

УДК 539.12.01

ЭВОЛЮЦИЯ ВСЕЛЕННОЙ В ПОЛЕВОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

С. С. Герштейн, А. А. Логунов,**
М. А. Мествиришвили, Н. П. Ткаченко****

Институт физики высоких энергий, Протвино, Россия

ВВЕДЕНИЕ	1004
ИСТОЧНИК ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ И ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ	1006
ПЛОТНОСТЬ ЛАГРАНЖИАНА СОБСТВЕННО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ	1013
УРАВНЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ	1017
ПРИНЦИП ПРИЧИННОСТИ	1019
НАБЛЮДАЕМО ЛИ ПРОСТРАНСТВО МИНКОВСКОГО?	1020
ГРАВИТАЦИЯ И ЕЕ НОВЫЕ ПОЛЕВЫЕ СИЛЫ	1021
ПЛОСКИЙ ХАРАКТЕР ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ГЕОМЕТРИИ	1022
СУЩЕСТВОВАНИЕ ВО ВСЕЛЕННОЙ ВЫДЕЛЕННОЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ (ПРИНЦИП МАХА)	1024
НЕВОЗМОЖНОСТЬ НЕОГРАНИЧЕННОГО «РАСШИРЕНИЯ ВСЕЛЕННОЙ»	1024
УРАВНЕНИЯ ЭВОЛЮЦИИ МАСШТАБНОГО ФАКТОРА	1025
ОТСУТСТВИЕ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТИ	1026
ЭВОЛЮЦИЯ РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ	1028
ПОЛНАЯ ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ ВЕЩЕСТВА И МАССА ГРАВИТОНА	1029

*E-mail: gershtein@mx.ihep.su

**E-mail: Anatoly.Logunov@ihep.ru

***E-mail: Nikolai.Tkachenko@ihep.ru

ВЕРХНИЙ ПРЕДЕЛ НА МАССУ ГРАВИТОНА	1030
ИНТЕГРАЛ ЭВОЛЮЦИИ ВСЕЛЕННОЙ И МАКСИМАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ МАСШТАБНОГО ФАКТОРА	1032
НЕСОВМЕСТИМОСТЬ РТГ С СУЩЕСТВОВАНИЕМ ПОСТО- ЯННОГО КОСМОЛОГИЧЕСКОГО ЧЛЕНА (Λ CDM-ТЕОРИЯ). НЕОБХОДИМОСТЬ КВИНТЭССЕНЦИИ С $\nu > 0$	1034
НАЧАЛО И КОНЕЦ СОВРЕМЕННОГО УСКОРЕННОГО РАС- ШИРЕНИЯ. ВРЕМЯ МАКСИМАЛЬНОГО РАСШИРЕНИЯ ВСЕЛЕННОЙ	1035
Приложение 1. КОВАРИАНТНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВА- НИЕ ПЛОТНОСТИ ТЕНЗОРА В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВ- СКОГО (γ -ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ)	1042
Приложение 2. УРАВНЕНИЯ ЭВОЛЮЦИИ МАСШТАБНОГО ФАКТОРА	1043
Приложение 3. НОВЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ	1044
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1049

УДК 539.12.01

ЭВОЛЮЦИЯ ВСЕЛЕННОЙ В ПОЛЕВОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

С. С. Герштейн, А. А. Логунов,**
М. А. Мествиришвили, Н. П. Ткаченко****

Институт физики высоких энергий, Протвино, Россия

В рамках полевых представлений, когда гравитационное поле рассматривается как физическое поле со спинами 2 и 0, источником которого служит сохраняющийся в пространстве Минковского полный тензор вещества и гравитационного поля, подробно рассматривается эволюция Вселенной. Показано, что пространственная геометрия Вселенной должна быть плоской, а само гравитационное поле обладает новым удивительным свойством — создавать в сильных полях эффективные силы отталкивания, останавливающие процесс гравитационного сжатия. Именно это свойство приводит к устранению космологической особенности и циклическому развитию Вселенной. Использование принципа причинности, которому должна удовлетворять эволюция физического гравитационного поля, показывает, что расширение Вселенной не может иметь неограниченный характер. Теория несовместима поэтому с существованием постоянного космологического члена и фантомным расширением. Для объяснения наблюдаемого ускоренного расширения необходимо существование «квинтэссенции», плотность которой уменьшается с увеличением масштабного фактора (медленнее const/a^2). На основании данных по анизотропии микроволнового реликтового излучения установлен верхний предел на массу гравитона, усиливающий в 5000 раз существующие оценки, а в пределах экспериментальных ошибок указано возможное значение массы гравитона. Исходя из этого значения определены времена, соответствующие началу и концу современного ускорения, а также время максимального расширения Вселенной, которое затем сменяется сжатием до некоторого максимального значения плотности ρ_{max} , являющейся наряду с массой гравитона параметром теории.

The Universe evolution is thoroughly studied in this article where the gravitational field is treated as a physical field of spins 2 and 0 and its source is the conserving in Minkowski space total energy-momentum tensor of matter and gravitational field. It is shown that the cosmological singularity is absent in the framework of this approach and that the spatial geometry of the Universe should be flat. By using the Causality Principle which is to be fulfilled by the evolution of the physical gravitational field we demonstrate that the expansion of the Universe cannot be infinite. The Universe develops cyclically. Therefore the theory is not compatible with the presence of constant cosmological term and with the phantom expansion. The presence of «quintessence» which density is falling as scale factor rises (slower than const/a^2) is necessary to explain the observable accelerated expansion. Starting from data on anisotropy of the microwave relic radiation we obtain the upper limit for graviton mass, which is 5000 times stronger than existent estimations, and also the possible value of graviton mass in the experimental error corridor is given. The moments of time corresponding to the beginning and

*E-mail: gershtein@mx.ihep.su

**E-mail: Anatoly.Logunov@ihep.ru

***E-mail: Nikolai.Tkachenko@ihep.ru

the end points of the present acceleration stage are determined from this value as well as the moment of maximum Universe expansion which later is replaced by contraction till some maximum density value ρ_{\max} , this is another parameter of the theory along with the graviton mass.

ВВЕДЕНИЕ

Установление того факта, что расширение Вселенной происходит в настоящее время с ускорением, несомненно, является одним из самых выдающихся открытий, сделанных на рубеже XX и XXI веков. Обнаруженное впервые непосредственно по наблюдению стандартных «свечей» Вселенной — сверхновых SN1a [1, 2], оно указало на существование так называемой темной энергии (DE), или, иначе, распределенной в пространстве среды, которая должна создавать отрицательное давление, обеспечивающее в соответствии с теорией гравитации ускоренное расширение Вселенной. Существование темной энергии точно так же, как существование темной холодной массы (CDM), кластирующей в галактиках и их скоплениях, было косвенно убедительно подтверждено путем измерения угловой анизотропии микроволнового реликтового излучения [3–6] (в особенности в наиболее точных и впечатляющих экспериментах WMAP — Wilkinson Microwave Anisotropy Probe [7, 8]), а также путем наблюдения крупномасштабных структур Вселенной (LSS) [9, 10]. Природа темной массы и темной энергии в настоящее время неизвестна и является интригующей загадкой. Наиболее популярной в рамках ОТО гипотезой, объясняющей ускоренное расширение Вселенной, является предположение о существовании космологической постоянной $\Lambda > 0$, отвечающей ненулевой положительной плотности энергии вакуума ϵ_v и отрицательному давлению $p_v = -\epsilon_v$. Однако такая трактовка вызывает определенные трудности для большинства современных теорий, предполагающих, что для объяснения плоской (или приблизительно плоской) пространственной геометрии Вселенной, а также решения проблемы горизонта частиц необходимо существование инфляционного расширения Вселенной начиная с планковских масштабов [11–14]. В этих теориях необходимо объяснить, во-первых, каким образом энергия вакуума уменьшилась на 120 порядков от планковской до современной эпохи и, во-вторых, почему она в современную эпоху по порядку величины сравнима с энергией холодной массы. В качестве объяснения в ряде теоретических моделей предполагается существование самовзаимодействующего скалярного поля Φ , которое при надлежащем выборе потенциала $V(\Phi)$ может имитировать медленно изменяющуюся со временем и в пространстве в настоящую эпоху плотность вакуумной энергии. Высказываются предположения о том, что скалярное поле Φ может также обеспечить спектр первичных флуктуаций, необходимый для объяснения наблюдаемой крупномасштабной структуры Вселенной. В ряде других моделей предполагается

существование материальной среды с отрицательным давлением, вроде газа Чаплыгина или среды с ван-дер-ваальсовским притяжением (см. обзор [15] и ссылки в нем). Наиболее популярным в силу простоты является предположение о существовании «квинтэссенции» [16] — пятой «небесной» сущности с уравнением состояния $p_q = w\epsilon_q$, где p_q и ϵ_q — соответственно давление и плотность энергии квинтэссенции (скорость света полагаем равной единице), а коэффициент w для обеспечения ускоренного расширения удовлетворяет условию

$$w < -\frac{1}{3}.$$

Для дальнейшего мы введем параметр ν :

$$w = -(1 - \nu), \quad \nu < \frac{2}{3}.$$

Значение $w = -1$ ($\nu = 0$) имитирует вакуумную энергию. Наличие вакуумной энергии приводит к неограниченному ускоренному расширению Вселенной (даже в случае, когда плотность вакуумной энергии стремится с течением времени к нулю). Такой характер эволюции Вселенной противоречит релятивистской теории гравитации (РТГ) [17, 18], рассматривающей гравитационное поле как физическое поле в пространстве Минковского. В концепции РТГ принцип причинности ограничивает рост масштабного фактора некоторым конечным значением. Аналогичным образом РТГ не допускает и фантомного расширения Вселенной, т. е. $w < -1$ ($\nu < 0$). Вместе с тем, как это было впервые отмечено Калашниковым [19], РТГ может объяснить наблюдаемое в настоящее время ускоренное расширение Вселенной наличием квинтэссенции с $\nu > 0$ и предсказывает, что в будущем ускорение должно смениться замедлением. При анализе экспериментальных данных следовало бы учесть, что в РТГ отсутствует космологическая особенность и связанная с ней проблема горизонта частиц, а также предсказывается плоская (евклидова) геометрия пространства (независимо от того, существовала или отсутствовала эпоха инфляционного расширения Вселенной). Следует отметить, что предсказание плоского характера Вселенной и наличие в ней большой «скрытой массы» было сделано в полевой теории гравитации в 1984 г. [20], еще до того, как первые данные по флуктуации температуры микроволнового реликтового излучения и распределения галактик в больших структурах, находившиеся в согласии с инфляционной теорией, указали на такую возможность [21]. Важно при этом, что плоская пространственная геометрия, согласно РТГ, должна осуществляться при значении полной относительной плотности вещества Ω_{tot} , превышающем значение $\Omega_{\text{tot}} = 1$ на величину, определяемую массой гравитона [17, 18, 22], в то время как в инфляционной модели отличие Ω_{tot} от единицы ничтожно мало и по порядку величины составляет $\sim 10^{-5}$.

В связи с этим представляется интригующим тот факт, что, согласно результатам обработки всех экспериментальных данных [23], включая новейшие [24], среднее значение Ω_{tot} на несколько процентов превышает единицу (хотя в пределах ошибок совместимо и со значением $\Omega_{\text{tot}} = 1$). Важность вопроса, в особенности в связи с проектами новых экспериментов, позволяющих значительно улучшить точность измерения угловой анизотропии микроволнового реликтового излучения, а также намного увеличить статистику наблюдаемых сверхновых SN1a, побуждает нас дать обзор основных положений РТГ и ее предсказаний относительно характера эволюции Вселенной.

В разд. 1–6 статьи приводятся основные положения релятивистской теории гравитации. В разд. 7–17 рассматривается эволюция Вселенной с точки зрения РТГ, неотъемлемым положением которой является ненулевая масса гравитона. Указывается на отсутствие в РТГ космологической особенности и существование конечного предела расширения Вселенной. Предсказывается плоский характер пространственной геометрии Вселенной, с необходимостью требующей существования во Вселенной материи небарионной природы. Исходя из измеренной полной относительной плотности энергии Ω_{tot} получен верхний предел на массу гравитона (усиливающий почти на 4 порядка существующее значение), а в пределах ошибок экспериментов определена возможная величина массы гравитона [22, 25]. С использованием этого значения массы гравитона и значения параметра ν (в пределах, установленных на опыте) получены оценки времен, соответствующих началу современного ускоренного расширения, его смене на последующее замедление, приводящее к остановке расширения и в дальнейшем к фазе сжатия до некоторого минимального значения масштабного фактора, после чего должна вновь наступить эпоха расширения.

1. ИСТОЧНИК ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ И ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ

РТГ исходит из представления о том, что гравитационное поле, как и все другие физические поля, развивается в топологически простом пространстве — *пространстве Минковского*, а источником его служит *сохраняющаяся плотность тензора энергии-импульса* всех полей материи, включая и гравитационное поле. Такой подход позволяет последовательно реализовать идею Эйнштейна, высказанную им еще в 1913 г., о том, что «тензор гравитационного поля $\Theta_{\mu\nu}$ является источником поля наравне с тензором материальных систем $T_{\mu\nu}$. Исключительное положение энергии гравитационного поля по сравнению со всеми другими видами энергии привело бы к недопустимым последствиям» [26, с. 242]. При построении ОТО Эйнштейну не удалось реализовать эту идею, поскольку вместо тензора энергии-импульса гравита-

ционного поля в ОТО возник псевдотензор поля. Все это произошло из-за того, что Эйнштейн не рассматривал гравитационное поле как физическое поле в пространстве Минковского.

А. Эйнштейн избрал в гравитации геометрический подход, основанный на принципе эквивалентности. Однако подход Эйнштейна, как отмечал позднее в статье [27] В. Тирринг, «... не убеждает нас в том, почему рассматривать физическое пространство как риманово предпочтительнее, чем как пространство Вейля, или как финслерово, или как проективное пространство, или как какое-нибудь другое логически возможное». Он также, как писал Тирринг, «... не предсказывает, что гравитация является силой притяжения». Но подход Эйнштейна обладал одним важным преимуществом — он непосредственно и весьма просто приводил к уравнениям гравитации Гильберта–Эйнштейна. Однако в этом подходе не удалось найти общеквариантные уравнения законов сохранения энергии-импульса и момента количества движения.

В 1940 г. Наган Розен в статьях [28, 29] показал, что если наряду с римановой метрикой $g_{\mu\nu}$ ввести метрику пространства Минковского, то можно построить скалярную плотность лагранжиана гравитационного поля, которая будет содержать, в отличие от ОТО, только производные не выше первого порядка. Он, в частности, построил такую плотность лагранжиана, которая приводит к уравнениям Гильберта–Эйнштейна. Он также нашел тензор энергии-импульса гравитационного поля. Так возник биметрический формализм. Однако такой подход сразу усложнил проблему построения теории гравитации, поскольку, используя тензоры $g_{\mu\nu}$ и $\gamma_{\mu\nu}$, можно написать большое число скалярных плотностей, и совершенно неясно, какую скалярную плотность необходимо выбрать в качестве плотности лагранжиана для построения теории гравитации. Н. Розен не рассматривал гравитационное поле как физическое поле в пространстве Минковского, создаваемое источником — *полным тензором энергии-импульса* материи.

В. Тирринг в 1961 г. в статье [27] рассматривал гравитационное поле как физическое поле в пространстве Минковского, обладающее спинами 2 и 0. Но его подход привел к тем же уравнениям Гильберта–Эйнштейна, а пространство Минковского оказалось в принципе ненаблюдаемым. Он писал: «Таким образом, подход, полученный из принципов лоренц-инвариантных теорий, приводит автоматически к таким же концепциям и следствиям, как и теория Эйнштейна».

Р. Фейнман в лекциях, прочитанных в 1962–1963 гг. [30], также развивал полевой подход в гравитации и пришел к тем же уравнениям Гильберта–Эйнштейна.

