем упорядочить мир.

— Верно. Но мысль может так здорово упорядочить мир, что ты никогда его больше не увидишь.

*Энтони де Мелло*

### ВВЕДЕНИЕ

В результате многочисленных обсуждений и совместных вычислений, которые мне посчастливилось проводить с Дмитрием Ивановичем Блохинцевым, я полностью разделяю его понимание концептуальных основ физики элементарных частиц и основ той теории, которая эту физику должна описывать. Меня поражало и восхищало умение Дмитрия Ивановича образно представлять самые, казалось бы, сложные процессы в квантовой физике микромира. Его понимание проблемы и то, что удалось мне усвоить за все 40 лет работы в этой области физики, можно сформулировать в форме следующих основных положений, не составляющих какую-либо систему аксиом, на которых

---

\*Расширенная версия доклада, сделанного на XII Международной конференции «Избранные проблемы современной физики», посвященной 95-й годовщине со дня рождения Д. И. Блохинцева. Дубна, 8–11 июня 2003 г.

строится непротиворечивая теория, а, скорее, являющихся «здоровыми мыслями», которые должны лежать в основе наших попыток построения теории микромира элементарных частиц. Итак:

- Элементарные частицы не могут быть точечными.
- Макроскопические понятия пространственно-временных координат элементарных частиц весьма далеки от букв  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$ , используемых при обозначении стандартных переменных полей в релятивистской квантовой теории поля (КТП). Отсюда, в частности, следует, что требование микропричинности при построении матрицы рассеяния в квантовой теории поля является математическим требованием, которое не может быть проверено ни в каком эксперименте, поскольку у нас для этого нет физического инструмента.
- КТП может быть эффективно использована только в случае малой константы связи, когда низшие порядки теории возмущений правильно схватывают основные черты рассматриваемого процесса.
- Локальная КТП — приближение, когда малые расстояния не существенны для рассматриваемых физических эффектов.
- В теориях с малой константой связи (электродинамика и слабые взаимодействия) при вычислениях по теории возмущений использование стандартных пропагаторов Дирака и Клейна–Гордона, т. е. плоских волн, для описания промежуточных частиц вполне оправданно.
- В физике кварков и глюонов возникло новое явление — конфайнмент. Поэтому использование плоских волн в стандартной фейнмановской формулировке  $S$ -матрицы для описания кварков и глюонов при попытках понять явления конфайнмента и адронизации не является адекватным математическим аппаратом и чрезвычайно усложняет решение задачи, если не делает ее безнадежной. По выражению Блохинцева, «ключ к пониманию физики элементарных частиц лежит на дне адронного вакуума». По сегодняшний день актуальна проблема: что такое кварк-глюонный вакуум, или вакуум квантовой хромодинамики (КХД), как его можно описать, каково поведение кварков и глюонов в этом вакууме, как происходит адронизация кварков и глюонов?
- Должен существовать достаточно простой квантово-полевой математический аппарат, в рамках которого можно было бы описать, по крайней мере качественно, явления адронной физики. Я считаю, что аналитический конфайнмент, когда пропагаторы кварков и глюонов в области конфайнмента описываются целыми аналитическими функциями гауссовского типа, вполне может явиться основой такого аппарата.

Немного истории. Первая наивная попытка ввести протяженные объекты в формализм квантовой теории поля началась, казалось бы, с естественной попытки описать феноменологически нелокальное взаимодействие путем введения формфактора в лагранжиан с целью «размазать взаимодействие». Однако возникли многочисленные и даже, как тогда казалось, просто непреодолимые трудности. Оказалось, что невозможно удовлетворить одновременно

двум основным требованиям: формфакторы, во-первых, должны достаточно быстро убывать, чтобы теория была конечной, и, во-вторых, не должны нарушать унитарность, т. е. не должны приводить к возникновению каких-либо особенностей, которые давали бы нефизические вклады в физический спектр. Как стало ясно впоследствии, эти «непреодолимые» проблемы были следствием выбора формфакторов только из класса мероморфных функций и понимания эквивалентности пространств Минковского и Евклида в теории  $S$ -матрицы *только* как возможности провести так называемый виковский поворот контура интегрирования.

Таким образом, задача свелась к чисто технической или математической проблеме найти класс формфакторов, удовлетворяющих необходимым условиям. И решение этой задачи оказалось чисто «техническим». Оказалось, что классы целых аналитических функций, убывающих в пространственно-подобном направлении, обладают нужными свойствами и могут быть использованы в качестве формфакторов при построении нелокальной квантовой теории поля. При этом существенно, что исходно теория должна быть сформулирована в евклидовой метрике, а переход в физическую область осуществляется аналитическим продолжением по инвариантным импульсным переменным методами, не связанными с виковским поворотом контура интегрирования. В рамках этих идей были построены нелокальные квантовая теория скалярного поля и квантовая электродинамика.

Заметим, что все эти проблемы обсуждались в то время, когда не были еще открыты кварки и глюоны и еще не возникло понятие конфайнмента. С введением в физический обиход кварков и глюонов возникла проблема, как описать их поведение в области конфайнмента. Не будем здесь давать обзор всех обсуждаемых предложений, а остановимся лишь на той возможности, которая связана с формфакторами, являющимися целыми аналитическими функциями. Очевидно, что нетривиальный формфактор, не вносящий никаких неунитарных вкладов ни в какие физические амплитуды, является хорошим кандидатом на описание конфайнмента кварков и глюонов. Действительно, частица, пропагатор которой является нетривиальной целой аналитической функцией и не привносит никаких неунитарных вкладов, не может существовать как обычная элементарная частица. Так возникло понятие «аналитический конфайнмент».

Идея аналитического конфайнмента была использована при формулировке *виртонной модели* и *модели конфайнмированных кварков*, где феноменологически постулировалась форма кваркового пропагатора. Обе модели правильно описывают низкоэнергетическую физику адронов. Таким образом, оказалось, что успешно работает логическая цепочка



Далее было найдено в рамках КХД, что однородное самодуальное глюонное поле с постоянной напряженностью, являясь решением уравнений Янга–Миллса, во-первых, с большой степенью вероятности реализует вакуум КХД и, во-вторых, ведет к аналитическому конфайнменту кварков и глюонов.

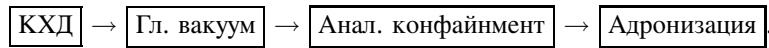
По всей видимости, аналитический конфайнмент имеет более глобальный и глубокий смысл, чем это сейчас представляется. Именно релятивистские квантово-полевые модели, основанные на предположениях:

1) аналитический конфайнмент — пропагаторы кварков и глюонов вида  $\sim e^{p^2/\Lambda^2}$ , где  $\Lambda$  определяет шкалу конфайнмента,

2) лагранжиан взаимодействия юкавского типа с малой константой связи для описания взаимодействия кварков и глюонов,

3) адроны как связанные состояния кварков и глюонов описываются релятивистским уравнением Бете–Солпитера,

правильно передают основные черты адронного спектра и правильно описывают взаимодействия адронов при низких энергиях. Таким образом, наличие глюонного вакуумного поля, ведущего к аналитическому конфайнменту, позволяет построить цепочку, связанную, как принято говорить, с *первыми принципами*:



Изложению этих идей и посвящен данный обзор.

## 1. КООРДИНАТЫ И ВРЕМЯ В МЕХАНИКЕ

Начнем с анализа понятия «время  $t$ » при постановке задач в физике, изучающей микромир, как понимал это Блохинцев. Его точка зрения изложена в книге «Пространство и время в микромире» [1]. Прошло 33 года со дня опубликования этой книги, однако, как мне представляется, остается актуальным его критический анализ понятий «пространство» и «время» и связи этих понятий со стандартным способом употребления букв  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$  при обозначении пространственно-временных координат частиц и полей в квантовой механике и квантовой теории поля. Блохинцев считал, что наличие структуры у так называемых элементарных частиц ставит под сомнение саму возможность точного определения координат элементарных частиц  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$ . По его словам, «возникает сомнение в логической законности употребления символов  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$  в качестве пространственных и временных координат, пригодных для описания явлений внутри элементарных частиц». При этом понятие «время» играет выделенную роль. Следует обратить внимание на то, что некоторые понятия принимаются как очевидные, не подлежащие никакому критическому анализу и считающиеся само собой разумеющимися. К числу таких понятий относится *время  $t$* .

Рассмотрим, как ставится задача в классической и квантовой физике с интересующей нас точки зрения роли координат «пространства-времени».

**Классическая механика материальной точки (элементарной частицы).** Состояние частицы задается координатами  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ , и считается, что мы все знаем о частице, если можем определить ее координаты в любой момент времени. Лагранжева динамика движения задается уравнением второго порядка по времени

$$\mathcal{K}(\ddot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t)) = 0,$$

и решается задача Коши, т.е. в некоторый момент времени  $t = t_0$  нам известны координата  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  и скорость  $\dot{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{v}_0$  и необходимо найти  $\mathbf{x}(t)$ . При этом предполагается, что координаты и время могут быть измерены *абсолютно точно*.

**Нерелятивистская квантовая механика.** Состояние частицы в некоторый момент времени  $t$  задается волновой функцией  $\Psi(\mathbf{x}, t)$ . Частица не имеет точно определенных пространственных координат. Координатам соответствуют эрмитовы операторы  $\hat{\mathbf{x}}$ . Постулируется, что могут быть измерены только средние значения координат

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \int d\mathbf{x} \Psi^*(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \Psi(\mathbf{x}, t).$$

Динамика развития системы определяется уравнением Шредингера

$$i\hbar \frac{d}{dt} \Psi(\mathbf{x}, t) = H(\mathbf{x}) \Psi(\mathbf{x}, t),$$

для которого формулируется задача Коши

$$\Psi(\mathbf{x}, t_0) = \Psi_0(\mathbf{x}).$$

Подчеркнем: время остается классическим параметром, причем предполагается, что оно может быть измерено *абсолютно точно*. Координаты и время очевидно неравноправны.

**Релятивистская квантовая механика.** В релятивистской теории возникает кажущееся равноправие между пространственными координатами  $\mathbf{x}$  и временем  $t$ , поскольку постулируется соотношение

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{x}^2.$$

Однако при изучении реальных физических явлений особое, выделенное значение времени проявляется совершенно отчетливо. Динамические задачи ставятся так: по значениям динамических характеристик, заданных в некоторый момент времени  $t_0$ , надо найти их изменение при  $t > t_0$ , что выражается как

решение задачи Коши соответствующих динамических уравнений. В частности, нельзя корректно поставить задачу: «даны  $t, y, z$  при некотором  $x = x_0$ , определить их значения при  $x \neq x_0$ ». Это важнейшее обстоятельство выражается тем, что для частицы переменные  $\mathbf{x}$  и  $t$  не связаны никакими соотношениями, в то время как в пространстве сопряженных переменных импульс  $\mathbf{p}$  и энергия  $E$  частицы связаны:

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \quad \text{или} \quad E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

в нерелятивистской или релятивистской теориях соответственно.

**Квантовая теория поля.** Каждой частице соответствует квантованное поле. Например, в случае скалярных частиц  $\phi(\mathbf{x}, t) = \phi_{\mathbf{x}}(t)$  символ  $\mathbf{x}$  выступает как координата поля. При этом различие между временем  $t$  и координатой  $\mathbf{x}$  фундаментально. При стандартном каноническом квантовании необходимо решить динамическое операторное уравнение и удовлетворить одновременным перестановочным соотношениям (см. ниже). Снова подчеркнем, что в данном подходе координаты  $\mathbf{x}$  и время  $t$  являются классическими параметрами и могут быть измерены *абсолютно точно*.

Итак, можно подвести итог: время  $t$  во всех вариантах классических и квантовых теорий является классическим параметром и выступает совершенно одинаково как в классической, так и в нерелятивистской и релятивистской квантовой физике. При этом молчаливо предполагается, что оно может быть измерено *абсолютно точно*. Это выражается в том, что движение системы формулируется как задача Коши соответствующих динамических уравнений. При этом задача Коши является базовым динамическим принципом: предполагается, что мы в состоянии *абсолютно точно* фиксировать начальный  $t_0$  и конечный  $t$  момент времени, и проблема состоит в том, чтобы найти некоторую физическую характеристику  $\mathcal{O}(t)$  при  $t > t_0$ , если известна  $\mathcal{O}(t_0)$ .

## 2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ И ПРОБЛЕМА ЛОКАЛЬНОСТИ

Ситуация в квантовой теории поля имеет свои особенности. Дело в том, что в классической механике, классической теории поля и нерелятивистской квантовой механике задача Коши соответствующих уравнений является математически корректно поставленной, в то время как в квантовой теории поля это не так. Остановимся более подробно на стандартной процедуре канонического квантования. Для простоты рассмотрим однокомпонентное вещественное скалярное поле  $\phi(x) = \phi(\mathbf{x}, t)$ , описываемое некоторым лагранжианом, например

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} (\phi[\square - m^2]\phi) - \frac{g}{N} \phi^N. \quad (1)$$

Здесь  $N$  — некоторое целое число.

Принцип наименьшего действия

$$\delta S = \delta \int dx \mathcal{L}(x) = 0$$

приводит к уравнению Гейзенберга

$$(\square - m^2)\phi(\mathbf{x}, t) - g\phi^{N-1}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (2)$$

где канонические полевые переменные

$$\left\{ \phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}, t) = \dot{\phi}(\mathbf{x}, t) \right\}$$

должны удовлетворять одновременным каноническим перестановочным соотношениям

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] &= [\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] = 0, \\ [\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] &= i\hbar\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (3)$$

Формально поставленная задача может быть легко решена. Действительно, пусть известна некоторая пара не зависящих от времени операторов  $\{\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x})\}$ , удовлетворяющая каноническим перестановочным соотношениям (3). Построим гамильтониан, соответствующий лагранжиану (1):

$$H = \int d\mathbf{x} \left[ \frac{1}{2}(\pi^2(\mathbf{x}) + (\nabla\phi(\mathbf{x}))^2 + m^2\phi^2(\mathbf{x})) + g\phi^N(\mathbf{x}) \right]. \quad (4)$$

Тогда операторы

$$\phi(\mathbf{x}, t) = e^{itH}\phi(\mathbf{x})e^{-itH}, \quad \pi(\mathbf{x}, t) = e^{itH}\pi(\mathbf{x})e^{-itH}$$

удовлетворяют уравнению (2) и каноническим перестановочным соотношениям (3).

Следующим шагом должен быть выбор представления перестановочных соотношений, т. е. определение явного вида канонической пары и пространства, на котором они действуют. Этот пункт имеет прямое физическое содержание, поскольку один выбор может сделать гамильтониан физически осмысленным, а другой выбор — нет (подробнее см. [2]). Нужно специально отметить, что до сих пор сколько-нибудь полная классификация *всех* неприводимых представлений рассматриваемых перестановочных соотношений отсутствует.