Авторы работ [27] и [30] были недостаточно последовательны, а поэтому не обратили внимания на то, что эффективное риманово пространство, возникающее из-за наличия гравитационного поля в пространстве Минков-

ского, должно иметь *только* простую топологию, тогда как согласно ОТО риманово пространство возникает и со сложной топологией. Поэтому полевой подход *не может привести* к уравнениям Гильберта–Эйнштейна, допускающим нетривиальную топологию. С другой стороны, полевой подход должен также учитывать и наличие конуса причинности в пространстве Минковского, но это положение также осталось вне внимания авторов работ [27, 30].

Какие же аргументы свидетельствуют в пользу выбора пространства Минковского в качестве основного исходного физического пространства-времени, в котором происходит развитие всех физических полей? В 1921 г. в статье [31] А. Эйнштейн писал: «...вопрос о том, имеет этот континуум евклидову, риманову или какую-либо другую структуру, является вопросом физическим, ответ на который должен дать опыт, а не вопросом соглашения о выборе на основе простой целесообразности...» Это, конечно, правильно. Но при этом сразу возникает вопрос: какой опыт? Опытных фактов может быть достаточно много. Так, например, изучая движение света и пробных тел, можно, в принципе, однозначно установить геометрию пространства-времени. Необходимо ли ее и положить в основу физической теории? На первый взгляд на этот вопрос можно ответить утвердительно. И, казалось бы, вопрос исчерпан. Именно по этому пути и пошел А. Эйнштейн при построении ОТО. Пробные тела и свет движутся по геодезическим линиям риманова пространства-времени. Риманово пространство он и положил в основу теории. Однако ситуация в действительности гораздо сложнее. Все виды материи подчиняются законам сохранения энергии-импульса и момента количества движения. Эти законы, возникшие путем обобщения многочисленных опытных данных, характеризуют общие динамические свойства всех форм материи, в них вводятся универсальные характеристики, которые позволяют количественно описать превращение одних форм материи в другие. Ведь все это тоже опытные данные, ставшие фундаментальными физическими принципами. Как быть с ними? Если следовать Эйнштейну и положить в основу риманову геометрию, тогда от них следует отказаться. Но это слишком дорогая цена. Более естественно сохранить их для всех физических полей, в том числе и для гравитационного. Но в этом случае в основу теории необходимо положить пространство Минковского, т. е. псевдоевклидову геометрию пространства-времени. Этот путь мы и избрали, следуя Пуанкаре. Фундаментальные принципы физики, отражающие многочисленные опытные факты, указывают нам, какую геометрию пространства-времени необходимо положить в основу теории гравитации. Таким образом, действительно вопрос о структуре геометрии пространства-времени является вопросом физическим, ответ на который должен дать опыт, только, с нашей точки зрения, структура геометрии пространства-времени определяется не частными опытными данными о движении пробных тел и света, а фундаментальными физиче-

скими принципами, опирающимися на всю совокупность экспериментальных фактов. Именно в этом пункте наши исходные посылки построения теории гравитации совершенно отличаются от представлений, которые Эйнштейн положил в основу ОТО. Но они находятся в полном соответствии с представлениями Пуанкаре. В основу теории гравитации мы положили псевдоевклидову геометрию, но это отнюдь не означает, что и эффективное пространство, которое можно определять по мировым линиям пробных тел, также будет псевдоевклидовым.

Мы далее увидим, что полевой подход в гравитации приводит к полной системе гравитационных уравнений, отличных от уравнений Гильберта–Эйнштейна.

При выборе в качестве источника поля сохраняющейся величины, а именно плотности полного тензора энергии-импульса, возникает аналогия с современными калибровочными теориями (такими как теория электрослабого взаимодействия и КХД), в которых источниками полей также являются сохраняющиеся величины: заряды и их токи. В отличие от упомянутых теорий, где сохраняющиеся *векторные токи* порождают *векторные* калибровочные поля, *сохраняющийся тензор* энергии-импульса должен быть источником *тензорного* поля $\phi^{\mu\nu}$.

Гравитационное поле универсально, так как оно создается всеми физическими полями. Это обстоятельство, как будет видно ниже, позволяет произвести «*геометризацию*» теории. Другим отличием является то, что в полевой теории гравитации в случае тензорного поля наблюдаемые величины (такие, например, как интервал эффективного риманова пространства) непосредственно зависят от калибровочных преобразований, тогда как в векторных калибровочных теориях физические величины не зависят от калибровочных преобразований. Поэтому в полевой теории гравитации калибровочная инвариантность для тензорного поля должна быть нарушена. Только при нарушении калибровочной инвариантности и реализуется полевой подход, когда гравитационное поле рассматривается как физическое поле в пространстве Минковского, а источником его является сохраняющийся полный тензор энергии-импульса материи.

Исходя из требования, чтобы гравитационное поле обладало только спинами 2 и 0, однозначно определяется член в плотности лагранжиана, который и ведет к нарушению калибровочной инвариантности. Именно он и обеспечивает появление в уравнениях *массы гравитона*. Ситуация здесь подобна той, которая возникает в случае электродинамики, когда появление массы фотона приводит к нарушению калибровочной инвариантности. Однако в целом здесь ситуация более глубокая, поскольку появление массы гравитона связано не только со спиновыми свойствами гравитационного поля, но и с самой возможностью описания гравитационного поля как физического поля в пространстве Минковского.

Исходя из сказанного уравнение для гравитационного поля $\phi^{\mu\nu}$ принимается в виде

$$\gamma^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \phi^{\mu\nu} + m_g^2 \phi^{\mu\nu} = 16\pi t^{\mu\nu}, \quad (1)$$

где m_g — масса гравитона ($G = 1, \hbar = 1, c = 1$); D_α — ковариантная производная в пространстве Минковского с метрическим тензором $\gamma_{\alpha\beta}$, а $\phi^{\mu\nu}$ и $t^{\mu\nu}$ — соответственно гравитационное поле и полный тензор энергии-импульса материи.

Из уравнения (1) и закона сохранения полного тензора энергии-импульса следует уравнение

$$D_\mu \phi^{\mu\nu} = 0. \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) составляют полную систему четырнадцати уравнений для определения десяти величин $\phi^{\mu\nu}$ и четырех величин для описания материальной системы. Уравнения (1) и (2) записаны в произвольной (вообще говоря, неинерциальной) системе координат пространства Минковского. Это позволяет отделить силы инерции от сил гравитации, создаваемых тензором энергии-импульса, и обеспечить общековариантность уравнений гравитации.

Кардинальные изменения по сравнению с общей теорией относительности А. Эйнштейна возникают в релятивистской теории гравитации благодаря рассмотрению гравитационного поля как физического поля в пространстве Минковского. Именно такой подход с необходимостью приводит к ненулевой массе гравитона*.

Уравнения (1) нелинейны, поскольку в полном тензоре энергии-импульса $t^{\mu\nu}$ содержится тензор энергии-импульса гравитационного поля. Для того чтобы определить тензор энергии-импульса гравитационного поля, входящий в тензор $t^{\mu\nu}$, уравнение (1) должно быть получено из вариационного принципа наименьшего действия. Исходную плотность лагранжиана можно записать в виде

$$L = L_g(\tilde{\gamma}^{\alpha\beta}, \tilde{\phi}^{\mu\nu}) + L_M(\tilde{\gamma}^{\alpha\beta}, \tilde{\phi}^{\mu\nu}, \phi_A), \quad (3)$$

где L_g — плотность лагранжиана гравитационного поля; L_M — плотность лагранжиана материальной системы ϕ_A в присутствии гравитационного поля.

Здесь введена плотность величин

$$\tilde{\gamma}^{\alpha\beta} = \sqrt{-\gamma} \gamma^{\alpha\beta}, \quad \tilde{\phi}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma} \phi^{\mu\nu}, \quad \gamma = \det(\gamma_{\mu\nu}).$$

*Уравнения гравитации с отличной от нуля массой гравитона писались и раньше (см., например, [32]). Однако они записывались только в инерциальных системах отсчета, так как специальную теорию относительности считали справедливой только для таких систем. Поэтому эти уравнения естественно оказывались не общековариантными и в силу этого серьезно не рассматривались. В РТГ же учитывается, что в специальной теории относительности могут быть использованы любые, в том числе ускоренные, системы отсчета, а метрические коэффициенты $\gamma_{\mu\nu}$ образуют тензор относительно произвольных преобразований координат. Поэтому уравнения (1) и (2) и все последующие уравнения РТГ общековариантны.

Полный тензор энергии-импульса в правой части уравнения (1) равен вариационной производной Гильберта

$$\sqrt{-\gamma}t^{\mu\nu} = -2\frac{\delta L}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = -2\left\{\frac{\partial L}{\partial\gamma_{\mu\nu}} - \partial_\sigma\left(\frac{\partial L}{\partial\gamma_{\mu\nu,\sigma}}\right)\right\}, \quad \gamma_{\mu\nu,\sigma} = \frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}.$$

Для того чтобы свести уравнения (1) (которые свидетельствуют о том, что гравитационное поле создается универсальным источником — полным тензором энергии-импульса) к уравнениям поля, которые следуют из принципа наименьшего действия с плотностью лагранжиана (3), необходимо предположить, что *тензорная плотность* $\tilde{\phi}^{\mu\nu}$ всегда входит в плотность лагранжиана *совместно с тензорной плотностью* $\tilde{\gamma}^{\mu\nu}$ через *единую плотность* $\tilde{g}^{\mu\nu}$ в форме

$$\tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \tilde{\gamma}^{\mu\nu}(x) + \tilde{\phi}^{\mu\nu}(x), \quad \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}, \quad g = \det(g_{\mu\nu}). \quad (4)$$

На основании (4) для тензора $t^{\mu\nu}$ получим выражение

$$\sqrt{-\gamma}t^{\mu\nu} = -2\frac{\delta L}{\delta\tilde{g}^{\alpha\beta}}\frac{\partial\tilde{g}^{\alpha\beta}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} - 2\frac{\delta^*L}{\delta\gamma_{\mu\nu}}. \quad (5)$$

Здесь звездочкой обозначена вариационная производная от плотности лагранжиана по явно входящей в L метрике $\gamma_{\mu\nu}$. Поскольку гравитационное поле $\tilde{\phi}^{\mu\nu}$, как и все другие физические поля пространства Минковского, описывается в одной системе координат, то из выражения (4) очевидно, что величина $\tilde{g}^{\mu\nu}$ также полностью определяется в одной системе координат. Для описания эффективного риманова пространства, возникающего из-за действия гравитационного поля, не нужен атлас карт, который обычно необходим для описания риманова пространства общего вида. Это означает, что в РТГ эффективное риманово пространство имеет только простую топологию.

Введение тензорного поля $\phi^{\mu\nu}$ позволяет естественным образом наложить соответствующие физические условия на поведение гравитационного поля на бесконечности. Тогда как, если исходить просто из римановой метрики, не предполагая, что она возникла из-за действия гравитационного поля $\phi^{\mu\nu}$, сформулировать *физические условия* на ее поведение на бесконечности не представляется возможным, поскольку оно зависит даже от произвольного выбора трехмерных координат.

Сравнивая (1) и (5), можно установить, что уравнение (1) сводится к уравнению

$$\frac{\delta L}{\delta\tilde{g}^{\mu\nu}} = 0, \quad (6)$$

если выполняются следующие условия:

$$\frac{\delta^*L_M}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = 0, \quad (7)$$

$$-2 \frac{\delta^* Lg}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi} [\gamma^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \tilde{\phi}^{\mu\nu} + m^2 \tilde{\phi}^{\mu\nu}]. \quad (8)$$

Здесь и далее ковариантные производные от плотности тензора определены следующими равенствами:

$$D_\sigma \tilde{A}^{\mu\nu} = \partial_\sigma \tilde{A}^{\mu\nu} + \gamma_{\sigma\lambda}^\mu \tilde{A}^{\lambda\nu} + \gamma_{\sigma\lambda}^\nu \tilde{A}^{\mu\lambda} - \gamma_{\sigma\lambda}^\lambda \tilde{A}^{\mu\nu},$$

$$D_\sigma \tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} (D_\sigma g^{\mu\nu} + G_{\sigma\lambda}^\lambda g^{\mu\nu}), \quad G_{\sigma\nu}^\lambda = \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda - \gamma_{\sigma\nu}^\lambda,$$

где $\Gamma_{\sigma\nu}^\lambda$ и $\gamma_{\sigma\nu}^\lambda$ — символы Кристоффеля соответственно риманова пространства и пространства Минковского (см. приложение 1).

Условие (7) свидетельствует о том, что плотность лагранжиана вещества имеет вид

$$L_M(\tilde{g}^{\mu\nu}, \phi_A). \quad (9)$$

Это позволяет сделать вывод, что предположение о том, что источником гравитационного поля служит универсальная характеристика вещества и гравитационного поля — *полный тензор энергии-импульса*, неизбежно приводит к *геометризации* теории: движение вещества в присутствии гравитационного поля происходит так, как если бы оно происходило в римановом пространстве с метрикой $g_{\mu\nu}$. В этом и состоит физическая причина *геометризации*. Р. Фейнман по этому поводу писал: «В любом случае истина состоит в том, что поле спина 2 имеет геометрическую интерпретацию. Это не является чем-то легкообъяснимым, это удивительный факт» [30]. Это *действительно удивительно*, но естественным образом объясняется, если исходить из гипотезы, что источником универсального тензорного гравитационного поля $\phi^{\mu\nu}$ является сохраняющийся *полный тензор энергии-импульса* всех физических полей, в том числе и гравитационного. В отличие от ОТО риманово пространство в РТГ является «эффективным» и должно иметь в полевой теории только простую топологию. Условие (8) накладывает сильное ограничение на выбор плотности лагранжиана гравитационного поля. К выполнению этого условия мы вернемся позднее.

Ввиду того, что *плотность лагранжиана вещества* зависит не только от полей вещества, но также и от метрики эффективного риманова пространства, она с точностью до дивергентного члена *инвариантна* относительно калибровочных преобразований

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon \tilde{g}^{\mu\nu}(x) &= \tilde{g}^{\mu\alpha} D_\alpha \varepsilon^\nu(x) + \tilde{g}^{\nu\alpha} D_\alpha \varepsilon^\mu(x) - D_\alpha(\varepsilon^\alpha \tilde{g}^{\mu\nu}), \\ \delta_\varepsilon \phi_A(x) &= -\varepsilon^\alpha(x) D_\alpha \phi_A(x) + F_{A;\beta}^{B;\alpha} \phi_B(x) D_\alpha \varepsilon^\beta(x), \end{aligned} \quad (10)$$

здесь $\varepsilon^\alpha(x)$ — бесконечно малый калибровочный вектор.

При координатных преобразованиях при смещении координат поле изменяется следующим образом:

$$\delta_\xi \tilde{\phi}^{\mu\nu}(x) = \tilde{\phi}^{\mu\alpha} D_\alpha \xi^\nu(x) + \tilde{\phi}^{\nu\alpha} D_\alpha \xi^\mu(x) - D_\alpha(\xi^\alpha \tilde{\phi}^{\mu\nu}). \quad (11)$$

Поскольку при калибровочных преобразованиях смещения координат не происходит в *фиксированной системе координат пространства Минковского*, благодаря соотношению (4) имеет место равенство

$$\delta_\varepsilon \tilde{g}^{\mu\nu} = \delta_\varepsilon \tilde{\phi}^{\mu\nu},$$

а следовательно,

$$\delta_\varepsilon \tilde{\phi}^{\mu\nu} = \tilde{g}^{\mu\alpha} D_\alpha \varepsilon^\nu(x) + \tilde{g}^{\nu\alpha} D_\alpha \varepsilon^\mu(x) - D_\alpha (\varepsilon^\alpha \tilde{g}^{\mu\nu}),$$

но это преобразование поля существенно отличается от его преобразования при смещении координат (11).