Будучи не в состоянии решить задачу в полном объеме, мы сужаем проблему — решаем задачу рассеяния. Стандартная аргументация выглядит следующим образом.



У нас нет экспериментальных возможностей проследить, что происходит с частицами непосредственно в процессе столкновения: слишком на малых расстояниях и за слишком короткие промежутки времени происходят эти события. Судим мы об этих событиях по эффективным сечениям и распределениям частиц после взаимодействия, когда разлетающиеся частицы вполне могут считаться невзаимодействующими. Таким образом, процесс рассеяния естественно представить в следующем виде. В начальном состоянии, которому разумно приписать время  $t = -\infty$ , частицы находятся далеко друг от друга, и взаимодействие между ними полностью отсутствует. Затем по мере сближения взаимодействие как-то «включается», достигает наибольшей силы при максимальном сближении и постепенно «выключается» при разлете частиц после взаимодействия. Конечное состояние разумно отнести ко времени  $t = +\infty$ . Поэтому *естественно* описывать частицы в начальном и конечном состояниях (при  $t = \pm\infty$ ) лагранжианом без взаимодействия, т. е. положить  $g = 0$  в (1) и (2).

Выбор канонической пары  $\{\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x})\}$  как решения и квантования лагранжиана (1) без взаимодействия при  $g = 0$  дает

$$\begin{aligned}
 H &= H_0 + H_I, \\
 H_0 &= \int d\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}}, \quad H_I = g \int d\mathbf{x} \phi^N(\mathbf{x}), \\
 \phi(\mathbf{x}) &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} (a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + a_{\mathbf{k}}^+ e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}), \\
 [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] &= [a_{\mathbf{k}}^+, a_{\mathbf{k}'}^+] = 0, \quad [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'),
 \end{aligned} \tag{5}$$

где  $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ .

Пространство физических невзаимодействующих состояний выбирается из требования стабильности: *любые физические состояния не могут иметь отрицательную энергию*. Для этого постулируется, что существует состояние вакуума  $\Phi_0 = |0\rangle$ , удовлетворяющее условиям

$$\langle 0|0\rangle = 1, \quad a_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{k}.$$

Поэтому  $a_{\mathbf{k}}^+$  и  $a_{\mathbf{k}}$  называются операторами рождения и уничтожения.

Совокупность невзаимодействующих, или «свободных», состояний, которые являются собственными функциями гамильтониана  $H_0$ :

$$\Phi_{\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_n} = \frac{1}{\sqrt{n!}} a_{\mathbf{k}_1}^+ \dots a_{\mathbf{k}_n}^+ |0\rangle,$$

называется пространством Фока  $\mathcal{F} = \{\Phi\}$ , где квантово-полевая волновая функция  $\Phi_{\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_n}$  описывает  $n$  невзаимодействующих частиц в состоянии плоских волн.

Квантово-полевое уравнение Шредингера записывается в виде

$$i\hbar \frac{d}{dt} \Psi(t) = (H_0 + H_I) \Psi(t), \quad (6)$$

и ставится задача Коши  $\Psi(t_0) = \Psi_0$ .

Естественно предположить, что начальное состояние и решение принадлежат пространству Фока  $\mathcal{F}$ , т.е. решение может быть представлено в виде сходящегося ряда

$$\Psi(t) = \sum_n \sum_{\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_n} C_{\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_n}(t) \Phi_{\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_n} \in \mathcal{F}. \quad (7)$$

Снова подчеркнем: считается очевидным, что время  $t$  может быть измерено абсолютно точно.

Однако гамильтониан взаимодействия  $H_I$  не является хорошо определенным оператором в пространстве Фока. Это есть следствие теоремы Хаага (*в евклидово-инвариантной теории поля, использующей фокковское представление перестановочных соотношений, состояние без частиц евклидово-инвариантно*) и формы полевых гамильтонианов взаимодействия, являющихся некоторыми полиномами квантованных полей  $\phi(\mathbf{x})$ . Подробно эти проблемы рассмотрены Вайтманом в книге [2]. Таким образом, можно констатировать, что квантово-полевое уравнение Шредингера, строго говоря, математически не поставлено. Отсюда следует физически обескураживающий вывод:

*Мы не в состоянии описать развитие квантово-полевой системы во времени, оставаясь в рамках пространства Фока.*

Эта трудность не преодолена до сих пор. В литературе она известна как *проблема существования представления взаимодействия*.

Кроме того, при решении полевого уравнения Шредингера (6) по теории возмущений, т.е. по степеням гамильтониана взаимодействия, возникают так называемые ультрафиолетовые расходимости.

Принятый в настоящее время выход из возникших трудностей состоит в следующем. Как уже говорилось выше, мы отказываемся от самой возможности описывать развитие квантово-полевой системы во времени и говорим, что нам достаточно научиться вычислять амплитуды перехода от одного свободного состояния, находящегося при времени  $t_0 \rightarrow -\infty$ , «in»-состояния, к другому свободному состоянию, находящемуся при времени  $t_1 \rightarrow +\infty$ , «out»-состоянию. При этом «in»- и «out»-состояния естественно описываются векторами пространства Фока. Совокупность всех интересующих нас амплитуд всевозможных переходов содержится в  $S$ -матрице, или матрице рассеяния. Задача сводится к построению  $S$ -матрицы как унитарного оператора на пространстве Фока. Физическим обоснованием такого подхода является соображение, что процессы взаимодействия элементарных частиц проходят

на расстояниях порядка

$$l \sim 10^{-13} \div 10^{-15} \text{ см за время } t \sim 10^{-23} \div 10^{-25} \text{ с,}$$

которые недоступны нашим приборам, по крайней мере, в обозримое время.

Наиболее последовательным методом построения  $S$ -матрицы в рамках этой идеи является подход Боголюбова–Ширкова [3], суть которого состоит в следующем. Прежде всего формулируются основные требования, или аксиомы, которым должна удовлетворять  $S$ -матрица. Перечислим основные аксиомы:

- «in»- и «out»-состояния описывают невзаимодействующие частицы и принадлежат пространству Фока;
- $S$ -матрица и ее матричные элементы релятивистски-ковариантны;
- $S$ -матрица унитарна, т. е.  $SS^+ = 1$ ;
- $S$ -матрица ищется в виде разложения по степеням взаимодействия

$$S[g] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \cdots \int dx_n g(x_1) \cdots g(x_n) S_n(x_1, \dots, x_n), \quad (8)$$

где для проверки пространственно-временных свойств  $S$ -матрицы искусственно введена «функция включения взаимодействия»  $g(x)$  ( $0 \leq g(x) \leq 1$ );

- $S$ -матрица микропричинна, в дифференциальной форме это условие записывается

$$\frac{\delta}{\delta g(x)} \left( \frac{\delta S[g]}{\delta g(y)} S^+[g] \right) = 0 \quad (9)$$

при  $(x - y)^2 < 0$  или при  $(x - y)^2 > 0$ ,  $x_0 < y_0$ .

Для того чтобы связать  $S$ -матрицу с заданным лагранжианом взаимодействия, формулируется *принцип соответствия*, согласно которому  $S$ -матрица при бесконечно малых константах связи должна иметь вид

$$S = 1 + i \int dx g(x) \mathcal{L}_I(x).$$

Формальное использование требований унитарности и причинности дает

$$S_n(x_1, \dots, x_n) = T(\mathcal{L}_I(x_1) \cdots \mathcal{L}_I(x_n)). \quad (10)$$

$S$ -матрица (8), согласно (10), может быть записана в следующих эквивалентных представлениях:

$$\begin{aligned}
S &= S[g] = T \exp \left( -i \int dx g(x) \mathcal{L}_I(\phi(x)) \right) = \\
&= \exp \left( \frac{1}{2} \iint dx dx' \frac{\delta}{\delta \phi(x')} D_c(x-x') \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \right) \times \\
&\quad \times \exp \left( -i \int dx g(x) \mathcal{L}_I(\phi(x)) \right) = \\
&= \int D\Phi \exp \left( i \int dx \left[ \frac{1}{2} (\Phi(x)(\square - m^2)\Phi(x)) - g(x) \mathcal{L}[\Phi(x) + \phi(x)] \right] \right), \quad (11)
\end{aligned}$$

где  $D_c(x-x')$  есть так называемая причинная функция, или пропагатор

$$D_c(x-x') = \langle 0|T(\phi(x)\phi(x'))|0\rangle = \int \frac{dk}{i(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-x')}}{m^2 - k^2 - i0}, \quad (12)$$

удовлетворяющий уравнению

$$(\square + m^2)D_c(x-x') = \delta(x-x').$$

Оказалось, что для всех сколько-нибудь нетривиальных лагранжианов взаимодействия коэффициенты  $S_n$  матрицы рассеяния содержат ультрафиолетовые расходимости. Существенно отметить, что набор диаграмм Фейнмана, ставящийся в соответствие каждому члену  $S_n$  ряда теории возмущений матрицы рассеяния, не зависит от того, имеются или отсутствуют ультрафиолетовые расходимости. Поэтому возможно связать классификацию расходимостей с классификацией диаграмм. Для так называемых перенормируемых теорий, в которых имеется конечное число типов расходящихся диаграмм, удастся включить расходящиеся величины в физические константы (массы и константы связи), т. е. перенормировать их.

Метод устранения ультрафиолетовых расходимостей Боголюбова и Ширкова [3] исходит из наблюдения, что  $T$ -произведения в коэффициентах  $S_n$  (10) определены всюду, кроме совпадающих точек  $x_i = x_j$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ). Возникает неопределенность в совпадающих точках, и можно воспользоваться этой неопределенностью, прибавляя к  $S_n(x_1, \dots, x_n)$  так называемые квазилокальные операторы, символически записываемые в виде

$$K_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\{m_{i,j}\}}^N O_{m_{i,j}}(x_1, \dots, x_n) \prod_{i,j} \delta^{(m_{i,j})}(x_i - x_j), \quad (13)$$

где  $N$  — некоторое конечное число, и отличные от нуля только в совпадающих точках. Утверждается, что можно так ввести способ регуляризации при вычислении расходящихся интегралов и так подобрать коэффициенты

квазилокальных операторов, чтобы в пределе снятия регуляризации полученная модифицированная  $S$ -матрица удовлетворяла всем необходимым требованиям. При этом изложенная процедура применима как к перенормируемым, так и к неперенормируемым теориям. Однако в случае перенормируемых теорий можно ограничиться конечным числом типов квазилокальных операторов, т. е. имеется конечный произвол в выборе параметров, которые затем объединяются с физическими константами — происходит *перенормировка* физических величин. В случае неперенормируемых теорий для удаления всех расходимостей число необходимых квазилокальных операторов и соответствующих параметров уже бесконечно — возникает плохо контролируемый функциональный произвол при определении конечной  $S$ -матрицы. Поэтому принято считать, что неперенормируемые теории неприемлемы с физической точки зрения.

Таким образом, построение конечной  $S$ -матрицы в случае локальных взаимодействий символически может быть представлено как

$$S = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} T_{\Lambda} e^{-i \int dx g(x) \mathcal{L}_I(\phi(x), \Lambda)}. \quad (14)$$

Здесь подразумевается:  $\mathcal{L}_I(\phi(x), \Lambda)$  — лагранжиан взаимодействия с добавленными контрчленами;  $T_{\Lambda}$  — способ вычислений расходящихся выражений;  $\Lambda$  — параметр регуляризации. Естественно, и лагранжиан, и способ вычислений должны быть согласованы таким образом, чтобы существовал конечный предел при снятии регуляризации  $\Lambda \rightarrow \infty$  в (14). Сформулированная процедура перенормировок успешно работает, и в настоящее время принцип перенормируемости является физическим критерием, по которому отбираются физически приемлемые теории.

Следует особо отметить, что при таком построении  $S$ -матрицы явным образом теряется прямая связь с исходным уравнением Шредингера (6). Поэтому необходимо доказывать, что построенная  $S$ -матрица в (14) удовлетворяет всем необходимым требованиям. Существенно подчеркнуть, что время  $t$  теряет свою роль параметра, фиксирующего последовательность событий в рассматриваемой квантово-полевой системе, эту роль времени заменяет требование причинности (9), которое при корректной постановке задачи Коши являлось бы непосредственным следствием квантово-полевого уравнения Шредингера.

Блохинцев подчеркивал, что точечность взаимодействия есть приближение, имеющее смысл только в том случае, когда рассматриваются процессы на таких расстояниях и за такие промежутки времени, при которых размеры частиц не должны играть существенной роли. Именно поэтому можно считать наличие ультрафиолетовых расходимостей локальной теории принципиальным недостатком теории, поскольку область малых расстояний начинает сказываться на больших расстояниях. Однако успех теории перенормировок

означает, что влияние малых расстояний может быть упрятано в физические параметры теории, а это, в свою очередь, говорит о том, что за происхождение этих параметров отвечают еще не познанные процессы на еще более малых расстояниях. Принцип перенормируемости к настоящему времени получил статус физического принципа и практически не обсуждается, тем не менее я согласен с мнением Р. Фейнмана, который считал, что теория перенормировок является не решением проблемы, а «заметанием мусора под ковер».

Вернемся к требованию микропричинности (9). В его основе лежит *естественное* предположение, что координаты пространства-времени и поля в этих координатных точках могут быть измерены сколь угодно точно. Математически это выражается в следующем: требуется, чтобы коэффициенты функции  $S_n$  в (10) и квазилокальные операторы  $K_n$  в (13) были обобщенными функциями умеренного роста, а в качестве функции включения взаимодействия  $g(x)$  можно было бы выбирать функции с ограниченным носителем.

Однако еще Бор и Розенфельд в своих работах [4] (см. также [5]), посвященных проблеме измеримости электромагнитных полей, показали, что измеримы могут быть лишь средние значения операторов поля по малым пространственно-временным областям, т. е. измеримы лишь эрмитовы операторы вида

$$\phi(\Gamma) = \int_{\Gamma \in \mathbf{R}^4} dx \phi(x),$$

где  $\Gamma$  — малая область пространства-времени. Это обусловлено конечными размерами классических измерительных приборов и конечными промежутками времени, необходимыми для измерения действия  $\phi(\Gamma)$  на макроскопические пробные тела. Поэтому «причинная связь, имевшаяся в классической теории между полями и их источниками, в квантовой теории теряется». Таким образом, *физически необоснованным* является предположение, что полевые операторы, взятые в строго определенных точках пространства и времени, существуют в обычном квантово-механическом смысле. Отсюда следует, что постулат локальной микропричинности (9) с физической точки зрения является завышенным, слишком сильным требованием.

Как может быть реализована идея, что у нас на самом деле нет инструмента для проверки микролокальности квантово-полевых объектов? При этом мы не предполагаем, что существует некоторая *элементарная длина*  $l$ , являющаяся универсальной постоянной типа скорости света  $c$  или постоянной Планка  $\hbar$ . На современном математическом языке полевые операторы и матричные элементы произведений этих операторов являются функционалами, или обобщенными функциями, заданными на пространстве основных функций, имеющих смысл как раз тех инструментов, при помощи которых определяются локальные свойства соответствующих функционалов. Так, для

возможности проверки микропричинности пространство основных функций должно содержать функции с ограниченным носителем (см. подробнее в [6]). Если же мы считаем, что принципиально могут быть измеримы лишь средние значения операторов поля по малым пространственно-временным объемам, то пространство основных функций *не должно содержать* функций с ограниченным носителем. Только в этом случае у нас не будет возможности поставить вопрос о строгой микропричинности или микролокальности. Простейшей реализацией этой идеи является выбор пространств основных функций, состоящих из целых аналитических функций в конфигурационном  $z = x + iy \in \mathbf{C}^4$  пространстве (классификация возможных пространств основных функций с этой точки зрения дана в [6]). Такое предположение сразу же приводит к расширению класса обобщенных функций, которые можно было бы использовать для описания нелокального поведения полевых операторов.

Приведем пример, имеющий прямое отношение к обсуждаемым здесь проблемам. Рассмотрим для простоты только  $t$ -пространство. Пусть некоторая функция Грина имеет вид

$$G(t - t') = e^{-(l \frac{d}{dt})^2} \delta(t - t') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} e^{-iE(t-t') + l^2 E^2}. \quad (15)$$

Очевидно, эта функция Грина как обычная функция не определена, поскольку интеграл в (15) не существует, но может быть определена только как обобщенная функция. Рассмотрим выражение

$$J_{\text{out}}(t) = (G J_{\text{in}})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} e^{-iEt} e^{+l^2 E^2} \tilde{J}_{\text{in}}(E). \quad (16)$$

Физический смысл этого выражения состоит в том, что имеется начальный «пакет»  $J_{\text{in}}(t)$ , и нас интересует, как он расплывается, если претерпевает воздействие, описываемое функцией Грина  $G(t - t')$ .

Интеграл в (16) должен сходиться, поэтому фурье-образ начального пакета  $\tilde{J}_{\text{in}}(E)$  должен убывать быстрее гауссовской экспоненты, откуда следует, что функция  $J_{\text{in}}(t + i\tau)$  является целой аналитической функцией в комплексной плоскости  $z_0 = t + i\tau \in \mathbf{C}$ .

Математически это может быть сформулировано следующим образом. Введем пространство целых аналитических функций  $Z_\rho$  ( $1 < \rho < 2$ ). Для каждой функции из этого пространства  $F(t + i\tau) \in Z_\rho$  существуют такие постоянные  $B$ ,  $b$  и  $c$ , что

$$|F(t + i\tau)| \leq B e^{-b|t|^\rho + c|\tau|^\rho}.$$

Пространством фурье-образов является

$$\tilde{Z}_\rho = Z_{\rho_1}, \quad \rho_1 = \frac{\rho}{\rho - 1} > 2.$$

Пусть  $J_{\text{in}}(t) \in Z_\rho$ , т. е.

$$|J_{\text{in}}(t)| \leq B e^{-|t/\Delta|^\rho} \quad \text{и} \quad |\tilde{J}_{\text{in}}(E)| \leq C e^{-\Delta|E|^{\rho_1}}, \quad \rho_1 > 2.$$

Таким образом, начальный пакет, описываемый функцией, принадлежащей пространству  $Z_\rho$ , не может быть *точно* сосредоточен в точке  $t = 0$ , степень локализации характеризуется параметром  $\Delta$ . Следовательно, требование сходимости интеграла в (16) исключает существование локальных «пакетов»  $J_{\text{in}}(t) \sim \delta(t)$ , т. е.  $\tilde{J}_{\text{in}}(E) \sim \text{const}$ .

Для конечного «пакета»  $J_{\text{out}}(t)$  имеем

$$\tilde{J}_{\text{out}}(E) = e^{l^2 E^2} \tilde{J}_{\text{in}}(E) \in \tilde{Z}_{\rho_1},$$

т. е.  $\tilde{G}(E) = e^{l^2 E^2}$  является мультипликатором в пространстве  $\tilde{Z}_\rho$ , и

$$|\tilde{J}_{\text{out}}(t)| \leq C e^{-|t/\Delta|^\rho}.$$

Конечный пакет расплывается так же, как и начальный, и мы можем констатировать, что действие функции Грина (15) действительно ограничивается малой окрестностью порядка  $|t - t'| \sim l$ . Частица, описываемая функцией Грина вида (15), может интерпретироваться как флуктуация состояния с некоторыми квантовыми числами, существующая в течение отрезка времени  $\Delta t \sim l$ .

Главный практический вывод заключается в том, что ослабление требования микропричинности дает возможность расширить классы используемых обобщенных функций.

### 3. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Предположим теперь, что теория нелокальна, т. е. взаимодействие квантованных полей происходит не в точке, а в некоторой области размером  $l$ . Давние попытки реализовать эту идею (см. [1, 6–8]) носили, так сказать, «технический» характер, так как задача состояла в том, чтобы ввести в лагранжиан взаимодействия некоторый формфактор  $F((x - y)^2/l^2)$ , который был бы в состоянии устранить ультрафиолетовые расходимости и удовлетворить всем требованиям к теории: релятивистской ковариантности, унитарности, разумной макропричинности, калибровочной инвариантности. Эти попытки



не увенчались успехом. Основным камнем преткновения явилось требование унитарности. Дело в том, что любые особенности амплитуд любых физических процессов в комплексной области изменения импульсных переменных связаны с виртуальными процессами реальных частиц. Появление каких-либо дополнительных особенностей с неизбежностью ведет к появлению нефизических особенностей у амплитуд и тем самым к нарушению унитарности матрицы рассеяния. Главным образом использовались формфакторы, являющиеся мероморфными функциями в импульсном пространстве, т. е. имеющими нефизические особенности вне физически наблюдаемой области (это делается до сих пор (см., например, [9])). Однако эти особенности в высших порядках теории возмущений приводят к возникновению дополнительных особенностей уже у наблюдаемых амплитуд в физической области импульсных переменных, что нарушает унитарность матрицы рассеяния. Попытки сформулировать правила вычислений таким образом, чтобы выбросить нарушающие унитарность слагаемые, на практике приводили к весьма громоздким правилам вычислений, так что реально вычисления можно было провести лишь в самых низших порядках теории возмущений (см. [7, 8]).

Отсюда следует, что нам нужны такие формфакторы, которые одновременно обеспечивают сходимость всех интегралов при больших импульсах и не имеют никаких особенностей в комплексном пространстве импульсных переменных. Оказалось, что в основе самосогласованной нелокальной квантовой теории поля лежат два основных положения.

Во-первых, в качестве формфакторов должны быть использованы целые аналитические функции, удовлетворяющие условиям:

- $V(z)$ , где  $z = l^2 k^2$ , является целой аналитической функцией конечного порядка роста  $1/2 \leq \rho < \infty$  (далее мы увидим, что вариант  $\rho = 1$ , т. е. гауссовское поведение, имеет выделенное значение);
- $[V(z)]^* = V(z^*)$  — формфактор веществен;
- формфакторы убывают в евклидовом направлении:

$$V(z) = \begin{cases} O(1/|z|^2), & \operatorname{Re} z \rightarrow -\infty (k^2 \rightarrow -\infty), \\ O(e^{A|z|^\rho}), & \operatorname{Re} z \rightarrow \infty (k^2 \rightarrow \infty); \end{cases}$$

- классы основных функций, на которых определены формфакторы как обобщенные функции, состоят из целых аналитических функций (типа  $Z_\rho$ ) в конфигурационном  $x$ -пространстве и не содержат функций с ограниченным носителем.

Подробный анализ локальных свойств обобщенных функций и соответствующих классов основных функций сделан в монографии [6].

Во-вторых, исходно теория должна быть сформулирована в евклидовом пространстве, где проводятся вычисления любых физических характеристик

теории. Амплитуды различных процессов в физической области получаются методом аналитического продолжения по инвариантным импульсным переменным, причем аналитическое продолжение по инвариантным импульсным переменным при вычислении матричных элементов  $S$ -матрицы по теории возмущений не может быть осуществлено виковским поворотом контура интегрирования в импульсном пространстве.

Покажем теперь, как эта идея реализуется для различных квантово-полевых вариантов взаимодействий.

**Скалярные теории.** В скалярных теориях можно поступить двояко. Например, объявить, что  $T$ -произведения полевых операторов в (10) определены не только при совпадающих точках  $x_i = x_j$ , но и в некоторой их малой окрестности, взять вместо квазилокального оператора (13) некоторый нелокальный оператор из подходящего класса нелокальных обобщенных функций. Однако такой путь действий ведет к плохо контролируемому функциональному произволу при определении  $S_n(x_1, \dots, x_n)$  в (10).

Можно поступить еще проще — постулировать, что  $T$ -произведение не определено только для пропагатора

$$\begin{aligned} D_c(x - x') &= \langle 0|T(\phi(x)\phi(x'))|0\rangle + K(l^2\Box)\delta(x - x') = \\ &= \int \frac{dk}{i(2\pi)^4} e^{ik(x-x')} \frac{V(l^2k^2)}{m^2 - k^2 - i0}. \end{aligned} \quad (17)$$

Предполагается, что формфактор удовлетворяет перечисленным выше свойствам. При таком подходе параметр  $l$  имеет смысл *элементарной длины*, хотя не возникает никаких изменений метрики пространства-времени на малых расстояниях.

Эффективно к тому же результату ведет предположение, что нелокальное взаимодействие описывается нелокальным лагранжианом взаимодействия типа

$$\mathcal{L}_I(x) = g (v(l^2\Box)\phi(x))^N, \quad (18)$$

а пропагатором поля  $\phi$  является (17), где  $V(l^2p^2) = v^2(l^2p^2)$ . В этом случае параметр  $l$  имеет смысл размера области нелокального взаимодействия и должен определяться из каких-либо физических соображений.

Построенная таким образом матрица рассеяния не содержит ультрафиолетовых расходимостей и удовлетворяет условиям унитарности и макропричинности (см. [6]). Введение формфактора в пропагатор скалярного поля делает конечными как перенормируемые ( $N = 3, 4$ ), так и неперенормируемые ( $N \geq 5$ ) теории. Можно сказать, что формфактор  $V(l^2p^2)$  параметризует все ультрафиолетовые расходимости в исследуемой квантово-полевой модели.

**Нелокальная квантовая электродинамика.** Более интересны теории с абелевой калибровочной группой  $U(1)$ , описывающие взаимодействие заря-

женных полей с полем фотонов. Рассмотрим квантовую электродинамику. В этом случае преобразования калибровочной группы для спинорной электродинамики выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu f(x), \\ \psi(x) &\rightarrow e^{-ieK(l^2\Box)f(x)}\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) e^{ieK(l^2\Box)f(x)}, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $A_\mu(x)$  и  $\psi(x)$  — поля фотонов и электронов соответственно и формфактор нормирован условием  $K(0) = 1$ .

Преобразования (19) означают, что заряженное поле  $\psi(x)$  характеризуется не только зарядом  $e$ , но и «классическим» распределением заряда  $K(l^2\Box)\delta(x-x')$ , которое для покоящейся заряженной частицы описывается формфактором  $K(-l^2\mathbf{k}^2)$ . Здесь параметр  $l$  характеризует «классический» размер электрона.

Лагранжиан нелокальной электродинамики записывается

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)^2 + (\bar{\psi}[\hat{p} + eK(l^2\Box)\hat{A} - m]\psi). \quad (20)$$

Эффективно этот лагранжиан ведет к изменению пропагатора фотона, который в евклидовой метрике имеет вид

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}(x-x') &= K(l^2\Box_x)K(l^2\Box_{x'})\langle 0|T(A_\mu(x)A_\nu(x'))|0\rangle = \\ &= \int \frac{dk e^{ik(x-x')}}{i(2\pi)^4} \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \frac{K^2(l^2k^2)}{k^2 + i0}. \end{aligned}$$

Полученный лагранжиан описывает нелокальную суперперенормируемую теорию, в которой имеется только одна расходящаяся диаграмма — поляризация вакуума, или электрон-позитронная петля.

Существенно, что параметр  $l$  является независимой величиной и, вообще говоря, может принимать любые значения. При этом теория остается конечной, унитарной, калибровочно-инвариантной и макропричинной в каждом порядке теории возмущений, как и в случае локальной КЭД.

В рамках этой теории удалось окончательно завершить многолетние усилия по получению классического предела в задаче о собственной энергии электрона (см. [6]). В самосогласованной теории, где имеет смысл размер частицы, квантовый и классический пределы естественно определяются соотношением между классическим размером частицы и ее комптоновской длиной: квантовый предел  $\lambda_c \gg l$  и классический предел  $\lambda_c \ll l$ , где  $\lambda_c = \hbar/(mc)$  — комптоновская длина волны электрона.

Поправка к массе электрона в нелокальной квантовой электродинамике (20), вычисленная по теории возмущений, имеет вид

$$\delta m = m \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right)^n M_n \left( \frac{\hbar}{mc l} \right). \quad (21)$$

Оказалось, что главные события происходят в низшем слагаемом по теории возмущений:

$$m \frac{e^2}{\hbar c} M_1 \left( \frac{\hbar}{mc l} \right) = \begin{cases} \frac{3m}{16\pi^2} \frac{e^2}{\hbar c} \ln \left( \frac{\hbar}{mc l} \right)^2 & \text{при } \frac{\hbar}{mc} \gg l, \\ \text{const } \frac{e^2}{c^2 l} & \text{при } \frac{\hbar}{mc} \ll l, \end{cases} \quad (22)$$

а остальные члены ряда ( $n > 1$ ) стремятся к нулю в классическом пределе:

$$\left( \frac{e^2}{\hbar c} \right)^n M_n \left( \frac{\hbar}{mc l} \right) = O \left( \left( \frac{\hbar}{mc l} \right) \right) \rightarrow 0 \quad \text{при } \frac{\hbar}{mcl} \rightarrow 0.$$

Таким образом, в классическом пределе  $\hbar/(mc) \ll l$  поправка к массе электрона описывается классической формулой.