2. ПЛОТНОСТЬ ЛАГРАНЖИАНА СОБСТВЕННО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Перейдем теперь к построению плотности лагранжиана собственно гравитационного поля. Простейшие скалярные плотности $\sqrt{-g}$ и $\tilde{R} = \sqrt{-g}R$, где R — скалярная кривизна эффективного риманова пространства, при калибровочных преобразованиях (10) изменяются следующим образом:

$$\sqrt{-g} \rightarrow \sqrt{-g} - D_\nu (\varepsilon^\nu \sqrt{-g}), \quad (12)$$

$$\tilde{R} \rightarrow \tilde{R} - D_\nu (\varepsilon^\nu \tilde{R}). \quad (13)$$

Скалярная плотность \tilde{R} выражается через символы Кристоффеля

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$$

следующим образом:

$$\tilde{R} = -\tilde{g}^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma) - \partial_\nu (\tilde{g}^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma - \tilde{g}^{\mu\sigma} \Gamma_{\mu\sigma}^\nu). \quad (14)$$

Поскольку символы Кристоффеля не являются тензорными величинами, каждое слагаемое в (14) не является скалярной плотностью. Однако если ввести тензорные величины

$$G_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (D_\mu g_{\sigma\nu} + D_\nu g_{\sigma\mu} - D_\sigma g_{\mu\nu}),$$

то скалярную плотность можно тождественно записать в виде

$$\tilde{R} = -\tilde{g}^{\mu\nu} (G_{\mu\nu}^\lambda G_{\lambda\sigma}^\sigma - G_{\mu\sigma}^\lambda G_{\nu\lambda}^\sigma) - D_\nu (\tilde{g}^{\mu\nu} G_{\mu\sigma}^\sigma - \tilde{g}^{\mu\sigma} G_{\mu\sigma}^\nu). \quad (15)$$

Заметим, что в (15) каждая группа членов в отдельности ведет себя при произвольных координатных преобразованиях как скалярная плотность. Мы видим, что аппарат римановой геометрии предрасположен к введению вместо обычных производных ковариантных в пространстве Минковского, однако метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}$, с помощью которого определяются ковариантные производные, при этом никак не фиксируется.

С учетом (12) и (13) выражение

$$\lambda_1(\tilde{R} + D_\nu Q^\nu) + \lambda_2\sqrt{-g} \quad (16)$$

при произвольных калибровочных преобразованиях изменяется только на дивергенцию. Выбирая векторную плотность Q^ν равной

$$Q^\nu = \tilde{g}^{\mu\nu} G_{\mu\sigma}^\sigma - \tilde{g}^{\mu\sigma} G_{\mu\sigma}^\nu,$$

мы исключаем из предыдущего выражения члены с производными выше первого порядка и получаем следующую плотность лагранжиана:

$$-\lambda_1 \tilde{g}^{\mu\nu} (G_{\mu\nu}^\lambda G_{\lambda\sigma}^\sigma - G_{\mu\sigma}^\lambda G_{\nu\lambda}^\sigma) + \lambda_2 \sqrt{-g}. \quad (17)$$

Таким образом, мы видим, что требование, чтобы плотность лагранжиана собственно гравитационного поля при калибровочном преобразовании (10) изменялась только на дивергенцию, однозначно определяет структуру плотности лагранжиана (17). Но если ограничиться только этой плотностью, тогда уравнения гравитационного поля будут калибровочно-инвариантными, а метрика пространства Минковского $\gamma_{\mu\nu}$ не войдет в систему уравнений, определяемых плотностью лагранжиана (17). Поскольку в таком подходе исчезает метрика пространства Минковского, то и исключается возможность представления гравитационного поля как физического поля типа поля Фарадея–Максвелла в пространстве Минковского.

При плотности лагранжиана (17) введение метрики $\gamma_{\mu\nu}$ с помощью уравнений (2) не спасает положение, поскольку физические величины — интервал и тензор кривизны риманова пространства, а также тензор $t_g^{\mu\nu}$ гравитационного поля — будут зависеть от выбора калибровки, что физически недопустимо. Так, например,

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon R_{\mu\nu} &= -R_{\mu\sigma} D_\nu \epsilon^\sigma - R_{\nu\sigma} D_\mu \epsilon^\sigma - \epsilon^\sigma D_\sigma R_{\mu\nu}, \\ \delta_\epsilon R_{\mu\nu\alpha\beta} &= -R_{\sigma\nu\alpha\beta} D_\mu \epsilon^\sigma - R_{\mu\sigma\alpha\beta} D_\nu \epsilon^\sigma - R_{\mu\nu\sigma\beta} D_\alpha \epsilon^\sigma - \\ &\quad - R_{\mu\nu\alpha\sigma} D_\beta \epsilon^\sigma - \epsilon^\sigma D_\sigma R_{\mu\nu\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Для того чтобы сохранить представления о поле в пространстве Минковского и исключить такую неоднозначность, необходимо добавить в плотность лагранжиана гравитационного поля член, нарушающий калибровочную

группу. Именно здесь появляется принципиально новый путь, который долгое время ускользал из поля зрения. На первый взгляд может показаться, что здесь возникает большой произвол в выборе плотности лагранжиана гравитационного поля, так как нарушить группу можно весьма различными способами. Однако оказывается, что это не так, поскольку наше физическое требование на поляризационные свойства гравитационного поля как поля со спинами 2 и 0, накладываемое уравнениями (2), приводит к тому, что член, нарушающий группу (10), должен быть выбран таким образом, чтобы уравнения (2) являлись следствиями системы уравнений гравитационного поля и полей вещества, ибо только в этом случае у нас не возникает переопределенная система дифференциальных уравнений. Для этой цели в скалярную плотность лагранжиана гравитационного поля введем член вида

$$\gamma_{\mu\nu}\tilde{g}^{\mu\nu}, \quad (18)$$

который при наличии условий (2) и при преобразованиях (10) изменяется также на дивергенцию для векторов, удовлетворяющих условию

$$g^{\mu\nu}D_\mu D_\nu \epsilon^\sigma(x) = 0.$$

Почти аналогичная ситуация имеет место в электродинамике с массой покоя фотона, отличной от нуля. С учетом (17), (18) общая скалярная плотность лагранжиана имеет вид

$$L_g = -\lambda_1 \tilde{g}^{\mu\nu} (G_{\mu\nu}^\lambda G_{\lambda\sigma}^\sigma - G_{\mu\sigma}^\lambda G_{\nu\lambda}^\sigma) + \lambda_2 \sqrt{-g} + \lambda_3 \gamma_{\mu\nu} \tilde{g}^{\mu\nu} + \lambda_4 \sqrt{-\gamma}. \quad (19)$$

Последний постоянный член в (19) мы ввели, чтобы с его помощью обратить в нуль плотность лагранжиана при отсутствии гравитационного поля. Сужение класса калибровочных векторов из-за введения члена (18) автоматически приводит к тому, что уравнения (2) будут следствиями уравнений гравитационного поля. В этом мы непосредственно убедимся ниже.

Согласно принципу наименьшего действия уравнения для собственного гравитационного поля имеют вид

$$\frac{\delta L_g}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = \lambda_1 R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \lambda_2 g_{\mu\nu} + \lambda_3 \gamma_{\mu\nu} = 0, \quad (20)$$

здесь

$$\frac{\delta L_g}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = \frac{\partial L_g}{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_\sigma \tilde{g}^{\mu\nu})} \right),$$

где $R_{\mu\nu}$ — тензор Риччи, приведенный к форме

$$R_{\mu\nu} = D_\lambda G_{\mu\nu}^\lambda - D_\mu G_{\nu\lambda}^\lambda + G_{\mu\nu}^\sigma G_{\sigma\lambda}^\lambda - G_{\mu\lambda}^\sigma G_{\nu\sigma}^\lambda.$$

Поскольку в случае отсутствия гравитационного поля уравнения (20) должны тождественно выполняться, отсюда следует

$$\lambda_2 = -2\lambda_3.$$

Найдем теперь плотность тензора энергии-импульса гравитационного поля в пространстве Минковского:

$$t_g^{\mu\nu} = -2 \frac{\delta L_g}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = 2\sqrt{-\gamma} \left(\gamma^{\mu\alpha} \gamma^{\nu\beta} - \frac{1}{2} \gamma^{\mu\nu} \gamma^{\alpha\beta} \right) \frac{\delta L_g}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} + \lambda_1 J^{\mu\nu} - 2\lambda_3 \tilde{g}^{\mu\nu} - \lambda_4 \tilde{\gamma}^{\mu\nu}, \quad (21)$$

где

$$J_{\mu\nu} = D_\alpha D_\beta (\gamma^{\alpha\mu} \tilde{g}^{\beta\nu} + \gamma^{\alpha\nu} \tilde{g}^{\beta\mu} - \gamma^{\alpha\beta} \tilde{g}^{\mu\nu} - \gamma^{\mu\nu} \tilde{g}^{\alpha\beta}).$$

Если в выражении (21) учесть динамические уравнения (20), то мы получим уравнения для собственно гравитационного поля в форме

$$\lambda_1 J^{\mu\nu} - 2\lambda_3 \tilde{g}^{\mu\nu} - \lambda_4 \tilde{\gamma}^{\mu\nu} = t_g^{\mu\nu}. \quad (22)$$

Для того чтобы это уравнение в случае отсутствия гравитационного поля удовлетворялось тождественно, необходимо положить

$$\lambda_4 = -2\lambda_3.$$

Поскольку для собственно гравитационного поля всегда имеет место равенство

$$D_\mu t_g^{\mu\nu} = 0,$$

из уравнения (22) следует

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0. \quad (23)$$

Таким образом, уравнения (2), определяющие поляризационные состояния поля, непосредственно вытекают из уравнений (22). С учетом выражения (23) полевые уравнения (22) можно записать в виде

$$\gamma^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \tilde{\phi}^{\mu\nu} - \frac{\lambda_4}{\lambda_1} \tilde{\phi}^{\mu\nu} = -\frac{1}{\lambda_1} t_g^{\mu\nu}.$$

В галилеевых координатах это уравнение имеет простой вид

$$\square \tilde{\phi}^{\mu\nu} - \frac{\lambda_4}{\lambda_1} \tilde{\phi}^{\mu\nu} = -\frac{1}{\lambda_1} t_g^{\mu\nu}.$$

Числовому фактору $-(\lambda_4/\lambda_1) = m_g^2$ естественно придать смысл квадрата массы гравитона, а значение $-(1/\lambda_1)$, согласно принципу соответствия, необходимо взять равным 16π . Таким образом, все неизвестные постоянные, входящие в плотность лагранжиана, определены:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{16\pi}, \quad \lambda_2 = \lambda_4 = -2\lambda_3 = \frac{m_g^2}{16\pi}.$$

Построенная скалярная плотность лагранжиана собственно гравитационного поля будет иметь вид

$$L_g = \frac{1}{16\pi} \tilde{g}^{\mu\nu} (G_{\mu\nu}^\lambda G_{\lambda\sigma}^\sigma - G_{\mu\sigma}^\lambda G_{\nu\lambda}^\sigma) - \frac{m_g^2}{16\pi} \left(\frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \tilde{g}^{\mu\nu} - \sqrt{-g} - \sqrt{-\gamma} \right). \quad (24)$$

Полевой подход к гравитации с объявлением источником поля тензора энергии-импульса всей материи с необходимостью требует введения в теорию массы покоя гравитона.

Первый член в выражении (24) аналогичен тому, который получается в ОТО после выделения в лагранжиане вторых производных по полю в дивергентный член. Однако в ОТО, где вместо тензоров $G_{\mu\nu}^\lambda$ в него входят символы Кристоффеля $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, он не представляет собой плотность скаляра. Использование пространства Минковского в качестве базиса позволяет превратить его в плотность скаляра. Такой член впервые ввел и использовал Н. Розен [28, 29]. В нашем подходе он возник вследствие требования калибровочной инвариантности (10). В то время как координатные преобразования не накладывают почти никаких ограничений на структуру скалярной плотности лагранжиана собственно гравитационного поля, калибровочные преобразования однозначно определили вид первого члена в выражении (24). В первом члене выражения (24) метрика пространства Минковского отсутствует. Она входит только во второй член выражения (24), нарушающий калибровочную инвариантность.

3. УРАВНЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Для полной плотности лагранжиана, составленной из выражений (9) и (24), мы получим уравнение гравитации [18]

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) + \frac{m_g^2}{2} \left\{ g^{\mu\nu} + \gamma_{\alpha\beta} \left(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \right) \right\} = 8\pi T^{\mu\nu}, \quad (25)$$

где $T^{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса вещества,

$$D_\nu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0, \quad (26)$$

или, в развернутой форме,

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = \partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} + \gamma_{\alpha\beta}^\nu \tilde{g}^{\alpha\beta} = 0. \quad (27)$$

Заметим, что в уравнение (27) входит *только* символ Кристоффеля пространства Минковского, а не сама метрика $\gamma_{\mu\nu}$. Тензор энергии-импульса вещества, согласно Гильберту, определяется выражением

$$\sqrt{-g} T^{\mu\nu} = -2 \frac{\delta L_M}{\delta g_{\mu\nu}}.$$

Уравнения (25) и (26) образуют полную систему гравитационных уравнений для определения десяти переменных $g_{\mu\nu}$ и четырех материальных переменных. Система уравнений (25), (26) общековариантна относительно произвольных координатных преобразований и форминвариантна относительно преобразований Лоренца. Это означает, что *принцип относительности* остается справедливым и для гравитационного поля.

Система координат в РТГ, задается метрическим тензором пространства Минковского $\gamma_{\mu\nu}$. Поскольку наблюдательные данные обычно относят к инерциальной системе, связанной с неподвижными звездами, то, естественно, все необходимые расчеты следует производить в галилеевых координатах пространства Минковского.

Система уравнений (25), (26) может быть представлена и в другом виде

$$R_{\mu\nu} - \frac{m_g^2}{2} (g_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}) = 8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right), \quad (28)$$

$$D_\nu \tilde{g}^{\nu\mu} = 0. \quad (29)$$

Здесь T — след тензора $T_{\mu\nu}$:

$$T = T_{\mu\nu} g^{\mu\nu}.$$

Следует отметить, что уравнения (25) и (26) являются следствием принципа наименьшего действия.

Система уравнений (25) и (26) полностью согласуется со всеми наблюдательными данными в Солнечной системе. При этом в РТГ все найденные величины отнесены к инерциальной системе координат. Принципиальное отличие от следствий ОТО система уравнений (25) и (26) обнаруживает в сильных гравитационных полях звезд, сколлапсировавших почти до своего гравитационного радиуса. Согласно РТГ, черные дыры (объекты, не имеющие материальных границ и «отрезанные» от внешнего мира) не существуют и не могут образовываться, а следовательно, отсутствует и горизонт событий, но могут образовываться «*коллапсары*» — объекты с радиусом, превышающим

гравитационный радиус Шварцшильда, и имеющие материальную поверхностную границу. Этот вывод о «черных дырах» полностью согласуется с выводом А. Эйнштейна, который он сделал в 1939 г., следуя скорее своей физической интуиции, чем формальному аппарату ОТО. Он писал: «Шварцшильдовская сингулярность отсутствует, так как вещество нельзя концентрировать произвольным образом, в противном случае частицы, образующие скопление, достигнут скорости света» [33].