#### 4. АКСИОМАТИЧЕСКАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Одно из возражений против квантовой теории поля с нелокальным взаимодействием было основано на убеждении, что теорема об общей природе локальной коммутативности, доказанная в аксиоматической квантовой теории поля (см., например, [10]), полностью закрывает какие бы то ни было перспективы построения непротиворечивой нелокальной теории.

Суть теоремы состоит в том, что если коммутатор гейзенберговского поля удовлетворяет условию

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0 \quad \text{при } (x - y)^2 < -l^2,$$

то этот коммутатор обращается в нуль и при  $(x - y)^2 < 0$ . Это означает, что поле  $\phi(x)$  локально. Теорема основана на предположениях:

- трансляционная и релятивистская ковариантность,
- полнота физических состояний с положительной энергией,
- пространство обобщенных функций умеренного роста, которому должны принадлежать вакуумные средние операторов поля.

Последнее предположение казалось естественным, но именно оно предопределяет утверждение теоремы, поскольку в этом пространстве отсутствуют

нелокальные релятивистски-инвариантные обобщенные функции, с помощью которых строится непротиворечивая квантовая теория с нелокальным взаимодействием.

Аксиоматическая квантовая теория поля с экспоненциальным ростом вакуумных средних была рассмотрена в конце 60-х гг. в работах М. З. Иофы и В. Я. Файнберга [11] и затем М. А. Соловьева [12]. Было показано, что основные теоремы аксиоматики (СРТ, связь спина и статистики, теория асимптотических полей) сохраняют свою силу, в то время как теорема о локальной коммутативности уже несправедлива. Таким образом, в нелокальной квантовой теории поля достигнут тот же уровень математической строгости, что и в локальной квантовой теории поля.

### 5. ПОВЕДЕНИЕ ПРИ БОЛЬШИХ ЭНЕРГИЯХ

Другое предубеждение против релятивистской нелокальной квантовой теории поля состоит в том, что формфакторы и пропагаторы, которые являются целыми аналитическими функциями, убывающими в евклидовом импульсном пространстве, быстро растут в физической области при  $s \rightarrow +\infty$ :

$$|\mathcal{K}(s)| \sim e^{(l^2 s)^\rho}, \quad \rho \geq \frac{1}{2}. \quad (23)$$

Поэтому коэффициенты разложения по теории возмущений для любой амплитуды растут в физической области как

$$\mathcal{M}(s_{ij}) = \sum_{n=0}^{\infty} g^{n_0+2n} \mathcal{M}^{(n)}(s_{ij}), \quad |\mathcal{M}^{(n)}(s_{ij})| \sim e^{n s_{ij}^\rho} \quad \text{при } s_{ij} \rightarrow +\infty,$$

где  $s_{ij} = (k_i + k_j)^2$ .

Это означает, что режим сильной константы связи в нелокальной теории наступает при  $g^2 \exp(l^2 s)^\rho \geq 1$ , т. е. при относительно невысоких энергиях, сравнимых с величиной области нелокального взаимодействия  $s \sim 1/l^2$ , в то время как в локальных перенормируемых теориях режим сильной связи наступает при  $g^2 \ln s \geq 1$ , и, с практической точки зрения, эта граница весьма далека. Следовательно, нельзя пользоваться вычислениями по теории возмущений при более высоких энергиях. Таким образом, как и в локальных теориях, необходимо привлекать методы суммирования рядов теории возмущений, что в настоящее время представляется весьма сложной задачей и является задачей на будущее.

Однако в лагранжевом формализме, развитом в [6], была доказана унитарность  $S$ -матрицы в каждом порядке теории возмущений и показано, что аналитические свойства амплитуд в любой конечной области комплексных им-

пульсных переменных в локальной и нелокальной теориях совпадают. Естественно предположить, что существует некоторый метод суммирования рядов теории возмущений, так что точная  $S$ -матрица унитарна, аналитические особенности амплитуд в любой конечной области комплексных импульсных переменных в локальной и нелокальной теориях совпадают и ограничение (23) справедливо для точных амплитуд. В частности, амплитуда упругого рассеяния аналитична в эллипсе Мартена–Лемана. Кстати, то же самое предположение делается и в локальной КТП. Тогда возможно получить ограничение сверху на полное поперечное сечение в НКТП.

Первый результат для класса существенно нелокализуемых теорий, в которых рост амплитуд во всем импульсном пространстве ограничен экспонентой  $\exp(b\|p^2\|^\rho)$ ,  $\rho > 1/2$ , был получен в [14]. Авторы показали, что полное поперечное сечение ограничено функцией

$$\sigma_{\text{tot}}(s) < C s^{1+2\rho}.$$

Эта оценка представляется весьма завышенной. С физической точки зрения очевидно, что при высоких энергиях полное поперечное сечение при нелокальном взаимодействии, по крайней мере, не должно расти быстрее поперечного сечения при локальном взаимодействии, поскольку «нелокальные частицы», имеющие некоторую протяженность, должны становиться все более и более прозрачными.

В работе [15] показано, что ограничение Фруассара на полное поперечное сечение имеет вид

$$\sigma_{\text{tot}}(s) < C s^{\rho-1} \ln^2 s.$$

Случай гауссовского поведения  $\rho = 1$  нам представляется особенно интересным. Как мы увидим ниже, именно этот вариант реализуется при аналитическом конфайнменте в КХД. Тогда ограничение на поведение полного сечения рассеяния при больших энергиях то же самое, что и в локальной теории:

$$\sigma_{\text{tot}}(s) < C \ln^2 s.$$

Таким образом, дело за развитием методов суммирования рядов теории возмущений. При этом мне хотелось бы сделать следующее замечание. В настоящее время общепринято, что любой выход за рамки теории возмущений предполагает суммирование какого-то определенного класса диаграмм Фейнмана. Однако нам представляется, что реальное поведение амплитуд при больших энергиях или константах связи не должно быть связано с суммированием какого-то определенного класса диаграмм. Например, в скалярной симметричной модели Кеммера (см. [16]), которая перенормируема в случае локального взаимодействия, применение метода Лаппо–Данилевского, не сводящегося к суммированию диаграмм, приводит к конечной связи между перенормированной и неперенормированной константами связи, т. е. существует конечный предел при снятии регуляризации.

## 6. АНАЛИТИЧЕСКИЙ КОНФАЙНМЕНТ. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Итак, оказалось, что формфакторы, являющиеся целыми аналитическими функциями, описывают структуру частиц и в то же время не приносят никаких аналитических особенностей в амплитуды физических процессов. Другими словами, такие формфакторы не связаны ни с какими реальными частицами. Поэтому не могло не возникнуть желания попытаться описать явление конфайнмента, по крайней мере, феноменологически на языке целых аналитических функций. Было построено несколько феноменологических моделей, и оказалось, что эти модели разумно описывают физику адронов при низких энергиях. Можно сказать, что описание кварков на больших расстояниях, т. е. в области конфайнмента, целыми аналитическими функциями гауссовского типа вполне разумно.

Следует заметить, что в физике адронов низких энергий создалась любопытная ситуация, на которую обращал внимание еще Блохинцев и которую можно сформулировать в виде вопроса: почему в этой области адронной физики имеется столь много различных моделей и подходов и почему все они достаточно хорошо описывают имеющиеся экспериментальные данные? По всей видимости, в низкоэнергетической физике адронов основную роль играет симметрия (флэйворная, киральная), а матричные элементы различных процессов не слишком чувствительны к конкретному выбору пропагаторов и вершинных функций, интегралами от которых они являются. Естественно, всякая модель содержит свои параметры, поэтому помимо общих аксиоматических требований, касающихся непротиворечивости и внутренней самосогласованности модели, можно лишь ввести «утилитарный» критерий: чем меньшее количество свободных параметров содержит модель и чем большее число экспериментальных характеристик она описывает, тем ближе данная модель к истинной теории. Тем не менее надо всегда иметь в виду шуточное утверждение Ландау, которое я запомнил в форме: «Среди счетного множества неверных теорий всегда найдется конечное число их, согласующееся с экспериментом».

**Виргонная модель** основана на следующем простом рассуждении. Пусть лагранжиан, описывающий кварки в области конфайнмента, имеет вид

$$\mathcal{L}(x) = \bar{q}(x)S^{-1}(\hat{p})q(x),$$

где  $S^{-1}(\hat{p})$  — некоторый нетривиальный оператор. Конфайнмент кварков означает, что единственным решением уравнения движения

$$S^{-1}(\hat{p})q(x) = 0$$

должно быть поле, тождественно равное нулю:  $q(x) \equiv 0$ . Отсюда непосредственно следует, что функция  $S^{-1}(z)$  не должна иметь нулей во всей комплексной плоскости  $z \in \mathbb{C}$ , и, следовательно, пропагатор, или функция Грина

$S(\hat{p})$ , должен быть целой аналитической функцией в плоскости  $\hat{p} = z \in \mathbb{C}$ . Простейший нетривиальный пропагатор, который является целой аналитической функцией от  $\hat{p}$  и убывает в евклидовом пространстве, имеет вид

$$\tilde{S}(p) = S_0 e^{a\hat{p} - bp^2}, \quad (24)$$

где  $S_0$ ,  $a$  и  $b$  — единственные феноменологические параметры модели, различные для различных кварков и определяемые подгонкой экспериментальных данных. Такое поле было названо *виртонным*. Адроны, т.е. мезоны и барионы, считаются связанными состояниями кварков. Например, взаимодействие мезонов с кварками описывается лагранжианами типа

$$L_{M\bar{q}q} = g_M M(\bar{q}\Gamma q), \quad (25)$$

где матрица  $\Gamma$  определяет соответствующие квантовые числа мезона. Мезон является связанным состоянием кварков. Это означает, что константа перенормировки волновой функции мезона, имеющая смысл вероятности составной «физической» частице  $|M\rangle$  находиться в состоянии «голой»  $|M\rangle$ , должна равняться нулю (см., например, [20]):

$$Z_2^{(M)} = |\langle M|M\rangle|^2 = 0. \quad (26)$$

Другими словами, составная частица не может находиться в «голом» состоянии.

Эта константа в нелокальной теории конечна и вычисляется. Уравнение (26) определяет величину константы связи  $g_M$ , если известна масса связанного состояния. Другими словами, спектр масс адронов не может быть вычислен в данной модели, но можно вычислять амплитуды разнообразных распадов адронов. Виртонная модель изложена в монографии [13].

Расчеты показали, что в виртонной модели правильно угаданы основные черты адронной структуры на периферии адрона, где происходит конфайнмент и адронизация кварков и глюонов. Модель хорошо работает при описании различного рода распадов адронов при малых энергиях. Для описания амплитуд рассеяния и физических формфакторов модель оказалась слишком грубой.

**Модель конфайнированных кварков** явилась попыткой описать физику адронов при больших энергиях по сравнению с виртонной моделью. Модель изложена в монографии [17]. В основу модели положено представление, что адроны возникают как результат взаимодействия кварковых токов типа (25). Кварки не существуют как обычные частицы Дирака, но они могут существовать в виртуальном состоянии и играют роль переносчиков взаимодействия между адронами. Требование конфайнмента реализуется феноменологически как анзац при вычислении кварковых петель. Например, для треугольной диаграммы имеем



$$\begin{aligned}
 A_n(x_1, x_2, x_3) &= \langle 0|T\{(\bar{q}(x_1)\Gamma_1 q(x_1))(\bar{q}(x_2)\Gamma_2 q(x_2))(\bar{q}(x_3)\Gamma_3 q(x_3))\}|0\rangle = \\
 &= \int d\sigma_v \text{Tr}(\Gamma_1 S_v(x_1 - x_2)\Gamma_2 S_v(x_2 - x_3)\Gamma_3 S_v(x_3 - x_1)), \quad (27)
 \end{aligned}$$

$$S_v(x - x') = \int \frac{dp}{i(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-x')}}{\hat{p} - v}.$$

Мера  $d\sigma_v$  определена как

$$\int \frac{d\sigma_v}{v - z} = G(z) = a(-z^2) + z b(-z^2), \quad (28)$$

где  $a(-z^2)$  и  $b(-z^2)$  — универсальные феноменологические функции, в терминах которых выражаются амплитуды любых физических процессов. Были использованы следующие функции:

$$a(u) = a_0 e^{-u^2 - a_1 u}, \quad b(u) = b_0 e^{-u^2 + b_1 u}.$$

Параметры  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $b_0$  и  $b_1$  являются феноменологическими параметрами модели.

Как и в виртонной модели, константы связи адронов с соответствующими кварковыми токами  $g_M$  без труда вычисляются из условия связности  $Z_2^{(M)} = 0$ .

Проведенные расчеты показали, что модель хорошо описывает различного рода распады адронов при малых энергиях.

Главный положительный результат, полученный при исследовании этих моделей, состоит в том, что идея аналитического конфайнмента и простая форма взаимодействия адронов с кварками типа (25) дают правильное описание низкоэнергетической адронной физики.

Следует еще отметить, что в лагранжиане взаимодействия (25) связь мезона с кварковым током предполагается локальной, что на самом деле является грубым приближением, поскольку адроны возникают как результат взаимодействия кварков с глюонами, которое должно приводить к нелокальным вершинам в эффективных лагранжианах взаимодействия типа (25). Поэтому следующий шаг в развитии идеи аналитического конфайнмента состоит в отыскании механизма, ведущего к возникновению аналитического конфайнмента в рамках КХД.

## 7. САМОДУАЛЬНОЕ ПОЛЕ И СТАБИЛЬНОСТЬ КЭД И КХД

Главная проблема аналитического конфайнмента состоит в том, чтобы ответить на два вопроса: какой механизм ведет к возникновению аналитического конфайнмента и какими функциями описывать кварки и глюоны в области конфайнмента? Наша точка зрения состоит в том, что конфайнмент не

связан с так называемым переходом к режиму сильной связи в КХД, т. е. конфайнмент не возникает в результате какого-то суммирования диаграмм теории возмущений, соответствующих исходному локальному взаимодействию КХД.

Мы считаем, что вакуум КХД должен реализоваться при некотором нетривиальном глюонном поле, т. е. энергия вакуума кварк-глюонной системы в этом поле должна иметь наименьшее значение, и в этом поле возникает аналитический конфайнмент кварков.