Эйнштейн правильно отметил это обстоятельство, ибо в противном случае любое пробное тело с массой m , движущееся по радиусу, за конечное собственное время имело бы на сфере Шварцшильда физическую скорость, равную скорости света, а следовательно, имело бы бесконечную энергию, что физически недопустимо. Однако, к сожалению, это высказывание Эйнштейна осталось без должного внимания и анализа. Эйнштейн, конечно, также видел, что наличие сингулярности Шварцшильда нарушает его основной принцип — «признать все мыслимые (мы не будем здесь касаться некоторых ограничений, вытекающих из требования однозначности и непрерывности) координатные системы принципиально равноправными для описания природы» [26, с. 459]. Но именно в РТГ, а не в ОТО эти важные положения Эйнштейна и реализуются. Существенные изменения вносит РТГ и в описание развития Вселенной. Ее развитие происходит циклически от некоторой максимальной плотности до минимальной и т. д. Но это будет подробно рассмотрено в последующих разделах данной статьи.

Мы отмечали ранее, что уравнение (1) сводится к уравнению (6), которое следует из принципа наименьшего действия только при условии выполнения равенства (8). Прямой расчет с использованием плотности лагранжиана (24) приводит к следующему соотношению:

$$-2 \frac{\delta^* L_g}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi} (-J^{\mu\nu} + m_g^2 \tilde{\phi}^{\mu\nu}),$$

где

$$J^{\mu\nu} = -D_\sigma D_\lambda (\gamma^{\sigma\lambda} \tilde{g}^{\mu\nu} + \gamma^{\mu\nu} \tilde{g}^{\sigma\lambda} - \gamma^{\mu\lambda} \tilde{g}^{\nu\sigma} - \gamma^{\nu\lambda} \tilde{g}^{\mu\sigma}).$$

С учетом уравнения (26) тензор $J^{\mu\nu}$ становится равным следующему выражению:

$$J^{\mu\nu} = -\gamma^{\sigma\lambda} D_\sigma D_\lambda \tilde{\phi}^{\mu\nu},$$

что свидетельствует о том, что условие (8) для данной плотности лагранжиана (24) точно выполняется.

4. ПРИНЦИП ПРИЧИННОСТИ

Теперь остановимся на причинности. Принцип причинности не выполняется автоматически. Но в этом нет ничего необычного, ибо в электродинамике, да и в других физических теориях, он всегда добавляется (но это не

всегда отмечается) к основным уравнениям в форме

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \geq 0,$$

которая и обеспечивает невозможность движения любой формы материи со скоростями большими, чем скорость света. В РТГ для причинно связанных событий (мировых линий *частиц*, *гравитонов* и *света*), с одной стороны, должно выполняться условие

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \geq 0,$$

а с другой — для тех же событий должно выполняться условие

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \geq 0.$$

Эти условия для мировых линий *частиц* и *света* можно записать и в следующей форме:

$$\gamma_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = 0, \quad g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu \leq 0, \quad (30)$$

где вектор U^ν определяется первым равенством. Условия (30) обеспечивают нахождение конуса риманова пространства внутри конуса пространства Минковского. Именно только в этом случае времениподобные векторы в римановом пространстве остаются времениподобными и в пространстве Минковского, а изотропные также не выходят за конус причинности пространства Минковского. В РТГ физический смысл имеют только такие решения уравнений (25) и (26), которые удовлетворяют условию причинности (30). Таким образом, движение пробных тел всегда происходит *внутри* как риманова конуса, так и конуса пространства Минковского.

Система уравнений (25), (26) является гиперболической, причем принцип причинности и обеспечивает существование во всем пространстве пространственноподобной поверхности, которую каждая непространственноподобная кривая в римановом пространстве пересекает только один раз, т. е., иначе говоря, существует глобальная поверхность Коши, на которой и задаются для той или иной задачи начальные физические условия. В РТГ пространственноподобные события в отсутствие гравитационного поля никогда не могут стать под действием гравитационного поля времениподобными. На основании принципа причинности эффективное риманово пространство в РТГ будет обладать изотропной и времениподобной геодезической полнотой.

5. НАБЛЮДАЕМО ЛИ ПРОСТРАНСТВО МИНКОВСКОГО?

Теперь остановимся на вопросе: наблюдаемо ли в принципе пространство Минковского? Для этой цели запишем уравнение (28) в форме

$$\frac{m_g^2}{2} \gamma_{\mu\nu} = 8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) - R_{\mu\nu} + \frac{m_g^2}{2} g_{\mu\nu}. \quad (31)$$

Отсюда видно, что в правой части уравнений содержатся только геометрические характеристики эффективного риманова пространства и величины, определяющие распределение вещества в этом пространстве.

Воспользуемся теперь теоремой Вейля–Лоренца–Петрова [34], согласно которой, «зная... уравнения всех времениподобных и всех изотропных геодезических линий, можно определить метрический тензор с точностью до постоянного множителя». Отсюда следует, что путем экспериментального изучения движения частиц и света в римановом пространстве можно *в принципе* определить *метрический тензор* $g_{\mu\nu}$ эффективного риманова пространства. Подставляя далее $g_{\mu\nu}$ в (31), можно определить метрический тензор пространства Минковского. После этого с помощью координатных преобразований можно осуществить переход в инерциальную галилееву систему координат. Так что пространство Минковского в принципе наблюдаемо.

Здесь уместно привести слова В. А. Фока: «Как следует определять прямую: как луч света или как прямую в том евклидовом пространстве, в котором декартовыми координатами служат гармонические координаты x_1, x_2, x_3 ? Нам представляется единственно правильным второе определение. Фактически мы им и пользовались, когда говорили о том, что луч света вблизи Солнца имеет форму гиперболы. (...) Что касается того соображения, что прямая, как луч света, более непосредственно наблюдаема, то оно не имеет никакого значения: в определениях решающим является не непосредственная наблюдаемость, а соответствие природе, хотя бы это соответствие и устанавливалось путем косвенных умозаключений» [35].

Инерциальная система координат, как мы видим, связана с распределением вещества во Вселенной. Таким образом, РТГ *в принципе* дает возможность найти по данным наблюдений *инерциальную* систему координат. В ОТО такое понятие отсутствует. А. Эйнштейн это обстоятельство особо подчеркивал: «Существенное достижение общей теории относительности заключается в том, что она избавила физику от необходимости вводить "инерциальную систему" (или "инерциальные системы")» [36]. Наличие в РТГ пространства Минковского, а следовательно, и инерциальных систем координат имеет принципиальное значение, поскольку только оно и обеспечивает существование фундаментальных законов сохранения энергии-импульса и момента количества движения.

6. ГРАВИТАЦИЯ И ЕЕ НОВЫЕ ПОЛЕВЫЕ СИЛЫ

В полевой теории гравитации из-за действия гравитационного поля возникают эффективные силы, своим появлением обязанные изменению хода времени под действием гравитации от инерциального времени t к собственному времени τ .

Это обстоятельство можно пояснить на примере уравнения механики. Если в уравнении Ньютона

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = F$$

формально перейти от времени t к времени τ по правилу

$$d\tau = U(t)dt,$$

то легко получить

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = \frac{1}{U^2} \left\{ F - \frac{dr}{dt} \frac{d}{dt} \ln U \right\}.$$

Отсюда видно, что изменение хода времени, определяемое функцией U , ведет к появлению эффективной силы. Именно такая ситуация возникает в гравитации. Физическое гравитационное поле изменяет как ход времени, так и параметры пространственных величин по сравнению с теми же величинами в инерциальной системе пространства Минковского. Но все это может проявляться в гравитации в форме эффективных сил отталкивания. Именно это и необходимо учесть в уравнениях гравитационного поля. В РТГ благодаря массе гравитона в гравитационные уравнения однозначно вводится метрический тензор пространства Минковского, который и дает возможность учесть влияние эффективных полевых сил. Это видно по левой части уравнения (31). *Эти силы гравитационного происхождения. Однако их нет в общей теории относительности.* В РТГ как полевой теории гравитации открылось новое удивительное свойство гравитационного поля: *создавать в сильных полях эффективные силы отталкивания, останавливающие процесс сжатия.* Именно они и останавливают коллапс массивных тел и устраняют сингулярность при развитии Вселенной.

7. ПЛОСКИЙ ХАРАКТЕР ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ГЕОМЕТРИИ

Для однородной и изотропной Вселенной интервал между событиями в эффективном римановом пространстве может быть представлен в метрике Фридмана–Робертсона–Уокера:

$$ds^2 = U(t) dt^2 - V(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\phi^2) \right], \quad (32)$$

где $k = 1, -1, 0$ — соответственно для замкнутой (эллиптической), открытой (гиперболической) и плоской (параболической) Вселенной. Метрика (32) должна удовлетворять уравнению (26), где, напомним, символ D_ν отвечает ковариантному дифференцированию в пространстве Минковского. Уравнение

(26) для компоненты $\mu = 0$ приводит к равенству

$$\frac{V(t)}{U^{1/3}(t)} = \text{const} = \beta^4 \neq 0, \quad (33)$$

а для компоненты $\mu = 1$ принимает вид

$$-\frac{d}{dr} \left\{ r^2(1 - kr^2)^{1/2} \right\} + 2r(1 - kr^2)^{-1/2} = 0$$

(см. приложение 1). Для компонент $\mu = 2$ и 3 уравнения (26) выполняются тождественно. Предыдущее равенство может быть выполнено только при $k = 0$. Таким образом, мы приходим к выводу, имеющему фундаментальное значение: уравнение (26), вытекающее при $m_g \neq 0$ из предположения о том, что источником гравитационного поля является сохраняющийся полный тензор энергии-импульса, *однозначно приводит к плоской пространственной (евклидовой) геометрии* Вселенной. Этот вывод не зависит от того, происходит или не происходит инфляционное расширение ранней Вселенной.

Полагая

$$U^{1/3}(t) = a^2,$$

получаем

$$ds^2 = \beta^6 \left[d\tau_g^2 - \left(\frac{a}{\beta} \right)^2 (dr^2 + r^2 d\Theta^2 + r^2 \sin^2 \Theta d\phi^2) \right], \quad (34)$$

здесь величина

$$d\tau_g = \left(\frac{a}{\beta} \right)^3 dt$$

определяет темп замедления хода времени в присутствии гравитационного поля по отношению к инерциальному времени t . Общий постоянный численный множитель β^6 в интервале ds^2 одинаково увеличивает как время, так и пространственные переменные. Он не отражает динамику развития Вселенной, но определяет время развития Вселенной и ее пространственный масштаб расширения. Его действие глобальное, поскольку он выражается через интеграл движения Вселенной (см. разд. 15). Мы будем иметь дело с собственным временем τ , определяемым следующим образом:

$$d\tau = \beta^3 d\tau_g = a^3 dt. \quad (35)$$

Следует особо подчеркнуть: темп хода времени по сравнению с инерциальным временем t определяется величиной $d\tau_g$, тогда как время развития Вселенной определяется величиной $d\tau$ как времениподобной частью интервала ds^2 .

С учетом (35) выражение (34) принимает вид

$$ds^2 = d\tau^2 - \beta^4 a^2(\tau)(dr^2 + r^2 d\Theta^2 + r^2 \sin^2 \Theta d\phi^2). \quad (36)$$

Отметим, что переход от инерциального времени t к собственному времени τ (35) ведет к появлению дополнительных эффективных сил (см. разд. 6). Указанные силы приводят к дополнительным членам в уравнениях эволюции Вселенной (см. ниже формулы (40) и (41)).

8. СУЩЕСТВОВАНИЕ ВО ВСЕЛЕННОЙ ВЫДЕЛЕННОЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ (ПРИНЦИП МАХА)

Тензор энергии-импульса вещества в эффективном римановом пространстве имеет вид

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu - g_{\mu\nu}p, \quad (37)$$

где ρ и p — соответственно плотность и давление вещества в системе его покоя, а U_μ — его скорость. Поскольку для интервала (32) (и соответственно (36)) g_{oi} и R_{oi} равны нулю, из уравнения (31) следует, что

$$T_{oi} = 0 \text{ и } U_i = 0.$$

Это означает, что система координат в пространстве Минковского, в которой вещество Вселенной покоится, является инерциальной, т. е. в РТГ автоматически выполняется принцип Маха. Как уже отмечалось выше, в римановом пространстве ОТО такую систему выделить невозможно.

Неподвижность вещества в однородной и изотропной Вселенной (отвлекаясь от пекулярных скоростей галактик) в некотором смысле отвечает ранним (дофридмановским) представлениям А. Эйнштейна о Вселенной. Так называемое «расширение Вселенной», наблюдаемое по красному смещению, вызвано не движением вещества, а изменением со временем гравитационного поля (см., например, [37]). Расстояния между галактиками растут, поскольку они определяются временем прохождения между ними светового сигнала, скорость которого зависит от изменяющегося гравитационного поля. *Это замечание следует иметь в виду, когда употребляется принятый термин «расширение Вселенной».*

9. НЕВОЗМОЖНОСТЬ НЕОГРАНИЧЕННОГО «РАСШИРЕНИЯ ВСЕЛЕННОЙ»

Рассматривая гравитационное поле $\phi^{\mu\nu}$ как физическое поле в пространстве Минковского, необходимо потребовать соблюдения принципа причинности. Это означает, что световой конус в эффективном римановом пространстве должен лежать внутри светового конуса пространства Минковского, т. е.

для $ds^2 = 0$ выполняется требование $d\sigma^2 \geq 0$. Записав $d\sigma^2$ в сферической системе координат:

$$d\sigma^2 = dt^2 - (dr^2 + r^2 d\Theta^2 + r^2 \sin^2 \Theta d\phi^2) \quad (38)$$

и определив пространственную часть интервала (36) из условия $ds^2 = 0$, имеем

$$d\sigma^2 = dt^2 \left(1 - \frac{a^4}{\beta^4} \right) \geq 0,$$

т. е.

$$(a^4 - \beta^4) \leq 0. \quad (39)$$

Таким образом, масштабный фактор a ограничен условием $a \leq \beta$, поэтому естественно было бы принять его максимальное значение равным

$$a_{\max} = \beta.$$

При таком выборе a_{\max} темп хода времени $d\tau_g$ в точке остановки расширения Вселенной становится равным темпу хода инерциального времени t в пространстве Минковского, хотя вторая производная \ddot{a} , а следовательно, и скалярная кривизна R отличны от нуля. Именно от этой точки при сжатии под действием сил притяжения и будет происходить замедление темпа хода времени $d\tau_g$ вплоть до точки остановки сжатия, когда под действием уже сил отталкивания начнется обратный процесс ускорения темпа хода времени $d\tau_g$ до темпа хода инерциального времени t пространства Минковского. *Именно все эти физические следствия с необходимостью требуют выполнения условия $a_{\max} = \beta$.* Как мы увидим далее (см. разд. 15), значение величины β определяется интегралом движения.

Условие (39) не допускает неограниченного роста масштабного фактора со временем, т. е. неограниченного «расширения Вселенной» (в указанном выше смысле), что и обеспечивается динамическим уравнением эволюции масштабного фактора a . Отметим, что сама Вселенная при этом бесконечна, поскольку радиальная координата определена в области $0 < r \leq \infty$.

10. УРАВНЕНИЯ ЭВОЛЮЦИИ МАСШТАБНОГО ФАКТОРА

Используя уравнение (31) и выражение для тензора энергии-импульса (37), можно получить систему уравнений для изменения масштабного фактора $a(\tau)$ (см. приложение 2). Введя размерные постоянные c , G , \hbar , имеем

$$\left(\frac{1}{a} \frac{da}{d\tau} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho(\tau) - \frac{1}{12} m^2 \left(2 - \frac{3}{a^2 \beta^4} + \frac{1}{a^6} \right), \quad (40)$$

$$\frac{1}{a} \frac{d^2 a}{d\tau^2} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) - \frac{1}{6} m^2 \left(1 - \frac{1}{a^6} \right), \quad (41)$$

$$m = \frac{m_g c^2}{\hbar}.$$

В отсутствие вещества и гравитационных волн уравнения (40), (41) имеют тривиальное решение: $a = \beta = 1$, т.е. эволюции пустой Вселенной не происходит и эффективное риманово пространство совпадает с пространством Минковского (как это и следует из общих уравнений гравитации (25), (26)). Отметим, что в развиваемой теории приобретает физический смысл абсолютное значение масштабного фактора a . При $m = 0$ уравнения (40) и (41) совпадают с уравнениями Фридмана для эволюции плоской Вселенной. Однако наличие членов с $m \neq 0$ существенно меняет характер эволюции при малых и больших значениях масштабного фактора.

Появление в уравнениях (40) и (41) дополнительных членов при $m^2 \neq 0$ (и в частности, членов $\sim m^2/a^6$) связано с переходом от времени инерциальной системы t к времени τ (35). Поскольку гравитация влияет на ход времени, указанные члены оказываются достаточно большими, чтобы повлиять на характер эволюции в сильных гравитационных полях (несмотря на малость массы гравитона). Пропорциональность этих членов квадрату массы гравитона является проявлением того, что только при $m^2 \neq 0$ эффективное риманово пространство сохраняет связь с базовым пространством Минковского.

11. ОТСУТСТВИЕ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТИ

Из ковариантного закона сохранения плотности тензора энергии-импульса $\tilde{T}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} T^{\mu\nu}$

$$\nabla_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = \partial_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \tilde{T}^{\alpha\beta} = 0$$

(где ∇_μ — ковариантная производная, а $\Gamma_{\alpha\beta}^\nu$ — символы Кристоффеля в римановом пространстве), следующего из уравнений (25), (26), и выражения (37) получается соотношение

$$-\frac{1}{a} \frac{da}{d\tau} = \frac{1}{3 \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right)} \frac{dp}{d\tau}. \quad (42)$$

Для уравнения состояния вещества $p = f(\rho)$ уравнение (42) определяет зависимость плотности вещества от масштабного фактора. В случае, когда уравнение состояния имеет вид

$$\frac{p}{c^2} = \omega \rho,$$

эта зависимость дается выражением

$$\rho = \frac{\text{const}}{a^{3(\omega+1)}}.$$

Для холодной материи, включающей темную массу и массу барионов, $\omega_{\text{CDM}} = 0$; для радиационной плотности $\omega_r = 1/3$; для квинтэссенции $\omega_q = -1 + \nu$. Таким образом, полная плотность вещества в уравнениях (40) и (41) имеет вид

$$\rho = \frac{A_{\text{CDM}}}{a^3} + \frac{A_r}{a^4} + \frac{A_q}{a^{3\nu}}, \quad (43)$$

где A_{CDM} , A_r и A_q — постоянные величины. Согласно (43) при малых значениях масштабного параметра ($a \ll 1$) имеет место радиационно-доминантная стадия эволюции Вселенной:

$$\rho \approx \rho_r = \frac{A_r}{a^4}.$$

Обращаясь к уравнению (40), можно заметить, что при $a \ll 1$ отрицательный член в правой части уравнения с уменьшением масштабного фактора растет по модулю как $1/a^6$. Поскольку левая часть уравнения положительно определенная, должно существовать минимальное значение масштабного фактора

$$a_{\text{min}} = \frac{m}{(32\pi G A_r)^{1/2}} = \left(\frac{m^2}{32\pi G \rho_{\text{max}}} \right)^{1/6}. \quad (44)$$

Таким образом, *благодаря массе гравитона, а следовательно, благодаря наличию эффективных сил, связанных с изменением хода времени, устраняется космологическая особенность* и расширение Вселенной начинается с конечного значения масштабного фактора (44). Именно здесь проявляется (см. разд. 6) удивительное свойство гравитационного поля: создавать в сильных полях силы отталкивания, которые останавливают процесс сжатия Вселенной и далее осуществляют ее ускоренное расширение.

На основании (41) и (44) определим начальное ускорение, которое явилось «толчком» к расширению Вселенной. Оно равно

$$\frac{1}{a} \frac{d^2 a}{d\tau^2} \Big|_{\tau=0} = \frac{8\pi G}{3} \rho_{\text{max}},$$

а следовательно, в РТГ в радиационно-доминантной стадии эволюции Вселенной *в период ускоренного расширения, который предшествует фридмановской стадии расширения, скалярная кривизна будет отлична от нуля и при $\tau = 0$ равна*

$$R = -\frac{16\pi G}{c^2} \rho_{\text{max}},$$

тогда как в ОТО она равна нулю.

12. ЭВОЛЮЦИЯ РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ

В радиационно-доминантной стадии эволюции Вселенной ($\rho = \rho_r$) при $a \ll 1$ уравнения (40), (41) принимают вид

$$\left(\frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{\tau_r^2} \left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right) \frac{1}{\xi^4}, \quad (45)$$

$$\frac{1}{\xi} \frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \frac{1}{\tau_r^2} \left(\frac{2}{\xi^2} - 1\right) \frac{1}{\xi^4}, \quad (46)$$

где

$$\xi = \frac{a(\tau)}{a_{\min}}; \quad \tau_r = \left(\frac{3}{8\pi G \rho_{\max}}\right)^{1/2}.$$

Решением уравнения (45) является

$$\frac{\tau}{\tau_r} = \frac{1}{2} \left\{ \xi(\xi^2 - 1)^{1/2} + \ln[\xi + (\xi^2 - 1)^{1/2}] \right\}. \quad (47)$$

При $\xi - 1 \ll 1$ ($\tau \ll \tau_r$) имеем

$$a \simeq a_{\min} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{\tau_r}\right)^2 - \frac{7}{24} \left(\frac{\tau}{\tau_r}\right)^4 \right\}.$$

Горизонт частиц при этом равен

$$R(\tau) = a(\tau) \int_0^\tau \frac{c d\tau'}{a(\tau')} \simeq c\tau \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\tau^2}{\tau_r^2}\right).$$

Ускоренное расширение происходит, согласно (46), до значений $\xi = \sqrt{2}$, т. е. $a = \sqrt{2} a_{\min}$ за время

$$\tau_{\text{in}} = \tau_r \frac{1}{2} (\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})) \simeq 1,15 \tau_r.$$

Величина \dot{a}/a достигает своего максимального значения $[\dot{a}/a]_{\max} = 2/3\sqrt{3}\tau_r$ несколько раньше: при $a/a_{\min} = \sqrt{3/2}$ и при $\tau \sim 0,762 \tau_r$. Большое ускорение при росте масштабного фактора от его минимального значения $(\ddot{a}/a)_0 = 1/\tau_r^2$ связано с эффективными силами, возникающими из-за различия хода времени t и τ (см. уравнение (35)), обусловленного действием гравитации. Именно эти силы приводят к членам m^2/a^6 в уравнениях (40),

(41). При $\tau > \tau_{\text{in}}$ ускорение сменяется замедлением. При $\xi \gg 1$ расширение (47) выходит на фридмановский режим, соответствующий радиационно-доминантной стадии

$$a_{(\tau)} = a_{\text{min}} \xi \simeq a_{\text{min}} \left(\frac{2\tau}{\tau_r} \right)^{1/2}$$

и известной для этого режима зависимости

$$\rho \simeq \rho_r(\tau) = \frac{3}{32\pi G \tau^2}, \quad \tau \gg \tau_r. \quad (48)$$

Для того чтобы в первые секунды после начала расширения выполнялись законы первичного нуклеосинтеза, достаточно, чтобы величина $\tau_r \lesssim 10^{-2}$ с. Соответствующее этому требованию ограничение на величину ρ_{max} довольно слабое:

$$\rho_{\text{max}} > 2 \cdot 10^{10} \text{ Г} \cdot \text{см}^{-3}.$$

Значение ρ_{max} при энергиях $kT \simeq 1$ ТэВ, соответствующих электрослабой шкале, с учетом всех степеней свободы лептонов, кварков и т. д. составляет

$$\rho_{\text{max}} \simeq 10^{31} \text{ Г} \cdot \text{см}^{-3},$$

а на шкале Великого объединения $kT \simeq 10^{15}$ ГэВ

$$\rho_{\text{max}} \simeq 10^{79} \text{ Г} \cdot \text{см}^{-3}.$$

13. ПОЛНАЯ ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ ВЕЩЕСТВА И МАССА ГРАВИТОНА

Пусть a_0 — современное значение масштабного множителя, а ρ_c^0 — критическая плотность, связанная с современным значением постоянной Хаббла $H = \left((1/a)(da/dt) \right)_0$ соотношением

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_c^0.$$

Вводя переменную

$$x = \frac{a}{a_0}$$

и отношение плотностей

$$\Omega_r^0 = \frac{\rho_r^0}{\rho_c^0}; \quad \Omega_m^0 = \frac{\rho_m^0}{\rho_c^0}; \quad \Omega_q^0 = \frac{\rho_q^0}{\rho_c^0},$$

можно с учетом соотношения (43) записать уравнения (40), (41) в виде

$$\left(\frac{1}{x} \frac{dx}{d\tau}\right)^2 = H^2 \left\{ \frac{\Omega_r^0}{x^4} + \frac{\Omega_m^0}{x^3} + \frac{\Omega_q^0}{x^{3\nu}} - \frac{f^2}{6} \left(1 - \frac{3}{2\beta^4 a^2} + \frac{1}{2a^6}\right) \right\}; \quad (49)$$

$$\left(\frac{1}{x} \frac{d^2 x}{d\tau^2}\right) = -\frac{H^2}{2} \left\{ \frac{2\Omega_r^0}{x^4} + \frac{\Omega_m^0}{x^3} - 2 \left(1 - \frac{3\nu}{2}\right) \frac{\Omega_q^0}{x^{3\nu}} + \frac{f^2}{3} \left(1 - \frac{1}{a^6}\right) \right\}, \quad (50)$$

где

$$f = \frac{m}{H} = \frac{m_g c^2}{\hbar H}. \quad (51)$$

Для современного значения величин при $a_0 \gg 1$ уравнение (49) дает соотношение

$$1 = \Omega_{\text{tot}}^0 - \frac{f^2}{6},$$

т. е. полная относительная плотность равна

$$\Omega_{\text{tot}}^0 = \frac{\rho_{\text{tot}}^0}{\rho_c^0} = \Omega_r^0 + \Omega_m^0 + \Omega_q^0 = 1 + \frac{f^2}{6}. \quad (52)$$

Таким образом, Вселенная, обладающая (по РТГ) евклидовой пространственной геометрией, должна иметь $\Omega_{\text{tot}}^0 > 1$, в то время как в теориях с первоначальным инфляционным расширением, приводящим к плоской геометрии, должно с большой точностью ($\sim 10^{-5}$) выполняться условие $\Omega_{\text{tot}}^0 = 1$. Уравнение (52) предоставляет возможность оценить массу гравитона по новейшим экспериментальным измерениям Ω_{tot}^0 и H .

14. ВЕРХНИЙ ПРЕДЕЛ НА МАССУ ГРАВИТОНА

Определение космологических параметров исходя из наблюдения угловой асимметрии микроволнового реликтового излучения (СМВ) [1] систематически приводит к среднему значению $\Omega_{\text{tot}}^0 > 1$. Это относится как к первым количественным экспериментам COBE [3], «Maxima 1» [4] и «Boomerang-98» [5], совместная обработка результатов которых [23] дает значение $\Omega_{\text{tot}}^0 = 1,11 \pm 0,07$, так и к эксперименту WMAP [24], превосходные данные которого (без привлечения данных по наблюдению сверхновых SN1a [1, 2] и каталога галактик (2dFGRS [9] и SDSS [10])) дают в зависимости от выбора параметров значения $\Omega_{\text{tot}}^0 = 1,095_{-0,144}^{+0,094}$ и $\Omega_{\text{tot}}^0 = 1,086_{-0,128}^{+0,057}$ [24]. В пределах ошибок эти значения, разумеется, не противоречат значению $\Omega_{\text{tot}}^0 = 1$, вытекающему из модели инфляции, однако они могут указывать и на существование ненулевой массы гравитона согласно соотношениям (51), (52). Во

всяком случае, если взять значение $\Omega_{\text{tot}}^0 = 1,3$, более чем на 2σ превышающее среднее значение Ω_{tot}^0 , мы получаем из (51), (52) с вероятностью 95 % верхний предел на массу гравитона.

Величину f из (51) удобно представить в виде отношения массы гравитона к величине

$$m_H = \frac{\hbar H}{c^2} = 3,80 \cdot 10^{-66} h,$$

которую можно было бы назвать «массой Хаббла». При $f^2/6 = 0,3$ верхний предел на массу гравитона составляет

$$m_g \leq 1,34 m_H \approx 5,1 \cdot 10^{-66} h \text{ г}$$

или, при $h = 0,70$,

$$m_g < 3,6 \cdot 10^{-66} \text{ г.} \quad (53)$$

Комптоновская длина гравитона оказывается сравнимой с хаббловским радиусом Вселенной c/H :

$$\frac{\hbar}{m_g c} \lesssim 0,75 \frac{c}{H}.$$

Полученные ранее оценки верхнего предела на массу гравитона были основаны на том, что гравитационный потенциал при наличии ненулевой массы гравитона должен иметь форму потенциала Юкавы. Исходя из анализа динамики кластеров галактик и консервативных оценок расстояний (~ 580 кпк), на которых еще существует гравитационная связь между галактиками в кластерах, в работах [38, 39] был получен верхний предел на массу гравитона

$$m_g < 2 \cdot 10^{-62} \text{ г.}$$

Наша оценка (53) более чем в 5000 раз усиливает указанное ограничение. Это связано с тем, что последовательное рассмотрение гравитационного поля в пространстве Минковского включает в себя не только уравнение (1), согласно которому потенциал слабого гравитационного поля имеет форму потенциала Юкавы, но и общие уравнения гравитации (25), (26), согласующиеся со всеми гравитационными явлениями в Солнечной системе и применимые ко всей Вселенной, т. е. на расстояниях порядка $c/H \simeq 10^{28}$ см, в 5000 раз больших, чем расстояния между гравитационно связанными галактиками в кластерах.

15. ИНТЕГРАЛ ЭВОЛЮЦИИ ВСЕЛЕННОЙ И МАКСИМАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ МАСШТАБНОГО ФАКТОРА

Воспользовавшись соотношением (42), можно исключить давление p из уравнения (41) и привести его к виду

$$\frac{1}{a} \frac{d^2 a}{d\tau^2} = \frac{4\pi G}{3} \left(a \frac{d\rho}{da} + 2\rho \right) - \frac{1}{6} m^2 \left(1 - \frac{1}{a^6} \right),$$

а в дальнейшем записать его в форме

$$\frac{d^2 a}{d\tau^2} + \frac{dV}{da} = 0, \quad (54)$$

где

$$V = -\frac{4\pi G}{3} a^2 \rho + \frac{m^2}{12} \left(a^2 + \frac{1}{2a^4} \right). \quad (55)$$

Умножив обе части уравнения (54) на $da/d\tau$, получим

$$\frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{da}{d\tau} \right)^2 + V \right] = 0,$$

или

$$\frac{1}{2} \left(\frac{da}{d\tau} \right)^2 + V = E = \text{const}. \quad (56)$$

Выражение (56) напоминает энергию единичной массы. Если бы величина a имела размерность длины, то первый член в (56) соответствовал бы кинетической энергии, а второй — потенциальной. Величина $-\frac{4\pi G}{3} \rho a^2$ в (55) соответствует гравитационному потенциалу на границе шара с радиусом a , заполненному веществом с постоянной плотностью ρ , а дополнительные члены в (55), пропорциональные m^2 , — эффективным силам, возникающим, как было отмечено выше, из-за влияния гравитации на ход времени.

Величина E является интегралом эволюции Вселенной. Она крайне мала, но при $m \neq 0$ отлична от нуля. Выразив $\left(\frac{da}{d\tau} \right)^2$ в равенстве (56) из уравнения (40), получим

$$E = \frac{m^2}{8\beta^4}. \quad (57)$$

Таким образом, постоянная β (см. (33)), входящая в интервал (36) и, согласно (39), ограничивающая рост масштабного фактора a , выражается через интеграл движения E .