Мы придерживаемся гипотезы, что хорошим кандидатом на роль вакуумного глюонного поля является самодуальное глюонное поле с постоянной напряженностью. Это поле имеет вид

$$\begin{aligned} B_\mu^a(x) &= n^a B_\mu(x), & B_\mu(x) &= \Lambda^2 b_{\mu\nu} x_\nu, \\ B_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu B_\nu(x) - \partial_\nu B_\mu(x) = -2\Lambda^2 b_{\mu\nu} = \text{const}, \end{aligned} \quad (29)$$

где  $n^a$  — постоянный вектор в цветовом пространстве. Параметр  $\Lambda$  характеризует напряженность самодуального поля и

$$b_{\mu\nu} = -b_{\nu\mu}, \quad b_{\mu\rho} b_{\rho\nu} = -\delta_{\mu\nu}, \quad \tilde{b}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\nu\mu\alpha\beta} b_{\alpha\beta} = \pm b_{\mu\nu}.$$

Самодуальный или антисамодуальный тензор  $b_{\mu\nu}$  характеризуется некоторым направлением  $\mathbf{h}_j = b_{j4}$  ( $\mathbf{h}\mathbf{h} = 1$ ) в конфигурационном трехмерном пространстве. Конфигурационная часть самодуального поля с постоянной напряженностью  $B_\mu(x)$  является решением уравнения Максвелла в пустоте

$$\partial_\mu B_{\mu\nu}(x) = 0.$$

Поле  $B_\mu^a(x)$  удовлетворяет уравнениям Янга–Миллса и ведет к аналитическому конфайнменту, т. е. пропагаторы кварков в этом поле становятся целыми аналитическими функциями гауссовского типа в импульсном пространстве и кварки не могут существовать как обычные частицы.

Конфайнмент частицы, находящейся в этом поле, имеет прозрачный физический смысл. Пусть вектор  $\mathbf{h}$  направлен вдоль оси  $z$ . Тогда поле  $B_\mu(x)$  действует в плоскости  $x, y$  как обычное магнитное поле на заряженную частицу, т. е. закручивает частицу в этой плоскости, не давая ей возможности уйти на бесконечность. В плоскости  $z, t_4$  поле  $B_\mu(x)$  соответствует с точки зрения пространства Минковского чисто мнимому электрическому полю, действие которого эквивалентно действию магнитного поля, т. е. оно закручивает заряженную частицу в плоскости  $z, t_4$ . Возникает конфайнмент не только в пространстве, но и во времени. Поскольку КХД в таком поле становится квантовой теорией поля с нелокальным взаимодействием, о котором шла речь выше, то в пространстве Минковского, где, как говорилось выше,

нет локализованных объектов, аналитический конфайнмент можно представить как возникновение и исчезновение частицы с соответствующими квантовыми числами, т. е. «конфаймированная» частица является флуктуацией в пространственно-временной области размером  $L_{\text{conf}} \sim 1/\Lambda$ .

Самодуальное поле с постоянной напряженностью рассматривалось еще в конце 70-х и начале 80-х гг. прошлого века. Было показано [19], что это поле стабильно относительно вакуумных флуктуаций. Кроме того, оказалось, что энергия глюонного вакуума реализуется при ненулевой напряженности поля [18, 19]. Однако в последней из упомянутых работ высказывается весьма критическое отношение к возможному использованию этих полей в адронной физике. Мне же представляется, что самодуальное поле с постоянной напряженностью заслуживает более серьезного отношения к себе, и необходимо более широко взглянуть на роль этого поля в КТП, поскольку самодуальное поле и в КЭД является решением уравнений Максвелла. Поэтому небезынтересно сравнить роль самодуального поля в КЭД и КХД с целью понять, в чем состоит принципиальная разница мира КЭД и мира КХД с точки зрения влияния самодуальных полей на стабильность систем частиц в этих двух мирах.

При теоретическом подходе к изучению поставленной задачи возникают два основных вопроса:

- 1) какую систему частиц рассматривать и как вводить поле, которое реализует вакуум, в лагранжиан системы полей,
- 2) каким математическим аппаратом пользоваться при вычислении энергии вакуума.

В основных работах [18, 19], посвященных вычислению энергии вакуума в самодуальном поле, рассматривалась система, состоящая только из глюонов. Нам такой подход представляется недостаточным, поскольку кварки и глюоны представляют единую систему и находятся в едином вакууме. Поэтому в КХД физическая система состоит из кварков и глюонов, а в КЭД — из всех заряженных частиц (фермионов и бозонов) плюс электромагнитное поле.

Обычно вакуумное поле рассматривается как внешнее поле, на практике это означает, что в полном лагранжиане производится замена  $A_\mu \rightarrow A_\mu + B_\mu$ , где  $B_\mu$  — внешнее, а  $A_\mu$  — квантованное поле, затем рассматривается получившийся лагранжиан, в который внешнее поле входит в комбинации  $eB_\mu$ . Мы же предлагаем другую точку зрения: если поле  $B_\mu$  реализует вакуум КЭД или КХД, то оно как бы внутренне присуще рассматриваемой системе частиц, т. е. оно не является внешним полем в обычном понимании и изначально должно быть введено в лагранжиан системы полей. При этом вакуумное поле непосредственно не связано с зарядом, и величина напряженности вакуумного поля должна определяться минимумом энергии системы частиц, находящихся в этом вакууме. Это поле может быть отличным от нуля даже при равенстве нулю заряда,  $e = 0$ , или константы связи,  $g = 0$ , которые определяют силу взаимодействия частиц с фотонами или глюонами.

Теперь о способе вычислений. Мы считаем, что гамильтонов подход при вычислениях энергии вакуума не является наилучшим, поскольку, во-первых, гамильтониан в КТП не является хорошо определенным оператором (см., например, [2]), и, во-вторых, не ясно, а имеем ли мы гамильтонову систему при включении самодуального поля, поскольку лагранжиан оказывается явно зависящим от времени, а все вычисления проводятся в евклидовой метрике. Максимум, что с математической точки зрения достигнуто в КТП, это построена теория  $S$ -матрицы и производящего функционала  $Z$ , т.е. сформулированы правила построения матрицы рассеяния как унитарного оператора на пространстве Фока и функций Грина, исходя из заданного лагранжиана системы полей. При этом регуляризация и способ вычислений плюс перенормировочная процедура с правилом построения необходимых контрчленов играют определяющую роль. Другими словами, знания гамильтониана еще совсем не достаточно, чтобы вычислять различные физические характеристики. Последнее обстоятельство еще раз говорит о том, что к гамильтонову методу в КТП надо относиться с большой осторожностью. Поэтому основным методом и объектом наших вычислений будет производящий функционал.

**Квантовая электродинамика.** Рассмотрим систему фермионов  $\{\psi_F\}$  и бозонов  $\{\phi_B\}$  с ненулевыми массами и одинаковым зарядом  $e$  в КЭД. Наша конечная цель состоит в том, чтобы понять, что происходит в хромодинамике кварков и глюонов, поэтому фермионы и бозоны будем рассматривать как систему частиц с одинаковым зарядом.

Все вычисления будем проводить в евклидовой метрике. Согласно сделанному выше замечанию, лагранжиан системы заряженных частиц записывается в форме

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \sum_F (\bar{\psi}_F(x)[\hat{D}(x) - M_F]\psi_F(x)) - \sum_B \phi_B^*(x) [-D^2(x) + m_B^2] \phi_B(x). \quad (30)$$

Ковариантная производная имеет вид

$$\begin{aligned} D_\mu(x) &= \nabla_\mu(x) + ieA_\mu(x), & \nabla_\mu(x) &= \partial_\mu + iB_\mu(x), \\ \nabla_\mu(x) &= \partial_\mu + iB_\mu(x) = \partial_\mu + i\Lambda^2 b_{\mu\nu} x_\nu, \\ [\nabla_\mu(x), \nabla_\nu(x)] &= -2i\Lambda^2 b_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Лагранжиан инвариантен относительно следующих калибровочных преобразований:

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu f(x), & B_\mu(x) &\rightarrow B_\mu(x), \\ \psi_F(x) &\rightarrow e^{ief(x)}\psi_F(x), & \phi_B(x) &\rightarrow e^{ief(x)}\phi_B(x). \end{aligned} \quad (31)$$

Введение вакуумного поля в (30) приводит к «расщеплению» зависимости от независимых параметров  $\Lambda$  и  $e$  в любом матричном элементе. Если считать константу взаимодействия  $e$  достаточно малой, все вычисления можно проводить по теории возмущений, в то время как напряженность поля  $\Lambda$  может принимать произвольные значения. Таким образом, любая амплитуда может быть представлена в виде

$$A(e, \Lambda) = \sum_{n=n_0}^{\infty} e^n A_n(\Lambda),$$

при этом функции  $A_n(\Lambda)$  могут быть точно вычислены, и зависимость матричных элементов от напряженности поля  $\Lambda$  можно изучать в каждом порядке теории возмущений по  $e$ .

Другое существенное замечание состоит в том, что самодуальное поле  $B_\mu(x)$  не привносит никаких новых ультрафиолетовых расходимостей в теорию, поэтому появление ультрафиолетовых расходимостей связано только с разложением по заряду  $e$  и имеет ту же диаграммную структуру всех перенормировочных членов, что и при стандартном варианте перенормировки в квантовой электродинамике. Кроме того, пропагаторы фермионов и бозонов в самодуальном поле  $B_\mu(x)$  могут быть вычислены в явной форме. Таким образом, стандартные методы построения перенормированной  $S$ -матрицы в квантовой электродинамике полностью переносятся на данный случай.

Таким образом, лагранжиан (30) описывает взаимодействие заряженных фермионов и бозонов, находящихся в вакуумном поле  $B_\mu(x)$ . Естественно возникает вопрос: какова напряженность этого поля  $\Lambda$ ? Поскольку мы предполагаем константу электромагнитного взаимодействия  $\alpha = e^2/(4\pi)$  малой, напряженность  $\Lambda$  должна быть выбрана из условия минимума энергии основного состояния — вакуума. Поэтому объектом нашего исследования будет производящий функционал

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_V = & \iint d\sigma_F d\sigma_B \int DA \exp \left( \int_V dx \mathcal{L}(x) \right) = \iint d\sigma_F d\sigma_B \times \\ & \times \int DA \exp \left( -\frac{1}{4} \int_V dx F_{\mu\nu}^2(x) + \int_V dx \mathcal{L}_F(x) + \int_V dx \mathcal{L}_B(x) \right), \end{aligned} \quad (32)$$

$$d\sigma_F = \prod_F \frac{D\psi_F D\bar{\psi}_F}{N_F}, \quad d\sigma_B = \prod_B \frac{D\phi_B D\phi_B^*}{N_B}. \quad (33)$$

Нормировка функционального интеграла здесь выбрана таким образом, что при  $\Lambda = 0$  и  $e = 0$  производящий функционал равен единице:  $Z = 1$ .

Целью нашего исследования является энергия вакуума в самодуальном поле  $B_\mu(x)$ . Функциональный интеграл в (32) в низшем приближении теории возмущений при  $e = 0$  вычисляется в явном виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_V^{(0)} &= \int d\sigma_F \exp \left( \sum_F (\bar{\psi}_F (-\hat{\nabla} + M_F) \psi_F) \right) \times \\ &\quad \times \int d\sigma_B \exp \left( - \sum_B (\phi_B^* (-\nabla^2 + m_B^2) \phi) \right) = \\ &= \prod_F \text{Det} \left[ \begin{array}{c} -\hat{\nabla}(x) + M_F \\ -\hat{\partial} + M_F \end{array} \right] \prod_B \text{Det} \left[ \begin{array}{c} -\square + m_B^2 \\ -\nabla^2 + m_B^2 \end{array} \right], \quad (34) \end{aligned}$$

и соответственно для энергии вакуума в низшем приближении имеем

$$E_0(\Lambda) = - \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \ln \mathcal{Z}_V^{(0)} = E_F(\Lambda) + E_B(\Lambda). \quad (35)$$

Представление (34) ясно показывает, что функции  $E_F(\Lambda)$  и  $E_B(\Lambda)$  растут при  $\Lambda \rightarrow \infty$ , причем с необходимостью этот рост должен быть противоположного знака.

В результате непосредственных вычислений (см. [28]) после естественной перенормировки получим для энергии вакуума системы заряженных фермионов и бозонов в КЭД выражение

$$E_{\text{vac}}(\Lambda) = \frac{4\Lambda^4}{(4\pi)^2} \left[ \sum_F 2W \left( \frac{2\Lambda^2}{M_F^2} \right) - \sum_B W \left( \frac{2\Lambda^2}{m_B^2} \right) \right], \quad (36)$$

где  $W(X)$  — монотонно возрастающая положительная функция:

$$\begin{aligned} W(X) &= \int_0^\infty \frac{dt}{t} e^{-t} w(Xt) = \begin{cases} 1/15 X^2 + O(X^3) & \text{при } X \rightarrow 0, \\ 1/3 \ln(X) + O(1) & \text{при } X \rightarrow \infty, \end{cases} \\ w(t) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{\sinh^2 t} = \frac{t^2}{15} + O(t^4). \end{aligned}$$

Для качественных рассуждений удобно ввести приближенную функцию

$$W(X) \approx W_a(X) = \frac{1}{6} \ln \left( 1 + \frac{2}{5} X^2 \right),$$

имеющую то же самое асимптотическое поведение при малых и больших значениях  $X$ , что и  $W(X)$ .

Асимптотическое поведение энергии вакуума  $E_{\text{vac}}(\Lambda)$  при малых и больших значениях  $\Lambda$  задается выражениями

$$E_{\text{vac}}(\Lambda) = \begin{cases} \frac{4\Lambda^4}{(4\pi)^2} \frac{1}{15} \left[ \sum_F 2 \left( \frac{2\Lambda^2}{M_F^2} \right)^2 - \sum_B \left( \frac{2\Lambda^2}{m_B^2} \right)^2 \right] & \text{при } \Lambda \rightarrow 0, \\ \frac{4\Lambda^4}{(4\pi)^2} \frac{1}{3} \left[ \sum_F 2 \ln \left( \frac{2\Lambda^2}{M_F^2} \right) - \sum_B \ln \left( \frac{2\Lambda^2}{m_B^2} \right) \right] & \text{при } \Lambda \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (37)$$

На основании полученных формул для энергии вакуума (36) и (37) можно заключить: в электромагнитном самодуальном поле с постоянной напряженностью

- система, состоящая только из заряженных фермионов, глобально стабильна, т. е. при  $\Lambda \rightarrow \infty$  энергия вакуума растет и минимум энергии реализуется при  $\Lambda = 0$ ;
- система, состоящая только из заряженных бозонов, глобально нестабильна, т. е. при  $\Lambda \rightarrow \infty$  энергия вакуума убывает и система может иметь произвольно большую отрицательную энергию;
- система заряженных фермионов и бозонов стабильна и минимум энергии вакуума реализуется при  $\Lambda = 0$ , если выполнены условия:

1) число бозонов меньше удвоенного числа фермионов:

$$2N_F > N_B,$$

2) наилегчайшими частицами являются фермионы:

$$\sum_F \frac{2}{M_F^2} > \sum_B \frac{1}{m_B^2}.$$

Именно эту ситуацию мы наблюдаем в Природе: практически все стабильные частицы являются фермионами (электроны и протоны), фермионов явно больше, чем бозонов, и легчайшей заряженной частицей является электрон, масса которого существенно меньше остальных заряженных частиц. Таким образом, ненулевое самодуальное поле с постоянной напряженностью не может реализовать электромагнитный вакуум в системе заряженных фермионов и бозонов, имеющих в Природе.