В дальнейшем нам понадобится современное значение масштабного фактора a_0 . Оценку этой величины можно получить из следующих соображений. Предполагая, что эволюция Вселенной начинается в радиационно-доминантную эпоху, для отношения $\frac{a_0}{a_{\min}}$ имеем

$$\frac{a_0}{a_{\min}} = \left(\frac{\rho_{\max}}{\rho_r^0} \right)^{1/4},$$

где ρ_r^0 — современная плотность радиационной энергии. В свою очередь, ρ_r^0 может быть выражена через относительную плотность Ω_r^0 и критическую плотность ρ_c^0 :

$$\rho_r^0 = \Omega_r^0 \rho_c^0 = \Omega_r^0 \left(\frac{3H^2}{8\pi G} \right).$$

Таким образом,

$$\frac{a_0}{a_{\min}} = \left(\frac{8\pi G \rho_{\max}}{3 H^2 \Omega_r^0} \right)^{1/4} \approx 1,34 \cdot 10^{10} (G \rho_{\max})^{1/4},$$

где $G \rho_{\max}$ выражено в секундах в минус второй степени. (При вычислении числового множителя в указанном выражении использовалось стандартное значение $H = h/3,0857 \cdot 10^{17}$ с и $\Omega_r^0 = \Omega_\gamma^0 = 2,471 \cdot 10^{-5}/h^2$.)

Используя далее определение (51), можно представить значение a_{\min} , указанное в (44), в виде

$$a_{\min} = \left(\frac{f^2}{6} \right)^{1/6} \left(\frac{3}{16\pi} \frac{H^2}{G \rho_{\max}} \right)^{1/6} = 8,21 \cdot 10^{-7} \left(\frac{f^2}{6} \right)^{1/6} \frac{1}{(G \rho_{\max})^{1/6}},$$

где согласно (52)

$$\frac{f^2}{6} = \Omega_{\text{tot}}^0 - 1,$$

a_{\min} на электрослабой шкале равно

$$a_{\min} \simeq 5 \cdot 10^{-11},$$

а на шкале Великого объединения —

$$a_{\min} \simeq 5 \cdot 10^{-19}.$$

Для величины a_0 из соотношения $\frac{a_0}{a_{\min}}$ имеем

$$a_0 = \left(\frac{f^2}{6}\right)^{1/6} \left(\frac{2\pi G\rho_{\max}}{3H^2}\right)^{1/12} \frac{1}{(\Omega_r^0)^{1/4}} \simeq 1,1 \cdot 10^4 \left(\frac{f^2}{6}\right)^{1/6} (G\rho_{\max})^{1/12}, \quad * \quad (58)$$

a_0 при ρ_{\max} , взятом на электрослабой шкале, равно

$$a_0 \simeq 5 \cdot 10^5,$$

а на шкале Великого объединения —

$$a_0 \simeq 5,5 \cdot 10^9.$$

Как уже отмечалось выше (см. разд. 10), в РТГ приобретает смысл абсолютная величина масштабного фактора. При среднем значении $\Omega_{\text{tot}} = 1,02$ (т. е. $f^2/6 = 0,02$) и $\rho_{\max} \gtrsim 10^{10} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ величина $a_0 \gg 1$. Это оправдывает приближения, сделанные при выводе равенства (52).

16. НЕСОВМЕСТИМОСТЬ РТГ С СУЩЕСТВОВАНИЕМ ПОСТОЯННОГО КОСМОЛОГИЧЕСКОГО ЧЛЕНА (Λ CDM-ТЕОРИЯ). НЕОБХОДИМОСТЬ КВИНТЭССЕНЦИИ С $\nu > 0$

Как уже отмечалось, при рассмотрении гравитационного поля в качестве физического поля в пространстве Минковского необходимо потребовать выполнения принципа причинности. Это требование, примененное к эволюции Вселенной, приводит к неравенству (39), согласно которому масштабный фактор ограничен неравенством $a \leq a_{\max} = \beta$. Другими словами, согласно РТГ, невозможно неограниченное расширение Вселенной. Математический аппарат РТГ автоматически обеспечивает выполнение этого условия в случае, когда плотность материи уменьшается с увеличением масштабного фактора. Действительно, структура члена, пропорционального m_g^2 , в уравнении (40) такова, что благодаря положительной определенности левой части уравнения

*При численной оценке в качестве относительной плотности релятивистских частиц Ω_r^0 взята относительная плотность микроволнового релятивистского излучения Ω_γ^0 , поскольку из данных по нейтринным осцилляциям следует, что по крайней мере два типа нейтрино в настоящее время являются нерелятивистскими. При экстраполяции к ранней Вселенной следовало бы, конечно, учитывать, что температура реликтового излучения в ходе эволюции повысилась за счет аннигиляции e^+e^- , до момента аннигиляции она была равна температуре нейтринного газа, который в то время также состоял из релятивистских нейтрино и вносил свой вклад в общую плотность релятивистских частиц. Точно так же при экстраполяции к ранней Вселенной повышается плотность релятивистского газа за счет релятивизации других рождающихся частиц. Однако благодаря тому, что величина Ω_r^0 входит в (58) в виде $(\Omega_r^0)^{1/4}$, численная оценка (58) изменится не более чем в три раза (даже если предположить, что число степеней свободы в релятивистском газе около 100).

третий член в скобках обеспечивает отсутствие космологической особенности при $a \ll 1$, а первый член ограничивает минимальное значение плотности материи (и тем самым сверху величину масштабного фактора) при $a \gg 1$. Условие $(8\pi G/3)\rho - m^2/6 = 0$, записанное в виде $(H^2/\rho_c^0)\rho - m^2/6 = 0$ (где H — современное значение постоянной Хаббла), приводит к равенству $\rho_{\min} = (m^2/6H^2)\rho_c^0$, или, в другой форме,

$$\frac{\rho_{\min}}{\rho_c^0} = \frac{f^2}{6} = \Omega_{\text{tot}}^0 - 1. \quad (59)$$

Полевая теория гравитации оказывается несовместимой с существованием постоянного космологического члена, приводящего к неограниченному расширению Вселенной. Действительно, при $a \gg 1$ из уравнения (49) следует

$$\Omega_{\Lambda}^0 < \frac{f^2}{6}.$$

Однако это неравенство несовместимо с условием

$$\Omega_{\Lambda}^0 > \frac{f^2}{6},$$

которое требуется, чтобы в настоящую эпоху, согласно уравнению (50), существовало ускоренное расширение.

Таким образом, единственной возможностью объяснения в рамках РТГ наблюдаемого в настоящее время ускоренного расширения Вселенной является существование квинтэссенции с $\nu > 0$ или какой-либо другой субстанции, плотность которой уменьшается с увеличением масштабного фактора (но не быстрее чем const/a^2). РТГ исключает возможность существования как постоянного космологического члена ($\nu = 0$), так и «фантомного» расширения ($\nu < 0$) [40].

17. НАЧАЛО И КОНЕЦ СОВРЕМЕННОГО УСКОРЕННОГО РАСШИРЕНИЯ. ВРЕМЯ МАКСИМАЛЬНОГО РАСШИРЕНИЯ ВСЕЛЕННОЙ

Самые сильные ограничения на величину $\Omega_{\text{tot}}^0 = 1,018_{-0,022}^{+0,013}$, полученные в эксперименте WMAP [24] в рамках Λ CDM-модели с привлечением данных из каталога галактик SDSS и данных по сверхновым SN1a в пределах 1σ , допускают значение $\Omega_{\text{tot}}^0 = 1,03$. Эта разность в РТГ, согласно соотношениям (51), (52), определяет массу гравитона

$$m_g = 0,424 m_H = 1,6 \cdot 10^{-66} h.$$

В дальнейшем мы для определенности будем использовать именно это значение массы гравитона. Поскольку к началу эпохи современного ускорения $\Omega_r \ll \Omega_m$ и $a \gg 1$, то начало и конец ускоренного расширения определяются, согласно (50), корнями $x_1 < 1 < x_2$ уравнения $F(x) = 0$, где функция $F(x)$ равна

$$F(x) = \frac{\Omega_m^0}{x^3} - 2 \left(1 - \frac{3\nu}{2}\right) \frac{\Omega_q^0}{x^{3\nu}} + \frac{f^2}{3}.$$

При этом величина первого корня x_1 связана с красным смещением Z_1 , соответствующим началу эпохи ускорения

$$\frac{1}{x_1} = \frac{a_0}{a_1} = Z_1 + 1.$$

Время от начала расширения Вселенной до начала современного ускорения можно установить из уравнения (49). Пренебрегая продолжительностью радиационно-доминантной эпохи и значением масштабного фактора a к концу ее, имеем

$$\tau_1 \approx \frac{1}{H} \int_0^{x_1} \frac{dx}{x[\Phi(x)]^{1/2}} = \frac{1}{H} \int_{Z_1+1}^{\infty} \frac{dy}{y(\Omega_m^0 y^3 + \Omega_q^0 y^{3\nu} - f^2/6)^{1/2}},$$

где

$$\Phi(x) = \frac{\Omega_m^0}{x^3} + \frac{\Omega_q^0}{x^{3\nu}} - \frac{f^2}{6}.$$

Соответственно, время окончания эпохи ускоренного расширения и перехода к замедлению равно

$$\tau_2 = \frac{1}{H} \int_0^{x_2} \frac{dx}{x[\Phi(x)]^{1/2}},$$

а современный возраст Вселенной τ_0

$$\tau_0 = \frac{1}{H} \int_0^1 \frac{dx}{x[\Phi(x)]^{1/2}}.$$

Физическое расстояние, пройденное светом (горизонт частиц) к настоящему моменту времени, определяется выражением

$$\begin{aligned} D_{\text{part}}(\tau_0) &= \\ &= \frac{c}{H} \int_1^{a_0/a_{\text{min}}} dy \frac{1}{[\Omega_r^0 y^4 + \Omega_m^0 y^3 + \Omega_q^0 y^{3\nu} - f^2/6 (1 + y^6/2a_0^6)]^{1/2}} \simeq \frac{2}{\sqrt{\Omega_m^0}} \frac{c}{H}. \end{aligned}$$

Эта величина определяет размер наблюдаемой Вселенной к настоящему времени. Качественно (без соблюдения масштабов) временная зависимость масштабного фактора a , скорости его изменения \dot{a} и ускорения \ddot{a} представлена на рис. 1. Вначале масштабный фактор от своего минимального значения a_{\min}

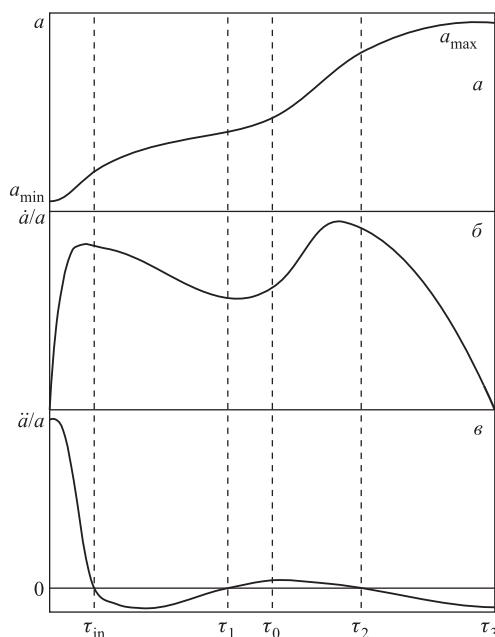


Рис. 1. Качественные кривые зависимости масштабного фактора (a), скорости (\dot{a}) и ускорения (\ddot{a}) от времени τ . Здесь $\tau_{\text{in}} = 1,15\tau_r$. Через τ_0 обозначен современный момент времени

увеличивается с очень большим ускорением, которое за достаточно короткое время τ_{in} обращается в ноль. Скорость в этот промежуток времени увеличивается от нуля до максимального значения. Масштабный фактор в течение этого промежутка времени изменяется незначительно: $a(\tau_{\text{in}}) = \sqrt{2}a_{\min}$. Далее происходит расширение с отрицательным ускорением, которое обращается в некоторый момент времени τ_1 в ноль. Значение скорости при этом падает, и несколько позже τ_1 она достигает своего минимального значения. Масштабный фактор на этом отрезке времени продолжает возрастать (расширение продолжается). Движение с положительным ускорением продолжается до момента времени τ_2 . Скорость и масштабный фактор при этом увеличиваются. При $\tau > \tau_2$ опять происходит расширение с отрицательным ускорением, в момент времени τ_3 расширение останавливается. Масштаб-

ный фактор достигает при этом своего максимального значения. На этом полуцикл завершается, и все повторяется в обратном порядке — эпоха расширения сменяется эпохой сжатия. Для величины \dot{a}/a первый максимум расположен при $a = \sqrt{3/2} a_{\min}$ ($\tau \sim 0,76 \tau_r$), несколько ранее τ_{in} , точно так же как второй максимум — ранее τ_2 . Минимум \dot{a}/a , наоборот, располагается позже τ_1 . Это следует из того, что величина $(d/d\tau)(\dot{a}/a) = \ddot{a}/a - \dot{a}^2/a$ при $\ddot{a} = 0$ отрицательна.

Исходя из космологических параметров, определенных (в пределах ошибок) в первых публикациях WMAP [7, 8], и допустимой области изменения $\nu > 0$ в работе [25] были определены возможные значения времен, отвечающих началу современного ускорения, его смене на замедление и максимальному расширению. При этом оказалось полезным определять области допустимых значений космологических параметров как функции параметра Хаббла h , для которого современные независимые измерения дают ограниченную область его возможных значений. Эти результаты представлены на рис. 2, 3 и в табл. 1.

Таблица 1. Время начала ускоренного расширения Вселенной τ_1 , время его окончания τ_2 и время максимального расширения (полупериод осцилляции) τ_{\max} (10^9 лет)

ν	τ_1	τ_2	τ_{\max}
0,05	7,0–8,2	980–1080	1220–1360
0,10	7,0–8,2	440–485	620–685
0,15	7,1–8,3	275–295	430–460
0,20	7,1–8,3	190–205	325–347
0,25	7,2–8,5	142–149	263–280
0,30	7,5–8,7	109–113	227–235

Из приведенных на рис. 2, 3 графиков видно, что время начала ускорения τ_1 не очень чувствительно к величине массы гравитона и значению параметра ν и остается в пределах $(7-8) \cdot 10^9$ лет. При этом наименьшему значению $\tau_1 \approx 7 \cdot 10^9$ лет отвечают наибольшие значения параметра h , совместимые с выбранным интервалом возраста Вселенной. Возникновение ускорения начиная с $\tau_1 \approx 7 \cdot 10^9$ лет объясняет известный наблюдательный парадокс, заключающийся в справедливости закона расширения Хаббла уже на сравнительно малых расстояниях, порядка нескольких десятков мегапарсек (см., например, [41]). С ростом ν область изменения h , соответствующая выбранному интервалу возраста Вселенной, смещается в сторону меньших значений h . Так, при $\nu = 0,05$ она составляет $0,65 \leq h \leq 0,71$, а при $\nu = 0,2$ $0,64 \leq h \leq 0,69$.

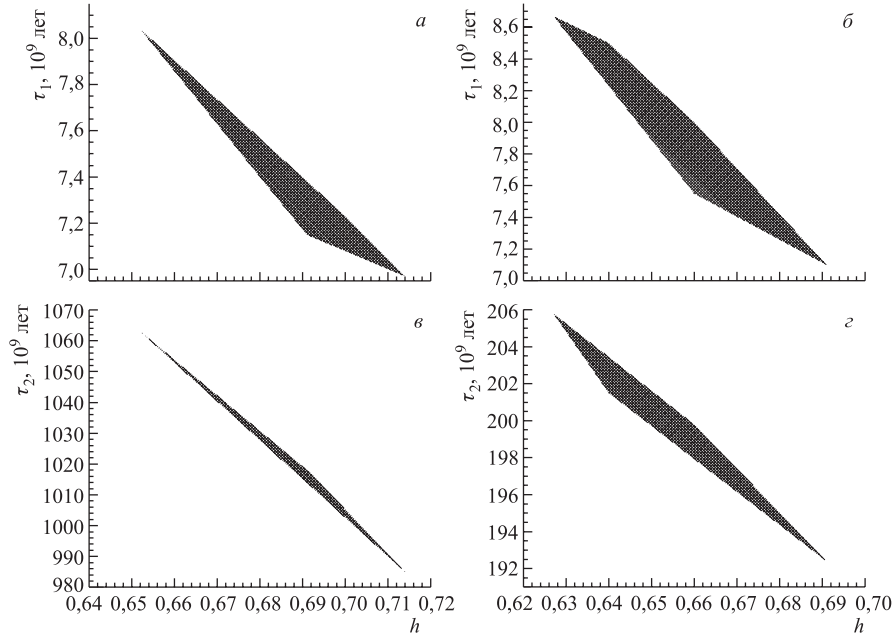


Рис. 2. Возможные значения начала (τ_1) (а, б) и конца (τ_2) (в, г) ускоренного расширения Вселенной в зависимости от величины постоянной Хаббла h ; $\Omega_{\text{tot}} = 1,04$; $13,5 \cdot 10^9 < \tau_0 < 13,9 \cdot 10^9$ лет; $0,126 < \omega_m < 0,143$ при $\nu = 0,05$ (а, в) и $\nu = 0,2$ (б, г)

Время, соответствующее концу ускоренного расширения и началу замедления, приводящего к остановке расширения, сильно зависит от параметра ν (см. табл. 1). Масштабный фактор, отвечающий остановке расширения x_{max} , определяется корнем уравнения (49) и при малых ν с хорошей точностью равен

$$x_{\text{max}} \simeq \left(\frac{6\Omega_q^0}{f^2} \right)^{1/3\nu} = \left(\frac{\Omega_q^0}{\Omega_{\text{tot}}^0 - 1} \right)^{1/3\nu}. \quad (60)$$

Подставляя в это выражение значение a_0 из формулы (58), находим

$$a_{\text{max}}^4 = \frac{1}{\Omega_r^0} \left(\frac{f^2}{6} \right)^{2/3} \left(\frac{2\pi G\rho_{\text{max}}}{3H^2} \right)^{1/3} \left(\frac{\Omega_q^0}{\Omega_{\text{tot}}^0 - 1} \right)^{4/3\nu}.$$

Принимая во внимание это равенство и учитывая, что интеграл движения равен

$$E = \frac{m^2}{8a_{\text{max}}^4},$$

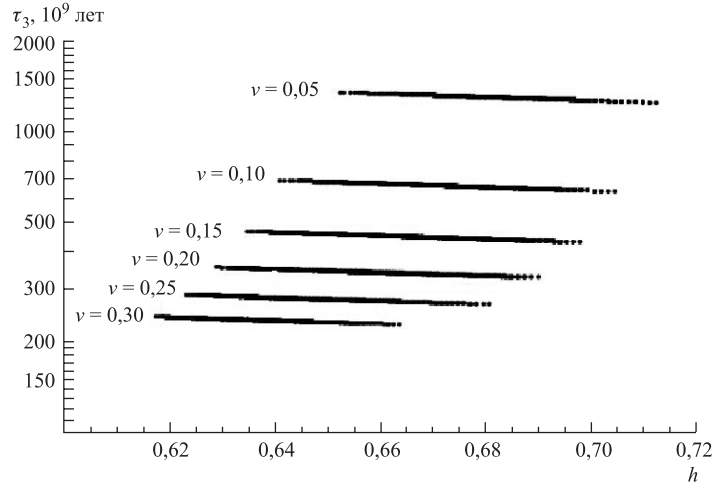


Рис. 3. Зависимость времени максимального расширения Вселенной от величины постоянной Хаббла h для различных значений ν при $\Omega_{\text{tot}} = 1,04$; $13,5 \cdot 10^9 < \tau_0 < 13,9 \cdot 10^9$ лет; $0,126 < \omega_m < 0,143$

получаем

$$E = \frac{m^2}{8} \Omega_r^0 \left(\frac{6}{f^2} \right)^{2/3} \left(\frac{3}{2\pi} \frac{H^2}{G\rho_{\text{max}}} \right)^{1/3} \left(\frac{\Omega_{\text{tot}}^0 - 1}{\Omega_q^0} \right)^{4/3\nu}.$$

Отсюда видно, что интеграл движения эволюции Вселенной является очень малой величиной. Используя выражение для x_{max} , легко определить относительное ускорение притяжения в момент остановки расширения

$$\frac{\ddot{a}}{a} \sim -\frac{\nu}{4} \left(\frac{m_g c^2}{\hbar} \right)^2,$$

а поэтому скалярная кривизна R равна

$$R = \frac{3\nu}{2c^2} \left(\frac{m_g c^2}{\hbar} \right)^2.$$

В указанном приближении x_{max} связан с масштабным фактором x_2 , отвечающим окончанию ускоренного расширения, соотношением

$$x_2 = \left(1 - \frac{3}{2}\nu \right)^{1/3\nu} x_{\text{max}} \approx \frac{1}{\sqrt{e}} x_{\text{max}}.$$

Время, отвечающее остановке расширения (полупериод осцилляции) при выбранном в [25] значении массы гравитона $m_g = 0,49 m_H$ составляет при

$\nu = 0,05$ около $1300 \cdot 10^9$ лет, при $\nu = 0,10$ — около $650 \cdot 10^9$ лет и при $\nu = 0,25$ — около $270 \cdot 10^9$ лет (см. рис. 3 и табл. 1).

Существенно, что относительное минимальное значение плотности (ρ_{\min}/ρ_c^0), отвечающей максимуму расширения, зависит только от величины $\Omega_{\text{tot}}^0 - 1$, т. е. от массы гравитона (см. (52), (53)). При $\Omega_{\text{tot}}^0 = 1,02$ величина ρ_{\min} довольно велика и даже намного превосходит *современную плотность радиации*. В работе [25] авторы исходили из приведенного в [7, 8] современного возраста Вселенной — $(13,7 \pm 0,2) \cdot 10^9$ лет. Эта величина вычислена в [7, 8] в основном из Λ CDM-модели. Очень важно, что новейшие наблюдения SN1a [42, 43] в области $Z \gtrsim 1$ могут дать *непосредственную информацию* о начале современного ускорения. Такие данные были получены в превосходной работе А. Рисса и др. [43]. Согласно [43], замедление сменилось на современное ускорение при значениях красного смещения

$$Z = 0,46 \pm 0,13.$$

Этот результат согласуется с излагаемой картиной эволюции. Он позволяет непосредственно получить значение x_1 (см. (17)) и уточнить допустимую область космологических параметров (см. приложение 3)*.

Расширение до максимального значения масштабного фактора и последующее за ним сжатие приводят к осциллирующему характеру эволюции Вселенной. Идея об осциллирующем характере эволюции Вселенной неоднократно выдвигалась ранее исходя преимущественно из философских соображений (см., например, [44–46]). Такой режим, в принципе, мог бы ожидаться в закрытой модели Фридмана с $\Omega_{\text{tot}} > 1$. Однако этому препятствуют, во-первых, непреодолимая трудность, связанная с переходом через космологическую особенность, а во-вторых, соображения, связанные с ростом энтропии от цикла к циклу [46]. Следует подчеркнуть, что в рамках уравнений Гильберта–Эйнштейна плоская Вселенная не может быть осциллирующей**. В РТГ для бесконечной Вселенной указанные трудности снимаются. *Поскольку в РТГ сингулярность отсутствует, то Вселенная могла существовать бесконечное время, в течение которого происходило взаимодействие*

*Отметим, что расстояние до сверхновых D_L , определяемое с помощью соотношения $F = L/4\pi D_L^2$, где L — светимость стандартной SN1a, а F — наблюдаемый поток от нее, выражается через космологические параметры РТГ соотношением

$$D_L = \frac{c}{H} (Z + 1) \int_1^{1+Z} \left[\Omega_m^0 y^3 + \Omega_q^0 y^{3\nu} - \frac{f^2}{6} \right]^{-1/2} dy.$$

**Работа [47] о циклической эволюции Вселенной ошибочна, так как приведенное в ней «решение» в действительности не является решением исходной системы уравнений Гильберта–Эйнштейна, что можно проверить непосредственной подстановкой.

между ее областями, что и привело к однородности и изотропии Вселенной с некоторой структурой неоднородности, которую мы для простоты исследования не учитывали.

Привлекательность осциллирующей эволюции Вселенной отмечена в недавней работе [48]. Осциллирующий режим осуществляется в ней за счет введения скалярного φ -поля, взаимодействующего с веществом, и использования идеи дополнительной размерности. При этом высказываются важные соображения о том, что фаза ускоренного расширения способствует сохранению энтропии в повторяющихся циклах эволюции. В РТГ осциллирующий характер эволюции Вселенной достигается в результате одного лишь рассмотрения гравитационного поля с массой гравитона как физического поля, генерируемого суммарным тензором энергии-импульса в пространстве Минковского.

Приложение 1 КОВАРИАНТНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ПЛОТНОСТИ ТЕНЗОРА В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО (γ -ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ)

Поскольку величина $\sqrt{-\gamma}$ не является скаляром, плотность тензора $\tilde{A}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}A^{\mu\nu}$, вообще говоря, не является тензором. Однако ковариантное дифференцирование плотности тензора можно определить, исходя из следующих соображений. Ковариантная производная тензора $A^{\mu\nu}$ удовлетворяет соотношению

$$\sqrt{-\gamma}D_\nu A^{\mu\nu} = \partial_\nu(\sqrt{-\gamma}A^{\mu\nu}) + \gamma_{\alpha\beta}^\mu \sqrt{-\gamma}A^{\alpha\beta}, \quad (61)$$

где $\gamma_{\alpha\beta}^\mu$ — символы Кристоффеля в пространстве Минковского. Поскольку $D_\nu \gamma_{\alpha\beta} = 0$, то $D_\nu \sqrt{-\gamma} = 0$. И всякий раз, когда будет возникать выражение $\sqrt{-\gamma}D_\nu A^{\mu\nu}$, его можно записать в виде

$$D_\nu \tilde{A}^{\mu\nu} = \partial_\nu \tilde{A}^{\mu\nu} + \gamma_{\alpha\beta}^\mu \tilde{A}^{\alpha\beta}. \quad (62)$$

Учитывая соотношение (4) для плотности тензора $\tilde{g}^{\mu\nu}$ в эффективном римановом пространстве, из соотношения (62) имеем

$$D_\nu \tilde{g}^{\mu\nu} = \partial_\nu \tilde{g}^{\mu\nu} + \gamma_{\alpha\beta}^\mu \tilde{g}^{\alpha\beta}.$$

Для метрики (32)

$$\sqrt{-g} = U^{1/2}V^{3/2}(1 - kr^2)^{-1/2}r^2 \sin \Theta,$$

$$\tilde{g}^{00} = V^{3/2}U^{-1/2}(1 - kr^2)^{-1/2}r^2 \sin \Theta,$$

$$\tilde{g}^{11} = -V^{1/2}U^{1/2}(1 - kr^2)^{1/2}r^2 \sin \Theta,$$

$$\tilde{g}^{22} = -V^{1/2}U^{1/2}(1 - kr^2)^{-1/2} \sin \Theta,$$

$$\tilde{g}^{33} = -V^{1/2}U^{1/2}(1 - kr^2)^{-1/2}(\sin \Theta)^{-1},$$

а ненулевые символы Кристоффеля в пространстве Минковского с метрикой (38) равны

$$\gamma_{22}^1 = -r; \quad \gamma_{33}^1 = -r \sin^2 \Theta,$$

$$\gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}; \quad \gamma_{33}^2 = -\sin \Theta \cos \Theta,$$

$$\gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}; \quad \gamma_{23}^3 = \text{ctg } \Theta.$$

Уравнение $D_\nu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0$ для $\mu = 0$ сводится к $\partial_0 \tilde{g}^{00} = 0$ и приводит к соотношению (33), для $\mu = 1$ оно принимает вид $\partial_1 \tilde{g}^{11} + \gamma_{\sigma\nu}^1 \tilde{g}^{\sigma\nu} = 0$, откуда вытекает соотношение (34), а для $\nu = 2$ и $\nu = 3$ уравнение $D_\nu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0$ выполняется тождественно.

Приложение 2 УРАВНЕНИЯ ЭВОЛЮЦИИ МАСШТАБНОГО ФАКТОРА

Для метрики (36) ненулевые символы Кристоффеля в римановом пространстве

$$\Gamma_{11}^0 = \beta^4 \dot{a}a; \quad \Gamma_{22}^0 = \beta^4 \dot{a}ar^2; \quad \Gamma_{33}^0 = \beta^4 \dot{a}ar^2 \sin^2 \Theta;$$

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a}; \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r};$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r; \quad \Gamma_{33}^1 = -r \sin^2 \Theta,$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\sin \Theta \cos \Theta, \quad \Gamma_{23}^3 = \text{ctg } \Theta;$$

$$\Gamma_{0\sigma}^\sigma = 3\frac{\dot{a}}{a}; \quad \Gamma_{1\sigma}^\sigma = \frac{2}{r}; \quad \Gamma_{2\sigma}^\sigma = \text{ctg } \Theta.$$

Компоненты тензора кривизны равны

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}; \quad R_{11} = \beta^4(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2); \quad R_{22} = R_{11}r^2; \quad R_{33} = R_{11}r^2 \sin^2 \Theta;$$

$$R_0^0 = -3\frac{\ddot{a}}{a}; \quad R_1^1 = R_2^2 = R_3^3 = -\frac{1}{a} \left(\ddot{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a} \right); \quad R_{0i} = 0;$$

$$R = -6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right),$$

а компоненты тензора энергии-импульса (37)

$$T_{00} = \rho; \quad T_{11} = \beta^4 a^2 p; \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p;$$

$$T = T_\alpha^\alpha = (\rho - 3p);$$

$$T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T = \frac{1}{2}(\rho + 3p); \quad T_{11} - \frac{1}{2}g_{11}T = \frac{1}{2}\beta^4 a^2(\rho - p).$$

Для получения уравнений эволюции масштабного фактора (40), (41) удобно использовать общее уравнение гравитации, записанное в форме (28), учитывая при этом, что одинаковая координата в пространстве Минковского и эффективном римановом пространстве требует при использовании времени τ (35), чтобы компонента метрического тензора γ_{00} пространства Минковского была взята равной $\gamma_{00} = 1/a^6$. Для временных компонент тензоров уравнение (28) приводит непосредственно к уравнению (41), а для пространственных компонент (с учетом уравнения (41)) — к уравнению (40). Из приведенного вывода становится ясно, что появление в уравнениях (40), (41) членов, пропорциональных $1/a^6$, связано с соотношением времен t и τ (35), поскольку выражение (38) принимает вид

$$d\sigma^2 = \frac{1}{a^6}d\tau^2 - dr^2 - r^2 d\Theta^2 - r^2 \sin^2 \Theta d\phi^2.$$

Приложение 3 НОВЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ

Все приведенные выше расчетные результаты получены в рамках экспериментальных данных, относящихся примерно к середине 2002 г. [7, 8]. Недавно вышла работа [24], обобщающая все экспериментальные данные по состоянию на конец 2003 г. Сравнивая эти два экспериментальных массива, нетрудно заметить, что данные претерпели существенные изменения. Например, в рамках последней работы [24] интервал возможных значений величины

$\omega_m = h^2 \Omega_m$ во многих случаях существенно расходитсся с интервалом ее возможных значений по состоянию на 2002 г.