Для того чтобы лучше понять условие стабильности, рассмотрим гипотетический мир, состоящий из двух сортов заряженных частиц: фермионов с массой  $M$  и бозонов с массой  $m$ , причем масса бозона меньше массы фермиона. Тогда энергия вакуума в самодуальном поле с постоянной напряженностью запишется

$$E_{\text{vac}}(\Lambda) \approx \frac{4\Lambda^4}{6(4\pi)^2} \left[ 2 \ln \left( 1 + \frac{2}{5} \frac{2\Lambda^2}{M^2} \right) - \ln \left( 1 + \frac{2}{5} \frac{2\Lambda^2}{m^2} \right) \right], \quad (38)$$

где мы для простоты использовали приближенное выражение для функции  $W(X)$ .

Наш гипотетический мир глобально стабилен, поскольку энергия вакуума

$$E_{\text{vac}}(\Lambda) \rightarrow \frac{4\Lambda^4 \ln \Lambda^2}{6(4\pi)^2} \rightarrow +\infty \text{ при } \Lambda \rightarrow \infty.$$

Однако если масса бозона мала,  $m^2 < (1/2)M^2$ , то при достаточно малых  $m$  функция  $E_{\text{vac}}(\Lambda)$  имеет отрицательный минимум при конечных  $\Lambda > 0$ . Таким образом, вакуум КЭД в нашем гипотетическом мире реализуется при ненулевом самодуальном поле. Наличие ненулевого поля  $B_\mu(x)$  ведет к возникновению конфайнмента заряженных фермионов и бозонов, поскольку их пропагаторы становятся целыми аналитическими функциями в импульсном пространстве. Вместо заряженных частиц возникают нейтральные связанные состояния, массы которых можно вычислить, используя соответствующие уравнения Бете–Солпитера.

Этот пример качественно правильно передает ситуацию в КХД, где роль заряженного бозона с малой массой играют самодействующие безмассовые глюоны.

**Квантовая хромодинамика.** В КХД самодуальное глюонное поле с постоянной напряженностью записывается

$$\check{B}_\mu(x) = \check{n} B_\mu(x) = B_\mu^a(x) t^a, \quad B_\mu^a(x) = n^a B_\mu(x), \quad (39)$$

где  $B_\mu(x)$  дается (29). Постоянный вектор  $n^a$  характеризуется двумя инвариантными параметрами  $(n^a n^a) = 1$  и  $(n^a n^b n^c d^{abc})$  и определяет некоторое направление в цветовом пространстве  $SU_c(3)$ . Параметр  $\Lambda$  характеризует напряженность самодуального поля.

Поле  $\check{B}_\mu(x)$  является решением уравнений Янга–Миллса. Как и в случае электродинамики, мы предполагаем, что рассматриваемая система кварков и глюонов находится в самодуальном поле  $\check{B}_\mu(x)$ , которое реализует хромодинамический вакуум.

Полный лагранжиан КХД, описывающий кварки и глюоны в самодуальном поле  $\check{B}_\mu(x)$ , в евклидовой метрике имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{8} \text{Tr} \check{G}_{\mu\nu}^2 + \sum_f \left( \bar{q}_f \left[ \gamma_\mu (\check{\nabla}_\mu + ig \check{A}_\mu) - m_f \right] q_f \right), \quad (40)$$

$$\check{G}_{\mu\nu}(x) = \check{\nabla}_\nu \check{A}_\mu - \check{\nabla}_\mu \check{A}_\nu + g[\check{A}_\mu(x), \check{A}_\nu(x)], \quad \check{A}_\mu = t^a A_\mu^a,$$

где

$$\begin{aligned} \check{\nabla}_\mu(x) &= \partial_\mu + i\check{B}_\mu(x) = \partial_\mu + i\Lambda^2 \check{n} b_{\mu\nu} x_\nu, \\ [\check{\nabla}_\mu(x), \check{\nabla}_\nu(x)] &= -2i\Lambda^2 \check{n} b_{\mu\nu}, \quad \check{n} = n^a t^a. \end{aligned}$$



Выделим квадратичную по полю  $A_\mu^a(x)$  часть глюонного лагранжиана, которая после некоторых преобразований приобретает вид

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{g0}(x) &= -\frac{1}{2}\text{Tr} \left[ \check{F}_{\mu\nu}(x)\check{F}_{\mu\nu}(x) + 2\check{B}_{\mu\nu}\check{A}_\mu(x)\check{A}_\nu(x) \right] = \\ &= -\frac{1}{2}(A_\mu(x)[-\check{\nabla}^2(x)\delta_{\mu\nu} + 4i\Lambda^2\check{\eta}b_{\mu\nu}]A_\nu(x)),\end{aligned}$$

где принята калибровка

$$\check{\nabla}_\mu A_\mu(x) = 0, \quad \text{или} \quad (\check{\nabla}_\mu)^{ab}(x)A_\mu^b(x) = 0.$$

В случае хромодинамики остаются справедливыми замечания, сделанные для электродинамики. Повторим их.

Во-первых, самодуальное поле  $\check{B}_\mu(x)$  не приносит никаких новых ультрафиолетовых расходимостей в теорию, поэтому появление ультрафиолетовых расходимостей связано только с разложением по заряду  $g$  и имеет ту же диаграммную структуру всех перенормировочных членов, что и при стандартном варианте перенормировки в квантовой хромодинамике. Кроме того, пропагаторы кварков и глюонов в самодуальном поле  $\check{B}_\mu(x)$  могут быть вычислены в явной форме. Таким образом, стандартные методы построения перенормированной  $S$ -матрицы в квантовой хромодинамике полностью переносятся на данный случай.

Во-вторых, в лагранжиане (40) полностью «расщеплена» зависимость от независимых параметров  $g$  и  $\Lambda$  в любых матричных элементах, т. е. для любого матричного элемента мы получаем выражения вида

$$A(g, \Lambda) = \sum_{n=n_0}^{\infty} g^n A_n(\Lambda).$$

Другими словами, если считать константу взаимодействия  $g$  достаточно малой, все вычисления можно проводить по теории возмущений, в то время как напряженность поля  $\Lambda$  может принимать произвольные значения, при этом функции  $A_n(\Lambda)$  могут быть точно вычислены. Таким образом, зависимость матричных элементов от напряженности поля  $\Lambda$  можно изучать в каждом порядке теории возмущений по  $g$ .

Представляется интересным сделать качественное предсказание поведения энергии вакуума в самодуальном поле с постоянной напряженностью в хромодинамике, исходя из полученного результата в квантовой электродинамике. Итак, что мы можем извлечь из формул (36) и (37)? Во-первых, вклад кварков в энергию вакуума качественно совпадает с вкладом электронов в КЭД, т. е. кварки обеспечивают стабильность квантовой системы. В КХД «бозонов» нет, их роль играют глюоны благодаря их самодействию, чего не

было у фотонов в КЭД. Поскольку глюоны являются бозонами, качественное поведение глюонного вклада в энергию вакуума описывается формулами, близкими к бозонному вкладу в КЭД с учетом нулевой массы глюонов. Эта зависимость от  $\Lambda$  должна быть вида  $\sim -\Lambda^4 \ln \Lambda^2$ , другими словами, глюоны ведут к нестабильности вакуума КХД. Следует обратить особое внимание на знак «минус» этого вклада, в противоположность имеющимся в литературе формулам (см. [19]). Поскольку поведение при больших  $\Lambda$  и у кваркового, и у глюонного вкладов в вакуумную энергию функционально одинаково  $\sim \Lambda^4 \ln \Lambda^2$ , то различных типов кварков должно быть «достаточно много», чтобы обеспечить глобальную стабильность кварк-глюонной системы. Ниже мы вычислим, сколько кварков с необходимостью должно быть.

Итак, в КХД в отличие от КЭД глюон играет роль легчайшего бозона (см. (37)). При малых  $\Lambda$  имеется как положительный вклад от кварков, так и отрицательный вклад от глюонов. Если вакуум имеет минимум при  $\Lambda = 0$ , т.е. самодуальное поле отсутствует, то это означает, что кварки и глюоны существуют как обычные частицы и описываются свободными уравнениями. Если же вакуум имеет минимум при ненулевых  $\Lambda$ , то это означает, что самодуальное глюонное поле с постоянной напряженностью реализует вакуум кварк-глюонной системы, кварки и глюоны находятся в этом поле и возникает конфайнмент кварков, т.е. реализуется так называемый *аналитический конфайнмент*.

Рассмотрим производящий функционал

$$\mathcal{Z}_V = \int d\sigma_q \int d\sigma_A \exp \left( -\frac{1}{2} \int_V dx \text{Tr} \check{G}_{\mu\nu}^2(x) + \int_V dx \mathcal{L}_q(x) \right), \quad (41)$$

$$d\sigma_q = \prod_f \frac{D\psi_f D\bar{\psi}_f}{N_f}, \quad d\sigma_A = \frac{1}{N_A} DA \delta(\nabla A) \Delta(A).$$

Нормировка функционального интеграла выбрана таким образом, что при  $\Lambda = 0$  и  $g = 0$  производящий функционал равен единице:  $Z = 1$ .

В низшем порядке теории возмущений  $g = 0$  имеем для производящего функционала

$$\mathcal{Z}_V^{(0)} = \mathcal{Z}_{Vq}^{(0)} \cdot \mathcal{Z}_{Vg}^{(0)}, \quad (42)$$

где

$$\mathcal{Z}_{Vq}^{(0)} = \int d\sigma_q \exp \left( \int_V dx \mathcal{L}_q(x) \right) = \prod_f \text{Det} \left[ \frac{\gamma_\mu \check{\nabla}_\mu(x) - M_f}{\gamma_\mu \partial_\mu - M_f} \right] \quad (43)$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{Vg}^{(0)} &= \frac{1}{N_A} \int DA \delta(\nabla A) \Delta(A) \times \\ &\times \exp \left( -\frac{1}{2} \int_V dx (A_\mu [-\check{\nabla}^2 \delta_{\mu\nu} + 4i\Lambda^2 \check{n} b_{\mu\nu}] A_\nu) \right) = \\ &= \text{Det} \left[ \frac{-\square}{-\nabla^2 + 4\Lambda_g^2} \right] \cdot \text{Det} \left[ \frac{-\square}{-\nabla^2 - 4\Lambda_g^2} \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

Соответственно для энергии вакуума имеем после некоторых вычислений (см. [28])

$$E_{\text{vac}}(\Lambda) = \frac{4\Lambda^4}{(4\pi)^2} \left[ -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{2\Lambda^2}{H^2} \right) + \sum_f W_q \left( \frac{2\Lambda^2}{M_f^2} \right) \right], \quad (45)$$

где

$$W_q(X) = \frac{1}{3} \left[ W \left( \frac{X}{2\sqrt{3}} \right) + 2W \left( \frac{X}{\sqrt{3}} \right) \right] = \begin{cases} 1/60 X^2 + O(X^3), \\ 1/3 \ln X + O(1). \end{cases}$$

Асимптотическое поведение энергии вакуума при больших  $\Lambda$

$$E_{\text{vac}}(\Lambda) \rightarrow \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} N_q \right) \frac{\Lambda^4 \ln \Lambda^2}{(2\pi)^2}, \quad (46)$$

где  $N_q = \sum_f$  — число кварков.

На основании полученных формул для энергии вакуума (45) и (46) можно заключить:

- В глюонном самодуальном поле с постоянной напряженностью система кварков и глюонов глобально стабильна, если число независимых кварков больше двух:

$$N_q \geq 2. \quad (47)$$

Не это ли обстоятельство объясняет выделенность изотопической группы  $SU_f(2)$  и практическое равенство масс  $u$ - и  $d$ -кварков?

- Минимум энергии вакуума в (45) по  $\Lambda$  определяется соотношением между постоянной  $H$ , связанной с хромодинамической шкалой  $\Lambda_{\text{QCD}}$ , и массами кварков  $M_f$ . Параметр  $\Lambda$ , для которого энергия вакуума имеет минимум, определяет масштаб области конфайнмента и напрямую связан с наклоном реджевских траекторий в спектре адронов.

В случае изотопической группы  $SU_f(2)$  энергия вакуума имеет вид

$$\mathcal{E}_{\text{vac}} = \min_{\Lambda} \frac{4\Lambda^4}{(4\pi)^2} \left[ -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{2\Lambda^2}{H^2} \right) + 2W_q \left( \frac{2\Lambda^2}{M_u^2} \right) \right]. \quad (48)$$

В случае изотопической группы  $SU_f(3)$

$$\mathcal{E}_{\text{vac}} = \min_{\Lambda} \frac{4\Lambda^4}{(4\pi)^2} \left[ -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{2\Lambda^2}{H^2} \right) + 2W_q \left( \frac{2\Lambda^2}{M_u^2} \right) + W_q \left( \frac{2\Lambda^2}{M_s^2} \right) \right]. \quad (49)$$

Можно видеть, что существуют наборы параметров, для которых минимум вакуумной энергии реализуется при ненулевом самодуальном поле, так что в рассматриваемой системе возникает конфайнмент кварков. Сформулируем главный вывод:

*Причина конфайнмента — неустойчивость бозонов в самодуальном вакуумном поле. Для глобальной устойчивости системы, состоящей из фермионов и бозонов, необходимо, чтобы фермионов было «достаточно» много. Конфайнмент не возникает в случае, когда наименьшую массу в системе частиц имеет фермион (электрон в КЭД), и возникает, когда наименьшую массу имеет бозон (глюон в КХД).*

## 8. ВАКУУМНОЕ ГЛЮОННОЕ ПОЛЕ В КХД. МОДЕЛЬ ИНДУЦИРОВАННЫХ КВАРКОВЫХ ТОКОВ

Изложенные выше аргументы делают правдоподобной гипотезу: *ненулевое (анти)самодуальное поле  $B_\mu(x)$  реализует истинный вакуум КХД.*

Полный лагранжиан КХД, описывающий кварки и глюоны, в евклидовой метрике дан в (40). Пропагатор кварка в однородном самодуальном поле удовлетворяет уравнению

$$(\hat{\nabla}(x) - m)S(x) = -\delta(x), \quad \nabla_\mu(x) = \partial_\mu + i\Lambda^2 \check{n} b_{\mu\nu} x_\nu.$$

В результате вычислений оказывается

$$\begin{aligned} \tilde{S}_\pm(p) = & \int_0^1 \frac{du}{2\Lambda^2} \exp\left(-u \frac{p^2}{2\Lambda^2}\right) \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^{m^2/(4\Lambda^2)} \times \\ & \times \left\{ i\hat{p} \pm u\check{n}\gamma_5(\gamma b p) + \frac{m}{1-u^2} \left[ 1 \mp \gamma_5 u^2 + \frac{i}{2}\check{n}(\gamma b \gamma)u \right] \right\}, \quad (50) \end{aligned}$$

где знаки  $\pm$  относятся к самодуальному и антисамодуальному вакуумному полю. Функция  $\tilde{S}_\pm(p)$  является целой аналитической в  $p^2$ -комплексной плоскости. Таким образом, имеет место аналитический конфайнмент.