Существенны и способы обработки экспериментальных данных. Важно обратить внимание, что там, где делались оценки параметра Ω_{tot} , параметр квинтэссенции ν всегда полагался тождественно равным нулю. И наоборот, при оценке параметра квинтэссенции величина Ω_{tot} всегда принималась тождественно равной единице. Никогда не проводилось совместной оценки этих параметров при одновременном рассмотрении их как *свободных* параметров. Тем не менее корреляция между этими двумя важнейшими величинами, безусловно, существует. Несколько позже мы вернемся к этому вопросу.

Для анализа согласия РТГ с современными экспериментальными данными мы выберем конкретные значения космологических параметров из работы [24] (колонка 5 в таблице на с. 9):

$$1,0 < \Omega_{tot} < 1,03; \quad 0,658 < \Omega_\Lambda < 0,729; \quad (63)$$

$$0,126 < \omega_m \equiv h^2 \Omega_m < 0,150.$$

Других ограничений, присутствующих в указанной таблице, накладывать не будем. Рассмотрим, в какой области РТГ допускает решения для других космологических параметров как при наложении условия $\nu \equiv 0$ (как в экспериментах WMAP), так и без него. Результаты приведены в табл. 2.

Таблица 2

Параметр	Интервал по WMAP	РТГ		
		$\nu = 0,005$	$\nu = 0,1$	$0 < \nu < 2/3$
h	0,596–0,727	0,59–0,735	0,59–0,73	0,59–0,73
$\tau_0, 10^9$ лет	13,2–15,1	13,15–15,05	12,95–14,8	<12,5 либо >15,5
$ q_0 $	—	0,46–0,58	0,35–0,48	0,05–0,65
Ω_m	0,272–0,370	0,275–0,365	0,275–0,365	0,275–0,365
Z_1^*	—	0,51–0,74	0,49–0,74	0,15–0,75

*Через Z_1 обозначена величина красного смещения в момент смены знака ускорения в эпоху, предшествующую современной.

Видно, что в предположениях WMAP согласие с РТГ более чем удовлетворительное (третья колонка)*. Однако если полагать $\nu \neq 0$, разли-

*Результаты расчета по РТГ в этой таблице справедливы с точностью $\pm(0,002-0,003)$. Это связано с размером сетки, на которой проводились расчеты.

чия могут быть существенными (четвертая колонка). Особенно это касается величины интервалов возможных значений современного возраста Вселенной τ_0 (и величины ускорения q_0). Это подчеркивает необходимость анализа экспериментальных данных при *одновременно* свободных параметрах Ω_{tot} и ν .

В экспериментальных данных WMAP не приводятся значения красного смещения Z_1 в момент смены знака ускорения (τ_1). В работе [42] эта величина определена исходя из данных по сверхновым SN1a, включающих $Z \gtrsim 1$,

$$Z_1 = 0,46 \pm 0,13. \quad (64)$$

Из табл. 2 видно, что в предположениях WMAP (в рамках РТГ это соответствует малым значениям $\nu \rightarrow 0$) центральное значение этой величины даже не попадает в расчетные ограничения, что вызывает некоторую настороженность. Перекрытие (в рамках одной σ) расчетных и экспериментальных значений имеется, но оно крайне незначительно. Однако если предположить параметр квинтэссенции ν свободной величиной, этот вопрос естественным образом снимается (см. таблицу). *Это еще один экспериментальный факт, подчеркивающий важность анализа экспериментальных данных при одновременно свободных параметрах Ω_{tot} и ν .*

Важно обратить внимание, что величина постоянной Хаббла h в рассмотренных вариантах остается в одних и тех же пределах, т. е. роль параметра квинтэссенции в данном случае не существенна — его предельные значения (в рассмотренных выше ограничениях) определяются предельными значениями других космологических параметров: ω_m и Ω_Λ .

Точное знание величины современного возраста Вселенной τ_0 важно не только само по себе, но и с точки зрения оценки возможных значений параметра квинтэссенции ν . Рассмотрим возможные значения h и ν при следующих экспериментальных ограничениях:

- 1) при ограничениях (63) (рис. 4, а);
- 2) предыдущий случай + ограничение (WMAP) на современный возраст Вселенной: $13,2 \cdot 10^9 < \tau_0 < 15,1 \cdot 10^9$ лет (рис. 4, б). Этот вариант практически совпадает с вариантом дополнительного наложения условия на красное смещение [43]: $Z = 0,46 \pm 2\sigma$;
- 3) вариант 2 + ограничение (64): $Z = 0,46 \pm 1\sigma$ (рис. 4, в);
- 4) максимально обобщенный вариант: $1,0 < \Omega_{\text{tot}} < 1,1$ при отсутствии ограничений на остальные параметры за исключением одного: $Z = 0,46 \pm 1\sigma$ (рис. 4, г).

Первые два варианта показывают практически одинаковые области допустимых значений h : $0,59 < h < 0,73$. Однако даже достаточно грубые ограничения на τ_0 дают существенное обрезание области допустимых значений ν при больших h (вариант 2). Область же возможных значений в первых

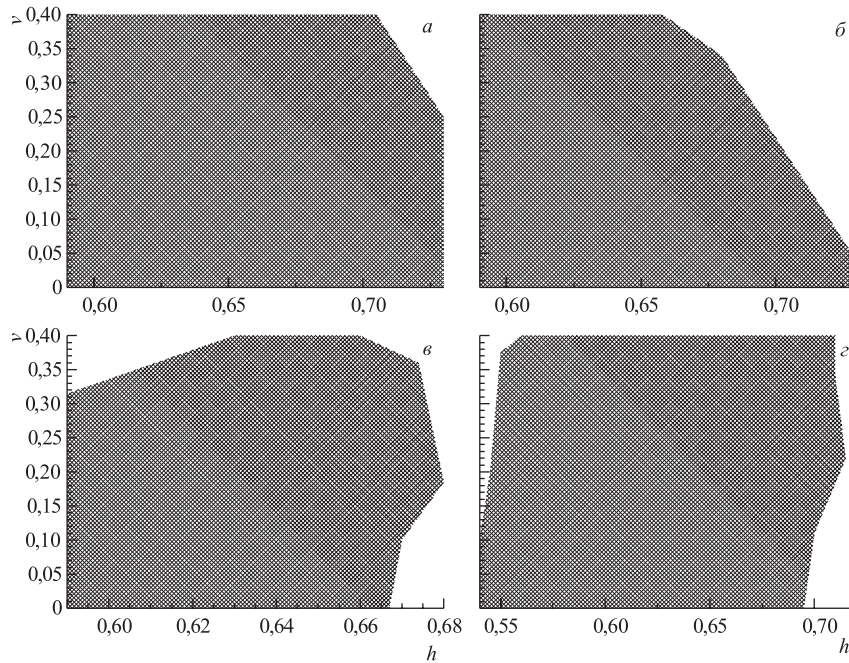


Рис. 4. Области возможных значений постоянной Хаббла h и параметра квинтэссенции ν при наложении различных экспериментальных ограничений (см. в тексте)

двух вариантах в целом охватывает всю область параметра квинтэссенции, допускаемой теорией: $0 < \nu < 2/3$.*

Картина существенно изменяется в варианте 3, при дополнительном наложении экспериментальных ограничений (64) на величину красного смещения Z . В этом случае:

- интервал возможных значений постоянной Хаббла резко уменьшается со стороны больших значений: $0,59 < h < 0,68$. Нижняя граница интервала при этом не изменяется;
- появляются ограничения на максимально возможное значение параметра квинтэссенции: $\nu \lesssim 0,43$;
- появляется область таких значений постоянной Хаббла, в которой параметр квинтэссенции принципиально не может обращаться в ноль (в данном случае $h \gtrsim 0,665$).

*Мы не приводили на графиках (для наглядности) области $\nu > 0,4$.

Последний фактор может иметь важное значение. Если потребовать условие строгого отсутствия нулевых значений параметра квинтэссенции ν , то постоянная Хаббла оказывается фиксированной в очень узких пределах.

Условие ограничения на параметр красного смещения оказывается очень сильным. Это видно из случая 4. Параметр квинтэссенции всегда отрывается от нулевого значения при достаточно низком значении верхнего предела красного смещения и при самых широких областях допустимых значений для остальных космологических параметров, т. е. при самых общих предположениях о величине всех космологических параметров существует минимальное значение постоянной Хаббла h_{\min} , при котором невозможно существование решений (в рамках РТГ) с нулевым значением параметра квинтэссенции.

Если еще раз вернуться к анализу экспериментальных данных WMAP, то следует строго отдавать себе отчет, что в настоящее время ни один из космологических параметров не известен с хорошей степенью точности. В этой связи следует обратить внимание на одну важную особенность решений, вытекающих из РТГ. Она состоит в следующем.

Если вообще не налагать никаких условий на значения космологических параметров (кроме самых общих), то при любых $\Omega_{\text{tot}} > 1$ область возможных решений в координатах $\nu(h)$ представляет собой «колокол» конечной ширины. Другими словами, существует отрезок (h_{\min}, h_{\max}) , на котором величина ν может принимать значения от 0 до $2/3$. Если мы хотим, чтобы величина h не принимала сколь угодно больших значений, т. е. чтобы всегда выполнялось условие $h_{\max} < h_0$, то это выполняется для всех значений $\Omega_{\text{tot}} > \Omega_0(h_0) > 1$. Причем Ω_0 является убывающей функцией от h_0 . Так, например, h никогда не превысит значения 0,8 при условии ограниченности общей плотности снизу* $\Omega_{\text{tot}} > 1,04$.

Конечно, это не является ограничением на массу гравитона снизу. Ограничить значение постоянной Хаббла сверху можно и за счет других космологических параметров. *Но это указывает на возможность удовлетворить практически любым значениям постоянной Хаббла h только за счет варьирования величиной массы гравитона.*

В заключение авторы выражают глубокую благодарность В. В. Ежеле, В. В. Киселеву, В. А. Петрову, Н. Е. Тюрину, Ю. В. Чугрееву за ценные обсуждения. Один из авторов (С. С. Герштейн) благодарен РФФИ за предоставление гранта 04-02-17530, а также Совету по грантам Президента РФ за предоставление гранта НШ-1303.2003.2.

*Подчеркиваем, при любых остальных космологических параметрах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ries A. G. et al.* // *Astron. J.* 1988. V. 116. P. 1009–1038.
2. *Perlmutter S. et al.* // *Nature.* 1998. V. 391. P. 51–54; *Astrophys. J.* 1999. V. 517. P. 565–586.
3. *Bennett C. L. et al.* // *Astrophys. J.* 1996. V. 64. P. L1–L4.
4. *Hanany S. et al.* // *Astrophys. J.* 2000. V. 545. P. L5–L9.
5. *Bernardis de P. et al.* // *Nature.* 2000. V. 404. P. 955–959.
6. *Benoit A. et al.* // *Astron. & Astrophys.* 2003. V. 399. P. L19–L23; L25–L30.
7. *Bennett C. L. et al.* // *Astrophys. J. Suppl.* 2003. V. 148. P. 1–28.
8. *Spergel D. N. et al.* // *Ibid.* P. 175–194.
9. *Percival W. J. et al.* // *MNRAS.* 2001. V. 327. P. 1297–1306;
Verde L. et al. // *MNRAS.* 2002. V. 335. P. 432–440;
Verde L. et al. // *Astrophys. J. Suppl.* 2003. V. 148. P. 195–212.
10. *York D. G. et al.* // *Astron. J.* 2000. V. 120. P. 1579–1587;
Stoughton C. et al. // *Astron. J.* 2002. V. 123. P. 485–548;
Abazajian K. et al. // *Astron. J.* 2003. V. 126. P. 2081–2086.
11. *Guth A. H.* // *Phys. Rev. D.* 1981. V. 23. P. 347–356; *Phys. Rev. Lett.* 1982. V. 49. P. 1110–1113.
12. *Linde A. D.* // *Phys. Lett. B.* 1982. V. 108. P. 389–393.
13. *Старобинский А. А.* // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 30, вып. 11. С. 719–723; *Phys. Lett. B.* 1982. V. 17. P. 175–194.
14. *Albrecht A., Steinhardt P. J.* // *Phys. Rev. Lett.* 1982. V. 48. P. 1220–1223.
15. *Peebles P. J. E., Ratra B.* // *Rev. Mod. Phys.* 2003. V. 75. P. 559–606.
16. *Caldwell R. R., Dave R., Steinhardt P. J.* // *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 80. P. 1582–1585.
17. *Логунов А. А., Мествиришвили М. А.* Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 1989. 304 с.
18. *Логунов А. А.* Теория гравитационного поля. М.: Наука, 2001. 238 с.;
Logunov A. A. The Theory of Gravity. М.: Nauka, 2001. 256 p.
19. *Kalashnikov V. L.* gr-qc/0109060; gr-qc/0202084.
20. *Логунов А. А., Мествиришвили М. А.* // ТМФ. 1984. Т. 61, № 3. С. 327–346.
21. *Ostriker J. P., Steinhardt P. J.* // *Nature.* 1995. V. 377. P. 600–602.
22. *Герштейн С. С., Логунов А. А., Мествиришвили М. А.* // Докл. РАН. 2003. Т. 390, № 6. С. 755–757.
23. *Jaffe A. H. et al.* // *Phys. Rev. Lett.* 2001. V. 86. P. 3475–3479.
24. *Tegmark M. et al.* // *Phys. Rev. D.* 2004. V. 69. P. 103501.
25. *Герштейн С. С. и др.* // ЯФ. 2004. Т. 67, № 8. С. 1618–1626.
26. *Эйнштейн А.* // Собр. науч. тр. М., 1965. Т. I.
27. *Thirring W.* // *Ann. Phys.* 1961. V. 16. P. 96–117.
28. *Rozen N.* // *Phys. Rev.* 1940. V. 57. P. 147–150.
29. *Rozen N.* // *Ibid.* 1940. V. 57. P. 150–153.
30. *Вагнер У. Г., Моринго Р. Ф., Фейнман Р. Ф.* Фейнмановские лекции по гравитации. М.: Янус-К, 2000. 296 с.

31. Эйнштейн А. // Собр. науч. тр. М., 1966. Т. II. С. 87.
32. Ogievetsky V. I., Polubarinov I. V. // Ann. Phys. 1965. V. 35. P. 167–208 and references therein.
33. Эйнштейн А. // Собр. науч. тр. М., 1966. Т. II. С. 531.
34. Петров А. З. Новые методы в общей теории относительности. М., 1966. С. 319.
35. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гостехиздат, 1961. 563 с.
36. Эйнштейн А. // Собр. науч. тр. М., 1966. Т. II. С. 854.
37. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 2: Теория поля. М.: Наука, 1988. 509 с.
38. Niida E. K., Yamaguchi Y. // Progr. Theor. Phys. Suppl. 1965. Extra number. P. 261–297.
39. Goldhaber A. S., Nieto M. M. // Phys. Rev. D. 1974. V. 9. P. 1119–1121.
40. Caldwell R. R., Kamionkowski M., Weinberg N. N. // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 91, No. 7. P. 071301.
41. Чернин А. Д. // УФН. 2001. Т. 171, № 11. С. 1153–1175.
42. Tonry J. L. et al. // Astrophys. J. 2003. V. 594. P. 1–24.
43. Riess A. G. et al. // Astrophys. J. 2004. V. 607. P. 665–687.
44. Сахаров А. Д. Науч. тр. М.: Центрком, 1995. 524 с.
45. Аман Э. Г., Марков М. А. // ТМФ. 1984. Т. 58. С. 163–168;
Aman J. M., Markov M. A. // Ann. Phys. 1984. V. 155. P. 333–357.
46. Tolman R. C. Relativity, Thermodynamics and Cosmology. Oxford: Clarendon Press, 1934. 516 p.
47. Лоскутов Ю. М. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. «Физ. астрон.». 2003. № 6. С. 3–11.
48. Steinhardt P. J., Turok N. hep-th/0111030. 2002. V. 2. 16 p.