Явное выражение для пропагатора глюона приведено в [24].

Модель, в основу которой положено вакуумное глюонное поле (39), была названа *моделью индуцированных кварковых токов*. Эта модель развивалась в работах [21–24].

Сформулируем схему построения модели индуцированных кварковых токов, которая позволяет однозначно вычислять любые адронные характеристики, в частности, получать мезоны как связанные состояния кварков с их массами и вершинными функциями в кварковых токах.

- Задан лагранжиан КХД (40) в самодуальном однородном глюонном поле  $\check{B}_\mu(x)$ , которое реализует вакуум КХД.

- В этом поле осуществляется аналитический конфайнмент: пропагаторы кварков — целые аналитические функции.

- В производящем функционале выделяется слагаемое, соответствующее одноглюонному обмену между кварковыми токами:

$$L_I = \frac{g^2}{2} \iint dx_1 dx_2 \times \\ \times \sum_{f_1 f_2} (\bar{q}_{f_1}(x_1) \gamma_\mu t^a q_{f_1}(x_1)) D_{\mu\nu}^{ab}(x_1, x_2) (\bar{q}_{f_2}(x_2) \gamma_\nu t^b q_{f_2}(x_2)).$$

- Преобразование Фирца для перехода к бесцветным биллокальным кварковым токам и переход в систему центра масс:

$$L_I = \frac{g^2}{2} \iint dx_1 dx_2 \sum_{J f_1 f_2} \mathcal{J}_{J f_1 f_2}(x_1, x_2) \mathcal{J}_{J f_2 f_1}(x_2, x_1) = \\ = \frac{g^2}{2} \iint dx dy \sum_{J f_1 f_2} \mathcal{J}_{J f_1 f_2}(x, y) \mathcal{J}_{J f_2 f_1}(x, y),$$

$$x_1 = x + \xi_1 y, \quad x_2 = x - \xi_2 y,$$

$$\xi_1 = \frac{m_{f_2}}{m_{f_1} + m_{f_2}}, \quad \xi_2 = \frac{m_{f_1}}{m_{f_1} + m_{f_2}}.$$

- Вводится ортонормированная система функций  $\{U_Q(x)\}$ , по которым строятся кварковые токи и вершинные функции с заданными квантовыми числами  $Q = n\kappa lm$ :

$$\mathcal{J}_{J f_1 f_2}(x, y) = \sqrt{D(y)} (\bar{q}_{f_1}(x + \xi_1 y) \Gamma_{J f_2}(x - \xi_2 y)) = \sum_Q J_{J Q f_1 f_2}(x) U_Q(y),$$

$$\mathcal{J}_{J Q}(x) = \bar{q}_{f_1}(x) V_{J Q}(\vec{\partial}) q_{f_2}(x).$$

• Представление лагранжиана  $L_I$  в диагональной форме по бесцветным кварковым токам:

$$L_I = \frac{g^2}{2} \sum_{\mathcal{N}} \int dx \mathcal{J}_{\mathcal{N}}^+(x) \mathcal{J}_{\mathcal{N}}(x), \quad \mathcal{N} = JQf_1f_2.$$

• Гауссовское представление и вспомогательные мезонные поля:

$$e^{(g^2/2)(\mathcal{J}_{\mathcal{N}}^2)} = \int DB_{\mathcal{N}} \exp(-(1/2)(B_{\mathcal{N}}^2) + g(B_{\mathcal{N}}\mathcal{J}_{\mathcal{N}})),$$

$$e^{g^2(\mathcal{J}_{\mathcal{N}}^+\mathcal{J}_{\mathcal{N}})} = \iint DB_{\mathcal{N}} DB_{\mathcal{N}}^+ \exp(-(B_{\mathcal{N}}^+ B_{\mathcal{N}}) + g[(B_{\mathcal{N}}^+ \mathcal{J}_{\mathcal{N}}) + (\mathcal{J}_{\mathcal{N}}^+ B_{\mathcal{N}})]).$$

• Интегрирование по кварковым полям  $\bar{q}(x)$  и  $q(x)$  и эффективное действие:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{N}}[B] = -\frac{1}{2}(B_{\mathcal{N}}^2) + \text{Tr} \ln [1 + g(B_{\mathcal{N}} V_{\mathcal{N}}) S].$$

• *Постулат адронизации* — отождествление вспомогательных полей  $B_{\mathcal{N}}(x)$  с мезонными полями с квантовыми числами  $\mathcal{N} = \{JQff\}$ , усреднение действия по направлениям самодуального поля и по направлениям в цветовом и конфигурационном пространствах:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{N}}[B] = -\frac{1}{2}(B_{\mathcal{N}}^2) + \mathbf{Tr} \ln [1 + g(B_{\mathcal{N}} V_{\mathcal{N}}) S],$$

(51)

$$\mathbf{Tr} = \int d\mathbf{h} \text{Tr}_c \text{Tr}_\gamma \sum_{s=\pm},$$

где  $d\mathbf{h}$  — интегрирование по направлениям вектора  $\mathbf{h}$ ;  $\text{Tr}_c$  и  $\text{Tr}_\gamma$  — взятие следов в цветовом и спиновом пространствах соответственно;  $\sum_{s=\pm}$  — суммирование по самодуальным и антисамодуальным модам полей. В результате эффективное действие ковариантно относительно как калибровочных  $SU_c(3)$ , так и лоренцевских преобразований. Построенная по эффективному действию  $S$ -матрица принадлежит классу квантовых теорий поля с нелокальным взаимодействием и будет унитарна на адронных состояниях [6, 17].

• Производящий функционал мезонных полей и выделение квадратичного кинетического слагаемого:

$$\begin{aligned} Z_{\mathcal{N}} &= \int DB_{\mathcal{N}} \exp\left(-\frac{1}{2}(B_{\mathcal{N}}^2) + \mathbf{Tr} \ln [1 + g(B_{\mathcal{N}} V_{\mathcal{N}}) S]\right) = \\ &= \int DB_{\mathcal{N}} \exp\left(-\frac{1}{2}(B_{\mathcal{N}}[1 + g^2 \mathbf{Tr} V_{\mathcal{N}} S V_{\mathcal{N}} S] B_{\mathcal{N}}) + W_I[B_{\mathcal{N}}]\right). \end{aligned}$$

Полученная теория принадлежит классу квантовых теорий поля с нелокальным взаимодействием, о которых говорилось выше.

- Диагонализация квадратичной формы в кинетическом слагаемом эквивалентна решению уравнения Бете–Солпитера в лестничном приближении и определению ортонормированной системы:

$$g^2 \text{Tr} (V_{\mathcal{N}} S V_{\mathcal{N}'} S) = (U_{\mathcal{N}} \Pi U_{\mathcal{N}'}) = \lambda_{\mathcal{N}'}(-p^2) \delta_{JJ'} \delta_{QQ'}.$$

- Спектр масс и вершинные функции определяются уравнениями

$$1 + \lambda_{\mathcal{N}}(M_{\mathcal{N}}^2) = 0, \quad V_{\mathcal{N}}(\vec{\partial}) = \Gamma_J \int dy U_Q(y) \sqrt{D(y)} e^{(y/2)\vec{\partial}}.$$

- Взаимодействия мезонных полей описываются функционалом взаимодействия  $W_I[B_{\mathcal{N}}] = O[B_{\mathcal{N}}^3]$ .

Остановимся подробнее на постулате адронизации. Конечно, как только мы произнесли: *имеется ненулевое глюонное поле, минимизирующее энергию вакуума*, и даже еще ничего не сказали о его природе и явном виде, сразу возникает очевидная проблема. Любое ненулевое глюонное поле имеет какие-то направления в цветовом и конфигурационном пространствах. Естественно, энергия вакуума вырождена по этим направлениям. Однако возникает вопрос: как эти направления проявятся на физических наблюдаемых? Можно ли их наблюдать экспериментально или существует какой-либо эффективный механизм усреднения по этим направлениям? На эти вопросы еще предстоит ответить в будущем. Эта же проблема существует при введении инстантонов в физические амплитуды. Мне не известны попытки как-то экспериментально зарегистрировать направление инстантона, а вся техника вычислений с инстантонами предполагает усреднение матричных элементов по их направлениям. Именно поэтому идею использовать самодуальное поле многие считают бесперспективной, поскольку при простейшей интерпретации по прямой аналогии с теорией ферромагнетиков при понимании самодуального поля как механизма спонтанного нарушения симметрии в КХД мы получаем вакуум, который нарушает как калибровочную группу  $SU_c(3)$ , так и группу Лоренца, что, безусловно, противоречит всем современным представлениям. В реальности мы наблюдаем только бесцветные объекты — адроны. Поэтому задача сводится к проблеме: как происходит адронизация кварков и глюонов и каков механизм эффективного усреднения по этим направлениям?

Из истории науки известно, что при развитии фактически любой теории приходится делать предположения, которые не могут быть строго обоснованы в рамках существующих представлений. Однако, если какое-либо предположение дает возможность продвинуться дальше в расчетах и ведет к разумным результатам, то такой путь имеет право на существование и должен быть тщательно обследован.

В качестве паллиатива в теории  $S$ -матрицы эту проблему можно решить, вводя усреднение эффективного действия (51). Мы исходим из следующих соображений. В рассматриваемой картине имеется три шкалы расстояний. Первая шкала расстояний — это шкала конфайнмента  $L_{\text{conf}} \sim 1/\Lambda$ , на этих расстояниях происходят флуктуации кварков и глюонов и происходит адронизация кварков. Вторая шкала — это расстояния  $L_{\text{vac}}$ , на которых изменяется направление вакуумного глюонного поля

$$B_\mu^2(x) = \Lambda^2 n^a \left( \frac{x}{L_{\text{vac}}} \right) b_{\mu\nu} \left( \frac{x}{L_{\text{vac}}} \right) x_\nu.$$

Третья шкала — это макрорасстояния  $L_{\text{mes}}$ , на которых существуют и наблюдаются мезонные состояния. Естественно считать, что

$$L_{\text{mes}} \gg L_{\text{vac}} \gg L_{\text{conf}} \sim \frac{1}{\Lambda}.$$

Такое предположение близко к гипотезе, что вакуум имеет доменную структуру. Постулат адронизации эквивалентен предположению, что мезонные поля, будучи стабильными состояниями и существующими на расстояниях  $\sim L_{\text{mes}}$ , не чувствуют быстрых изменений вакуумных полей на расстояниях  $\sim L_{\text{vac}}$ .

Расчеты показали [21–24], что модель индуцированных кварковых токов хорошо описывает адронную физику низких энергий. Не будем приводить разные числа, полученные в результате многочисленных вычислений, которые, с одной стороны, демонстрируют эффективность модели, но с другой — погружают в дебри вычислительных тонкостей, когда «среди деревьев не видно леса». По всей видимости, идея аналитического конфайнмента имеет глубокий, еще не до конца выясненный смысл. Поэтому представляется более разумным привести и обсудить некоторые простые следствия, вытекающие из предположения о существовании аналитического конфайнмента.

**Аналитический конфайнмент и мезонный спектр.** Одной из черт характера Блохинцева как физика было его стремление понять рассматриваемое физическое явление прежде всего «на пальцах» и только затем уже переходить к сложным вычислениям. Мы последуем его примеру и попытаемся сформулировать основные отправные точки наших рассуждений. Мы будем исходить из следующих соображений.

- Сложность и громоздкость вычислений низкоэнергетических адронных характеристик в современной КХД (см., например, [26, 27], в частности, попробуйте повторить эти расчеты) связаны, по нашему убеждению, с отсутствием простого и ясного описания поведения кварков и глюонов в области конфайнмента.

- Адроны — релятивистские объекты, для их описания необходимы релятивистские уравнения и методы. Сведение проблемы к нерелятивистской за-



даче решения уравнения Шредингера с растущим потенциалом некорректно, поскольку нерелятивистское описание возможно лишь при  $\epsilon/\mu \leq 10^{-4 \div 5}$ , где  $\epsilon$  — энергия связи, а  $\mu$  — приведенная масса конститuentных частиц, как это имеет место в электродинамике. При  $\epsilon/\mu \geq 10^{-2 \div 3}$  релятивистские поправки становятся определяющими (см., например, [30]).

- Применение методов квантовой теории поля предполагает малость константы связи, поэтому основные характеристики адронов, в частности спектр, должны описываться в низшем порядке по константе связи. Отсюда следует, что если мы придерживаемся гипотезы, что физика адронов описывается методами квантовой теории поля, то эффективная константа связи  $\alpha_s$  должна быть меньше единицы, и для описания адронов как связанных состояний кварков лестничное приближение уравнения Бете–Солпитера является адекватным аппаратом.

- Спектр адронов является интегральной характеристикой и формируется на больших расстояниях в области конфайнмента, поэтому результаты вычислений должны определяться только глобальными свойствами пропагаторов кварков и глюонов в области конфайнмента и не должны сильно зависеть от детального «микроразличия» пропагаторов на малых расстояниях.

В нерелятивистской квантовой механике потенциалы (типа осциллятора или потенциала Кулона), для которых уравнение Шредингера может быть точно решено и энергетический спектр найден аналитически, играют важную роль для понимания динамики квантового взаимодействия. Здесь же я хочу обратить внимание на квантово-полевые модели с аналитическим конфайнментом, в которых пропагаторы конститuentных частиц являются чисто гауссовскими экспонентами — виртонными полями. В этих моделях уравнение Бете–Солпитера в лестничном приближении решается точно, так что для спектра масс релятивистских связанных состояний могут быть получены явные замкнутые выражения. Такие модели представляют несомненный интерес, поскольку проясняют динамическую роль аналитического конфайнмента.

Такие модели были построены [25, 31], и продемонстрировано, что простое предположение об аналитическом конфайнменте гауссовского типа может объяснить главные черты адронного спектра: различие в массах низших состояний адронов: мезона, нуклона и глюбола, а также реджевский характер орбитальных и радиальных возбуждений этих частиц. Было показано, что реджевский характер спектра двух- и трехчастичных связанных состояний может быть получен на основе следующих предположений:

— аналитический конфайнмент имеет место, пропагаторы кварков и глюонов являются простыми гауссовскими экспонентами

$$\tilde{S}(p) \sim e^{p^2/\Lambda^2},$$

где  $\Lambda$  характеризует область конфайнмента;

— взаимодействие описывается лагранжианом юкавского типа с малой константой связи;

— связанные состояния кварков и глюонов определяются как решения релятивистского уравнения Бете–Солпитера в лестничном приближении.

При этом оказалось, что для реджевского поведения спектра связанных состояний совершенно не важно, являются ли кварки фермионами или бозонами.

Однако у спектра реальных псевдоскалярных  $\pi^-$ ,  $K^-$ ,  $\eta^-$ ,  $\eta'^-$  и векторных  $\rho^-$ ,  $K^{*-}$ ,  $\omega^-$ ,  $\phi^-$ -мезонов имеются свои характерные особенности, которые требуют для своего объяснения более детального рассмотрения. В частности, до сих пор удовлетворительно не решена знаменитая, так называемая  $U(1)$ -проблема, которая может быть сформулирована в форме вопроса: почему у псевдоскалярных изовекторного  $\pi(139 \text{ МэВ})$ -мезона и изоскалярного  $\eta(547 \text{ МэВ})$ -мезона столь велика разница в массах, а у векторного изовекторного  $\rho(770 \text{ МэВ})$ -мезона и изоскалярного  $\omega(782 \text{ МэВ})$ -мезона массы практически совпадают?

Интрига усугубляется тем обстоятельством, что если исходить из полевой кварковой модели с малой константой связи, то имеет место идеальное смешивание, и поляризационные однопетлевые кварковые диаграммы совпадают для псевдоскалярных и векторных мезонов:

$$\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u - \bar{d}d) \quad \text{и} \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u + \bar{d}d),$$

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u - \bar{d}d) \quad \text{и} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u + \bar{d}d)$$

соответственно. Ясно, если константа связи мала, то дополнительные процессы, идущие в изоскалярном и не идущие в изовекторном каналах, не могут существенно изменить массы, хотя на эту тему имеется значительное число публикаций. Поэтому, по нашему мнению, эта проблема должна как-то решаться в низшем приближении по константе связи. Здесь мы предложим возможный вариант решения.

Рассмотрим кварк-глюонный лагранжиан, ответственный за возникновение мезонов как связанных кварк-антикварковых состояний:

$$\mathcal{L} = (\bar{q}S^{-1}q) - \frac{1}{2}(gD^{-1}g) + g(\bar{q}\hat{g}q), \quad \hat{g} = i\gamma_{\mu}t^a g_{\mu}^a(x). \quad (52)$$

Кварки имеют стандартные степени свободы:

$$q(x) = q_{fi\alpha}(x), \quad i \text{ — цвет, } f \text{ — аромат, } \alpha \text{ — спин.}$$

Все вычисления мы будем проводить в евклидовой метрике. В качестве пропагаторов глюонов и кварков выберем функции, близкие к пропагаторам этих

частиц в самодуальном вакуумном глюонном поле с постоянной напряженностью. Для глюонного пропагатора имеем

$$\tilde{D}_{\mu\nu}^{ab}(k) = \delta^{ab} \delta_{\mu\nu} \tilde{D}(k), \quad \tilde{D}(k) = \frac{1}{\Lambda^2} e^{-k^2/(2\Lambda^2)}.$$

Кварковый пропагатор запишем в виде, который индуцирован поведением функции (50) в пределе малых масс кварков:

$$\tilde{S}_f(p) = \frac{1}{m_f} (1 \pm \gamma_5 \omega_f) \exp\left(-\frac{p^2 + m_f^2}{2\Lambda^2}\right), \quad \omega_f = \frac{1}{1 + v(m_f^2/\Lambda^2)}.$$

Здесь считается, что пропагатор кварка аромата  $f = u, d, s$  пропорционален единичной матрице в цветовом пространстве, его масса равна  $m_f$ , и положительная константа  $v$  характеризует результат влияния самодуального поля на кварк. В дальнейшем мы будем рассматривать параметры  $m_f$  и  $v$  как свободные параметры, которые будем фитировать по экспериментальным данным.

Выбор пропагаторов кварков и глюонов в столь простой форме определяется единственно тем, что только для пропагаторов виртонного типа (чисто гауссовские экспоненты) можно точно решить соответствующие уравнения Бете–Солпитера, и спектр масс может быть найден в виде простых аналитических формул, что позволит качественно и полуколичественно провести анализ мезонного спектра.

Весьма существен вопрос о выборе константы связи, или инвариантного заряда  $\alpha_s(z)$ , как функции внешнего импульса  $z = M^2/\Lambda^2$ , т.е. массы связанного состояния. Проблема в том, что поведение функции  $\alpha_s(z)$  в области энергий менее 1,5 ГэВ требует особого анализа (см., например, [29]). Мы выберем заряд в форме так называемого однопетлевого приближения

$$\alpha_s(z) = \frac{g^2}{4\pi} = \frac{4\pi}{\beta_0} \left(1 - \frac{1}{z}\right) \frac{1}{\ln(z)}, \quad (53)$$

$$\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f, \quad n_f = 3.$$

Эта функция растет при  $M \rightarrow 0$ . Как увидим ниже, это обстоятельство будет играть главную роль при объяснении разницы масс  $\pi$ - и  $\eta$ -мезонов.

Сформулируем теперь задачу, которую мы ставим перед собой.

*Можно ли так подобрать массы кварков  $m_u = m_d, m_s$  и параметр  $v$ , чтобы качественно и полуколичественно описать массы псевдоскалярных и векторных мезонов, состоящих из  $u$ -,  $d$ - и  $s$ -кварков?*

Проведя все вычисления, следуя схеме, о которой говорилось выше, получим уравнение, определяющее массу связанного состояния, составленное из кварков ароматов  $f_1$  и  $f_2$ , с квантовыми числами  $J00$ , где  $J = P, V$ :

$$1 = \exp \left( \frac{M^2 2(m_{f_1}^2 + m_{f_2}^2)}{4\Lambda^2 (m_{f_1} + m_{f_2})^2} - \frac{m_{f_1}^2 + m_{f_2}^2}{2\Lambda^2} \right) \times \\ \times \frac{\alpha_s (M^2/\Lambda^2)}{\pi} \frac{16T_{Jf_1f_2}}{3(2 + \sqrt{3})^2} \frac{\Lambda^2}{m_{f_1} m_{f_2}}, \quad (54)$$

$$T_{Pf_1f_2} = 2(1 + \omega_{f_1}\omega_{f_2}), \quad T_{Vf_1f_2} = 1 - \omega_{f_1}\omega_{f_2}.$$

Следует подчеркнуть, что массовые формулы совпадают для изовекторных и изоскалярных мезонов, состоящих из  $u$ - и  $d$ -кварков. Поэтому в случае, когда константа связи  $\alpha_s(z) = \text{const}$  постоянна, т. е. не зависит от массы связанного состояния, получим

$$M_\pi = M_\eta \quad \text{и} \quad M_\rho = M_\omega,$$

что хорошо для векторных и совсем плохо для псевдоскалярных мезонов. Если же мы используем константу связи в форме (53), то возникает любопытная возможность: уравнение (54) допускает существование двух решений по массе  $M$ , и, естественно, возникает искушение получить необходимое расщепление масс  $\pi$ - и  $\eta$ -мезонов.

Для псевдоскалярных  $\pi$ -,  $\eta$ - и векторных  $\rho$ -,  $\omega$ -мезонов имеем

$$M_P^2 + 4\Lambda^2 \ln \frac{\alpha_s(M_P^2/\Lambda^2)}{\pi} = 4m_u^2 - 4\Lambda^2 \ln \left[ \frac{32}{3(2 + \sqrt{3})^2} \cdot \frac{\Lambda^2}{m_u^2} (1 + \omega_u^2) \right], \\ M_V^2 + 4\Lambda^2 \ln \frac{\alpha_s(M_V^2/\Lambda^2)}{\pi} = 4m_u^2 - 4\Lambda^2 \ln \left[ \frac{16}{3(2 + \sqrt{3})^2} \cdot \frac{\Lambda^2}{m_u^2} (1 - \omega_u^2) \right].$$

При надлежащем выборе параметров первое уравнение может иметь два решения, соответствующих массам  $\pi$ - и  $\eta$ -мезонов, а второе уравнение —

Мезон	$(\bar{q}q)$	$M_{\text{exp}}$ , ГэВ	$M_{\text{th}}$ , ГэВ
$\pi$	$\frac{\bar{u}u - \bar{d}d}{\sqrt{2}}$	0,140	<i>0,140</i>
$\eta$	$\frac{\bar{u}u + \bar{d}d}{\sqrt{2}}$	0,547	<i>0,547</i>
$K$	$\bar{u}s$	0,494	0,764
$\eta'$	$\bar{s}s$	0,957	<i>0,957</i>
$\rho$	$\frac{\bar{u}u - \bar{d}d}{\sqrt{2}}$	0,770	<i>0,770</i>
$K^*$	$\bar{u}s$	0,892	0,889
$\omega$	$\frac{\bar{u}u + \bar{d}d}{\sqrt{2}}$	0,782	0,770
$\phi$	$\bar{s}s$	1,019	1,049

только одно решение, соответствующее равенству масс  $\rho$ - и  $\omega$ -мезонов.

Численные результаты приведены в таблице. Курсивом выделены значения масс, по которым проводилось фитирование параметров

$$\Lambda = 0,233 \text{ ГэВ}, \quad m_u = m_d = 0,201 \text{ ГэВ}, \\ m_s = 0,335 \text{ ГэВ}, \quad v = 1,6.$$

Заметим, что значения этих параметров вполне согласуются со стандартными принятыми числами.

Таким образом, видно, что массы векторного октета описываются вполне

прилично, в то время как в псевдоскалярном октете проблема остается, но ее формулировка звучит уже иначе: почему  $K$ -мезон легче  $\eta$ -мезона, при том что странный  $s$ -кварк тяжелее  $u$ -кварка?

В целом можно сказать, что, несмотря на достаточно грубое приближение, модели с аналитическим конфайнментом позволяют качественно правильно понимать структуру адронов как связанных кварк-глюонных систем.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение необходимо еще раз сказать, что идея, которую отстаивал Д.И.Блохинцев, о невозможности *точно* определения координат и момента времени как характеристик элементарной частицы оказалась весьма продуктивной и позволила расширить класс функций для описания амплитуд адронных процессов. Построенная на этих функциях квантовая теория поля с нелокальными формфакторами постепенно приобретает вид самосогласованной теории, которая уже находит свое место в описании явления конфайнмента и адронной физики низких энергий. Конечно, много еще надо сделать, особенно в развитии математического аппарата для вычисления амплитуд различных физических процессов. Кроме того, изучение поведения амплитуд при высоких энергиях требует развития своих методов, отличных от простого суммирования определенных типов диаграмм Фейнмана.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 04-02-17370.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Блохинцев Д.И.* Пространство и время в микромире. М.: Наука, 1970.
2. *Вайтман А.С.* Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей. М.: Наука, 1968.
3. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1957.
4. *Bohr N., Rosenfeld L.* // Kgl. Danske Vidensk., Mat.-Fys. Medd. 1933. V. 12, No. 8; Phys. Rev. 1950. V. 78. P. 794.
5. *Швебер С.* Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
6. *Ефимов Г.В.* Нелокальные взаимодействия квантованных полей. М.: Наука, 1977.
7. *Киржниц Д.А.* Труды по теоретической физике и воспоминания. М.: Физматлит, 2001. Т. 1.
8. *Lee T.D., Wick G.C.* // Nucl. Phys. B. 1969. V. 9. P. 209.
9. *Bhagwat M.S. et al.* // Phys. Rev. D. 2003. V. 67. P. 054019.
10. *Стритер Р., Вайтман А.* PCT, спин и статистика и все такое... М.: Наука, 1966.
11. *Иофа М.З., Файнберг В.Я.* // ЖЭТФ. 1969. Т. 56. С. 1644; ТМФ. 1969. Т. 1. С. 187.
12. *Соловьев М.А.* // ТМФ. 1992. Т. 93. С. 514; 1999. Т. 121. С. 139; 2000. Т. 128. С. 492.

13. *Ефимов Г. В.* Проблемы квантовой теории нелокальных взаимодействий. М.: Наука, 1985.
14. *Fainberg V. Ya., Iofa M. Z.* // *Nuovo Cim. A.* 1971. V. 5. P. 275.
15. *Ефимов Г. В.* // *ТМФ.* 2001. Т. 128. С. 395.
16. *Ефимов Г. В.* // *ЖЭТФ.* 1962. Т. 42. С. 1558.
17. *Efimov G. V., Ivanov V. A.* The Quark Confinement Model of Hadrons. London: IOP Publishing Ltd, 1993.
18. *Savvidy G. K.* // *Phys. Lett. B.* 1977. V. 71. P. 133.
19. *Leutwyler H.* // *Nucl. Phys. B.* 1981. V. 179. P. 129.
20. *Hayashi K. et al.* // *Fortsch. Phys.* 1967. V. 15. P. 625.
21. *Efimov G. V., Nedelko S. N.* // *Phys. Rev. D.* 1995. V. 51. P. 174; *Eur. Phys. J. C.* 1998. V. 1. P. 343.
22. *Burdanov Ja. V. et al.* // *Phys. Rev. D.* 1996. V. 54. P. 4483.
23. *Efimov G. V., Kalloniatis A. C., Nedelko S. N.* // *Phys. Rev. D.* 1999. V. 59. P. 014026.
24. *Burdanov Ja. V., Efimov G. V.* // *Phys. Rev. D.* 2001. V. 64. P. 014001.
25. *Efimov G. V., Ganbold G.* // *Phys. Rev. D.* 2002. V. 65. P. 054012.
26. *Maris P., Roberts G. D.* Dyson-Schwinger Equations: a Tool for Hadron Physics. nucl-th/0301049. 2003.
27. *Baldicchi M., Prospri G. M.* Light Mesons and Infrared Behaviour of the Running Coupling Constant in QCD. hep-ph/0310213. 2003.
28. *Ефимов Г. В.* О стабильности КЭД и КХД. ОИЯИ, P2-2003-226. Дубна, 2003.
29. *Nesterenko A. V.* // *Intern. J. Mod. Phys. A.* 2003. V. 18. P. 5475.
30. *Efimov G. V.* // *Few-Body Syst.* 2003. V. 33. P. 199.
31. *Efimov G. V.* Fluctuating and Fields. Singapore: World Scientific, 2001.